

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/368662945>

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ІНСТИТУТ ІННОВАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗМІСТУ ОСВІТИ ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКА Т....

Book · February 2023

CITATIONS

0

READS

45

5 authors, including:



[D.V. Gretskih](#)

Kharkiv National University of Radio Electronics

30 PUBLICATIONS 78 CITATIONS

SEE PROFILE

ЧАСТИНА 1

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ

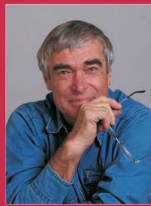
В.М. Шокало
В.І. Правда
В.А. Усін
В.С. Вунтесмері
Д.В. Грецьких



ШОКАЛО
Володимир Михайлович
Закінчив Харківський інститут радіоелектроніки. Доктор технічних наук. Завідувач кафедри основ радіотехніки, професор.



ПРАВДА
Володимир Іванович
Закінчив Київський політехнічний інститут. Завідувач кафедри радіотехнічних пристроїв та систем НТУУ „КПІ”, професор, заслужений працівник народної освіти України.



УСІН
Володимир Ананійович
Закінчив Харківську військову інженерну радіотехнічну академію. Доктор технічних наук. Професор кафедри основ радіотехніки.



ВУНТЕСМЕРІ
Володимир Семенович
Закінчив Київський політехнічний інститут. Кандидат технічних наук. Доцент кафедри теоретичних основ радіотехніки НТУУ „КПІ”.



ГРЕЦЬКИХ
Дмитро Вячеславович
Закінчив Харківський державний технічний університет радіоелектроніки. Кандидат технічних наук. Доцент кафедри основ радіотехніки ХНУРЕ.



ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ

ПІДРУЧНИК



Максвелл Джеймс Клерк
(1831 – 1879)

- Основні рівняння електромагнітного поля
- Основні принципи і теореми електродинаміки
- Статичні, стаціонарні та квазістаціонарні поля
- Поширення плоских хвиль
- Явища відбиття і заломлення електромагнітних хвиль

ЧАСТИНА 1

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ІННОВАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗМІСТУ ОСВІТИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

В.М. Шокало, В.І. Правда, В.А. Усін,
В.С. Вунтесмері, Д.В. Грецьких

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ

Частина 1

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом «Радіотехніка»

Харків
Колегіум
2009

УДК 537.8
ББК 22.313
Е 50

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист від 02.12.2008 р. № 1.4/18-Г-2462)*

Рецензенти:

Єрмаков Г.В., д-р техн. наук, професор, начальник кафедри озброєння військ ППО Сухопутних військ факультету ППО Сухопутних військ
Гімтілевич Ю.Б., д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри радіотехніки Севастопольського національного технічного університету

Шокало В.М., Правда В.І., Усін В.А., Вунтесмері В.С., Грецьких Д.В.
Е 50 Електродинаміка та поширення радіохвиль. Ч.1. Основи теорії електромагнітного поля: Підручник для студентів ВНЗ / За заг. ред. В.М. Шокало та В.І. Правди. Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2009. 286 с.

ISBN 978-966-8604-56-0

Підручник складається з двох частин. У першій частині «Основи теорії електромагнітного поля» детально викладено фундаментальні положення макроскопічної електродинаміки: рівняння електромагнітного поля; теореми та принципи електродинаміки; розглянуто властивості статичних, стаціонарних і квазістаціонарних полів. Особливу увагу приділено поширенню плоских електромагнітних хвиль у нескінченному однорідному середовищі (ізотропному, анізотропному) і ефектам, що виникають при падінні електромагнітних хвиль на пласку границю розподілу двох середовищ.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за радіотехнічними та радіофізичними спеціальностями, аспірантів та наукових співробітників.

ББК 22.313

ISBN 978-966-8604-56-0

© В.М. Шокало, В.І. Правда,
В.А. Усін, В.С. Вунтесмері,
Д.В. Грецьких, 2009.
© Харківський національний
університет радіоелектроніки, 2009.
© Колегіум, 2009.

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ВВЧ – вкрай високі частоти;

ЕМЕ – електромагнітна енергія;

ЕМП – електромагнітне поле;

ЕМХ – електромагнітна хвиля;

ЕРС – електрорушійна сила;

НВЧ – надвисокі частоти;

ПЕМХ – пласка електромагнітна хвиля;

УВЧ – ультрависокі частоти;

j – уявна одиниця ($j^2 = -1$);

$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ – одиничні орти прямокутної,

циліндричної та сферичної систем координат відповідно;

\mathbf{E} – вектор напруженості електричного поля, V/m ;

\mathbf{D} – вектор електричного зміщення (електричної індукції), $Kл/m^2$;

\mathbf{H} – вектор напруженості магнітного поля, A/m ;

\mathbf{V} – вектор магнітної індукції, $Вб/m^2$, $Tл$;

\mathbf{j} – вектор об'ємної густини струму, A/m^2 ;

\mathbf{j}_s – вектор густини поверхневого струму, A/m ;

\mathbf{P} – вектор поляризації (поляризованості), $Kл/m^2$;

\mathcal{E} – електрорушійна сила, V ;

q, Q – електричний заряд, $Kл$;

ρ – об'ємна густина електричного заряду, $Kл/m^3$;

ρ_s – поверхнева густина електричного заряду, $Kл/m^2$;

ρ_l – лінійна густина електричного заряду, $Kл/m$;

ϵ_a – абсолютна діелектрична проникність, Φ/m ;

ϵ – відносна діелектрична проникність;

ϵ_0 – абсолютна діелектрична проникність вакууму (електрична стала),

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \Phi/m;$$

$\dot{\epsilon}$ – комплексна діелектрична проникність;

μ_a – абсолютна магнітна проникність, $Gн/m$;

μ – відносна магнітна проникність;

μ_0 – абсолютна магнітна проникність вакууму (магнітна стала),

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$\dot{\mu}$ – комплексна магнітна проникність;

σ – питома провідність, См/м ;

$\mathbf{\Pi}$ – вектор Пойнтінга, Вт/м^2 ;

P – потужність, Вт ;

δ – кут діелектричних втрат;

I – сила постійного струму, А ;

$\dot{\mathbf{k}}$ – комплексне хвильове число, $1/\text{м}$;

γ – стала поширення, $1/\text{м}$;

β – коефіцієнт фази, $1/\text{м}$;

α – коефіцієнт загасання, $1/\text{м}$;

ω – колова частота, $1/\text{с}$;

λ – довжина хвилі, м ;

f – частота, Гц ;

T – період коливань, с ;

c – швидкість світла у вакуумі, $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$;

Z_c – характеристичний опір середовища, Ом ;

$\dot{R}_\perp, \dot{R}_\parallel$ – коефіцієнти відбиття;

$\dot{T}_\perp, \dot{T}_\parallel$ – коефіцієнти проходження;

Δ – глибина проникнення поля у середовище, м .

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Амплітуди комплексні векторів поля 57
- Антиферромагнетик 208
- Біфуркація 233
- Вектор електричного зміщення 22, 24
- магнітної індукції 16, 22
 - намагніченості 26
 - напруженості поля електричного 15
 - – – сторонніх сил 61
 - – поля магнітного 61
 - поляризації (поляризованості) 24
- Відбиття повне 246
- Відношення гіромагнітне електрона 204
- Гаусса закон 42
- Герца вектор 116
- Глибина проникнення поля в середовище 190, 253
- Гранична умова Леонтовича – Щукіна 254
- Густина заряду лінійна 20
- – поверхнева 20
 - – об'ємна 20
 - електричного струму 21
 - струму зміщення 38
 - – стороннього 61
 - – поверхнева 21
- Джерела еквівалентні вторинні 110
- Дисперсія 187
- Добротність системи 90
- Довжина хвилі 178
- Електрична стала 24
- Електрорушійна сила 18
- Ефект діамагнітний 29
- Доплера 260
 - Коттона – Мутона (Фохта) 225
- Ємність провідників власна 138
- – взаємна 138
- Задачі електродинаміки зворотні (синтезу) 92
- – прямі (аналізу) 92
 - – внутрішні 92
 - – зовнішні 92
- Закон електромагнітної індукції 28, 40
- Закон збереження електричного заряду 13, 50
- Біо – Савара – Лапласа 16
 - Кулона 14, 42
 - Ома 18, 155
- Заряд електричний 19
- зв'язаний 23
- Загасання пласкої хвилі 183
- Захист електростатичний 141
- магнітостатичний 151
- Зоммерфельда умова (див. умова випромінювання)
- Індуктивність 165

– взаємна 166
Інтерференція електромагніт-
них хвиль 257

Калібрування потенціалів 114
Коефіцієнт відбиття 239, 244
– поширення 186
– у добре провідному
середовищі 189
– проходження 239, 244
– фази 183
Конденсатор 139
Кут Брюстера (повного
заломлення) 245
– відбиття 239
– критичний 246
– діелектричних втрат 58
– заломлення 239
– падіння 239

Лапласа оператор 174, 278
Лінії силові 31
Лоренца лема 100, 101
– сила 18

Магнітна стала 27
Максвелла система рівнянь
інтегральна форма 36
– – – диференційна форма 48
– – – для електростатики 123
– – – для комплексних
амплітуд 58
– – – для магнітостатики 149
– – – для стаціонарних
полів 149

Момент диполя електрич-
ного 23, 133
– магнітного 162

Опір характеристичний 182

Плазма електронна 201
Площина падіння хвилі 236
Поверхневий імпеданс 255
Повне внутрішнє відбиття 245
Пойнтінга вектор 77
– комплексний 87
Показник заломлення 238
Поле диполя електричного 134
– магнітного 162
– безвихрове 125
– вихрове 155
Поля статичні 52
– стаціонарні 53
– квазістаціонарні 54
– швидкозмінні 54
Поляризація діелектрика 24
– електромагнітних хвиль 191
– – – нормальна 240
– – – паралельна 240
– еліптична 196
– колова 134
– лінійна 122
Потенціал векторний 113
– скалярний 113
– електростатичний 123
– запізнювальний 120
– магнітний 149
– магнітостатичний 150
Потік магнітний 18
Прецесія намагніченості 20
Принцип Гюйгенса –
Френеля 108
– еквівалентності 110
– суперпозиції 93
– переставної двоїстості 106
Провідність питома 28
Проникність діелектрична 24

- абсолютна 25
- вакууму (електрична стала) 24
- відносна 25
- комплексна 58
- магнітна 27
- абсолютна 27
- вакууму (магнітна стала) 27
- відносна 27
- Резонанс 89
- феромагнітний 211
- циклотронний 207
- Рівняння неперервності ліній струму 50
- Гельмгольца 115
- Даламбера неоднорідне 111
- однорідне 112
- диференційне силових ліній 31
- Лапласа 124
- матеріальні 27, 44
- Пуассона 118, 123
- хвильове векторне неоднорідне 111
- однорідне 112
- Різниця потенціалів 126
- Середовище анізотропне 32
- бі-анізотропне 233
- бі-ізотропне 231
- гіроелектричне 217
- гіромагнітне 217
- гіротропне 216
- диспергуюче 33
- ізотропне 31
- нелінійне 33
- неоднорідне 31
- нестационарне 33
- Снелліуса закони 238
- Сприйнятливість діелектрична 24
- магнітна 27
- Стокса формула 47
- Струм електричний 20
- поверхневий 22
- повний 38
- провідності 37
- зміщення 38
- магнітний 104
- сторонній 61
- Тензор відносної діелектричної проникності 32
- комплексної діелектричної проникності 207
- комплексної магнітної проникності 211
- Полдера 211
- Теорема взаємності 102
- єдності 96, 98
- Остроградського – Гаусса 45
- Пойнтінга 77
- Стокса 47
- Теорія близькодії 10
- дальності 10
- Умови граничні (повна система) 67
- випромінювання 100
- макроскопічності 35
- Фарадея ефект 217
- стала 221
- Феромагнетик 208
- Хвильова поверхня

(фронт хвилі) 171
Хвиля біжуча 178, 257
– геліконова 220
– звичайна 222
– незвичайна 222
– пласка 180
– поверхнева 249
– спінова 229
– стояча 179
– типу E 222, 260
– типу H 258
– типу T 182, 222
Хвильове число 174, 183

Час релаксації 51
Частота гранична 59
Частота критична
– ленгмюрівська (плаз-
мова) 202
– релаксації 210
– розсіювання 202
– намагнічування 210
– феромагнітного резонансу
(кутова частота прецесії) 209
– циклотронна 204
Швидкість фазова 178

ПЕРЕДМОВА

Запропонована книга написана на основі викладання авторами питань електродинаміки та поширення радіохвиль на радіотехнічних факультетах Київського політехнічного інституту, Харківського національного університету радіоелектроніки, Харківського університету Повітряних Сил. Курс «Електродинаміка та поширення радіохвиль» належить до числа базових дисциплін, що є основою підготовки спеціалістів в області радіотехніки.

При вивченні дисципліни передбачається, що студенти ознайомилися в курсі «Вища математика» з розділом «Елементи теорії векторних полів», а в курсі «Фізика» – розділами «Електромагнетизм», «Оптика».

Підручник складається з двох частин:

Ч.1. «Основи теорії електромагнітного поля» та Ч.2. «Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль».

Матеріал підручника побудований таким чином, що після засвоєння основних положень теорії поля (частина 1) вивчення розділів другої частини підручника можна проводити практично незалежно.

Наявність чисельного ілюстративного матеріалу, значної кількості прикладів (особливо у перших розділах), а також завдань для самостійного розв'язку та питань для самоперевірки мають сприяти результативному засвоєнню питань, що розглядаються.

Методика викладення матеріалу дозволить студентам різного рівня підготовки послідовно і порівняно просто освоювати не тільки теоретичні питання, але і на конкретних прикладах опанувати сучасні методи аналізу і розрахунку характеристик електромагнітних полів у різних елементах і вузлах радіотехнічних систем та вільному просторі.

До переліку рекомендованої літератури включені як основна, так і додаткова література до окремих розділів.

Автори щиро вдячні рецензентам підручника – професорам Ю.Б. Гімпілевичу (Севастопольський національний технічний університет) і Г.В. Єрмакову (Харківський університет Повітряних Сил), конструктивні і критичні зауваження яких сприяли суттєвому удосконаленню рукопису, а також Стрельцовій Р.І. за допомогу при підготовці підручника до друку.

ВСТУП

Безліч явищ світу, що нас оточує, пов'язані з електромагнітними процесами. Людство давно зіткнулось з електрикою та магнетизмом, але лише праці останніх півтора століть дали змогу створити чітку наукову теорію електромагнітних явищ.

Електромагнітне поле – особливий вид матерії, що має хвильові та корпускулярні властивості, виявляється в електричних і магнітних явищах. Всі процеси, що відбуваються в електромагнітному полі, підлягають основним законам природи: закону збереження і перетворення маси, закону збереження і перетворення енергії, закону відповідності та взаємозв'язку маси і енергії. Електромагнітне поле збуджується системою рухомих зарядів, але може існувати самостійно, не будучи пов'язаним з системою зарядів у формі електромагнітної хвилі, що поширюється у просторі.

Зробимо короткий історичний огляд розвитку теорії електричних і магнітних явищ.

До XIX століття в науці панувала теорія «далекодії». Всі електромагнітні явища зводились до миттєвої взаємодії зарядів на відстані. Поняття поля грало допоміжну роль і його, при бажанні, можна було не використовувати. Теорія далекодії базувалась на законі Кулона для електричних зарядів (1785) і виходила з припущення, що один заряд діє на другий миттєво без участі в цьому процесі будь-якого матеріального середовища.

На початку XIX ст. М. Фарадей висунув теорію «близькодії», відповідно до якої всі електромагнітні явища полягають в змінах (збудженнях) поля, які, виникаючи на даній ділянці, безпосередньо впливають лише на суміжні з ним ділянки.

Будь-яке електромагнітне збудження поступово передається від точки до точки і поширюється з кінцевою швидкістю. Але ця теорія пояснювала електромагнітні явища деформацією та вихровим рухом всепроникного середовища – ефіру.

Дослідження М. Фарадея поклали початок теорії електромагнітного поля і закінчились винайденням явища і формулюванням закону електромагнітної індукції (1831), який був перевірений Е.Х. Ленцем (1804 – 1865).

В другій половині XIX ст. теорія електромагнітного поля швидко розвивається, встановлюється єдність електромагнітних і магнітних

явищ і з'ясовуються міцні зв'язки між явищами електромагнітними і оптичними.

В роботі «Трактат по електричеству и магнетизму» (1873) Дж. К. Максвелл надав математичну форму фізичним ідеям Фарадея, узагальнивши закони електромагнетизму в системі рівнянь (рівняння Максвелла). Це дозволило пояснити відомі на той час явища і передбачити ряд нових явищ.

Згідно з теорією Максвелла, будь-які зміни електричного поля збуджують магнітне поле і навпаки. Теорія Максвелла до цього часу є основою теорії електромагнітного поля.

В 1887 р. англійський фізик Пойнтінг встановив залежність вектора густини потоку електромагнітної потужності від напруженості електричного й магнітного полів.

В 1886 – 1888 рр. досліди Г. Герца з випромінювання, поширення, відбиття та заломлення електромагнітних хвиль експериментально підтвердили теоретичні положення, сформульовані Максвеллом.

О.С. Попов (1859 – 1905) в 1895 р. продемонстрував передачу азбуки Морзе без проводів, поклавши початок практичному використанню теорії електромагнітного поля. П.Н. Лебедев (1866 – 1912) в 1899 р. експериментально показав, що існує тиск світла на тверді тіла. Цим було доведено існування маси і кількості руху у вільно поширюваній електромагнітній хвилі.

Теорія електромагнітного поля, окрім загальнотеоретичного і пізнавального значення, перетворилась в теоретичну основу цілого ряду важливих галузей техніки, широко використовуваних в багатьох сферах людської діяльності (в першу чергу в радіотехніці).

В одних випадках аналіз експериментального матеріалу безпосередньо підказує формулювання фізичного закону (наприклад, закон Кулона). В інших – для формулювання загального фізичного закону (теорії), узагальнюючого випадкові фізичні явища, необхідна була геніальна здогадка. Останнє стосується рівнянь Максвелла, які не можуть бути отримані як узагальнення фізичних експериментів або як результат аналізу інших фізичних співвідношень.

Справедливість системи рівнянь Максвелла, які являють собою основу теоретичних положень радіотехніки, не викликають сумніву. Ця теорія пройшла багаторічну перевірку на практиці.

Приступимо до систематичного викладення основ теорії електромагнітного поля.

1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

У даному розділі за допомогою індуктивного методу дослідження розглянуто основні експериментальні факти, що лежать в основі законів електродинаміки, сформульовано і проаналізовано основні рівняння теорії електромагнітного поля.

1.1. Електромагнітне поле і його основні характеристики. Електромагнітні властивості середовищ

Дамо декілька визначень.

Електромагнітне поле – це особлива форма (вид) матерії, що відрізняється неперервним розподілом в просторі (електромагнітні хвилі) і виявляє дискретність структури (фотони). ЕМП характеризується здатністю поширюватися у вакуумі (за відсутності сильних гравітаційних полів) із швидкістю $2,99792458 \cdot 10^8$ м/с і справляє на заряджені частинки силову дію, залежну від їх швидкості.

Електричне поле – одна з двох сторін електромагнітного поля, зумовлена електричними зарядами і зміною магнітного поля, яка проявляє силову дію на заряджені тіла і частинки.

Магнітне поле – інша сторона електромагнітного поля, зумовлена рухомими електричними зарядами і зміною електричного поля. Магнітне поле проявляє себе за силовою дією на рухомі заряджені частинки, спрямованою нормально щодо напрямку руху цих частинок. Разом з тим уявлення про електромагнітне поле як про просте поєднання в деякій просторовій області електричного і магнітного поля невірне.

Об'єктивно існуючою фізичною реальністю є єдине електромагнітне поле як нерозривна сукупність електричного і магнітного полів. Та чи інша сторона ЕМП проявляється залежно від умов експерименту. Так, якщо електричний заряд щодо точки спостереження нерухомий, то він збуджує електричне поле. Спостерігач, який знаходиться в рухомій системі координат щодо нерухомого заряду, фіксуватиме наявність електричного струму, а отже, і наявність магнітного поля. Можна дійти аналогічних міркувань, якщо замість нерухомого заряду розглядати поле нерухомого постійного магніту.

ЕМП, як і інші види матерії, має масу і енергію. Наявність інертної маси в електромагнітному полі експериментально довів російський

фізик П.Н.Лебедєв¹, який в 1899 р. виміряв тиск світла (електромагнітних хвиль) на тверді тіла. Маса ЕМП m пов'язана з його енергією W законом А. Ейнштейна $m = W/c^2$. Оскільки швидкість світла c досить велика, то маса m мала, проте не рівна нулю. ЕМП має гравітаційну масу, і траєкторія хвилі скривлюється в гравітаційному полі, що довів в 1919 р. англійський астроном А. Еддінгтон.

Наявність маси, густини енергії і імпульсу, здатність перетворюватися в інші види енергії свідчать про матеріальність електромагнітного поля.

Електродинаміка – теорія електромагнітного поля – виникла на основі аналізу і узагальнення багатьох експериментальних фактів. Наведемо відомі експериментальні результати, що лежать в основі законів електродинаміки.

1.1.1. Аналіз основних дослідних фактів

Закон збереження електричного заряду. Сукупність дослідних даних про електричні заряди дозволяє сформулювати наступні основні положення.

1. Заряди бувають двох видів. Одні заряди умовилися називати позитивними, інші – негативними.

2. Однойменні заряди відштовхуються, різнойменні – притягуються.

3. Найменший в природі елементарний заряд $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл (кулон), носієм якого є частинки, з яких складаються тіла, – електрони (негативний заряд) і протони (позитивний заряд).

4. Тіла, які не беруть участь в електричній взаємодії, називаються нейтральними і мають однакове число позитивних і негативних частинок.

5. Справедливий один з фундаментальних законів фізики – **закон збереження електричного заряду**. На підставі експериментів встановлено, що повний заряд Q , розміщений в деякому об'ємі V , охопленому поверхнею S , може змінитися лише в тому випадку, якщо заряди q_i перетинають поверхню S . Позначивши повний заряд системи

¹ Короткі біографічні дані вчених, які внесли істотний внесок у розвиток теорії електромагнітного поля, наведені в додатку А.

$Q = \sum_{i \in V} q_i$ і вводячи силу електричного струму I , рівну кількості електрики, що виходить з об'єму V в одиницю часу, закон збереження заряду можна записати у вигляді

$$\frac{dQ}{dt} = -I. \quad (1.1)$$

Розмірність струму відповідно до (1.1) $[I] = Кл/с = А$ (ампер).

Закон Кулона для електричних зарядів. Цей закон був встановлений в 1785 р. французьким вченим *Ш. Кулоном* в результаті прямих дослідів.

Закон Кулона визначає силу \mathbf{F}_{12} взаємодії двох точкових нерухомих електричних зарядів q_1 і q_2 , що знаходяться на деякій відстані r один від одного в точках \mathbf{r}_1 і \mathbf{r}_2 відповідно. Сила, що діє на перший заряд з боку другого, має вигляд

$$\mathbf{F}_{12} = k_1 q_1 q_2 \mathbf{r} / r^3, \quad (1.2)$$

де $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r \equiv |\mathbf{r}|$; k_1 – коефіцієнт, залежний від вибору системи одиниць і середовища, в якому розглядається взаємодія зарядів.

З (1.2) виходить, що сила взаємодії спрямована по прямій, яка сполучає заряди (рис. 1.1), тобто є центральною.

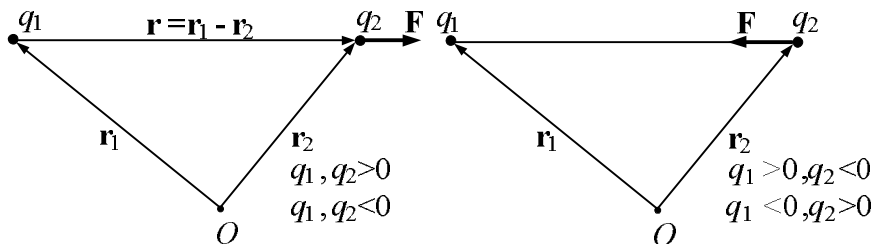


Рис. 1.1

У системі СІ (SI – System International), основні одиниці якої метр, кілограм, секунда, ампер, коефіцієнт k_1 для повітря (яке за своїми електричними властивостями близьке до вакууму) дорівнює

$$k_1 = \frac{1}{4\pi} \varepsilon_0, \text{ де } \varepsilon_0 - \text{ електрична стала, } \varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м (фарада на метр).}$$

Закон Кулона (1.2) дозволяє ввести поняття **напруженості електричного поля \mathbf{E}** . Це – **векторна фізична величина, що дорівнює силі, з якою електричне поле діє на точковий одиничний позитивний заряд**. Відповідно до визначення (1.2) між напруженістю поля \mathbf{E} і силою \mathbf{F}_{12} , з якою електричне поле діє на заряд довільної величини q , існує простий зв'язок

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{q}. \quad (1.3)$$

Розмірність напруженості електричного поля $[E] = H/Кл = V/м$ (вольт на метр).

Взаємодія магнітів і струмів. Основні властивості магнітів були досліджені в XVII столітті англійським вченим *В. Гільбертом*, який зазначив, зокрема, дві основні властивості магнітів.

1. Кожен магніт має два полюси – позитивний (північний) і негативний (південний), причому однойменні полюси відштовхуються, а різнойменні притягуються.

2. Неможливо одержати магніт з одним полюсом.

Кількісний ступінь взаємодії магнітних полюсів встановив Кулон (1785) одночасно із законом (1.2). За формою ці закони однакові. Так, якщо розглянути дві довгі намагнічені спиці (рис. 1.2) і знехтувати впливом дальніх полюсів ($-m_1$ і $-m_2$ на рис. 1.2), то сила взаємодії полюсів m_1 і m_2 описується співвідношенням

$$\mathbf{F}_{12}^M = k_2 m_1 m_2 \mathbf{r}/r^3, \quad (1.4)$$

де m_1 , m_2 – магнітні маси (заряди) полюсів, k_2 – коефіцієнт, що залежить від системи одиниць і середовища, в якому взаємодіють маси m_1 і m_2 .

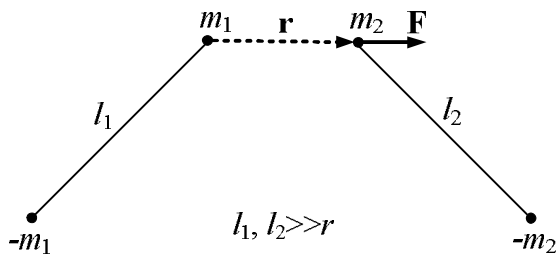


Рис. 1.2

За аналогією із законом (1.2) можна ввести векторне поле, яке характеризує силову дію магнітних мас. Це – **поле магнітної індукції \mathbf{B}** . Назва «магнітна індукція» склалася історично, доцільно було б (для повної аналогії) силову дію магнітного поля також характеризувати полем напруженості. Проте співвідношеннями (1.2) і (1.4) аналогія між електричними і магнітними взаємодіями закінчується. Істотна відмінність між ними, відмічена Гільбертом, полягає в тому, що позитивні і негативні магнітні «заряди» не можна відокремити один від одного – на відміну від електричних. Так, при розподілі магніту на дві частини в кожній з них з'являються полюси різних знаків (рис. 1.3). Цю властивість можна пояснити, якщо вважати, що кожна молекула речовини є елементарним магнітом з магнітними зарядами полюсів $\pm m_i$, тому сумарний магнітний заряд речовини в будь-якому об'ємі V дорівнює нулю $\sum_{i \in V} m_i = 0$, а самі молекули речовини орієнтовані в магніті в певному порядку.

Г. Ерстед в 1820 році відкрив магнітну дію електричних струмів (рис. 1.4). У дослідах Ерстеда магнітна стрілка встановлюється перпендикулярно проводу із струмом. Це дозволило в 1820 році сформулювати закон *Біо – Савара – Лапласа*, який визначає магнітну індукцію елемента струму $I d\mathbf{l}$ (рис. 1.5)

$$d\mathbf{B} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}] \frac{1}{r^3}.$$

При цьому всі дослідники виходили з невірної уявлення про те, що провідник із струмом сам стає магнітом і проявляє магнітну дію.

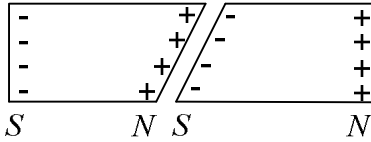


Рис. 1.3

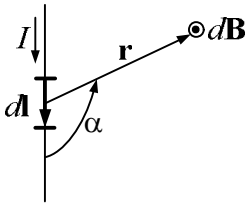


Рис. 1.5

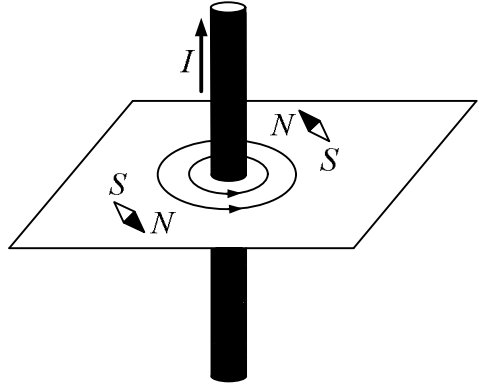


Рис. 1.4

Досліди *М. Фарадея* (1821), *Х. Ерстеда* і *А. Ампера* виявили силу дію магнітного поля на струм. Так, сила, що діє в магнітному полі \mathbf{B} на елемент $d\mathbf{l}$ проводу зі струмом I , визначається як

$$\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (1.5)$$

Співвідношення (1.5) не можна пояснити, використовуючи поняття магнітних зарядів, розподілених вздовж $d\mathbf{l}$, оскільки сила \mathbf{F} , що діє на них, відповідно до (1.4), має бути спрямована вздовж \mathbf{B} , що суперечить співвідношенню (1.5).

Ампер припустив, що магніт еквівалентний системі замкнених струмів (гіпотеза молекулярних струмів Ампера). На його думку, магнітні заряди не існують, а єдиним джерелом магнітного поля є електричний струм.

Знайдемо силу, що діє на один заряд. Струм I в (1.5) $I = qn\upsilon S = JS$. Тут q – величина заряду; n – число зарядів в одиниці об'єму (розмірність m^{-3}), що перетинають одиницю площі за одиницю часу; υ – швидкість зарядів; J – густина струму (розмірність A/m^2); S – площа поперечного перетину провідника. Величина $S \cdot dl \cdot n = N$ – число зарядів, що рухаються у всьому об'ємі провідника завдовжки dl . На один заряд, відповідно до (1.5), діє сила

$$\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (1.6)$$

У системі СІ величину \mathbf{B} виражають в теслах (Тл) і відповідно до (1.6) $[B] = H \cdot c / (Kл \cdot м) = Тл$.

Для заряду масою m , що рухається одночасно в електричному і магнітному полі, рівняння руху з урахуванням (1.3), (1.6) можна записати у вигляді

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]). \quad (1.7)$$

Сила \mathbf{F} називається силою *Лоренца*, \mathbf{a} – прискорення заряду.

Закон електромагнітної індукції Фарадея. У 1831 р. *М. Фарадей* сформулював закон електромагнітної індукції, який полягає в тому, що при будь-якому перетині провідником магнітних силових ліній в провіднику виникає індукційний струм, пропорційний кількості пересічених силових ліній і обернено пропорційний електричному опору провідника. *Д.К. Максвелл* скористався відкритим в 1827 р. законом *Г. Ома*, відповідно до якого опір R контура виражається через силу струму I і електрорушійну силу (ЕРС) \mathcal{E} , яка дорівнює роботі, що здійснюється над одиничним зарядом при обході ним замкненого контура,

$$R = \mathcal{E} / I. \quad (1.8)$$

Д. К. Максвелл ввів пов'язаний із замкненим контуром L магнітний потік

$$\Phi = \int_S (\mathbf{B} \mathbf{e}_n) dS, \quad (1.9)$$

що дозволило записати закон електромагнітної індукції у вигляді

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.10)$$

У співвідношеннях (1.9), (1.10); S – поверхня, що спирається на контур L ; \mathbf{e}_n – орт нормалі до елемента поверхні dS (рис. 1.6); \mathcal{E} – ЕРС, що виникає в контурі L .

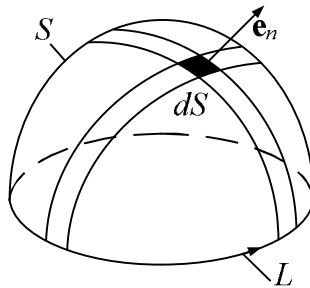


Рис. 1.6

Знак мінус у співвідношенні (1.10) відображує правило *Ленца*, яке визначає напрям індукційного струму або ЕРС індукції \mathcal{E} . Відповідно до (1.10) індукційний струм спрямований так, що протидіє причині, яка викликала його. Інакше кажучи, магнітний потік індукційного струму спрямований таким чином, що прагне компенсувати зміну потоку зовнішнього магнітного поля.

Викладені експериментальні результати лежать в основі електродинаміки, закони якої узагальнив і сформулював Д.К. Максвелл в роботі «Трактат по електричеству и магнетизму» (1873).

Перейдемо до систематичного викладу макроскопічної теорії електромагнітного поля.

1.1.2. Джерела і вектори електромагнітного поля

Джерелами електромагнітного поля є заряди. Нерухомі заряди збуджують в середовищі електричне поле, рухомі заряди (струми) збуджують як електричне, так і магнітне поле. У свою чергу електричне поле, що змінюється в часі, збуджує магнітне поле і навпаки.

Для кількісної характеристики джерел ЕМП вводяться наступні величини:

- електричний заряд $q(Q)$;
- електричний струм I .

Електричний заряд – це скалярна фізична величина, що дорівнює кількості елементарних зарядів в деякому об'ємі, або перенесених через деякий перетин провідника.

Електричний заряд q в тілах або по їхній поверхні може розподілятися нерівномірно, і для опису законів розподілу заряду вводяться наступні поняття:

- **об'ємної густини заряду** ρ в точці $M(x, y, z)$

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \text{ Кл/м}^3, \quad (1.11)$$

де dq – заряд елементарного об'єму dV в точці M ;

- **поверхневої густини заряду** ρ_s на поверхні S

$$\rho_s = \frac{dq}{dS}, \text{ Кл/м}^2, \quad (1.12)$$

- **лінійної густини заряду** ρ_l , розподіленого уздовж лінії (тонкої нитки) l ,

$$\rho_l = \frac{dq}{dl}, \text{ Кл/м}. \quad (1.13)$$

Повний заряд об'єму V , поверхні S і нитки l відповідно становить:

$$q = \int_V dq = \int_V \rho dV; \quad q = \int_S \rho_s dS; \quad q = \int_l \rho_l dl.$$

Відзначимо, що поверхневі і лінійні заряди реально не існують, а їх введення полегшує розрахунок полів у випадку розподілу зарядів в тонкому шарі поблизу поверхні або в тонкому провіднику (наприклад, провідової антени).

Крім того, в п. 1.1.1 були введені поняття **точкового заряду** – довільного заряду з розмірами, набагато меншими відстаней, на яких розглядається збуджуване поле, і пробного заряду. Під останнім розуміють точковий заряд, що не збурює досліджуване поле. Зазначимо, що поняття точкового заряду еквівалентне поняттю матеріальної точки в механіці і є зручною ідеалізацією при розв'язанні електродинамічних задач.

Струм I або сила струму – скалярна величина, яка характеризує кількість електрики, що переноситься за одиницю часу через поперечний перетин провідника. Наведемо визначення одиниці струму.

1 А (ампер) – сила постійного струму, що підтримується в двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і нехтовно малого кругового перетину, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, який викликав би між цими провідниками силу, що дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ одиниці сили 1 Н на 1 м довжини.

Ця величина прийнята (окрім метра, кілограма і секунди) четвертою основною одиницею в системі одиниць СІ (або МКСА).

Вектор густини електричного струму \mathbf{J} описує рух зарядів в кожній точці перетину S провідника:

$$\mathbf{J}(M, t) = \rho(M, t) \mathbf{v}(M, t), \quad \text{Кл/м}^2 \cdot \text{с} = \text{А/м}^2, \quad (1.14)$$

де \mathbf{v} – швидкість руху зарядів в об'ємі dV .

Вектор густини струму \mathbf{J} дотичний до лінії струму, тобто до вектора \mathbf{v} в кожній точці M , і спрямований у бік руху позитивних зарядів, а його величина дорівнює кількості електрики, що проходить за одиницю часу через одиничну площину, орієнтовану нормально до вектора \mathbf{J} . Сила струму, що проходить через перетин S провідника, очевидно дорівнює потоку вектора \mathbf{J} через S :

$$I(t) = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \mathbf{e}_n dS, \quad (1.15)$$

де \mathbf{e}_n – орт нормалі до одиничної площини dS (рис. 1.6), пов'язаний з правилом обходу елемента dS правилом правого гвинта.

В деяких випадках струм зосереджений в тонкому шарі на поверхні тіла (наприклад, змінний струм надвисоких частот в стінках металевих хвилеводів, поверхневий струм витoku в діелектриках і ін.). Тоді можна вважати (для ідеалізованої ситуації), що струм проходить в нескінченно тонкому поверхневому шарі – поверхневий струм I_s . Аналогічно вектору \mathbf{J} можна ввести **вектор лінійної густини поверхневих струмів** – \mathbf{J}_s . Це – фізична векторна величина, вектор якої спрямований у бік руху позитивних зарядів, а його величина рівна кількості електрики, що переноситься за одиницю часу через відрізок лінії одиничної довжини, перпендикулярний вектору \mathbf{J}_s :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{e}_\tau \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}, A/m, \quad (1.16)$$

де \mathbf{e}_τ – одиничний вектор, який вказує напрям руху позитивних зарядів; Δl – відрізок лінії, перпендикулярної вектору \mathbf{e}_τ ; ΔI – величина струму, що проходить через відрізок Δl .

Поверхневий струм, що проходить через довільний відрізок лінії l , можна обчислити за формулою

$$I_s = \int_l (\mathbf{J}_s \mathbf{e}_l) dl, \quad (1.17)$$

де \mathbf{e}_l – орт, перпендикулярний до dl , лежить на поверхні тіла (рис. 1.7).

Отже, заряди і струми збуджують у просторі електромагнітне поле. Воно виявляється в силевій дії на матеріальні об'єкти, яку можна зареєструвати. Для опису електромагнітного поля вводять чотири векторні величини:

- **напруженості електричного поля – \mathbf{E} ;**
- **магнітної індукції – \mathbf{B} ;**
- **електричного зміщення – \mathbf{D} ;**
- **напруженості магнітного поля – \mathbf{H} .**

Вектор напруженості електричного поля \mathbf{E} кількісно описує силеву дію на заряди з боку електричного поля.

Як зазначено в п. 1.1.1, величина вектора \mathbf{E} в кожній точці M збігається з питомою електричною силою \mathbf{F}_e , тобто силою, що припадає на одиничний позитивний пробний заряд, розміщений в точці M : $\mathbf{E} = \mathbf{F}_e/q$. Це диференційна характеристика поля.

Магнітна індукція \mathbf{B} описує силеву дію магнітного поля на електричні заряди. Відповідно до (1.6) цей вектор чисельно дорівнює силі, з якою магнітне поле діє на одиничний точковий позитивний заряд, що рухається з одиничною швидкістю в напрямку, перпендикулярному напрямку магнітного поля: $\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ (рис. 1.8).

У вакуумі вектори \mathbf{E} і \mathbf{B} повністю визначають електромагнітне поле. Для опису ЕМП в реальних середовищах вводять два додаткових вектори \mathbf{D} і \mathbf{H} . Це зумовлено тим, що сила електричної взаємодії одних і тих самих зарядів у вакуумі і в реальних середовищах різна, отже, різна і напруженість поля, яку збуджують однакові заряди в різних речовинах.

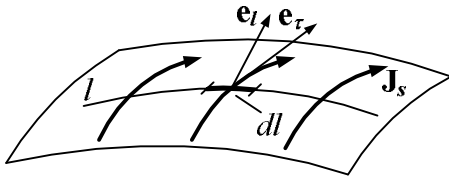


Рис. 1.7

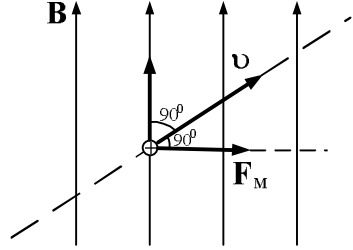


Рис. 1.8

Для опису ЕМП в реальних середовищах необхідно враховувати молекулярну структуру речовини. Заряди, що входять до складу речовини, можуть бути або **зв'язаними** (тобто можуть переміщуватися в межах однієї молекули), або вільними, тобто переходити від однієї молекули до іншої. Вільними є електрони в металах і іони в електролітах та іонізованих газах. Ці заряди вносять найбільший внесок в струм провідності. Властивості діелектриків в ЕМП визначаються в основному зв'язаними зарядами. Зв'язані заряди під впливом зовнішнього поля \mathbf{E} зміщуються в межах молекул і приводять до електричної **поляризації** речовини. При цьому на первинне збуджуюче поле накладається додаткове поле. Спрощено можна вважати, що під дією первинного електричного поля молекули речовини стають подібними до **електричних диполів** з дипольним моментом

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{e}_l ql,$$

де \mathbf{e}_l – орт вектора, що сполучає негативний і позитивний заряди q ; l – відстань між зарядами (рис. 1.9).

Відхиляючись від детальної характеристики процесу поляризації і зводячи його до еквівалентної картини виникнення електричних диполів в речовині, можна вважати, що під дією зовнішнього електричного поля диполі розгортаються і займають положення, яке відповідає орієнтації уздовж силових ліній (рис. 1.10). При цьому крайні ліві і праві заряди діелектрика збуджують додаткове електричне поле $\mathbf{E}_{\text{дод}}$, частково компенсуючи первинне поле.

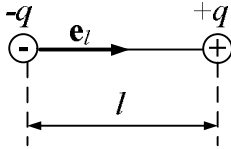


Рис. 1.9

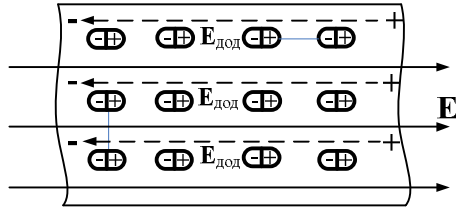


Рис. 1.10

Вектор поляризації (поляризованості) \mathbf{P} кількісно описує поляризацію діелектриків і є об'ємною густиною зорієнтованих за напрямком поля електричних моментів речовини:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p}_i \right), \text{ Кл/м}^2. \quad (1.18)$$

Вектор електричного зміщення (або електричної індукції) \mathbf{D} вводить для опису електричного поля в речовині і визначається виразом

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.19)$$

де ε_0 – електрична стала (див. п. 1.1.1).

Зазвичай можна вважати, що вектор поляризації лінійно зв'язаний з вектором \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^e \mathbf{E} \quad (1.20)$$

У останньому співвідношенні коефіцієнт χ^e характеризує здатність середовища поляризуватися і називається **діелектричною сприйнятливістю**. Співвідношення (1.19) і (1.20) дозволяють представити вектор електричного зміщення у вигляді

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad (1.21)$$

де $\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + \chi^e)$ – **абсолютна діелектрична проникність середовища**. Співвідношення (1.21) можна записати у вигляді

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.22)$$

де $\varepsilon = 1 + \chi^e$ – відносна діелектрична проникність середовища. Наприклад, для вакууму $\varepsilon = 1$; для повітря $\varepsilon = 1,00058$; для води $\varepsilon = 80$. Значення відносної діелектричної проникності для деяких речовин наведені у додатку Б.

Із співвідношень (1.19) – (1.22) видно, що напруженість електричного поля, збуджувана одним і тим же зарядом, буде різною в різних середовищах.

Відповідно до закону Кулона, сила, з якою точковий заряд q діє на інший заряд Q , $\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_a r^3} \mathbf{r}$. За визначенням напруженості електричного поля (1.3) цей заряд в середовищі з параметрами ε_a збуджує поле

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^3} \mathbf{r}. \quad (1.23)$$

Вектор $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$ відповідно до (1.23) $\mathbf{D} = q\mathbf{r}/4\pi r^3$ не залежить від середовища і визначається тільки джерелами поля (зарядом q). Тому вектор електричного зміщення \mathbf{D} характеризує здатність зарядів збуджувати електричне поле.

Один і той же заряд q у реальному середовищі і у вакуумі збуджує різні поля \mathbf{E} і \mathbf{E}_0 відповідно, які відрізняються множителем ε , $\mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}_0$. Таким чином, відносна діелектрична проникність ε показує, у скільки разів напруженість електричного поля в даному середовищі відрізняється від її значення у вакуумі при однакових джерелах.

Вектор магнітної індукції \mathbf{B} , який описує силову дію магнітного поля на рухомі заряди, залежить від властивостей середовища, в якому розглядаються електромагнітні взаємодії. Це відбувається внаслідок намагнічення середовища.

Більшість атомів і молекул речовини можна представити у вигляді маленьких рамок із струмом, кожна з яких збуджує магнітне поле з магнітним моментом $\mathbf{m}_i = \mathbf{e}_n IS$, де S – площа рамки; \mathbf{e}_n – орт нормалі до площини рамки. Струм в рамці I і орт \mathbf{e}_n утворюють правоїгнотову систему (рис. 1.11).

При відсутності зовнішнього магнітного поля всі магнітні моменти \mathbf{m}_i орієнтовані хаотично (рис. 1.12, а) і вектор намагніченості рівний нулю. Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається орієнтація моментів \mathbf{m}_i і виникає додаткове магнітне поле, яке може як підсилити, так і частково компенсувати первинне магнітне поле (рис. 1.12, б).

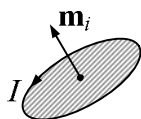


Рис. 1.11

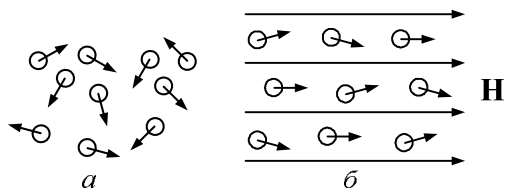


Рис. 1.12

Для опису магнітних властивостей речовини вводиться **вектор намагніченості** \mathbf{M} , рівний магнітному моменту одиниці об'єму речовини

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{m}_i \right), \quad A/m. \quad (1.24)$$

Здатність джерел збуджувати магнітне поле характеризують напруженістю магнітного поля \mathbf{H} . Ця векторна фізична величина однозначно пов'язана із струмами, має розмірність A/m і визначається співвідношенням

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (1.25)$$

звідки

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.26)$$

У співвідношеннях (1.25), (1.26) μ_0 – магнітна стала – розмірна величина, яка у вакуумі становить $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

У ряді випадків можна вважати, що вектор намагніченості \mathbf{M} пропорційний напруженості магнітного поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = \chi^m \mathbf{H}, \quad (1.27)$$

де χ^m – магнітна сприйнятливість середовища.

Підставляючи (1.27) в (1.26), одержимо

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad \mu_a = \mu_0 \mu, \quad \mu = 1 + \chi^m. \quad (1.28)$$

У співвідношеннях (1.28) μ_a – абсолютна магнітна проникність середовища; μ – відносна магнітна проникність; μ_0 – абсолютна магнітна проникність вакууму (магнітна стала).

Вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H} визначається тільки струмами збудження і при однакових джерелах має одне і те ж значення в різних середовищах. Магнітна індукція у вакуумі \mathbf{B}_0 і в даному середовищі \mathbf{B} з магнітною проникністю μ_a , зумовлена одними і тими ж джерелами, відрізняється в μ разів $\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0$. Тому відносна магнітна проникність μ показує, в скільки разів величина магнітної індукції \mathbf{B} в даному матеріалі більша або менша значення цього вектора \mathbf{B}_0 у вакуумі.

Значення відносної магнітної проникності для деяких речовин наведені у додатку В.

1.1.3. Електромагнітні властивості середовищ

Вектори електромагнітного поля в матеріальних середовищах зв'язані матеріальними рівняннями. Два рівняння, що описують дію електричного і магнітного полів на зв'язані заряди (що входять до складу атомів і молекул речовини), наведені в п. 1.1.2. Це рівняння (1.21), що відображає властивість поляризації середовища $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$, і рівняння (1.28), що характеризує явище намагніченості $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$.

На відміну від зв'язаних, вільні заряди речовини під дією електричного поля набувають орієнтованого руху, тобто в речовині виникає електричний струм (струм провідності). Закон Ома для електричного кола наведений вище (див. п. 1.1.1). З нього нескладно одержати вираз для густини струму провідності \mathbf{J} (закон Ома в диференційній формі):

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.29)$$

де σ – питома провідність середовища, Cm/m (сименс на метр).

Значення питомої провідності деяких речовин наведені у додатку Г. Так, за законом Ома (1.8) струм

$$I = U/R. \quad (1.30)$$

Напруга на прямолінійному провіднику незмінного перетину S завдовжки l , що знаходиться в однорідному електричному полі \mathbf{E} , силові лінії якого паралельні його осі, дорівнює $U = \int_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = El$.

Опір провідника $R = l/(\sigma S)$, струм $I = JS$, що при підстановці в (1.30) приводить до співвідношення (1.29).

Приклад 1.1. По круглому мідному провіднику ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 Cm/m$) діаметром $d = 0,6$ мм проходить постійний струм $I = 1,5$ А. Знайти напруженість електричного поля усередині провідника і спад напруги на ділянці $l = 10$ м.

Розв'язок. Переріз провідника $S = \pi d^2/4 = 2,83 \cdot 10^{-7} m^2$; густина струму $J = I/S = 5,3 \cdot 10^6 A/m^2$. Модуль вектора напруженості електричного поля $E = J/\sigma = 0,093 B/m$. З фізичних міркувань ясно, що вектор \mathbf{E} спрямований уздовж осі провідника. Спад напруги на ділянці завдовжки $l = 10$ м становить $\Delta U = El = J \frac{l}{\sigma} = 0,93 B$. До такого ж результату приводить і закон Ома (1.30) в інтегральній формі: $\Delta U = IR = JS \frac{l}{\sigma S} = J \frac{l}{\sigma}$.

Отже, будь-яке середовище характеризується трьома електромагнітними параметрами: діелектричною ϵ_a і магнітною μ_a проникністю і питомою провідністю σ .

Для більшості середовищ відносна діелектрична проникність $\epsilon > 1$. Так, для газоподібних середовищ ϵ дещо перевищує одиницю ($\epsilon - 1 \sim 10^{-4} \dots 10^{-3}$). У рідинах і кристалах величина ϵ може бути істотно більше одиниці ($\epsilon \sim 10 \dots 10^2$). Особливий інтерес для практики

представляють **сегнетоелектрики**, для яких $\varepsilon \sim 10^4$. Для таких середовищ характерна наявність областей з досить високим рівнем внутрішніх полів – доменів. Разом з тим існують середовища (наприклад іонізований газ), для яких відносна діелектрична проникність $\varepsilon < 1$ і може набувати значення $\varepsilon = 0$ і навіть $\varepsilon < 0$.

Якщо джерела збуджують в середовищах електричне поле з напруженістю, що перевищує деяке критичне значення, може відбутися пробій діелектрика, внаслідок чого він перетворюється в провідник (різко зростає значення σ). Для повітря величина $E_{кр} = 3 \cdot 10^4$ В/см.

За магнітними властивостями середовища поділяють на **діамагнетики** (відносна магнітна проникність $\mu < 1$), **парамагнетики** ($\mu > 1$) і **ферромагнетики** ($\mu \gg 1$).

Всім речовинам властивий **діамагнітний ефект** (ефект ослаблення поля). Індукційні струми, які наводяться в середовищі під дією зовнішнього магнітного поля, за правилом Ленца завжди ослаблюють поле. У діамагнетиків цей ефект слабкий $(1 - \mu) \sim 10^{-6} \dots 10^{-4}$. У парамагнетиків на поле, викликане діамагнітним ефектом, накладається поле, зумовлене молекулярними струмами (**парамагнетизм**). Цей ефект також слабкий і у більшості парамагнетиків $(\mu - 1) \sim 10^{-6} \dots 10^{-4}$. У ферромагнетиків, які мають різко виражену доменну структуру, відносна магнітна проникність $\mu \sim 10^2 \dots 10^4$.

Залежно від електропровідності, яка визначається кількістю вільних заряджених частинок, речовини поділяють на **провідники** і **діелектрики**, а також **напівпровідники** (які займають проміжну область між першими і другими). При розв'язанні ряду задач електродинаміки реальні середовища часто замінюють ідеалізованими і використовують поняття **ідеальний провідник** ($\sigma \rightarrow \infty$) і **ідеальний діелектрик** ($\sigma \rightarrow 0$). Докладнішу класифікацію провідників наведемо нижче.

Числові значення параметрів ε , μ , σ для деяких середовищ наведені в додатках Б, В, Г.

1.1.4. Силкові лінії поля

М. Фарадей для наочності запропонував вектори електромагнітного поля зображувати графічно у вигляді так званих векторних ліній.

Густина цих ліній характеризує інтенсивність даного вектора поля в даний момент часу, дотичні до ліній показують напрям відповідного вектора. Лінії векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} прийнято називати **силовими лініями**. Для прикладу на рис. 1.13 наведені графіки електричних силових ліній одиночного позитивного заряду q (рис. 1.13, *a*), негативного заряду $Q = -2q$ (рис. 1.13, *б*), силові лінії двох різнойменних зарядів (рис. 1.13, *в*), сліди ліній густини постійного струму в провіднику (див. приклад 1.1) і магнітні силові лінії (див. рис. 1.4) в площині, перпендикулярній прямолінійному струму (рис. 1.13, *г*).

Кожному вектору поля в деякій області на даний момент часу ставиться у відповідність сімейство ліній. Нехай крива L одна з силових ліній поля \mathbf{R} (рис.1.14). Проведемо з початку декартової системи координат O два радіуси-вектори \mathbf{r} і $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ в дві довколишні точки A_1 і A_2 , розміщені поряд.

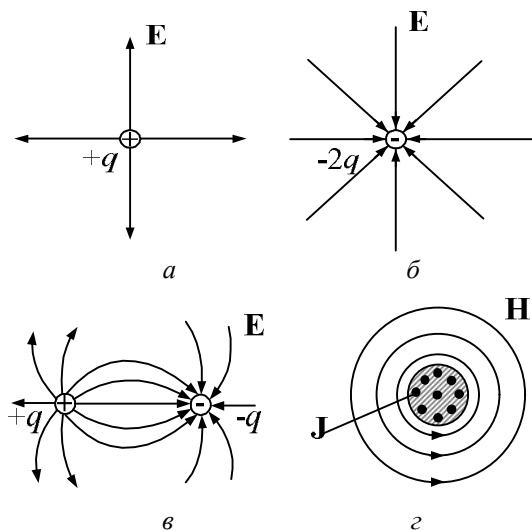


Рис. 1.13

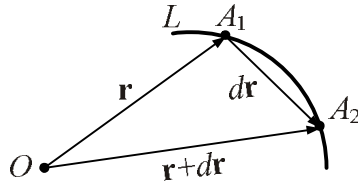


Рис. 1.14

Тоді приріст вектора $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$. Для близько розташованих точок A_1 і A_2 вектор поля \mathbf{R} в точці A_1 паралельний $d\mathbf{r}$, звідки виходить пропорційність проєкцій \mathbf{R} і $d\mathbf{r}$:

$$\frac{dx}{R_x} = \frac{dy}{R_y} = \frac{dz}{R_z}.$$

Одержане співвідношення описує рівняння ліній вектора \mathbf{R} .

1.1.5. Класифікація середовищ

Електромагнітні характеристики різних речовин (параметри ϵ_a , μ_a , σ) в загальному випадку є не сталими величинами, а є функціями багатьох змінних. Вони можуть залежати від координат, часу, величини і напрямку прикладених векторів електромагнітного поля та ін. Ці залежності покладені в основу класифікації різних середовищ.

1. Якщо властивості середовища не залежать від координат, то середовище є однорідним, в противному разі середовище вважається неоднорідним. Розрізняють також кусочно-неоднорідні середовища, для яких при переході з однієї однорідної області в іншу параметри середовища (ϵ_a , μ_a або σ) змінюються стрибком.

2. Середовища можуть бути ізотропними і анізотропними. Якщо властивості середовища в точці спостереження однакові на всіх напрямках, то середовище ізотропне. Для таких середовищ параметри ϵ_a , μ_a , σ є скалярними величинами і справедливі матеріальні рівняння (1.21), (1.28), (1.29). Наприклад, із співвідношення (1.28)

виходить пропорційність проєкцій векторів \mathbf{B} і \mathbf{H} : $B_x = \mu_a H_x$, $B_y = \mu_a H_y$, $B_z = \mu_a H_z$. Інакше кажучи, **вектори \mathbf{D} і \mathbf{E} , \mathbf{B} і \mathbf{H} , \mathbf{J} і \mathbf{E} в ізотропних середовищах паралельні**. В анізотропних середовищах властивості середовища в різних напрямках неоднакові і параметри, ϵ_a , μ_a , σ є тензорами. В цьому випадку матеріальні рівняння записуються у вигляді

$$\mathbf{D} = \vec{\epsilon}_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \vec{\mu}_a \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \vec{\sigma} \mathbf{E}, \quad (1.31)$$

де $\vec{\epsilon}_a = \epsilon_0 \vec{\epsilon}$, $\vec{\mu}_a = \mu_0 \vec{\mu}$.

У декартовій системі координат тензори $\vec{\epsilon}$, $\vec{\mu}$, $\vec{\sigma}$ можна представити у вигляді матриць розмірності 3×3 . Наприклад, тензор відносної діелектричної проникності

$$\vec{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

При цьому вектори \mathbf{D} і \mathbf{E} , \mathbf{B} і \mathbf{H} , \mathbf{J} і \mathbf{E} в загальному випадку непаралельні.

Приклад 1.2. Визначити вектор \mathbf{D} в анізотропному середовищі, якщо діагональні елементи тензора $\vec{\epsilon}$ рівні, $\epsilon_{11} = 1$, $\epsilon_{22} = 3$, $\epsilon_{33} = 4$, а інші $\epsilon_{ij} = 0$ ($i \neq j$). Вектор \mathbf{E} заданий проєкціями $E_x = 1$ В/м, $E_y = 2$ В/м, $E_z = 0$.

Розв'язок. Для анізотропного середовища $\mathbf{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \mathbf{E}$, тому

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Кл/м}^2.$$

Зіставляючи проєкції векторів \mathbf{D} і \mathbf{E} , бачимо, що вони непропорційні, отже, вектори \mathbf{E} і \mathbf{D} неколінеарні.

Причина анізотропії полягає в наявності фізично виділених напрямків в просторі, зумовлених різними факторами (наприклад, дією на середовище магнітного поля в деякому напрямі та ін.).

3. Якщо хоча б один з параметрів середовища ε_a , μ_a , σ залежить від величини прикладеного поля (значень \mathbf{E} і \mathbf{B}), то таке середовище нелінійне, якщо такої залежності не спостерігається, то воно лінійне.

4. Середовища можуть бути стаціонарними (параметри ε_a , μ_a , σ не залежать від часу) і нестаціонарними (параметри середовища змінюються в часі).

5. Розрізняють диспергуючі середовища (характеристики середовища залежать від частоти) і недиспергуючі (така залежність відсутня).

Більшість реальних середовищ неоднорідні, нелінійні, анізотропні, нестаціонарні і диспергуючі. Проте у ряді випадків область простору, в якій нас цікавлять електромагнітні процеси, можна вважати заповненою однорідним, ізотропним, лінійним, стаціонарним і недиспергуючим середовищем. Аналіз електромагнітних процесів в таких ідеалізованих середовищах істотно простіший.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Порівняти сили гравітаційного та електричного тяжіння між електроном і протоном. Нагадаємо, що заряд електрона $-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; маса протона $m_p = 1836m_e$; стала γ в зако-

ні тяжіння Ньютона $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг².

2. Використовуючи основні закони електромагнетизму, отримайте розмірність величин \mathbf{E} і \mathbf{B} .

3. Чи має заряджене тіло, поміщене в електричне поле, рухатися по силових лініях? Ніякі інші сили, окрім електричних, на нього не діють.

4. Чи можуть силові лінії електричного поля торкатися одна одної в якійсь точці?

5. Заряджена металева куля радіусом 5 см знаходиться в повітрі. Електричний пробій повітря відбувається при напруженості

поля $E = 30 \text{ кВ/см}$. Знайти гранично допустимий заряд кулі, що забезпечує відсутність пробою.

6. Нескінченна металева площина рівномірно заряджена з поверхневою густиною $\rho_s = 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$. Визначити вектори \mathbf{E} і \mathbf{D} у всьому просторі, якщо $\epsilon = 1$.

7. Об'ємний заряд з густиною $\rho = 30 \text{ мКл/м}^3$ рівномірно розподілений в області, обмеженій циліндричною поверхнею радіусом $r = 10 \text{ см}$. Діелектрична проникність внутрішньої області $\epsilon_1 = 4$, зовнішньої – $\epsilon_2 = 1$. Визначити залежність $\mathbf{E}(r)$.

8. По провідниках нескінченно довгого коаксіального кабелю проходить струм $I = 3 \text{ МА}$. Діаметр внутрішнього провідника кабелю: $2r_1 = 7 \text{ мм}$, діаметр внутрішнього перетину зовнішнього провідника $2r_2 = 18 \text{ мм}$, діаметр кабелю $2r_3 = 20 \text{ мм}$. Магнітна проникність провідників і ізоляції $\mu = 1$. Визначити залежність $\mathbf{H}(r)$ і $\mathbf{V}(r)$, якщо струми I у внутрішньому і зовнішньому провіднику проходять у протилежних напрямках.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення і перелічіть основні властивості електромагнітного поля.

2. Дайте визначення магнітного і електричного полів і охарактеризуйте їх об'єктивний взаємозв'язок.

3. Назвіть вектори, що характеризують електромагнітне поле.

4. Отримайте вираз для вектора напруженості електричного поля, виходячи із закону Кулона.

5. Опишіть явища поляризації і намагнічення речовини. Що характеризують вектори поляризованості і намагніченості середовища?

6. Дайте визначення і вкажіть одиниці вимірювання наступних величин: об'ємна, поверхнева і лінійна густина заряду, густина струму та поверхневого струму.

7. Наведіть визначення векторів електричного зміщення, напруженості та індукції магнітного поля.

8. Назвіть основні одиниці системи СІ.

9. Назвіть одиниці вимірювання основних електричних і магнітних величин.

10. Розкажіть про критерії поділу середовищ на феромагнітні, парамагнітні і діамагнітні.

11. Сформулюйте поняття електричних і магнітних силових ліній.

12. Назвіть параметри, що характеризують електромагнітні властивості будь-якого середовища.

13. Запишіть матеріальні рівняння для векторів електромагнітного поля.

14. Викладіть принцип класифікації середовищ за виглядом функційної залежності електромагнітних параметрів від величини векторів поля, координат, часу і напрямку.

15. Чи завжди вектори напруженості і індукції електричних або магнітних полів паралельні?

1.2. Система рівнянь Максвелла.

Класифікація електромагнітних явищ

Основу електродинаміки складають рівняння Дж. К. Максвелла, які він сформулював на підставі аналізу і узагальнення експериментальних фактів у 1864 р. Ці рівняння в найбільш загальному вигляді описують зв'язок між джерелами і векторами поля, а також між електричними і магнітними явищами. У теорії електромагнетизму рівняння Максвелла відіграють таку ж саму роль, як закони Ньютона в механіці.

1.2.1. Умова макроскопічності

Значимо, що всі досліді у області електромагнетизму проводилися з **макроскопічними тілами**, тобто з тілами, що містять значну кількість заряджених частинок. Тому рівняння, які описують результати цих дослідів, також мають бути макроскопічними. Щоб використовувати відомий математичний апарат для інтерпретації електромагнітних явищ, в його основу необхідно покласти **поняття фізично нескінченно малого об'єму ΔV і фізично нескінченно малого інтервалу часу Δt** .

Під елементом ΔV розуміють об'єм, досить малий порівняно з об'ємом V , який займає макроскопічний об'єкт, що дозволяє в межах ΔV вважати фізичну величину розподіленою рівномірно, але досить великий, щоб можна було не враховувати дискретність заряду.

Останнє означає, що в об'ємі ΔV має міститися досить багато частинок, щоб відношення типу $\Delta q/\Delta V$ (де Δq – повний заряд всередині ΔV) мало змінювалися при зміні ΔV . Інакше кажучи, характерний розмір $\Delta V^{1/3}$ повинен набагато перевищувати середню відстань l між частинками речовини, але бути істотно менше за характерні розміри макроскопічного об'єкта $L \sim V^{1/3}$, тобто $l \ll \Delta V^{1/3} \ll L$. Сказане про об'єми повністю стосується площі і довжин.

У макроскопічній електродинаміці введений масштаб $\Delta V^{1/3}$ є мінімально можливим, тобто всі дані відстані Δx повинні перевищувати його: $\Delta x \geq \Delta V^{1/3}$.

Фізичний нескінченно малий інтервал часу Δt має бути настільки малий, щоб протягом нього макроскопічні величини можна було вважати сталими, і досить великий, щоб хаотичні зміни, викликані тепловим рухом частинок, усереднювалися до нуля.

Саме у вказаному сенсі фізично нескінченно малих величин слід розглядати введені раніше диференційні характеристики – густина заряду (1.11), струму (1.14) та інші. Так, наприклад, під густиною заряду в точці r , визначуваній співвідношенням (1.11), слід розуміти

$$\rho(r) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} q_i, \text{ а точку } r \text{ природно вважати центром області } \Delta V.$$

Вивченням електромагнітних явищ на рівні атомів і молекул (випромінюванням квантів електромагнітного поля (фотонів), поглинанням і розсіюванням випромінювання речовиною, електромагнітною взаємодією між зарядженими частинками і ін.) займається квантова електродинаміка, яка в даному курсі не розглядається.

1.2.2. Рівняння Максвелла в інтегральній формі

У основі рівнянь електродинаміки лежать закони повного струму і електромагнітної індукції, які Максвелл узагальнив на випадок змінних полів у довільних середовищах і постулював в наступному вигляді:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = I_{\text{пр}} + I_{\text{зм}}. \quad (1.32)$$

$$\text{II} \quad \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.33)$$

$$\text{III} \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (1.34)$$

$$\text{IV} \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.35)$$

У перших двох рівняннях L – довільний замкнений контур, S – довільна поверхня, що спирається на цей контур. У рівняннях (III) і (IV) величина V – довільний об'єм, а S – поверхня, яка його охоплює.

Перше рівняння Максвелла зв'язує струм і збуджувану струмом напруженість магнітного поля. Рівняння узагальнює експериментальні закони Ерстеда, Біо – Савара – Лапласа і Ампера. Відповідно до закону Ампера, циркуляція вектора напруженості магнітного поля по довільному замкнутому контуру L дорівнює потоку вектора густини струму через будь-яку поверхню S , обмежену цим контуром:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = I. \quad (1.36)$$

У такому формулюванні закон Ампера не може бути застосований для змінного струму, в коло якого включений, наприклад, конденсатор (рис. 1.15).

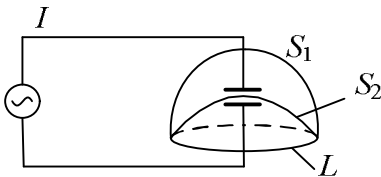


Рис. 1.15

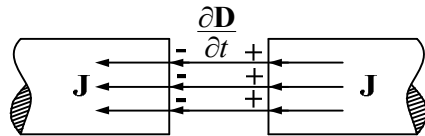


Рис. 1.16

Так, якщо один і той же контур охоплюватиме дві поверхні S_1 і S_2 , перша з яких перегинає струм у колі I , а друга ні, то, відповід-

но до (1.36), у першому випадку циркуляція вектора напруженості магнітного поля не дорівнює нулю, а в другому – дорівнює. Цю суперечність Дж. К. Максвелл подолав, висунувши гіпотезу про існування **струму зміщення** між обкладинками конденсатора, котрий, як і струм провідності, здатний збуджувати магнітне поле. Цей струм рівний швидкості зміни потоку вектора електричного зміщення через поверхню S :

$$I_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}. \quad (1.37)$$

Густина струму зміщення, як видно з (1.37), визначається як

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.38)$$

Інакше кажучи, **магнітне поле збуджує повний струм – струм провідності $I_{\text{пр}}$ і струм зміщення $I_{\text{зм}}$ (електричне поле, що змінюється в часі). Повний струм завжди є замкненим струмом. Так, у просторі між обкладинками конденсатора (рис. 1.16) струм провідності \mathbf{J} замикається струмом зміщення $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.**

Сформулюємо перший закон електродинаміки:

I	<p>Циркуляція вектора напруженості магнітного поля $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}$ по будь-якому замкненому контуру L дорівнює сумі струму провідності $I_{\text{пр}} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S}$ і струму зміщення</p> $I_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$ <p>(повному струму), що проходить через поверхню S, обмежену цим контуром (рис. 1.17):</p> $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}.$
---	--

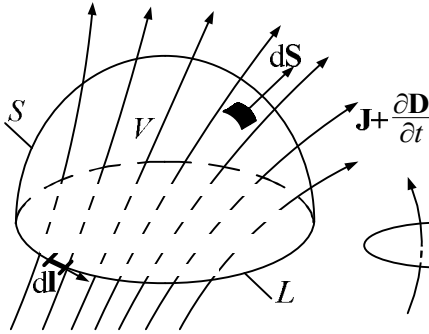


Рис. 1.17

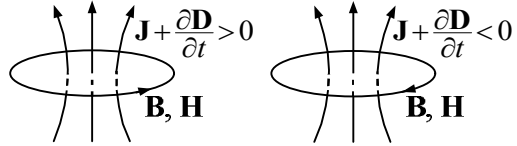


Рис. 1.18

Напрям ліній вектора напруженості магнітного поля \mathbf{H} зв'язаний з напрямом струму або **приростом** потоку вектора \mathbf{D} (рис. 1.18).

У разі змінного поля в діелектрику густина струму зміщення складається з двох доданків:

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (1.39)$$

Перший доданок в (1.39) описує зміну електричного поля у вакуумі і не пов'язаний з рухом зарядів. Другий доданок визначає частину струмів зміщення, зумовлену рухом зарядів, зв'язаних з атомами і молекулами речовини під дією змінного поля. Ця складова струмів зміщення подібна до струму провідності як упорядкованому переміщенню (в цьому випадку «зв'язаних») зарядів.

Приклад 1.3. По нескінченному циліндру радіусом a проходить постійний струм I_0 . Визначити напруженість магнітного поля всередині і поза провідником.

Розв'язок. У циліндричній системі координат (див. додаток Д), вісь Z якої збігається з віссю провідника, вектор \mathbf{H} має лише азимутну складову H_ϕ . В точках уявного кола радіусом r , центр якого лежить на осі провідника, значення H_ϕ постійне через повну симетрію поля. Тому у формулі (1.32) інтегрування можна замінити множенням H_ϕ на довжину кола.

Якщо $r > a$, то весь струм пронизує поверхню, обмежену уявним контуром, і тому $H_{\phi}(r) \cdot 2\pi r = I_0$, звідки $H_{\phi}(r) = I_0 / (2\pi r)$.

А якщо $r < a$, то усередині контуру проходить струм $I = I_0 r^2 / a^2$, циркуляція вектора \mathbf{H} становить $H_{\phi}(r) \cdot 2\pi r = I_0 r^2 / a^2$ і $H_{\phi}(r) = I_0 r / (2\pi a^2)$.

Друге рівняння Максвелла узагальнює закон електромагнітної індукції Фарадея (1.10). Цей закон описує збудження **вихрового** електричного поля магнітним полем, що змінюється в часі і формулюється таким чином:

II	<p style="text-align: center;">Циркуляція вектора напруженості електричного поля $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l}$ по будь-якому замкненому контуру L в довільному середовищі дорівнює взятій із зворотним знаком швидкості зміни магнітного потоку $\int_S \mathbf{B}d\mathbf{S}$ через довільну поверхню S, що спирається на цей контур</p> $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}d\mathbf{S}.$
----	--

Узагальнення закону електромагнітної індукції полягає в тому, що на відміну від закону Фарадея, який сформулював рівняння (1.10) для реальних електричних контурів (виконаних з певного матеріалу, який має певний опір і ін.), Дж. К. Максвелл припустив, що електрорушійна сила $\mathcal{E} = \int_L \mathbf{E}d\mathbf{l}$ виникає завжди в будь-якому середовищі. Контур в дослідах Фарадея служить лише індикатором збудження вихрового електричного поля магнітним полем, що змінюється в часі. Знак «мінус» в рівнянні (II) (правило Ленца) вказує, що зв'язок електричного поля із збуджуючим його магнітним полем підпорядкований правилу лівого гвинта (рис. 1.19).

Перший і другий закони Максвелла показують, що в діелектрику може існувати електромагнітний процес, що самопідтримується – електромагнітні хвилі. Змінне електричне поле відповідно до першо-

го рівняння збуджує вихрове магнітне поле ($\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}$), а змінне магнітне поле збуджує вихрове електричне поле ($\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$) і т.д.

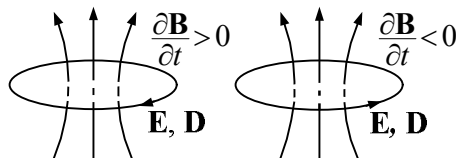


Рис. 1.19

Приклад 1.4. У однорідному магнітному полі напруженістю \mathbf{H} перпендикулярно до його силових ліній з кутовою швидкістю ω обертається металевий стрижень завдовжки l (рис 1.20).

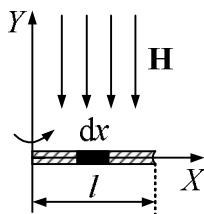


Рис. 1.20

Визначити ЕРС, індуковану між його кінцями.

Розв'язок. При прямолінійному русі провідника завдовжки l із швидкістю v перпендикулярно силовим лініям магнітного поля в ньому індукується ЕРС, величина якої визначається законом електромагнітної індукції:

$$\mathcal{E} = \mu_0 H \frac{d}{dt} \int_S dS = \mu_0 H l v .$$

При круговому обертанні стрижня щодо осі OY (рис. 1.20) елемент довжини стрижня dx , що знаходиться на відстані x , рухається з швидкістю $v = \omega x$. Тому в елементі dx індукується ЕРС

$$d\mathcal{E} = \mu_0 H v dx = \mu_0 H \omega x dx .$$

$$\text{Повна ЕРС у стрижні } \mathcal{E} = \mu_0 H \omega \int_0^l x dx = \frac{1}{2} \mu_0 H \omega l^2 .$$

Третє рівняння Максвелла описує закон збудження електричного поля зарядами і узагальнює закон Кулона та еквівалентний йому закон Гаусса.

III	<p>Повний потік вектора електричного зміщення $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$ через довільну замкнену поверхню S у певний момент часу дорівнює повному електричному заряду $Q = \int_V \rho dV$, що знаходиться в об'ємі V, охопленому цією поверхнею в цей самий момент часу незалежно від того, чи змінюють заряди своє положення і величину з часом:</p> $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV.$
-----	---

Закон Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D}(x, y, z) d\mathbf{S} = \int_V \rho(x, y, z) dV \quad (1.40)$$

по суті еквівалентний третьому рівнянню Максвелла (1.34), але припускає, що вектор електричного зміщення \mathbf{D} і густина заряду ρ не залежать від часу, а є тільки функціями координат. Максвелл розширив трактування закону Гаусса і припустив, що співвідношення (1.34) справедливе і для рухомих зарядів, і при зміні величини зарядів.

Третє рівняння Максвелла свідчить про те, що джерелом електричного поля є електричні заряди (рис. 1.21, а). Якщо усередині об'єму V зарядів немає (або сумарний заряд дорівнює нулю), то кількість ліній вектора \mathbf{D} , що виходять з об'єму V , дорівнює числу вхідних ліній (рис. 1.21, б). Лінії вектора \mathbf{D} починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних.

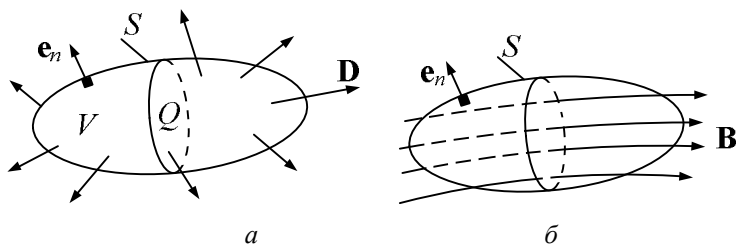


Рис. 1.21

Приклад 1.5. Позитивний заряд Q рівномірно розподілений у об'ємі кулі радіусом a . Знайти напруженість електричного поля \mathbf{E} і вектор електричного зміщення \mathbf{D} в точках, розташованих всередині і поза кулею. Діелектрична проникність матеріалу кулі ϵ_a , навколишнього середовища – ϵ_0 .

Розв'язок. Початок сферичної системи координат (див. додаток Д) вміщуємо в центр кулі. Оскільки заряд розподілений симетрично щодо центра кулі, то вектори \mathbf{E} і \mathbf{D} у сферичній системі координат мають тільки радіальні складові E_r і D_r , залежні від однієї координати r .

Проведемо на відстані $r_1 > a$ від центра кулі сферичну поверхню S_1 і застосуємо формулу Гаусса (1.40). Оскільки для всіх точок поверхні S_1 числове значення вектора \mathbf{D} однакове, а напрям збігається з напрямом позитивної нормалі до поверхні S_1 , то

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r_1^2 = Q.$$

Тоді вектор електричного зміщення поза кулею

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \cdot \mathbf{e}_r.$$

Напруженість електричного поля поза кулею

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \cdot \mathbf{e}_r.$$

Знайдемо поле усередині кулі ($r < a$). Проведемо сферичну поверхню S_2 радіусом $r_2 < a$. За теоремою Гаусса

$$\oint_{S_2} D \cdot dS = D \cdot 4\pi r_2^2 = Q_{\text{вс}}.$$

Знайдемо об'ємну густину заряду $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$.

Тоді заряд усередині поверхні S_2 дорівнює $Q_{\text{вс}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 = Q \frac{r_2^3}{a^3}$.

Вектори \mathbf{D} і \mathbf{E} усередині кулі становитимуть:

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{Q_{\text{вс}}}{4\pi r_2^2} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{Q \cdot r_2}{4\pi a^3} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\rho \cdot r_2}{3},$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_a} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\rho \cdot r_2}{3\varepsilon_a}.$$

Четверте рівняння Максвелла є наслідком другого рівняння і формулюється таким чином.

IV	<p>Повний потік вектора магнітної індукції $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ через будь-яку замкнену поверхню S у будь-який момент часу дорівнює нулю: $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$.</p>
----	---

Це означає, що лінії вектора \mathbf{B} завжди замкнені або починаються і закінчуються на нескінченності (рис. 1.21,б). З цього рівняння виходить, що магнітних зарядів у природі не існує. Четверте рівняння робить систему рівнянь симетричною і не порушує її загальності, оскільки завжди виконується.

У систему рівнянь Максвелла включають також **матеріальні рівняння**, які характеризують вплив середовища на електромагнітні процеси, що проходять у ньому:

V	$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E},$	(1.41)
VI	$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_a,$	(1.42)
VII	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$	(1.43)

Рівняння (I) – (VII) представляють повну систему рівнянь Максвелла в інтегральній формі.

1.2.3. Рівняння Максвелла в диференційній формі

Вище описано інтегральні характеристики поля (потік вектора, циркуляція), які дають зв'язок векторів поля в даній області із струмами і зарядами, що в ній знаходяться (п. 1.2.2, вирази (1.32) – (1.35)). На практиці при розв'язанні електродинамічних задач найчастіше рівняння Максвелла використовують в диференційній формі. Ці рівняння визначають зв'язок векторів поля з джерелами (струмами і густиною зарядів) в одній точці.

Одержати рівняння Максвелла в диференційній формі найпростіше за допомогою теорем Остроградського – Гаусса і Стокса (див.

додаток E).

Пояснимо якісно суть цих теорем.

Розглянемо потік довільної векторної функції \mathbf{R} через замкнену поверхню S , яка охоплює об'єм V (рис. 1.22, а). Розіб'ємо об'єм V на дві частини V_1 і V_2 , що охоплюються поверхнями $S_1 = \Delta S_1 + F$, $S_2 = \Delta S_2 + F$, де F – загальна частина поверхонь, що обмежують об'єми V_1 і V_2 (рис. 1.22, б). Очевидно, що потік вектора \mathbf{R} через S дорівнює сумі потоків через $S_1 = \Delta S_1 + F$ і $S_2 = \Delta S_2 + F$:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint_{\Delta S_1 + F} \mathbf{R} d\mathbf{S}_1 + \oint_{\Delta S_2 + F} \mathbf{R} d\mathbf{S}_2. \quad (1.44)$$

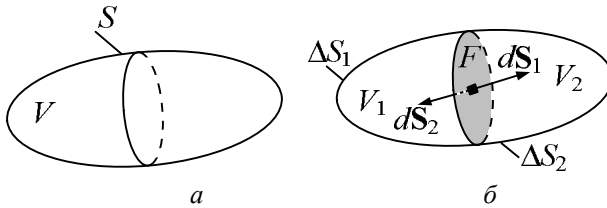


Рис. 1.22

Це пов'язано з тим, що інтеграли по поверхні F для першого і другого доданків в (1.44) мають протилежні знаки. Продовжуючи розподіл об'ємів ΔV_1 і ΔV_2 , далі одержимо:

$$\Phi = \sum_i \Delta V_i \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{R} d\mathbf{S}_i. \quad (1.45)$$

Введемо дивергенцію вектора \mathbf{R} : $\operatorname{div} \mathbf{R} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{R} d\mathbf{S}_i$, що

при $\Delta V_i \rightarrow 0$ з урахуванням (1.45) приведе до рівності

$$\Phi = \oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV. \quad (1.46)$$

Вираз (1.46) є теоремою Остроградського – Гаусса. Дивергенція вектора $\operatorname{div} \mathbf{R}$ визначає потік вектора \mathbf{R} з нескінченно малого об'єму dV , а увесь потік Φ дорівнює сумі всіх потоків елементів,

тобто інтегралу за об'ємом V від дивергенції $\operatorname{div} \mathbf{R}$.

Розглянемо циркуляцію T вектора \mathbf{R} по замкнутому контуру L , на який спирається довільна поверхня S (рис. 1.23, а).

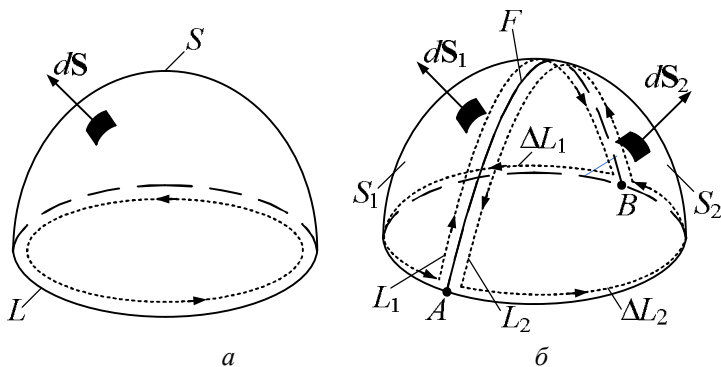


Рис. 1.23

Розіб'ємо контур L на два контури $L_1 = \Delta L_1 + F$, $L_2 = \Delta L_2 + F$, де F – загальна частина контурів L_1 і L_2 (лінія AB на рис. 1.23, б). Поверхня $S = S_1 + S_2$ відповідно розбивається на дві частини, кожна з яких спирається на контури L_1 і L_2 . Циркуляція вектора \mathbf{R} очевидно становить:

$$T = \oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l} = \oint_{L_1} \mathbf{R} d\mathbf{l}_1 + \oint_{L_2} \mathbf{R} d\mathbf{l}_2, \quad (1.47)$$

оскільки циркуляція по відрітку F , спільному для контурів L_1 і L_2 , в першому і другому доданку в (1.47) має різні знаки (природно, при обході контурів L , L_1 і L_2 в одному напрямі). Напрямок обходу контура і напрям нормалі до елементів поверхні dS зв'язані правилом правого гвинта. Розіб'ємо далі контури $L_{1,2}$ на дрібніші і введемо поняття **ротора** векторної функції \mathbf{R} :

$$(\operatorname{rot} \mathbf{R}) \mathbf{e}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{R} d\mathbf{l}}{\Delta S}, \quad (1.48)$$

де \mathbf{e}_n – нормаль до елемента поверхні ΔS (рис. 1.24).

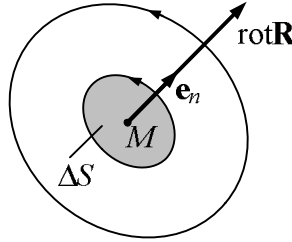


Рис. 1.24

Відповідно до (1.48), ротор векторної функції \mathbf{R} є вектором, величина якого визначає циркуляцію поля в даній точці M , а напрям – орієнтацію площинки ΔS , де циркуляція максимальна. Циркуляцію T представимо у вигляді

$$T = \oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l} = \sum_i \Delta S_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\Delta S_i} \mathbf{R} d\mathbf{l}.$$

При $\Delta S_i \rightarrow 0$ з урахуванням (1.48) одержимо:

$$\oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{R} d\mathbf{S}. \quad (1.49)$$

Вираз (1.49) є теоремою Стокса.

У декартовій системі координат ротор і дивергенцію функції \mathbf{R} обчислюють за співвідношеннями:

$$\text{rot } \mathbf{R} = \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z, \quad (1.50)$$

$$\text{div } \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}. \quad (1.51)$$

Якщо ввести векторний диференціальний оператор Гамільтона ∇ (оператор набла),

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

то ротор і дивергенцію векторної функції \mathbf{R} можна записати у вигляді векторного і скалярного добутку:

$$\text{rot } \mathbf{R} = [\nabla, \mathbf{R}], \quad \text{div } \mathbf{R} = (\nabla \mathbf{R}).$$

Порівняння перших двох рівнянь Максвелла (1.32), (1.33) з формулюванням теореми Стокса (1.49), третього і четвертого – з теоремою Остроградського – Гаусса (1.46) дозволяє записати **рівняння Максвелла в диференційній формі**:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad [\nabla, \mathbf{H}] = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.52)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [\nabla, \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.53)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.54)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.55)$$

Сформулюємо закони Максвелла.

Перший закон

I, a	<p>Вихрове магнітне поле збуджують струми провідності і електричне поле, що змінюється в часі: $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.</p>
--------	--

Напрямок замкнених силових ліній вектора напруженості магнітного поля \mathbf{H} зв'язаний правилом правого гвинта з напрямком вектора \mathbf{J} або приростом вектора електричного зміщення \mathbf{D} (див. рис. 1.18).

Другий закон

II, a	<p>Вихрове електричне поле збуджується магнітним полем, що змінюється в часі: $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.</p>
---------	---

Напрямок замкнених силових ліній вектора напруженості електричного поля \mathbf{E} зв'язаний правилом лівого гвинта з приростом вектора

магнітної індукції \mathbf{B} (рис. 1.19).

Третій закон

III, а	Джерелами електричного поля є електричні заряди, причому лінії електричного зміщення починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$.
--------	--

Четвертий закон

IV, а	Джерела магнітного поля (магнітних зарядів) в природі не існують, тому лінії магнітної індукції \mathbf{B} або замкнені, або нескінченні $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.
-------	--

Для повноти системи до рівнянь (I,а)...(IV,а) додають матеріальні рівняння (V) – (VII).

Система рівнянь Максвелла – це система диференційних векторних рівнянь другого порядку. Для її розв'язання треба записати дванадцять скалярних рівнянь, в яких, в свою чергу, проекції векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} залежать від чотирьох змінних (трьох координат і часу). Отже, ясно, що розв'язання системи (1.52) – (1.55) – складна задача.

Приклад 1.6. Вектор напруженості електричного поля в повітрі змінюється згідно із законом $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E \sin(\omega t - \beta z)$. Визначити вектор напруженості магнітного поля, якщо $E = 100 \text{ мкВ/м}$, $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, $f = 1 \text{ МГц}$.

Розв'язок. Скористаємося другим рівнянням Максвелла в диференційній формі (для повітря $\mu_a = \mu_0$):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Обчислимо $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ в прямокутній системі координат. За умовою $E_y = E_z = 0$, тому

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Вектор \mathbf{E} не залежить від координати y , тобто

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \text{і} \quad \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathbf{e}_y \beta E \cos(\omega t - \beta z).$$

Підставляючи вираз для $\text{rot} \mathbf{E}$ в друге рівняння Максвелла, одержимо:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{e}_y \frac{\beta}{\mu_0} E (\omega t - \beta z).$$

Знаходимо вектор \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{e}_y \frac{\beta}{\mu_0} E \cos(\omega t - \beta z) dt = \mathbf{e}_y \left[\frac{\beta}{\omega \mu_0} E \sin(\omega t - \beta z) + C \right],$$

де C – стала інтегрування.

З фізичних міркувань слід прийняти $C = 0$, оскільки постійне магнітне поле не може збуджувати змінне електричне поле. Підстановка початкових даних приводить до наступного результату:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_y \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\omega \mu_0} E \sin(\omega t - \beta z) = \mathbf{e}_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \sin(\omega t - \beta z) = \\ &= \mathbf{e}_y 2,74 \cdot 10^{-7} \sin(2\pi \cdot 10^6 t - 13,1 \cdot 10^4 z), \quad \text{А/м.} \end{aligned}$$

1.2.4. Висновки з рівнянь Максвелла

Неперервність ліній повного струму. Одержимо рівняння неперервності ліній електричного струму. Застосуємо операцію дивергенції до обох частин рівняння (1.52) і врахуємо, що $\text{div} \text{rot} \mathbf{R} \equiv 0$. Тоді одержимо:

$$\text{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

або

$$\text{div} \mathbf{J} = -\text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.56)$$

Вектор $\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{повн}}$ представляє вектор густини **повного струму**.

Співвідношення (1.56) свідчить про те, що **лінії повного струму завжди неперервні**. Там, де обриваються лінії струму провідності \mathbf{J} , починаються лінії струмів зміщення $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ і навпаки (рис. 1.16).

Закон збереження заряду. Закон збереження заряду, сформульо-

ваний в п. 1.1.1 як дослідний закон, може бути одержаний з рівнянь Максвелла. З рівнянь (1.54) і (1.56) виходить рівність

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(рівняння неперервності в диференційній формі). Проінтегрувавши останній вираз за довільним об'ємом і виходячи з теореми Остроградського – Гаусса, одержимо:

$$\oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\frac{dQ}{dt}. \quad (1.57)$$

Знак «мінус» у виразі (1.57) свідчить про зменшення заряду в області V , якщо потік вектора густини струму позитивний (заряди «залишають» об'єм V), а якщо потік вектора \mathbf{J} через S негативний, то заряд в області V збільшується.

Релаксація зарядів в провідному середовищі. Розглянемо однорідне ізотропне середовище з параметрами ε_a , μ_a , σ . Якщо в такому середовищі розміщений деякий об'ємний заряд, то заряди взаємно відштовхуватимуться і концентрація зарядів з плином часу зменшуватиметься.

$$\text{Для даного середовища } \operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_a} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon_a} \rho. \text{ З рів-}$$

няння неперервності в диференційній формі $\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ одержимо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_a} \rho = 0. \text{ Розв'язком цього диференційного рівняння є функція}$$

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{t}{\tau_p}}, \quad (1.58)$$

де $\rho(0) = \rho(M, 0)$ – об'ємна густина заряду в довільній точці M у початковий момент часу $t = 0$; $\tau_p = \frac{\varepsilon_a}{\sigma}$ – **час релаксації середовища** (час, протягом якого густина заряду в точці M зменшується

в e раз). Для добре провідних середовищ час релаксації дуже малий. Для металів $\tau_p \approx 10^{-18} \text{ с}$, для морської води $\tau_p \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ с}$, для дистильованої води ($\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$) $\tau_p \approx 10^{-6} \text{ с}$. Для янтарю τ_p складає декілька годин. Тому час релаксації може служити основою для класифікації середовищ. Якщо $\tau_p \gg T$ (де T – характерний інтервал часу даного електромагнітного процесу, наприклад період коливання для гармонічного сигналу), то середовище є діелектриком, якщо $\tau_p \ll T$, то середовище – провідник. Для ідеального діелектрика $\tau_p = \infty$, для ідеального провідника $\tau_p = 0$.

Зменшення густини зарядів у середовищі не означає зникнення зарядів. Вони перерозподіляються в середовищі, і якщо, наприклад, дана область оточена непровідним середовищем, то заряди розподіляються тонким шаром на межі поділу середовищ.

1.2.5. Класифікація електромагнітних явищ

Системи рівнянь Максвелла (1.32) – (1.35), (1.41) – (1.43) і (1.52) – (1.55) описують всю різноманітність електромагнітних явищ макроскопічної електродинаміки.

За характером часової залежності електромагнітних процесів можна виділити класи задач, для яких система рівнянь Максвелла записується простіше і допускає аналітичний розв'язок.

Статичні поля. Ці поля характеризуються тим, що **вектори поля, заряди, положення заряджених і намагнічених тіл з часом не змінюються.** Це означає, що густина струму $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = 0$ і похідна

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$. При цьому система рівнянь Максвелла розбивається на дві незалежні підсистеми:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= 0, \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= q, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_a \mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= 0, \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

або в диференційній формі:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_a \mathbf{E}, \end{aligned} \right\}, \quad (1.61)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H}, \end{aligned} \right\}. \quad (1.62)$$

Рівняння (1.59), (1.61) описують явища **електростатики** і містять тільки вектори електричного поля, рівняння (1.60), (1.62) описують явища **магнітостатики**.

У статичних полях фізичний зв'язок між електричним і магнітним полями відсутній. Системи рівнянь електростатики і магнітостатики подібні, що дозволяє знаходити розв'язок задач магнітостатики, використовуючи методи розв'язання електростатичних задач, виконуючи формальну заміну $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$, $\rho \rightarrow 0$, $\varepsilon_a \rightarrow \mu_a$.

Стационарні поля характеризуються тим, що значення всіх величин, що описують електромагнітні процеси, незмінні. Умови стаціонарності записуються у вигляді $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{J} = \text{const} \neq 0$. **Стационарні поля** – це поля постійних струмів. Рівняння Максвелла записуються у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= I, \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= 0, \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= q, \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0, \end{aligned} \right\}, \quad (1.63)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\}. \quad (1.64)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

На відміну від статичних полів електричні і магнітні поля зв'язані між собою за законом Ома $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.

Квазістаціонарні поля. Це поля порівняно повільних електричних процесів, коли струмом зміщення порівняно із струмом провідності можна знехтувати. Умова квазістаціонарності $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx 0$,

$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$. При цьому враховується явище електромагнітної індукції

Фарадея і вважається, що магнітне поле збуджується тільки струмами провідності. Системи рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формі аналогічні системам (1.63), (1.64), в яких другі

рівняння записуються у вигляді $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ і $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

відповідно.

Швидкозмінні поля збуджуються в загальному випадку змінними струмами і зарядами високої частоти. Для опису електромагнітних явищ в цьому разі необхідно використовувати повні системи рівнянь Максвелла.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Записати рівняння Максвелла для векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} у разі однорідного ізотропного середовища.
2. Одержати рівняння Максвелла в диференційній формі з рівнянь в інтегральній формі.
3. Показати, що четверте рівняння Максвелла є наслідком другого.
4. Визначити вектор напруженості електричного поля за умови, що $H = 10^{-4} \text{ А/м}$, $f = 10^5 \text{ Гц}$, $\beta = \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, якщо вектор напруженості магнітного поля в повітрі змінюється згідно із законом $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H \cos(\omega t - \beta z)$.
5. Визначити вектор напруженості магнітного поля за умови, що $E = 1 \text{ мВ/м}$, $\alpha = 10^{-3} \text{ 1/м}$, $\beta = 30 \text{ 1/м}$, $f = 2 \text{ МГц}$, $\mu = 1$, вектор напруженості електричного поля $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$.
6. Визначити $\text{div } \mathbf{D}$ у середовищі з проникністю $\epsilon = 6$ і встановити, чи є заряди в області, де вектор напруженості електричного поля в сферичних координатах змінюється згідно із законом $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r 0,25r \text{ В/м}$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте умову макроскопічності електромагнітних явищ.
2. Назвіть і запишіть закони, що лежать в основі рівнянь електромагнітного поля.
3. Напишіть перше і друге рівняння Максвелла в інтегральній формі і поясніть їх фізичний зміст.
4. Запишіть третє і четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі і поясніть їх фізичний зміст.
5. Назвіть можливі шляхи переходу від інтегральної до диференційної форми запису рівнянь Максвелла.
6. Отримайте перше рівняння Максвелла в диференційній формі. Поясніть його фізичний зміст.
7. Одержіть друге рівняння Максвелла в диференційній формі і поясніть його фізичний зміст.
8. Одержіть рівняння неперервності електричного струму, а та-

кож третє і четверте рівняння Максвелла в диференційній формі та поясніть їх фізичний зміст.

9. Сформулюйте закон збереження заряду. Поясніть зміст релаксації зарядів в провідному середовищі.

10. Викладіть принцип класифікації електромагнітних явищ за характером часової залежності.

1.3. Система рівнянь Максвелла для монохроматичних полів

1.3.1. Метод комплексних амплітуд

Всі вектори і джерела електромагнітного поля в загальному випадку є функціями трьох просторових змінних і часу. До системи рівнянь Максвелла входять, відповідно, часткові похідні по цих змінних. Істотно спростити аналіз електромагнітних полів можна у разі гармонічних в часі коливань. Реальні електромагнітні поля завжди можна представити у вигляді суми монохроматичних коливань різних частот або неперервного спектра гармонічних коливань, представляючи функцію інтегралом Фур'є.

Відповідно до методу комплексних амплітуд кожній скалярній гармонічній функції

$$a(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.65)$$

ставиться у відповідність комплексна функція

$$\dot{a}(t) = ae^{j(\omega t + \varphi)} = \dot{a}e^{j\omega t}. \quad (1.66)$$

У виразах (1.65), (1.66) a – амплітуда коливання; ω – кругова частота; φ – початкова фаза; $\dot{a} = ae^{j\varphi} = a(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ – комплексна амплітуда.

Початкове коливання представляє реальну частину $\dot{a}(t)$:

$$a(t) = \operatorname{Re}\{\dot{a}(t)\} = \operatorname{Re}\{\dot{a}e^{j\omega t}\}.$$

Векторна гармонічна функція $\mathbf{R}(t)$ може бути записана так:

$$\mathbf{R}(t) = R_x \cos(\omega t + \varphi_1) \mathbf{e}_x + R_y \cos(\omega t + \varphi_2) \mathbf{e}_y + R_z \cos(\omega t + \varphi_3) \mathbf{e}_z. \quad (1.67)$$

У комплексній формі функцію $\mathbf{R}(t)$ подамо як

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\mathbf{R}} e^{j\omega t} = (\dot{R}_x \mathbf{e}_x + \dot{R}_y \mathbf{e}_y + \dot{R}_z \mathbf{e}_z) e^{j\omega t}, \quad (1.68)$$

де $\dot{\mathbf{R}}$ – комплексна амплітуда вектора $\mathbf{R} = \text{Re}\{\dot{\mathbf{R}}(t)\}$; $\dot{R}_x = R_x e^{j\varphi_1}$, $\dot{R}_y = R_y e^{j\varphi_2}$, $\dot{R}_z = R_z e^{j\varphi_3}$ – комплексні амплітуди складових $\dot{\mathbf{R}}$.

Розкладання в (1.67) проведено по ортах декартової системи координат, хоча принципово нічого не зміниться при використанні будь-якої іншої ортогональної системи координат.

В тому випадку, коли гармонічні функції $a(t)$ і $\mathbf{R}(t)$ задовольняють лінійним рівнянням, то таким самим рівнянням задовольнятимуть і комплексні амплітуди \dot{a} і $\dot{\mathbf{R}}$. Якщо в результаті розв'язання рівнянь невідома комплексна амплітуда буде визначена, то для отримання функції, що описує реальну фізичну величину, треба помножити комплексну амплітуду на $e^{j\omega t}$ і виділити реальну частину.

Приклад 1.7. Записати комплексне значення, комплексну і комплексно-спряжену амплітуди вектора $\mathbf{H}(t) = \mathbf{e}_x 25 \sin(\omega t - \beta z + \pi/4)$.

Розв'язок. Зводимо дійсний вектор \mathbf{H} до вигляду:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{e}_x 25 \cos(\pi/2 - \omega t + \beta z - \pi/4) = \mathbf{e}_x 25 \cos(\omega t - \beta z - \pi/4).$$

Записуємо комплексний вектор $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{e}_x 25 e^{j(\omega t - \beta z - \pi/4)}.$$

Записуємо комплексну амплітуду $\dot{\mathbf{H}}$: $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_x 25 e^{-j(\beta z + \pi/4)}$ і комплексно-спряжену амплітуду $\dot{\mathbf{H}}^* = \mathbf{e}_x 25 e^{j(\beta z + \pi/4)}$.

1.3.2. Рівняння Максвелла в комплексній формі

Рівняння Максвелла є лінійними диференційними рівняннями, тому при вивченні монохроматичних полів можна використовувати метод комплексних амплітуд. Це дає змогу спростити розв'язання

системи рівнянь Максвелла, адже в цьому разі вектор поля залежатиме тільки від координат і не залежатиме від частоти.

Одержимо рівняння Максвелла в комплексній формі. Для цього запишемо всі скалярні і векторні функції, що входять в систему (1.52) – (1.55), у вигляді (1.66), (1.68). Врахуємо при цьому, що диференціювання комплексної функції $\dot{a}(t)$ за часом еквівалентне множенню функції на $j\omega$.

Запишемо для монохроматичних процесів вектори ЕМП \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{J} і скалярні змінні в комплексному вигляді відповідно до (1.66), (1.68): $\dot{\mathbf{E}}(t) = \dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}$, ... , $\dot{\mathbf{H}}(t) = \dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}$, $\dot{\rho}(t) = \dot{\rho}e^{j\omega t}$ і підставимо їх у співвідношення (1.41) – (1.43), (1.52) – (1.55). Тоді **рівняння Максвелла в комплексній формі** матимуть наступний вигляд:

I, δ	$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega\dot{\mathbf{D}} = \sigma\dot{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon_a\dot{\mathbf{E}} = j\omega\dot{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}},$	(1.69)
II, δ	$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\dot{\mu}_a\dot{\mathbf{H}},$	(1.70)
III, δ	$\text{div } \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho},$	(1.71)
IV, δ	$\text{div } \dot{\mathbf{B}} = 0,$	(1.72)
V, δ	$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}},$	(1.73)
VI, δ	$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{B}}/\mu_a,$	(1.74)
VII, δ	$\dot{\mathbf{J}} = \sigma\dot{\mathbf{E}}.$	(1.75)

Рівняння (1.69) – (1.75) простіші, ніж (1.52) – (1.55), оскільки в них відсутні похідні за часом.

У співвідношенні (1.69)

$$\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_a} \right) \quad (1.76)$$

– **комплексна діелектрична проникність середовища**. Величина $\sigma/\omega\epsilon_a$, яка входить до виразу (1.76), залежить від частоти, а її значення дорівнює відношенню амплітуди струму провідності до амплітуди струму зміщення $|\dot{\mathbf{J}}_{\text{пр}}|/|\dot{\mathbf{J}}_{\text{зм}}| = |\dot{\mathbf{J}}|/|j\omega\dot{\mathbf{D}}| = \sigma/\omega\epsilon_a$ і називається **тангенсом кута діелектричних втрат** ($\sigma/\omega\epsilon_a = \text{tg } \delta$) (рис. 1.25).

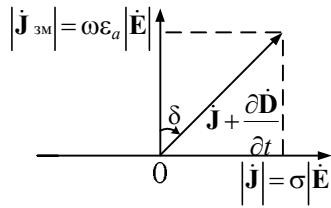


Рис. 1.25

Для кожного середовища можна ввести **поняття граничної частоти** $\omega_{\text{гр}}$, при якій амплітуди струмів провідності і зміщення однакові, $|\dot{J}_{\text{пр}}|/|\dot{J}_{\text{зм}}| = \sigma/\omega_{\text{кр}} \epsilon_a = \text{tg } \delta = 1$, звідки $\omega_{\text{кр}} = \sigma/\epsilon_a$.

Відзначимо, що, якщо не можна знехтувати поляризаційними втратами (втратами на періодичну зміну поляризації середовища) і магнітними втратами (втратами енергії на перемінну намагніченість середовища), то діелектрична і магнітна проникність середовища є комплексною і в рівняннях (1.69) – (1.75) величини ϵ_a , μ_a також комплексні. У рівняннях Максвелла в цьому випадку необхідно зробити заміну $\epsilon_a \rightarrow \dot{\epsilon}_a$, $\mu_a \rightarrow \dot{\mu}_a$: $\dot{\epsilon}_a = \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon'')$, $\dot{\mu}_a = \mu_0 (\mu' - j\mu'')$.

Дійсні величини ϵ' і μ' визначають фазовий зсув між векторами $\dot{\mathbf{D}}$, $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{H}}$ відповідно, а величини ϵ'' , μ'' враховують втрати у середовищі.

Підкреслимо, що з рівнянь (1.69), (1.70) одержуємо важливу властивість векторів ЕМП: **в ізотропному лінійному середовищі вектори $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ взаємно перпендикулярні**. Це виходить з того, що ротор вектора перпендикулярний самому вектору (п. 1.2.3). Так, з (1.70) виходить, що $\dot{\mathbf{H}} \parallel \text{rot } \dot{\mathbf{E}}$, але, оскільки $\text{rot } \dot{\mathbf{E}} \perp \dot{\mathbf{E}}$, то і $\dot{\mathbf{H}} \perp \dot{\mathbf{E}}$.

1.3.3. Класифікація середовищ за електричною провідністю

У попередньому пункті введене поняття комплексної діелектричної проникності $\dot{\epsilon}_a$ і рівняння Максвелла записані в узагальненій формі, придатній для опису ЕМП як в провідному, так і в непровідному середовищі. Критерієм, що визначає **провідні** властивості речовини, є співвідношення між струмом провідності і струмом зміщення або, що рівнозначно, між дійсною та уявною частинами $\dot{\epsilon}_a$.

У радіотехніці прийнято вважати середовище **провідником**, якщо $(\sigma/\epsilon_a \omega) > 5$, **хорошим провідником**, якщо $(\sigma/\epsilon_a \omega) > 100$, **діелектриком** – при $(\sigma/\epsilon_a \omega) < 0,2$ і **хорошим діелектриком** – при $\sigma/\epsilon_a \omega < 0,01$. У інтервалі значень $0,2 < (\sigma/\epsilon_a \omega) < 5$ середовище вважається **напівпровідним** (рис. 1.26).

Оскільки у співвідношення (1.76) входить частота, то деякі середовища на одних частотах можуть мати властивості провідників, на інших – діелектриків. Як видно з (1.76) і рис. 1.26, на високих частотах діелектричні властивості середовища виявляються сильнішими.

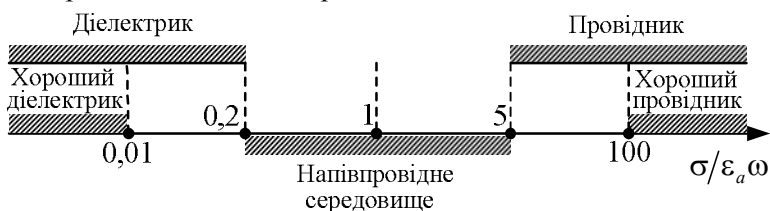


Рис. 1.26

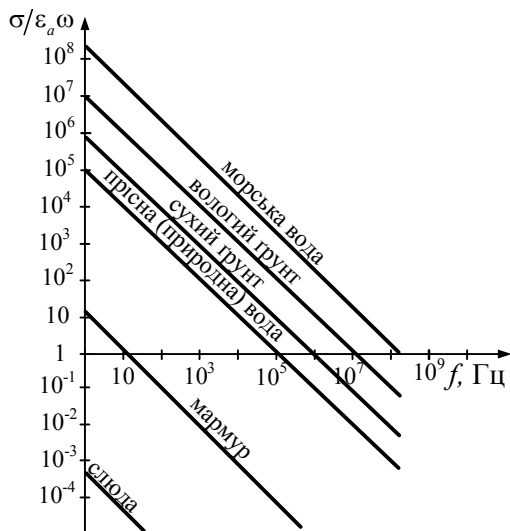


Рис. 1.27

На рис. 1.27 показано, як змінюється величина $\sigma/\epsilon_a \omega = 60\sigma\lambda/\epsilon$ для деяких поширених середовищ залежно від частоти. Як видно з рис. 1.27, вологий ґрунт, наприклад на частотах $f < 1 \text{ МГц}$, поводить себе як провідник, при $f > 100 \text{ МГц}$ – як діелектрик.

Приклад 1.8. Визначити, на якій частоті амплітуда струму зміщення в морській воді ($\sigma = 4 \text{ См/м}$, $\varepsilon = 80$) буде дорівнювати струму провідності.

Розв'язок. Струм провідності $J_{\text{пр}} = \sigma E$ рівний струму зміщення

$$J_{\text{зм}} = \omega \varepsilon_a E \text{ при } \sigma = \omega \varepsilon_a, \text{ звідки } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0}. \text{ Для заданих значень}$$

$$\sigma = 4 \text{ См/м}, \varepsilon = 80, (\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м}) \text{ одержимо } f = 9 \cdot 10^8 \text{ Гц.}$$

При частоті $f = 10^8 \text{ Гц}$ (метрові хвилі) величина $\frac{\sigma}{\varepsilon_a \omega} = 9 \gg 1$ (за радіотехнічною термінологією середовище поводитья як провідник), при $f = 10^{10} \text{ Гц}$ (сантиметрові хвилі) $\frac{\sigma}{\varepsilon_a \omega} = 0,09 \ll 1$ – середовище розглядається як діелектрик.

1.3.4. Сторонні струми і заряди.

Повна система рівнянь Максвелла

Досить часто струм (рух зарядів) створюється неелектромагнітним «стороннім» процесом – механічним, хімічним, тепловим та ін. Подібні сили неелектричного походження, що діють на електричні заряди, одержали назву **сторонніх сил**. Цим силам можна поставити у відповідність **напруженість електричного поля сторонніх сил $E^{\text{ст}}$** – таке поле, під дією якого заряди рухатимуться так само, як і під дією сторонніх сил. В більшості випадків наявність сторонніх сил враховують в записі закону Ома (1.43):

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}), \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{\text{ст}}. \quad (1.77)$$

З (1.77) видно, що при розв'язанні електродинамічних задач може бути задана напруженість сторонніх сил $E^{\text{ст}}$ або сторонній струм $J^{\text{ст}}$. При цьому природа виникнення $E^{\text{ст}}$, $J^{\text{ст}}$ не розглядається, а самі значення $E^{\text{ст}}$ або $J^{\text{ст}}$ вважаються заданими. Наприклад, при аналізі випромінювання вібратора (рис. 1.28) вважають, що струм у вібраторі відомий (заданий), і не розглядають процеси, що відбуваються в генераторі, лінії передач і ін. У вібраторі і навколишньому середовищі, включаючи розрив провідника (об'єм ΔV), збуджується електричне поле \mathbf{E} . При аналізі поля випромінювання вібратора можна умовно усунути розрив Δ у вібраторі (рис. 1.28, а) і вважати,

що в об'ємі ΔV неперервного провідника прикладена стороння напруженість електричного поля $\mathbf{E}^{\text{ст}}$, відмінна від нуля в області ΔV (рис. 1.28, б). Напруженість стороннього поля $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ вважається заданою функцією координат і часу. Така модель істотно спрощує розв'язання електродинамічних задач.

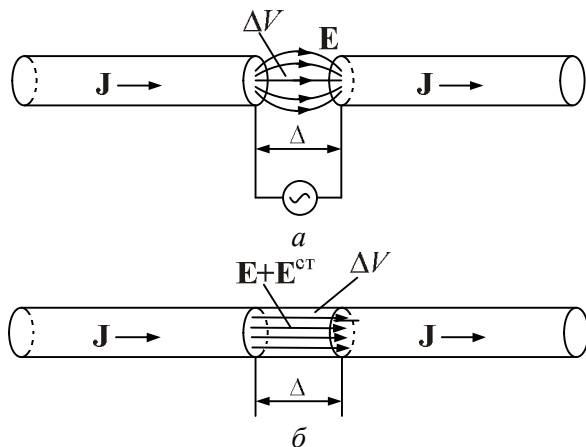


Рис. 1.28

Врахування сторонніх струмів приводить до зміни запису першого рівняння Максвелла (1.52):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}^{\text{ст}}, \quad (1.78)$$

де \mathbf{J} – густина струмів провідності, викликана електричним полем \mathbf{E} : $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$; $\mathbf{J}^{\text{ст}} = \sigma \mathbf{E}^{\text{ст}}$ – густина сторонніх струмів.

Аналогічно вводиться поняття сторонніх зарядів. При цьому рівняння (1.54) набуває вигляду

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho + \rho^{\text{ст}}, \quad (1.79)$$

де $\rho^{\text{ст}}$ – об'ємна густина сторонніх зарядів.

У разі змінного поля сторонні струми і заряди зв'язані рівнянням неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{ст}} = -\frac{\partial \rho^{\text{ст}}}{\partial t}. \quad (1.80)$$

У разі монохроматичних полів рівняння Максвелла можуть бути записані у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{J}^{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} &= \dot{\rho} + \dot{\rho}^{\text{ст}}, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.81)$$

Повна система рівнянь Максвелла формулюється з урахуванням наявності сторонніх струмів і зарядів, рівняння (1.52), (1.54) мають бути змінені згідно з (1.78), (1.79), а рівняння (1.69) – (1.72) – системою (1.81).

Завдання для самостійного розв'язку

1. Записати комплексний вираз для вектора і комплексну амплітуду вектора $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 50 \cos(\omega t - \beta z - \pi/4) + \mathbf{e}_y 20 \sin(\omega t - \beta z)$.

2. Записати вираз для миттєвого значення вектора, якщо його комплексна амплітуда $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_r 40 e^{-j(\beta z + \pi/2)} - \mathbf{e}_\varphi 30 e^{-j(\beta z + \pi/2)}$.

3. Вектор напруженості електричного поля задовольняє рівнянню $\mathbf{E}(M, t) = (5\mathbf{e}_x + 2x^2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \sin \omega t$. Визначити $\mathbf{H}(M, t)$.

4. Визначити частоту f_0 , при якій амплітуди густини струму зміщення і густини струму провідності будуть рівні в заданому середовищі:

а) морська вода: $\epsilon = 80$; $\sigma = 4 \text{ См/м}$;

б) прісна вода: $\epsilon = 80$; $\sigma = 2 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}$;

в) вологий ґрунт: $\epsilon = 10$; $\sigma = 10^{-1} \text{ См/м}$.

5. Обчислити на частотах $f_1 = 2 \text{ МГц}$; $f_2 = 200 \text{ МГц}$ тангенс кута діелектричних втрат заданого середовища і зробити висновок щодо характеру середовища:

а) гетинакс: $\epsilon = 6$; $\sigma = 10^{-9} \text{ См/м}$;

б) слюда: $\epsilon = 5,5$; $\sigma = 10^{-13} \text{ См/м}$;

в) парафін: $\varepsilon = 2,2$; $\sigma = 10^{-15}$ См/м;

г) кварц: $\varepsilon = 4,5$; $\sigma = 2 \cdot 10^{-17}$ См/м.

Питання для самоперевірки

1. Напишіть вирази гармонічних коливань в комплексній формі.
2. Запишіть систему рівнянь Максвелла в комплексній формі.
3. Поясніть принцип класифікації середовищ за їх електричною провідністю.
4. Наведіть поняття сторонніх електричних струмів, зарядів і полів.
5. Запишіть повну систему рівнянь Максвелла в диференційній формі для монохроматичних полів.

1.4. Граничні умови для векторів електромагнітного поля

Властивості електромагнітного поля, які описуються рівняннями Максвелла, сформульовані в інтегральній (1.32) – (1.35) і в диференційній (1.52) – (1.55) формах. Реально електромагнітні явища відбуваються в областях простору, які мають певні межі, що розділяють середовища з різними електромагнітними властивостями. На цих межах (межах поділу середовищ) параметри середовищ змінюються стрибками. Зазначимо, що в природі миттєвих змін немає, є вельми швидкий і плавний перехід від одних значень параметрів середовища до інших. Але в наближенні **макроскопічної електродинаміки** можна припустити, що різкі межі поділу середовищ існують. При цьому рівняння Максвелла в інтегральній формі залишаються справедливими, а в диференційній формі, де рівняння включають похідні векторів поля по координатах, вони втрачають зміст у точках, де параметри середовища (і вектори ЕМП) терплять розрив. Тому системі рівнянь Максвелла необхідно доповнити співвідношеннями для векторів ЕМП на межах поділу середовищ там, де параметри $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ змінюються стрибкоподібно. Граничні умови можна знайти, записуючи рівняння Максвелла в інтегральній формі в областях, що включають межі поділу середовищ, і виконуючи граничний перехід у відповідних рівняннях.

1.4.1. Граничні умови для нормальних складових ЕМП

Розглянемо поверхню S , що поділяє перше середовище з параметрами $\varepsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1$ і друге середовище $\varepsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2$ (рис. 1.29).

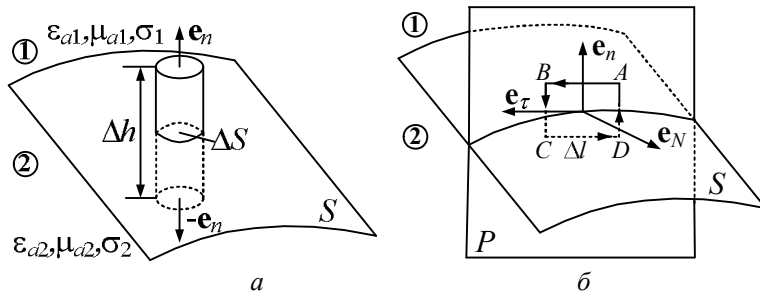


Рис. 1.29

Вектори поля в першому середовищі $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1$, в другому – $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{B}_2$. Запишемо третє рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (1.82)$$

Як поверхню S виберемо поверхню малого циліндра заввишки Δh , що перетинає межу поділу двох середовищ перпендикулярно до межі (рис. 1.29, а). Через мализну циліндра можна вважати, що поле на основах циліндра ΔS є однорідним, і рівняння (1.34) запишемо у вигляді

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{e}_n \Delta S - \mathbf{D}_2 \mathbf{e}_n \Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \Delta q,$$

де $\int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} d\mathbf{S}$ – потік вектора \mathbf{D} через бічну поверхню циліндра, Δq –

заряд усередині циліндра. Необмежено зменшуючи висоту циліндра так, щоб основи ΔS залишалися в різних середовищах, при $\Delta h \rightarrow 0$ одержимо, що основи циліндра збігаються з елементом ΔS межі

середовищ, $\int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} d\mathbf{S} \rightarrow 0$, $\frac{\Delta q}{\Delta S} \rightarrow \rho_s$, звідки

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{e}_n = \rho_s \quad \text{або} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s. \quad (1.83)$$

У виразі (1.83) ρ_s – поверхнева густина зарядів. Таким чином, при переході з одного середовища в інше нормальна складова вектора електричної індукції \mathbf{D} змінюється стрибком на величину поверхневої густини вільних зарядів, розподілених уздовж межі поділу середовищ. Якщо заряди ρ_s на поверхні поділу відсутні ($\rho_s = 0$), то нормальна складова D_n під час переходу межі середовищ залишається неперервною.

Використовуючи четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі і виконуючи аналогічні перетворення, одержимо:

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{e}_n = 0 \quad \text{або} \quad B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad (1.84)$$

Отже, нормальна складова вектора магнітної індукції \mathbf{B} завжди неперервна.

1.4.2. Граничні умови для тангенційних складових ЕМП

Перетнемо межу поділу S двох середовищ площиною P , яка містить нормаль \mathbf{e}_n до S , і побудуємо прямокутний контур $ABCD$, що лежить в обох середовищах (рис. 1.29, б). Вважатимемо, що сторони AB і CD паралельні пересіченій ділянці межі і позначимо $AB = CD = \Delta l$, $BC = AD = \Delta h$. Введемо орт дотичної до межі поділу \mathbf{e}_τ і орт нормалі \mathbf{e}_N до площини P так, що $\mathbf{e}_N = [\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_\tau]$. Запишемо друге рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Як контур L виберемо контур $ABCD$, напрям обходу котрого показаний на рис. 1.29, б. Прийmemo, що контур досить малий, тому поле в його межах можна вважати однорідним. Тоді одержимо

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{e}_\tau \Delta l - \mathbf{E}_2 \mathbf{e}_\tau \Delta l + \int_{BC} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_{\Delta P} \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (1.85)$$

де ΔP – площа контура $ABCD$. Спрямуємо тепер Δh до нуля так, щоб сторони AB і CD збіглися на межі поділу середовищ. Тоді з (1.85) одержимо:

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{e}_\tau - \mathbf{E}_2 \mathbf{e}_\tau = 0, \quad \text{або} \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (1.86)$$

Співвідношення (1.86) показують, що **при переході з одного середовища в інше тангенційна складова вектора \mathbf{E} завжди неперервна**. Умову (1.86) часто записують у вигляді $[\mathbf{e}_n, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0$.

Виконуючи аналогічні записаним вище перетворення з першим рівнянням Максвелла в інтегральній формі, одержимо граничні умови для тангенційної складової вектора \mathbf{H} у вигляді

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{e}_N = J_{SN} \quad \text{або} \quad [\mathbf{e}_n, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \mathbf{J}_s, \quad (1.87)$$

де $J_{SN} = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{e}_N$ – проекція вектора лінійної густини поверхневого струму \mathbf{J}_s на орт \mathbf{e}_N .

Співвідношення (1.87) означають, що **під час переходу межі поділу двох середовищ тангенційна складова вектора \mathbf{H} може зазнавати розриву**, величина якого дорівнює проекції вектора густини поверхневого струму на напрям вектора \mathbf{e}_N , що створює праву трійку з векторами $\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n$ (рис. 1.29, б).

1.4.3. Повна система граничних умов.

Граничні умови на поверхні ідеального провідника

Запишемо **повну систему граничних умов** на поверхні поділу двох середовищ в скалярній і векторній формі:

Скалярна форма запису

Векторна форма запису

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \rho_s \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau} \\ B_{1n} &= B_{2n} \\ H_{1\tau} - H_{2\tau} &= J_{SN} \end{aligned} \right\}, \quad (1.88)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{e}_n &= \rho_s \\ [\mathbf{e}_n, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] &= 0 \\ (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{e}_n &= 0 \\ [\mathbf{e}_n, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] &= \mathbf{J}_s \end{aligned} \right\}. \quad (1.89)$$

Зазначимо, що системи (1.88), (1.89) включають тільки чотири компоненти векторів \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} – D_n , E_τ , B_n , H_τ . Решту скла-

дових векторів (D_τ, E_n, B_τ, H_n) можна знайти, використовуючи матеріальні рівняння (1.41), (1.42).

Приклад 1.9. Поблизу межі двох діелектриків вектор електричного поля в першому середовищі ($\epsilon_1 = 3$) спрямований під кутом $\theta_1 = 30^\circ$ до нормалі (рис. 1.30). Знайти кут θ_2 , який складає вектор \mathbf{E}_2 з нормаллю в другому середовищі ($\epsilon_2 = 6$). Поверхневі заряди на межі поділу середовищ відсутні.

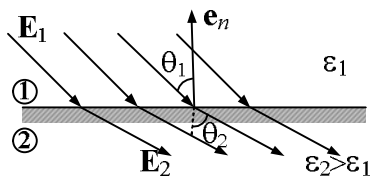


Рис. 1.30

Розв'язок. Відповідно до формули (1.88) $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $D_{1n} = D_{2n}$ або $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$, $\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$. Поділивши почленно праві і ліві частини двох останніх рівностей, одержимо $\frac{1}{\epsilon_1} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \operatorname{tg} \theta_2$, звідки

$\theta_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \operatorname{tg} \theta_1 \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{6}{3} \operatorname{tg} 30^\circ \right) \approx 49^\circ$ (рис. 1.30). Отже, під час переходу через межу поділу середовищ вектори електромагнітного поля заломлюються. Відзначимо, що, якщо $\epsilon_2 \rightarrow \infty$, то кут $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ незалежно від орієнтації вектора \mathbf{E} в першому середовищі.

Важливим для практики є випадок, коли друге середовище є ідеальним провідником ($\sigma_2 \rightarrow \infty$). До цього випадку можна наближено віднести тіла, виконані з добрепровідних металів. При цьому граничні умови спрощуються, оскільки поле в другому середовищі відсутнє $\mathbf{E}_2 = 0$, $\mathbf{B}_2 = 0$ (інакше, відповідно до закону Ома (1.43), густина струму $\mathbf{J}_2 \rightarrow \infty$). Для випадку змінних полів струм проходить усередині вельми тонкого поверхневого шару (поверхневий струм). При $\sigma_2 \rightarrow \infty$ граничні умови (1.88), (1.89) приймають вигляд

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} &= \rho_s \\ E_{1\tau} &= 0 \\ B_{1n} &= 0 \\ H_{1\tau} &= J_{SV} \end{aligned} \right\}, \quad (1.90)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{D}_1 \mathbf{e}_n) &= \rho_s \\ [\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_1] &= 0 \\ (\mathbf{B}_1, \mathbf{e}_n) &= 0 \\ [\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_1] &= \mathbf{J}_s \end{aligned} \right\}. \quad (1.91)$$

Із співвідношень (1.90) виходить, що **вектори електричного поля \mathbf{D} і \mathbf{E} на межі поділу з ідеально провідним середовищем перпендикулярні провідній поверхні, а вектори магнітного поля \mathbf{B} , \mathbf{H} – паралельні** (рис. 1.31).

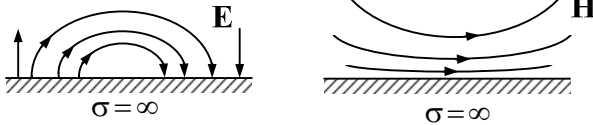


Рис. 1.31

Використовуючи перше рівняння Максвелла і граничні умови, можна встановити важливі властивості поля біля межі провідника. Запишемо перше рівняння Максвелла (1.52) з урахуванням (1.90)

$$[\nabla, \mathbf{H}_{1\tau}] = \left(\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} + \sigma E_{1n} \right) \mathbf{e}_n. \quad (1.92)$$

Представимо оператор ∇ у вигляді $\nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial n}$, де оператор ∇_{\perp} означає диференціювання по координатах площини поділу середовищ, а $\mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial n}$ – диференціювання по нормалі до межі поділу. Тоді з (1.92) одержимо

$$[\nabla_{\perp}, \mathbf{H}_{1\tau}] + \left[\mathbf{e}_n, \frac{\partial \mathbf{H}_{1\tau}}{\partial n} \right] = \left(\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} + \sigma E_{1n} \right) \mathbf{e}_n. \quad (1.93)$$

Ліва частина рівності (1.93) є сумою нормального $[\nabla_{\perp}, \mathbf{H}_{1\tau}]$ і

тангенційного $\left[\mathbf{e}_n, \frac{\partial \mathbf{H}_{1\tau}}{\partial n} \right]$ вектора, права – тільки нормальний вектор. Для виконання рівності необхідне виконання $\left[\mathbf{e}_n, \frac{\partial \mathbf{H}_{1\tau}}{\partial n} \right] = 0$, звідки

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{1\tau}}{\partial n} = 0. \quad (1.94)$$

Так само з другого рівняння (1.53) можна одержати, що

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{1n}}{\partial n} = 0. \quad (1.95)$$

Отже, структура електромагнітного поля **біля межі ідеального провідника** така, що **тангенційна складова магнітного поля H_τ і нормальна складова електричного поля E_n досягають екстремальних значень** (рис. 1.31).

Приклад 1.10. Два середовища поділені пласкою межею (площиною XOY), що несе поверхневий струм. Поле в другому середовищі відсутнє. Показати, що в другому середовищі магнітне поле паралельне межі.

Розв'язок. За умовою задачі друге середовище є ідеальним провідником, в якому відсутнє поле, а по поверхні проходить поверхневий струм.

Граничні умови для вектора \mathbf{H} в цьому випадку мають вигляд:

$$H_{1n} = 0, \quad H_{1\tau} = J_s.$$

Повний вектор $\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_n H_{1n} + \mathbf{e}_\tau H_{1\tau} = \mathbf{e}_\tau J_s$, що і потрібно було довести.

1.4.4. Фізична суть граничних умов

Як виходить з наведених вище результатів, під час переходу через межу поділу двох середовищ тангенційні і нормальні (по відношенню до поверхні) компоненти векторів поля поведуться по-різному. Наприклад, тангенційна компонента вектора \mathbf{E} завжди неперервна, а нормальна – змінюється стрибком; нормальна складова вектора \mathbf{B} неперервна, а тангенційна зазнає розриву. Фізична

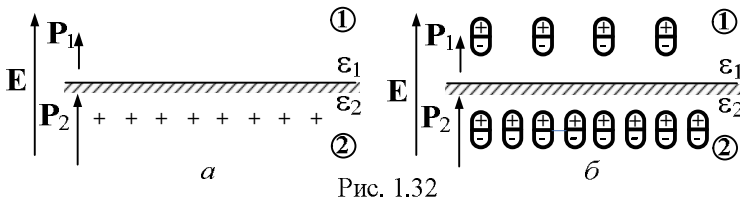
причина цих відмінностей полягає в залежності процесів поляризації і намагнічування в граничних середовищах від орієнтації векторів поля щодо межі поділу.

Проілюструємо це на прикладі граничних умов для векторів електричного поля.

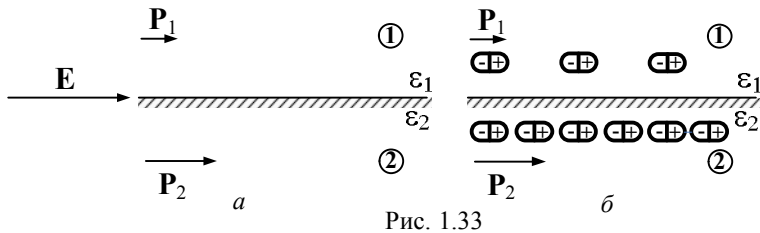
Нехай є два ізотропні середовища з діелектричними проникностями ϵ_1 і ϵ_2 і $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Для простоти вважатимемо, що на межі поділу цих середовищ вільні поверхневі заряди відсутні ($\rho_s = 0$).

Під дією зовнішнього електричного поля обидва середовища поляризуються, причому, оскільки $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, то вектор поляризації \mathbf{P} в цих середовищах матиме різні значення.

Якщо вектор \mathbf{E} перпендикулярний поверхні поділу (рис. 1.32, *a*), то внаслідок поляризації на ній з'являється нескомпенсовані поверхневі заряди, зв'язані з молекулами речовини. Це умовно показано на рис. 1.32, *б* (у другому середовищі виникає більше диполів, ніж в першому, оскільки $\epsilon_2 > \epsilon_1$), і для даного випадку нескомпенсовані заряди будуть позитивними.



Якщо вектор \mathbf{E} паралельний поверхні поділу, то, як видно з рис. 1.33, в результаті поляризації нескомпенсовані поверхневі заряди не виникають через іншу орієнтацію диполів.



При довільній орієнтації вектора \mathbf{E} у поверхні поділу величина некомпенсованих поверхневих зарядів визначається зміною значень нормальної складової вектора \mathbf{P} під час переходу через межу поділу.

Напруженість поля в кожному з середовищ складатиметься з напруженості \mathbf{E} первинного електричного поля (вона неперервна, оскільки джерел зовнішнього електричного поля на межі немає) і напруженості додаткового електричного поля $\mathbf{E}^{\text{дод}}$, що створюється некомпенсованими "зв'язаними" поверхневими зарядами. Вектор $\mathbf{E}^{\text{дод}}$ в кожній точці перпендикулярний поверхні поділу в першому і другому середовищах, рівний за величиною і протилежний за напрямком.

Отже, **нормальна складова напруженості повного електричного поля**, яке складається з первинного поля і поля "зв'язаних зарядів", що виникають внаслідок поляризації, **матиме розрив** на межі поділу ($E_{1n} \neq E_{2n}$), тангенційна складова (дотична) буде неперервна ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$).

Вектор \mathbf{D} був введений співвідношенням $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. У випадку, що розглядається, за відсутності вільних поверхневих зарядів на межі ($\rho_s = 0$) розриви нормальних складових векторів $\epsilon_0 \mathbf{E}$ і \mathbf{P} будуть однакові за величиною і протилежні за напрямком. Тому за відсутності вільних поверхневих зарядів на межі поділу нормальна складова вектора \mathbf{D} неперервна ($\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n}$). Дотична складова вектора \mathbf{E} , як показано вище, неперервна, а дотична складова вектора \mathbf{P} має різні значення в середовищах I і II, оскільки $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Отже, дотична (тангенційна) складова вектора \mathbf{D} зазнає розриву ($\mathbf{D}_{1\tau} \neq \mathbf{D}_{2\tau}$).

Якщо на межі поділу двох середовищ існують вільні поверхневі заряди, то це не змінює характер граничних умов для тангенційних складових. Як і раніше, $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ і $\mathbf{D}_{1\tau} \neq \mathbf{D}_{2\tau}$. А для нормальних складових граничні умови змінюються ($\mathbf{D}_{1n} \neq \mathbf{D}_{2n}$), оскільки розрив P_n залишається таким самим, а розрив $\epsilon_0 E_n$ змінюється на величину ρ_s .

Аналогічно, використовуючи уявлення про **молекулярні струми**, що наводяться біля межі поділу під дією зовнішнього магнітного поля, можна пояснити особливості поведінки векторів магнітного поля під час переходу через межу поділу двох середовищ. Зокрема

рис. 1.34 пояснює стрибок тангенційної компоненти вектора \mathbf{H} за наявності поверхневого струму \mathbf{J}_s .

На рисунку показано **сліди ліній поверхневого струму** на межі двох середовищ (лінії струму будуть перпендикулярні площині креслення).

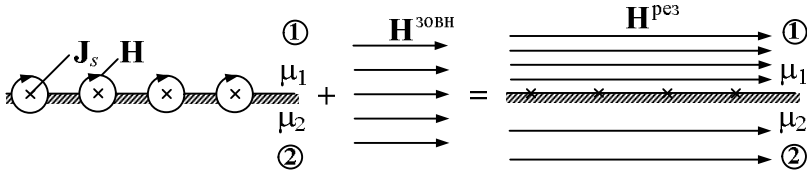


Рис. 1.34

З рис. 1.34 видно, що, якщо $\mathbf{J}_s \neq 0$, то при переході з одного середовища в інше компонента \mathbf{H}_τ має розрив.

Завдання для самостійного розв'язку

1. Два ідеальні діелектрики, що мають відносні діелектричні проникності $\epsilon_1 = 2,5$ і $\epsilon_2 = 6$, розділяє нескінченна площина XOY . У першому діелектрику на межі поділу вектор $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_x \sin \omega t + \mathbf{e}_z E_z \sin \omega t$, де $E_x = 10 \text{ мВ/м}$, $E_z = 5 \text{ мВ/м}$, $f = 10 \text{ кГц}$. Вісь OZ спрямована по нормалі до межі поділу. Визначити:

а) вектор напруженості електричного поля \mathbf{E}_2 в другому середовищі;

б) кут нахилу \mathbf{E}_2 до межі поділу;

в) вектори електричного зміщення \mathbf{D}_1 і \mathbf{D}_2 в обох середовищах.

2. Два середовища, що мають параметри $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 16$, розділяє нескінченна площина XOY . У другому середовищі вектор напруженості магнітного поля $\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_y H_y \cos \omega t + \mathbf{e}_z H_z \cos \omega t$, де $H_y = 0,01 \text{ А/м}$, $H_z = 0,2 \text{ А/м}$, $f = 1 \text{ МГц}$. Вісь OZ спрямована по нормалі до межі поділу. Визначити:

а) вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H}_1 в першому середовищі;

б) кут нахилу вектора \mathbf{H}_1 до межі поділу;

в) вектори магнітної індукції \mathbf{B}_1 і \mathbf{B}_2 в обох середовищах.

3. Два ідеальні діелектрики розділяє нескінченна площина XOY . Вектори напруженостей електричного поля спрямовані щодо осі OZ нормальної межі поділу під кутами $\theta_1 = \pi/6$ в першому діелектрику і $\theta_2 = \pi/3$ в другому. Визначити:

а) діелектричну проникність другого діелектрика, якщо $\epsilon_1 = 6$;

б) вектор напруженості електричного поля \mathbf{E}_2 в другому діелектрику, якщо модуль вектора в першому середовищі $E_1 = 7 \text{ мкВ/м}$.

4. Нескінченна пласка межа розділяє два середовища. Параметри першого середовища: $\mu_1 = 5$, $\sigma_1 = 0$. Площина межі поділу збігається з площиною XOY декартової системи координат, вісь OZ нормальна до межі поділу. У першому середовищі вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H}_1 спрямований під кутом $\theta_1 = \pi/4$ щодо осі, в другому середовищі $\theta_2 = \pi/3$. Визначити:

а) магнітну проникність другого середовища;

б) вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H}_2 в другому середовищі, якщо модуль вектора в першому середовищі $H_1 = 30 \text{ мА/м}$.

5. Вектор напруженості електричного поля в повітрі ($\epsilon_1 = 1$) над поверхнею діелектрика ($\epsilon_2 = 2,5$) спрямований під кутом $\pi/3$ до зовнішньої нормалі, спрямованої в перше середовище. Визначити:

а) кут між вектором напруженості електричного поля в другому середовищі і нормаллю;

б) вектор електричного зміщення в діелектрику, якщо модуль вектора напруженості електричного поля в повітрі $E_1 = 40 \text{ мкВ/м}$.

Питання для самоперевірки

1. Поясніть необхідність введення граничних умов для векторів поля.

2. Запишіть вирази граничних умов для нормальних і тангенціальних складових векторів електричного і магнітного полів. Поясніть фізичний зміст граничних умов.

3. Запишіть граничні умови на межі ідеального провідника і поясніть їх фізичний зміст.

4. Запишіть повну систему граничних умов в скалярній і векторній формах.

5. Поясніть характер структури електромагнітного поля біля межі ідеального провідника.

1.5. Енергія електромагнітного поля.

Теорема Пойнтінга

Електромагнітне поле є однією з форм матерії і як будь-яка форма матерії ЕМП має енергію. Вона передається електромагнітному полю сторонніми джерелами, може накопичуватися, переноситися, перетворюватися в інші види енергії. Розглянемо енергетичні співвідношення в електромагнітному полі.

1.5.1. Рівняння балансу миттєвих значень потужності

Виділимо в просторі деякий об'єм V , обмежений поверхнею S , в якому існує електромагнітне поле, і складемо рівняння балансу енергії W в об'ємі V (рис. 1.35).

Виходитимемо з **фундаментального закону фізики – закону збереження енергії**. З фізичних уявлень очевидно, що енергія сторонніх джерел в об'ємі V змінює в ньому запас енергії, витрачається на джоулеві втрати і може частково випромінюватися в навколишнє середовище V через поверхню S .

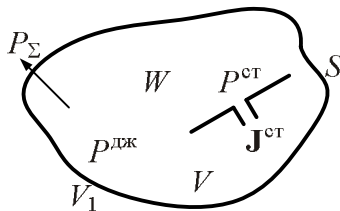


Рис. 1.35

При цьому для області V має виконуватися рівність

$$P^{\text{ст}} = \frac{dW}{dt} + P^{\text{дж}} + P_{\Sigma}, \quad (1.96)$$

де $P^{\text{ст}}$ – потужність сторонніх джерел; $\frac{dW}{dt}$ – потужність, що витрачається на зміну енергії в об'ємі V ; $P^{\text{дж}}$ – потужність втрат; P_{Σ} – потужність, що проходить через поверхню S .

Знак перед похідною вибраний з фізичних міркувань: якщо потужність сторонніх джерел більше потужності втрат $P^{\text{ст}} > (P^{\text{дж}} + P_{\Sigma})$, то запас енергії в області V збільшується ($\frac{dW}{dt} > 0$), якщо втрати і потужність, що проходить через S , переважають $(P^{\text{дж}} + P_{\Sigma}) > P^{\text{ст}}$, запас енергії зменшується ($\frac{dW}{dt} < 0$).

Враховуватимемо тільки джоулеві втрати, зумовлені струмом провідності. Втрати енергії на поляризацію і намагніченість середовища враховувати не будемо.

Знайдемо величини, що входять в рівняння балансу енергії (1.96), використовуючи рівняння Максвелла. При цьому вважатимемо, що об'єм V заповнений однорідним і ізотропним діелектриком.

Помножимо перше рівняння Максвелла (1.78) скалярно на \mathbf{E} , а друге (1.53) на \mathbf{H} і віднімемо від першого друге. Одержимо

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{E} \mathbf{J} + \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \mathbf{E} \mathbf{J}^{\text{ст}}. \quad (1.97)$$

Враховуючи тотожність $\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ (див. додаток Е) і вираз (1.77), перетворимо (1.97) до вигляду

$$\mathbf{E} \mathbf{J} + \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{E} \mathbf{J}^{\text{ст}}. \quad (1.98)$$

Вираз (1.98) подібно до (1.96) описує **баланс потужності електромагнітного поля і називається теоремою Пойнтінга в диференційній формі**.

Проінтегруємо рівняння (1.98) почленно за об'ємом V . Об'ємний інтеграл $\int_V \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]dV$ перетворимо, використовуючи теорему Остроградського – Гаусса і позначаючи $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$. Тоді одержимо:

$$\int_V \mathbf{E}\mathbf{J}dV + \oint_S \mathbf{\Pi}d\mathbf{S} + \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = - \int_V \mathbf{E}\mathbf{J}^{\text{ct}} dV. \quad (1.99)$$

Вектор $\mathbf{\Pi}$ зветься **вектором Пойнтінга**, має розмірність Bm/m^2 і **визначає густину потоку потужності в кожній точці області, де існує ЕМП**. Його величина визначає кількість енергії, що переносить ЕМП в одиничний час крізь одиничну площу, яка перпендикулярна $\mathbf{\Pi}$.

Перетворимо в (1.99) вираз в круглих дужках:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \varepsilon_a \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_a \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} + \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_a \mathbf{E}^2 + \mu_a \mathbf{H}^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Підставляючи (1.100) в (1.99) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання, остаточно одержимо

$$\int_V \mathbf{E}\mathbf{J}dV + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_a \mathbf{E}^2 + \mu_a \mathbf{H}^2) dV \right] + \oint_S \mathbf{\Pi}d\mathbf{S} = - \int_V \mathbf{E}\mathbf{J}^{\text{ct}} dV. \quad (1.101)$$

Дане співвідношення описує **баланс потужності електромагнітного поля в об'ємі V і називається теоремою Пойнтінга в інтегральній формі (закон збереження енергії в ЕМП)**.

Проаналізуємо отриманий вираз.

Перший доданок в лівій частині (1.101) відмінний від нуля, якщо провідність середовища σ не дорівнює нулю. Цей доданок характеризує потужність, яка розсіюється в даному об'ємі. Так, вважати-мемо, що елемент dV нескінченно малий куб із стороною a , пер-

пендикулярною вектору струму \mathbf{J} .

Тоді

$$\mathbf{E}\mathbf{J}dV = (Ea)(Ja^2) = dU \cdot dI = dP^{\text{дж}},$$

де $dU = Ea$ – зміна потенціалу на довжині a ; $dI = Ja^2$ – струм, що проходить по елементу dV ; $dP^{\text{дж}}$ – потужність джоулевих втрат в об'ємі dV . Таким чином, перший доданок $P^{\text{дж}} = \int_V \mathbf{E}\mathbf{J}dV$ можна роз-

глядати як узагальнений закон Джоуля – Ленца для провідного середовища, а величину $P^{\text{дж}}$ – як потужність джоулевих втрат в об'ємі V .

Права частина рівності (1.101) формально збігається з розглянутим доданком і описує потужність сторонніх джерел. Цю потужність вважатимемо позитивною, якщо стороннє джерело віддає свою енергію полю. Якщо позитивний заряд помістити в полі, то він почне рухатися і енергія поля витрататиметься на цей рух. Щоб енергія поля збільшувалася, напрям $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ має бути протилежним вектору \mathbf{E} . Тоді при гальмуванні заряджених частинок струм віддаватиме енергію електромагнітному полю. Позначимо миттєве значення потужності, що віддається сторонніми джерелами $P^{\text{ст}} = -\int_V \mathbf{E}\mathbf{J}^{\text{ст}} dV$.

Для з'ясування фізичного змісту **третього доданку** в лівій частині виразу (1.101) припустимо, що поверхня S є ідеально провідною. Тоді цей доданок рівний нулю, оскільки поле \mathbf{E} на поверхні S внаслідок (1.90) має тільки нормальну компоненту, а вектор $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}_n, \mathbf{H}]$ – тангенційну. Вектори $\mathbf{\Pi}$ і $d\mathbf{S}$ ортогональні, і їх скалярний добуток дорівнює нулю. Одержимо ізольовану від зовнішнього середовища область V , для якої рівняння (1.101) набуває вигляду

$$P = -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V (\epsilon_a \mathbf{E}^2 + \mu_a \mathbf{H}^2) dV \right]. \quad (1.102)$$

Тут

$$P = P^{\text{дж}} - P^{\text{ст}} = -\frac{dW}{dt} \quad (1.103)$$

– швидкість зміни енергії W , зосередженої в об'ємі V .

Порівнюючи (1.102) і (1.103), можна зробити висновок, що вираз в квадратних дужках є **енергією електромагнітного поля, що міститься в об'ємі V** :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_a \mathbf{E}^2 + \mu_a \mathbf{H}^2) dV = W^e + W^m, \quad (1.104)$$

де $W^e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a \mathbf{E}^2 dV$, $W^m = \frac{1}{2} \int_V \mu_a \mathbf{H}^2 dV$ – енергія електричного і магнітного поля в області V відповідно.

У співвідношенні (1.104) $\frac{1}{2} \epsilon_a \mathbf{E}^2 = w^e$ і $\frac{1}{2} \mu_a \mathbf{H}^2 = w^m$ – миттєве значення об'ємної густини енергії електричного і магнітного поля відповідно; $w = w^e + w^m$ – об'ємна густина повної енергії електромагнітного поля.

Приклад 1.11. У поліетиленовому заповненні коаксіального кабелю напруженість електричного поля дорівнює $E = 10^{-5}/r$, В/м. Визначити густину енергії електричного поля і обчислити енергію, зосереджену на ділянці кабелю завдовжки $l = 1$ м. Діаметр внутрішнього провідника $2r_1 = 2,5$ мм, зовнішнього – $2r_2 = 6,8$ мм. Для поліетилену значення $\epsilon = 2,25$.

Розв'язок. Енергія електричного поля

$$W^e = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV, \quad (1.105)$$

де $w^e = \frac{\epsilon_a E^2}{2}$ – об'ємна густина енергії.

Знаходимо густину електричної енергії

$$w^e = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{2,25 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{2} \cdot \frac{10^{-10}}{r^2} = \frac{10^{-21}}{r^2}, \text{ Дж/м}^3.$$

Для визначення W^e за формулою (1.105) необхідно виразити елементарний об'єм dV в циліндричній системі координат: $dV = r dr d\varphi dz$. Тоді

$$W^e = 10^{-21} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz = 10^{-21} \ln \frac{r_2}{r_1} 2\pi l = 6,28 \cdot 10^{-21} \ln \frac{6,8}{2,5} =$$

$$= 6,28 \cdot 10^{-21} \ln 2,72 = 6,28 \cdot 10^{-21}, \text{ Дж.}$$

Розглянемо поверхневий інтеграл (1.101). З урахуванням (1.103) перепишемо співвідношення (1.101) у вигляді

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} + \frac{dW}{dt} + P^{\text{дж}} = P^{\text{ст}}. \quad (1.106)$$

Припустимо, що в області V втрат немає ($P^{\text{дж}} = 0$), енергія постійна $\frac{dW}{dt} = 0$. Тоді $\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = P^{\text{ст}}$, тобто **потік вектора $\mathbf{\Pi}$ дорівнює енергії**, що проходить через межу S області V за секунду (тобто рівний **потужності випромінювання**), вся потужність сторонніх джерел йде в навколишній простір V_1 , $P^{\text{ст}} = P_\Sigma = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}$. Отже, потік вектора $\mathbf{\Pi}$ – вектора Пойнтінга – має смисл потоку енергії через S . Якщо потік $P_\Sigma = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} > 0$, то енергія в області V зменшується, це (позитивний) вихідний потік; якщо $P_\Sigma = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} < 0$, то це **вхідний** (негативний) потік, енергія надходить з області V_1 в V . Напрямок вектора $\mathbf{\Pi}$ показує напрямок руху енергії ЕМП. Вектори $\mathbf{\Pi}$, \mathbf{E} та \mathbf{H} утворюють праву трійку векторів.

Таким чином, співвідношення (1.101) аналогічне виразу (1.96) і описує баланс миттєвих значень потужності електромагнітного поля.

Теорема Пойнтінга дає змогу знайти **швидкість перенесення енергії**. Так, за відсутності джоулевих втрат і сторонніх джерел в даній області з рівняння (1.98) одержимо:

$$\text{div } \mathbf{\Pi} = -\frac{\partial w}{\partial t}. \quad (1.107)$$

Співвідношення (1.107) аналогічне рівнянню збереження заряду в диференційній формі $\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. При розгляді руху електромаг-

нітної енергії за аналогією з рухом заряджених частинок $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ (\mathbf{v} – швидкість) можна записати $\mathbf{\Pi} = w \mathbf{v}^e$, звідки $\mathbf{v}^e = \mathbf{\Pi} / w$. Тут \mathbf{v}^e – швидкість перенесення ЕМЕ. Отже, знання вектора Пойнтінга і густини енергії як функції координат дозволяє знайти швидкість перенесення енергії в будь-якій точці.

Приклад 1.12. Плaskий повітряний конденсатор, що складається з двох круглих металевих пластин радіусом $r_1 = 2 \text{ см}$, віддалених одна від одної на відстань $d = 0,5 \text{ см}$, є частиною коливального контура. Напруга на обкладках конденсатора змінюється за законом: $U(t) = U \sin \omega t$, де амплітуда $U = 500 \text{ В}$ і $f = 10^6 \text{ Гц}$. Вважаючи величину вектора електричного зміщення \mathbf{D} постійною по всій площі пластин, визначити струм зміщення і потім знайти вектор магнітної індукції та вектор Пойнтінга при $r = r_1$. Розрахувати повний потік потужності через оточуючу діелектрик конденсатора циліндричну поверхню з радіусом r_1 і висотою d .

Розв'язок. Для вирішення застосуємо циліндричну систему координат з віссю Z , що проходить по нормалі до пластин через їх центри. Вектор напруженості електричного поля матиме тільки компоненту по осі Z :

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z,$$

$$E_z(t) = \frac{U(t)}{d} = \frac{U \sin \omega t}{d} = E_z \cdot \sin \omega t = 10^5 \cdot \sin(2\pi \cdot 10^6 t), \text{ В/м.}$$

$$\text{Густина струму зміщення } \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t}. \text{ Для повітря } \epsilon = 1 \text{ і}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{зм}} &= J_{\text{зм}z} \cdot \mathbf{e}_z = \epsilon_0 \frac{\partial E(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{e}_z = \omega \epsilon_0 \cdot E_z \cdot \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_z = \\ &= 5,55 \cdot \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_z, \text{ А/м}^2. \end{aligned}$$

Повний струм зміщення

$$I_{\text{зм}} = J_{\text{зм}} \cdot \pi r_1^2 = 5,55 \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos \omega t = 0,0069 \cdot \cos \omega t, \text{ А.}$$

Вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H} можна знайти з першого рівняння Максвелла у диференційній (1.64) або інтегральній формі (1.32). Скористаємося рівнянням (1.32) і врахуємо, що внаслідок симетрії задачі щодо осі Z силові лінії вектора \mathbf{H} будуть колами, а вектор \mathbf{H} матиме тільки одну складову \mathbf{H}_φ , залежну від координати r . Тому одержимо:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_\varphi \cdot 2\pi r_1 = \int_S \mathbf{J}_{\text{зм}z} d\mathbf{S} = J_{\text{зм}z} \pi r_1^2 \text{ або } H_\varphi = \frac{J_{\text{зм}z}}{2} r_1.$$

Розрахуємо значення векторів магнітної індукції і Пойнтінга при $r = r_1$:

$$H_\varphi(t) = \frac{1}{2} \cdot 5,55 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cos \omega t = 0,0555 \cdot \cos \omega t, \text{ A/m};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{r=r_1}(t) &= \mathbf{e}_\varphi \cdot \mu_0 \cdot H_\varphi(t) = \mathbf{e}_\varphi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,0555 \cdot \cos \omega t = \\ &= \mathbf{e}_\varphi \cdot 6,96 \cdot 10^{-8} \cos \omega t, \text{ Tл}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{r=r_1}(t) &= [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi] \cdot E_z(t) \cdot H_\varphi(t) = -\mathbf{e}_r \cdot E_z(t) \cdot H_\varphi(t) = \\ &= -\mathbf{e}_r \cdot 10^5 \cdot \sin \omega t \cdot 0,0555 \cdot \cos \omega t = -\mathbf{e}_r \cdot \frac{10^5}{2} \cdot 0,0555 \cdot \sin 2\omega t, \text{ Bm/m}^2; \end{aligned}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot 0,0555 \cdot 10^5 = 0,2775 \cdot 10^4, \text{ Bm/m}^2.$$

Амплітуда потоку вектора Пойнтінга крізь циліндричну поверхню радіусом r_1 і висотою d

$$P = \int_{S_0} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \Pi \cdot 2\pi r_1 d = 0,1745, \text{ Bm}.$$

Потік потужності буде реактивним, оскільки відсутні втрати і випромінювання електромагнітної енергії. Це видно із виразу для миттєвого значення вектора Пойнтінга $\mathbf{\Pi}(t)$. Величина $\mathbf{\Pi}(t)$ змінюється за гармонічним законом з подвоєною частотою.

1.5.2. Перенесення енергії по лінії передачі

За допомогою теореми Пойнтінга проілюструємо процес передачі електромагнітної енергії по двопроводовій лінії (рис. 1.36). Процес вважатимемо квазістаціонарним. Всі співвідношення розглядатимемо для миттєвих значень. Припустимо, що відстань між проводами набагато більша за їх радіуси і тому електромагнітне поле біля поверхні проводу має циліндричну симетрію.

Виділимо відрізок проводу завдовжки l на зовнішній ділянці кола, тобто поза джерелом (рис. 1.37). Густина струму в проводі $J = I/\pi r^2$, де I – струм у проводі; r – його радіус.

У точці, яка лежить на поверхні провідника, напруженість магнітного поля визначимо за законом повного струму (1.32): $H = \frac{I}{2\pi r}$. Густина

струму в провіднику (у тій самій точці) $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ і, отже, $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$ (див. приклад 1.1). Напрями векторів \mathbf{H} і \mathbf{E} вказані на рис. 1.37. Вектор Пойнтінга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ спрямований за радіусом від поверхні провідника до його осі і чисельно рівний $\Pi = \frac{J}{\sigma} \frac{I}{2\pi r} = \frac{I^2}{\sigma \pi r^2 2\pi r}$. Потік енергії крізь поверхню даної ділянки провідника (за абсолютним значенням)

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \frac{I^2 2\pi r l}{\sigma \pi r^2 2\pi r} = \frac{l}{\sigma \pi r^2} I^2 = RI^2, \quad (1.108)$$

де R – опір провідника, завдовжки l .

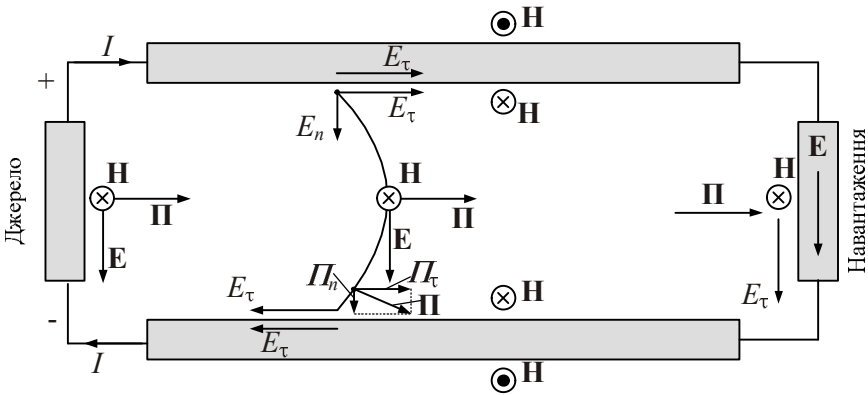


Рис. 1.36

Співвідношення (1.108) показує, що енергія електромагнітного поля, що витрачається на теплові втрати, надходить у провідник ззовні – з оточуючого провідник простору, в якому існує електромагнітне поле.

Усередині провідника рух енергії електромагнітного поля уздовж проводу відсутній, електромагнітна енергія (поле) не переміщується по проводах, а лише надходить в них з оточуючого простору в кількості, необхідній для покриття теплових втрат.

У простір, що оточує провід, електромагнітна енергія (електро-

магнітне поле) надходить з ділянки, яка містить стороннє поле, тобто із джерела.

Розглянемо тепер ділянку джерела, вважаючи для спрощення аналізу, що вона також має циліндричну форму (рис. 1.38).

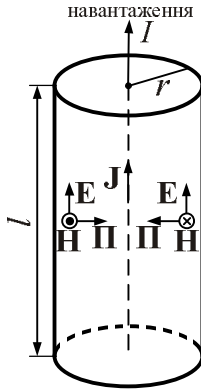


Рис. 1.37

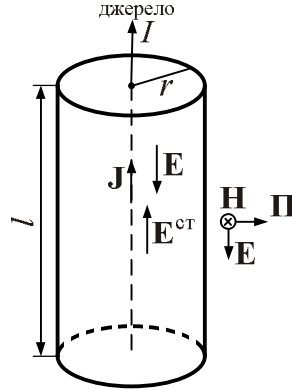


Рис. 1.38

Як видно з рисунка, вектор Пойнтінга в точці, що лежить на поверхні провідника, спрямований від провідника по радіусу назовні. Знайдемо потік цього вектора крізь поверхню провідника. У середині джерела $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}^{ct} + \mathbf{E})$, звідки $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{E}^{ct}$. Напруженість магніт-

ного поля $H = \frac{I}{2\pi r}$ і вектор Пойнтінга

$$\mathbf{\Pi} = \frac{[\mathbf{J}, \mathbf{H}]}{\sigma} + [(-\mathbf{E}^{ct}), \mathbf{H}]. \quad (1.109)$$

Перший вектор спрямований по радіусу всередину від поверхні до осі провідника (джерела), другий (з урахуванням знаку) – по радіусу назовні. Потік вектора Пойнтінга крізь поверхню джерела

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} &= -\frac{I \cdot I}{\sigma \pi r^2 2\pi r} 2\pi r l + E^{ct} \frac{I}{2\pi r} 2\pi r l = \\ &= E^{ct} I - I^2 \frac{l}{\sigma \pi r^2} = (\mathcal{E}^{ct} I - I^2 R_0), \end{aligned}$$

оскільки $E^{ct}l = \mathcal{E}^{ct}$ – стороння ЕРС джерела на ділянці завдовжки l , а $\frac{l}{\sigma \pi r^2} = R_0$ – внутрішній опір джерела на цій самій ділянці.

Отже, електромагнітна енергія, одержана за рахунок стороннього поля джерела з будь-якого іншого виду енергії, надходить, за винятком внутрішніх теплових втрат, в оточуюче джерело середовище і передається споживачу електромагнітним полем, збудженим в цьому середовищі.

Електромагнітна енергія, яка надходить у проводи, повністю поглинається (телові втрати) згідно з законом Джоуля – Ленца.

Електромагнітне поле двопроводовій лінії (лінії векторів \mathbf{E} , \mathbf{H} , $\mathbf{\Pi}$) схематично представлено на рис. 1.36.

Вектор напруженості електричного поля поза проводом має незначну складову, паралельну осям проводів, – тангенційну складову \mathbf{E}_τ . Тангенційна складова вектора напруженості електричного поля в точці, що лежить на зовнішній поверхні проводу, і зумовлює спад напруги на одиницю довжини проводу.

Нормальна складова \mathbf{E}_n , що лежить у площині, нормальній до осей проводів, усередині проводу відсутня (вектор \mathbf{J} колінеарний осі проводу), поза проводом – відмінна від нуля.

Відповідно вектор Пойнтінга також має дві складові: паралельну проводам $\mathbf{\Pi}_\tau = [\mathbf{E}_n, \mathbf{H}]$ і нормальну $\mathbf{\Pi}_n = [\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}]$. Вектор $\mathbf{\Pi}_\tau$ спрямований від джерела до споживача, а вектор $\mathbf{\Pi}_n$ – до поверхні найближчого проводу (у точках, які лежать в площині симетрії проводів, \mathbf{E}_τ і $\mathbf{\Pi}_n$, рівні нулю).

У лініях передачі з високим коефіцієнтом корисної дії повинна виконуватися умова $\mathbf{\Pi}_\tau \gg \mathbf{\Pi}_n$, оскільки складова $\mathbf{\Pi}_\tau$ зумовлює передачу енергії від джерела до навантаження, а складова $\mathbf{\Pi}_n$ визначає надходження в проводи електромагнітної енергії, необхідної для покриття теплових втрат.

Чим більша провідність проводів, тим менша складова $\mathbf{\Pi}_n$. Якщо втрати відсутні, то вектор Пойнтінга в будь-якій точці, що лежить поза проводами (усередині проводу він дорівнює нулю), паралельний їх осям. Структура силових ліній ЕМП в поперечному

перерізі лінії передачі наведена на рис. 1.39.

Ця структура залежить від взаємного розміщення проводів в просторі і зумовлює напрямки векторів \mathbf{E} , \mathbf{H} і $\mathbf{\Pi}$, тобто і потоку енергії, що поширюється вздовж проводів.

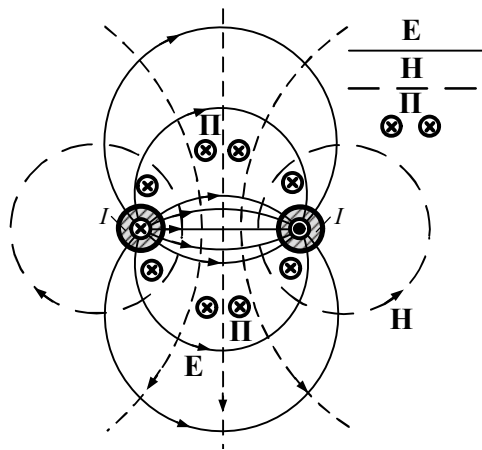


Рис. 1.39

Проводи як граничні поверхні формують електромагнітне поле: самі є споживачами електромагнітної енергії, що переходить в них у теплову енергію, а також є спрямовуючою системою, що транспортує енергію від джерела до навантаження.

1.5.3. Рівняння балансу комплексної потужності

Вище ми розглядали рівняння балансу електромагнітної енергії для миттєвих значень потужності. Великий практичний інтерес викликає вивчення монохроматичних полів, для опису яких широко використовують метод комплексних амплітуд. Безпосередня заміна дійсних функцій комплексними можлива лише для лінійних співвідношень, але у вирази (1.97) – (1.104) входять добутки змінних. Для використання комплексних функцій в нелінійних співвідношеннях слід застосовувати очевидну рівність

$$a(t) = a \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [\dot{a}(t) + \dot{a}^*(t)].$$

Наприклад, вектор Пойнтінга може бути представлений у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{4} \left[(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t}), (\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{H}}^* e^{-j\omega t}) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}] e^{j2\omega t} + [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] + [\dot{\mathbf{E}}^*, \dot{\mathbf{H}}] + [\dot{\mathbf{E}}^*, \dot{\mathbf{H}}^*] e^{-j2\omega t} \right\}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\dot{a} + \dot{a}^* = 2 \operatorname{Re} \{ \dot{a} \}$, одержимо:

$$\mathbf{\Pi}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] + \frac{1}{4} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}] e^{j2\omega t} + [\dot{\mathbf{E}}^*, \dot{\mathbf{H}}^*] e^{-j2\omega t} \right\}. \quad (1.110)$$

Найчастіше цікавляться середнім за період T значенням потужності процесу. Як видно з (1.110), другий і третій доданки при інтегруванні за часом дають нуль, оскільки вони змінюються з подвоєною частотою. Перший доданок від часу не залежить, тому середнє за період значення вектора

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{\Pi}(t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*]. \quad (1.111)$$

Величина

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] \quad (1.112)$$

називається **комплексним вектором Пойнтінга**.

Середній за період потік енергії через поверхню S , що обмежує об'єм V (тобто потужність випромінювання з області V),

$$\bar{P}_S = \operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{\Pi}} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] d\mathbf{S}. \quad (1.113)$$

Аналогічно знаходимо решту доданків, що входять до (1.96):

- середня потужність джоулевих втрат

$$\bar{P}^{дж} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV, \quad (1.114)$$

- середня потужність сторонніх джерел, яка виділяється в об'ємі V ,

$$\overline{P^{ct}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V \mathbf{J}^{ct} \dot{\mathbf{E}}^* dV \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V \dot{\mathbf{E}}^{ct} \mathbf{J}^* dV \right\}, \quad (1.115)$$

- середнє значення електричної і магнітної енергії

$$\left. \begin{aligned} \overline{W^e} &= \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* dV = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV \\ \overline{W^m} &= \frac{1}{4} \int_V \mu_a \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* dV = \frac{1}{4} \int_V \mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV \end{aligned} \right\}, \quad (1.116)$$

а середнє значення за період зміни електромагнітної енергії

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dt} dt = \frac{1}{T} (W|_{t=T} - W|_{t=0}) = 0,$$

тобто запас енергії W в об'ємі V в середньому за період постійний.

Отже, рівняння для середньої за період потужності можна записати у вигляді

$$\overline{P_\Sigma} + \overline{P^{дж}} = \overline{P^{ct}}. \quad (1.117)$$

З виразу (1.117) видно, що потужність сторонніх джерел в об'ємі V витрачається на джоулеві втрати $\overline{P^{дж}}$ і на випромінювання електромагнітної енергії через поверхню S . Якщо $\overline{P^{ct}} > \overline{P^{дж}}$, потік енергії в середньому виходить з об'єму V , якщо $\overline{P^{ct}} < \overline{P^{дж}}$ – енергія надходить в об'єм V .

Рівняння балансу для комплексної потужності виводиться аналогічно теоремі Пойнтінга для миттєвих значень (п. 1.5.1). Після виконання перетворень одержимо

$$\oint_S \mathbf{\dot{D}} d\mathbf{S} + j2\omega (\overline{W^m} - \overline{W^e}) + \overline{P^{дж}} = \overline{\dot{P}^{ct}}, \quad (1.118)$$

$$\text{де } \dot{P}^{ct} = \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{ct} \mathbf{J}^* dV.$$

Виділяючи в (1.118) реальну та уявну частину, одержимо два незалежні рівняння:

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV = \operatorname{Re} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV, \quad (1.119)$$

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + 2\omega (\overline{W^m} - \overline{W^e}) = \operatorname{Im} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV, \quad (1.120)$$

які відображують відповідно баланс активної і реактивної потужності в об'ємі V .

Активна потужність сторонніх джерел витрачається на втрати і на випромінювання через поверхню S , що збігається з (1.101).

Величини $\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S}$ і $\operatorname{Im} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV$, що входять у (1.120),

рівні відповідно амплітуді реактивного потоку енергії через S і амплітуді реактивної потужності сторонніх джерел.

Реактивний потік енергії змінюється з подвоєною частотою 2ω , і половину періоду енергія надходить через поверхню S в об'єм V (потік позитивний), половину періоду (потік негативний) – з навколишнього простору в об'єм V .

Якщо об'єм V **ізолюваний** від навколишнього простору, то потік вектора Пойнтінга рівний нулю і виконуються співвідношення:

$$\operatorname{Re} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV, \quad (1.121)$$

$$\operatorname{Im} \int_V \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^{\text{ct}} \mathbf{J}^* dV = 2\omega (\overline{W^m} - \overline{W^e}). \quad (1.122)$$

У об'ємі V енергія електричного поля періодично перетворюється в енергію магнітного поля і навпаки. Якщо $W^m = W^e$, то ліва частина (1.122) рівна нулю, тобто потужність сторонніх джерел активна. В цьому випадку в системі (об'ємі V) спостерігається **резонанс**.

Відношення

$$Q = \frac{\omega \overline{W}}{P_{\text{дж}}} = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta W} \quad (1.123)$$

називають **добротністю** системи. У співвідношенні $\overline{W} = \overline{W}^m + \overline{W}^e$ – запас енергії в системі, $\Delta W = \overline{P}^{дж} = \frac{1}{2} \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV$ – зміна енергії системи за період за рахунок теплових втрат.

Наявність поляризаційних втрат і втрат на намагнічення можна врахувати введенням комплексних відносних діелектричної і магнітної проникностей середовища $\dot{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$, $\dot{\mu} = \mu' - j\mu''$. Величини, що входять у (1.118), приймають вигляд

$$\overline{P}^{дж} = \int_V \left[\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon''}{2} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* + \frac{\omega \mu_0 \mu''}{2} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* \right] dV,$$

$$\overline{W}^e = \frac{\epsilon_0}{4} \int_V \epsilon' \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* dV, \quad \overline{W}^m = \frac{\mu_0}{4} \int_V \mu' \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* dV.$$

Введення комплексних проникностей $\dot{\epsilon}_a$, $\dot{\mu}_a$ відображує інерційність процесів поляризації і намагнічення та пов'язані з цим втрати.

Зазначимо, що виконані в даному підрозділі перетворення справедливі для ізотропного середовища. У разі анізотропії висновки справедливі, якщо тензори $\vec{\epsilon}_a$ і $\vec{\mu}_a$ симетричні: $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$, ..., $\mu_{xy} = \mu_{yx}$, $\mu_{xz} = \mu_{zx}$, ...

Завдання для самостійного розв'язку

1. Визначити вектор Пойнтінга електромагнітного поля, вектори якого дорівнюють

а) $\mathbf{D} = \mathbf{e}_y D_y$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x B_x + \mathbf{e}_z B_z$,

б) $\mathbf{D} = \mathbf{e}_\varphi D_\varphi$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r B_r + \mathbf{e}_z B_z$.

2. По провідниках коаксіального кабелю пропущено змінний струм з частотою $f = 1 \text{ МГц}$. Визначити:

а) густину потоку енергії, якщо

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r 10^{-2} \cos(\omega t - 50z) / r, \quad B / \text{м},$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi 4 \cdot 10^{-5} \cos(\omega t - 50z) / r, \quad A / \text{м};$$

б) середню потужність, передавану по кабелю, якщо радіуси внут-

рішнього і зовнішнього провідників відповідно $r_1 = 1 \text{ мм}$, $r_2 = 4 \text{ мм}$ і

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r 25 \cos(\omega t - \beta z)/r, \quad B/м,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi 80 \cos(\omega t - \beta z)/r, \quad A/м.$$

3. Визначити густину потужності теплових втрат в циліндричному мідному провіднику радіусом $r = 4 \text{ мм}$ з постійним струмом $I = 2 \text{ МА}$.

4. На висоті 2 км від поверхні Землі знаходиться грозова хмара, що займає площу 3 км^2 . Утворене між Землею і хмарою електричне поле має однакову в усіх точках напруженість $E = 1 \text{ МВ/м}$. Визначити енергію електричного поля.

5. Джерело, що знаходиться в центрі сферичної системи координат, збуджує в навколишньому просторі електромагнітне поле, вектори якого

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\theta \frac{4 \cdot 10^{-3}}{r} \sin \theta \sin(\omega t - kr), \quad B/м,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \frac{1,06 \cdot 10^{-5}}{r} \sin \theta \sin(\omega t - kr), \quad A/м.$$

Визначити середню потужність випромінювання джерела.

Питання для самоперевірки

1. Отримайте вираз для балансу енергії електромагнітного поля в інтегральній формі і поясніть фізичний зміст доданків, що входять в цей вираз.

2. Використовуючи рівняння Максвелла, отримайте вираз для балансу енергії електромагнітного поля в диференційній формі.

3. Запишіть вираз для вектора Пойнтінга і поясніть його фізичний зміст.

4. Вектори ЕМП задані в комплексній формі:

а) поясніть, в чому полягає особливість виразу квадратичних величин;

б) запишіть середнє значення вектора Пойнтінга.

2. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ І ТЕОРЕМИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

2.1. Класифікація задач електродинаміки

Рішення багатьох науково-технічних проблем, які виникають при розробці радіотехнічних систем різного типу, систем передачі електромагнітної енергії та ін., потребує знання структури ЕМП в певних областях простору. Для цього необхідно вміти розв'язувати відповідні електродинамічні задачі. Ці задачі можна розділити на **прямі** і **зворотні**.

Прямі задачі – це задачі **аналізу**, коли за заданими джерелами поля (електричними і, в загальному випадку, магнітними) необхідно знайти структуру поля в заданій області простору.

Зворотні задачі – задачі **синтезу** – коли за відомими вимогами до структури ЕМП в певній частині простору необхідно знайти розподіл джерел, які її (структуру ЕМП) забезпечують.

Прямі і зворотні задачі електродинаміки можна, в свою чергу, поділити на **внутрішні** і **зовнішні**.

Внутрішні задачі полягають в знаходженні електромагнітного поля в довільній точці M усередині об'єму V , обмеженого поверхнею S (рис. 2.1, *a*). Відповідно **зовнішні** задачі зводяться до вивчення ЕМП в області V , що знаходиться поза V' (рис. 2.1, *б*).

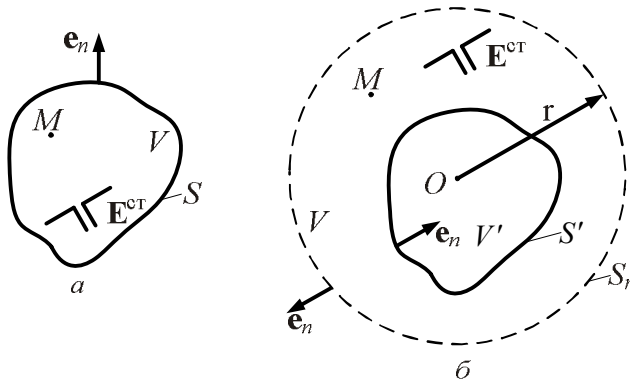


Рис. 2.1

Внутрішні і зовнішні задачі часто формулюються як **граничні**, коли шукані (задані) ЕМП мають задовольняти певним граничним умовам на поверхні S . Через складність структури реальних об'єктів і середовищ

для їх опису застосовують різні електродинамічні моделі. Ці моделі як правило, спрощені, що дозволяє полегшити розв'язання рівнянь електродинаміки.

Розв'язання задач електродинаміки у ряді випадків можна істотно прискорити, якщо скористатися властивостями рівнянь Максвелла. Ці властивості виявляються в принципах і теоремах, яким підпорядковуються рівняння електродинаміки.

2.2. Принцип суперпозиції

Розглянемо спочатку принцип суперпозиції (накладання).

У системі рівнянь Максвелла можна виділити перші два (1.32), (1.33), які описують закон повного струму і закон електромагнітної індукції, рівняння (1.34), (1.35), що описують властивості джерел ЕМП, і матеріальні рівняння (1.41) – (1.43), які характеризують електродинамічні властивості середовища.

Перші чотири рівняння Максвелла є диференційними рівняннями в часткових похідних. У більшості практичних цікавих випадків можна обґрунтовано вважати, що матеріальні середовища, в яких розглядають електромагнітні явища, є **лінійними**. Для таких середовищ справедливий фундаментальний **принцип суперпозиції електромагнітних полів**.

Як виходить з курсу математичного аналізу, сума часткових розв'язків будь-якого лінійного диференційного рівняння є його розв'язком. Якщо в даній області простору розподілено N сторонніх джерел у вигляді струмів з густиною $\mathbf{J}_i^{\text{ст}}$ ($i = \overline{1, N}$), кожен з яких збуджує поле $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$, то відповідно до принципу суперпозиції результуюче поле N джерел при їх одночасній дії дорівнює сумі полів, збуджуваних окремими джерелами:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i. \quad (2.1)$$

При цьому вважають, що джерела $\mathbf{J}_i^{\text{ст}}$ не впливають одне на одного, тобто розподіли $\mathbf{J}_i^{\text{ст}}$ не змінюються при одночасній дії всіх джерел (джерела „не впливають” одне на одного).

Принцип суперпозиції безпосередньо виходить з лінійності операцій диференціювання за часом і координатами в рівняннях (1.32)–(1.35).

З рівнянь (2.1) виходить, що електромагнітні поля в просторі, які збуджуються різними джерелами, не взаємодіють, „не заважають” один одному і результуюче поле дорівнює векторній сумі полів $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$, збуджуваних всіма джерелами.

Принцип суперпозиції (властивість лінійності) істотно спрощує вирішення багатьох електродинамічних задач. Проте цей принцип не можна застосовувати до нелінійних операцій, зокрема до визначення потужності. Так, наприклад, результуючий вектор Пойнтінга

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i, \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i \right] \neq \sum_{i=1}^N \mathbf{\Pi}_i = \sum_{i=1}^N [\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i] \quad (2.2)$$

не дорівнює сумі векторів Пойнтінга окремих джерел.

2.3. Теорема єдиності розв'язання рівнянь Максвелла

2.3.1. Фізичний аналіз умов єдиності розв'язання рівнянь Максвелла

Для знаходження векторів поля необхідно розв'язати систему рівнянь Максвелла. Оскільки вона є системою диференційних рівнянь в часткових похідних, то шукані вектори електромагнітного поля визначатимуться не однозначно, а з точністю до довільних функцій. Останні утворюють нескінченну низку лінійних незалежних часткових розв'язків. Розглянемо питання про те, які додаткові умови потрібно задати, щоб система рівнянь Максвелла мала єдиний розв'язок. Відповідь на це питання дає теорема єдиності. Вона стверджує, що, якщо знайдено електромагнітне поле, що є розв'язанням даної задачі і задовольняє теорему єдиності, то ми можемо бути упевнені в тому, що тільки воно реальне, а інші поля за даних умов існувати не можуть.

Щоб ясніше зрозуміти сутність вимог теореми єдиності, звернемося спочатку до фізичного аналізу проблеми. З цією метою з'ясуємо, чим зумовлені поля в точці M усередині об'єму, в якому ми хочемо однозначно визначити поле (рис. 2.1).

1. Ці поля створюються джерелами сторонніх сил $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ (або $\mathbf{J}^{\text{ст}}$), розташованими в межах об'єму V . Нехай з моменту часу t_0 відомо

як працюють джерела (генератори) сторонніх сил. Тоді ми можемо визначити збуджувані ними поля усередині об'єму V .

2. Вони можуть збуджуватися тими полями, які існували до включення генераторів, наприклад генераторами, вимкненими раніше моменту t_0 .

3. Поля в точці спостереження можуть створюватися і тими джерелами сторонніх сил, які лежать поза даним об'ємом. Ці джерела можуть знаходитися в будь-якій точці області V' .

Якщо задати розподіл всіх сторонніх сил як внутрішніх для V , так і зовнішніх, то можна однозначно визначити поле, коли відомі залишкові поля. Проте опис розподілу полів в усіх точках поза V – завдання нереальне, і прямим шляхом однозначно визначити поля неможливо.

Вихід з цього положення підказує теорія близькодії та встановлений факт про хвильовий характер розподілу поля. Дійсно, всі зовнішні поля поширюватимуться від точки до точки і, отже, обов'язково перетинатимуть межу, що відокремлює даний об'єм від зовнішнього простору. Тому дані про весь простір зовні можна замінити умовами на поверхні S – межі області V , які враховуватимуть проникнення полів в об'єм ззовні ($S = S' + S_r$ для рис 2.1, б).

Таким чином, з фізичних міркувань можна зробити висновки, що для однозначного розрахунку полів необхідно знати:

- 1) розподіл сторонніх сил усередині даного об'єму;
- 2) значення внутрішніх полів у момент початку дії сторонніх сил;
- 3) значення полів на межі поділу в кожен момент часу.

Оскільки остання умова має відобразити прихід полів в об'єм V ззовні, а проникнення енергії всередину об'єму характеризується лише нормальною складовою вектора Пойнтінга $\mathbf{\Pi}$, то, мабуть, досить знати не всі складові векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} на межі, а лише тангенційні \mathbf{E}_τ і \mathbf{H}_τ , через те, що $\mathbf{\Pi}_n$ зв'язана лише з цими складовими.

Оскільки між векторами напруженості електричного і магнітного полів існує певний зв'язок, то дані про явища на межі можуть бути ще більш обмеженими.

Такі попередні зауваження.

2.3.2. Теорема єдиності розв'язання внутрішньої задачі електродинаміки

Рівняння Максвелла дозволяють знайти єдині значення електромагнітних величин для кожної внутрішньої точки M об'єму V у будь-який момент $t > t_0$, якщо задані:

- 1) всі сторонні ЕРС усередині об'єму для моменту часу $t > t_0$;
- 2) значення тангенційних складових: або вектора \mathbf{E} , або вектора \mathbf{H} для кожної точки поверхні S (рис. 2.1, a), що відокремлює даний об'єм V від зовнішнього при $t > t_0$;
- 3) значення векторів \mathbf{E} , \mathbf{H} у всіх внутрішніх точках в момент t_0 .

Доведемо теорему єдиності.

Припустимо, що, всупереч твердженням теореми, рівняння Максвелла дають не один, а два розв'язки: $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ і $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$.

Доведемо, що обидва розв'язки мають збігатися. З цією метою введемо до розгляду різницеве поле, яке описується векторами:

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad (2.3)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2. \quad (2.4)$$

Звернемо увагу на те, що рівняння Максвелла і додаткові співвідношення лінійні і, отже, виконується принцип суперпозиції: якщо вектори полів 1 і 2 є розв'язками рівнянь Максвелла, то їх різниці $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ також є розв'язками.

Розглянемо, чим різницеве поле відрізняється від початкових полів.

1. Перш за все, в різницевому полі відсутні сторонні сили. Оскільки за умовою (1) $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ задані, то $\mathbf{E}_1^{\text{ст}} = \mathbf{E}_2^{\text{ст}}$, тому

$$\hat{\mathbf{E}}^{\text{ст}} = \mathbf{E}_1^{\text{ст}} - \mathbf{E}_2^{\text{ст}} = 0. \quad (2.5)$$

2. Нормальна складова вектора $\hat{\mathbf{H}}$ в різницевому полі рівна нулю в усіх точках граничної поверхні. Дійсно, $\mathbf{H}_n = [\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau]$, тому

$$\hat{\mathbf{H}}_n = [(\mathbf{E}_{\tau 1} - \mathbf{E}_{\tau 2}), (\mathbf{H}_{\tau 1} - \mathbf{H}_{\tau 2})].$$

Але за умовою (2) або \mathbf{E}_τ , або \mathbf{H}_τ задано для будь-якої граничної точки. У тих точках, де задано \mathbf{E}_τ , завжди $\mathbf{E}_{\tau_1} - \mathbf{E}_{\tau_2} = \hat{\mathbf{E}}_\tau = 0$, і, відповідно, $\hat{\mathbf{\Pi}}_n = 0$. У точках, де задано \mathbf{H}_τ , завжди $\hat{\mathbf{H}}_\tau = 0$ і $\hat{\mathbf{\Pi}}_n = 0$. Таким чином, в різницевому полі в усіх точках граничної поверхні

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_n = 0. \quad (2.6)$$

Це означає, що різницеве поле не обмінюється енергією із зовнішньою областю (рис. 2.1, а).

3. Початкові значення різницевих векторів $\hat{\mathbf{E}}$ і $\hat{\mathbf{H}}$ у всіх внутрішніх точках об'єму дорівнюють нулю.

Дійсно, оскільки початкові значення $\mathbf{E}(M, t_0)$ і $\mathbf{H}(M, t_0)$ за умовою (3) задані, то

$$\mathbf{E}_1(M, t_0) = \mathbf{E}_2(M, t_0),$$

і у довільній внутрішній точці

$$\mathbf{E}_1(M, t_0) - \mathbf{E}_2(M, t_0) = \hat{\mathbf{E}}(M, t_0) = 0.$$

Аналогічно і $\hat{\mathbf{H}}(M, t_0) = 0$ в усіх точках об'єму V .

Отже, різницеве поле характеризується такими властивостями:

- у ньому відсутні сторонні сили;
- у цьому полі відсутній потік енергії через границю об'єму;
- початкові значення всіх векторів поля у всіх внутрішніх точках об'єму нульові, тобто при $t = t_0$ різницеве поле відсутнє.

Запишемо тепер теорему Пойнтінга для різницевого поля в області V . Відповідно до виразу (1.106) маємо

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = - \int_V \frac{\hat{\mathbf{J}}^2}{\sigma} dV + \int_V \hat{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{E}}^{\text{ct}} dV - \oint_S \hat{\mathbf{\Pi}} dS.$$

З огляду на умови (2.5) і (2.6) останні два інтеграли в правій частині дорівнюють нулю. Тоді

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = - \int_V \frac{\hat{\mathbf{J}}^2}{\sigma} dV. \quad (2.7)$$

Але сам інтеграл в правій частині як сума невід'ємних доданків J^2 або позитивний, або рівний нулю, якщо скрізь $J^2 = 0$. Тому

$$\frac{d\hat{W}}{dt} \leq 0.$$

Це означає, що енергія \hat{W} може або спадати, або бути постійною. Але в початковий момент $\hat{W} = 0$, оскільки початкові значення $\mathbf{E}(M, t_0)$ і $\mathbf{H}(M, t_0)$ нульові.

Енергія – величина істотно позитивна, в крайньому разі, вона може дорівнювати нулю. Отже, енергія від нуля спадати не може і залишається єдина можливість $\hat{W} = \text{const}$. Але при $t = t_0$ $\hat{W} = 0$, а значить, завжди $\hat{W} = 0$. Разом з тим

$$\hat{W} = \lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \sum_{i \in V'} \left(\frac{\varepsilon \hat{\mathbf{E}}^2}{2} + \frac{\mu \hat{\mathbf{H}}^2}{2} \right) \Delta V_i. \quad (2.8)$$

Рівність нулю співвідношення (2.8) означає, що кожен доданок рівний нулю, тобто в кожній точці об'єму завжди виконується умова $\hat{\mathbf{E}}^2 = 0, \hat{\mathbf{H}}^2 = 0$. Отже, різниця між рішеннями \mathbf{E}_1 і \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_1 і \mathbf{H}_2 дорівнює нулю в усіх точках, і вони завжди збігаються в усіх точках об'єму, що і треба було довести.

2.3.3. Умови єдиності розв'язання зовнішньої задачі електродинаміки

Розглянемо доведення **теорема єдиності для зовнішньої задачі**. Як і у випадку внутрішньої задачі, вектори різницевого поля $\hat{\mathbf{E}}$ і $\hat{\mathbf{H}}$ характеризуються вказаними у п.2.3.2 властивостями і для них теорема Пойнтінга запишеться у вигляді

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = - \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{J}}^2}{\sigma} dV + \int_V \hat{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{E}}^{\text{cr}} dV - \oint_{S=S'+S_r} (\hat{\mathbf{P}} \mathbf{e}_n) dS. \quad (2.9)$$

Тут S_r – поверхня сфери нескінченно великого радіуса ($r \rightarrow \infty$), що обмежує область V ззовні (рис. 2.1, б). Наведені вище міркування повністю застосовні і до співвідношення (2.9) за умови, що

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} [\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}] d\mathbf{S} = 0. \quad (2.10)$$

При збільшенні r площа поверхні S_r зростає пропорційно r^2 , отже, для виконання умови (2.10) необхідно, щоб абсолютна величина $\mathbf{\Pi} = [\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}]$ при $r \rightarrow \infty$ спадала б швидше, ніж $1/r^2$, тобто щоб амплітуди векторів $\hat{\mathbf{E}}$ і $\hat{\mathbf{H}}$ спадали б швидше, ніж $1/r$.

Таким чином, зовнішня задача електродинаміки має єдиний розв'язок, якщо крім розглянутих початкових і граничних умов виконуватиметься умова спадання амплітуд векторів поля із зростанням відстані не повільніше, ніж $1/r$. В усталеному режимі амплітуди полів, енергія якого поширюється від джерел, спадають в радіальних напрямках за законом $1/r$, а за наявності втрат в реальних середовищах як $1/r \cdot e^{-\alpha r}$ (α – деяка стала, що визначає швидкість ослаблення хвиль за наявності втрат). Тому підінтегральний вираз у (2.10) при $r \rightarrow \infty$ прямуватиме до нуля як $1/r^2 \cdot e^{-2\alpha r}$ і інтеграл (2.10) (у припущенні кінцевої, хоча б і дуже малої провідності простору) дає нуль. Тоді із співвідношення (2.9) виходить, що, як і для внутрішньої задачі, $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{H}} = 0$.

Отже, з викладеного вище видно, що складність і строгість доведення теореми єдиності для зовнішньої задачі пов'язані з вимогою, яка пред'являється до поведінки поля на нескінченності.

У середовищі без втрат теорема єдиності розв'язання зовнішньої задачі забезпечується при виконанні умов (для монохроматичного поля):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\dot{\mathbf{E}} + \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} [\mathbf{e}_r, \dot{\mathbf{H}}] \right) \right] &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\dot{\mathbf{H}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} [\mathbf{e}_r, \dot{\mathbf{E}}] \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.11)$$

Ці вимоги в електродинаміці відомі як **умови випромінювання** (**умови Зоммерфельда**). Умови випромінювання еквівалентні вимозі, щоб при $r \rightarrow \infty$ поле мало характер поперечної хвилі, що поширюється уздовж напрямку \mathbf{e}_r .

Зазначимо також, що, коли поля не відомі у момент часу t_0 (не виконується умова (3)), то за відсутності втрат в області V розв'язання внутрішньої задачі може бути неоднозначним. Цьому відповідають, наприклад, незагасаючі поля (збуджені раніше) в ідеальному об'ємному резонаторі.

2.4. Лема Лоренца. Теорема взаємності

Вирішення ряду задач електродинаміки, зокрема задач антенної техніки, можна істотно спростити, якщо застосувати теорему взаємності. Теорема взаємності заснована на лемі Лоренца, яка встановлює зв'язок між сторонніми струмами в двох різних областях простору і збуджуваними ними полями.

Нехай в ізотропному лінійному стаціонарному середовищі з параметрами $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ задані два розподіли сторонніх струмів з комплексними амплітудами $\mathbf{J}_1^{\text{ст}}$ і $\mathbf{J}_2^{\text{ст}}$, що змінюються гармонічно з частотою ω .

Перша система сторонніх струмів розподілена в об'ємі V_1 і збуджує електромагнітне поле з векторами комплексних амплітуд $\dot{\mathbf{E}}_1$ і $\dot{\mathbf{H}}_1$, друга розподілена в об'ємі V_2 і збуджує електромагнітне поле з векторами комплексних амплітуд $\dot{\mathbf{E}}_2$ і $\dot{\mathbf{H}}_2$ (рис. 2.2).

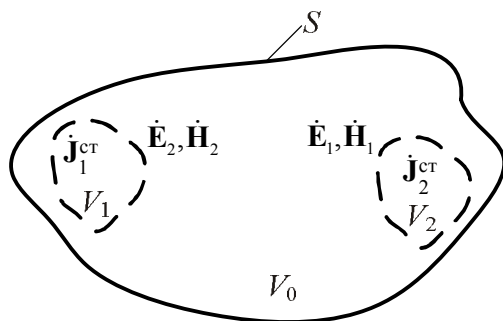


Рис. 2.2

Запишемо перше і друге рівняння Максвелла для цих полів:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{J}_1^{\text{ct}} + j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1^{\text{ct}} \quad (1^*) \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 = \mathbf{J}_2^{\text{ct}} + j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2^{\text{ct}}, \quad (3^*)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 \quad (2^*) \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_2 = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_2. \quad (4^*)$$

Помножимо скалярно вираз (1*) на $\dot{\mathbf{E}}_2$, вираз (4*) на $\dot{\mathbf{H}}_1$, після чого віднімемо від першого добуток другий:

$$\dot{\mathbf{E}}_2 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{H}}_1 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{J}_1^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_2 + j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{E}}_2 + j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1. \quad (2.12)$$

Так само помножимо (2*) на $\dot{\mathbf{H}}_2$, а (3*) на $\dot{\mathbf{E}}_1$ і віднімемо від другого добуток перший:

$$\dot{\mathbf{E}}_1 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{H}}_2 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{J}_2^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_1 + j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{E}}_1 + j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2. \quad (2.13)$$

Врахуємо, що справедлива тотожність $\operatorname{div} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$ і віднімемо вираз (2.13) від (2.12). Тоді одержимо

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1] = \mathbf{J}_1^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_2 - \mathbf{J}_2^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_1. \quad (2.14)$$

Співвідношення (2.14), що встановлює зв'язок між сторонніми струмами і збуджуваними ними полями в двох різних точках простору, називається **лемою Лоренца в диференційній формі**.

Одержимо лему Лоренца в інтегральній формі.

Розглянемо область V_0 простору, обмежену поверхнею S . Ця поверхня може бути поверхнею поділу середовищ або будь-якою допоміжною поверхнею, що охоплює повністю або частково сторонні струми.

Вважаючи, що область V_0 включає об'єми V_1 і V_2 , проінтегруємо вираз (2.14) по області V_0 . Застосуємо теорему Остроградського – Гауса і врахуємо, що сторонні струми відмінні від нуля тільки в областях V_1 , V_2 . Тоді одержимо **лему Лоренца в інтегральній формі**:

$$\oint_S \{ [\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1] \} dS = \int_{V_1} \mathbf{J}_1^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_2 dV - \int_{V_2} \mathbf{J}_2^{\text{ct}} \dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (2.15)$$

Лема Лоренца (2.15) встановлює зв'язок між полями і струмами, що збуджують їх, при цьому враховується вплив на електромагнітне поле форми і просторового розміщення поверхні S .

Нехай сторонні струми задані в необмеженому просторі. В цьому випадку поверхня S знаходиться на нескінченності і відповідно до умов випромінювання ліва частина виразу (2.15) дорівнює нулю. Тоді одержимо

$$\int_V \mathbf{J}_1^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_2 dV = \int_V \mathbf{J}_2^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (2.16)$$

Дане співвідношення називається **теоремою взаємності для необмеженого простору**.

Теорема взаємності справедлива також у тому випадку, якщо поряд із сторонніми джерелами електричного струму існують магнітні джерела.

Фізичний зміст теореми взаємності розглянемо на прикладі.

Приклад 2.1. Нехай об'єми V_1 і V_2 займають дві прямолінійні антени з довжинами l_1 і l_2 і перетинами ΔS_1 і ΔS_2 , розташовані на відстані, що значно перевищує лінійні розміри їх перетинів (рис. 2.3). Доведемо, що ЕРС, збуджувана в другій антені змінним струмом першої антени, рівна ЕРС, збуджуваній у першій антені таким же струмом другої антени. При цьому будемо вважати, що довжина електромагнітної хвилі значно більша, ніж розміри антен.

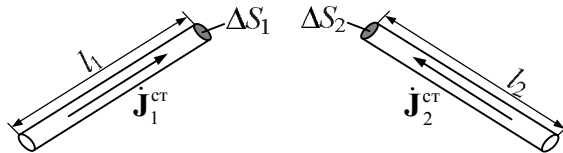


Рис. 2.3

Розв'язок. Припустимо, що в першій антені діє сторонній струм з вектором комплексної амплітуди $\mathbf{J}_1^{\text{ст}}$, а в другій – $\mathbf{J}_2^{\text{ст}}$.

Застосуємо до цих антен теорему взаємності, вважаючи, що $V_1 = l_1 \Delta S_1$ (об'єм першої антени), а $V_2 = l_2 \Delta S_2$ – об'єм другої антени. Тоді відповідно до (2.16) запишемо

$$\int_{l_1 \Delta S_1} \mathbf{J}_1^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_2 dS_1 d\mathbf{l}_1 = \int_{l_2 \Delta S_2} \mathbf{J}_2^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_1 dS_2 d\mathbf{l}_2.$$

Оскільки лінійні розміри перетинів антен значно менші від відстаней між ними, можна вважати, що по всьому перетину ΔS_1 вектор комплексної амплітуди $\dot{\mathbf{E}}_2$ постійний і, відповідно, по всьому перетину ΔS_2 вектор $\dot{\mathbf{E}}_1$ постійний. Це дозволяє в лівій частині винести за знак першого (по порядку дії) інтегрування $\dot{\mathbf{E}}_2$, а в правій частині – $\dot{\mathbf{E}}_1$:

$$\int_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_2 \left(\int_{\Delta S_1} \mathbf{J}_1^{\text{ct}} dS_1 \right) d\mathbf{l}_1 = \int_{l_2} \dot{\mathbf{E}}_1 \left(\int_{\Delta S_2} \mathbf{J}_2^{\text{ct}} dS_2 \right) d\mathbf{l}_2. \quad (2.17)$$

Внутрішні інтеграли в (2.17) відповідно до (1.15) представляють комплексні амплітуди повних струмів антен:

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{J}_1^{\text{ct}} dS_1 = \dot{I}_1^{\text{ct}}, \quad \int_{\Delta S_2} \mathbf{J}_2^{\text{ct}} dS_2 = \dot{I}_2^{\text{ct}}.$$

З урахуванням цього можна записати

$$\int_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_2 \dot{I}_1^{\text{ct}} d\mathbf{l}_1 = \int_{l_2} \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{I}_2^{\text{ct}} d\mathbf{l}_2.$$

Довжини антен значно менші за довжини електромагнітної хвилі, що дозволяє вважати комплексну амплітуду струму даної антени однаковою в усіх її перетинах (по всій довжині). За цієї умови \dot{I}_1^{ct} і \dot{I}_2^{ct} можуть бути винесені за знак інтегрування і рівняння (2.17) прийме вигляд

$$\dot{I}_1^{\text{ct}} \dot{\mathcal{E}}_{12} = \dot{I}_2^{\text{ct}} \dot{\mathcal{E}}_{21}, \quad (2.18)$$

де $\dot{\mathcal{E}}_{12} = \int_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_2 d\mathbf{l}_1$ – комплексна амплітуда ЕРС, що наводиться в першій

антені струмом другої антени; $\dot{\mathcal{E}}_{21} = \int_{l_2} \dot{\mathbf{E}}_1 d\mathbf{l}_2$ – комплексна амплітуда ЕРС,

що наводиться в другій антені струмом першої антени.

Остаточно вираз (2.15) можна записати у вигляді

$$\frac{\dot{I}_1^{\text{ct}}}{\dot{\mathcal{E}}_{21}} = \frac{\dot{I}_2^{\text{ct}}}{\dot{\mathcal{E}}_{12}}. \quad (2.19)$$

Якщо $\dot{I}_1^{\text{ct}} = \dot{I}_2^{\text{ct}}$, то $\dot{\mathcal{E}}_{12} = \dot{\mathcal{E}}_{21}$, що й потрібно було довести.

Таким чином, з (2.19) виходить, що **відношення струму в першій антені до ЕРС в ній, зумовленої струмом другої антени, рівне відношенню струму в другій антені до ЕРС в ній, зумовленої струмом першої антени.** Принцип взаємності (2.19) використовується в теорії антен для доведення ідентичності характеристик однієї і тієї ж антени в режимі передавання і приймання.

2.5. Принцип переставної двоїстості

2.5.1. Симетрична система рівнянь електромагнітного поля

Джерелами електромагнітного поля є струми \mathbf{J} і заряди q , а також сторонні струми \mathbf{J}^{ct} і заряди q^{ct} , які відображають дію неелектричних сил на електромагнітні процеси. Дія електричних струмів і зарядів враховується в правих частинах системи рівнянь Максвелла (1.81).

Як відомо, магнітних струмів і зарядів в природі не існує. Разом з тим, у ряді випадків при дослідженні збудження електромагнітних полів зручно ввести в розгляд густину магнітних струмів \mathbf{J}_m^{ct} і густину магнітних зарядів ρ_m^{ct} .

При цьому друге рівняння Максвелла запишеться у вигляді

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m^{\text{ct}}, \quad (2.20)$$

де \mathbf{J}_m^{ct} – вектор об'ємної густини сторонніх магнітних струмів, збуджуючих змінне електричне поле \mathbf{E} , а четверте – у вигляді

$$\text{div } \mathbf{B} = \rho_m^{\text{ct}}, \quad (2.21)$$

де ρ_m^{ct} – об'ємна густина сторонніх магнітних зарядів.

Розмірність густини магнітного струму $[\mathbf{J}_m^{\text{ct}}] = B/m^2$ (густина електричного струму A/m^2), **розмірність густини магнітних зарядів** $[\rho_m^{\text{ct}}] = B \cdot c/m^3$ (розмірність густини електричного заряду $[\rho] = Кл/m^3 = A \cdot c/m^3$).

Ще раз підкреслимо, що в природі немає «магнітних зарядів» одного знака як у позитивних або негативних електричних зарядів:

навіть у дуже малому об'ємі магнітної речовини завжди присутні два полюси. Разом з тим між електричними зарядженими і намагніченими тілами вбачається і пряма аналогія: намагнічені тіла нагадують тіла, що несуть електричні заряди, об'єднані в систему диполів з переважною орієнтацією осей. Вказана аналогія і дала підставу для введення в рівняння Максвелла магнітних сил.

Система рівнянь Максвелла із введеними магнітними струмами і зарядами записується так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}_e + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

У рівняннях (2.19) $\mathbf{J}_e = \mathbf{J} + \mathbf{J}^{\text{ct}}$, $\mathbf{J}_m = \mathbf{J}_m^{\text{ct}}$.

Рівняння Максвелла із введеними сторонніми магнітними та електричними струмами і зарядами утворюють симетричну систему рівнянь електромагнітного поля з однаковим видом лівих і правих частин. В цьому випадку істотно полегшується розв'язання ряду електродинамічних задач, оскільки можливо знайти магнітні вектори на основі обчислень, виконаних для випадку електричних векторів.

За необхідності відповідно до постановки задачі величини \mathbf{J}_m , ρ_m^{ct} на будь-якому етапі обчислень або в остаточних результатах можна покласти рівними нулю.

Зазначимо, що за аналогією з (1.56) для стороннього магнітного струму можна написати рівняння неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_m^{\text{ct}} = -\frac{\partial \rho_m^{\text{ct}}}{\partial t}.$$

2.5.2. Суть принципу переставної двоїстості

Перейдемо до розгляду принципу переставної двоїстості рівнянь електромагнітного поля, який виходить із симетрії рівнянь Максвелла і дозволяє суттєво скоротити розрахунки при розв'язанні ряду конкретних задач.

Відзначимо, що за відсутності джерел ($\mathbf{J}_e = 0, \mathbf{J}_m = 0$), рівняння Максвелла можна записати наступним чином:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.23)$$

З рівнянь (2.23) виходить, що можна перейти від одного рівняння до іншого і, навпаки, простою заміною вектора \mathbf{H} на \mathbf{E} , вектора \mathbf{E} на \mathbf{H} , величини ε_a на $-\mu_a$ і величини μ_a на $-\varepsilon_a$:

$$\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}, \quad \varepsilon_a \leftrightarrow -\mu_a. \quad (2.24)$$

Ця властивість дає можливість сформулювати принцип переставної двоїстості рівнянь електромагнітного поля: **якщо при розв'язанні електродинамічної задачі знайдено вираз для будь-якого вектора поля (\mathbf{E} або \mathbf{H}) і при цьому постійні інтегрування визначені з початкових і граничних умов для цього вектора, то з вказаного виразу можна одержати розв'язок іншої задачі електромагнітного поля перестановкою в ньому вигляду (2.24) за умови збереження попередніх (старих) граничних і початкових умов для переставленого вектора.**

Так, наприклад, якщо знайдено вираз для вектора \mathbf{H} і постійні інтегрування визначені з умови, що нормальна складова цього вектора дорівнює нулю в межах деякої площини, то, виконавши в цьому виразі вказану перестановку, одержимо розв'язок для вектора \mathbf{E} , нормальна складова якого в межах відміченої площини також буде дорівнювати нулю.

У загальному випадку внаслідок перестановки одержуємо розв'язок електродинамічної задачі, для якої граничні умови знаходимо з попередніх, виконавши таку ж саму перестановку.

Принцип переставної двоїстості, сформульований А.А. Пістолькорсом, може бути поширений і на випадок наявності в даній області сторонніх сил.

В цьому разі перехід від розв'язання системи рівнянь Максвелла (2.22) для одного вектора (наприклад, \mathbf{E}) до розв'язання для іншого вектора (наприклад, \mathbf{H}) здійснюється виконанням наступних перестановок:

$$\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}, \quad \varepsilon_a \leftrightarrow -\mu_a, \quad \mathbf{J}^{\text{ст}} \leftrightarrow -\mathbf{J}_m^{\text{ст}}, \quad \rho \leftrightarrow -\rho^m. \quad (2.25)$$

У разі монохроматичних коливань принцип двоїстості може бути поширений і на випадок провідного середовища.

Таким чином, принцип переставної двоїстості у ряді складних задач, наприклад в теорії щільних і рамкових антен, дає можливість істотно спростити їх розв'язання. Якщо відомий розв'язок конкретної задачі, в якій поле збуджується сторонніми електричними джерелами, то немає необхідності шукати розв'язок для векторів поля, що збуджуються магнітними струмами і зарядами. Досить застосувати принцип переставної двоїстості.

Розглянемо, наприклад, картину магнітних силових ліній, що виникає поблизу тонкої провідної смужки завширшки Δ , по якій проходить електричний струм I (рис. 2.4, *a*).

У безпосередній близькості від провідника магнітні силові лінії вектора \mathbf{H} значною мірою повторюють його контур. На поверхні провідника магнітний вектор дотичний до площини смужки. З віддаленням від смужки силові лінії, поступово деформуючись, перетворюються на кола. На решті нескінченної площини (показаної на рис. 2.4, *a* пунктиром) тангенційна складова $\mathbf{H}_\tau = 0$.

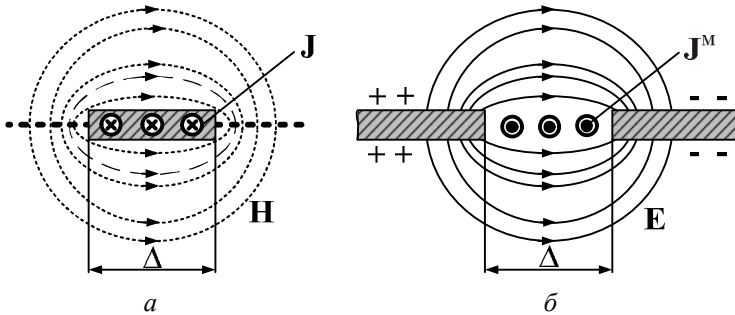


Рис. 2.4

На рис. 2.4, *б* зображено картину силових ліній вектора \mathbf{E} в системі з двох заряджених металевих напівплощин, розділених щільною завширшки Δ . З точністю до напрямку стрілок у верхньому і нижньому напівпросторах ця картина повторює рис. 2.4, *a*.

Схожість картин даних полів дозволяє чисто формально припустити, що в щілині паралельно до країв проходить деякий гіпотетичний струм \mathbf{J}^m , який називається магнітним струмом.

Тому, якщо знайдено розв'язок для векторів поля в першій задачі, його можна використати і в другій задачі, зробивши заміну (2.25).

2.6. Еквівалентні джерела електромагнітного поля

Як джерела ЕМП було розглянуто системи струмів і зарядів. У деяких випадках для розрахунку зручно замінити реальні джерела системою еквівалентних (фіктивних) струмів і зарядів, які збуджують в просторі такі самі поля, як і реальні.

Теорема еквівалентності дозволяє з електродинамічної точки зору обґрунтувати **принцип Гюйгенса – Френеля**, який полягає в тому, що кожену точку фронту хвилі S_1 , що розходить від джерела O (рис. 2.5), можна вважати джерелом вторинних сферичних хвиль. Хвильову поверхню S_2 в будь-який інший момент часу можна знайти як обвідну хвильових поверхонь вторинних сферичних хвиль. Принцип Гюйгенса – Френеля широко використовується при розв'язанні ряду задач електродинаміки.

Розглянемо характеристики еквівалентних джерел.

Припустимо, що в об'ємі, обмеженому поверхнею S , є джерела ЕМП (рис. 2.6).

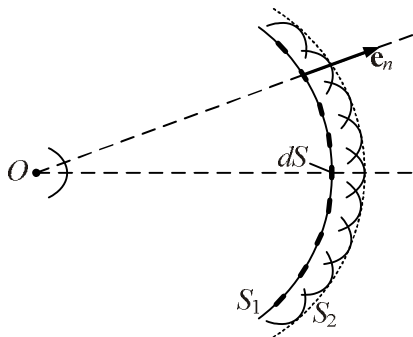


Рис. 2.5

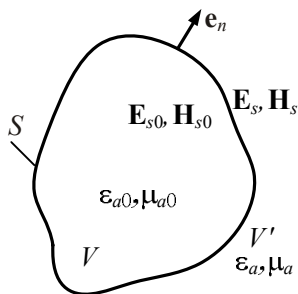


Рис. 2.6

Нехай відомі поля $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$, які збуджують джерела на зовнішній по відношенню до області V поверхні S . Потрібно знайти поле в довільній точці спостереження області V' , вільної від джерел. Згідно з теоремою єдиності задача має єдиний розв'язок. Вважатимемо, що на поверхні S відсутні поверхневі струми і заряди. Тоді на S повинні виконуватися граничні умови:

$$\varepsilon_a (\mathbf{e}_n \mathbf{E}_S) = \varepsilon_{a0} (\mathbf{e}_n \mathbf{E}_{S0}), \quad [\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_S] = [\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_{S0}], \quad (2.26)$$

$$\mu_a (\mathbf{e}_n \mathbf{H}_S) = \mu_{a0} (\mathbf{e}_n \mathbf{H}_{S0}), \quad [\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_S] = [\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_{S0}]. \quad (2.27)$$

У рівняннях (2.26), (2.27) величини \mathbf{E}_{S0} , \mathbf{H}_{S0} – вектори \mathbf{E} , \mathbf{H} на внутрішній стороні поверхні S ; параметри ϵ_{a0}, μ_{a0} і ϵ_a, μ_a – електричні параметри середовищ в областях V і V' ; \mathbf{e}_n – зовнішня нормаль до поверхні S .

Припустимо тепер, що джерела поля в області V відсутні, але поля \mathbf{E}_S , \mathbf{H}_S на зовнішній стороні S залишилися незмінними. В цьому випадку поле в точці спостереження не зміниться (через теорему єдиності), а на поверхні S граничні умови порушуються. Для того, щоб вектори \mathbf{E}_S , \mathbf{H}_S не змінилися і одночасно виконувалися граничні умови, на поверхні S необхідно задати додаткові джерела (струми і заряди), які б компенсували розриви векторів поля.

Відповідно до (1.83), (1.87), розриви нормальної компоненти вектора \mathbf{E} і тангенційної компоненти вектора \mathbf{H} можна компенсувати заданням на S поверхневих зарядів ρ_s і густини поверхні струмів \mathbf{J}_s :

$$(\epsilon_a \mathbf{e}_n \mathbf{E}_S) = \rho_s, \quad (2.28)$$

$$[\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_S] = \mathbf{J}_s. \quad (2.29)$$

За аналогією з виразами (1.83), (1.87) розрив тангенційної складової вектора \mathbf{E} і нормальної складової вектора \mathbf{H} компенсують введенням поверхневої густини магнітних зарядів ρ_s^M і магнітних струмів \mathbf{J}_s^M :

$$-[\mathbf{e}_n, \mathbf{E}_S] = \mathbf{J}_s^M, \quad (2.30)$$

$$(\mu_a \mathbf{e}_n \mathbf{H}_S) = \rho_s^M. \quad (2.31)$$

Реально в природі не існують магнітні струми і заряди, а їх введення до співвідношень (2.30), (2.31) є формальним і має спростити розв'язання задач електродинаміки. У даному випадку на поверхні S відсутні і електричні струми, і заряди, тобто на S джерела відсутні. На поверхні S задані вектори поля \mathbf{E}_S , \mathbf{H}_S , що дозволило за

співвідношеннями (2.28) – (2.31) визначити електричні і магнітні струми і заряди на S і знайти поле в точці спостереження. Такий підхід до розрахунку поля одержав назву **принципу еквівалентності**.

На відміну від реальних першоджерел електромагнітного поля – електричних струмів, введені вище фіктивні еквівалентні струми і заряди називають **еквівалентними вторинними джерелами**. Вони широко застосовуються при розрахунку антен з випромінюючим розкритом.

Зазначимо, що еквівалентні струми і заряди пов'язані рівняннями неперервності, що дозволяє визначати поле в точці спостереження тільки за електричними і магнітними струмами, тобто за тангенційними складовими векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} на поверхні, що охоплює об'єм V (наприклад, антену).

2.7. Хвильові рівняння і електродинамічні потенціали

Прямі задачі електродинаміки полягають у визначенні структури ЕМП за заданими джерелами $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ і $\rho^{\text{ст}}$, відомими як функції координат і часу (п. 2.1). З цією метою рівняння Максвелла зводять до виду диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку – хвильових рівняннях.

Розглянемо основні види хвильових рівнянь, до яких зводяться рівняння Максвелла у випадку лінійного однорідного ізотропного середовища.

2.7.1. Хвильові рівняння для векторів поля

Розглянемо систему рівнянь Максвелла (1.52) – (1.55) за наявності сторонніх електричних струмів і зарядів. Для отримання рівнянь щодо одного невідомого вектора (\mathbf{E} або \mathbf{H}) необхідно виключити з системи рівнянь другий вектор.

Виключимо спочатку вектор \mathbf{H} . З цією метою візьмемо похідну за часом від рівняння (1.78) і помножимо на μ_a :

$$\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{J}^{\text{ст}} + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Для однорідного ізотропного середовища поміняємо місцями операції диференціювання за часом і координатами:

$$\mu_a \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ct}}}{\partial t} + \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.32)$$

Застосуємо до рівняння (1.53) операцію rot і використаємо співвідношення $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ (дивись додаток E):

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_a \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (2.33)$$

Враховуючи третє рівняння Максвелла (1.79) за умови відсутності накопичення зарядів ($\rho = 0$), перетворимо вираз (2.32) до вигляду

$$-\mu_a \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{grad} \rho^{\text{ct}} - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (2.34)$$

Додаючи рівняння (2.32) і (2.34), одержимо:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{grad} \rho^{\text{ct}} + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ct}}}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Виключимо тепер з рівнянь Максвелла вектор \mathbf{E} . Виконаємо наступні операції: продиференціюємо друге рівняння за часом і помножимо його на ε_a ; до першого рівняння застосуємо операцію rot , додамо отримані результати і врахуємо четверте рівняння Максвелла. У результаті одержимо:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{J}^{\text{ct}}. \quad (2.36)$$

Рівняння (2.35) і (2.36) мають однакову структуру і є **узагальненими неоднорідними векторними хвильовими рівняннями**.

Далі вважатимемо, що середовище є ідеальним діелектриком ($\sigma = 0$). В цьому випадку рівняння (2.35), (2.36) є **неоднорідними векторними хвильовими рівняннями або неоднорідними рівняннями Даламбера**:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{grad} \rho^{\text{ct}} + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ct}}}{\partial t}, \quad (2.37)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{J}^{\text{ct}}. \quad (2.38)$$

Якщо, крім того, в даному середовищі ($\sigma = 0$) відсутні сторонні струми і заряди ($\rho^{\text{ct}} = 0$, $\mathbf{J}^{\text{ct}} = 0$), то рівняння набувають вигляду **однорідних векторних хвильових рівнянь** (права частина рівнянь дорівнює нулю) або **однорідних векторних рівнянь Даламбера**:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.39)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.40)$$

Кожне з векторних рівнянь (2.35) – (2.40) еквівалентне трьом скалярним рівнянням вигляду

$$\nabla^2 R_i - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 R_i}{\partial t^2} = f_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.41)$$

де R_i – відповідні проекції векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} ; f_i – відомі функції просторових координат і часу (визначаються сторонніми струмами і зарядами \mathbf{J}^{ct} , ρ^{ct}).

Рівняння вигляду (2.41) описують хвильові процеси, де v – швидкість цих процесів. Відповідно до виразів (2.37) – (2.40) швидкість хвиль $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$. Для вакууму $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$ – швидкість світла (швидкість поширення енергії електромагнітного поля).

2.7.2. Хвильові рівняння для електродинамічних потенціалів

Диференціальні рівняння (2.35) – (2.40) дозволяють за заданими сторонніми джерелами знайти шукані вектори ЕМП \mathbf{E} і \mathbf{H} . Певна незручність використання виразів (2.35) і (2.38) полягає в тому, що права частина цих рівнянь містить не самі сторонні джерела, а функції від них – $\text{grad } \rho^{\text{ct}}$ і $\text{rot } \mathbf{J}^{\text{ct}}$. При розв'язанні ряду задач це утруднює отримання зручних розрахункових співвідношень. Тому розрахунок характеристик ЕМП в областях, де відсутні сторонні джерела, прова-

дять з використанням **однорідних** векторних хвильових рівнянь (2.39), (2.40), а для розв'язання **неоднорідних** хвильових рівнянь вводять допоміжні функції – **електродинамічні потенціали**, які спрощують формулювання і розв'язання задач.

Четверте рівняння Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ дозволяє записати вектор \mathbf{B} у вигляді $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, оскільки для довільного вектора \mathbf{a} справедлива тотожність $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$. При цьому

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (2.42)$$

де \mathbf{A} – **векторний потенціал**.

Запишемо друге рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \text{або} \quad \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Використовуючи тотожність $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{a} \equiv 0$, покладемо, що

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (2.43)$$

де φ – деяка скалярна функція, що зветься **скалярним потенціалом**.

Знак «мінус» у співвідношенні (2.43) вибраний для зручності і в разі електростатичного поля функція φ збігається з електростатичним потенціалом.

З урахуванням введених потенціалів \mathbf{A} і φ перепишемо перше рівняння Максвелла:

$$\frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}^{\text{ст}} - \varepsilon_a \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Розкриваючи в останньому виразі оператор $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$, одержимо:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_a \mathbf{J}^{\text{ст}}.$$

Векторний потенціал \mathbf{A} визначений з точністю до градієнта довільної функції. Тому доцільно на потенціали \mathbf{A} і φ накласти додатко-

ву умову:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.44)$$

Вираз (2.44) є умовою калібрування і називається калібруванням за Лоренцем.

З урахуванням виразу (2.44) диференційне рівняння для векторного потенціалу \mathbf{A} прийме вигляд:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{J}^{\text{ст}}. \quad (2.45)$$

Підставивши в третє рівняння Максвелла ($\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$) значення

\mathbf{E} з (2.43) і враховуючи, що $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi$, одержимо

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\rho^{\text{ст}}}{\varepsilon_a}.$$

Використовуючи в останньому співвідношенні вираз для $\operatorname{div} \mathbf{A}$ з умови калібрування (2.44), остаточно отримаємо:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho^{\text{ст}}}{\varepsilon_a}. \quad (2.46)$$

Отже, для введених електродинамічних потенціалів \mathbf{A} і φ одержані неоднорідні хвильові рівняння – векторне (2.45) і скалярне (2.46), які аналогічні виразам (2.37), (2.38).

На відміну від співвідношень (2.37), (2.38) в правих частинах рівнянь (2.45), (2.46) стоять функції, які описують сторонні струми $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ і заряди $\rho^{\text{ст}}$. Для визначення векторів поля потрібно розв'язати чотири скалярних рівняння (три для проекцій \mathbf{A} і для φ) і за співвідношеннями (2.42), (2.43) знайти \mathbf{E} і \mathbf{H} .

2.7.3. Хвильові рівняння в комплексній формі

При гармонічних збуджуючих джерелах хвильові рівняння спрощуються. Введемо, як це вказано в п. 1.3.1, комплексні амплітуди векторного потенціалу $\dot{\mathbf{A}}$, скалярного потенціалу $\dot{\varphi}$ і підставимо в оде-

ржані хвильові рівняння $\dot{\mathbf{A}}(t) = \dot{\mathbf{A}}e^{j\omega t}$, $\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}e^{j\omega t}$. Тоді одержимо хвильові рівняння для векторів електромагнітного поля – векторні неоднорідні рівняння Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = \frac{\text{grad } \dot{\rho}^{\text{ст}}}{\varepsilon_a} + j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}, \quad (2.47)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot } \dot{\mathbf{J}}, \quad (2.48)$$

де $k^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a$.

У просторі, де відсутні сторонні струми і заряди, рівняння (2.47), (2.48) набувають вигляду однорідних векторних хвильових рівнянь (однорідних векторних рівнянь Гельмгольца):

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.49)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (2.50)$$

Хвильові рівняння для електродинамічних потенціалів у комплексній формі матимуть вигляд:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu_a \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}, \quad (2.51)$$

$$\nabla^2 \dot{\phi} + k^2 \dot{\phi} = -\frac{\dot{\rho}^{\text{ст}}}{\varepsilon_a}. \quad (2.52)$$

Вектори поля $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ знаходимо за співвідношеннями:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{E}} = -\text{grad } \dot{\phi} - j\omega \dot{\mathbf{A}}. \quad (2.53)$$

Враховуючи, що відповідно до умови калібрування

$\text{div } \dot{\mathbf{A}} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial t}$, для гармонічних полів $\text{div } \dot{\mathbf{A}} = -j\omega \varepsilon_a \mu_a \dot{\phi}$, вектори поля знаходимо з виразів:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{E}} = -\text{grad} \left(j \frac{1}{\omega \varepsilon_a \mu_a} \text{div } \dot{\mathbf{A}} \right) - j\omega \dot{\mathbf{A}}. \quad (2.54)$$

Як бачимо із співвідношень (2.54), у разі гармонічно змінюваних

полів для визначення векторів $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ досить розв'язати одне векторне хвильове рівняння (2.45) щодо векторного потенціалу $\dot{\mathbf{A}}$.

Вище було введено електродинамічні потенціали та одержано для них диференційні рівняння. Векторний \mathbf{A} і скалярний φ потенціали зв'язані умовою калібрування, тому їх можна визначити через одну векторну функцію – вектор Герца $\mathbf{\Gamma}$, зв'язаний з потенціалами співвідношеннями:

$$\mathbf{A} = \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t}, \quad \varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Gamma}. \quad (2.55)$$

Для монохроматичних полів вектор Герца $\dot{\mathbf{\Gamma}}$ відрізняється від векторного потенціалу $\dot{\mathbf{A}}$ постійним множником $\dot{\mathbf{A}} = j\omega\epsilon_a\mu_a\dot{\mathbf{\Gamma}}$ і відповідно до (2.51) вектор Герца також задовольняє неоднорідному векторному хвильовому рівнянню

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{\Gamma}} + k^2 \dot{\mathbf{\Gamma}} = -\frac{\mathbf{j}_{\text{ст}}}{j\omega\epsilon_a}. \quad (2.56)$$

Таким чином, систему рівнянь Максвелла звели до одного неоднорідного векторного хвильового рівняння.

2.7.4. Запізнювальні потенціали

Один з методів розв'язання прямих задач електродинаміки полягає у визначенні електродинамічних потенціалів з рівнянь Даламбера (2.45), (2.46) за заданими функціями $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ і $\rho(x, y, z, t)$.

Розглянемо порядок обчислення електродинамічних потенціалів за заданим довільним розподілом зарядів і струмів у певній області простору. Ми одержимо кінцеві формули без строгого їх виведення, розглянувши послідовно ряд прикладів, що мають як наводжуючий характер, так і самостійний інтерес.

Приклад 2.2. Нехай електричне поле збуджується нерухомим постійним точковим зарядом q . Визначимо зв'язок між величиною заряду і скалярним електродинамічним потенціалом φ .

Розв'язок. Введемо сферичну систему координат з центром у точці розміщення заряду. Вектор \mathbf{E} в цьому випадку визначається, як відомо, співвідношенням

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2}, \quad (2.57)$$

де r – відстань до точки спостереження; \mathbf{e}_r – орт вектора, проведеного від заряду q до точки спостереження.

Заряд постійний, поле не залежить від часу, не залежать від часу і потенціали \mathbf{A} і φ . Тому співвідношення (2.43) приймає вигляд $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$.

Розписуючи градієнт φ у сферичній системі координат та враховуючи, що \mathbf{E} залежить тільки від відстані, маємо:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (2.58)$$

Підставляючи (2.57) в (2.58) і виконуючи інтегрування за змінною r , знаходимо шуканий скалярний потенціал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (2.59)$$

Формула (2.59) повністю збігається з відомим з курсу фізики виразом для електростатичного потенціалу точкового заряду. Постійну інтегрування у (2.59) прийняли рівною нулю, щоб при $r \rightarrow \infty$ функція φ стала нулем.

Приклад 2.3. Нехай електричне поле збуджується постійними зарядами, неперервно розподіленими в об'ємі V за законом, описуваним функцією $\rho(x, y, z)$. Знайдемо вираз для скалярного потенціалу в цьому випадку.

Розв'язок. Якщо заряд зосереджений в малому елементі об'єму dV з густиною ρ , то очевидно, що формулу (2.59) слід переписати у вигляді

$$d\varphi = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_a R} dV, \quad (2.60)$$

де $R = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$ – відстань від елемента dV з координатами (x', y', z') до точки спостереження $M(x, y, z)$ (рис. 2.7).

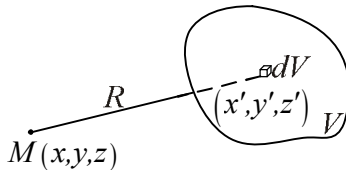


Рис. 2.7

Від формули (2.60), користуючись принципом суперпозиції (пункт 2.2), легко перейти до виразу для скалярного потенціалу, що створюється довільним розподілом зарядів в об'ємі V :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho}{R} dV. \quad (2.61)$$

Величину φ , що визначається формулою (2.61), можна розглядати як розв'язок рівняння

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (2.62)$$

яке впливає з рівняння Даламбера (2.46), якщо покласти $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$. Рівняння (2.62) називається **рівнянням Пуассона**. Це основне рівняння електростатики, до якого звичайно зводиться більшість електростатичних задач.

Приклад 2.4. Нехай поле збуджується точковим зарядом, як і в прикладі 2.2, розміщеним на початку координат, але величина його змінюється в часі згідно із законом $q = q(t)$. Знайдемо вираз для скалярного потенціалу.

Розв'язок. У будь-якій точці, окрім початку координат, потенціал φ задовольняє однорідному хвильовому рівнянню, яке виходить з виразу

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.63)$$

З курсу математики відомо, що у сферичній системі координат, зв'язаній із зарядом, розв'язання рівняння (2.63) має вигляд

$$\varphi = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}, \quad (2.64)$$

де $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$; $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$, $f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$ – довільні двічі диференційовані функції

аргументів $t - \frac{r}{v}$ і $t + \frac{r}{v}$ відповідно.

У справедливості розв'язання (2.63) можна переконатися безпосередньо, підставивши вираз (2.64) в рівняння (2.63).

Перший доданок в (2.64) описує сферичну хвилю, що розходить від джерела і поширюється з початку координат уздовж радіусів r із швид-

кістю $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Відповідно другий доданок є сферичною хвилею, що поширюється з нескінченності і сходиться на початку координат.

З цих двох окремих розв'язків ми виберемо перший, який найбільше відповідає фізичній постановці задачі. Таким чином, для точкового заряду $q(t)$ в усіх точках поля, віддалених на відстань r , розв'язання рівняння (2.63) має вигляд

$$\varphi = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}, \quad (2.65)$$

де f_1 – невідома функція.

Вид функції f_1 можна встановити з наступних міркувань. Очевидно, що значення потенціалу φ має бути пов'язане з величиною заряду. Оскільки в статичному випадку (див. приклад 2.2) потенціал визначався формулою

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r},$$

то природно припустити, що $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} q\left(t - \frac{r}{v}\right)$. Тоді

остаточно маємо вираз для потенціалу

$$\varphi = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (2.66)$$

Приклад 2.5. Одержимо вираз для скалярного потенціалу, зумовленого довільним розподілом змінних зарядів в об'ємі V , що характеризується функцією $\rho(x, y, z, t)$.

Розв'язок. Якщо заряд зосереджений в малому елементі об'єму dV з густиною $\rho = \rho(t)$, то за аналогією з формулою (2.66) можемо представити скалярний потенціал у вигляді

$$\varphi = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right)dV}{4\pi\epsilon_a R}, \quad (2.67)$$

де R – відстань від елемента dV до точки спостереження.

Тоді для скалярного потенціалу, зумовленого довільним розподілом зарядів в об'ємі V , маємо (порівняйте із (2.61)):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right) dV}{R}. \quad (2.68)$$

Вираз (2.68) є частинним розв'язком неоднорідного рівняння Даламбера. Аналогічний розв'язок можна записати і для рівняння Даламбера щодо проєкцій векторного потенціалу \mathbf{A} і самого потенціалу:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right) dV}{R}. \quad (2.69)$$

З формул (2.68) і (2.69) виходить, що для обчислення електродинамічних потенціалів \mathbf{A} і φ в довільній точці простору у момент часу t потрібно брати значення струмів і зарядів в кожному елементі dV у більш ранній порівнянно з t момент часу $t' = t - \frac{R}{v}$, що визначається відстанню R від елемента dV до точки спостереження $M(x, y, z)$. Це відповідає властивій рівнянням Максвелла концепції "близькодії" і хвильовому характеру електромагнітного поля: вплив джерел електромагнітного поля виявляється не миттєво, а із запізненням, потрібен деякий час $\Delta t = t - \frac{R}{v}$, за який електромагнітні коливання, викликані зміною струмів і зарядів в елементі dV , встигнуть поширитися від елемента dV до точки спостереження M .

Якщо покласти $v \rightarrow \infty$, тобто знехтувати часом запізнення $t_3 = \frac{R}{v}$, то рівняння (2.68), (2.69) переходять у співвідношення, які належать до області квазістаціонарних явищ.

Функції \mathbf{A} і φ , записані у вигляді співвідношень (2.68) і (2.69), називають **запізнювальними потенціалами**.

Можна тепер виписати вираз для комплексного векторного потенціалу $\dot{\mathbf{A}}$ монохроматичного поля, користуючись схожістю структури рівняння Даламбера (2.45) і рівняння Гельмгольца (2.51):

$$\dot{\mathbf{A}}(x, y, z, t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}^{\text{ст}}\left(x', y', z', t - \frac{R}{v}\right) dV}{R}. \quad (2.70)$$

Відповідно для комплексної амплітуди вектора $\dot{\mathbf{A}}$ ($\dot{\mathbf{A}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(x, y, z) e^{j\omega t}$) можна записати

$$\dot{\mathbf{A}}(x, y, z) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}^{\text{ст}}(x', y', z') e^{-jkR}}{R} dV, \quad (2.71)$$

де $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ – параметр, який називається **хвильовим числом**. У середовищі без втрат довжина хвилі і хвильове число зв'язані співвідношенням $\lambda = 2\pi/k$.

У загальному випадку параметр k – комплексна величина. Співвідношення (2.70), (2.71) придатні і для середовища з втратами, при заміні $\mu_a \rightarrow \dot{\mu}_a$, $\epsilon_a \rightarrow \dot{\epsilon}_a$, $k \rightarrow \dot{k}$.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні різновиди задач електродинаміки.
2. Сформулюйте принцип суперпозиції для ЕМП в лінійних ізотропних середовищах.
3. Сформулюйте теорему єдиності розв'язання рівнянь електродинаміки і викладіть порядок її доведення для внутрішньої і зовнішньої задачі.
4. Запишіть математичні вирази умови випромінювання і поясніть їх фізичний зміст.
5. Поясніть фізичну сутність теореми взаємності.
6. Запишіть симетричну систему рівнянь для векторів ЕМП.
7. Сформулюйте принцип переставної двоїстості рівнянь електромагнітного поля.
8. Розкажіть про постановку задачі визначення поля усередині замкненого об'єму за відомим розподілом джерел на поверхні, що обмежує цей об'єм.
9. Поясніть фізичний зміст принципу еквівалентності.
10. Викладіть послідовність операцій при отриманні узагальненого векторного рівняння Даламбера.

11. Якими співвідношеннями вводяться електродинамічні потенціали і вектор Герца?
12. Напишіть хвильові рівняння щодо комплексних векторів поля, електродинамічних потенціалів і вектора Герца.
13. Поясніть фізичний зміст поняття електродинамічних потенціалів запізнення.
14. Запишіть розв'язання хвильового рівняння в безмежному середовищі для випадку монохроматичних хвиль.

3. СТАТИЧНІ, СТАЦІОНАРНІ ТА КВАЗІСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ

3.1. Електростатика

3.1.1. Основні рівняння електростатики

Електростатичне поле описується наступною системою рівнянь (див. п. 1.2):

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad (3.1, a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (3.1, б)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (3.2, a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3.2, б)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}. \quad (3.3)$$

Незважаючи на те, що рівняння (3.1) – (3.3) досить прості, їх безпосереднє розв'язання пов'язане з громіздкими розрахунками.

Так, наприклад, диференціальні рівняння (3.1,б), (3.2,б) у декартовій системі координат еквівалентні системі:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho; \end{aligned} \right\} (3.4)$$

$$D_x = \varepsilon_a E_x, \quad D_y = \varepsilon_a E_y, \quad D_z = \varepsilon_a E_z.$$

Одержати невідомі функції E_x , E_y і E_z з (3.4) досить складно. Введення скалярного потенціалу (п. 2.7) дозволяє перетворити рівняння (3.1, б) до вигляду

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi. \quad (3.5)$$

У даному випадку функцію φ називають електростатичним потенціалом. Зміст знака «мінус» з'ясується нижче.

Для стаціонарних полів рівняння для електростатичного потенціалу (2.46) набуває вигляду рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad (3.6)$$

яке в точках, де заряд відсутній ($\rho = 0$), переходить у **рівняння Лапласа**:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.7)$$

Знаходження вектора **E** простим диференціюванням скалярної функції φ (3.5) свідчить про значне спрощення задачі.

Зазначимо, що при розрахунку поля системи зарядів дуже часто користуються принципом суперпозиції (п. 2.2). Застосування методу суперпозиції для скалярних величин простіше, ніж для векторних.

Відзначимо властивості електростатичного потенціалу.

1. Потенціал має бути неперервною функцією. У протилежному разі в точках порушення неперервності потенціалу напруженість поля приймала б нескінченне значення, що неможливо.

2. Відповідно до граничних умов для E_τ і D_n (1.88) потенціал задовольняє наступним граничним умовам:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \quad (3.8)$$

і

$$\varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \rho_s. \quad (3.9)$$

3. Оскільки потенціал електростатичного поля визначається з точністю до довільної постійної C ($\text{grad } \varphi = \text{grad}(\varphi + C) = -\mathbf{E}$), то для кожної задачі можна вибрати найбільш зручне значення C .

Поверхні $\varphi = \text{const}$ називаються еквіпотенційними. **Вектор E у кожній точці нормальний до еквіпотенційної поверхні і спрямований у бік зменшення потенціалу.** Вектор $\text{grad } \varphi$ за змістом збігається з напрямком максимального росту потенціалу (рис. 3.1, а), тобто протилежний вектору **E**. Звідси знак «мінус» у (2.43) і (3.5).

Виразимо потенціал у довільній точці M_2 через потенціал поля в деякій іншій точці M_1 (рис. 3.1, б).

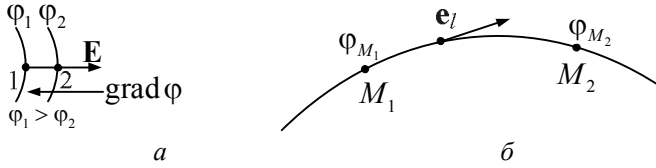


Рис. 3.1

З'єднаємо точки M_1 і M_2 довільною кривою і знайдемо зміну потенціалу на елементарній ділянці кривої $d\mathbf{l}$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{e}_l \cdot d\mathbf{l} = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l}.$$

Тепер потенціал φ_{M_2} може бути розрахований так:

$$\varphi_{M_2} = \varphi_{M_1} + \int_{M_1}^{M_2} d\varphi = \varphi_{M_1} + \int_{M_1}^{M_2} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l},$$

де φ_{M_1} – потенціал точки M_1 .

З врахуванням (3.5) одержимо

$$\varphi_{M_2} = \varphi_{M_1} - \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_{M_1} + \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (3.10)$$

Оскільки **електростатичне поле безвихрове** ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$), то інтеграл по будь-якому замкненому контуру $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$. Тому потенціал φ_{M_2} залежить тільки від положення точки M_2 і не залежить від шляху, за яким обчислюється інтеграл у (3.10).

Використовуючи властивість неоднозначності потенціалу, покладемо потенціал φ_{M_1} точки M_1 рівним нулю, тоді формула (3.10) матиме вигляд

$$\varphi_{M_2} = \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (3.11)$$

4. Оскільки сила, що діє на точковий заряд q , дорівнює $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$, то робота з переміщення заряду q на шляху $d\mathbf{l}$

$$dA = \mathbf{F}_e d\mathbf{l} = q\mathbf{E}d\mathbf{l} = -qd\varphi,$$

а робота на шляху $M_1 M_2$ визначиться співвідношенням

$$A = - \int_{M_1}^{M_2} qd\varphi = q(\varphi_{M_1} - \varphi_{M_2}). \quad (3.12)$$

Таким чином, робота сил електростатичного поля з переміщення зарядів з одних точок в інші визначається тільки положенням цих точок у просторі.

Поклавши $q = 1$, одержимо

$$A = \varphi_{M_1} - \varphi_{M_2} = U.$$

Отже, електростатичний потенціал – енергетична характеристика поля. **Різниця потенціалів (напруга U) між двома точками визначає роботу, затрачувану при переміщенні одиничного заряду з однієї точки в іншу.**

Електричне поле часто збуджується зарядженими провідними тілами. Оскільки в електростатиці заряди нерухомі, то в провіднику струм дорівнює нулю:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = 0.$$

Отже, скрізь усередині провідника $\mathbf{E} = 0$ (оскільки $\sigma \neq 0$) і провідник є екіпотенційною областю, через те що рівність $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = 0$ можлива тільки при $\varphi = \text{const}$. Крім того, у внутрішніх точках провідника відсутні вільні заряди (оскільки при $\mathbf{E} = 0$ і $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E} = 0$, тому $\rho = 0$). При цьому поверхнева густина заряду ρ_s , виходячи з граничної умови (3.9), визначається виразом

$$\rho_s = -\varepsilon_{a2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}. \quad (3.13)$$

Тут φ_2 – потенціал поблизу поверхні провідника. У (3.13) враховано, що в самому провіднику $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$.

Повний заряд на провіднику Q може бути обчислений як

$$Q = \oint_S \rho_s dS = -\varepsilon_{a2} \oint_S \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} dS. \quad (3.14)$$

Вектор напруженості електричного поля \mathbf{E}_2 перпендикулярний до поверхні провідника, тому що $E_{2\tau} = E_{1\tau \text{ пров}} = 0$. Остання умова була відзначена раніше (п. 1.4).

3.1.2. Приклади розрахунку електростатичних полів

Розрахунок електростатичного поля, збуджуваного довільним розподілом зарядів, у загальному випадку досить складний. Однак задача значно спрощується, якщо розподіл зарядів має симетрію. У цьому разі доцільно скористатися рівнянням (3.2, а), а поверхню інтегрування підібрати таку, у всіх точках якої величина поля була б однаковою. Завдяки цьому вдасться винести D_n з-під знака інтеграла і спростити розрахунок поля.

У випадку асиметричного розподілу зарядів шукана функція входить під знак інтеграла, і для отримання розв'язку доцільно скористатися диференційними рівняннями (3.1,б), (3.2,б). При цьому розв'язують рівняння Пуассона і Лапласа (3.6), (3.7) і знаходять шукані вектори \mathbf{E} , \mathbf{D} .

Інтегральний метод розв'язання задач електродинаміки був розглянутий на прикладі визначення електростатичного поля найпростішого об'єкта – рівномірно зарядженої кулі (приклад 1.5, п. 1.2.2).

Розв'яжемо аналогічну задачу, використовуючи диференційні рівняння.

3.1.3. Електричне поле рівномірно зарядженої кулі

Приклад. 3.1 Нехай в однорідному безмежному діелектрику з діелектричною проникністю ε_a в межах кулі радіусом a (рис. 3.2) рівномірно розподілений заряд із густиною $\rho = \text{const}$. Потрібно розрахувати поле як усередині кулі, так і поза нею.

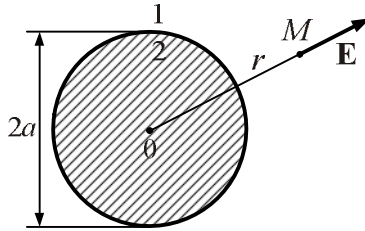


Рис. 3.2

Розв'язок. Розіб'ємо весь простір на дві області: область 1 – поза кулею; область 2 – усередині кулі. У першій області має виконуватися рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi_1 = 0$, а в другій – рівняння Пуассона $\nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$.

Оскільки останнє з них більш загальне, тому досить знайти потенціал тільки в другій області φ_2 , а потенціал першої області φ_1 можна визначити підстановкою $\rho = 0$ в попередній розв'язок.

Через те що заряд розподілений рівномірно, фізичні умови в точках, рівновіддалених від центра кулі, будуть однаковими. Тому для розв'язання рівняння Пуассона виберемо сферичну систему координат з початком у центрі кулі. При заданому r фізичні умови у всіх точках з кутовими координатами φ й θ однакові. Це означає, що поле від координат φ і θ залежати не повинне, тобто $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

Тоді рівняння Пуассона приймає вигляд звичайного диференційного рівняння (див. додаток Е)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$$

Помноживши обидві частини рівняння на r^2 , матимемо наступний вираз

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_a}$$

Після першого інтегрування знаходимо:

$$r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_a} + C_1 \quad \text{і} \quad \frac{d\varphi_2}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_a} + \frac{C_1}{r^2}$$

Після другого інтегрування одержуємо загальний розв'язок для потенціалу φ_2 усередині кулі:

$$\varphi_2 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_a} - \frac{C_1}{r} + C_2, \quad r \leq a.$$

Для області 1, де виконується рівняння Лапласа ($\rho = 0$), загальне рішення буде мати вигляд

$$\varphi_1 = -\frac{C_3}{r} + C_4, \quad r \geq a.$$

Знайдемо постійні інтегрування.

На нескінченному віддаленні від заряду поле відсутнє, і природно прийняти, що потенціал дорівнює нулю. Якщо в розв'язку для φ_1 покласти $r = \infty$, то $\varphi_1 = C_4 = 0$.

Потенціал скрізь має бути обмеженим. Щоб ця умова не порушувалася в центрі кулі ($r = 0$), варто прийняти $C_1 = 0$.

Константи, що залишилися, слід визначити з граничних умов для потенціалу (3.9). Оскільки поверхневого заряду на кулі немає ($\rho_s = 0$), то

$$\varepsilon_a \left. \frac{d\varphi_1}{dr} \right|_{r=a} = \varepsilon_a \left. \frac{d\varphi_2}{dr} \right|_{r=a}; \quad \varepsilon_a \frac{C_3}{a^2} = -\frac{\rho a}{3} \quad \text{і} \quad C_3 = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_a}.$$

Константу C_2 визначимо з умови неперервності потенціалу: $\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}$

$$\text{чи} \quad -\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_a} + C_2 = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_a}, \quad \text{звідки} \quad C_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_a}.$$

Для одержання вектора \mathbf{E} застосуємо формулу $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. У випадку задачі зі сферичною симетрією ($\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$) ця формула набуває вигляду

$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_r \frac{d\varphi}{dr}$. Остаточні вирази для потенціалу поля і векторів \mathbf{E} і $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$ мають вигляд

$$\varphi_1 = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_a r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r}; \quad (r > a), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}; \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_r \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad (r > a), \quad (3.16)$$

$$\varphi_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_a} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_a}; \quad (0 < r \leq a), \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\rho r}{3\epsilon_a}; \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\rho r}{3}; \quad (0 < r \leq a), \quad (3.18)$$

де $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ – заряд кулі.

На рис. 3.3 наведені відповідні графіки. При $r = a$ на кривій $E(r)$ має місце злам, а на кривій $\varphi(r)$ – гладкий перехід, що свідчить про неперервність похідної потенціалу $\frac{d\varphi}{dr}$.

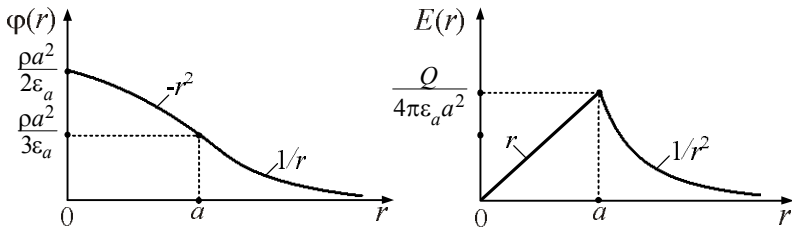


Рис. 3.3

Усередині рівномірно зарядженої кулі поле лінійно зростає з відстанню від центра, а поза ним виявляється таким, ніби заряд Q зосереджений у центрі кулі. Таким чином, для області поза кулею ($r > a$) електростатичне поле (3.16) збігається з полем, зумовленим законом Кулона, сформульованим для точкових зарядів, якщо вважати, що весь заряд сконцентрований у центрі кулі.

3.1.4. Розкладання поля на мультиполі. Поле електростатичного диполя

Приклад 3.2. Знайти поле системи куль із зарядами q_1, q_2, \dots, q_n (рис. 3.4), розташованими в обмеженій області V .

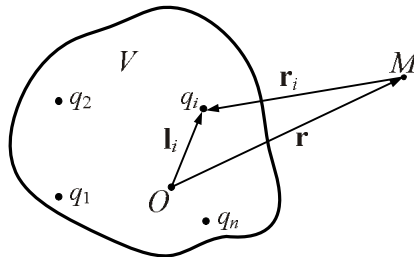


Рис. 3.4

Розв'язок. Початок сферичної системи координат розташуємо в точці O області V . Положення точки спостереження M будемо характеризувати радіусом-вектором \mathbf{r} , а положення центра i -ї кулі вектором \mathbf{l}_i . Як виходить з рис. 3.4,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{l}_i - \mathbf{r}. \quad (3.19)$$

Через те, що за принципом суперпозиції потенціал у точці M дорівнює сумі потенціалів кожного заряду окремо,

$$\varphi(M) = \sum_i \varphi_i(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_a r_i}. \quad (3.20)$$

Відповідно до (3.19)

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{|\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \mathbf{l}_i^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{l}_i}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{e}_r \mathbf{l}_i}{r} + \frac{l_i^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Розкладаючи (3.21) у ряд

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{e}_r \mathbf{l}_i}{r} - \frac{l_i^2}{r^2} + \dots \right),$$

вираз для $\varphi(M)$ представимо у вигляді

$$\varphi(M) = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_a r} + \frac{\mathbf{e}_r \sum_i q_i \mathbf{l}_i}{4\pi\epsilon_a r^2} + \frac{\sum_i q_i l_i^2}{4\pi\epsilon_a r^3} + \dots \quad (3.22)$$

З (3.21) виходить, що з віддаленням точки спостереження M від області V потенціал спадає. Коли $r \rightarrow \infty$, $\varphi(M) \rightarrow 0$. Тобто в точках, нескінченно віддалених від зарядів, що займають обмежений об'єм, потенціал збуджуваного ними поля дорівнює нулю. Якщо сумарний заряд $Q_\Sigma = \sum q_i$ в області V відмінний від нуля, то на великих порівняно з розмірами області V відстанях потенціал визначається першим доданком ряду (3.22):

$$\varphi(M) \approx \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_a r} = \frac{Q_\Sigma}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (3.23)$$

Інакше кажучи, на великих відстанях від системи шуканий потенціал збігається з потенціалом точкового заряду, який дорівнює Q_Σ .

Із співвідношення (3.23) виходить, що закон Кулона точно виконується лише в граничному випадку, коли заряди розташовані у нескінченно малій

області $\frac{l_i}{r} \rightarrow 0$. У реальних ситуаціях закон Кулона виконується приблизно, причому похибка визначається сумою всіх доданків у (3.22), крім першого.

Приклад 3.3. Знайти поле системи зарядів, коли сумарний заряд області V дорівнює нулю $Q_\Sigma = 0$, а інші доданки у розкладі (3.22) відмінні від нуля.

Розв'язок. У цьому випадку (приклад 3.2) потенціал у віддалених точках визначається в основному другим доданком ряду (3.22), який пропорційний $1/r^2$, бо інші мають порядок $1/r^3$, $1/r^4$... Таким чином,

$$\varphi(M) \approx \frac{\epsilon_r \sum_i q_i \mathbf{l}_i}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (3.24)$$

Поле нейтральної системи зарядів ($Q_\Sigma = 0$) зведене до поля **електричного диполя**, під яким розуміють систему двох різнойменних, але рівних за абсолютною величиною точкових зарядів, зміщених один відносно другого на відстань l (рис. 3.5).

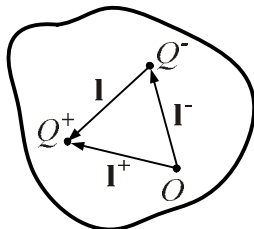


Рис. 3.5

У формулі (3.24) величина

$$\sum_i q_i \mathbf{l}_i = \mathbf{p} \quad (3.25)$$

є **електричним моментом** системи зарядів. Якщо сумарний заряд області дорівнює нулю, то електричний момент не залежить від вибору початку координат.

Згрупуємо позитивні і негативні заряди в області V :

$$\sum_i q_i = \sum_\kappa q_\kappa^+ + \sum_j q_j^- = Q^+ + Q^-.$$

Тоді можна записати

$$\mathbf{p} = \sum_\kappa q_\kappa^+ \mathbf{l}_\kappa^+ + \sum_j q_j^- \mathbf{l}_j^-.$$

Введемо до розгляду центр «ваги» позитивних q_k^+ зарядів і визначимо його координати:

$$\mathbf{l}^+ = \frac{\sum_k q_k^+ \mathbf{l}_k^+}{\sum_k q_k^+} = \frac{\sum_k q_k^+ \mathbf{l}_k^+}{Q^+}.$$

Аналогічно визначається центр «ваги» негативних зарядів. Електричний момент системи зарядів запишемо у вигляді

$$\mathbf{p} = Q^+ \mathbf{l}^+ + Q^- \mathbf{l}^- = Q^+ (\mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-) = Q \mathbf{l}. \quad (3.26)$$

У співвідношенні (3.26) $Q = Q^+ = -Q^-$ – сумарна величина заряду одного знака; \mathbf{l} – вектор, спрямований від центра «ваги» негативних зарядів до центра «ваги» позитивних (рис. 3.6).

З урахуванням (3.26) потенціал диполя (3.24) можна записати у вигляді

$$\varphi(M) = \frac{\mathbf{e}_r Q \mathbf{l}}{4\pi\epsilon_a r^2} = \frac{\mathbf{e}_r \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_a r^2}, \quad (3.27)$$

де $\mathbf{p} = Q \mathbf{l}$ – електричний момент диполя.

Введемо сферичну систему координат. Вісь OZ спрямуємо уздовж вектора \mathbf{l} , а початок системи координат розмістимо в точці $\frac{\mathbf{l}}{2}$ (рис. 3.6).

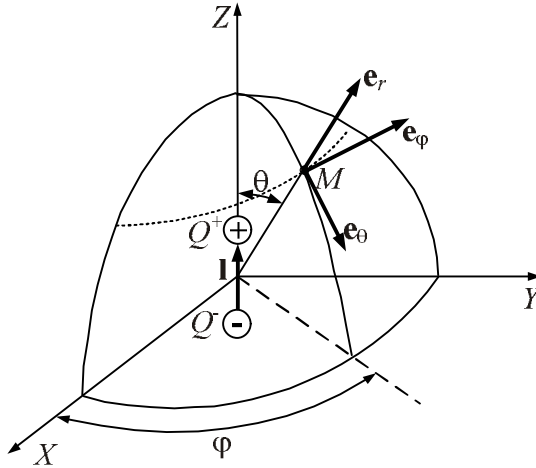


Рис. 3.6

Тоді відповідно до (3.27) та рис. 3.6

$$\varphi(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (3.28)$$

Для визначення напруженості електричного поля скористаємося співвідношенням $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ і виразом $\text{grad}\varphi$ у сферичній системі координат (Додаток Е). При цьому врахуємо, що через осьову симетрію поля диполя похідна за кутовою координатою φ дорівнює нулю. Після диференціювання одержимо

$$\mathbf{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_a r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta). \quad (3.29)$$

Напруженість електричного поля диполя з відстанню дуже швидко спадає ($E \sim \frac{1}{r^3}$). Поле диполя зображене на рис. 3.7.

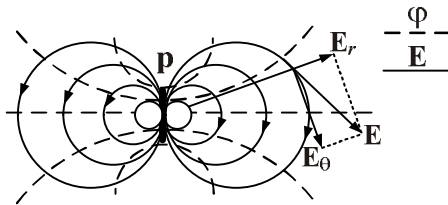


Рис. 3.7

Третій доданок розкладання (3.22) має вигляд

$$\varphi(M) = \frac{\sum_i q_i l_i^2}{4\pi\epsilon_a r^3}.$$

Воно буде основним, якщо $\sum_i q_i = 0$ і $\sum_i q_i \mathbf{l}_i = 0$. Така система може бути зведена до двох диполів і має назву квадруполь (рис. 3.8). На цьому рисунку зображена також нейтральна система зарядів з ще більш високим моментом – октуполем.

З наведених прикладів виходить, що будь-яку систему зарядів можна звести до системи: точковий заряд + диполь + квадруполь + октуполь + ... Кожен доданок у (3.22) дає потенціал, створюваний

одним із членів цього розкладання: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$, внаслідок чого вираз (3.22) називається **розкладанням поля на мультиполі**.

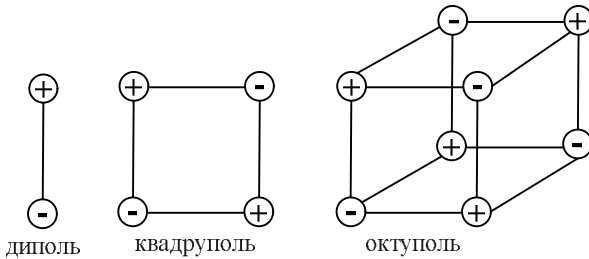


Рис. 3.8

Члени ряду (3.22) характеризують ступінь неоднорідності розподілу зарядів у системі. Чим сильніше відділені позитивні заряди від негативних, тим вище внесок у потенціал $\varphi(M)$ доданків з меншими номерами i . Подібний розгляд справедливий не тільки для дискретних зарядів, але і для зарядів, що безперервно заповнюють деяку область простору. Це виходить із загального розв'язання рівнянь Лапласа і Пуассона, наведеного в п. 2.7.3 (співвідношення (2.61)).

На заряди диполя, який знаходиться у електричному полі, згідно з співвідношенням (1.2), діють механічні сили. Діє обертальний момент, який намагається «розвернути» момент диполя \mathbf{p} уздовж силовій лінії \mathbf{E} , у неоднорідному полі також діє сила \mathbf{F} , яка втягує діелектрик в електричне поле у напрямку \mathbf{F} . Дія пондемоторних сил призводить до ряду ефектів.

Визначимо ефект **електрострикції** – зміну об'єму діелектрика залежно від величини прикладеного поля. Ефект розтягання або стиснення діелектрика використовується у техніці.

Властивість диполів «втягуватися» в неоднорідне поле використовують у квантовій радіофізиці для сортування молекул, які мають різні дипольні моменти. Для цього сильне неоднорідне поле збуджують квадрупольним конденсатором, поперечний перетин якого наведено на рис. 3.9. Сортувальні молекули направляють вздовж осі конденсатора перпендикулярно рисунку. У процесі руху частинки поділяються на пучки різних речовин.

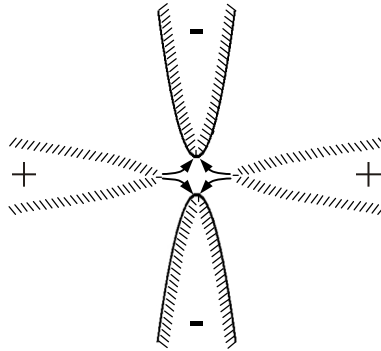


Рис. 3.9

3.1.5. Енергія електростатичного поля

Енергія електростатичного поля в об'ємі V може бути обчислена за формулою (1.104). Для електростатичного поля $E = \text{const}$ і

$$W = W^e = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV = \text{const}. \quad (3.30)$$

Енергія ЕМП визначається розподілом електричного поля \mathbf{E} в об'ємі V , а сам розподіл \mathbf{E} однозначно зв'язаний з потенціалом φ . Одержимо вираз для обчислення енергії за відомим розподілом зарядів і потенціалу в об'ємі V . Перетворимо підінтегральний вираз (3.30) до вигляду

$$\epsilon_a E^2 = \epsilon_a \mathbf{E}^2 = \epsilon_a \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{D} \cdot \text{grad } \varphi.$$

Скористаємося тим, що

$$\text{div}(\varphi \mathbf{D}) = \mathbf{D} \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ div } \mathbf{D}, \text{ а } \text{div } \mathbf{D} = \rho.$$

Тоді

$$\epsilon_a E^2 = -\text{div}(\varphi \mathbf{D}) + \varphi \text{ div } \mathbf{D} = -\text{div}(\varphi \mathbf{D}) + \varphi \rho. \quad (3.31)$$

Підставивши (3.31) в (3.30), одержимо:

$$W^e = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \int_V \frac{\text{div}(\varphi \mathbf{D})}{2} dV. \quad (3.32)$$

Застосувавши до другого інтеграла в (3.32) теорему Остроградського – Гаусса, отримаємо

$$W^e = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \oint_S \frac{\varphi D_n}{2} dS. \quad (3.33)$$

Тут S – замкнена поверхня, що обмежує об'єм V .

Припустимо, що заряди, які збуджують поле, зосереджені в обмеженій області, та поширимо інтегрування на весь навколишній простір. За поверхню S візьмемо сферу з центром в області серед зарядів. При досить великому радіусі весь заряд можна вважати точковим. Тоді φ і модуль \mathbf{D} зменшуються з відстанню не повільніше, ніж $1/r$ і $1/r^2$ відповідно, а поверхня сфери S зростає пропорційно r^2 .

Таким чином, інтеграл $\oint_S \frac{\varphi D_n}{2} dS$ спадає як $1/r$ і при $r \rightarrow \infty$ дорівнює нулю.

Енергія електростатичного поля розподілу зарядів із густиною ρ

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi dq. \quad (3.34)$$

Інтегрування поширюється на область V , що містить заряд ($\rho \neq 0$). Повна енергія електростатичного поля виражена, таким чином, через джерела поля – заряди.

Якщо електростатичне поле збуджується поверхневими зарядами, розподіленими по поверхні S з густиною ρ_s , то вираз для електростатичної енергії набуває вигляду

$$W^e = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \rho_s dS. \quad (3.35)$$

Для зарядженого провідника $\varphi = \text{const}$, а $\oint_S \rho_s dS = Q$ і

$$W^e = \frac{1}{2} \varphi Q. \quad (3.36)$$

Приклад 3.4. Знайти енергію провідної кулі радіусом a з повним зарядом Q .

Розв'язок. Розподіл потенціалу провідної кулі з повним зарядом Q збігається з потенціалом рівномірно зарядженої кулі з тим же зарядом Q (співвідношення (3.15) при $r = a$). Відповідно до виразу (3.36) енергія провідної кулі

$$W^e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Для визначення енергії рівномірно зарядженої кулі (приклад 3.1) вирази (3.17) необхідно проінтегрувати за співвідношенням (3.34).

3.1.6. Ємність (конденсатори)

Потенціал ϕ відокремленого провідника однозначно зв'язаний з величиною наявного на ньому заряду Q , а також залежить від його розмірів і форми. **Відношення заряду до потенціалу залишається постійним при будь-якому значенні Q і називається ємністю відокремленого провідника:**

$$C = \frac{Q}{\phi}, \quad \frac{K_L}{B} = \Phi \text{ (фарада)}. \quad (3.37)$$

З урахуванням (3.37) співвідношення (3.36) прийме вигляд

$$W^e = \frac{1}{2} C \phi^2. \quad (3.38)$$

Якщо система містить кілька провідних тіл, то вони впливають один на одного внаслідок явища **електростатичної індукції**. Воно полягає в тому, що розподіл заряду на кожному із провідників зумовлений всіма іншими. При цьому заряд i -го провідника лінійно пов'язаний з потенціалами всіх провідників системи:

$$Q_i = C_{i1}(\phi_i - \phi_1) + C_{i2}(\phi_i - \phi_2) + \dots + C_{ii}\phi_i + \dots + C_{iN}(\phi_i - \phi_N), \quad (3.39) \\ (i = 1, 2, \dots, N).$$

Коефіцієнт C_{ii} називається **власною ємністю провідника i** , а C_{ik} – **взаємною ємністю провідників i і k** . При цьому $C_{ik} = C_{ki}$,

а власні ємності провідників у системі відрізняються від ємностей таких самих відокремлених провідників.

На енергію електростатичного поля не поширюється принцип суперпозиції, і сума енергій відокремлених провідників не дорівнює енергії системи цих самих провідників. Це видно із співвідношення (3.39).

Відзначимо, що заряди у заданій системі провідників розподіляються так, що енергія системи мінімальна (теорема Томпсона).

Систему з двох провідників, захищену від впливу інших провідників, називають конденсатором. В ідеальному конденсаторі електричне поле локалізоване між його обкладинками (рис. 3.10).

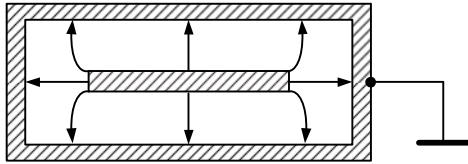


Рис. 3.10

Взаємна ємність C_{12} провідників системи називається ємністю конденсатора C , а власні ємності C_{11} і C_{22} – ємностями розсіювання. Якщо заземлити (рис. 3.10) зовнішню обкладинку конденсатора ($\varphi_1 = 0$), то з урахуванням рівності за абсолютною величиною зарядів, які знаходяться на обкладинках конденсатора, з (3.39) можна одержати, що $C_{22} = 0$. Тоді ємність конденсатора визначиться як відношення заряду одного з провідників до абсолютної різниці потенціалів між провідниками:

$$C = \left| \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| = \frac{Q}{U}. \quad (3.40)$$

У цьому випадку енергію конденсатора можна визначити за співвідношенням

$$W^e = \frac{1}{2}CU^2. \quad (3.41)$$

Розглянемо приклади розрахунку ємності деяких систем.

Приклад 3.5. Знайти ємність відокремленої кулі радіусом a .

Розв'язок. Потенціал і поле рівномірно зарядженої сфери з повним зарядом Q збігаються з потенціалом та полем точкового заряду на відстані a (співвідношення (3.15) при $r = a$).

Ємність кулі, відповідно до (3.37),

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_a a. \quad (3.42)$$

Приклад 3.6. Знайти ємність плаского конденсатора (рис. 3.11), вважаючи, що поверхня пластин S значно більша, ніж відстань d між ними.

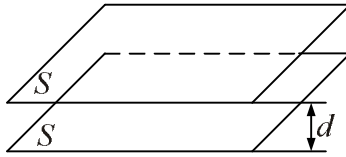


Рис. 3.11

Розв'язок. Згідно з умовами можна вважати, що поле між пластинами конденсатора збігається з полем між двома паралельними протилежно зарядженими площинами з поверхневою густиною заряду $\rho_s = \pm \frac{Q}{\epsilon_a S}$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}_n Q}{\epsilon_a S}, \quad (3.43)$$

де \mathbf{e}_n – одиничний орт, спрямований від позитивно зарядженої площини до негативно зарядженої. Співвідношення (3.43) легко отримати за допомогою теореми Гаусса (п. 1.2.2).

Різниця потенціалів між обкладинками конденсатора дорівнює

$$U = |\varphi_1 - \varphi_2| = \int_0^d \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{Qd}{\epsilon_a S},$$

звідки ємність плаского конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_a S}{d}. \quad (3.44)$$

Приклад 3.7. Знайти погонну ємність коаксіального кабелю (рис. 3.12). Радіус внутрішнього провідника R_1 , внутрішній радіус зовнішнього провідника R_2 .

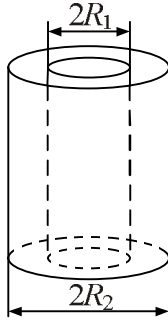


Рис. 3.12

Розв'язок. Введемо циліндричну систему координат Z, r, φ з віссю Z , яка збігається з віссю внутрішнього провідника. Нехай заряд внутрішнього провідника на одиницю довжини дорівнює $q_1 > 0$. Тоді за теоремою Гаусса поле між провідниками дорівнює

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q_1}{2\pi\epsilon_a r},$$

де ϵ_a – діелектрична проникність середовища між провідниками.

Різниця потенціалів між обкладками

$$U = |\varphi_1 - \varphi_2| = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Ємність на одиницю довжини нескінченного циліндричного конденсатора згідно з (3.40)

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad [\Phi/М]. \quad (3.45)$$

Формулою (3.45) можна користуватися і в діапазоні НВЧ (у випадку $(R_2 - R_1) \ll \lambda$), оскільки поле у поперечному перерізі кабелю має квазістационарний характер.

3.1.7. Електростатичний захист

На практиці часто необхідно виключити вплив зовнішніх електростатичних полів, що збуджуються зарядами $Q_{\text{зовн}}$, на електростатичне поле, яке існує в деякій області V_1 . З цією метою можна використуву-

вати замкнений металевий екран, який повністю охоплює область V_1 і відокремлює її від навколишнього простору (рис. 3.13) – аналог ідеального конденсатора (рис. 3.9).

Якщо в об'ємі V_1 знаходиться провідник з зарядом Q , він наводить на внутрішній поверхні S_1 заряд $-Q$. Потік вектора \mathbf{D} через замкнену поверхню S_2 , яка знаходиться у середині екрана (рис. 3.13, пунктир), дорівнює згідно з (3.2, а) нулю, оскільки поле в екрані відсутнє. Зовнішні поля збуджують такий розподіл зарядів на поверхні S_3 , які компенсують внутрішні (в об'ємі V_1) поля. Об'єкти в області V_1 електростатично захищені – зовнішні поля на них не діють. При цьому область V_2 за межами V_1 не екранована від дії зарядів в області V_1 . Поява заряду $-Q$ на поверхні S_1 викликає наведення заряду $+Q$ на поверхні S_3 . Втім цей вплив можна зменшити, якщо «відвести» поверхневі заряди на землю за допомогою заземлення (рис. 3.10).

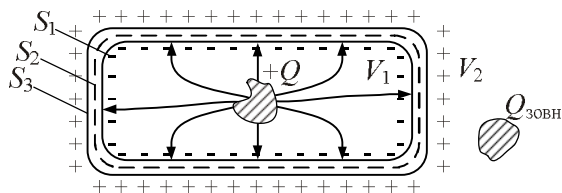


Рис. 3.13

У реальних конструкціях суцільні металеві екрани замінюють металевими сітками, область V_1 при цьому достатньо екранована, однак електростатичний зв'язок між зовнішніми та внутрішніми полями таки є.

Екранування здійснюється у фізичних експериментах, коли разом з досліджуваними зарядами екранується і сам дослідник («клітка Фарадея»), а також у прискорювачах (прискорювачах Ван-де-Граафа). В останньому усередині суцільної порожнистої металеві кулі збуджуються заряди, які подаються на екран (поверхню S_1). Зібрані заряди переходять на поверхню S_3 і заряджають її, внаслідок чого потенціал кулі зростає. Однак експериментатор і електростатична машина повністю захищені від дії зовнішнього поля. Це дозволяє підвищити потенціал кулі до величини порядку декількох мільйонів вольт.

3.1.8. Провідна і діелектрична кулі в однорідному електростатичному полі

Якщо в однорідне поле (рис. 3.14) внести металеве або діелектричне тіло, первинне поле буде спотворене і відрізнятиметься від однорідного.

Важливими з практичної точки зору є задачі розрахунку ЕМП при внесенні в однорідне поле металевих або діелектричних куль.

Якщо куля металева (провідна), то внаслідок електростатичної індукції на її поверхні повинні наводитися заряди (рис. 3.15). За законом збереження заряду сумарний індукований заряд має дорівнювати нулю. Тому можна припустити, що його приблизний розподіл у діаметральних площинах, паралельних вектору \mathbf{E}_0 , буде таким, як показано на рис. 3.15.

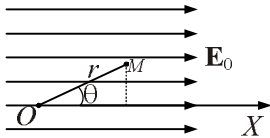


Рис. 3.14

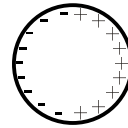


Рис. 3.15

Силкові лінії електричного поля \mathbf{E} будуть починатися або закінчуватися на цих зарядах і мають бути перпендикулярними до поверхні кулі. Якщо куля діелектрична, то під дією зовнішнього поля діелектрик поляризується, внаслідок чого первинне поле спотворюється. На поверхні кулі і в першому, і в другому випадку повинні використовуватися граничні умови для вектора \mathbf{E} і потенціалу ϕ (п. 3.1).

Наведемо розв'язання сформульованих задач.

Приклад 3.8. В однорідне електричне поле напруженістю \mathbf{E}_0 вноситься провідна куля радіусом a . Потрібно знайти спотворене поле.

Розв'язок. Відповідно до принципу суперпозиції спотворене поле будемо розглядати як накладення вихідного однорідного поля і поля, збудженого додатковими поверхневими зарядами кулі. З приводу додаткового поля висунемо гіпотезу, що воно зводиться до поля диполя (див. рис. 3.15). Виразимо потенціал вихідного однорідного поля ϕ_0 через \mathbf{E}_0 . З цією метою спрямуємо вісь X (рис. 3.14) уздовж силових ліній вектора \mathbf{E}_0 .

Оскільки $\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi_0$, то в прямокутній системі координат $E_0 = -\frac{d\varphi_0}{dx}$, звідки $\varphi_0 = C - xE_0$. Поклавши константу $C = \varphi_0|_{x=0} = 0$, будемо мати $\varphi_0 = -xE_0$, або в сферичній системі координат

$$\varphi_0 = -r \cos\theta E_0. \quad (3.46)$$

Внесемо в поле провідну кулю, сполучимо її центр із початком координат. Тоді шуканий потенціал спотвореного поля визначиться рівністю

$$\varphi(M) = \varphi_0 + \varphi_k,$$

де φ_k – потенціал додаткового поля кулі.

Виразимо потенціал цього поля як потенціал диполя (див. формулу (3.28)):

$$\varphi_k = \varphi_{\text{дип}} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_a r^2}; \quad r \geq a, \quad (3.47)$$

де p – невідомий дипольний момент кулі.

Результуючий потенціал у довільній точці M

$$\varphi(M) = \varphi_0 + \varphi_k = -r \cos\theta E_0 + \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (3.48)$$

Для визначення p врахуємо, що потенціал усєї провідної кулі однаковий і що внаслідок невизначеності потенціалу можна прийняти на поверхні кулі

$$\varphi(M)|_{r=a} = 0. \quad \text{Тоді з (3.48) отримаємо } -a \cos\theta E_0 + \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_a a^2} = 0, \quad \text{звідки}$$

$$p = 4\pi a^3 \epsilon_a E_0. \quad (3.49)$$

Підставивши (3.49) у (3.48), одержимо розв'язання у вигляді

$$\varphi(M) = r \cos\theta E_0 \left(\frac{a}{r^3} - 1 \right).$$

Напруженість поля знайдемо за формулою

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi(M) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial\varphi(M)}{\partial r} - \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial\varphi(M)}{\partial\theta}.$$

Після диференціювання знайдемо

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E_0 \cos\theta \left(\frac{2a^3}{r^3} + 1 \right) + \mathbf{e}_\theta E_0 \sin\theta \left(\frac{a^3}{r^3} - 1 \right). \quad (3.50)$$

У правильності прийнятої гіпотези й отриманого результату (3.50) переконує теорема єдиності (п. 2.3). Структура шуканого поля представлена на рис. 3.16. Суцільні лінії показують вектор \mathbf{E} , пунктирні – лінії рівного потенціалу φ .

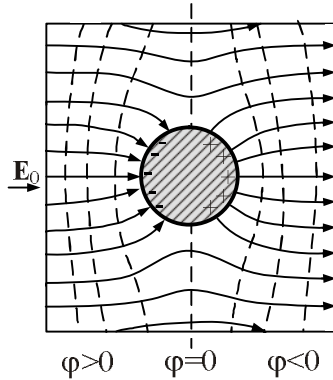


Рис. 3.16

Вкрапленням металевих куль у діелектричне середовище з $\epsilon \approx 1$ створюють «штучні діелектрики» з відносною проникністю $\epsilon_{\text{еф}}$. Знайдемо величину $\epsilon_{\text{еф}}$. Перепишемо співвідношення (3.49) у вигляді

$$p = \frac{4}{3} \pi \epsilon_a 3a^3 E_0 = 3\epsilon_a V_k E_0, \quad (3.51)$$

де V_k – об'єм кулі.

Якщо у деякій області об'єму V міститься m куль, то цій області буде відповідати сумарний дипольний момент $P_\Sigma = \epsilon_a 3\epsilon_a E_0 \sum_{i=1}^n V_{ki}$, пропорційний E_0 . Отже, модуль ефективного вектора поляризації, величина якого визначається як питомий дипольний момент, дорівнює

$$P_{\text{еф}} = \frac{P_\Sigma}{V} = 3\epsilon_a \frac{\sum_{i=1}^n V_{ki}}{V} E_0. \quad (3.52)$$

Зіставляючи (3.52) з (1.19), одержимо

$$\varepsilon_{\text{эф}} = 1 + 3 \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^n V_{ki}}{V}. \quad (3.53)$$

З виразу (3.53) видно, що, змінюючи число і розміри куль, а також їх положення в діелектричному середовищі, можна в широких межах змінювати $\varepsilon_{\text{эф}}$, зокрема створювати неоднорідні діелектричні середовища з бажаним законом змінювання $\varepsilon_{\text{эф}}$ від просторових координат. Штучні діелектрики знаходять широке застосування, наприклад при побудові лінзових антен.

Приклад 3.9. В однорідне електричне поле напруженістю \mathbf{E}_0 у середовищі з діелектричною проникністю ε_{a2} вноситься діелектрична куля радіусом a з діелектричною проникністю ε_{a1} . Потрібно знайти результуюче поле.

Розв'язок. У цьому випадку, на відміну від попереднього прикладу 3.8, повинні виконуватися граничні умови:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 \Big|_{r=a} &= \varphi_2 \Big|_{r=a}, \\ \varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Тут ε_{a1} і ε_{a2} – діелектричні проникності кулі і середовища відповідно.

У випадку діелектричної кулі прийемо, що поле \mathbf{E}_1 усередині її відмінне від нуля, а вектори \mathbf{E}_1 і \mathbf{E}_0 – паралельні. Тоді потенціал усередині кулі $\varphi_1 = -r \cos \theta E_1$.

Поza кулею поле являє собою суму вихідного однорідного поля і поля диполя, якому еквівалентна поляризована куля:

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_{\text{дип}} = -r \cos \theta E_0 + \frac{p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_{a2} r^2}.$$

Підставляючи ці вирази в граничні умови (3.54), знаходимо невідомі – дипольний момент кулі p , внутрішнє \mathbf{E}_1 та зовнішнє \mathbf{E}_2 поля:

$$p = 4\pi \varepsilon_{a2} a^3 \frac{\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} + 2\varepsilon_{a2}} E_0; \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \frac{3\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} + 2\varepsilon_{a2}};$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0 \left[\mathbf{e}_r \left(1 + \frac{a^3}{r^3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) \sin \theta \right].$$

Отже, дипольний момент поляризованої діелектричної кулі, як і провідної кулі, пропорційний об'єму кулі і, крім того, залежить від співвідношення діелектричних проникностей кулі і навколишнього середовища. У середині кулі напруженість може бути як більшою, так і меншою напруженості зовнішнього поля залежно від співвідношення ϵ_{a1} та ϵ_{a2} . Структура поля для двох випадків наведена на рис 3.17 *а, б*. Наведені графіки ліній електричного зміщення \mathbf{D} , які неперервні, оскільки вільні заряди на межі куля-діелектрик відсутні ($\rho_s = 0$). Лінії потенціалу зображені пунктиром.

Якщо зобразити лінії напруженості електричного поля, то можна побачити, що вони мають розрив на поверхні кулі (рис. 3.17, *в*).

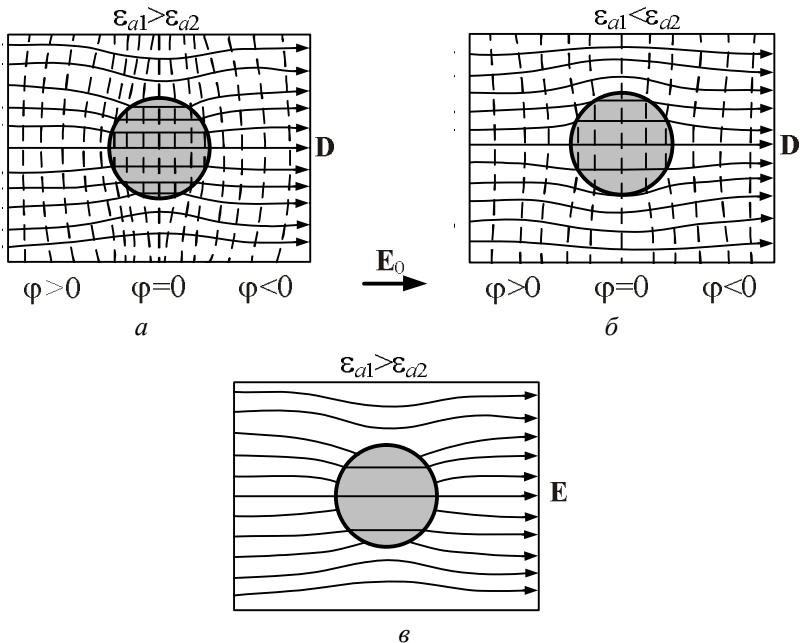


Рис. 3.17

Розглянуте розв'язання задачі про кулю використовується при вивченні розсіювання електромагнітних хвиль в атмосфері й в інших середовищах.

Завдання для самостійного розв'язку

1. Знайти поле рівномірно зарядженої нескінченної нитки; площини; сфери радіусом R .
2. Знайти поле рівномірно зарядженої шарової оболонки. Внутрішній радіус оболонки – a , зовнішній – b .
3. Знайти ємність відокремленої кулі радіусом R .
4. Знайти діаметр кулі, ємність якої у вакуумі дорівнює 2Φ .
5. Знайти відстань між пластинами плоского конденсатора ($S = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$), заповненого діелектриком ($\epsilon = 10$), ємність якого $C = 20 \cdot 10^{-12} \Phi$.

Питання для самоперевірки

1. Отримайте рівняння електростатики із загальних рівнянь Максвелла.
2. Поясніть властивості електростатичного потенціалу.
3. У чому полягає сутність розкладання поля системи зарядів на мультиполі?
4. Що таке ємність відокремленого провідника? Системи провідників?
5. Як можна здійснити електростатичний захист визначеної області простору?
6. Поясніть властивості металевих та діелектричних куль, які знаходяться в однорідному електричному полі.
7. Як можна виконати штучний діелектрик із заданим значенням відносної діелектричної проникності?

3.2. Магнітостатика

Магнітостатика вивчає магнітні поля, які збуджуються постійними магнітами (електричний струм \mathbf{J} вважається відсутнім $\mathbf{J}=0$). Вивчення властивостей таких полів досить важливе з практичної точки зору, оскільки постійні магніти широко застосовують у різній радіоелектронній апаратурі.

Підкреслимо, що магнітне поле стаціонарних струмів за властивостями подібне до поля постійних магнітів, різниця полягає лише у тому, що виступає джерелом поля.

3.2.1. Аналогія між магніто- та електростатикою

Розглянемо системи рівнянь, які описують статичні поля:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_a \mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (3.55) \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H} \end{aligned} \right\}. \quad (3.56)$$

Рівняння (3.56) повністю збігається з системою (3.55), якщо в останній покласти $\rho=0$ та зробити заміну $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ і $\varepsilon_a \rightarrow \mu_a$.

Відсутність у системі (3.56) змінної, аналогічної ρ , свідчить про те, що вільних магнітних зарядів (мас) у природі не існує $\rho^M=0$.

За повною аналогією з електростатикою можна ввести (оскільки магнітостатичне поле потенційне) **магнітний потенціал** у точці M :

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi^M. \quad (3.57)$$

і для однорідного середовища отримати рівняння Лапласа

$$\nabla^2 \varphi^M = 0. \quad (3.58)$$

Граничні умови для напруженості магнітного поля \mathbf{H} в умовах магнітостатики ($\mathbf{J}=0$) такі, як і для вектора \mathbf{E} :

$$H_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad (3.59)$$

а граничні умови для вектора магнітної індукції \mathbf{B} однакові, як і для вектора \mathbf{D} у разі відсутності вільних зарядів. Тому граничні умови для магнітостатичного потенціалу φ^M збігатимуться з граничними умовами для електростатичного потенціалу φ .

Розв'язання рівняння Лапласа отримане в загальному випадку (п. 2.7) для електростатичного потенціалу, який залежить від розподілу електричних зарядів у деякому об'ємі чи на деякій поверхні. Оскільки магнітні заряди не існують, отримаємо вираз для магнітного потенціалу φ^M іншим шляхом.

Згадаємо, що $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, та запишемо друге рівняння з (3.56) у вигляді $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} (\mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}) = 0$. Звідси

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M} = \rho_{\text{зв}}^{\text{M}}, \quad (3.60)$$

де $\rho_{\text{зв}}^{\text{M}}$ – об'ємна густина зв'язаних магнітних зарядів.

У цьому випадку маємо $\operatorname{div} \mathbf{H} = \rho_{\text{зв}}^{\text{M}}$. На межі поділу середовищ

$$H_{1n} - H_{2n} = -\rho_{s\text{зв}}^{\text{M}}, \quad (3.61)$$

де $\rho_{s\text{зв}}^{\text{M}}$ – поверхнева густина зв'язаних магнітних зарядів. Замість (3.58) рівняння для **магнітостатичного потенціалу** запишемо у вигляді

$$\nabla^2 \varphi^{\text{M}} = -\rho_{\text{зв}}^{\text{M}}. \quad (3.62)$$

Розв'язок цього рівняння має наступний вигляд (порівняйте з (2.61)):

$$\varphi^{\text{M}} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_{\text{зв}}^{\text{M}}}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\rho_{s\text{зв}}^{\text{M}}}{R} dS. \quad (3.63)$$

З (3.63) видно, що магнітостатичне поле збуджується **зв'язаними** магнітними зарядами – магнітними диполями, а речовину можна розглядати як сукупність не тільки електричних, але й магнітних диполів.

Це чітко можна визначити, якщо перетворити співвідношення (2.46) до вигляду

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\rho_{\text{зв}}}{\varepsilon_0}, \quad (3.64)$$

де $\rho_{\text{зв}} = \operatorname{div} \mathbf{P}$ (оскільки $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$).

З виразу (3.64) виходить, що поле у діелектрику збуджується зарядами ρ (як і у вакуумі), а також зв'язаними зарядами, густина яких залежить від властивостей діелектрика.

Таким чином, для переходу від задач електростатики до аналогічних задач магнітостатики при розв'язанні електростатичних задач необхідно зробити заміну $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}$, і, оскільки в (3.62) стоїть величина $\rho_{\text{зв}}^{\text{M}}$, а не $\frac{\rho_{\text{зв}}^{\text{M}}}{\mu_0}$, слід покласти $\mu_0 = 1$ (замінити ε_a на μ).

3.2.2. Приклади розрахунків магнітостатичних полів

Приклад 3.10. У середовище з відносною магнітною проникністю $\mu_1 = 1$, де збуджено однорідне магнітне поле напруженістю \mathbf{H}_0 , вноситься циліндричний екран, внутрішнім радіусом a , зовнішнім b з відносною магнітною проникністю μ_2 (рис. 3.18). Необхідно знайти напруженість магнітного поля всередині та ззовні екрану.

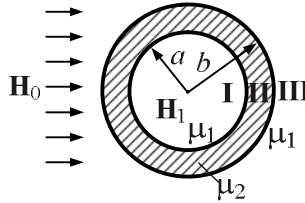


Рис. 3.18

Розв'язок. Покладемо, що в рівномірному магнітному полі напруженістю \mathbf{H}_0 треба провести екранування деякої області простору, наприклад циліндричної, так, щоб напруженість поля в ній була набагато меншою, ніж напруженість зовнішнього поля. Екран будемо вважати досить протяжним уздовж осі Z (перпендикулярної рисунку).

Оскільки в усіх областях струм відсутній то магнітне поле описується рівнянням Лапласа (3.58), яке у циліндричній системі координат має вигляд

$$\nabla^2 \varphi^M = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi^M}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi^M}{r^2 \partial \varphi^2} = 0. \quad (3.65)$$

Розв'язок цього рівняння для областей I, II та III дає

$$\varphi_I^M = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \varphi,$$

$$\varphi_{II}^M = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos \varphi,$$

$$\varphi_{III}^M = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r} \right) \cos \varphi.$$

Тут C_i – постійні інтегрування.

З урахуванням граничних умов ($r = a$, $r = b$), поведінки потенціалу при $r \rightarrow 0$ та $r \rightarrow \infty$ отримаємо

$$\varphi_1^m = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} r \cos \varphi, \quad q = \frac{2\mu_2}{(1+\mu_2)^2}, \quad \Delta = b^2 - \left(\frac{\mu_2 - 1}{\mu_2 + 1} \right)^2 a^2. \quad (3.66)$$

В декартовій системі координат

$$\varphi_1^m = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} x, \quad \text{або} \quad H_1 = \frac{\partial \varphi_1^m}{\partial x} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta}. \quad (3.67)$$

Відношення напруженості поля H_1 , що всередині екрана, до зовнішнього H_0 за умов $\mu_2 \gg 1$: $\left(\frac{H_1}{H_0} \right) \approx \frac{4}{\mu_2} \frac{b^2}{b^2 - a^2}$.

Для розглянутого прикладу видно, що при зростанні μ_2 та товщини екрана внутрішнє поле H_1 всередині екрана значно послаблюється. Цей факт використовують для статичного магнітного екранування. На рис. 3.19 якісно показаний хід силових ліній магнітного поля. Із рисунка видно, що більшість силових ліній \mathbf{H} проходить по стінках екрана і мала частина ліній проходить усередині.

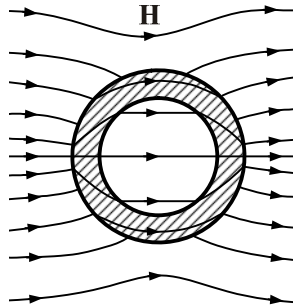


Рис. 3.19

Приклад 3.11. Магнітний екран являє собою циліндричну оболонку з параметрами $a = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $b = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $\mu_2 = 10^4$; $\mu_1 = 1$. Знайти відношення H_1/H_0 .

Розв'язок. Із співвідношень (3.66), (3.67) отримаємо:

$$\frac{H_1}{H_0} \approx \frac{4}{10^4} \frac{6,5^2}{6,5^2 - 6^2} = 0,0027.$$

Таким чином, напруженість поля всередині екранованої області складає лише 0,27 % від поля H_0 ззовні.

Питання для самоперевірки

1. Отримайте рівняння магнітостатики із загальних рівнянь Максвелла.
2. У чому полягає аналогія між магніто- та електростатикою?
3. Як можна здійснити статичне магнітне екранування визначеної області простору?

3.3. Стаціонарні поля

3.3.1. Основні положення

Стаціонарне поле $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0, \mathbf{J} \neq 0\right)$ задовольняє системі рівнянь

(див. 1.2.5):

у диференційній формі

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \end{array} \right\} \quad (3.68)$$

в інтегральній формі

$$\left. \begin{array}{l} \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0; \\ \oint_s \mathbf{D} d\mathbf{S} = q; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = I; \\ \oint_s \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \end{array} \right\} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}). \quad (3.70)$$

Відзначимо, що у стаціонарному випадку електричне і магнітне поля зв'язані між собою за допомогою (3.70).

Умова існування стаціонарного поля виходить із закону збереження заряду (п. 1.2.4). За умови стаціонарності $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ одержимо

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (3.71)$$

Отже, у стаціонарному полі лінії струму провідності мають бути неперервними. Розглянемо струми, що проходять в обмеженій області (рис. 3.20), і виділимо замкнену трубку струму з нескінченно малим поперечним перетином dS .

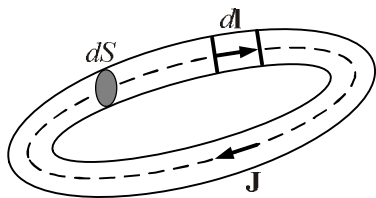


Рис. 3.20

Для такої трубки струм $dI = \mathbf{J}d\mathbf{S} = J_n dS$ через усі перетини однаковий. Запишемо (3.70) у вигляді

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{cr}} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}, \quad (3.72)$$

помножимо обидві частини (3.72) на елемент $d\mathbf{l}$, спрямований як \mathbf{J} :

$$\mathbf{E}d\mathbf{l} + \mathbf{E}^{\text{cr}}d\mathbf{l} = \mathbf{J}\frac{d\mathbf{l}}{\sigma} = J\frac{dl}{\sigma}.$$

Введемо замість густини струму \mathbf{J} струм трубки $dI = \mathbf{J}d\mathbf{S}$. Тоді

$$\mathbf{E}d\mathbf{l} + \mathbf{E}^{\text{cr}}d\mathbf{l} = \frac{dI}{dS} \cdot \frac{dl}{\sigma}.$$

Проінтегруємо останнє співвідношення по замкненій лінії струму:

$$\oint_l \mathbf{E}d\mathbf{l} + \oint_l \mathbf{E}^{\text{cr}}d\mathbf{l} = dI \oint_l \frac{dl}{\sigma dS}.$$

Оскільки стаціонарне поле вектора \mathbf{E} безвихрове, то перший інтеграл дорівнює нулю. Тоді

$$\oint_l \mathbf{E}^{\text{cr}}d\mathbf{l} = dIR, \quad (3.73)$$

де $R = \oint_l \frac{dl}{\sigma dS}$.

Таким чином, **постійний струм і його поле існують лише за наявності стороннього джерела**. Інтеграл $\oint_i \mathbf{E}^{ct} d\mathbf{l} = \mathcal{E}$ називають електрорушійною силою, що діє в замкненому контурі, а величину R – опором контура. Рівняння (3.73) у цьому випадку записується у формі

$dI = \frac{\mathcal{E}}{R}$ і представляє **закон Ома для кола постійного струму**.

Отже, для існування постійного струму в провідному середовищі недостатньо дії одного потенційного електричного поля. У колі з постійним струмом неодмінно повинно діяти джерело сторонньої ЕРС. Оскільки $\oint_l \mathbf{E}^{ct} d\mathbf{l} \neq 0$, **поле \mathbf{E}^{ct} має вихровий характер**.

3.3.2. Порівняння стаціонарного електричного та електростатичного полів

1. У стаціонарному полі усередині провідника, по якому проходить струм ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$), напруженість $\mathbf{E} \neq 0$, в електростатичному полі усередині провідника $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{E} = 0$.

2. Оскільки усередині провідника $\mathbf{E} \neq 0$, то у стаціонарному полі у різних точках провідника потенціал ϕ має різні значення, тобто провідник не є екіпотенційною областю. Тому вектор \mathbf{E} вже не буде перпендикулярним до поверхні провідника зі струмом.

3. У електростатичному полі заряд може існувати лише на поверхні провідника. У стаціонарному полі в області, де діють сторонні сили ($E^{ct} \neq 0$), об'ємний заряд існує й усередині провідника. Застосуємо оператор дивергенції до (3.72), вважаючи, що провідник ізотропний ($\text{grad } \sigma = 0$):

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{J} &= \text{div } \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ct}) = \sigma \text{div} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ct}) + (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ct}) \text{grad } \sigma = \\ &= \sigma \frac{\rho}{\varepsilon_a} + \sigma \text{div } \mathbf{E}^{ct} = 0. \end{aligned}$$

Для стаціонарного поля $\text{div } \mathbf{J} = 0$. Звідси виходить, що у провідному середовищі

$$\rho = -\varepsilon_a \text{div } \mathbf{E}^{ct} \neq 0.$$

Якісні відмінності стаціонарного електричного поля від електростатичного завжди існують. Однак кількісні розходження можуть бути дуже незначними. Це особливо стосується поля в діелектрику, що оточує провідники з високою провідністю.

Приклад 3.12. Розглянемо дві паралельні плоскі мідні ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$) шини (рис. 3.21), що з'єднують джерело електричної енергії з навантаженням. Нехай густина постійного струму $J=2 \text{ А/мм}^2$, відстань між шинами $d = 4 \text{ см}$. Знайти відношення нормальної E_n до тангенційної складової E_τ , якщо напруга між шинами дорівнює 220 В .

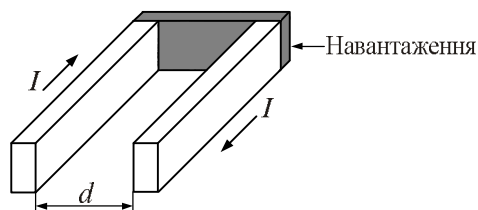


Рис. 3.21

Розв'язок. У середині шини $E = E_\tau = \frac{J}{\sigma} = \frac{2 \cdot 10^6}{5,7 \cdot 10^7} \frac{\text{В}}{\text{м}} = 0,035 \text{ В/м}$.

Через неперервність E_τ таке саме значення E_τ буде й у діелектрику поблизу поверхні провідників. Складові напруженості E_n на межі з металом може бути приблизно оцінена за формулою плоского конденсатора:

$$E_n = \frac{U}{d} = \frac{220}{4 \cdot 10^{-2}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Звідси $(E_n/E_\tau) = 1,6 \cdot 10^5$.

На межі з добрим провідником складові вектора $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\tau E_\tau + \mathbf{e}_n E_n$ задовольняють дуже строгій нерівності $E_\tau \ll E_n$, що дає право вважати граничну умову для вектора \mathbf{E} такою самою, як і в електростатиці.

3.3.3. Магнітне поле постійного струму. Лінійний струм

На відміну від електростатичного поля магнітне поле постійного струму в точках, де $J \neq 0$, є вихровим. Тому для визначення векторів поля доцільно увести векторний потенціал \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Для векторного потенціалу \mathbf{A} рівняння для стаціонарних полів $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ має вигляд (див. співвідношення (2. 45)):

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \mathbf{J}. \quad (3.74)$$

Це векторне рівняння Пуассона.

У декартовій системі координат вектори рівняння еквівалентні трьом скалярним рівнянням:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_a J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_a J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_a J_z \end{aligned} \right\}. \quad (3.75)$$

Розв'язання кожного з рівнянь можна записати у вигляді (див. (2.61), (2.62))

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{\mathbf{v}} \frac{J_x}{R} dV \\ A_y &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{\mathbf{v}} \frac{J_y}{R} dV \\ A_z &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{\mathbf{v}} \frac{J_z}{R} dV \end{aligned} \right\}. \quad (3.76)$$

Остаточне маємо

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{\mathbf{v}} \frac{\mathbf{J}}{R} dV. \quad (3.77)$$

Тут R – відстань від елемента dV з розподіленням по ньому струмом \mathbf{J} до точки спостереження, у якій обчислюється потенціал.

Співвідношення (3.77) вірне для будь-якої системи координат, і задача розрахунку \mathbf{A} зведена до інтегрування. Після обчислення векторного потенціалу \mathbf{A} розраховують магнітну індукцію $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

У випадку тонких провідників вводиться поняття лінійного струму (рис. 3.22). Виділимо малий відрізок провідника $d\mathbf{l}$, який будемо вважати циліндричним, а провідник тонким, так що відстані від точки M до точок 1, 2, 3 практично збігаються. У цьому разі можна говорити про відстань r від точки M до поперечного перерізу S , оскільки

$$r_1 \approx r_2 \approx r_3 \approx r. \quad (3.78)$$

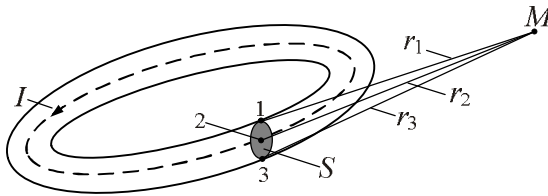


Рис. 3.22

Визначимо векторний потенціал $d\mathbf{A}$, створюваний лінійним струмом елемента $d\mathbf{l}$. З огляду на співвідношення (3.78), значення $d\mathbf{A}$ знаходимо за співвідношенням

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{dl} \int_S \frac{\mathbf{J}}{r} d\mathbf{l} dS = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{dl} \frac{d\mathbf{l}}{r} \int_S \mathbf{J} dS. \quad (3.79)$$

Оскільки $\int_S \mathbf{J} dS = I$ – для будь-якого перетину провідника S , то формула (3.79) набуває вигляду

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_a I d\mathbf{l}}{4\pi r}. \quad (3.80)$$

Векторний потенціал, зумовлений лінійним струмом, обчислюється за формулою

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (3.81)$$

а потенціал, створюваний лінійним струмом замкненого провідника,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}}{r}. \quad (3.82)$$

Магнітне поле, створюване елементом $d\mathbf{l}$, дорівнює

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \text{rot} \frac{d\mathbf{l}}{r}. \quad (3.83)$$

Через тотожність (Додаток Е) $\text{rot} \varphi \mathbf{a} = \varphi \text{rot} \mathbf{a} + [\text{grad} \varphi, \mathbf{a}]$, якщо $\varphi = \frac{1}{r}$, $\mathbf{a} = d\mathbf{l}$, вираз (3.83) перетвориться до вигляду

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \left(\left[\text{grad} \frac{1}{r}, d\mathbf{l} \right] d\mathbf{l} + \frac{1}{r} \text{rot} d\mathbf{l} \right),$$

де r – відстань від елемента $d\mathbf{l}$, в якому розміщений початок декартової системи координат, до точки спостереження M .

Вектор $d\mathbf{l}$ – постійний і не залежить від положення точки M . При цьому $\text{rot} d\mathbf{l} = 0$, а $\text{grad} \frac{1}{r} = -\mathbf{e}_r \frac{1}{r^2}$. Крім того, помінявши місцями співмножники векторних добутків, одержимо

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2} [d\mathbf{l}, \mathbf{e}_r].$$

У сферичних координатах з початком на елементі $d\mathbf{l}$ і полярній осі, спрямованій по $d\mathbf{l}$, матимемо $[d\mathbf{l}, \mathbf{e}_r] = \mathbf{e}_\varphi dl \sin \theta$. Тому

$$d\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \frac{I dl \sin \theta}{4\pi r^2}. \quad (3.84)$$

Співвідношення (3.84) виражає відомий закон Біо – Савара – Лапласа, що зв'язує напруженість магнітного поля з лінійним струмом елемента $d\mathbf{l}$. Цей закон одержаний теоретично як наслідок з рівнянь Максвелла.

Відрізок зі струмом завдовжки l збуджує магнітне поле з напруженістю

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{e}_r]}{r^2}. \quad (3.85)$$

У виразі (3.85) r – відстань від елемента $d\mathbf{l}$ до точки спостереження.

3.3.4. Приклади розрахунку магнітних полів лінійних струмів

Приклад 3.13. Знайти поле нескінченного прямого проводу зі струмом I , орієнтованим вздовж осі Z .

Розв'язок. Усі елементи довгого проводу спрямовані однаково, вздовж осі OZ (рис. 3.23), тому векторний потенціал \mathbf{A} має тільки z -складову.

Згідно з (3.80) векторний потенціал прямого проводу завдовжки $2L$:

$$A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} I \int_{-L}^L \frac{dl}{R} = \frac{\mu_a}{4\pi} I \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (3.86)$$

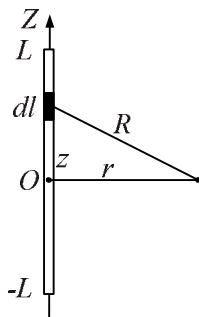


Рис. 3.23

Відповідно до визначення потенціалу $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}$ напруженість магнітного поля має єдину складову:

$$H_{\varphi} = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{Ir}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Якщо L нескінченно велике ($L \rightarrow \infty$), то

$$H_{\varphi} = \frac{Ir}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{2\pi r}. \quad (3.87)$$

Цей результат ми отримали, використовуючи закон Біо – Савара – Лапласа. Раніше (див. приклад 1.3) цей вираз був отриманий із закону Ампера.

Приклад 3.14. Визначити напруженість магнітного поля, яке збуджує струм кругового витка радіусом a на відстані $r \gg a$ (рис. 3.24, а).

Розв'язок. Будемо вважати, що виток лежить у площині XOY , а центр витка знаходиться на початку системи координат.

Вираз для векторного потенціалу $d\mathbf{A}$, створюваного елементом струму завдовжки $d\mathbf{l}$, визначається формулою (3.80). Звідси виходить, що вектор $d\mathbf{A}$ лежить у площині витка, і, оскільки $d\mathbf{A}$ паралельний $d\mathbf{l}$, то векторний потенціал не має складових уздовж осі Z .

Векторний потенціал колового струму має тільки φ -складову, з огляду на симетрію A_{φ} не залежить від кута φ , і досить знайти значення A_{φ} в одній площині, наприклад площині $\varphi = 0$ у точці M з координатами $(r, \theta, 0)$.

Розглянемо орієнтацію векторів $d\mathbf{A}$ для чотирьох симетрично розташованих по периметру витка елементів струму (рис. 3.24, б).

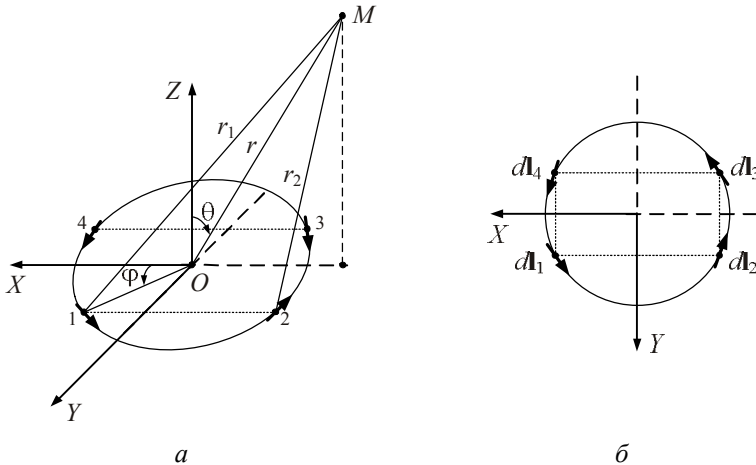


Рис. 3.24

Як видно з рисунка, проекції $d\mathbf{A}$ на вісь X дають нульову суму

$$\sum_{i=1}^4 dA_{xi} = 0.$$

Результуючий векторний потенціал, створений виділеними елементами струму, матиме вигляд

$$dA = \sum_{i=1}^4 dA_{yi} = 2 \frac{\mu_a}{4\pi} Idl \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cos \varphi. \quad (3.88)$$

Якщо $r \gg a$ можна прийняти (рис. 3.24) $r_2 - r_1 \approx 2a \cos \varphi \sin \theta$, $r_2 r_1 \approx r^2$. Остаточно векторний потенціал

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_\varphi \int dA = \mathbf{e}_\varphi \int_0^{2\pi} 2 \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin \theta \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_a I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_a IS \sin \theta}{4\pi r^2}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

де $S = \pi a^2$ – площа витка.

Вираз (3.89) свідчить, що векторні лінії \mathbf{A} являють собою кола з центрами, які лежать на осі Z . Максимальне значення \mathbf{A} має при $\theta = \pi/2$ (у площині витка).

Після обчислення $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}$ у сферичній системі координат отримаємо

$$\mathbf{H} = \frac{IS}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r, 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta). \quad (3.90)$$

Порівняння виразу (3.90) з (3.29) свідчить, що **магнітне поле витка за формою запису збігається з електричним полем диполя.**

На рис. 3.25 зображена структура полів електричного та магнітного диполів. Підкреслимо, що аналогія між полями цих диполів діє і у змінних електромагнітних процесах.

Позначивши $m = \mu_a IS$, перепишемо формулу (3.90) у вигляді

$$\mathbf{H} = \frac{m}{4\pi \mu_a r^3} (\mathbf{e}_r, 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta). \quad (3.91)$$

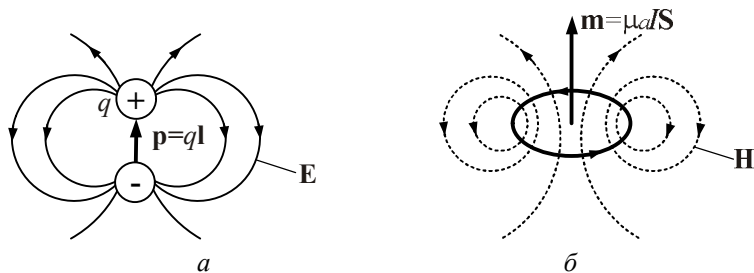


Рис. 3.25

Величина m одержала назву **магнітного моменту**. У векторній формі магнітний момент варто записувати так:

$$\mathbf{m} = \mu_a I S. \quad (3.92)$$

Тут вектор \mathbf{m} створює правоґвинтову систему з напрямком струму (рис. 3.26, а). Якщо ввести умовні магнітні заряди, зображені на рис. 3.26, б, то

$$\mathbf{m} = q^M \mathbf{l}.$$

Таким чином, малий виток зі струмом еквівалентний магнітному диполю. Це твердження справедливе для будь-якого замкненого струму на великій відстані ($r \gg \sqrt{S}$).



Рис. 3.26

Наведені результати дають підставу вважати, що магнітне поле постійних магнітів створюється замкненими елементарними струмами (гіпотеза Ампера).

3.3.5. Енергія стаціонарного магнітного поля

Енергію магнітного поля, яка зосереджена у межах об'єму V , можна знайти за співвідношенням (див. п. 1.5.1)

$$W^m = \int_V \frac{\mu_a \mathbf{H}^2}{2} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV. \quad (3.93)$$

Але ця формула незручна, тому що для знаходження W^m необхідно знати \mathbf{H} у кожній точці об'єму. Перетворимо її таким чином, щоб енергія магнітного поля була виражена через струми, які проходять в об'ємі V , обмеженому поверхнею S . Для цього скористаємося тим, що $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Використовуючи тотожність $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}$ і співвідношення $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, одержимо

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV.$$

Застосувавши теорему Остроградського – Гаусса до першого доданку, знайдемо

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV + \frac{1}{2} \oint_S \int [\mathbf{A}, \mathbf{H}] d\mathbf{S}. \quad (3.94)$$

Нехай S буде поверхнею сфери радіусом r . Спрямуємо r до нескінченності.

Якщо $r \rightarrow \infty$, кожен замкнений провідник являтиме собою магнітний диполь, векторний потенціал його буде змінюватися як $\sim \frac{1}{r^2}$ відповідно до (3.89), а напруженість на поверхні S як $H \sim \frac{1}{r^3}$. При цьому площа елемента $dS \sim r^2$. Тому поверхневий інтеграл у (3.94) матиме порядок $\frac{1}{r^3}$ та буде нехтовно малим при $r \rightarrow \infty$. У результаті одержимо

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV. \quad (3.95)$$

Якщо провідник лінійний, то

$$W^M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV = \oint_l \int_S \frac{\mathbf{A} d\mathbf{l}}{2} J_n dS = \frac{1}{2} \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l} \int_S J_n dS = \frac{I}{2} \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l},$$

через те, що в межах інтегрування по поперечному перетину потенціал \mathbf{A} можна вважати постійним. Згідно з теоремою Стокса, контурний інтеграл дорівнює

$$\oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi, \quad (3.96)$$

де Φ – магнітний потік, що пронизує будь-яку поверхню S , яка спирається на контур провідника.

З формул (3.94) ... (3.96) знаходимо

$$W^M = \frac{I\Phi}{2}. \quad (3.97)$$

Потік, що пронизує контур, через лінійність рівнянь поля пропорційний струму:

$$\Phi = LI. \quad (3.98)$$

Коефіцієнт L називають **індуктивністю лінійного провідника**, одиниця вимірювання якої генрі $[Гн]$. Використовуючи (3.97), магнітну енергію можна також представити як

$$W^M = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}. \quad (3.99)$$

Формули (3.98), (3.99) часто застосовують для розрахунку індуктивності провідника.

Приклад 3.15. Знайти погонну індуктивність коаксіального кабелю. Кабель являє собою систему двох нескінченно тонких коаксіальних циліндрів діаметром $2R_1$ та $2R_2$ (рис. 3.12).

Розв'язок. В обох провідниках існують рівні та протилежні струми I та $-I$. Індуктивність кабелю будемо знаходити за співвідношенням (3.99), а розрахунки магнітної енергії за (3.95). Оскільки задача має осьову симетрію, то доцільно застосувати інтегральний метод.

Розглянемо три концентричні кола, центри яких збігаються з віссю кабелю і мають радіуси $r_1 < R_1$, $R_1 < r_2 < R_2$, $r_3 > R_2$ і відповідно довжину l_1 , l_2 , l_3 .

Відповідно до (1.36) $\oint_{l_1} H_\varphi dl_1 = 0$, тому що контур l_1 не охоплює струм;

$$\oint_{l_2} H_\varphi dl_2 = 2\pi r_2 H_\varphi = I; \quad (3.100)$$

і, нарешті, $\oint_{l_3} H_\varphi dl_3 = 2\pi r_3 H_\varphi = I + (-I) = 0$, тому що струми у внутрішньому та зовнішньому провідниках протилежні за напрямками та рівні за значеннями.

Таким чином, магнітне поле кабелю існує лише у просторі між провідниками. Із співвідношення (3.100) $H_\varphi = I/2\pi r_2$, магнітна енергія кабелю одиничної довжини:

$$W^m = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{R_2} \frac{\mu_a H^2}{2} r dr d\varphi dz = \frac{\mu_a I^2}{4\pi} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_a I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

звідси, згідно з (3.99), погонна індуктивність коаксіального кабелю

$$L_1 = \frac{\mu_a}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad [Гн/м]. \quad (3.101)$$

Якщо в області V існують різні системи струмів, то вони впливають одна на одну, що можна характеризувати **взаємними індуктивностями**. Їх можна розрахувати, якщо відомий розподіл струмів у системах та їх геометрія.

Завдання для самостійного розв'язку

1. Знайти напруженість магнітного поля, збуджуваного постійним струмом I , який проходить циліндричною трубою. Внутрішній радіус труби R_1 , зовнішній R_2 .

2. Знайти напруженість магнітного поля на осі плаского витка зі струмом. Радіус витка $a = 10^{-2}$ м, відстань до точки спостереження $r = 10^{-1}$ м, струм $I = 5$ А.

3. Визначити магнітну енергію всередині провідника одиничної довжини в якому протікає струм I .

4. Знайти індуктивність циліндричного провідника одиничної довжини радіусом a зі струмом I .

Питання для самоперевірки

1. Отримайте систему рівнянь для стаціонарних полів із загальної системи рівнянь Максвелла.
2. Порівняйте властивості стаціонарного електричного та електро-статичного полів.
3. Сформулюйте закон Біо – Савара – Лапласа та одержіть його з рівнянь Максвелла.
4. Сформулюйте особливості поля магнітного диполя.
5. Як обчислити енергію магнітного поля?
6. Що таке індуктивність провідника?

3.4. Квазістаціонарне наближення

Досі, розглядаючи статичні та стаціонарні поля, ми вважали, що в усіх точках простору значення векторів ЕМП завжди постійні. Це певна ідеалізація, тому що кожне електромагнітне явище має свій початок та кінець, що спричинює виникнення в системах перехідних процесів, які характеризуються часом релаксації τ_p . Через це описувати ЕМП системами рівнянь (3.55), (3.66), (3.68) можна лише для тих моментів часу t , для яких виконується умова $\tau_p \ll t - t_0$, де t_0 – момент збудження ЕМП у системі. Для повного опису ЕМП слід відмовитись від обмежень $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{J} = \text{const}$, як це зроблено у повній системі рівнянь Максвелла.

Розглянемо ще одне наближення до системи рівнянь Максвелла, «квазістаціонарне», яке дозволяє вивчати змінні поля.

Квазістаціонарні явища характеризуються тим, що в них струмами зміщення можна знехтувати:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad (3.102)$$

але наявність змінного магнітного поля є суттєвою:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0. \quad (3.103)$$

Змінними можуть бути інші вектори поля – \mathbf{J} , \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} та заряд ρ .

Наближення (3.103) свідчить про існування електромагнітної індукції, але магнітні силові лінії пов'язані тільки зі струмом провід-

ності. Таким чином, самопідтримуючий електромагнітний процес у діелектрику неможливий. Квазістаціонарне наближення (яке існувало до Максвелла) суперечить повній системі рівнянь. Так, перше рівняння Максвелла у цьому випадку має бути записаним у вигляді

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (3.104)$$

звідки $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Це заперечує експериментально встановленому факту збереження заряду $\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (див. п. 1.2.4). Але дане протиріччя для об'єктів, які можна розглядати на основі квазістаціонарної теорії, не принципове.

Як і раніше, введемо векторний \mathbf{A} і скалярний φ потенціали.

Для скалярного потенціалу φ отримаємо рівняння Пуассона: $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_a$, розв'язок якого (див. приклад 2.3) має вигляд

$$d\varphi(M, t) = \frac{\rho(M', t)}{4\pi\epsilon_a R} dV. \quad (3.105)$$

На відміну від (2.60) заряд ρ і потенціал φ є функціями часу, але у вираз (3.105) час t входить як параметр. Будь-яка зміна заряду ρ у ту саму мить змінює потенціал φ у довільній точці M простору. Це притаманне теорії дальності, на відміну від теорії близькодії, коли збудження поля від точки до точки поширюється із запізненням $t_{\text{зап}} = R/v$, де v – швидкість поширення ЕМП.

Встановимо межі застосування квазістаціонарного наближення.

Розглянемо **провідники**. У провідниках $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong \mathbf{J}$, що можливо тоді, коли $J \gg \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}$. Оскільки $J = \sigma E$, то умова

$$\frac{\partial D}{\partial t} \approx 0 \text{ означає, що } \sigma E \gg \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t},$$

$$|E| \gg \left| \tau_p \frac{\partial E}{\partial t} \right| = \Delta E, \quad (3.106)$$

де $\tau_p = \epsilon_a/\sigma$ – час релаксації (п. 1.2.4).

Отже, усередині провідника квазістаціонарне наближення чинне, якщо за час релаксації приріст електричного поля $\Delta E \ll E$. Якщо ЕМП гармонічне, то з (3.106) маємо $E \ll \tau_p \omega E$, або

$$\tau_p \ll \frac{T}{2\pi}. \quad (3.107)$$

Згідно з класифікацією середовищ умова (3.107) характеризує добрий провідник, отже квазістаціонарне наближення прийнятне для таких провідників практично у всьому діапазоні радіочастот.

Для діелектрика $\mathbf{J} = 0$ і нехтування струмом зміщення означає відмову від кінцевої швидкості поширення збурень ЕМП. Згідно з (3.105) зміна потенціалу в точці M настає не у час $t - t_{\text{зап}}$, а в той самий момент. Отже, ми припускаємо, що $\rho(t - t_{\text{зап}}) \approx \rho(t)$. Розкладаючи $\rho(t - t_{\text{зап}})$ у ряд Тейлора, отримаємо

$$\rho(t) - t_{\text{зап}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dots \approx \rho(t). \quad (3.108)$$

Для виконання (3.108) необхідно, щоб $t_{\text{зап}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \ll \rho(t)$. Для гармонічних процесів $t_{\text{зап}} \omega \ll 1$, звідки

$$t_{\text{зап}} \ll \frac{T}{2\pi} \text{ або } r \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (3.109)$$

Отже, **квазістаціонарним є поле поблизу змінного заряду.**

Подібні твердження можна зробити і відносно векторного потенціалу \mathbf{A} . Роль заряду ρ буде виконувати густина струму \mathbf{J} .

Квазістаціонарним наближенням можна користуватися в усіх точках провідників та діелектриків, які задовольняють умовам (3.107), (3.109). Чим повільніше відбуваються електромагнітні процеси, тим більш вірним є таке наближення. Можна вважати, що **квазістатична теорія – це теорія полів, які повільно змінюються.** Особливо придатна квазістатична теорія для опису електромагнітних явищ в електро- та радіосистемах (приймачах, електромережах, силових електричних мережах та ін.). Суттєвою особливістю цих систем є різке зменшення ЕМП при незначному віддаленні від них.

При вивченні і аналізі поширення радіохвиль, процесу випромінювання, швидкоплинних електромагнітних процесів для опису ЕМП необхідно використовувати повну систему рівнянь Максвелла.

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд має система рівнянь Максвелла у разі квазістаціонарного наближення?
2. Які електромагнітні явища враховує і які не враховує квазістаціонарне наближення?
3. В яких випадках доцільно застосовувати квазістаціонарне наближення і які існують обмеження щодо його використання?

4. ПЛАСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В НЕСКІНЧЕННОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У цьому розділі розглянуто дуже важливі для практики питання, які пов'язані з коливаннями електромагнітного поля – електромагнітними хвилями.

Доказ існування ЕМХ є одним з найважливіших результатів, одержаних Дж. К. Максвеллом теоретично і підтверджених експериментально Г. Герцом.

На відміну від коливань струмів і напруг в електричних мережах коливання в фізичних системах (механічні коливання у твердих, рідких та газових середовищах, електромагнітні коливання та ін.) **проходять у розподіленому фізичному середовищі**. Для опису таких коливань необхідно знати характеристику процесів в усіх точках простору, що набагато складніше, ніж аналізувати коливання в електричних мережах.

Розглянемо спочатку деякі поняття, які є загальними для теорії будь-яких хвиль.

4.1. Основні поняття теорії хвильових процесів

Хвильова поверхня (фронт хвилі). Якщо є джерело хвиль, то завжди можна вказати поверхню, до всіх точок якої хвилі поширюються за однаковий час. Сукупність цих точок утворить поверхню, що називається хвильовою поверхнею або фронтом хвилі. Для гармонічних хвиль фаза коливань на хвильовій поверхні однакова (час запізнення до всіх точок поверхні $t_3 = \text{const}$), і, отже, фронт хвилі являє собою поверхню рівних фаз (рис. 4.1).

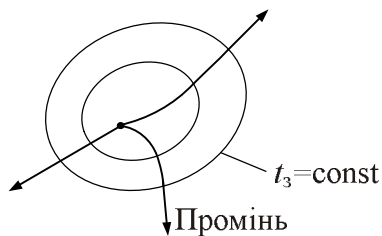


Рис. 4.1

Із часом хвильова поверхня розширюється, захоплюючи все більшу частину простору. Тобто можна говорити про поширення фронту хвилі й про швидкість поширення фронту.

Поширення хвиль в однорідних середовищах відбувається вздовж нормалей до хвильових поверхонь, які називаються променями (рис. 4.1).

Для гармонічних хвиль хвильова поверхня – це поверхня однакових фаз:

$$\omega(t - t_3) = \text{const.}$$

Промінь – лінія, вздовж якої коливання поширюються в середовищі. Промінь завжди спрямований по нормалі до фронту хвилі.

Класифікація хвиль. Класифікація хвиль провадиться за різними незалежними ознаками. Розглянемо основні з них.

1. Форма хвильового фронту. За формою фронту розрізняють хвилі сферичні, циліндричні, пласкі та ін.

Наприклад, точковий випромінювач збуджує сферичні хвилі, випромінювач у вигляді нескінченної нитки струму НВЧ збуджує циліндричні хвилі. Строго кажучи, електромагнітні хвилі ніколи не бувають пласкими. Однак у багатьох випадках частину фронту електромагнітні хвилі на великій віддалі від джерела можна розглядати як пласку.

Якщо розміри області ΔS , де нас цікавить структура ЕМП, малі (коли, наприклад, ΔS являє собою розкрив антени), то можна вважати, що у межах цієї області фронт хвилі плаский (рис. 4.2). Це справедливо у тому разі, коли всі промені, які приходять на площину ΔS від джерела випромінювання, можна вважати паралельними.

2. Значення коливальної величини на хвильовому фронті. За цією ознакою розрізняють хвилі однорідні й неоднорідні. **Однорідними називають такі хвилі, у яких на хвильовому фронті коливальна величина (наприклад, напруженість електричного або магнітного поля) однакова.** У протилежному випадку хвилі називають неоднорідними.

3. Природа коливальної величини. За природою коливальної величини розрізняють скалярні й векторні хвилі. Прикладом скалярних хвиль є хвилі напруги й струму, звукові коливання та ін. Прикладом векторних хвиль є електромагнітні хвилі. Останні можуть бу-

ти поздовжніми або поперечними залежно від того, як орієнтовані вектори \mathbf{E} та \mathbf{H} відносно променя.

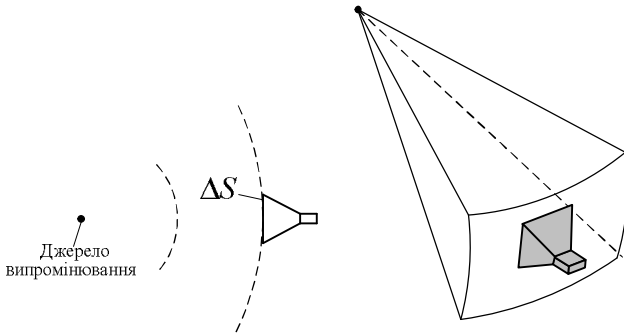


Рис. 4.2

4. Поляризація. Хвилі називаються поляризованими, якщо уздовж усього променя коливальний вектор змінюється певним чином. Розрізняють лінійну, кругову і еліптичну поляризацію. Поняття поляризації стосується тільки поперечних хвиль.

5. Гармонічні й негармонічні хвилі. У випадку гармонічних монохроматичних хвиль коливальна величина змінюється в часі за гармонічним законом, а графік розподілу в просторі, наприклад напруженості електричного (магнітного) поля, має форму синусоїди.

Гармонічні хвилі відіграють важливу роль при розгляді різних хвильових процесів. Це пов'язано з тим, що усякий негармонічний хвильовий процес у лінійному середовищі на основі перетворення Фур'є можна представити як суму гармонічних хвильових процесів.

4.2. Однорідні хвильові рівняння.

Хвильовий характер електромагнітного поля

З метою дослідження хвильового характеру електромагнітного поля зведемо, насамперед, рівняння Максвелла, до інших рівнянь, що описують хвильовий процес. Нагадаємо шлях отримання хвильових рівнянь (розд. 2).

Розглянемо рівняння, які описують електромагнітне поле в безмежному однорідному ізотропному середовищі без джерел:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Виконаємо операцію rot для обох частин рівняння (4.1):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \dot{\epsilon}_a \text{rot } \dot{\mathbf{E}}, \\ \text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \epsilon \dot{\mu}_a \text{rot } \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Скористаємося векторною тотожністю (див. додаток Е)

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Оператор ∇^2 – лапласіан, який часто позначається як

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Враховуючи рівність нулю $\text{div } \dot{\mathbf{H}}$ і $\text{div } \dot{\mathbf{E}}$, запишемо (4.2) в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + j\omega \dot{\epsilon}_a \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} - j\omega \epsilon \dot{\mu}_a \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Підставивши в (4.3) співвідношення (4.1), одержимо

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\mathbf{E}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Введемо комплексну величину $\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a}$, яка отримала назву **хвильового числа в середовищі**. Тоді (4.4) спрощується:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{E}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Співвідношення (4.5) є однорідними векторними хвильовими рівняннями (див. п. 2.7.3).

Зробимо декілька зауважень.

1. Рівняння (4.5) записані лише для комплексних векторних амплітуд і їхні розв'язки будуть тільки функціями координат.

2. Рівняння для $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ в (4.5) однакові, тому загальні розв'язки для $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ у нескінченному середовищі також будуть однаковими. Досить розв'язати одне з них. Відмінність виявляється після застосування граничних умов, необхідних для визначення постійних величин, що входять до загального розв'язку.

3. Хвильові рівняння еквівалентні системі рівнянь Максвелла.

4. Вживання хвильових рівнянь (4.5) замість системи рівнянь Максвелла дозволяє значно спростити і скоротити процес знаходження напруженості полів. Дійсно, система рівнянь Максвелла – це система чотирьох векторних диференціальних рівнянь першого порядку, що еквівалентна системі 12 скалярних рівнянь. Розв'язання її надто громіздке, якщо воно взагалі можливе. Хвильові рівняння (4.5) мають цілком однаковий вигляд. Отже, досить отримати розв'язок тільки одного з них. Це набагато простіше, бо доведеться в крайньому разі розв'язати систему всього трьох скалярних диференціальних рівнянь, але при цьому другого порядку.

Перед розв'язанням хвильових рівнянь доцільно нагадати термінологію, яка стосується хвильових процесів.

Під поширенням хвилі ми розуміємо поступове втягнення середовища в деякий фізичний процес, що веде до передачі енергії в просторі. Тобто, за сучасним поглядом хвильовий процес – вияв вельми загальної закономірності, яка полягає в тому, що не існує миттєвої передачі взаємодії. Зміна процесу в точці А за законом $f(t)$ у найпростішому випадку буде помічена в точці В на відстані z у вигляді

$f\left(t - \frac{z}{v}\right)$, де v – швидкість поширення процесу; час запізнювання

відносно випадку $v \rightarrow \infty$, $t_3 = \frac{z}{v}$. Вважають, що функція $f\left(t - \frac{z}{v}\right)$

описує хвилю.

Дослідження хвильових електромагнітних процесів пов'язане, як правило, з розв'язанням хвильових рівнянь.

Розглянемо розв'язання хвильових рівнянь (4.5), які є диференціальними рівняннями другого порядку. З курсу вищої математики відомо, що в декартовій системі координат розв'язання другого рівняння системи (4.5) являє собою такий вираз:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^+ e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^- e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (4.6)$$

де $\dot{\mathbf{k}}$ – хвильовий вектор; \mathbf{r} – радіус-вектор точки спостереження P .

Представимо комплексний вектор $\dot{\mathbf{k}}$ у вигляді

$$\dot{\mathbf{k}} = \text{Re } \dot{\mathbf{k}} + j \text{Im } \dot{\mathbf{k}}. \quad (4.7)$$

При цьому вектор $\text{Re } \dot{\mathbf{k}}$, перпендикулярний до поверхні рівних фаз, називається **фазовою сталою (коєфіцієнтом фази)** і збігається з напрямком орта променя \mathbf{e}_n (рис. 4.3, а), а вектор $\text{Im } \dot{\mathbf{k}}$ – перпендикулярний до поверхні рівних амплітуд і називається сталою загасання.

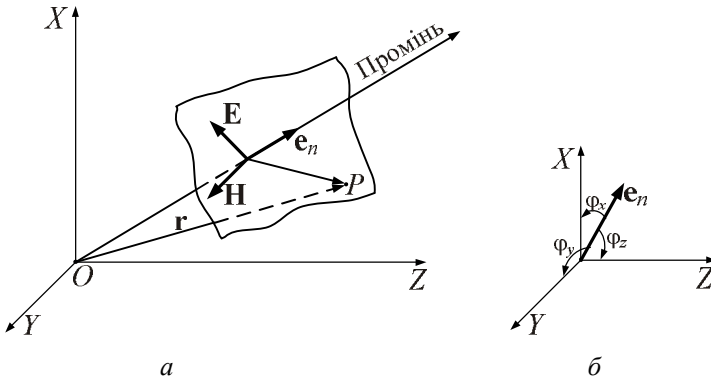


Рис. 4.3

Запис хвильового вектора у вигляді (4.7) застосовується у загальному випадку, наприклад, коли є границі поділу різних середовищ. В безмежному ізотропному однорідному середовищі вектори $\text{Re } \dot{\mathbf{k}}$ і $\text{Im } \dot{\mathbf{k}}$ паралельні орту \mathbf{e}_n

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_n \dot{k} = \mathbf{e}_n (\text{Re } \dot{k} + j \text{Im } \dot{k}).$$

Визначимо у явному вигляді величини $\text{Re } \dot{k}$ і $\text{Im } \dot{k}$, вважаючи, що втрати у середовищі зумовлені лише кінцевою провідністю, тобто $\dot{\mu}_a = \mu_a$, а $\dot{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a = \epsilon_a (1 - j \text{tg } \delta)$, звідки

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a (1 - j \text{tg } \delta)}, \quad \text{tg } \delta = \sigma / (\omega \epsilon_a). \quad (4.8)$$

Виконаємо над (4.8) дві операції. По-перше, прирівняємо квадрати модулів ліворуч і праворуч і, по-друге, піднесемо вихідну рівність до квадрата та прирівняємо дійсні частини ліворуч і праворуч:

$$\begin{cases} (\operatorname{Re} \dot{k})^2 - (\operatorname{Im} \dot{k})^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a; \\ (\operatorname{Re} \dot{k})^2 + (\operatorname{Im} \dot{k})^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Розв'язавши систему (4.9), одержимо:

$$\operatorname{Re} \dot{k} = \pm \beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}, \quad (4.10)$$

$$\operatorname{Im} \dot{k} = \pm \alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1)}. \quad (4.11)$$

З фізичних міркувань для хвилі, яка поширюється у напрямку \mathbf{r} , значення \dot{k} дорівнює $\dot{k} = \beta - j\alpha$.

Кожне з двох частинних розв'язків, що входять до (4.6), являє собою хвилю. Доведемо це, записавши миттєве значення вектора \mathbf{E} для першого частинного розв'язку:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^+ e^{-\alpha r} \cos(\omega t - \beta r). \quad (4.12)$$

Як бачимо, амплітуда E зменшується із збільшенням координати r за рахунок загасань у середовищі, тому що ε_a і μ_a комплексні. Для простоти дослідимо розв'язок (4.12) за відсутності втрат ($\alpha = 0$).

У деякий момент t_1 – електричне поле, згідно з (4.12), розподілене вздовж r за законом $\mathbf{E}^+ \cos(\omega t - \beta r)$, а коли мине час Δt в момент $t_2 = t_1 + \Delta t$ цей розподіл матиме вигляд:

$$\mathbf{E}^+ \cos(\omega t_1 + \omega \Delta t - \beta r),$$

тобто виявиться зміщеним у позитивному напрямку (рис. 4.4) на відстані Δr , яку можна визначити з умови $\omega \Delta t - \beta \Delta r = 0$. Звідси з

урахуванням $k = \beta = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$ знаходимо швидкість виявленого переміщення $\frac{\Delta r}{\Delta t}$:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}. \quad (4.13)$$

Це швидкість переміщення поверхні рівних фаз – фазова швидкість. Як видно, ця величина залежить лише від властивостей середовища.

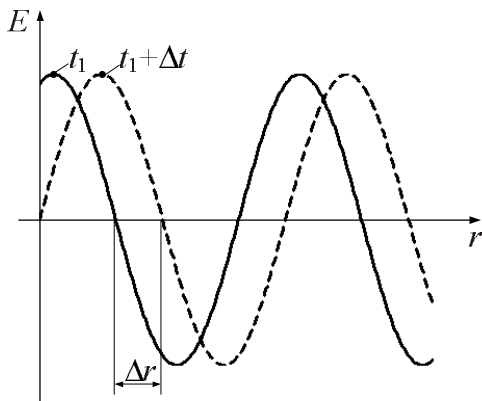


Рис. 4.4

Отже, гармонічний розподіл поля безперервно переміщується в напрямку \mathbf{r} з постійною швидкістю v_ϕ . Очевидно є точки, де значення фази в даний момент часу відрізняються на 2π . Відстань між цими точками (просторовий період) називається **довжиною хвилі**:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_\phi}{f}. \quad (4.14)$$

Слід зауважити, що множник e^{-jkr} часто називають **множником біжучої хвилі** і наявність його свідчить про перенесення енергії у просторі.

Переходячи до розгляду другого частинного розв'язку в (4.6), бачимо, що він відрізняється від першого лише знаком показника множника біжучої хвилі, тобто другий доданок у (4.6) являє собою

також електромагнітну хвилю, але таку, що рухається із швидкістю v_ϕ у негативному напрямку. Вважають, що **перший доданок** у (4.6) **описує пряму хвилю**, а **другий – зворотну**. В багатьох випадках спостерігається лише пряма хвиля, що рухається від джерела. Зворотна хвиля може існувати, наприклад, тоді, коли середовище, в якому знаходиться джерело поля, обмежене. Поява зворотної хвилі в цьому випадку викликана відбиттям від межі поділу середовища.

Часто замість визначень «пряма» і «зворотна» **застосовують визначення «падаюча» і «відбита» хвилі. При накладанні падаючої і відбитої хвиль з однаковими амплітудами виникає стояча хвиля.** Поклавши $E^+ = E^- = E$ і враховуючи, що $\alpha = 0$, з (4.6) одержимо миттєве значення для \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}(t) = E [\cos(\omega t - \beta r) + \cos(\omega t + \beta r)] = 2E \cos \beta r \cos \omega t. \quad (4.15)$$

Як видно з рівняння (4.15), при стоячій хвилі фаза залежить тільки від t , а від r залежить лише амплітуда (рис. 4.5). Косинусоїдний розподіл \mathbf{E} не рухається вздовж r на відміну від біжучої хвилі, тобто **при стоячій хвилі рух енергії у просторі відсутній.**

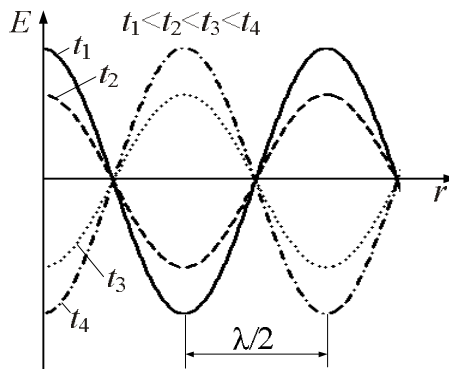


Рис. 4.5

У висновку наголосимо на двох обставинах.

1. Для вільного простору швидкість поширення

$$v_\phi = v_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

збігається із швидкістю світла у вакуумі. Саме цей факт навів Максвелла на думку, що світло – це ЕМХ.

2. Одержимо вираз для біжучої хвилі в довільному напрямку поширення в декартовій системі координат, виходячи із скалярного множника біжучої хвилі (див. рис. 4.3).

Радіус-вектор, проведений до довільної точки хвильової поверхні, має вигляд

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z.$$

Одиничний орт променя \mathbf{e}_n можна представити у вигляді

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_x \cos \varphi_x + \mathbf{e}_y \cos \varphi_y + \mathbf{e}_z \cos \varphi_z,$$

де величини $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ кути між ортом \mathbf{e}_n та осями X, Y, Z (рис. 4.3, б), а $\cos \varphi_x, \cos \varphi_y, \cos \varphi_z$ – напрямні косинуси орта \mathbf{e}_n .

Тоді

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = \dot{k} \left(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z \right) = \dot{k}_x x + \dot{k}_y y + \dot{k}_z z, \quad (4.16)$$

де $\dot{k}_x, \dot{k}_y, \dot{k}_z$ – проекції хвильового вектора.

Комплексна амплітуда ЕМХ, що поширюється в довільному напрямку, може бути записана так:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E} e^{-j\dot{k}(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)} \quad (4.17)$$

Вираз (4.17) передбачає, що початкова фаза вектора $\dot{\mathbf{E}}$ на початку системи координат дорівнює нулю.

4.3. Основні властивості пласкої однорідної електромагнітної хвилі в нескінченному середовищі

Перейдемо до розгляду найпростішого розв'язання хвильових рівнянь, яке має характер пласкої однорідної хвилі. Поле такого типу є деякою ідеалізацією, бо уявне лише в нескінченному ізотропному просторі. Однак поняття пласкої однорідної хвилі вельми корисне і широко використовується. Розглядатимемо пласкі однорідні ЕМХ, що поширюються вздовж осі Z прямокутної системи координат. Умова однорідності хвилі аналітично формулюється так:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (4.18)$$

При цьому хвильове рівняння (4.5) перепишеться у вигляді

$$\frac{d^2 \dot{E}}{dz^2} + k^2 \dot{E} = 0. \quad (4.19)$$

Розв'язання цього рівняння, що має фізичний смисл у нескінченному середовищі, записується таким чином:

$$\dot{E}(z) = E e^{-jkz} = E e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}. \quad (4.20)$$

Миттєві значення E можна представити у вигляді

$$E(z, t) = E e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \quad (4.21)$$

Визначимо тепер складові поля досліджуваної ЕМХ.

Знайдемо напрямок вектора \mathbf{E} , використовуючи умови (4.18) і співвідношення $\text{div } \dot{\mathbf{E}} = 0$. Останній вираз в декартових координатах має вигляд

$$\text{div } \dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} = 0. \quad (4.22)$$

З (4.22) виходить, що $\frac{\partial \dot{E}}{\partial z} = 0$, тобто $\dot{E}_z = \text{const}$. З (4.20) вихо-

дить, що $\dot{E} = \dot{E}_z = \text{const}$ лише за умови $\dot{E} = \dot{E}_z = 0$. Таким чином, у досліджуваній ЕМХ немає позовжньої складової електричного поля. Вектор \mathbf{E} перпендикулярний до променя, а отже, і до осі Z .

Магнітну складову поля \mathbf{H} знайдемо за допомогою другого рівняння Максвелла, поклавши, що вектор \mathbf{E} спрямований вздовж орта $\mathbf{e}_x \perp \mathbf{e}_z$, тобто

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = E_x \cdot e^{-jkz} \mathbf{e}_x \quad (4.23, a)$$

Обчислимо ротор вектора \mathbf{E} :

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}(z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial z} \dot{E}_x(z) = -jkE_x e^{-jkz} \mathbf{e}_y. \quad (4.24)$$

З другого рівняння Максвелла виходить, що

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{-j\mu_a \omega} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{k}}{\omega \mu_a} \dot{E}_x(z) \mathbf{e}_y = \dot{H}_y(z) \mathbf{e}_y. \quad (4.23, б)$$

Очевидно, що $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$ і $\mathbf{H} \perp \dot{\mathbf{k}}$. ЕМХ, у якій вектори \mathbf{H} і \mathbf{E} взаємно перпендикулярні і перпендикулярні до напрямку поширення, називається поперечною або хвилею типу Т (інша назва таких хвиль – хвилі типу ТЕМ).

Поздовжні складові цієї хвилі $E_z = 0$, $H_z = 0$. Розглядувана хвиля, як бачимо, належить до цього класу.

Представимо (4.23, б) у вигляді

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{E}_x(z)}{Z_c} \mathbf{e}_y = \frac{E_x e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}}{Z_c} \mathbf{e}_y, \quad (4.25)$$

де

$$Z_c = |Z_c| e^{j\psi_c} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\omega \dot{\mu}_a}{\omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a}} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\epsilon}_a}}. \quad (4.26)$$

Величина Z_c називається характеристичним опором середовища.

Структура плоскої хвилі зображена на рис. 4.6 на підставі виразів (4.23, а) і (4.23, б). Магнітний вектор у біжучій хвилі пропорційний електричному і відстає від нього за фазою на кут ψ_c (при

$z = \text{const}$), що відповідає $\Delta z = \frac{\psi_c}{\beta}$.

За відсутності втрат ($\dot{\mu}_a = \mu_a$, $\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a$) \mathbf{E} і \mathbf{H} синфазні.

4.4. Плоскі хвилі в діелектриках і провідниках

Розглянемо основні характеристики плоскої ЕМХ при поширенні її в діелектриках і провідниках.

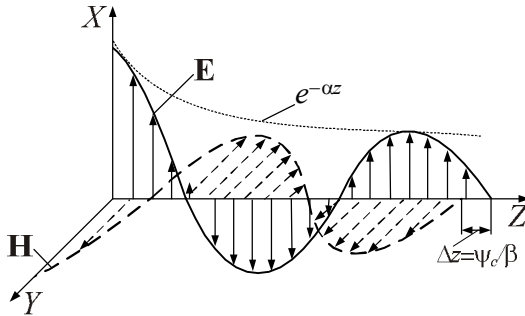


Рис. 4.6

Для більшості використовуваних на практиці діелектриків $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \ll 1$, тоді з (4.10) і (4.11) з урахуванням розкладу

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ при $x \ll 1$ одержимо:

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.27)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{2} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} k \operatorname{tg} \delta. \quad (4.28)$$

Таким чином, коефіцієнт фази реального діелектрика з малими втратами дорівнює хвильовому числу і від втрат не залежить, а коефіцієнт загасання пропорційний $\operatorname{tg} \delta$.

Розглянемо деякі окремі випадки.

ЕМХ у вакуумі. Це ідеальне середовище з параметрами $\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$ є свого роду еталоном. Основні характеристики ЕМХ у вакуумі:

- хвильове число

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = k_0; \quad (4.29)$$

- фазова швидкість

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c; \quad (4.30)$$

- довжина хвилі

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f} = \frac{c}{f} = \lambda_0; \quad (4.31)$$

- характеристичний опір

$$Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 = 120\pi = 376,7 \text{ Ом}; \quad (4.32)$$

- середнє за період значення вектора Пойнтінга

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^* \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{E}_x \dot{H}_y^* \right\} [\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_z \frac{E_x^2}{2Z_0} = \mathbf{e}_z \frac{H_y^2 Z_0}{2}. \quad (4.33)$$

Приклад 4.1. Амплітудне значення вектора \mathbf{E} пласкій ЕМХ у вакуумі дорівнює 10 В/м. Знайти амплітуду вектора \mathbf{H} та середнє значення вектора Пойнтінга.

Розв'язок. З рівностей (4.32), (4.33) знаходимо:

$$H = \frac{E}{Z_0} = \frac{10}{120\pi} = 0,0256 \text{ А/м},$$

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} EH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2,65 \cdot 10^{-2} = 0,133 \text{ Вт/м}^2.$$

ЕМХ в магнітодіелектричному середовищі без втрат. В такому середовищі в загальному випадку $\varepsilon \geq 1$, $\mu \geq 1$, $\sigma = 0$. Параметри ЕМХ:

$$\beta = k_0 \sqrt{\varepsilon \mu}; \quad (4.29, a)$$

$$v_\phi = c / \sqrt{\varepsilon \mu}; \quad (4.30, a)$$

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon \mu}; \quad (4.31, a)$$

$$Z_c = Z_0 \sqrt{\mu/\epsilon}. \quad (4.32, a)$$

Як видно з рівностей (4.30,a), (4.31,a), фазова швидкість та довжина хвилі зменшуються у $\sqrt{\epsilon\mu}$ разів у порівнянні з вакуумом, хвильовий опір збільшується зі зростанням μ та зменшується, якщо діелектрична проникність зростає.

Нагадаємо, що ЕМХ поширюється у напрямку осі Z .

Відзначимо деякі особливості ЕМХ у середовищах без втрат.

1. У будь-якій точці простору $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ і $\mathbf{E}, \mathbf{H} \perp \mathbf{e}_z$ (рис. 4.7).

2. **Зміна \mathbf{E} і \mathbf{H} відбувається синфазно.** На рис. 4.8 зображено графік розподілу у просторі напруженості електричного і магнітного полів у пласкій гармонічній хвилі.

3. Фазова швидкість хвилі при $\sigma = 0$ не залежить від частоти. Як наслідок, у вакуумі та ідеальному діелектрику явище дисперсії не виникає.

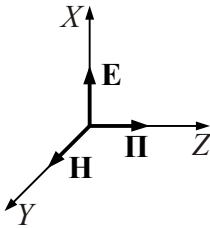


Рис. 4.7

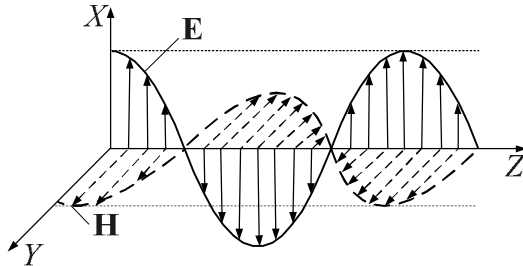


Рис. 4.8

4. Густина електричної та магнітної енергії ЕМХ в середовищах без втрат

$$w_e = \frac{\epsilon_a E_x^2}{2} = \frac{\epsilon_a}{2} Z_c^2 H_y^2 = \frac{\mu_a H_y^2}{2} = w_m.$$

Як наслідок, **густина електричної і магнітної енергій однакова у будь-якому місці і у будь-який момент часу.**

5. Електромагнітне поле має енергію, тому можна говорити про швидкість перенесення енергії

$$v_e = \frac{\mathbf{P}}{\omega} = \mathbf{e}_z Z \frac{H_y^2}{2\omega} = \mathbf{e}_z \frac{Z_c}{\mu_a} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}.$$

Швидкість перенесення енергії за величиною та напрямом дорівнює фазовій швидкості хвилі.

Приклад 4.2. У площині XOZ напруженість електричного поля плоскої електромагнітної хвилі (ПЕМХ), що поширюється в напрямку осі Z , задано виразом

$$E_x = 0,2 \cos(\omega t + \varphi),$$

де $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$, $\varphi = 30^\circ$. Записати вираз напруженості електричного поля на відстані 500 м, якщо відомо, що хвиля поширюється у повітрі.

Розв'язок. У повітрі $\text{tg}\delta = 0$, бо можна вважати у повітрі $\sigma = 0$. Тому амплітуда ПЕМХ при поширенні не змінюється. При проходженні ПЕМХ на відстані $z = 500 \text{ м}$ відбувається фазовий набіг

$$\beta z = \omega z \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 10^6 \cdot 500 \cdot \sqrt{\frac{1}{36\pi} 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{5}{3}.$$

Враховуючи початкову фазу ПЕМХ, отримуємо

$$E_x = 0,2 \cos\left(10^6 t - \frac{5}{3} + \frac{\pi}{6}\right).$$

ЕМХ у реальному діелектрику. Будемо вважати, що діелектрик немагнітний ($\mu = 1$), а втрати малі (кут втрат $\text{tg}\delta \sim 10^{-3} \dots 10^{-5}$). Стала поширення \hat{k} у цьому випадку є комплексною $\hat{k} = \beta - j\alpha$, загальні вирази для коефіцієнта фази β і коефіцієнта згасання α наведені вище (співвідношення (4.27), (4.28)). У випадку, що розглядається, вони приймають вигляд

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k_0 \sqrt{\epsilon}; \quad \alpha = \frac{\beta \delta}{2}. \quad (4.29, б)$$

Фазова швидкість, довжина хвилі і характеристичний опір діелектрика у разі малих втрат відповідно дорівнюють:

$$v_\phi = c/\sqrt{\epsilon}; \quad (4.30, б)$$

$$\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon}. \quad (4.31, б)$$

$$Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a(1-j\operatorname{tg}\delta)}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}(1+j\delta)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} e^{j\frac{\delta}{2}}. \quad (4.32, б)$$

Оскільки $\operatorname{tg}\delta \ll 1$, то фазовий зсув δ дуже малий. Модуль Z_c не залежить від втрат.

Особливості поширення ЕМХ у середовищі з втратами наступні:

1. **Вектори поля \mathbf{E}_x і \mathbf{H}_y взаємно перпендикулярні.**
2. **Амплітуди напруженостей електричного й магнітного полів зменшуються в міру поширення хвилі, причому вектори \mathbf{E}_x і \mathbf{H}_y зміщені за фазою на кут ψ_c (див. (4.26)).**

3. **Фазова швидкість і довжина хвилі при малих втратах збігаються зі значеннями v_ϕ і λ за відсутності втрат.** Разом з тим у середовищі з втратами величини v_ϕ , λ та хвильовий опір Z_c , як виходить із співвідношень (4.26), (4.10), залежать не тільки від параметрів середовища μ_a , ϵ_a , σ , але й від частоти ω . Ця залежність називається дисперсією, а середовище, у якому має місце ця залежність, називається диспергуючим.

4. Миттєве значення вектора Пойнтінга визначиться співвідношенням

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}_x, \mathbf{H}_y] = \mathbf{e}_z \frac{E_x^2}{|Z_c|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \psi_c).$$

Вектор \mathbf{P} завжди спрямований уздовж осі Z , але через наявність зсуву за фазою ψ_c між векторами \mathbf{E}_x та \mathbf{H}_y є перерізи, де добуток $\cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \psi_c)$ негативний й енергія в цих місцях спрямована протилежно поширенню хвилі ($\mathbf{P} = -\mathbf{e}_z \Pi$).

Середнє значення вектора Пойнтінга визначимо зі співвідношення

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{E}_x, \mathbf{H}_y] dt.$$

Підставляючи в нього вирази $\mathbf{E}_x = \mathbf{e}_x E_x e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ й $\mathbf{H}_y = \mathbf{e}_y H_y e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \psi_c)$, остаточно одержимо

$$\bar{\Pi} = \mathbf{e}_z \frac{E_x H_y}{2} e^{-2\alpha z} \cos \psi_c.$$

5. Густина енергії магнітного поля більша, ніж густина енергії електричного поля. Дійсно,

$$W_{\max}^m = \frac{\mu_a H_y^2}{2} = \frac{\mu_a E_x^2}{2|Z_c|^2} = \frac{|\dot{\epsilon}_a| E_x^2}{2} \geq \frac{\epsilon_a E_x^2}{2} = W_{\max}^e,$$

тому що

$$|\dot{\epsilon}_a| = \left| \epsilon_a \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_a} \right) \right| \geq \epsilon_a.$$

Приклад 4.3. Знайти амплітуду напруженості електричного поля E на глибині 100 м у сухому ґрунті ($\epsilon_a = 4\epsilon_0, \sigma = 0,001 \text{ См/м}$) на частотах 100 кГц і 10 МГц, якщо біля поверхні амплітуда напруженості електричного поля дорівнює 100 мкВ/м.

Розв'язок. На різних частотах амплітуди поля на глибині 100 м будуть різні.

а) Нехай $f = 10^5 \text{ Гц}$. Знайдемо на цій частоті $\text{tg} \delta$:

$$\text{tg} \delta = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36\pi} 10^{-9}} = 45 \gg 1.$$

Тепер знайдемо коефіцієнт загасання α . Через те що $\text{tg} \delta \gg 1$, то

$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot 10^5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

На глибині 100 м амплітуда напруженості електричного поля

$$E_1 = E e^{-\alpha z} = 13,53 (\text{мкВ/м}).$$

Нехай $f = 10^7$ Гц, тоді $\operatorname{tg} \delta = 0,45 \sim 1$, тому

$$\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{4\varepsilon_0\mu_0}{2} (\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + 1} - 1)} = 0,092 \text{ м}^{-1},$$

$$E_2 = Ee^{-\alpha z} = 10^{-2} (\text{мкВ} / \text{м}).$$

Розглянемо ЕМХ в добре провідному середовищі. Для провідника $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ і з виразів (4.10), (4.11) маємо:

$$\alpha = \beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \operatorname{tg} \delta} = \sqrt{\frac{\mu_a \sigma \omega}{2}} = \sqrt{\pi f \mu_a \sigma} = \frac{1}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \sigma}}; \quad (4.34)$$

$$\nu_\phi = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \operatorname{tg} \delta}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}} = \omega \Delta; \quad (4.35)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{-j\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} (1 + j). \quad (4.36)$$

Зробимо деякі висновки.

1. З наведених формул виходить, що **при $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ коефіцієнти загасання і фази чисельно рівні, приймають дуже великі значення і зростають із збільшенням ω і σ** ; а значення ν_ϕ і $|Z_c|$ виявляються надто малими.

2. Оскільки $Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}}$, то з виразу (4.36) видно, що **зсув за фазою між векторами E і H дорівнює $\pi/4$.**

3. Амплітуда ЕМХ зменшується за законом $-e^{\alpha z} = -e^{\frac{z}{\Delta}}$. Тому Δ – це така відстань, при проходженні якої амплітуда хвилі зменшується у e разів.

На відстані Δ відбувається значне загасання ЕМХ. Потужність хвилі пропорційна $|E|^2$, тому лише невелика частина вихідної потужності, яка дорівнює $e^{-2} = 0,135$ (13,5 %), долає межу Δ . Отже, основна частина енергії ЕМХ (86,5 %) зосереджується в шарі завтовшки Δ , який отримав назву **поверхневого** або **скін-шару** (інакше – **глибина проникнення**).

4. Максимальна густина енергії магнітного поля в провіднику значно перевищує густину енергії електричного поля, оскільки

$$\frac{w^m}{w^e} = \frac{|\dot{\xi}_a|}{|\xi_a|} \approx \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \gg 1.$$

Приклад 4.4. Плоска хвиля поширюється у міді $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ СМ/м на частоті $f = 10$ ГГц. Знайти фазову швидкість, глибину проникнення, довжину хвилі та хвильовий опір.

Розв'язок. Розрахунки проведемо за формулами (4.34) – (4.36). Глибина проникнення

$$\Delta = (\pi f \mu_a \sigma)^{-\frac{1}{2}} = (3,14 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7)^{-\frac{1}{2}} = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

довжина хвилі

$$\lambda = 2\pi/\beta = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

характеристичний опір

$$Z_c = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^{10}}{5,7 \cdot 10^7}} = 3,7 \cdot 10^{-2} e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ Ом};$$

фазова швидкість

$$v_\phi = 2\pi \cdot 10^{10} \cdot 6,67 \cdot 10^{-7} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

З наведеного прикладу можна зробити два важливі висновки.

1. Не слід використовувати металопоподібні середовища для передачі ЕМХ (амплітуда хвилі суттєво зменшується при поширенні).

2. В практичних конструкціях НВЧ для досягнення незначних загасань достатньо нанести тонкий шар добрепровідного металу на поверхню, по якій проходить НВЧ струм.

4.5. Поляризація плоских електромагнітних хвиль

Поляризація – це просторово-часова характеристика ЕМХ.

В кожній точці простору за період коливань кінець вектора \mathbf{E} (або \mathbf{H}) описує деяку криву (годограф), яка лежить у площині, перпендикулярній хвильовому вектору \mathbf{k} . Характер цієї кривої визначає поляризацію ЕМХ. **В радіотехніці поляризацію визначають за годографом вектора \mathbf{E}** (в оптиці – вектора \mathbf{H}). Так, розглянуті у п. 4.3 та 4.4 ЕМХ мають **лінійну поляризацію** – годограф \mathbf{E} являє собою відрізок прямої, паралельної осі X (рис. 4.9).

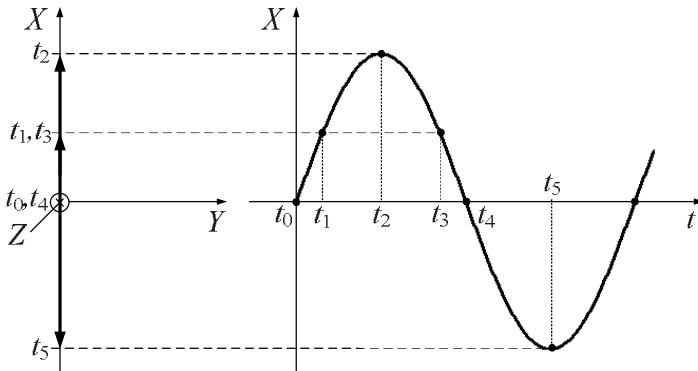


Рис. 4.9

У загальному випадку амплітуда вектора $\dot{\mathbf{E}}$ падаючої хвилі у середовищі без втрат може бути представлена у вигляді

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_x \dot{E}_x + \mathbf{e}_y \dot{E}_y = \mathbf{e}_x \dot{E}_x e^{-jkz} + \mathbf{e}_y \dot{E}_y e^{-jkz}.$$

Виходячи з цього уявлення, запишемо миттєве значення напруженості електричного поля

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_x E_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x) + \mathbf{e}_y E_y (\omega t - kz + \varphi_y).$$

Залежно від величини амплітуд E_x, E_y і фаз φ_x, φ_y кінець вектора $\mathbf{E}(z, t)$ описує у площині $z = \text{const}$ різні криві, які визначають поляризацію хвилі. Перетворимо вираз для $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x + \dot{p} \mathbf{e}_y) \dot{E}_x e^{-jkz}, \quad (4.37)$$

де параметр поляризації \dot{p} визначається співвідношенням

$$\dot{p} = p e^{j\varphi} = \frac{\dot{E}_y}{\dot{E}_x} = \frac{E_y}{E_x} e^{j(\varphi_y - \varphi_x)}. \quad (4.38)$$

Побудуємо в площині $Z = 0$ вектор $\dot{\mathbf{E}}$ (рис. 4.10).

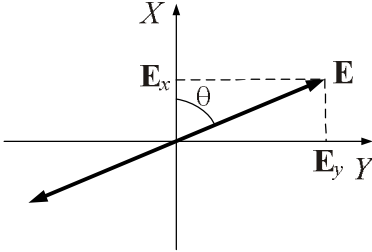


Рис. 4.10

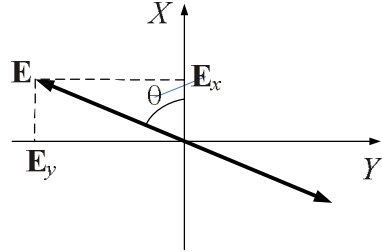


Рис. 4.11

Тангенс кута нахилу вектора $\dot{\mathbf{E}}$ до осі X

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y(t)}{E_x(t)} = \frac{E_y \cos(\omega t + \varphi_y)}{E_x \cos(\omega t + \varphi_x)}. \quad (4.39)$$

Амплітуда вектора \mathbf{E} визначається співвідношенням

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_x^2 \cos^2(\omega t + \varphi_x) + E_y^2 \cos^2(\omega t + \varphi_y)}.$$

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Нехай початкові фази хвиль E_x і E_y однакові й рівні $\varphi_x = \varphi_y$.

Тоді зміна векторів E_x і E_y відбувається у фазі. Орієнтування вектора

\mathbf{E} в просторі залишається незмінним, тобто $\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{const}$ і від

часу не залежить. Довжина вектора \mathbf{E} змінюється в такт із E_x і E_y і його годограф викреслює відрізок прямої. Це значить, що сумарне поле поляризоване лінійно, а площина поляризації утворює кут

$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{E_y}{E_x}$ із площиною XOZ (рис. 4.10).

Комплексна амплітуда (4.37) результуючого поля має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x + p\mathbf{e}_y) E_x e^{-j\varphi_x}, \text{ тут } p = \frac{E_y}{E_x}.$$

2. Нехай тепер між \dot{E}_x і \dot{E}_y є зсув фази на $\pm\pi$: $\varphi_x = \varphi_y \pm \pi$.

Тоді $\operatorname{tg} \theta = -\frac{E_y}{E_x} = \text{const}$. Поляризація знову лінійна, але кут θ

негативний (рис. 4.11), тобто площина поляризації проходить через 2-й і 4-й квадранти. Комплексна амплітуда

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x - p\mathbf{e}_y) E_x e^{j\varphi_x}.$$

3. Нехай коливання складових поля відбувається у квадратурі, тобто $\varphi_y = \varphi_x \pm \frac{\pi}{2}$, а їх амплітуди рівні: $E_x = E_y = E_0$. Тоді

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} \cdot \frac{\cos\left(\omega t + \varphi_x \pm \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\omega t + \varphi_x)} = \mp \operatorname{tg}(\omega t + \varphi_x),$$

тобто

$$\theta = \mp(\omega t + \varphi_x).$$

Довжина вектора

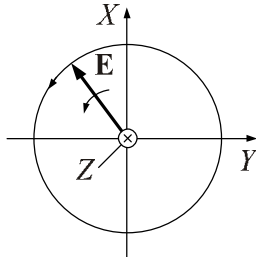
$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0 \sqrt{\cos^2(\omega t + \varphi_x) + \sin^2(\omega t + \varphi_x)} = E_0.$$

Отже, довжина результуючого вектора із часом не змінюється, а сам вектор рівномірно обертається навколо осі Z з кутовою частотою ω – така **поляризація** називається **коловою**.

Напрямок обертання результуючого вектора визначається зсувом фаз $+\frac{\pi}{2}$ або $-\frac{\pi}{2}$.

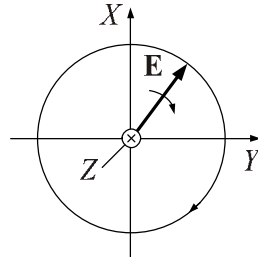
При $\varphi_y = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$ обертання вектора \mathbf{E} в просторі відбувається проти годинникової стрілки (якщо дивитися уздовж напрямку по-

ширення хвилі) – ліва колова поляризація (рис. 4.12), при $\varphi_y = \varphi_x - \frac{\pi}{2}$ – права колова поляризація (рис. 4.13).



$$\varphi_y = \varphi_x + \pi/2$$

Рис. 4.12



$$\varphi_y = \varphi_x - \pi/2$$

Рис. 4.13

У першому випадку комплексна амплітуда результуючого поля має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y) E_x e^{j\varphi_x}, \quad (4.40)$$

у другому

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_x e^{j\varphi_x}. \quad (4.41)$$

При фіксованому t кінець вектора $\mathbf{E}(z)$ описує у просторі гвинтову лінію на круглomu циліндрі (рис. 4.14). Така хвиля називається **хвилею з коловою поляризацією правого обертання**.

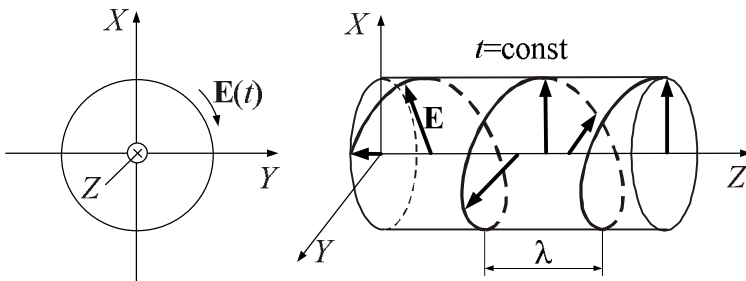


Рис. 4.14

4. У загальному випадку довільних фаз і амплітуд, коли $E_x \neq E_y$ й $\varphi_y = \varphi_x + \varphi$, $\varphi \neq n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), годограф вектора результуючого поля \mathbf{E} являє собою еліпс (рис. 4.15), а поляризація називається еліптичною.

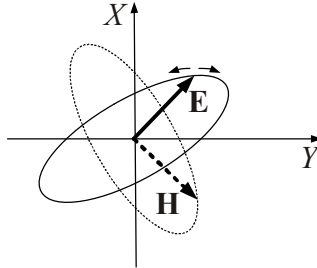


Рис. 4.15

При еліптичній поляризації комплексна амплітуда результуючого поля відповідно до (4.37) на початку координат має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_x + |\dot{p}| e^{j\varphi} \mathbf{e}_y) E_x e^{j\varphi_x},$$

причому $|\dot{p}| \neq 1$.

Годограф вектора \mathbf{H} орієнтований нормально до годографа \mathbf{E} (рис. 4.15).

Як підсумок, наведемо таблицю значень параметра \dot{p} для різних випадків поляризації (табл. 4.1).







Якщо скласти вирази (4.40) та (4.41), інакше кажучи, скласти поля двох колових поляризацій, то отримаємо

$$2\dot{\mathbf{E}} = 2\mathbf{e}_x E_x e^{j\varphi_x},$$

звідки виходить, що лінійно поляризована хвиля завжди може бути представлена у вигляді суми двох хвиль, поляризованих по колу в протилежних напрямках. Це розкладання пояснюється на рис. 4.16.

Підкреслимо також наступне. У п. 4.4. було показано, що вектори поля \mathbf{E} і \mathbf{H} взаємно перпендикулярні. Разом з тим можна показати, що в провідному середовищі у загальному випадку, коли плаסקа хвиля еліптично поляризована, вектори \mathbf{E} й \mathbf{H} не є взаємно перпендикулярними.

Таблиця. 4.1

$\dot{p} = \dot{E}_y / \dot{E}_x$	$\mathbf{e}_x + \dot{p}\mathbf{e}_y$	Поляризація	
$\dot{p} = p > 0$	$\mathbf{e}_x + p\mathbf{e}_y$		лінійна
$\dot{p} = p < 0$	$\mathbf{e}_x - p\mathbf{e}_y$		лінійна
$\dot{p} = j$	$\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y$		колова лівого обертання
$\dot{p} = -j$	$\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y$		колова правого обертання
\dot{p} – довільна величина	$\mathbf{e}_x + \dot{p} e^{j\varphi}\mathbf{e}_y$, де $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$		еліптична лівого обертання
			еліптична правого обертання

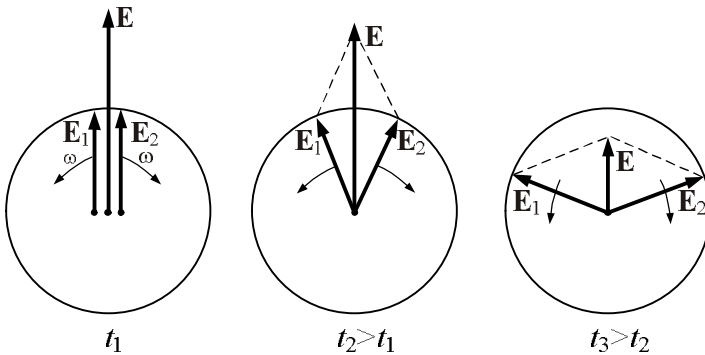


Рис. 4.16

Задачі для самостійного розв'язку

1. Плaska електромагнітна хвиля, частота якої $f = 1,59 \text{ МГц}$, поширюється в нескінченному просторі з параметрами $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. В момент часу $t = 0$ в точці, яка прийнята за початок координат, миттєве значення напруженості електричного поля $E = 70,7 \text{ мВ/м}$. Записати вираз для миттєвого значення електричного поля у точці, яка знаходиться на відстані 1500 м від початку координат, якщо амплітуда поля дорівнює 100 мВ/м .

2. Нескінченне середовище має параметри: $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_0 = \mu_a$, $\sigma = 1 \text{ См/м}$. Наскільки значною буде помилка, якщо довжину хвилі, що поширюється у цьому середовищі, визначити за формулою $\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}$, справедливою для ідеальних діелектриків? Частота хвилі $f = 10^8 \text{ ГГц}$.

3. Кераміка – титанат барію (BaTiO_3) на частоті $f = 10 \text{ ГГц}$ має параметри: $\epsilon_a = 144\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\text{tg}\delta = 0,6$. Визначити довжину хвилі, коефіцієнт загасання і характеристичний опір середовища.

4. Плaska ЕМХ, що поширюється у повітрі, має довжину $\lambda = 30 \text{ м}$. Якою буде довжина хвилі, якщо ця хвиля поширюватиметься у морській воді при $\epsilon_a = 81\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 4 \text{ См/м}$?

5. Плaska ЕМХ поширюється у вологому ґрунті ($\epsilon_a = 9\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}$) в напрямку нормалі до поверхні. Записати вираз для напруженості електричного поля у точці, що знаходиться на відстані $3,5 \text{ м}$ від поверхні, якщо напруженість електричного поля біля поверхні $E = 106 \cos(2\pi \cdot 10^7) \text{ мВ/м}$.

6. У середовищі з параметрами $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$ поширюється плaska ЕМХ, комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля якої у площині $z = 0$ $\vec{E} = 0,5\mathbf{e}_x + 0,2\mathbf{e}_y \text{ (В/м)}$. Визначити комплексну амплітуду вектора напруженості магнітного поля, якщо хвиля поширюється в напрямку збільшення координати z .

7. Визначити комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля плоскої ЕМХ у металі з параметрами $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu_a = \mu_0$ на частоті $f = 10 \text{ кГц}$, якщо у заданій точці простору вектор напруженості магнітного поля $\vec{H} = 25\mathbf{e}_y \text{ А/м}$.

8. У скільки разів зменшиться амплітуда плоскої ЕМХ з частотою $f = 2 \text{ МГц}$ при поширенні в середовищі з параметрами $\sigma = 10^{-3} \text{ См/м}$, $\epsilon_a = 2\epsilon_0$ на шляху в 1 м ?

Питання для самоперевірки

1. Що називають фронтом хвилі? Як класифікують електромагнітні хвилі за формою фронту?

2. Що таке поляризація електромагнітних хвиль? Які види поляризації вам відомі?

3. Напишіть вирази для напруженості електричного і магнітного полів плоскої хвилі, яка поширюється в ідеальному діелектрику. Поясніть основні властивості поля цієї хвилі.

4. Запишіть вирази для напруженості електричного і магнітного полів плоскої хвилі, яка поширюється у провідному середовищі. Які особливості таких хвиль?

5. Як розрахувати довжину хвилі у провідному середовищі, якщо відомі параметри середовища і частота?

6. Виведіть формулу для розрахунку коефіцієнта фази і коефіцієнта загасання. Як спростити ці формули у випадку добре провідного середовища і реального діелектрика?

7. Що називають глибиною проникнення поля у середовище? Як її розрахувати?

8. Напишіть вираз для напруженості поля плоскої хвилі, яка поширюється у довільному напрямку, який не збігається з напрямком осей координат.

5. ПОШИРЕННЯ ПЛАСКИХ ОДНОРІДНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Поширення електромагнітних хвиль в нескінченному ізотропному середовищі розглядалось в розд. 4. Електромагнітна хвиля, яка поширюється в ізотропному середовищі, змінює вздовж напрямку поширення амплітуду за законом експоненти (в загальному випадку), фазу за лінійним законом і не змінює поляризацію. При поширенні в анізотропному середовищі разом з амплітудою і фазою може змінюватись і поляризація електромагнітних хвиль.

5.1. Анізотропні середовища

Нагадаємо, що в анізотропному середовищі параметри ϵ , μ , σ , залежать від напрямку складових електромагнітного поля, тобто вектори \mathbf{D} і \mathbf{E} , \mathbf{B} і \mathbf{H} , \mathbf{J} і \mathbf{E} в загальному випадку не збігаються за напрямком в просторі. В матеріальних рівняннях зв'язок між векторами електромагнітного поля встановлюється через тензори другого рангу (див. п. 1.1.5). Для комплексних амплітуд тензори діелектричної проникності і провідності об'єднують в один тензор комплексної діелектричної проникності.

Анізотропні середовища можуть бути природного і штучного походження. До природних анізотропних середовищ належать в першу чергу монокристали діелектриків, напівпровідників та провідників.

При поляризації монокристалічних діелектриків в зовнішньому електричному полі \mathbf{E} електрична сприйнятливість χ^e залежить від напрямку електричного поля відносно кристалографічних осей. Величина вектора поляризації \mathbf{P} буде різною за різними напрямками і сумарний вектор поляризації не збігається за напрямком з сумарним вектором електричного поля (рис. 5.1)

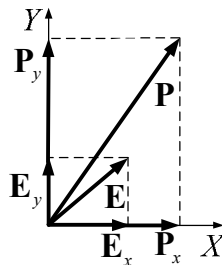


Рис. 5.1

В загальному випадку кожна складова вектора \mathbf{P} залежить від всіх складових вектора \mathbf{E} . В декартовій системі координат система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} P_x &= \chi_{xx}^e E_x + \chi_{xy}^e E_y + \chi_{xz}^e E_z \\ P_y &= \chi_{yx}^e E_x + \chi_{yy}^e E_y + \chi_{yz}^e E_z \\ P_z &= \chi_{zx}^e E_x + \chi_{zy}^e E_y + \chi_{zz}^e E_z \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ці рівняння в матричній та тензорній формі мають вигляд

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx}^e & \chi_{xy}^e & \chi_{xz}^e \\ \chi_{yx}^e & \chi_{yy}^e & \chi_{yz}^e \\ \chi_{zx}^e & \chi_{zy}^e & \chi_{zz}^e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \tilde{\chi}^e \mathbf{E}.$$

Вектор електричного зміщення

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \tilde{\chi}^e \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(\tilde{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\chi}^e \right) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (5.2)$$

де $\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одиничний тензор, $\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$ – тензор

відносної діелектричної проникності.

Для ізотропного діелектрика **тензор відносної діелектричної проникності** діагональний з однаковими компонентами

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon \tilde{\varepsilon}.$$

Для більшості монокристалічних діелектриків тензор відносної діелектричної проникності поворотом системи координат може бути приведений до діагонального виду з різними компонентами. Наприклад, для монокристалічного кварцу, якщо його оптична вісь паралельна осі Z ,

$$\vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{vmatrix}, \quad (5.3)$$

де ε_{\perp} – діелектрична проникність в напрямку, перпендикулярному осі Z ; ε_{\parallel} – діелектрична проникність в напрямку, паралельному осі Z .

Існують анізотропні діелектрики, які ніяким поворотом системи координат не можна привести до діагонального виду. Прикладом таких діелектриків є плазма іоносфери в присутності магнітного поля Землі та ферити у сталому магнітному полі.

5.2. Плазма в магнітному полі

Плазмою називають квазінейтральну систему відносно рухомих позитивних і негативних зарядів. Є два види плазми: газова і твердого тіла. Наприклад, плазма зірок – це високотемпературна газова плазма. Плазма твердого тіла визначається як сукупність рухомих електронів (або дірок), які існують в кристалічній ґратці іонів протилежного знака.

На поширення радіохвиль найбільше впливає плазма іоносфери Землі, яка утворюється за рахунок іонізації газу атмосфери в основному під дією сонячного випромінювання.

При іонізації атмосфери утворюються негативно заряджені частинки – електрони і позитивно заряджені іони. Оскільки маса іонів набагато більша, ніж маса електронів, можна вважати, що електрони рухаються відносно нерухомих іонів. Таку **плазму** називатимемо **електронною**. В цілому в плазмі виконується умова квазінейтральності, тобто число позитивних і негативних зарядів в одиниці об'єму однакове (рис. 5.2).

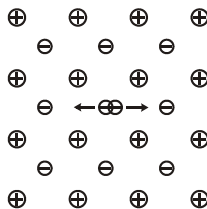


Рис. 5.2

Вважатимемо, що довжина електромагнітної хвилі набагато більша, ніж відстань між зарядженими частинками. Якщо електрон вивести із положення рівноваги, то він за рахунок сили Кулона коливатиметься навколо положення рівноваги з **плазмовою (ленгмюрівською) частотою** ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0 \varepsilon_L}}, \quad (5.4)$$

де n – концентрація електронів; e – заряд електрона; m_e – маса електрона; ε_L – відносна діелектрична проникність іонів.

Для розрідженої газової плазми іоносфери можна прийняти $\varepsilon_L = 1$. В плазмі твердого тіла для більшості напівпровідників $\varepsilon_L = 10 \dots 20$, для напівметалів, наприклад для вісмута, ε_L досягає значення 100. Коливання електронів в плазмі загасає за рахунок зіткнення з іонами або нейтральними молекулами в газовій плазмі, або за рахунок розсіювання на квантах пружних коливань середовища (фононах) в плазмі твердого тіла. **Частота розсіювання електронів** ν_e залежить від густини плазми та її температури.

За відсутності зовнішнього сталого магнітного поля рівняння руху електронів під дією електромагнітного поля можна записати у вигляді

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m_e \mathbf{v} \nu_e = e \mathbf{E}, \quad (5.5)$$

де $\mathbf{v}(t)$ – вектор швидкості електронів; $m_e \mathbf{v} \nu_e$ – сила тертя при розсіюванні електронів у плазмі.

Розв'язком рівняння (5.5) для гармонічного електромагнітного поля $\mathbf{E}(t) = \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$ є $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$, де $\dot{\mathbf{v}}$ – комплексна амплітуда швидкості електронів. Похідна від вектора швидкості $\partial \mathbf{v} / \partial t = j\omega \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$. Підставивши ці значення в рівняння (5.5), маємо

$$m_e (j\omega + \nu_e) \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t} = e \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t},$$

звідки амплітуда вектора швидкості електронів

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e\dot{\mathbf{E}}}{m_e(j\omega + \nu_e)}. \quad (5.6)$$

Комплексна амплітуда густини електронного струму в плазмі $\dot{\mathbf{J}}_e = ne\dot{\mathbf{v}}$. Крім електронного струму в плазмі існує струм зміщення $\dot{\mathbf{J}}_{\text{зм}} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_L\dot{\mathbf{E}}$. Густина сумарного струму в плазмі

$$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{J}}_e + \dot{\mathbf{J}}_{\text{зм}} = ne\dot{\mathbf{v}} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_L\dot{\mathbf{E}}. \quad (5.7)$$

Підставивши в (5.7) значення $\dot{\mathbf{v}}$ із (5.6), маємо

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_L \left(1 - \frac{ne^2}{m_e\omega\varepsilon_0\varepsilon_L(\omega - j\nu_e)} \right) \dot{\mathbf{E}} = \\ &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_L \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu_e)} \right) \dot{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Як видно із формули (5.8), відносна діелектрична проникність плазми за відсутності зовнішнього магнітного поля є скалярною комплексною величиною

$$\varepsilon = \varepsilon_L \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu_e)} \right). \quad (5.9)$$

На рис.5.3 наведено графік залежності ε від відношення $(\omega_p/\omega)^2$ за відсутності втрат ($\nu_e=0$) для плазми іоносфери ($\varepsilon_L=1$).

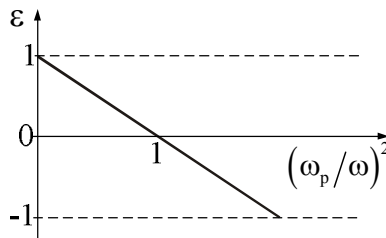


Рис. 5.3

Якщо частота сигналу менше плазмової ($\omega < \omega_p$), то відносна діелектрична проникність плазми менша нуля, фазова стала і фазова швидкість стають уявними і електромагнітні хвилі в плазмі не поширюються. Електромагнітні поля загасають за законом експоненти (без втрат електромагнітної енергії) не за рахунок поглинання енергії ЕМХ у плазмі, а через відсутність умов поширення хвилі у середовищі. При $\omega > \omega_p$, відносна діелектрична проникність плазми більша нуля, фазова стала і фазова швидкість стають дійсними величинами і електромагнітні хвилі в плазмі поширюються. Таким чином, плазмова частота обмежує знизу граничну частоту проникнення електромагнітних хвиль в плазму.

Приклад 5.1. Знайти плазмову частоту для:

- 1) іоносфери Землі ($n = 2 \cdot 10^{11} \text{ ел/м}^3$);
- 2) плазми твердого тіла (чистого антимоніда індія при температурах рідкого азоту ($n = 10^{20} \text{ ел/м}^3$));
- 3) провідників ($n = 2 \cdot 10^{28} \text{ ел/м}^3$).

Розв'язок. За виразом (5.4) при $\epsilon_L = 1$ отримаємо відповідно:

- 1) $f_p = \omega_p / 2\pi = 4 \cdot 10^6 \text{ Гц}$;
- 2) $f_p = \omega_p / 2\pi = 2 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$;
- 3) $f_p = \omega_p / 2\pi = 3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$.

В присутності сталого магнітного поля \mathbf{H}_0 на рух електронів накладається додаткова сила Лоренца $\mathbf{F}_L = \mu_0 e [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]$. В цьому випадку траєкторія руху електронів ускладнюється. Якщо вектор $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{v}$, то $\mathbf{F}_L = 0$ і електрон рухається вздовж лінії зовнішнього магнітного поля, начебто не помічаючи його. Якщо вектор $\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{v}$, то \mathbf{F}_L максимальна і перпендикулярна площині, в якій розташовані вектори \mathbf{H}_0 і \mathbf{v} . Електрон рухається по колу (рис. 5.4) в площині, перпендикулярній лінії зовнішнього магнітного поля з **циклотронною частотою**

$$\omega_H = \mu_0 \frac{|e|}{m_e} H_0 = \mu_0 \gamma H_0, \quad (5.10)$$

де $\gamma = |e|/m_e = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$ – гіромагнітне відношення (відношення заряду електрона до його маси).

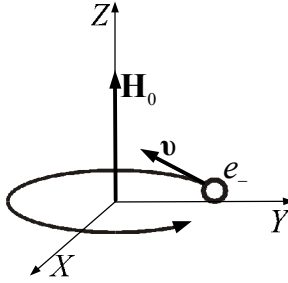


Рис. 5.4

При довільному напрямку вектора швидкості електрона \mathbf{v} відносно \mathbf{H}_0 вектор \mathbf{v} можливо розкласти на два вектори $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$. Складова вектора \mathbf{v}_{\parallel} паралельна полю \mathbf{H}_0 і відповідає за поступальний рух електрона вздовж поля \mathbf{H}_0 , а складова \mathbf{v}_{\perp} перпендикулярна полю \mathbf{H}_0 і відповідає за коловий рух електрона в площині, перпендикулярній полю \mathbf{H}_0 . Таким чином, траєкторія руху електрона має вид гвинтової лінії, вісь якої паралельна полю \mathbf{H}_0 .

5.3. Параметри намагніченої плазми

Рівняння руху електронів під дією змінного електромагнітного поля і сталого магнітного поля можливо записати у вигляді

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m_e \mathbf{v} \mathbf{v}_e = e \mathbf{E} + \mu_0 e [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]. \quad (5.11)$$

Як і в попередньому випадку, для гармонічного електромагнітного поля $\dot{\mathbf{E}}(t) = \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$ вважаємо, що $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$ і $\partial \mathbf{v} / \partial t = j\omega \dot{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$. Із рівняння (5.11) знаходимо складові вектора швидкості в декартовій системі координат при $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{e}_z$:

$$\dot{v}_x = \gamma \frac{(j\omega + \nu_e) \dot{E}_x + \omega_H \dot{E}_y}{[(j\omega + \nu_e)^2 + \omega_H^2]}, \quad \dot{v}_y = \gamma \frac{(j\omega + \nu_e) \dot{E}_y - \omega_H \dot{E}_x}{[(j\omega + \nu_e)^2 + \omega_H^2]}, \quad (5.12)$$

$$\dot{v}_z = \gamma \frac{\dot{E}_z}{(j\omega + \nu_e)}.$$

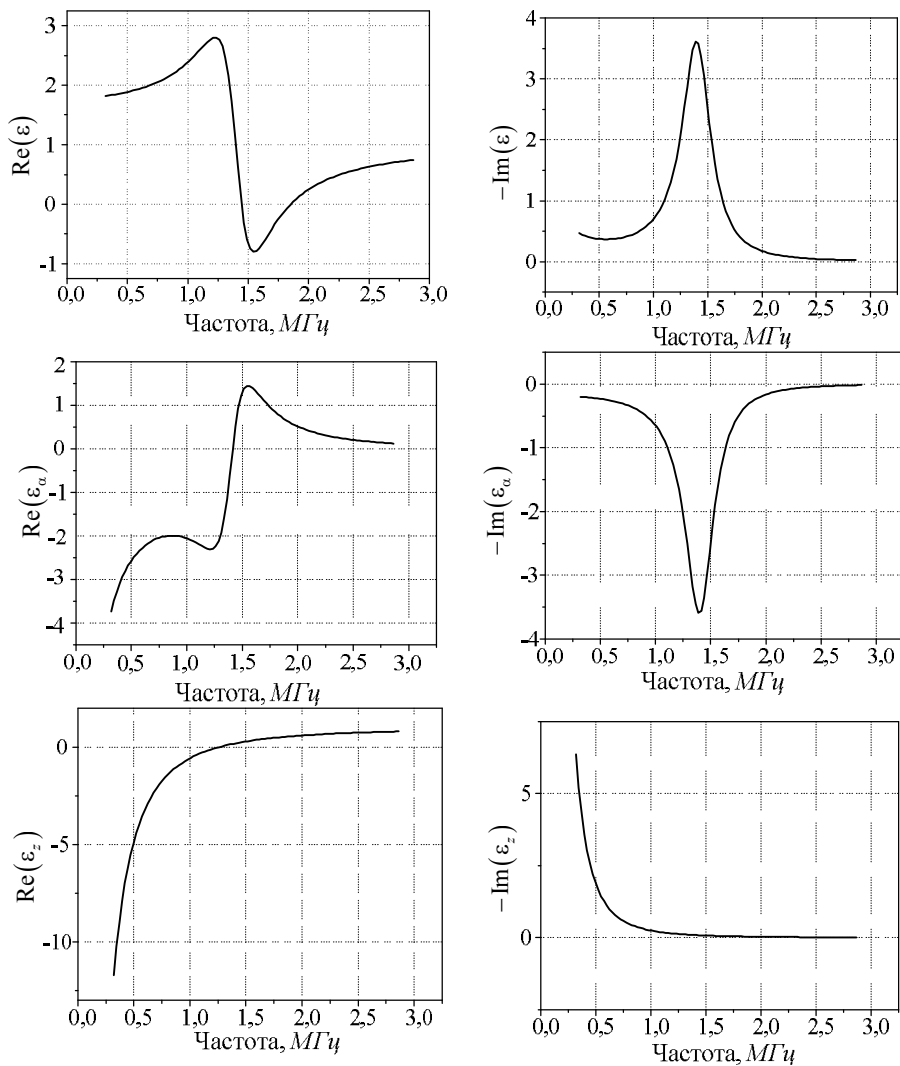


Рис. 5.5

Підставивши значення складових вектора швидкості із виразу (5.12) в рівняння густини струму (5.7), маємо

$$\mathbf{J} = j\omega\epsilon_0\tilde{\epsilon}\mathbf{E}, \quad (5.13)$$

де $\tilde{\epsilon}$ – тензор комплексної відносної діелектричної проникності плазми в присутності сталого магнітного поля,

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_L \begin{vmatrix} \epsilon & -j\epsilon_\alpha & 0 \\ j\epsilon_\alpha & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{vmatrix}. \quad (5.14)$$

Тензор такого виду називають ермітовим, його компоненти:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega - j\nu_e)}{\omega [(\omega - j\nu_e)^2 - \omega_H^2]}, \quad \epsilon_\alpha = \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega [(\omega - j\nu_e)^2 - \omega_H^2]}, \quad (5.15)$$

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu_e)}.$$

На рис. 5.5 як приклад наведені частотні характеристики компонентів тензора діелектричної проникності плазми іоносфери з параметрами $n=2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}$, $\nu_e=10^6 \text{ с}^{-1}$, в присутності магнітного поля Землі $H_0=40 \text{ А/м}$.

Як видно із рисунка, при $\omega=\omega_H$ спостерігається явище **циклотронного резонансу** електронів в присутності магнітного поля Землі. Частота циклотронного резонансу в наших широтах $\sim 1,4 \text{ МГц}$.

5.4. Феромагнетики в магнітному полі

До штучних анізотропних середовищ належать магнітні середовища в присутності зовнішнього магнітного поля.

Вектор намагніченості магнітного середовища складається із суми магнітних моментів атомів \mathbf{m}_i одиниці об'єму середовища

$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i$. Магнітний момент атома (рис.5.6) в свою чергу утворю-

ється як сума орбітального магнітного моменту \mathbf{m}_o за рахунок руху електронів навколо ядра і власного спінового магнітного моменту електрона \mathbf{m}_c . Крім спінового, електрон має механічний момент \mathbf{L} . Ці моменти зв'язані між собою залежністю

$$\mathbf{m}_c = -\gamma \mathbf{L}. \quad (5.16)$$

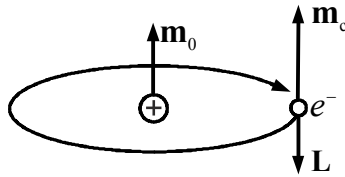


Рис. 5.6

Для більшості магнітних матеріалів спіновий магнітний момент набагато більший орбітального і магнітного моменту ядра. Основний вклад в вектор намагніченості вносить саме спіновий магнітний момент. Магнітні середовища, в яких за рахунок квантової обмінної взаємодії сусідні магнітні моменти виставляються паралельно один одному, називаються **феромагнетиками**. До них належать в першу чергу метали перехідної групи (*Fe, Co, Ni...*) та рідкісноземельної групи (*Sm, Eu, Gd...*).

Магнітні середовища, в яких сусідні магнітні моменти виставляються антипаралельно один одному, називаються **антиферомагнетиками**. Намагніченість антиферомагнетиків дорівнює нулю. Якщо сусідні атоми антиферомагнетика різні і мають різні магнітні моменти, то сумарна намагніченість не дорівнює нулю. Такі некомпенсовані антиферомагнетики називаються феримагнетиками, або феритами. В провідникових феромагнітних матеріалах електромагнітні хвилі поширюються на дуже малу відстань (скін-ефект). Тому в мікрохвильових пристроях, як правило, застосовують магнітні діелектрики. Ферити, які за спеціальною технологією виготовляють із суміші іонів двовалентних металів і окислів заліза, мають магнітні властивості феромагнетика і електричні властивості діелектрика. В діапазоні НВЧ вони мають $\epsilon = 10 \dots 16$, $\text{tg} \delta = 10^{-3} \dots 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-6} \dots 10^{-12} \text{ См/м}$. Намагнічені ферити широко застосовуються в техніці надвисоких частот для створення невзаємних і електрично керованих пристроїв.

5.5. Параметри намагнічених феритів

За відсутності зовнішнього магнітного поля ферит можна уявити як сукупність окремих областей (доменів), намагніченість яких має різну орієнтацію. Під дією зовнішнього магнітного поля \mathbf{H}_0 утворюється однодомenna структура, в якій спінові магнітні моменти орієнтуються за напрямком поля. Наявність механічного моменту призводить до появи сили, перпендикулярної напрямкам \mathbf{m}_c і \mathbf{H}_0 , і

спінова система починає прецесувати подібно до гіроскопа щодо осі \mathbf{H}_0 (рис 5.7).

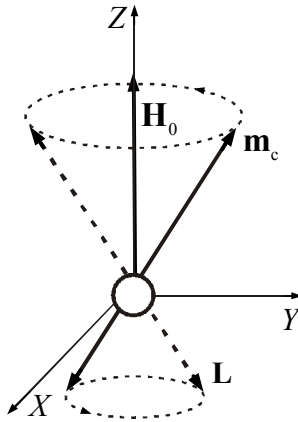


Рис. 5.7

Механічний момент змінюється в часі за законом

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mu_0 [\mathbf{m}_c, \mathbf{H}_0]. \quad (5.17)$$

Підставивши у вираз (5.17) значення \mathbf{L} із (5.16), маємо

$$\frac{d\mathbf{m}_c}{dt} = -\gamma\mu_0 [\mathbf{m}_c, \mathbf{H}_0]. \quad (5.18)$$

Цей вираз справедливий і для усередненої в одиниці об'єму намагніченості $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_{ci}$, де N – число елементарних магнітних диполів в одиниці об'єму магнітного середовища. Із (5.18) отримаємо рівняння для похідної від намагніченості:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma\mu_0 [\mathbf{M}, \mathbf{H}_0]. \quad (5.19)$$

Частота власних коливань вектора намагніченості (**кутова частота прецесії** або **частота феромагнітного резонансу**) залежить від величини магнітного поля $\omega_H = \gamma\mu_0 H_0$. З часом за рахунок тертя власні коливання загасають і всі магнітні моменти виставляються

вздовж поля \mathbf{H}_0 . **Частота релаксації** ν_M залежить від хімічного складу ферита, його структури і температури.

Нехай крім сталого поля \mathbf{H}_0 до ферита прикладено змінне електромагнітне поле з магнітною складовою $\dot{\mathbf{H}}(t) = \dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}$. Тоді вектор намагніченості матиме сталу складову \mathbf{M}_0 , орієнтовану вздовж осі Z , і змінну поперечну складову $\dot{\mathbf{M}}_{\perp}(t) = \dot{\mathbf{M}}_{\perp}e^{j\omega t}$.

Запишемо рівняння (5.19) окремо для поперечних і поздовжніх складових вектора з урахуванням частоти релаксації:

$$\frac{d\mathbf{M}_{\perp}}{dt} = -\gamma\mu_0[\mathbf{M}, \mathbf{H}] - \nu_{M\perp}\mathbf{M}_{\perp}, \quad \frac{dM_z}{dt} = -\nu_{Mz}(M_z - M_0). \quad (5.20)$$

Поперечну та поздовжню частоти релаксації можна наближено виразити через вимірювану ширину лінії феромагнітного резонансу ΔH_0 :

$$\nu_{M\perp} \approx \nu_{Mz} \approx \nu_M \approx \gamma\mu_0\Delta H_0.$$

Рівняння (5.20) нелінійне. Розглянемо випадок, коли сталим магнітним полем ферит намагнічений до насичення. Для гармонічного сигналу $\dot{\mathbf{H}}(t) = \dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}$, амплітуда магнітного поля якого $\dot{\mathbf{H}}$ набагато менша величини сталого магнітного поля \mathbf{H}_0 і $\mathbf{M}_z - \mathbf{M}_0 \approx 0$, рівняння (5.20) лінеаризуємо і запишемо в декартовій системі координат:

$$\begin{aligned} j\omega\dot{M}_x &= \mu_0\gamma(\dot{M}_y H_{0z} - M_{0z}\dot{H}_y) - \nu_M\dot{M}_x, \\ j\omega\dot{M}_y &= \mu_0\gamma(-\dot{M}_x H_{0z} + M_{0z}\dot{H}_x) - \nu_M\dot{M}_y, \\ j\omega\dot{M}_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Введемо величини: $\omega_H = \mu_0\gamma H_0$ – частота прецесії, $\omega_M = \mu_0\gamma M_0$ – **частота намагнічування**. Запишемо рівняння (5.21) у вигляді

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dot{M}_x \\ \dot{M}_y \\ \dot{M}_z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \chi_{xx}^M & -j\chi_{xy}^M & 0 \\ j\chi_{yx}^M & \chi_{yy}^M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

В тензорній формі $\dot{\mathbf{M}} = \tilde{\chi}^M \dot{\mathbf{H}}$, де $\tilde{\chi}^M$ – тензор комплексної магнітної сприйнятливості середовища з компонентами

$$\chi_{xx}^M = \chi_{yy}^M = -\frac{(\omega_H + j\nu_M)\omega_M}{\omega^2 - (\omega_H + j\nu_M)^2}, \chi_{xy}^M = \chi_{yx}^M = \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - (\omega_H + j\nu_M)^2}. \quad (5.23)$$

Знайдемо **тензор комплексної відносної магнітної проникності магнітного середовища** $\tilde{\mu}$ із рівняння, що зв'язує між собою вектори \mathbf{B} і \mathbf{H} в магнітному середовищі:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu_0 (\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{M}}) = \mu_0 (\dot{\mathbf{H}} + \tilde{\chi}^M \dot{\mathbf{H}}) = \mu_0 (\tilde{\epsilon} + \tilde{\chi}^M) \dot{\mathbf{H}} = \mu_0 \tilde{\mu} \dot{\mathbf{H}}, \quad (5.24)$$

де

$$\tilde{\mu} = \tilde{\epsilon} + \tilde{\chi}^M = \begin{vmatrix} \mu & -j\mu_\alpha & 0 \\ j\mu_\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{vmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\mu = 1 - \frac{(\omega_H + j\nu_M)\omega_M}{\omega^2 - (\omega_H + j\nu_M)^2}, \mu_\alpha = \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - (\omega_H + j\nu_M)^2}, \mu_{\parallel} = 1. \quad (5.26)$$

Тензор виду (5.25) часто називають **тензором Полдера**.

На рис. 5.8 наведені розраховані за формулами (5.26) залежності компонент тензора комплексної магнітної проникності від напруженості зовнішнього магнітного поля для фериту з параметрами: $M_0 = 1,4 \cdot 10^5$ А/м, $\Delta H = 8 \cdot 10^3$ А/м.

Для магнітного поля, при якому частота електромагнітного поля збігається з частотою прецесії, спостерігається явище **феромагнітного резонансу**. Уявна частина компонент тензора магнітної проникності має резонансний характер. При резонансі амплітуда прецесії зростає і енергія електромагнітного поля максимально поглинається в магнітному середовищі. Деякі монокристалічні ферити мають дуже малу ширину лінії феромагнітного резонансу ($\Delta H \approx 20$ А/м). На основі таких феритів виготовляють феритові резонатори сферичної форми або в формі еліпсоїда обертання з розмірами, набагато меншими, ніж довжина електромагнітної хвилі дециметрового, сантиметрового та міліметрового діапазонів. Резонатори

мають добротність декілька тисяч і перестроюються зміною зовнішнього магнітного поля в межах декади.

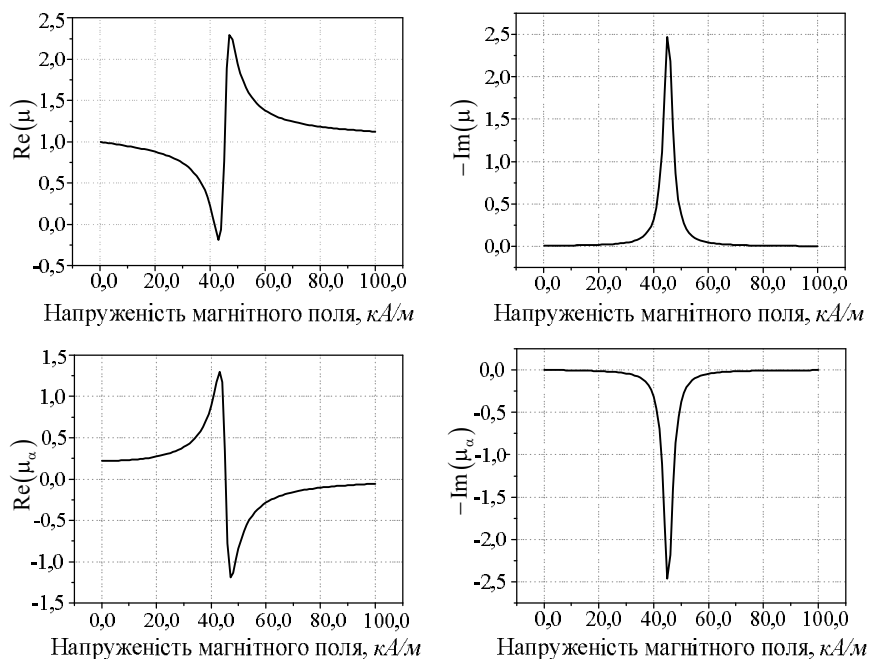


Рис. 5.8

Область застосування феритових резонаторів: одно- та багато-контурні фільтри з магнітним перестроюванням резонансної частоти, свіп-генератори, частотновибіркові вимірювачі потужності в хвилюваннях, амплітудні та фазові модулятори.

5.6. Електромагнітні хвилі в анізотропному середовищі

Розглянемо поширення електромагнітних хвиль в анізотропному середовищі на прикладі анізотропних діелектриків, які мають тензор діелектричної проникності, що зводиться до діагонального виду. Це – монокристали (кварц, сапфір), шаруваті або волокнисті структури (слюда, дерево). Для одного виділеного вздовж осі Z напрямку тензор діелектричної проникності зводиться до виду (5.3). При поширенні плоскої однорідної електромагнітної хвилі в такому діелектрику

вздовж осі Z вектори поля лежать в площині XY і складова тензора діелектричної проникності ε_{\parallel} не впливає на їх значення. Параметри середовища для цього випадку можна вважати скалярними $\varepsilon = \varepsilon_{\perp}$ і поляризація електромагнітної хвилі при поширенні вздовж осі Z не змінюється.

Розглянемо можливість існування в анізотропному діелектрику з тензором діелектричної проникності (5.3) електромагнітних хвиль, що поширюються вздовж осі Y . Запишемо рівняння Максвелла для електромагнітного поля в анізотропному діелектрику

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}}. \quad (5.27)$$

Для пласкої однорідної електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі Y , похідні $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$. Розкладемо рівняння (5.27) з урахуванням тензора (5.3) в декартовій системі координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} \dot{E}_x, \quad 0 = j\omega\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} \dot{E}_y, \quad -\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \dot{E}_z, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_x, \quad 0 = -j\omega\mu_0 \dot{H}_y, \quad -\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_z. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Необхідно знайти поле, що задовольняє рівнянням (5.28) і умовам випромінювання при $Y = \pm\infty$. В рівняннях (5.28) $E_y = 0$ і $H_y = 0$. Отже, вздовж координати Y поширюються **хвилі типу Т** (поперечні ЕМХ). Поля Т-хвиль шукаємо у вигляді прямих хвиль, що поширюються вздовж координати $+Y$:

$$\begin{aligned} \dot{H}_z = \dot{H}_{0z} e^{-jky}, \quad \dot{E}_x = -Z_x \dot{H}_z, \\ \dot{H}_x = \dot{H}_{0x} e^{-jky}, \quad \dot{E}_z = Z_z \dot{H}_x \end{aligned} \quad (5.29)$$

і зворотних хвиль, що поширюються вздовж координати $-Y$:

$$\begin{aligned} \dot{H}_z = \dot{H}_{0z} e^{+jky}, \quad \dot{E}_x = Z_x \dot{H}_z, \\ \dot{H}_x = \dot{H}_{0x} e^{+jky}, \quad \dot{E}_z = -Z_z \dot{H}_x. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Значення k , Z_x , Z_z і співвідношення між амплітудами полів знаходимо із (5.28). Підставляючи (5.29) в (5.28) і виключаючи поля, маємо:

$$k = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} Z_x, \quad k = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} Z_z, \quad (5.31)$$

$$k Z_x = \omega \mu_0, \quad k Z_z = \omega \mu_0. \quad (5.32)$$

Значення Z_x, Z_z із (5.32) підставляємо в (5.31):

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} \mu_0, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \mu_0. \quad (5.33)$$

Із (5.33) знаходимо хвильові числа електромагнітних хвиль:

$$k_{1,2} = \pm k_{\perp} = \pm \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} \mu_0} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp}}, \quad (5.34)$$

$$k_{3,4} = \pm k_{\parallel} = \pm \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \mu_0} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}.$$

Таким чином, в анізотропному середовищі з параметрами, що зводяться до діагонального виду (5.3), можуть поширюватись дві прямі хвилі з хвильовими числами k_{\perp} і k_{\parallel} вздовж координати $+Y$ і дві зворотні хвилі $-k_{\perp}$ і $-k_{\parallel}$ вздовж координати $-Y$. За наявності втрат $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon'_{\perp} - j\varepsilon''_{\perp}$, $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon'_{\parallel} - j\varepsilon''_{\parallel}$, хвильові числа – комплексні величини $k_{\perp} = \beta_{\perp} - j\alpha_{\perp}$, $k_{\parallel} = \beta_{\parallel} - j\alpha_{\parallel}$; тобто ці дві лінійно поляризовані хвилі мають різну фазову швидкість і різні коефіцієнти загасання при поширенні вздовж осі Y .

Приклад 5.1. Відносна діелектрична проникність монокристала сапфіра (Al_2O_3) на частоті 10 ГГц $\varepsilon_{\perp} = 9,3$, $\text{tg } \delta_{\perp} = 4 \cdot 10^{-4}$ і $\varepsilon_{\parallel} = 11,6$, $\text{tg } \delta_{\parallel} = 2 \cdot 10^{-4}$. Знайти сталі поширення для двох взаємно перпендикулярних лінійно поляризованих хвиль.

Розв'язок. При малих втратах $\text{tg } \delta \ll 1$ скористаємось наближеними формулами для сталих поширення:

$$\beta_{\perp} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp}} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{9,3} = 0,639 \text{ рад/м},$$

$$\alpha_{\perp} \approx \beta_{\perp} \cdot \frac{\text{tg } \delta_{\perp}}{2} = 0,639 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-4}}{2} = 1,278 \cdot 10^{-4} \text{ 1/м},$$

$$\beta_{\parallel} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{11,6} = 0,713 \text{ рад/м},$$

$$\alpha_{\parallel} \approx \beta_{\parallel} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_{\parallel}}{2} = 0,713 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2} = 0,713 \cdot 10^{-4} \text{ 1/м.}$$

Розглянемо, як змінюється поляризація сумарної електромагнітної хвилі при поширенні вздовж координати Y . Нехай вектор \mathbf{E} при $Y=0$ має лінійну поляризацію і лежить в площині XZ під кутом θ до осі Z , вектор $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$ (рис. 5.9).

Знайдемо проекції векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} на осі Z і X :

$$\begin{aligned} E_{0x} &= E_0 \cdot \sin \theta, E_{0z} = E_0 \cdot \cos \theta, \\ H_{0x} &= H_0 \cdot \cos \theta, H_{0z} = -H_0 \cdot \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.35)$$

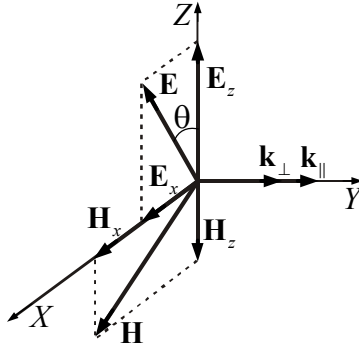


Рис. 5.9

Поля E_x і H_z утворюють електромагнітну хвилю, поляризовану в площині, перпендикулярній осі Z . Хвильове число для неї k_{\perp} . Поля E_z і H_x утворюють електромагнітну хвилю, поляризовану в площині, паралельній осі Z . Хвильове число для неї k_{\parallel} . Знайдемо сумарні поля цих двох хвиль:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}_{0x} e^{-jk_{\perp}y} + \dot{\mathbf{E}}_{0z} e^{-jk_{\parallel}y} = \dot{E}_0 \left(\mathbf{e}_x \sin \theta e^{-jk_{\perp}y} + \mathbf{e}_z \cos \theta e^{-jk_{\parallel}y} \right), \\ \dot{\mathbf{H}} &= \dot{\mathbf{H}}_{0x} e^{-jk_{\perp}y} + \dot{\mathbf{H}}_{0z} e^{-jk_{\parallel}y} = \dot{H}_0 \left(\mathbf{e}_x \cos \theta e^{-jk_{\perp}y} - \mathbf{e}_z \sin \theta e^{-jk_{\parallel}y} \right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

За наявності однакових втрат $\alpha_{\perp} \approx \alpha_{\parallel} \approx \alpha$ із (5.36) маємо:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}} &= \dot{E}_0 e^{-\alpha y} \left(\mathbf{e}_x \sin \theta e^{-j\beta_{\perp} y} + \mathbf{e}_z \cos \theta e^{-j\beta_{\parallel} y} \right), \\ \dot{\mathbf{H}} &= \dot{H}_0 e^{-\alpha y} \left(\mathbf{e}_x \cos \theta e^{-j\beta_{\perp} y} - \mathbf{e}_z \sin \theta e^{-j\beta_{\parallel} y} \right).\end{aligned}\quad (5.37)$$

Із (5.37) видно, що різниця фаз між \mathbf{E}_x і \mathbf{E}_z $\Delta\varphi = y(\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})$ змінюється за координатою Y з періодом $T_y = 2\pi/(\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})$. У всіх точках осі Y електромагнітна хвиля еліптично поляризована, крім тих, де $\Delta\varphi = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Там ЕМХ має лінійну поляризацію. Коефіцієнтом еліптичності є функція кута θ і координати Y . При $\theta = \pi/4$ і $y_n = \pi / [2(\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})] + T_y$ виконується умова $E_x = E_z$, $\Delta\varphi = \pi/2$ і електромагнітна хвиля має колову поляризацію. На цьому ґрунтується робота поляризаторів, які перетворюють лінійно поляризовану хвилю у хвилю з коловою поляризацією і навпаки.

Приклад 5.2. Головні коефіцієнти заломлення для слюди (мусковіт) в оптичному діапазоні на частоті $5 \cdot 10^{14}$ Гц: $n_1 = n_2 = 1,594$ і $n_3 = 1,561$. Знайти товщину слюдяної пластинки, яка перетворює лінійно поляризовану електромагнітну хвилю у хвилю з коловою поляризацією.

Розв'язок. Магнітна проникність слюди $\mu = 1$. Діелектрична проникність слюди при поляризації в площині сколювання шарів слюди $\varepsilon_{\perp} = 1,594^2 = 2,541$, при поляризації в площині, паралельній нормалі до площини сколювання шарів слюди, $\varepsilon_{\parallel} = 1,561^2 = 2,437$. Фазові сталі

$$\beta_{\perp} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{2,541} = 0,531\pi \cdot 10^7 \text{ рад/м},$$

$$\beta_{\parallel} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{2,437} = 0,52\pi \cdot 10^7 \text{ рад/м}.$$

Найменша товщина слюдяної пластинки

$$y_0 = \pi / [2(\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})] = \frac{\pi}{2(0,531\pi \cdot 10^7 - 0,52\pi \cdot 10^7)} = 4,545 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

5.7. Електромагнітні хвилі в гіротропному середовищі

Окремим випадком анізотропного середовища є **гіротропне середовище**, в якому може існувати **ефект повороту площини поляризації**

електромагнітної хвилі (ефект Фарадея). Параметри гіротропного середовища описуються ермітовим тензором діелектричної проникності $\vec{\epsilon}$ (5.14) (**гіроелектричне середовище**), або ермітовим тензором магнітної проникності $\vec{\mu}$ (5.25) (**гіромагнітне середовище**). Середовища, в яких ермітовим є і тензор $\vec{\epsilon}$, і тензор $\vec{\mu}$ (**бі-гіротропне середовище**), в природі і в техніці зустрічаються рідко.

Розглянемо можливість поширення **пласких однорідних електромагнітних хвиль в гіроелектричному середовищі**, діелектрична проникність якого описується тензором (5.14), а магнітна $\mu=1$. Це – газова плазма, або плазма твердого тіла в присутності зовнішнього сталого магнітного поля \mathbf{H}_0 .

Розглянемо випадок, коли хвильовий вектор \mathbf{k} спрямований вздовж поля \mathbf{H}_0 і координати Z . Похідні за координатами для однорідної хвилі $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$. Рівняння Максвелла розкладемо в декартовій системі координат з урахуванням (5.14):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon_0(\epsilon \dot{E}_x - j\epsilon_\alpha \dot{E}_y), \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} &= j\omega\epsilon_0(j\epsilon_\alpha \dot{E}_x + \epsilon \dot{E}_y), \\ 0 &= j\omega\epsilon_0\epsilon_{\parallel} \dot{E}_z, \quad -\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} &= -j\omega\mu_0 \dot{H}_y, \quad 0 = -j\omega\mu_0 \dot{H}_z. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Необхідно знайти поле, яке задовольняє рівнянням (5.38) і умовам випромінювання при $Z=\pm\infty$. В рівняннях (5.38) $E_z=0$ і $H_z=0$. Отже, вздовж координати Z поширюються хвилі типу Т. Поля Т-хвиль шукаємо у вигляді прямих хвиль, що поширюються вздовж координати $+Z$:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_{0x} e^{-jkz}, & \dot{H}_y &= Z_x^{-1} \dot{E}_x, \\ \dot{E}_y &= \dot{E}_{0y} e^{-jkz}, & \dot{H}_x &= -Z_y^{-1} \dot{E}_y, \end{aligned} \tag{5.39}$$

і зворотних хвиль, що поширюються вздовж координати $-Z$:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= \dot{E}_{0x} e^{+jkz}, & \dot{H}_y &= -Z_x^{-1} \dot{E}_x, \\ \dot{E}_y &= \dot{E}_{0y} e^{+jkz}, & \dot{H}_x &= Z_y^{-1} \dot{E}_y.\end{aligned}\quad (5.40)$$

Значення k , Z_x , Z_y і співвідношення між амплітудами полів знаходимо із (5.38). Підставляючи (5.39) в (5.38), маємо:

$$kZ_x^{-1} \dot{E}_{0x} = \omega \varepsilon_0 (\varepsilon \dot{E}_{0x} + j \varepsilon_\alpha \dot{E}_{0y}), \quad (5.41)$$

$$kZ_y^{-1} \dot{E}_{0y} = \omega \varepsilon_0 (j \varepsilon_\alpha \dot{E}_{0x} + \varepsilon \dot{E}_{0y}).$$

$$\dot{k} = \omega \mu_0 Z_y^{-1}, \quad \dot{k} = \omega \mu_0 Z_x^{-1}. \quad (5.42)$$

Підставляємо в (5.41) значення Z_x , Z_y із (5.42):

$$\begin{aligned}(k^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0) \dot{E}_{0x} + j \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha \mu_0 \dot{E}_{0y} &= 0 \\ -j \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha \mu_0 \dot{E}_{0x} + (k^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0) \dot{E}_{0y} &= 0\end{aligned}\quad (5.43)$$

Система рівнянь (5.43) має розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} (k^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0) & j \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha \mu_0 \\ -j \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha \mu_0 & (k^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0) \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $(k^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0)^2 = (\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha \mu_0)^2$. Знаходимо корені рівняння.

Добувши корінь квадратний $(k^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0) = \pm (\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha \mu_0)$, маємо

$$k_{1,2}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon \pm \varepsilon_\alpha), \quad \text{звідки } k_{1,2,3,4} = \pm \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon \pm \varepsilon_\alpha)}.$$

Таким чином, маємо чотири корені, які відповідають двом прямим хвилям, що поширюються вздовж осі $+Z$, і двом зворотним хвилям, що поширюються вздовж осі $-Z$. Для прямих хвиль хвильові числа

$$k_{1,2} = k_{\mp} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon \pm \varepsilon_\alpha)} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{\mp}}.$$

$$\text{числа } k_{3,4} = -k_{\mp} = -\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon \pm \varepsilon_\alpha)} = -\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{\mp}}.$$

Проаналізуємо ці хвилі. Підставивши k_{\mp} в рівняння (5.43), отримаємо $\dot{E}_{0y} = \pm j\dot{E}_{0x}$, і, з врахуванням (5.40), $\dot{H}_{0y} = \pm j\dot{H}_{0x}$. Тобто прямі і зворотні хвилі існують у вигляді суперпозиції ліво- і правополяризованих електромагнітних хвиль з коловими поляризаціями. Хвиля з правою коловою поляризацією $\dot{E}^+ = \dot{E}_x + j\dot{E}_y$ обертається в тому напрямку, що і електрони в магнітному полі. Хвиля з лівою коловою поляризацією $\dot{E}^- = \dot{E}_x - j\dot{E}_y$ обертається в напрямку, протилежному напрямку обертання електронів у магнітному полі.

Параметри середовища для хвиль з коловою поляризацією характеризуються діелектричними проникностями $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \mp \varepsilon_a$:

$$\varepsilon_+ = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu_e - \omega_H)} = \varepsilon'_+ - j\varepsilon''_+, \quad (5.44)$$

$$\varepsilon_- = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu_e + \omega_H)} = \varepsilon'_- - j\varepsilon''_-. \quad (5.45)$$

Розглянемо залежності діелектричної проникності від $\omega, \omega_p, \omega_H$. Для з'ясування фізичних явищ, які виникають в процесі поширення електромагнітних хвиль, порівняємо в рівняннях (5.44) і (5.45) частоту релаксації нулю і запишемо їх у наступному вигляді:

$$\varepsilon_+ = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega_H}{\omega}}, \quad (5.46) \quad \varepsilon_- = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega_H}{\omega}}. \quad (5.47)$$

За відсутності магнітного поля $\omega_H = 0$ і рівняння (5.44) і (5.45) збігаються з (5.9), тобто середовище ізотропне.

В цьому випадку $\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \varepsilon = 0$ при $\omega_p^2 / \omega^2 = 1$ (рис. 5.3). При малих магнітних полях, коли $\omega_H / \omega < 1$, $\varepsilon_+ = 0$ при $\omega_p^2 / \omega^2 = 1 - \omega_H / \omega$, а $\varepsilon_- = 0$ при $\omega_p^2 / \omega^2 = 1 + \omega_H / \omega$ (рис. 5.10, а). При магнітних полях, коли

$\omega_H/\omega > 1$, $\varepsilon_+ > 0$ при будь-яких значеннях ω_p^2/ω^2 , а $\varepsilon_- = 0$ при $\omega_p^2/\omega^2 = 1 + \omega_H/\omega$ (рис. 5.10, б).

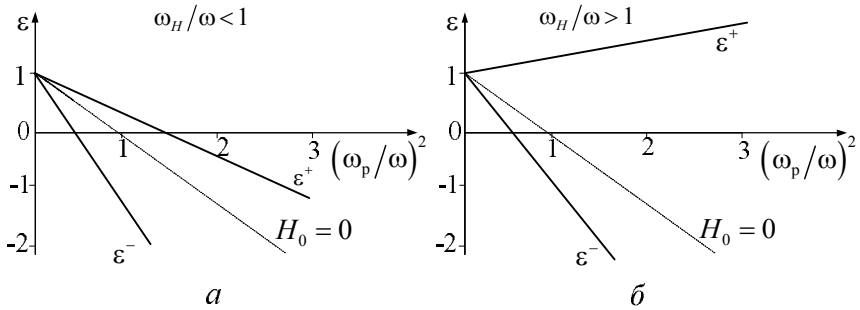


Рис. 5.10

Таким чином, в присутності магнітного поля, коли $\omega_H/\omega > 1$, в плазмі вздовж магнітних силових ліній можуть поширюватись правополяризовані електромагнітні хвилі навіть на дуже низьких частотах, менших, ніж плазмова частота. Такі хвилі носять назву **геліконових хвиль**. У природних умовах **поширення геліконових хвиль крізь іоносферу вздовж векторних ліній магнітного поля Землі призводить до появи характерної завади приймання сигналів в діапазоні довгих хвиль у вигляді свисту**, що змінює свою тональність. Такі завади дістали назву «**свистячі атмосферіки**». На основі геліконових хвиль у напівпровідниках з великою рухомістю електронів провідності можлива реалізація невзаємних пасивних малогабаритних пристроїв (вентилів, циркуляторів) у метровому і декаметровому діапазонах хвиль. Малі габаритні розміри зумовлені високим значенням відносної ефективної діелектричної проникності напівпровідників ($\varepsilon_{\text{эф}} = 10^8 \dots 10^9$).

В області частот, коли $\varepsilon_+ > 0$ і $\varepsilon_- > 0$, поширюються право- і лівополяризовані хвилі які мають різні хвильові числа $k_+ = \omega\sqrt{\varepsilon_+}/c = \beta_+ - j\alpha_+$, $k_- = \omega\sqrt{\varepsilon_-}/c = \beta_- - j\alpha_-$, різні фазові швидкості $v_{\phi}^+ = \omega/\beta_+$, $v_{\phi}^- = \omega/\beta_-$ і різні характеристичні опори середовища $Z_+ = 120\pi/\sqrt{\varepsilon_+}$, $Z_- = 120\pi/\sqrt{\varepsilon_-}$. Якщо при $Z=0$ поля мали лінійну поляризацію, то при поширенні вздовж координати Z

хвиля розпадається на дві хвилі з правою і лівою коловими поляризаціями. За рахунок різних фазових швидкостей між ними з'являється різниця фаз $\Delta\varphi = (\beta_- - \beta_+)z$. За відсутності втрат $\alpha_+ = \alpha_- = 0$ сумарне поле має лінійну поляризацію, повернену за годинниковою стрілкою на кут $\theta = \Delta\varphi/2 = 0,5(\beta_- - \beta_+)z$. Ефект повороту площини поляризації в гіроелектричному середовищі показаний на рис. 5.11.

З урахуванням втрат $\alpha_+ \neq \alpha_-$ сумарні поля матимуть еліптичну поляризацію, але осі еліпсів поляризації при поширенні хвиль повертаються на кут θ . **Явище повороту площини поляризації при поширенні лінійно поляризованої хвилі вздовж зовнішнього магнітного поля називають ефектом Фарадея.** Середовища, де існує ефект Фарадея, називають гіротропними. **Величина $\theta_0 = 0,5(\beta_- - \beta_+)$ є сталою Фарадея.** Вона залежить від властивостей плазми, частоти і величини зовнішнього магнітного поля. **Зворотна лінійно поляризована хвиля, яка поширюється в напрямку, протилежному напрямку зовнішнього магнітного поля, теж повертає площину поляризації за годинниковою стрілкою, якщо дивитись вздовж напрямку зовнішнього магнітного поля.** Наприклад, пряма хвиля з вертикальною поляризацією повернула площину поляризації на 45° і відбивається від провідника. Зворотна хвиля повертає площину поляризації ще на 45° і матиме на вході горизонтальну поляризацію. Таким чином, **поширення електромагнітних хвиль в гіротропному середовищі не відповідає принципу взаємності.**

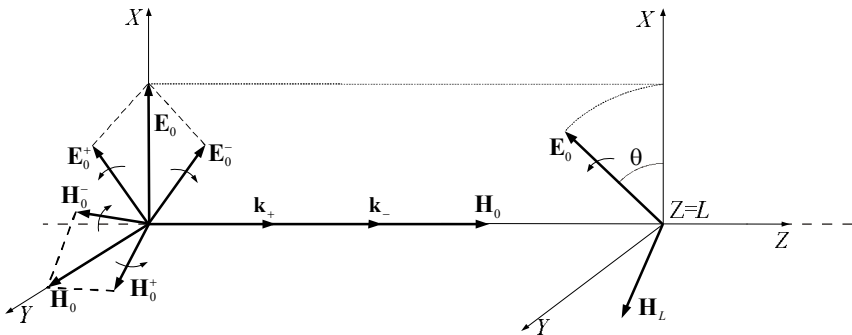


Рис. 5.11

Далі розглянемо випадок, коли хвильовий вектор $\mathbf{k}=\mathbf{e}_y k$ спрямований перпендикулярно зовнішньому магнітному полю $\mathbf{H}_0=\mathbf{e}_z H_0$. Параметри плазми однорідні в площині XZ . Похідні за координатами для однорідної хвилі $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$. Рівняння Максвелла розкладемо в декартовій системі координат з урахуванням (5.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_0(\varepsilon\dot{E}_x - j\varepsilon_\alpha\dot{E}_y), \quad 0 = j\omega\varepsilon_0(j\varepsilon_\alpha\dot{E}_x + \varepsilon\dot{E}_y), \\ -\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel}\dot{E}_z, \quad \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = -j\omega\mu_0\dot{H}_x, \\ 0 &= -j\omega\mu_0\dot{H}_y, \quad -\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0\dot{H}_z. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Необхідно знайти електромагнітне поле, яке задовольняє рівнянням (5.48) і умовам випромінювання при $Y=\pm\infty$. Рівняння (5.48) можна розкласти на дві незалежні системи:

$$-\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel}\dot{E}_z, \quad \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = -j\omega\mu_0\dot{H}_x, \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0(\varepsilon\dot{E}_x - j\varepsilon_\alpha\dot{E}_y), \quad -\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0\dot{H}_z \quad (5.50)$$

$$0 = j\omega\varepsilon_0(j\varepsilon_\alpha\dot{E}_x + \varepsilon\dot{E}_y).$$

Поздовжня відносно напрямку поширення складова $H_y=0$. Перша система рівнянь (5.49), в якій $H_y=0$, і $E_y=0$, визначає «звичайну» поперечну хвилю типу Т (рис. 5.12).

Друга система рівнянь (5.50) має $E_y \neq 0$ і визначає хвилю типу Е, яку називають «незвичайною» (рис. 5.13).

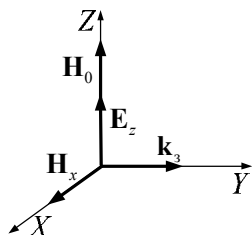


Рис. 5.12

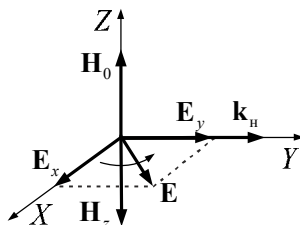


Рис. 5.13

Поля Т-хвиль шукаємо в вигляді прямих хвиль, що поширюються вздовж координати $+Y$:

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{0z} e^{-jky}, \quad \dot{H}_x = Z_z^{-1} \dot{E}_z, \quad (5.51)$$

і зворотних хвиль, що поширюються вздовж координати $-Y$:

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{0z} e^{+jky}, \quad \dot{H}_x = -Z_z^{-1} \dot{E}_z. \quad (5.52)$$

Значення k , Z_z і співвідношення між амплітудами полів знаходимо із (5.49). Підставляючи (5.51) в (5.49), маємо:

$$kZ_z^{-1} = \omega \epsilon_0 \epsilon_{\parallel}, \quad k = \omega \mu_0 Z_z^{-1}. \quad (5.53)$$

Із (5.53) знаходимо сталу поширення «звичайної» хвилі $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{\parallel} \mu_0}$ і характеристичний опір $Z_z = \omega \mu_0 / k = \sqrt{\mu_0 / (\epsilon_0 \epsilon_{\parallel})}$. Таким чином, система рівнянь (5.49) визначає звичайну пласку лінійно поляризовану Т-хвилю, що поширюється за відсутності втрат з фазовою швидкістю $v_{\phi} = c / \sqrt{\epsilon_{\parallel}}$.

Характеристики «звичайної» хвилі не залежать від прикладеного зовнішнього сталого магнітного поля. Зворотна хвиля має такі самі характеристики.

Поля «незвичайної» Е-хвилі шукаємо у вигляді прямих хвиль, що поширюються вздовж координати $+Y$:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{0x} e^{-jky}, \dot{E}_y = \dot{E}_{0y} e^{-jky}, \dot{H}_z = -Z_x^{-1} \dot{E}_x. \quad (5.54)$$

і зворотних хвиль, що поширюються вздовж координати $-Y$

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{0x} e^{+jky}, \dot{E}_y = \dot{E}_{0y} e^{+jky}, \dot{H}_z = Z_x^{-1} \dot{E}_x. \quad (5.55)$$

Значення k , Z_x і співвідношення між амплітудами полів знаходимо із (5.50). Підставляючи (5.54) в (5.50), отримаємо:

$$\begin{aligned} jkZ_x^{-1} \dot{E}_{0x} &= j\omega \epsilon_0 \epsilon \dot{E}_{0x} + \omega \epsilon_0 \epsilon_{\alpha} \dot{E}_{0y}, \\ 0 &= -\epsilon_{\alpha} \dot{E}_{0x} + j\epsilon \dot{E}_{0y}, \\ k &= \omega \mu_0 Z_x^{-1}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Виключаючи складові електричного поля із системи (5.56), знайдемо хвильове число для “незвичайної” хвилі

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_\alpha^2}{\varepsilon}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_\alpha^2}{\varepsilon}}. \quad (5.57)$$

і характеристичний опір середовища для «незвичайної» хвилі

$$Z = Z_x = \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{\varepsilon_0 (\varepsilon^2 - \varepsilon_\alpha^2)}}. \quad (5.58)$$

Поздовжня і поперечна складові вектора \mathbf{E} зсунуті за фазою на $\pi/2$, тобто вектор \mathbf{E} має еліптичну поляризацію, а вектор \mathbf{H} – лінійну. Тому ця хвиля і називається «незвичайною». Відносна ефективна діелектрична проникність для «незвичайної» хвилі

$$\varepsilon_{\text{еф}} = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_\alpha^2}{\varepsilon}. \quad (5.59)$$

Підставивши в (5.59) значення ε і ε_α із (5.15) і прирівнявши частоту релаксації нулю, отримаємо

$$\varepsilon_{\text{незв}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega_H^2 / \omega^2}{1 - \omega_p^2 / \omega^2}}. \quad (5.60)$$

Відносна діелектрична проникність звичайної хвилі дорівнює ε_{\parallel} і з рівняння (5.15) при $v_e = 0$

$$\varepsilon_{\text{зв}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (5.61)$$

На рис. 5.14 представлені залежності відносних діелектричних проникностей звичайної і незвичайної хвиль від відношення ω_p^2 / ω^2 .

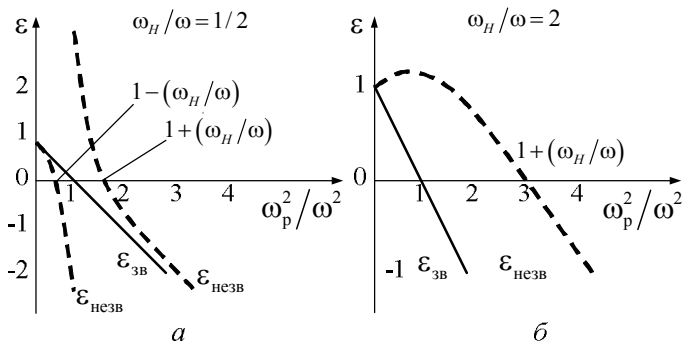


Рис. 5.14

Відносна діелектрична проникність звичайної хвилі дорівнює нулю при $\omega_p^2/\omega^2 = 1$. Відносна діелектрична проникність незвичайної хвилі дорівнює нулю при двох значеннях ω_p^2/ω^2 , якщо $\omega_H/\omega < 1$ (рис. 5.14, а),

з рівняння (5.60) видно, що при $\epsilon_{\text{нез}}=0$ $\frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2$, звідки

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 \pm \frac{\omega_H}{\omega}. \quad (5.62)$$

Складові звичайних і незвичайних хвиль мають при поширенні різне поглинання і поширюються з різними фазовими швидкостями.

Отже, при нормальному падінні на намагнічене перпендикулярно напрямку поширення гіроелектричне середовище лінійно поляризована електромагнітна хвиля з довільним напрямком вектора \mathbf{E} відносно вектора зовнішнього магнітного поля \mathbf{H}_0 розкладається на дві хвилі: «звичайну» і «незвичайну», які поширюються з різними фазовими швидкостями. На виході з гіроелектричного середовища ці хвилі мають різні фази і сумарне поле матиме еліптичну поляризацію. При похилому падінні на межу поділу звичайного і гіроелектричного середовища «звичайна» і «незвичайна» хвилі мають різні коефіцієнти і кути заломлення (рис. 5.15). Цей ефект подвійного променезаломлення називають ефектом Коттона – Мутона, або ефектом Фохта.

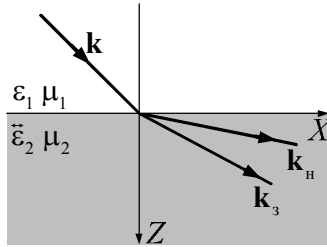


Рис. 5.15

Аналогічні ефекти: **поворот площини поляризації (ефект Фарадея) та подвійне променезаломлення (ефект Коттона – Мутона), спостерігаються і при поширенні електромагнітних хвиль в гіромагнітному середовищі.** Тензор магнітної проникності (5.25) гіромагнітного середовища (намагнічений до насичення ферит) ідентичний тензору діелектричної проникності (5.14) гіроелектричного середовища. Тому ми можемо знайти електромагнітні поля в гіромагнітному середовищі, використовуючи принцип переставної двоїстості рівнянь Максвелла (див. п. 2.5.2) для анізотропних середовищ.

Для гіроелектричного середовища

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_0 \mu \dot{\mathbf{H}}. \quad (5.63)$$

Для гіромагнітного середовища

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon \dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_0 \tilde{\mu} \dot{\mathbf{H}} \quad (5.64)$$

Рівняння (5.63) переходять в рівняння (5.64) при заміні $\dot{\mathbf{H}} \rightarrow \dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{E}} \rightarrow -\dot{\mathbf{H}}$, $\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \rightarrow \mu_0 \tilde{\mu}$, $\mu_0 \mu \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$.

Використовуючи принцип переставної двоїстості рівнянь Максвелла для гіротропних середовищ, знайдемо, що в гіромагнітному середовищі при поширенні вздовж напрямку зовнішнього магнітного поля прями і зворотні хвилі існують у вигляді суперпозиції електромагнітних хвиль з коловими поляризаціями. Хвиля з правою коловою поляризацією обертається в тому ж напрямку, що і вектор намагніченості електронів в магнітному полі. Хвиля з лівою коловою поляризацією обертається в напрямку, протилежному напрямку обертання вектора намагніченості електронів в магнітному полі.

Хвилі з коловою поляризацією характеризуються магнітними проникностями $\mu_{\pm} = \mu \mp \mu_{\alpha}$:

$$\mu_{+} = 1 - \frac{\omega_M}{\omega - (\omega_H + j\nu_m)}, \quad (5.65)$$

$$\mu_{-} = 1 + \frac{\omega_M}{\omega + (\omega_H + j\nu_m)}. \quad (5.66)$$

Діелектрична проникність для феритів скалярна і лежить в межах $\epsilon = 10 \dots 16$.

На рис. 5.16 наведені залежності магнітної проникності для право- (рис. 5.16, *a*) і лівополяризованих (рис. 5.16, *б*) хвиль від магнітного поля для ферита з параметрами $M=10^4 \text{ А/м}$, $\Delta H=2 \cdot 10^3 \text{ А/м}$ на частоті $f=1,6 \cdot 10^9 \text{ Гц}$.

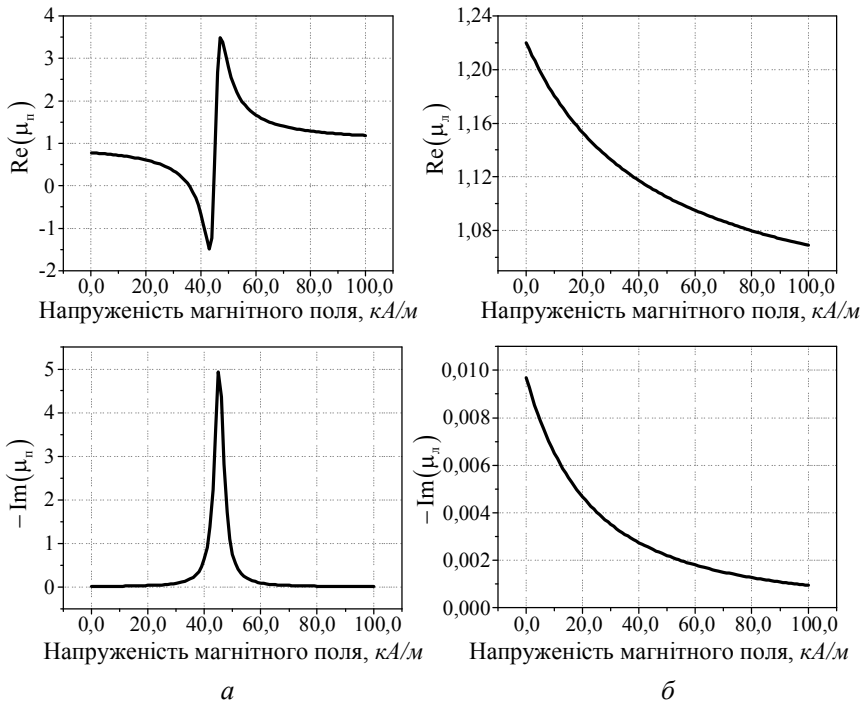


Рис. 5.16

Хвилі з коловою поляризацією мають різні хвильові числа $k_+ = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_+}/c = \beta_+ - j\alpha_+$, $k_- = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_-}/c = \beta_- - j\alpha_-$, різні фазові швидкості $v_{\phi}^+ = \omega/\beta_+$, $v_{\phi}^- = \omega/\beta_-$ і різний характеристичний опір середовища $Z_+ = 120\pi\sqrt{\mu_+/\varepsilon}$, $Z_- = 120\pi\sqrt{\mu_-/\varepsilon}$. Кут повороту площини поляризації лінійно поляризованої електромагнітної хвилі при поширенні в гіромагнітному середовищі вздовж напрямку зовнішнього магнітного поля (**поздовжнє підмагнічування фериту**) обчислюється за формулою $\theta = \Delta\varphi/2 = 0,5(\beta_- - \beta_+)z$.

Приклад 5.3. Ферит з параметрами $\varepsilon=13$, $M_0=1,4 \cdot 10^5$ А/м, $\Delta H=5,6 \cdot 10^3$ А/м на частоті $f=10^{10}$ Гц при напруженості магнітного поля $H_0=10^5$ А/м має компоненти тензора магнітної проникності для право- і лівополяризованих електромагнітних хвиль $\mu_+=0,24-j0,023$ і $\mu_-=1,36-j0,0053$. Знайти кут повороту площини поляризації лінійно поляризованої електромагнітної хвилі при поширенні на відстань $z=10^{-2}$ м і коефіцієнт еліптичності на цій відстані.

Розв'язок. Знаходимо хвильові числа для право- і лівополяризованих електромагнітних хвиль

$$k_+ = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_+}/c = \frac{2\pi \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{13 \cdot (0,24 - j0,023)}}{3 \cdot 10^8} =$$

$$370,53 - j17,8 = \beta_+ - j\alpha_+$$

$$k_- = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_-}/c = \frac{2\pi \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{13 \cdot (1,36 - j0,0053)}}{3 \cdot 10^8} =$$

$$882,07 - j1,72 = \beta_- - j\alpha_-$$

Кут повороту площини поляризації (еліпса поляризації)

$$\theta = 0,5(\beta_- - \beta_+)z = 0,5 \cdot (882,07 - 370,53) \cdot 10^{-2} = 2,56 \text{ рад}.$$

Коефіцієнт еліптичності (відношення малої осі еліпса поляризації до великої) на відстані $z=10^{-2}$ м знаходимо як відношення різниці амплітуд лівої і правополяризованих електромагнітних хвиль на цій відстані до їх суми.

$$K.E. = \frac{e^{-a_+ \cdot z} - e^{-a_- \cdot z}}{e^{-a_+ \cdot z} + e^{-a_- \cdot z}} = \frac{e^{-1,72 \cdot 10^{-2}} - e^{-17,8 \cdot 10^{-2}}}{e^{-1,72 \cdot 10^{-2}} + e^{-17,8 \cdot 10^{-2}}} = 0,08.$$

На рис. 5.17 наведені частотні характеристики дійсної і уявної частини хвильового числа правополяризованих (рис. 5.17, а) і лівополяризованих (рис. 5.17, б) хвиль для феритового середовища з

параметрами $M=1,4 \cdot 10^5 \text{ A/m}$, $\Delta H=10^3 \text{ A/m}$, $H_0=1,4 \cdot 10^5 \text{ A/m}$. Для цього випадку $\omega_H=\omega_M=3 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$.

Із рисунка видно, що хвиля з лівою коловою поляризацією поширюється у всьому діапазоні частот майже без дисперсії і з малими магнітними втратами. Хвиля з правою коловою поляризацією поширюється як електромагнітна при $\omega > \omega_H + \omega_M$.

В другій області поширення на частотах $\omega < \omega_H$ хвиля існує у вигляді магнітостатичної або спінової хвилі, яка поширюється з дуже малою фазовою швидкістю. Фізично спінова хвиля є збудженням коливань в системі спінових магнітних моментів, зв'язаних між собою силами обмінної взаємодії. На основі використання спінових хвиль будують пристрої для обробки сигналів, наприклад лінії затримки сигналів.

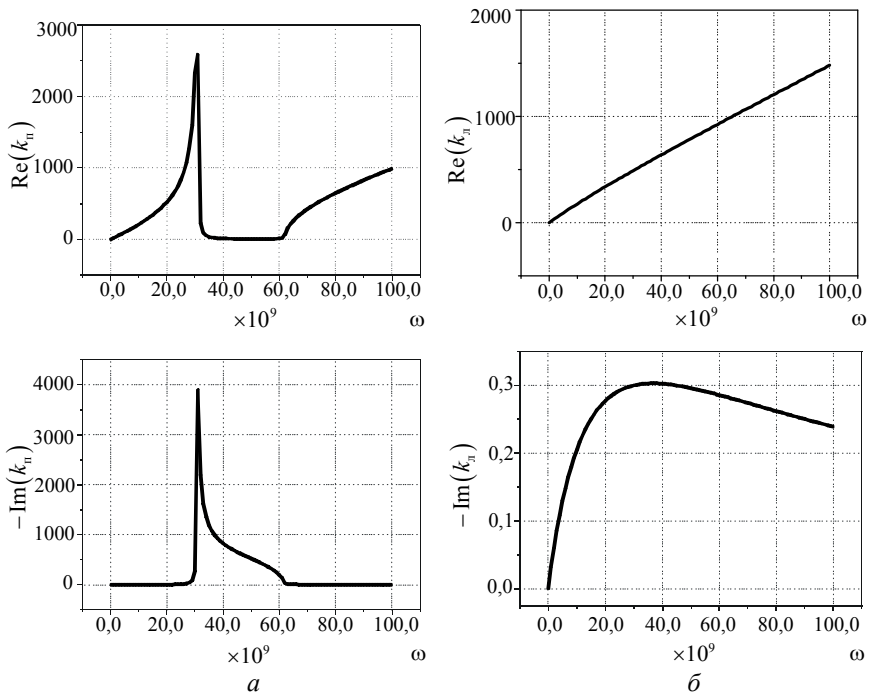


Рис. 5.17

Ефект повороту площини поляризації в гіромагнітному середовищі (ефект Фарадея) має такі самі властивості, як і в гіроелектричному: величина кута повороту пропорційна величині зовнішнього магнітного поля, напрямком повороту залежить від напрямку зовнішнього магнітного поля і не залежить від напрямку поширення електромагнітної хвилі. На цьому ефекті будують електрично керовані пристрої НВЧ (перемикачі каналів, модулятори, фазозсувачі, атенуатори....) і невзаємні пасивні пристрої НВЧ (гіратори, вентиля, циркулятори....).

Електромагнітні хвилі, які поширюються в напрямку, перпендикулярному до напрямку зовнішнього магнітного поля (поперечне підмагнічування фериту), можуть існувати у вигляді суперпозиції звичайної поперечної хвилі типу Т ($\mathbf{H} \parallel \mathbf{H}_0$) (рис. 5.18) і «незвичайної» хвилі ($\mathbf{H} \perp \mathbf{H}_0$) типу Н, яка крім поперечних компонент має поздовжню компоненту магнітного поля (рис. 5.19).

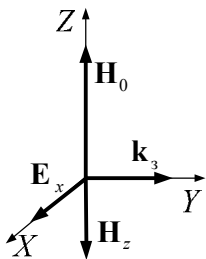


Рис. 5.18

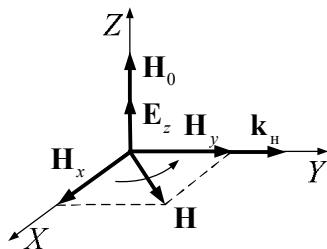


Рис. 5.19

Хвиля типу Т має поперечні складові векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} , магнітну проникність $\mu=1$, хвильове число $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon\mu_0}$, характеристичний опір середовища $Z_c = \omega\mu_0/k = \sqrt{\mu_0/(\epsilon_0\epsilon)}$ і поширюється за відсутності втрат з фазовою швидкістю $v_\phi = c/\sqrt{\epsilon}$. Характеристики хвилі не залежать від прикладеного зовнішнього магнітного поля.

В «незвичайній» хвилі поздовжня і поперечна складові вектора \mathbf{H} зсунуті за фазою на $\pi/2$, тобто вектор \mathbf{H} має еліптичну поляризацію, а вектор \mathbf{E} – лінійну. Відносна ефективна магнітна проникність для «незвичайної» хвилі

$$\mu_{\text{эф}} = \frac{\mu^2 - \mu_\alpha^2}{\mu}. \quad (5.67)$$

«Незвичайна» хвиля має хвильове число

$$k_{\text{н}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \frac{\mu^2 - \mu_\alpha^2}{\mu}}, \quad (5.68)$$

характеристичний опір середовища

$$Z = Z_x = \sqrt{\frac{\mu_0(\mu^2 - \mu_\alpha^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon}} \quad (5.69)$$

При нормальному падінні на намагнічене перпендикулярно напрямку поширення гіромагнітне середовище лінійно поляризована електромагнітна хвиля з довільним напрямком вектора \mathbf{H} відносно вектора зовнішнього магнітного поля розпадається на дві хвилі: «звичайну» і «незвичайну», які поширюються з різними фазовими швидкостями. На виході з гіромагнітного середовища ці хвилі мають різні фази, і сумарне поле матиме еліптичну поляризацію. При похилому падінні на межу поділу ізотропного і гіромагнітного середовищ: «звичайна» і «незвичайна» хвилі мають різні коефіцієнти і кути заломлення (рис. 5.15). Поперечно підмагнічені пластини феритів застосовуються в електрично керованих та невзаємних пасивних пристроях УВЧ, НВЧ та ВВЧ діапазонів частот (фазозсувачі, вентиля, циркулятори).

5.8. Бі-ізотропні та бі-анізотропні середовища

Ефект повороту площини поляризації спостерігається також в деяких середовищах і за відсутності зовнішнього магнітного поля (**оптично активні середовища**). Прикладом застосування цього ефекту може служити визначення концентрації розчину цукру у воді. На відміну від ефекту Фарадея в магнітно гіротропному середовищі **ефект повороту площини поляризації в оптично активному середовищі є взаємним**. Для пояснення оптичної активності необхідно враховувати взаємодію електричних і магнітних моментів молекул в електромагнітному полі. Наслідком такої взаємодії є те, що вектори електричної і магнітної індукції одночасно залежать від векторів електричного і магнітного поля. Такі середовища називають **бі-ізотропними**.

В мікрохвильовому діапазоні **бі-ізотропним** є **штучний діелектрик з малими порівняно з довжиною хвилі кіральними частинками, хаотично вкрапленими в ізотропний діелектрик**. Назва об'єкта кіральний (або хіральний) походить від грецького слова рука і означає властивість об'єкта не збігатися зі своїм дзеркальним відбиттям за будь-яких переміщень і поворотів. Згідно з цим визначенням кіральність (chirality) – це геометрична властивість тривимірних об'єктів. Кіральними є руки (права і ліва), гвинти та спіральки (праві та ліві) та інші об'єкти (рис. 5.20 (+ праві, – ліві)).

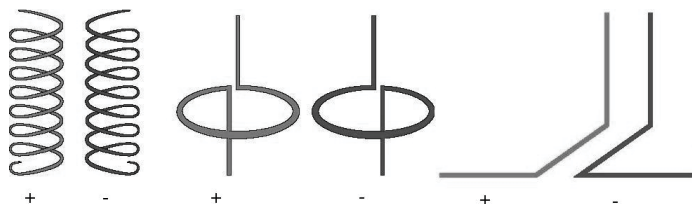


Рис. 5.20

Розглянемо параметри кірального середовища на базі спіралей. Для звичайного ізотропного або анізотропного середовища дипольний електричний момент \mathbf{p} і відповідно вектор поляризації \mathbf{P} залежать виключно від електричного поля \mathbf{E} , а магнітний момент \mathbf{m} і відповідно вектор намагніченості \mathbf{M} залежать виключно від магнітного поля \mathbf{H} . Для спірального кірального елемента при похилій щодо осі спіралі поляризації падаючої електромагнітної хвилі (рис. 5.21) поздовжня складова дипольного електричного моменту утворюється як поздовжньою складовою електричного поля, так і поздовжньою складовою магнітного поля (струм витка має поздовжню складову).

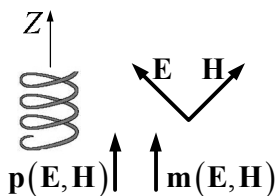


Рис. 5.21

Аналогічно поздовжня складова магнітного дипольного моменту спіралі утворюється кільцевим електричним струмом, створюваним пронизуючим спіраль магнітним полем, до якого додається кільцевий струм, що створюється електричним полем, тому що струм уздовж осі спіралі може проходити тільки по кільцях спіралі.

При хаотичному розміщенні кіральних частинок в ізотропному середовищі з відносними діелектричною та магнітною проникностями ϵ_c, μ_c отримаємо бі-ізотропне середовище. Якщо кіральні частинки розміщені впорядковано, наприклад осі всіх спіральок спрямовані вздовж осі Z , середовище буде бі-анізотропним.

Для бі-ізотропного середовища можна записати матеріальні рівняння для комплексних амплітуд:

$$\mathbf{D} = \epsilon'_a \mathbf{E} \mp j\chi_k^M \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu'_a \mathbf{H} \pm j\chi_k^E \mathbf{E}, \quad (5.70)$$

де верхній знак характеризує середовище з правими кіральними об'єктами, нижній знак характеризує середовище з лівими кіральними об'єктами, $\epsilon'_a = \epsilon_0 \epsilon_c + \chi_k^E$, $\mu'_a = \mu_0 \mu_c + \chi_k^M$, χ_k^E – електрична сприйнятливість кірального середовища; χ_k^M – магнітна сприйнятливість кірального середовища; χ_k – параметр кіральності, який характеризує електромагнітну та магнітоелектричну сприйнятливості кірального середовища.

Ці параметри знаходять із розв'язку відповідних електродинамічних задач для системи кіральних елементів, розташованих в ізотропному середовищі, або експериментально. Для бі-анізотропного середовища параметри кіральності залежать від напрямку векторів електромагнітного поля. Існують і інші форми запису матеріальних рівнянь для кіральних бі-ізотропних та бі-анізотропних середовищ.

Штучний діелектрик на основі кіральних частинок має частотну та просторову дисперсію параметрів так само, як і оптично активне середовище. Основними електромагнітними властивостями кірального середовища є **біфуркація** нормальних хвиль і **кросполяризація** поля. Перша властивість полягає в неможливості поширення в кіральному середовищі лінійно-поляризованої хвилі. В ній завжди існують дві хвилі із право- і лівоколовими поляризаціями, що мають різні фазові швидкості, чим і пояснюється ефект повороту площини поля-

ризації електромагнітної хвилі. Друга властивість – кросполяризація – полягає у зміні поляризації відбитого поля при падінні хвилі на кіральне середовище. Наприклад, при падінні на кіральне середовище хвилі з перпендикулярною поляризацією у структурі поля відбитої хвилі будуть присутні складові, що належать до ортогональної (паралельної) поляризації. Кіральне середовище по-різному реагує на падаючі хвилі правої і лівої колової поляризації і можливі їх взаємні перетворення.

Головні можливості застосування кіральних середовищ ґрунтуються на явищі кросполяризації поля в кіральному середовищі. На основі кіральних матеріалів можливе створення частотно- і поляризаційно-селективних фільтрів, перетворювачів поляризації, частотно-селективних захисних екранів і мало відбиваючих покриттів.

Задачі для самостійного розв'язку

1. Головні коефіцієнти заломлення для кварцу в оптичному діапазоні на частоті $5 \cdot 10^{14}$ Гц $n_0 = 1,544$ і $n_{a0} = 1,553$. Записати тензор діелектричної проникності кварцу. Знайти товщину пластинки кварцу, яка перетворює лінійно поляризовану електромагнітну хвилю у хвилю з коловою поляризацією.

2. Головні коефіцієнти заломлення для вапняного шпату (CaCO_2) в оптичному діапазоні на частоті $5 \cdot 10^{14}$ Гц $n_0 = 1,658$ і $n_{a0} = 1,486$. Записати тензор діелектричної проникності вапняного шпату. Знайти товщину пластинки вапняного шпату, яка перетворює лінійно поляризовану електромагнітну хвилю у хвилю з коловою поляризацією. Порівняти результати розв'язку з попередньою задачею.

3. Ферит з параметрами $\epsilon = 13$, $M_0 = 1,4 \cdot 10^5$ А/м, $\Delta H = 5,6 \cdot 10^3$ А/м на частоті $f = 10^{10}$ Гц при напруженості магнітного поля $H_0 = 10^5$ А/м, має компоненти тензора магнітної проникності для право- і лівополяризованих електромагнітних хвиль $\mu_+ = 0,24 - j0,023$ і $\mu_- = 1,36 - j0,0053$. Знайти товщину феритової пластини, необхідної для повороту площини поляризації на 90° .

4. Ферит з параметрами $\epsilon = 13$, $M_0 = 1,4 \cdot 10^5$ А/м, $\Delta H = 5,6 \cdot 10^3$ А/м на частоті $f = 10^{10}$ Гц при напруженості магнітного поля $H_0 = 10^5$ А/м має компоненти тензора магнітної проникності для лінійно поляри-

зованих електромагнітних хвиль $\mu = 0,802 - j0,014$ і $\mu_a = 0,562 - j0,009$. Знайти сталі поширення для звичайної і незвичайної електромагнітних хвиль і кути заломлення при похилому падінні хвилі на межу поділу вакуум-ферит під кутом 60° до нормалі до межі поділу.

Питання для самоперевірки

1. Які середовища називаються анізотропними?
2. Які середовища називаються гіротропними?
3. В чому полягає ефект Фарадея у гіротропному середовищі?
4. Від чого залежать величина і напрямок повороту площини поляризації при поширенні електромагнітних хвиль в гіротропному середовищі?
5. Пояснити ефект Коттона – Мутона в гіротропному середовищі.
6. Які основні властивості кірального середовища?

6. ЯВИЩА ВІДБИТТЯ ТА ЗАЛОМЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

6.1. Закони Снелліуса

Розглянемо задачу про падіння плоскої ЕМХ на плоску межу поділу, що ділить увесь простір на дві частини (рис. 6.1). Нехай верхній півпростір заповнений середовищем 1 з параметрами $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$, а нижній – середовищем 2 з параметрами $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Із загальної фізики відомо, що в цьому разі відбуваються явища відбиття променя під кутом φ' і його заломлення під кутом θ (рис. 6.1).

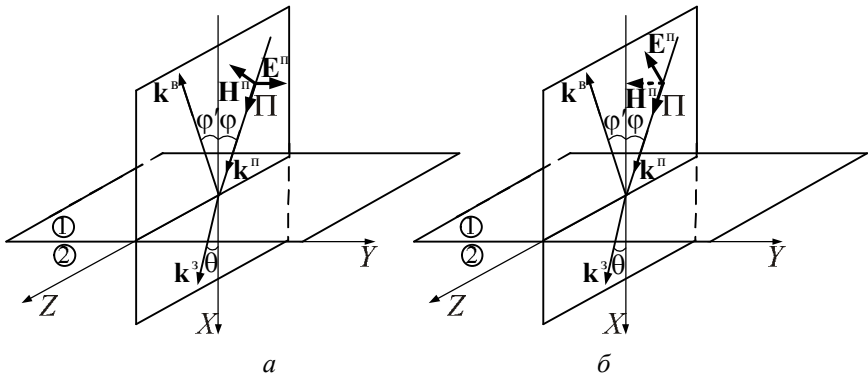


Рис. 6.1

Назвемо **площиною падіння** площину, яка проходить через промінь і нормаль до поверхні розподілу. Комплексні амплітуди напруженості електричного $\dot{\mathbf{E}}^n$ і магнітного $\dot{\mathbf{H}}^n$ полів падаючої хвилі можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}^n &= \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk^n r} = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_1(x \cos \varphi_x^n + y \cos \varphi_y^n + z \cos \varphi_z^n)}, \\ \dot{\mathbf{H}}^n &= \dot{\mathbf{H}}_0^n e^{-jk^n r} = \dot{\mathbf{H}}_0^n e^{-jk_1(x \cos \varphi_x^n + y \cos \varphi_y^n + z \cos \varphi_z^n)},\end{aligned}\quad (6.1)$$

при цьому $\dot{\mathbf{H}}^n = \frac{1}{Z_{c1}} [\mathbf{e}^n, \dot{\mathbf{E}}^n]$, де $\mathbf{k}^n = k_1 \mathbf{e}^n$, \mathbf{e}^n – орт променя падаючої хвилі, $\cos \varphi_{x,y,z}^n$ – напрямні косинуси вектора \mathbf{e}^n у прямокутній системі координат.

Природно припустити, що вектори напруженості поля відбитої ($\dot{\mathbf{E}}^B, \dot{\mathbf{H}}^B$) і заломленої ($\dot{\mathbf{E}}^3, \dot{\mathbf{H}}^3$) хвиль також є пласкими хвилями і виражаються аналогічними співвідношеннями:

$$\dot{\mathbf{E}}^B = \dot{\mathbf{E}}_0^- e^{-jk^B r} = \dot{\mathbf{E}}_0^B e^{-jk_1(x \cos \varphi_x^B + y \cos \varphi_y^B + z \cos \varphi_z^B)}, \quad \dot{\mathbf{H}}^B = \frac{1}{Z_{c1}} [\mathbf{e}^B, \dot{\mathbf{E}}^B], \quad (6.2)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^3 = \dot{\mathbf{E}}_0^3 e^{-jk^3 r} = \dot{\mathbf{E}}_0^3 e^{-jk_1(x \cos \varphi_x^3 + y \cos \varphi_y^3 + z \cos \varphi_z^3)}, \quad \dot{\mathbf{H}}^3 = \frac{1}{Z_{c2}} [\mathbf{e}^3, \dot{\mathbf{E}}_m^3], \quad (6.3)$$

де $\mathbf{k}^B = k_1 \mathbf{e}^B$, $\mathbf{k}^3 = k_2 \mathbf{e}^3$, \mathbf{e}^B і \mathbf{e}^3 – орти променів відбитої і заломленої хвиль відповідно, а $\cos \varphi_{x,y,z}^B$ і $\cos \varphi_{x,y,z}^3$ – їх напрямні косинуси.

Знайдемо напрямок променів відбитої та заломленої хвиль, припускаючи, що напрямок променя падаючої хвилі заданий: $\varphi_x^n = \varphi$, $\varphi_y^n = \pi/2$, $\varphi_z^n = \pi/2 - \varphi$. Для цього використаємо граничні умови для тангенційних компонент векторів $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ на площині поділу ($x = 0$) двох середовищ:

$$\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} = \dot{\mathbf{E}}_{2\tau}, \quad \dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = \dot{\mathbf{H}}_{2\tau}. \quad (6.4)$$

На підставі граничних умов можна записати:

$$\dot{\mathbf{E}}_{0\tau}^n e^{-jk_1 z \cos \varphi_z^n} + \dot{\mathbf{E}}_{0\tau}^B e^{-jk_1(y \cos \varphi_y^B + z \cos \varphi_z^B)} = \dot{\mathbf{E}}_{0\tau}^3 e^{-jk_2(y \cos \varphi_y^3 + z \cos \varphi_z^3)}. \quad (6.5)$$

Щоб рівність (6.5) дотримувалась при всіх y , необхідно покласти $\cos \varphi_y^B = 0$ і $\cos \varphi_y^3 = 0$, тобто $\varphi_y^B = \varphi_y^3 = \pi/2$.

Звідси виходить, що **падаючий, відбитий та заломлений промені лежать в одній площині** ($y = \text{const}$). Щоб рівність (6.5) дотримувалась при всіх z , необхідно, щоб виконувались співвідношення:

$$k_1 \cos \varphi_z^n = k_1 \cos \varphi_z^b = k_2 \cos \varphi_z^3.$$

Підставляючи в цей вираз $\varphi_z^n = \pi/2 - \varphi$, $\varphi_z^b = \pi/2 - \varphi'$ і $\varphi_z^3 = \pi/2 - \theta$, приходимо до наступних співвідношень:

$$\varphi' = \varphi \quad (6.6)$$

і

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \theta. \quad (6.7)$$

Вираз (6.6) встановлює співвідношення між кутом падіння плоскої хвилі та кутом її відбиття і є математичним формулюванням відомого з оптики **першого закону Снелліуса: кут відбиття дорівнює куту падіння**.

Формула (6.7), яку можна привести до такого вигляду за відсутності втрат:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (6.8)$$

встановлює співвідношення між кутом падіння і кутом заломлення плоскої хвилі й носить назву **закону синусів** або **другого закону Снелліуса**. В (6.8) використані позначення:

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \quad \text{чи} \quad n_{1,2} = c/v_{1,2}, \quad (6.9)$$

де n_1 і n_2 – коефіцієнти, що мають назву **показників заломлення** першого і другого середовищ, $v_{1,2}$ – швидкість поширення ЕМХ у середовищах.

Якщо $n_1 > n_2$, то кажуть, що перше середовище **оптично густіше**, ніж друге. В цьому випадку кут заломлення θ завжди буде менший кута падіння φ . А якщо має місце обернене співвідношення $n_2 > n_1$, то друге середовище вважається **оптично густішим**, ніж перше, і кут заломлення θ в даному випадку буде більшим за кут падіння φ . Хід променів для обох ситуацій показаний на рис.6.2, а, б.

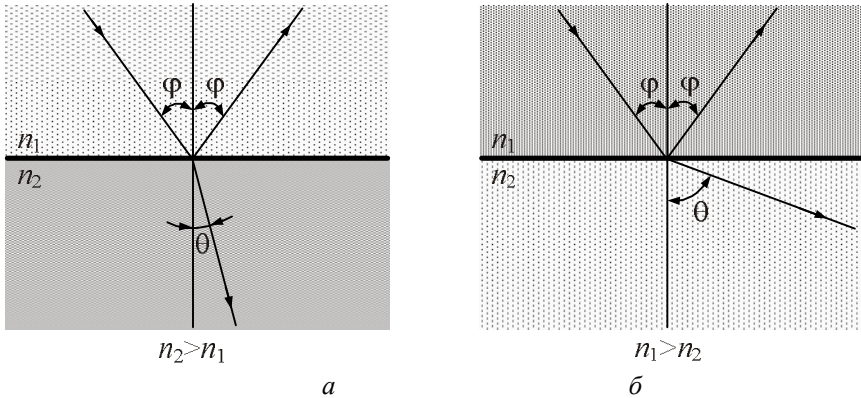


Рис. 6.2

Приклад 6.1. З вільного простору на немагнітний ідеальний діелектрик з відносною діелектричною проникністю $\epsilon = 3,2$ падає плоска хвиля під кутом $\varphi = 30^\circ$. Знайти кути відбиття φ та заломлення θ .

Розв'язок. Користуючись першим (6.6) та другим (6.8) законами Снелліуса, знаходимо:

$$\varphi' = \varphi = 30^\circ;$$

$$\theta = \arcsin \left[\sin \varphi \frac{n_1}{n_2} \right] = \arcsin \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3,2}} \right] = 16,2^\circ.$$

Резюмуючи викладене, можна зробити такі висновки:

- 1) промені падаючої, відбитої і заломленої хвиль розміщені в одній площині – площині падіння;
- 2) кут плоскої хвилі, відбитої від поверхні поділу двох середовищ, дорівнює куту падіння;
- 3) кути падіння і заломлення плоскої хвилі на межі поділу двох середовищ пов'язані між собою законом синусів.

6.2. Формули Френеля

Для повноти опису явищ, що супроводжують падіння плоскої хвилі на плоску поверхню поділу двох середовищ, необхідно знайти вирази, які встановлюють числові співвідношення між комплексними амплітудами падаючої, відбитої і заломленої хвиль. Для цього вводять так звані **комплексні коефіцієнти відбиття \hat{R} і прохо-**

дження \dot{T} , визначувані як відношення комплексних амплітуд відповідних хвиль на межі поділу двох середовищ:

$$\dot{R} = \frac{\dot{E}^B}{\dot{E}^n} \Big|_{x=0} = \frac{\dot{H}^B}{\dot{H}^n} \Big|_{x=0} \quad \text{і} \quad \dot{T} = \frac{\dot{E}^3}{\dot{E}^n} \Big|_{x=0} = \frac{\dot{Z}_{c2} \dot{H}^3}{\dot{Z}_{c1} \dot{H}^n} \Big|_{x=0}. \quad (6.10)$$

Коефіцієнти відбиття і проходження є комплексними величинами, модулі яких $R = |\dot{R}| = \frac{E^B}{E^n}$, $T = |\dot{T}| = \frac{E^3}{E^n}$ встановлюють співвідношення між амплітудами падаючої, відбитої й заломленої хвиль на межі поділу двох середовищ, а їх аргументи

$$\psi_R = \arg \{ \dot{R} \} = \arg \{ \dot{E}^B \} - \arg \{ \dot{E}^n \},$$

$$\psi_T = \arg \{ \dot{T} \} = \arg \{ \dot{E}^3 \} - \arg \{ \dot{E}^n \}$$

– різницю фаз цих хвиль.

Встановлено, що значення коефіцієнтів відбиття і проходження залежать від орієнтації вектора \mathbf{E}^n пласкої хвилі по відношенню до її площини падіння, інакше кажучи, – від поляризації падаючої хвилі. Відомо, що хвилю будь-якої поляризації можна представити у вигляді суми двох ортогональних хвиль з лінійною поляризацією. Тому для повного опису явища є сенс визначити коефіцієнти \dot{R} і \dot{T} для обох цих хвиль, що падають на поверхню поділу. Як такі виберемо дві хвилі, в одній з яких вектор \mathbf{E}^n лежить у площині падіння, а у другій – перпендикулярний цій площині. Першу з них прийнято називати **хвилею з паралельною** (площині падіння) поляризацією, а другу – **хвилею з нормальною** (тобто перпендикулярною до площини падіння) поляризацією. В літературі **хвилі з паралельною поляризацією** звать також **вертикально поляризованими**, а з **нормальною поляризацією** – **горизонтально поляризованими**.

Розглянемо коефіцієнти відбиття та проходження окремо для хвиль з нормальною та паралельною поляризацією.

6.2.1. Коефіцієнти відбиття і проходження хвиль з нормальною поляризацією

Нехай на плоску межу поділу двох середовищ падає хвиля з нормальною поляризацією (рис. 6.3).

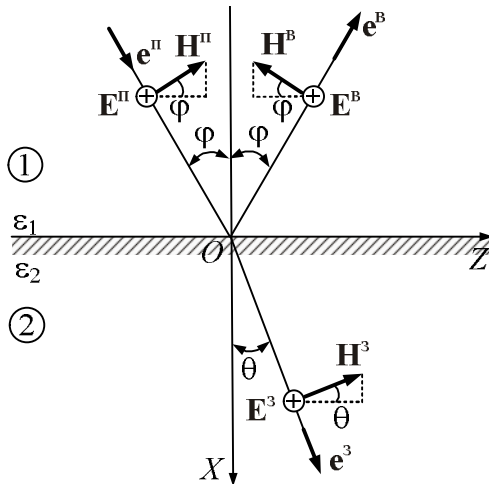


Рис. 6.3

В цьому випадку в площині падіння будуть розміщені вектори напруженості магнітного поля \mathbf{H} падаючої, відбитої і заломленої хвиль, а вектори \mathbf{E} всіх хвиль будуть орієнтовані паралельно поверхні поділу. Тому тут граничні умови для тангенційних компонент напруженості електричного і магнітного полів на площині $X = 0$ можна сформулювати у вигляді наступних рівностей:

$$\dot{E}_0^\pi + \dot{E}_0^B = \dot{E}_0^3, \quad (6.11)$$

$$\dot{H}_0^\pi \cos \varphi - \dot{H}_0^B \cos \varphi = \dot{H}_0^3 \cos \theta. \quad (6.12)$$

Останню рівність можна переписати як

$$\frac{\dot{E}_0^\pi}{Z_{c1}} \cos \varphi - \frac{\dot{E}_0^B}{Z_{c1}} \cos \varphi = \frac{\dot{E}_0^3}{Z_{c2}} \cos \theta. \quad (6.13)$$

Поділивши ліві і праві частини виразів (6.11) та (6.13) на \dot{E}_0^n , одержимо

$$1 + \dot{R}_\perp = \dot{T}_\perp, \quad (1 - \dot{R}_\perp) \dot{Z}_{c2} \cos \varphi = \dot{T}_\perp \dot{Z}_{c1} \cos \theta,$$

де \dot{R}_\perp і \dot{T}_\perp – коефіцієнти відбиття й проходження хвилі з нормальною поляризацією. Розв'язуючи одержану систему рівнянь стосовно невідомих \dot{R}_\perp і \dot{T}_\perp , знаходимо:

$$\dot{R}_\perp = \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi - \dot{Z}_{c1} \cos \theta}{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi + \dot{Z}_{c1} \cos \theta}, \quad (6.14)$$

$$\dot{T}_\perp = \frac{2\dot{Z}_{c2} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi + \dot{Z}_{c1} \cos \theta}. \quad (6.15)$$

Для немагнітних діелектриків ($\mu_1 = \mu_2$, $Z_{c1}/Z_{c2} = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$) ці формули з урахуванням 2-го закону Снелліуса помітно спрощуються та набувають такого вигляду:

$$\dot{R}_\perp = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)}, \quad \dot{T}_\perp = \frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{\sin(\theta + \varphi)}. \quad (6.16)$$

Вирази (6.14) – (6.16) називаються **формулами Френеля для хвиль з нормальною поляризацією**.

Приклад 6.2. Для умов прикладу 6.1 знайти амплітуди векторів напруженості магнітного поля відбитої та заломленої хвилі. Вважати, що амплітуда падаючої хвилі $E^n = 1 \text{ В/м}$, поляризація хвилі нормальна.

Розв'язок. З урахуванням прикладу 6.1 маємо $\theta = 16,2^\circ$, із формули (6.16) $\dot{R}_\perp = -0,33$, $\dot{T}_\perp = 0,67$. Характеристичний опір другого середовища $\dot{Z}_{c2} = 120\pi/\sqrt{\varepsilon_2} = 211 \text{ Ом}$. Тоді

$$H^b = |\dot{R}_\perp| E^n / \dot{Z}_{c1} = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ А/м},$$

$$H^3 = \dot{T}_\perp E^n / \dot{Z}_{c2} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}.$$

6.2.2. Коефіцієнти відбиття і проходження хвиль з паралельною поляризацією

Хід променів поблизу межі поділу показаний для хвиль з паралельною поляризацією на рис. 6.4.

В цьому випадку в площині падіння лежать вектори $\dot{\mathbf{E}}$, а вектори $\dot{\mathbf{H}}$ спрямовані паралельно межі поділу. Тому граничні умови для цих векторів на поверхні поділу виглядатимуть так:

$$\dot{E}_0^{\text{п}} \cos \varphi + \dot{E}_0^{\text{в}} \cos \varphi = \dot{E}_0^{\text{з}} \cos \theta, \quad (6.17)$$

$$\dot{H}_0^{\text{п}} - \dot{H}_0^{\text{в}} = \dot{H}_0^{\text{з}}. \quad (6.18)$$

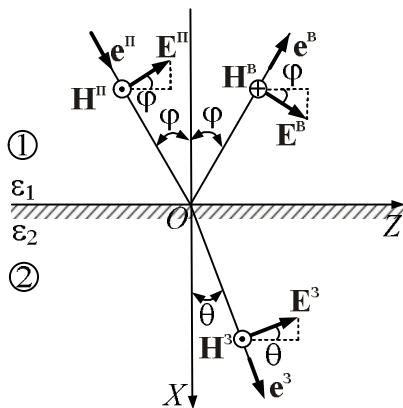


Рис. 6.4

Перетворимо другу рівність до вигляду

$$\frac{\dot{E}_0^{\text{п}}}{\dot{Z}_{c1}} - \frac{\dot{E}_0^{\text{в}}}{\dot{Z}_{c1}} = \frac{\dot{E}_0^{\text{з}}}{\dot{Z}_{c2}}, \quad (6.19)$$

а потім поділимо рівності (6.17) та (6.19) на $\dot{E}_0^{\text{п}}$, внаслідок чого одержимо систему рівнянь:

$$\cos \varphi + \dot{R}_{\parallel} \cos \varphi = \dot{T}_{\parallel} \cos \theta, \quad (6.20)$$

$$\dot{Z}_{c2} (1 - \dot{R}_{\parallel}) = \dot{Z}_{c1} \dot{T}_{\parallel}, \quad (6.21)$$

Розв'язуючи ці рівняння щодо \dot{R}_{\parallel} і \dot{T}_{\parallel} , одержимо **формули Френеля для хвиль паралельної поляризації**:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \theta - \dot{Z}_{c1} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \theta + \dot{Z}_{c1} \cos \varphi}, \quad (6.22)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2\dot{Z}_{c2} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \theta + \dot{Z}_{c1} \cos \varphi}. \quad (6.23)$$

Для немагнітних діелектриків при $\mu_1 = \mu_2$ останні вирази перетворюються до вигляду:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\operatorname{tg}(\theta + \varphi)}, \quad (6.24)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2 \sin \varphi \sin \theta}{\sin(\theta + \varphi) \cos(\theta - \varphi)}. \quad (6.25)$$

Легко показати, що у випадку **нормального падіння лінійно поляризованої хвилі** на поверхню поділу двох середовищ ($\varphi = \pi/2$) **коефіцієнти відбиття та проходження визначаються наступними виразами**:

$$\dot{R}_{\perp} = \dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{Z}_{c2} - \dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c2} + \dot{Z}_{c1}} \quad \text{і} \quad \dot{T}_{\parallel} = \dot{T}_{\perp} = \frac{2\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c1} + \dot{Z}_{c2}}. \quad (6.26)$$

Звідси виходить, що коефіцієнти відбиття і проходження для хвиль з різною поляризацією виявляються однаковими, що цілком природно, оскільки в даному випадку площа падіння виявляється невизначеною.

Приклад 6.3. Амплітуда напруженості електричного поля пласкої хвилі, яка падає по нормалі з першого середовища на друге, дорівнює $E^{\text{н}} = 20 \text{ В/м}$. Параметри середовищ наступні: $\epsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3,2$, $\mu_2 = 1$. Знайти середнє значення вектора Пойнтінга падаючої, відбитої та заломленої хвиль.

Розв'язок. З формули (6.26) маємо:

$$\dot{R} = R = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_2}}{1 + \sqrt{\varepsilon_2}} = 0,283; \quad \dot{T} = T = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_2}} = 0,717.$$

Характеристичний опір другого середовища (див. приклад 6.2) $\dot{Z}_{c2} = 211 \text{ Ом}$.
Середнє значення векторів Пойнтінга

$$\Pi^n = \frac{1}{2} \frac{(E^n)^2}{Z_{c1}} = 0,53 \text{ Вм/м}^2; \quad \Pi^B = \frac{1}{2} \frac{(RE^n)^2}{Z_{c1}} = 0,0425 \text{ Вм/м}^2;$$

$$\Pi^3 = \frac{1}{2} \frac{(TE^n)^2}{Z_{c2}} = 0,487 \text{ Вм/м}^2.$$

З фізичних міркувань і розрахунків видно, що для середовищ без втрат виконується рівність $\Pi^n = \Pi^B + \Pi^3$, тобто середнє значення вектора Пойнтінга падаючої хвилі дорівнює сумі значень векторів Пойнтінга відбитої та заломленої хвилі.

6.3. Відбиття та заломлення плоских хвиль на межі ідеальних діелектриків

Вважатимемо, що середовища по обидві сторони від межі поділу є ідеальними немагнітними діелектриками, в яких $\mu_2 = \mu_1$, $\sigma = 0$. Покажемо, що існує такий кут падіння, який називається **кутом Брюстера** $\varphi = \varphi_{\text{Бр}}$, при якому падаюча паралельно поляризована хвиля не відбивається від межі поділу (коефіцієнт відбиття $R_{\parallel} = 0$). Можна встановити, що у випадку $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$ (тобто $\theta \neq \varphi$) ця умова виконуватиметься тільки в тому разі, коли знаменник виразу (6.24) прямує до нескінченності, тобто $\text{tg}(\varphi + \theta) \rightarrow \infty$, звідки виходить $\varphi + \theta = \pi/2$. Підставляючи $\theta = \pi/2 - \varphi$ у 2-й закон Снелліуса, знаходимо шуканий кут Брюстера:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\pi/2 - \varphi)} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{tg} \varphi = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad (6.27)$$

або

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{Бр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (6.28)$$

З (6.28) виходить, що кут Брюстера існує для будь-яких співвідношень між ε_1 і ε_2 , тобто й для $n_2 > n_1$, і для $n_2 < n_1$.

Розглянемо докладніше другий випадок, коли електромагнітна хвиля проходить з більш оптично густого середовища в середовище менш оптично густе ($n_1 > n_2$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) і має місце таке співвідношення між кутами падіння і заломлення:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{або} \quad \sin \varphi = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta. \quad (6.29)$$

Оскільки $n_2/n_1 < 1$, то $\sin \theta > \sin \varphi$ і $\theta > \varphi$ (рис. 6.5, а). Звідси можна знайти такий кут падіння $\varphi_{\text{кр}}$, що називається критичним кутом (кутом повного внутрішнього відбиття), при якому заломлена хвиля починає ковзати по поверхні поділу ($\theta = \pi/2$) (рис. 6.5, б):

$$\varphi_{\text{кр}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (6.30)$$

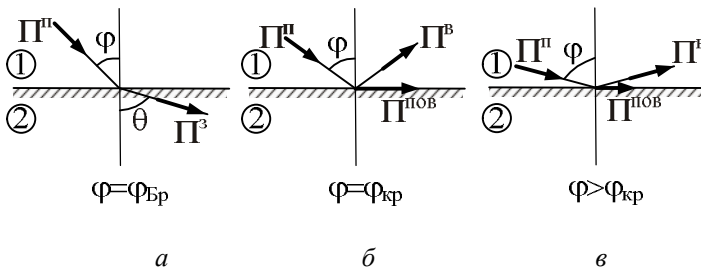


Рис. 6.5

На рис 6.5 б, в $\mathbf{P}^{\text{пов}}$ означає вектор Пойнтінга поверхневої хвилі.

При $\varphi \geq \varphi_{\text{кр}}$ спостерігається явище повного відбиття $|R_{\perp}| = |R_{\parallel}| = 1$ для хвиль обох поляризацій (рис. 6.5, в). Типові графіки залежностей

модуля і фази коефіцієнта відбиття показані на рис. 6.6 для двох характерних випадків: $n_2 > n_1$ (рис. 6.6, а, в) і $n_1 > n_2$ (рис. 6.6, б, г).

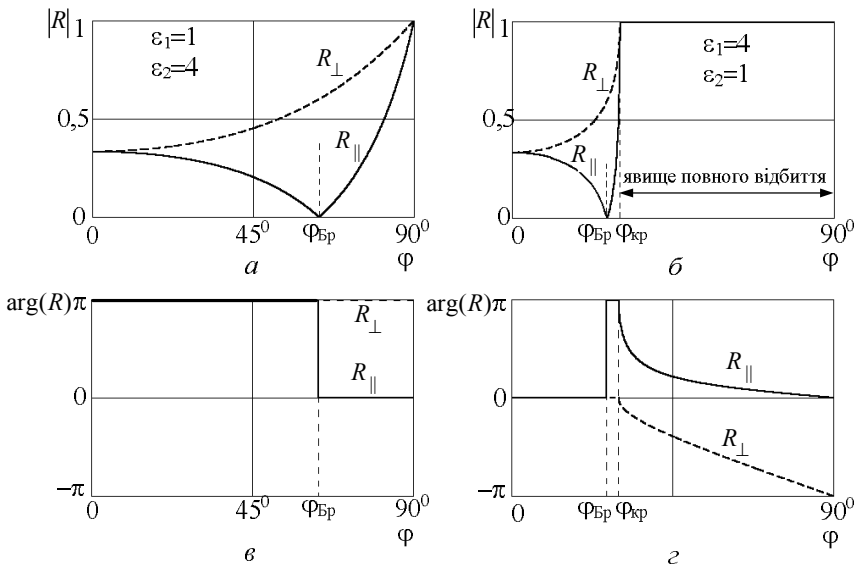


Рис. 6.6

При розрахунках згаданих графіків вважалося, що середовища 1 і 2 немагнітні і непоглинаючі ($\mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$).

Явище повного внутрішнього відбиття широко використовується в техніці. Прикладом такого використання може служити світловод (сучасна лінія передачі оптичного діапазону хвиль), що являє собою гнучкий діелектричний стрижень, в середині якого поширюється електромагнітна хвиля, утримувана всередині діелектрика за рахунок використання саме цього ефекту – ефекту повного внутрішнього відбиття.

6.4. Поверхневі хвилі біля межі поділу двох середовищ

Неважко показати, що при падінні плоскої хвилі на межу поділу під кутом $\varphi > \varphi_{кр}$, коли спостерігається явище повного внутрішнього відбиття, модулі коефіцієнтів відбиття для хвиль обох поляризацій рівні одиниці $|R_\perp| = |R_\parallel| = 1$. Це означає, що падаюча хвиля повністю

відбивається від межі поділу, а потужність, яка переноситься з нею, повністю відбивається назад в перше середовище і зовсім не проходить у друге середовище. Разом з тим, з формул (6.23) і (6.25) виходить, що при $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$ коефіцієнти проходження T_{\perp} і T_{\parallel} не дорівнюють нулю ($T_{\perp} \neq 0$ та $T_{\parallel} \neq 0$), тобто поле в середовищі 2 все-таки існує. Тому є сенс розглянути структуру цього поля докладніше, вважаючи, що воно описується виразом (6.3), яке з урахуванням позначень, прийнятих на рис. 6.3 ($\varphi_x^3 = \theta$, $\varphi_y^3 = \pi/2$, $\varphi_z^3 = \pi/2 - \theta$), записується у вигляді

$$\dot{\mathbf{E}}^3 = \dot{\mathbf{E}}_0^3 e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x} \cos \theta + \mathbf{z} \sin \theta)}. \quad (6.31)$$

Із закону синусів виходить, що за наявності повного внутрішнього відбиття, тобто коли $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$, $\sin \theta$ має бути більше одиниці:

$$\sin \theta = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi > \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi_{\text{кр}} = 1, \quad (6.32)$$

що в принципі неможливо, якщо під θ розуміти реальний просторовий кут заломлення. Проте, якщо припустити, що величина $\theta = \dot{\theta}$ є комплексною, то значення $\sin \dot{\theta}$ може перевищувати 1. Тому прийнемо це припущення і представимо $\dot{\theta}$ у вигляді

$$\dot{\theta} = \theta' + j\theta'', \quad (6.33)$$

де θ' дійсна частина $\dot{\theta}$, що відповідає реальному просторовому куту θ , а θ'' – уявна частина $\dot{\theta}$, фізичний смисл якої ще належить вяснити. Враховуючи, що при кутах падіння $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$ заломлена хвиля ковзає вздовж поверхні розподілу (є **поверхневою хвилею**) і реальний кут заломлення $\theta = \pi/2$, знайдемо значення $\sin \dot{\theta}$ та $\cos \dot{\theta}$:

$$\sin \dot{\theta} = \sin(\theta' + j\theta'') = \sin \theta' \text{ch } \theta'' + j \cos \theta' \text{sh } \theta'' = \text{ch } \theta'', \quad (6.34)$$

$$\cos \dot{\theta} = \cos(\theta' + j\theta'') = \cos \theta' \text{ch } \theta'' - j \sin \theta' \text{sh } \theta'' = -j \text{sh } \theta''. \quad (6.35)$$

З урахуванням рівнянь (6.34), (6.35) формула (6.31) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}^z &= \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_2(x \cos \dot{\theta} + z \sin \dot{\theta})} = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_2(-jx \operatorname{sh} \theta'' + z \operatorname{ch} \theta'')} = \\ &= \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-(k_2 \operatorname{sh} \theta'')x} \cdot e^{-j(k_2 \operatorname{ch} \theta'')z} = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-\alpha_{2x}x} \cdot e^{-\beta_{2z}z},\end{aligned}\quad (6.36)$$

де

$$\beta_{2z} = k_2 \operatorname{ch} \theta'', \quad \alpha_{2x} = k_2 \operatorname{sh} \theta''. \quad (6.37)$$

Вираз (6.36) описує пласку електромагнітну хвилю, яка поширюється вздовж осі Z у позитивному напрямку. Фазовий коефіцієнт цієї хвилі дорівнює $\beta_{2z} = k_2 \operatorname{ch} \theta'' > k_2$. Множник $e^{-\alpha_{2x}x}$ у (6.36) свідчить про експоненційне спадання амплітуди хвилі при віддаленні точки спостереження від поверхні поділу. Таким чином, вираз (6.36) дає підставу стверджувати, що у другому середовищі існує пласка неоднорідна електромагнітна хвиля, яка поширюється вздовж поверхні розподілу $X = 0$. Оскільки **основна частина енергії, яка переноситься цією хвилею, зосереджена також поблизу поверхні, то таку хвилю прийнято називати поверхневою**. Виникнення цієї хвилі можна розглядати як прояв деякої «інерційності» електромагнітного поля при повному відбитті хвилі від поверхні поділу.

Розглянемо докладніше фазовий коефіцієнт β_{2z} і сталу ослаблення α_{2x} поверхневої хвилі. Використовуючи закон синусів (6.7), рівності (6.37) легко перетворити до такого вигляду:

$$\begin{aligned}\beta_{2z} &= k_2 \operatorname{ch} \theta'' = k_2 \sin \dot{\theta} = k_1 \sin \varphi, \quad (6.38) \\ \alpha_{2x} &= k_2 \operatorname{sh} \theta'' = jk_2 \cos \dot{\theta} = \sqrt{k_2^2 \sin^2 \dot{\theta} - k_2^2} = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \varphi - k_2^2} = \\ &= k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi - (k_2 / k_1)^2} = k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_{\text{кр}}}, \quad (6.39)\end{aligned}$$

а також одержати формулу для визначення швидкості поширення поверхневої хвилі:

$$v_{2z} = \frac{\omega}{\beta_{2z}} = \frac{\omega}{k_2 \operatorname{ch} \theta''} = \frac{v_2}{\operatorname{ch} \theta''} = \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi} = \frac{v_1}{\sin \varphi}. \quad (6.40)$$

З одержаних виразів видно, що параметри α_{2x} , β_{2z} і ν_{2z} залежать від кута падіння φ . Чим сильніша нерівність $\varphi > \varphi_{кр}$, тим більші величини фазового коефіцієнта β_{2z} та сталої загасання α_{2x} і тим менша швидкість хвилі ν_{2z} . Остання, до речі, має цілком визначені межі зміни: $\nu_2 > \nu_{2z} > \nu_1$ – від $\nu_z = \nu_2$ при $\varphi = \varphi_{кр}$ до $\nu_z = \nu_1$ при $\varphi = 90^\circ$. Тут, як і раніше, ν_1 і ν_2 – швидкості поширення електромагнітної хвилі у першому та другому середовищах відповідно ($\nu_1 < \nu_2$, оскільки тут $n_1 > n_2$).

6.5. Побудова електромагнітного поля над межею поділу двох середовищ за наявності повного відбиття

Тепер знайдемо поле в першому середовищі для випадку повного внутрішнього відбиття, яке утворюється накладанням двох хвиль – падаючої та відбитої. Беручи до уваги, що в цьому випадку коефіцієнт відбиття можна представити як $\dot{R} = e^{i\psi_R}$, шукане поле запишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 &= \dot{\mathbf{E}}^n + \dot{\mathbf{E}}^b = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)} + \dot{R} \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_1(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)} = \\ &= \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_1 z \sin \varphi} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} + \dot{R} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{-jk_1 z \sin \varphi} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} + \right. \\ &+ \left. e^{j\psi_R} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) = \dot{\mathbf{E}}_0^n e^{j0,5\psi_R} e^{-jk_1 z \sin \varphi} \left(e^{-j(k_1 x \cos \varphi + 0,5\psi_R)} + e^{j(k_1 x \cos \varphi + 0,5\psi_R)} \right) = \\ &= 2 \dot{\mathbf{E}}_0^n \cos(k_1 x \cos \varphi + 0,5\psi_R) \cdot e^{-j(k_1 z \sin \varphi - 0,5\psi_R)} = \\ &= 2 \dot{\mathbf{E}}_0^n \cos(\beta_{1x} x + 0,5\psi_R) \cdot e^{-j(\beta_{1z} z - 0,5\psi_R)} = \dot{\mathbf{E}}_z \cdot e^{-j(\beta_{1z} z - 0,5\psi_R)}, \quad (6.41) \end{aligned}$$

де $\dot{\mathbf{E}}_z = 2 \dot{\mathbf{E}}_0^n \cos(\beta_{1x} x + 0,5\psi_R)$.

Поле в першому середовищі, представлене виразом (6.41), являє собою електромагнітну хвилю, біжучу вздовж осі Z . Амплітуда цієї хвилі $\dot{\mathbf{E}}_z$ залежить від поперечної координати x і сама є стоячою хвилею вздовж осі X . Фазові сталі β_{1z} біжучої вздовж осі Z хвилі і β_{1x} стоячої вздовж осі X хвилі є проекціями хвильового числа \mathbf{k}_1 на відповідні осі координат:

$$\beta_{1x} = k_1 \cos \varphi, \beta_{1z} = k_1 \sin \varphi, \sqrt{\beta_{1x}^2 + \beta_{1z}^2} = k_1.$$

Довжина стоячої хвилі вздовж осі X , визначується із співвідношення

$$\lambda_{1x} = \frac{2\pi}{\beta_{1x}} = \frac{2\pi}{k_1 \cos \varphi} = \frac{\lambda_1}{\cos \varphi}, \quad (6.42)$$

і швидкість поширення біжучої хвилі

$$v_{1z} = \frac{\omega}{\beta_{1z}} = \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi} = \frac{v_1}{\sin \varphi} \quad (6.43)$$

є залежними від кута падіння φ , а їх величини виявляються більшими порівняно з аналогічними у просторі з такими самими параметрами, як і перше середовище.

Підбиваючи підсумок даному параграфу, слід зазначити, що пласка межа поділу двох середовищ за наявності явища повного відбиття перетворює пласку однорідну електромагнітну хвилю, що падає на неї з довільного напрямку ($\varphi_{\text{кр}} < \varphi < 90^\circ$), в неоднорідні електромагнітні хвилі й спрямовує їх рух вздовж поверхні розподілу. Таким чином, можна вважати, що **межа поділу** в даному випадку **служить деякою спрямовуючою системою для поширення електромагнітних хвиль в обох середовищах**. При цьому швидкість поширення хвилі в першому середовищі v_{1z} цілком збігається із швидкістю руху поверхневої хвилі у другому середовищі v_{2z} , що чітко видно при порівнянні формул (6.40) і (6.43).

На рис. 6.7 показані типові розподіли амплітуд хвиль, що існують в обох середовищах за наявності явища повного внутрішнього відбиття.

Координата x тут нормована до довжини хвилі в першому середовищі. При побудові графіків вважалося, що перше середовище (оптично більш густе) займає півпростір $x < 0$, а друге середовище – півпростір $x > 0$. Самі середовища мають ті самі параметри, що і у випадку рис. 6.6. На наведених графіках добре видно, що в першому середовищі розподіл амплітуди має вигляд стоячої хвилі, довжина якої зростає із збільшенням кута падіння φ . Амплітуди поверхневої

хвилі у другому середовищі аперіодично спадає з віддаленням від поверхні поділу ($x = 0$) за експоненційним законом, причому швидкість цього спадання зростає із збільшенням кута φ .

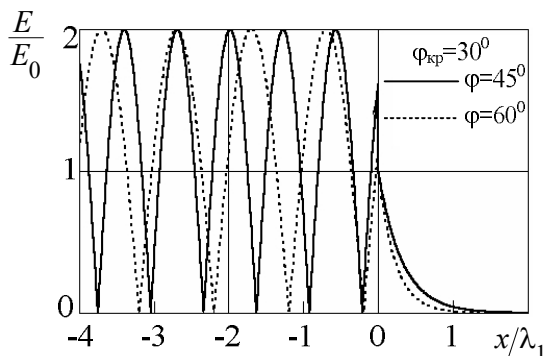


Рис. 6.7

6.6. Падіння плоскої хвилі на межу поглинального середовища. Поверхневий ефект

Вище було детально розглянуто характер явищ, що супроводжують падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску поверхню поділу двох ідеальних діелектриків. Тепер прослідкуємо, як впливає провідність другого середовища на характеристики відбитої і заломленої хвиль. Вважатимемо, що перше середовище, в якому поширюється падаюча хвиля, є ідеальний діелектрик з параметрами ϵ_1 та μ_1 , а друге середовище – провідне з параметрами ϵ_2 , μ_2 і σ_2 . Хвильове число першого середовища буде дійсним $k_1 = \beta_1$, а хвильове число другого середовища – комплексним $\dot{k}_2 = \beta_2 - j\alpha_2$. В такому випадку із закону синусів виходить, що $\sin \dot{\theta} = (k_1 / \dot{k}_2) \sin \varphi$, так само, як і кут θ , також є комплексною величиною. Позначаючи $\dot{k}_2 \cos \dot{\theta} = \beta_{2x} - j\alpha_{2x}$ і враховуючи, що $\dot{k}_2 \sin \dot{\theta} = k_1 \sin \varphi$, запишемо поле заломленої хвилі у другому середовищі:

$$\begin{aligned} \dot{E}^z &= \dot{E}_0^z e^{-j(k_2 \cos \dot{\theta} \cdot x + \dot{k}_2 \sin \dot{\theta} \cdot z)} = \dot{E}_0^z e^{-j(\beta_{2x} - j\alpha_{2x})x - j(k_1 \sin \varphi)z} = \\ &= \dot{E}_0^z e^{-\alpha_{2x}x} e^{-j(\beta_{2x}x + \beta_{2z}z)}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Таким чином, поле в поглинальному середовищі являє собою біжучу хвилю. Фронт (поверхня рівних фаз) хвилі $\beta_{2x}x + \beta_{2z}z = \text{const}$ являє собою площину, що нахилена до осі Z під кутом

$$\gamma = \arctg(\beta_{2z}/\beta_{2x}), \quad (6.45)$$

яка одночасно є й кутом заломлення хвилі, оскільки напрямок її руху збігається з нормаллю до її фронту. Поверхня рівної амплітуди $x = \text{const}$ являє собою площину, паралельну поверхні розподілу. Отже, дану хвилю можна класифікувати як пласку і неоднорідну, через те що поверхні рівних фаз та амплітуд не збігаються.

Амплітуда заломленої хвилі із заглибленням останньої у провідне середовище спадає за експоненційним законом $E^3 / E_0^3 = e^{-\alpha_{2x}x}$ і на глибині

$$x = \Delta = \frac{1}{\alpha_{2x}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{a2}\sigma_2}}$$

вона спадає в $e \approx 2,71$ рази. При цьому хвиля втрачає значну частину потужності (близько 86,5 %). Чим вища частота коливань ω і чим більша провідність середовища, тим менша глибина проникнення Δ . Отже, високочастотне електромагнітне поле у провіднику зосереджується головним чином біля його поверхні. Дане явище одержало назву **поверхневого ефекту**. Глибину проникнення Δ в літературі часто ще називають **товщиною скін-шару** (від англійського слова *skin* – шкіра). Щоб оцінити реальні величини глибини проникнення, наведемо приклад.

Приклад 6.4. Знайти глибину проникнення хвилі у мідь на частотах $f = 1 \text{ МГц}$, $f = 100 \text{ МГц}$, $f = 10 \text{ ГГц}$, питома провідність $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu = 1$.

Розв'язок. За формулою, яка наведена вище, маємо:

$$\Delta \Big|_{f=1 \text{ МГц}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}} \approx 66,7 \text{ мкм};$$

$$\Delta \Big|_{f=100 \text{ МГц}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}} \approx 6,67 \text{ мкм};$$

$$\Delta|_{f=10\text{ ГГц}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}} \approx 0,667 \text{ мкм.}$$

6.7. Відбиття і заломлення електромагнітних хвиль на межі поділу діелектрик-провідник

Тепер припустимо, що перше середовище, як і раніше, є ідеальним діелектриком, а друге – гарним провідником (наприклад, металом), для якого $\text{tg } \delta_2 = \sigma_2 / \omega \varepsilon_{a2} \gg 1$, і при цьому виконуються умови $|\dot{k}_2| \gg k_1$ та $|\dot{Z}_{c2}| \ll Z_{c1}$. Скориставшись другим законом

Снелліуса, неважко показати, що $\sin \theta = k_1 \sin \varphi / k_2 \ll 1$ і, отже, $\cos \theta \approx 1$. Крім того, очевидно, що в цьому випадку $\beta_2 \approx \text{Re}(\dot{k}_2) \approx \beta_{2x} \gg \beta_{2z}$, звідки виходить $\gamma \ll 1$. Це свідчить про те, що напрямок руху заломленої хвилі в металі мало відрізняється від нормалі \mathbf{e}_n до поверхні поділу. Оскільки це так, то вектори $\dot{\mathbf{E}}^3$ і $\dot{\mathbf{H}}^3$, розміщені в площині, перпендикулярній напрямку поширення, і на межі поділу є тангенційними компонентами по відношенню до межі поділу. Для них можна записати наступне співвідношення:

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = \dot{Z}_{c2} [\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}, \mathbf{e}_x] = \dot{Z}_{c2} [\mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}], \quad (6.46)$$

яке називається **наближеною граничною умовою Леонтовича – Шукіна**. З нього виходить, що на поверхні реального металу тангенційна компонента електричного поля вельми мала, оскільки характеристичний опір $\dot{Z}_{c2} = (1 + j) / (\Delta \sigma)$ гарного провідника є дуже малою величиною. Однак у ряді випадків цією компонентою поля нехтувати не можна, особливо коли йдеться про розрахунок потужності теплових втрат електромагнітного поля. Річ у тім, що саме тангенційні компоненти полів визначають величину густини потоку потужності, яка проникає через поверхню всередину провідника і розсіюється в ньому. Дійсно, комплексний вектор Пойнтінга, спрямований всередину провідника, в даному випадку має вигляд

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}, \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}^*] = \frac{1}{2} Z_{c2} [[\mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}], \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}^*] = \mathbf{e}_y \frac{1+j}{2\sigma\Delta} |\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}|^2.$$

Знаючи вектор Пойнтінга, легко знайти потужність втрат у провіднику на ділянці площиною S

$$P_{\text{втр}} = \operatorname{Re} \left\{ \int_S \dot{\mathbf{P}} ds \right\} = \frac{1}{2\sigma\Delta} \int_S |\dot{H}_{1\tau}|^2 ds.$$

Тепер покажемо, що характеристичний опір провідника Z_{c2} є одночасно й його **поверхневим імпедансом** Z_s . Для цього необхідно припустити, що провідник є ідеальним і всередині нього відсутні електричні та магнітні поля, а по його поверхні проходить струм провідності, поверхнева густина якого дорівнює $\dot{\mathbf{J}}_s$. Цей струм провідності викликаний наявністю тангенційної компоненти електричного поля \dot{E}_τ і зв'язаний з нею законом Ома, який у даному випадку можна записати у вигляді $\dot{E}_\tau = Z_s \dot{\mathbf{J}}_s$. Підставляючи сюди \dot{E}_τ та враховуючи граничні умови для тангенційної компоненти магнітного поля $\dot{\mathbf{J}}_s = [\mathbf{e}_x, \mathbf{H}_\tau]$, маємо:

$$\dot{Z}_{c2} [\mathbf{e}_x, \mathbf{H}] = \mathbf{J}_s \dot{Z}_s,$$

звідки виходить рівність:

$$\dot{Z}_s \approx \dot{Z}_{c2} \approx (1+j)/\sigma\Delta, \quad (6.47)$$

яка свідчить про те, що поверхневий опір провідника збігається з його характеристичним опором.

Приклад 6.5. Плaska хвиля з частотою 10 ГГц має амплітуду електричного вектора $E^n = 300 \text{ В/м}$ і падає у напрямку нормалі на метал (мідь) з параметрами $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu = 1$. Знайти середнє значення вектора Пойнтінга, який проходить у друге середовище.

Розв'язок. Амплітуда вектора H падаючої хвилі

$$H^n = E^n / Z_{c1} = 0,796 \text{ А/м}.$$

Характеристичний опір середовища згідно з (6.47) і прикладом (6.4)

$$Z_{c2} = 0,026(1 + j) \text{ Ом.}$$

У силу виконання граничних умов на поверхні добре провідного середовища тангенційна компонента \dot{H} подвоюється і становить

$$\dot{H}_\tau = 2H^n = 1,59 \text{ А/м.}$$

Звідси $\dot{E}_\tau = Z_{c2} \dot{H}_\tau = 0,0413(1 + j) \text{ В/м.}$

Середнє значення вектора Пойнтінга хвилі, що пройшла,

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \dot{E}_\tau \dot{H}_\tau^* \} = 3,29 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}^2.$$

Середній потік вектора Пойнтінга падаючої хвилі

$$\bar{\Pi}^n = (E^n)^2 / 2Z_{c1} = 119,4 \text{ Вт/м}^2.$$

Таким чином, на втрати у металі йде лише $(\bar{\Pi} / \bar{\Pi}^n) = 2,8 \cdot 10^{-4}$ частки енергії первинної хвилі.

Оцінімо тепер коефіцієнти відбиття від металу хвиль з різною поляризацією, вважаючи, що кут їх падіння φ помітно відрізняється від 90° :

$$\begin{aligned} \dot{R}_\perp &= \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi - \dot{Z}_{c1} \cos \theta}{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi + \dot{Z}_{c1} \cos \theta} = \frac{(\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}) \cos \varphi - \cos \theta}{(\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}) \cos \varphi + \cos \theta} \approx \\ &\approx -1 + 2 \frac{\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c1}} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_\parallel &= \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \dot{\theta} - \dot{Z}_{c1} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \dot{\theta} + \dot{Z}_{c1} \cos \varphi} = \frac{(\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}) \cos \dot{\theta} - \cos \varphi}{(\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}) \cos \dot{\theta} + \cos \varphi} \approx \\ &\approx -1 + 2 \frac{\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c1}} \frac{1}{\cos \varphi}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Чим кращий провідник, тим менше відношення $\dot{Z}_{c2} / \dot{Z}_{c1}$ і тим ближче коефіцієнти відбиття до -1 . Легко показати, що в граничному випадку друге середовище стане ідеальним провідником, у

якого $\sigma_2 \rightarrow \infty$ і $\dot{Z}_{c2} = 0$ коефіцієнти відбиття й проходження не залежатимуть від кутів падіння φ :

$$\dot{R}_\perp = \dot{R}_\parallel = -1, \quad \dot{T}_\perp = \dot{T}_\parallel = 0.$$

Отримані вище співвідношення дозволяють проаналізувати структуру ЕМП при відбитті хвиль від ідеально провідної нескінченної площини.

У першому середовищі відбувається **інтерференція** падаючої хвилі з відбитою, у другому – поле відсутнє ($\sigma_2 = \infty$).

Наведемо у дійсній формі кінцеві записи для миттєвих значень векторів поля у першому середовищі.

Розглянемо випадок **нормальної поляризації** (рис. 6.1, а), для якого отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{e}_y 2E^n(0) \sin(\beta_{1x}x) \cos\left(\omega t - \beta_{1z}z + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \mathbf{e}_y E_y(x) \sin(\omega t - \beta_{1z}z), \quad E_y(x) = 2E^n(0) \sin(\beta_{1x}x), \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y, z, t) &= -\mathbf{e}_x H_x(x) \sin(\omega t - \beta_{1z}z) + \\ &+ \mathbf{e}_z H_z(x) \cos(\omega t - \beta_{1z}z), \\ H_x(x) &= \frac{2E^n(0)}{Z_{c1}} \sin(\beta_{1x}x) \sin \varphi, \\ H_z(x) &= \frac{2E^n(0)}{Z_{c1}} \cos(\beta_{1x}x) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.51)$$

У виразах (6.50), (6.51) $E^n(0)$ – напруженість електричного поля на межі поділу ($x = 0$).

Як видно з наведених формул, ЕМП являє собою **пласку біжучу хвилю** (множник $\sin(\omega t - \beta_{1z}z)$), яка поширюється у напрямку осі Z . Хвиля є **неоднорідною**, оскільки амплітуди складових векторів ЕМП залежать від координати x . Електричне поле має одну складову E_y і поляризоване лінійно. Магнітне поле має дві складові: H_x

та H_z . Складова H_x синфазна з E_y і лежить у поперечній до напрямку поширення ЕМХ площині. Складова H_z лежить у напрямку осі Z , зміщена за фазою з H_x та E_y на $\pi/2$. Магнітне поле поляризоване еліптично. **ЕМХ такої структури зветься Н-хвилями** ($E_z = 0, H_z \neq 0$), **або поперечно-електричними хвилями**. Вздовж осі X поле розподілене за законом стоячої хвилі.

Основні характеристики результуючого поля при відбитті хвилі на межі поділу діелектрик – ідеальний провідник:

- коефіцієнт фази

$$\beta_{1z} = k \sin \varphi < k;$$

- фазова швидкість

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_{1z}} = \frac{\omega}{k \sin \varphi} = \frac{v_1}{k \sin \varphi} > v_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}}};$$

- довжина хвилі

$$\lambda_{1z} = \frac{2\pi}{\beta_{1z}} = \frac{2\pi}{k_1 \sin \varphi} = \frac{\lambda_1}{\sin \varphi} > \lambda_1;$$

- довжина стоячої хвилі

$$\lambda_{1x} = \frac{2\pi}{\beta_{1x}} = \frac{\lambda_1}{\cos \varphi} > \lambda_1.$$

Інтерференційна картина поля хвилі типу H та графіки розподілу складових поля для фіксованого моменту часу наведені на рис. 6.8.

Магнітні силові лінії \mathbf{H} замкнені і лежать у площині XOZ , силові лінії \mathbf{E} нескінченні і перпендикулярні площині $Y = \text{const}$.

У площинах $A1 - A1, A2 - A2 \dots$, рівняння яких $x_n = -n \frac{\lambda_{1x}}{2}$,

$n = 1, 2, 3, \dots$ тангенційна складова електричного поля E_y і нормальна складова магнітного поля дорівнюють нулю (рис. 6.8).

Тому у ці **вузлові площини** можна помістити ідеально провідні пластини, не порушуючи структуру ЕМП. Таким чином отримали спрямовуючу систему, яка складається із двох ідеально провідних паралельних пластин з **мінімальною** відстанню a між ними (при $n = 1$):

$$a = \left| \frac{\lambda_{1x}}{2} \right| = \frac{\lambda_1}{2 \cos \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\lambda_1}{2}.$$

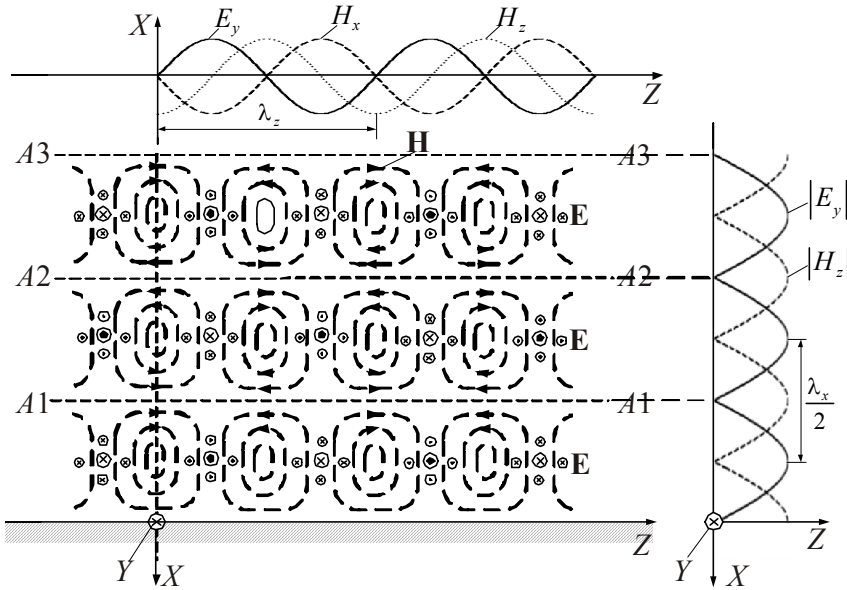


Рис. 6.8

Граничні умови на будь-якій ідеально провідній площині, рівняння якої $Y = \text{const}$, також задовольняють рівнянням ЕМП. Обмеживши область поширення поля додатково двома стінками $y_1 = 0$, $y_2 = b$, отримаємо прямокутний хвилевод розмірами $a \times b$. Як правило, у прямокутних хвилеводах використовують хвилі типу Н, а розміри хвилеводу вибирають з умови $a \approx 0,7\lambda_1$, $b \approx a/2$.

Аналогічно можна проаналізувати структуру ЕМХ при падінні на межу поділу ідеальних середовищ діелектрик-провідник хвилі з паралельною поляризацією (див. рис. 6.1, б).

З фізичних міркувань зрозуміло, що у результаті інтерференції падаючої та відбитої хвилі уздовж осі X буде структура стоячої хвилі, уздовж осі Z – біжучої. У напрямку осі Z поширюється неоднорідна біжуча хвиля. Структура силових ліній результуючого поля у цьому випадку для фіксованого моменту часу наведена на рис. 6.9.

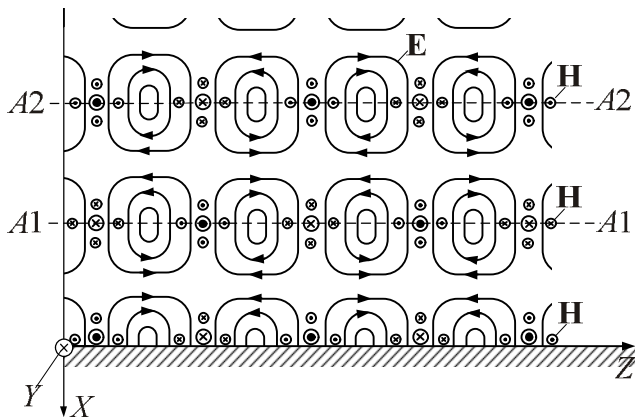


Рис. 6.9

Із порівняння рис. 6.8 і 6.9 видно, що лінії електричного та магнітного полів помінялися місцями. Лінії магнітного поля лежать у поперечній площині ($Z = \text{const}$), лінії електричного поля мають дві складові: E_z та E_x . Такі хвилі ($H_z = 0, E_z \neq 0$) зовуться **Е-хвилями – поперечно-магнітними хвилями**.

У площинах $A1 - A1, A2 - A2 \dots$ також можна розмістити ідеально провідні пластини без збурення ЕМП і реалізувати плоский хвилевод.

6.8. Відбиття плоских хвиль від рухомої межі поділу двох середовищ. Ефект Доплера

Розглянемо падіння плоскої ЕМХ на межу поділу двох середовищ, яка лежить у площині $x = x_0$. Вважатимемо, що перше середовище є ідеальним діелектриком, а падаюча хвиля спрямована по нормалі до поверхні поділу, тобто кут падіння $\varphi = 0$. Тоді поля падаючої і відбитої хвиль можна записати як:

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{п}}(x) = \dot{\mathbf{E}}^{\text{п}} e^{-jk_1 x}, \quad \dot{\mathbf{E}}^{\text{в}}(x) = \dot{\mathbf{E}}^{\text{в}} e^{jk_1 x}. \quad (6.52)$$

Знайдемо комплексну амплітуду відбитої хвилі $\dot{\mathbf{E}}^{\text{в}}$, вважаючи, що амплітуда падаючої хвилі $\dot{\mathbf{E}}^{\text{п}}$ і коефіцієнт її відбиття \dot{R} від поверхні розподілу $x = x_0$ нам відомі:

$$\dot{E}^B(x_0) = \dot{R}\dot{E}^n(x_0).$$

Підставляючи у вираз значення напруженості полів падаючої і відбитої хвиль, маємо

$$\dot{E}^B e^{jk_1 x_0} = \dot{R}\dot{E}^n e^{-jk_1 x_0},$$

звідки знаходимо

$$\dot{E}^B = \dot{R}\dot{E}^n e^{-j2k_1 x_0}. \quad (6.53)$$

Знаючи \dot{E}^B , вираз (6.52) можна записати у вигляді

$$\dot{E}^B(x) = \dot{R}\dot{E}^n e^{jk_1(x-2x_0)}. \quad (6.54)$$

Залежність напруженості електричного поля відбитої хвилі від часу

$$E^B(x, t) = E_0^B \cos[\omega t + \beta_1 \cdot (x - 2x_0) + \varphi^B], \quad (6.55)$$

де $\varphi^B = \arg\{E^n\} + \arg\{\dot{R}\}$, $E_0^B = RE^n$.

Тепер припустимо, що площина $x = x_0$, яка ділить два різних середовища, рухається вздовж X із швидкістю v_0 , значно меншою від швидкості руху хвилі у першому середовищі $v_1 = 1/\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}$. Тоді положення площини поділу змінюватиметься в часі за лінійним законом $x_0 = v_0 t$, а залежність напруженості поля від часу набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} E^B(x, t) &= E_0^B \cos[\omega t + \beta_1 x - 2\beta_1 v_0 t + \varphi^B] = \\ &= E_0^B \cos[(\omega - 2\beta_1 v_0)t + \beta_1 x + \varphi^B] = \\ &= E_0^B \cos[(\omega - \Omega)t + \beta_1 x + \varphi^B] = E_0^B \cos(\omega_1 t + \beta_1 x + \varphi^B) \end{aligned} \quad (6.56)$$

де $\Omega = 2\beta_1 v_0 = \omega \frac{2v_0\beta_1}{\omega} = 2\omega \frac{v_0}{v_1}$, $\omega_1 = \omega - \Omega$.

Якщо межа поділу рухається вздовж осі X в позитивному напрямку, тобто віддаляється від джерела ЕМХ $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_x v_0$, то $\Omega > 0$ і $\omega_1 = \omega - \Omega < \omega$. В тому разі, коли межа поділу рухається в напрямку до джерела хвиль, тобто наближається до нього, то $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{e}_x v_0$, звідки $\Omega < 0$ і $\omega_1 = \omega - \Omega > \omega$.

Явище зміни частоти електромагнітної хвилі при відбитті її від межі поділу двох середовищ, що рухається вздовж напрямку поширення хвилі, називається ефектом Доплера, а величина Ω , на яку частота відбитої хвилі відрізняється від частоти падаючої, називається частотою Доплера.

Пласка межа поділу двох середовищ в задачі, яка розглядається, відіграла роль деякого відбивача, від якого відбивалась первинна падаюча хвиля. Таку саму роль може відігравати будь-яке рухоме тіло або поверхня, здатна відбивати електромагнітні хвилі, наприклад літак, автомобіль, чи людина. Тому ефект Доплера широко використовується в техніці, зокрема радіолокації, для виявлення та селекції рухомих цілей, а також визначення швидкості їх руху.

Завдання для самостійного розв'язку

1. Пласка ЕМХ падає нормально на межу поділу між вакуумом і металом з питомою електричною провідністю $\sigma = 6 \cdot 10^7$ См/м. Визначити коефіцієнт відбиття по електричному полю на частоті 10 ГГц, якщо $\mu_a = \mu_0$.

2. Пласка ЕМХ з частотою 10 МГц і середнім значенням густини потоку потужності 1 Вт/м² падає нормально з вакууму на поверхню металу з питомою електричною провідністю $\sigma = 6 \cdot 10^7$ См/м. Визначити напруженість електричного поля у металі безпосередньо біля межі поділу.

3. Пласка ЕМХ падає нормально на межу поділу між вакуумом і діелектриком з параметрами $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. Визначити середнє значення густини потоку потужності в діелектрику, якщо середнє значення густини потоку падаючої хвилі 1 Вт/м².

4. Пласка ЕМХ, вектор напруженості електричного поля якої лежить у площині падіння, падає з діелектрика з параметрами $\epsilon_{a1} = 9\epsilon_0$, $\mu_{a1} = \mu_0$, $\sigma_1 = 0$ на поверхню діелектрика з параметрами $\epsilon_{a2} = \epsilon_0$,

$\mu_{a2} = \mu_0$, $\sigma_2 = 0$. При яких кутах падіння: а) вся енергія падаючої хвилі переходить у друге середовище; б) вся енергія падаючої хвилі відбивається від межі поділу?

5. Плaska ЕМХ з коловою поляризацією падає з вакууму на поверхню плавленого кварцу ($\epsilon_a = 3,8\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$). Визначити кут падіння, при якому колова поляризація перетворюється в лінійну.

6. Плaska ЕМХ з коловою поляризацією падає з вакууму під кутом φ на межу поділу із середовищем, показник заломлення якої дорівнює 1,531. Знайти вид поляризації відбитої хвилі для кутів падіння 0° , 45° , $51'$.

7. Паралельно поляризована хвиля, що поширюється у повітрі, падає під кутом ковзання на пласку межу поділу з діелектриком, параметри якого $\epsilon_a = 3\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. Визначити амплітуду вектора \mathbf{E} відбитої хвилі, якщо амплітуда падаючої хвилі дорівнює 100 мВ/м .

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення поняття площини падіння ЕМХ на межу розподілу двох середовищ.

2. Дайте визначення поняття падаючої ЕМХ з нормальною та паралельною поляризацією.

3. Визначіть граничні умови на межі поділу двох діелектриків (діелектрик-ідеальний провідник).

4. Дайте визначення поняття комплексного коефіцієнта відбиття та проходження.

5. Сформулюйте методику розрахунку коефіцієнтів Френеля.

6. Сформулюйте особливості хвильових явищ на межі поділу двох діелектриків без втрат.

7. Дайте визначення кута Брюстера та критичного кута падіння.

8. Дайте визначення явища повного відбиття ЕМХ на межі розподілу двох немагнітних діелектриків.

9. Сформулюйте властивості спрямованої хвилі у першому середовищі і поверхневої хвилі у другому середовищі при повному відбитті ЕМХ.

10. Дайте визначення поняття глибини проникнення поля ЕМХ у середовище. Як глибина проникнення залежить від частоти?

11. Дайте визначення ефекту Доплера. Від яких факторів залежить частота Доплера?

СКОРОЧЕНИЙ БІОГРАФІЧНИЙ СЛОВНИК

АМПЕР (Ampère) **АНДРЕ МАРІ** (1775 – 1836) – французький фізик, математик і хімік. Основні праці присвячені електродинаміці. У 1820 р. сформулював правило для визначення дії магнітного поля струму на магнітну стрілку (правило Ампера). Відкрив механічну взаємодію електричних струмів та встановив його закон (закон Ампера). Відкрив (1822) магнітний ефект котушки з струмом – соленоїда. Винайшов комутатор, електромагнітний телеграф.

БІО (Biot) **ЖАН БАТИСТ** (1774 – 1862) – французький фізик. Праці присвячені оптиці, історії науки. У 1815 р. відкрив поляризацію при заломленні (незалежно від Малюса), у 1815 р. – колову поляризацію (незалежно від Араго і Брюстера). Відкрив закон обертання площини поляризації (закон Біо). У 1820 р. разом із Саваром відкрив закон, який визначає напруженість магнітного поля прямого струму (закон Біо – Савара).

БРЮСТЕР (Brewster) **ДЕЙВИД** (1781 – 1868) – шотландський фізик. Основні праці присвячені дослідженню поляризації світла. Встановив закон, названий його ім'ям (1815).

ВЕБЕР (Veber) **ВІЛЬГЕЛЬМ ЕДУАРД** (1804 – 1891) – німецький фізик. Основні роботи присвячені електромагнетизму. Разом із Гауссом розробив абсолютну систему електричних і магнітних одиниць. Розробив теорію електродинамічних явищ та встановив закон взаємодії рухомих частин. У 1856 р. визначив швидкість світла. Автор теорії магнітних диполів (1854). Побудував першу електронну модель атома.

ВОЛЬТА (Volta) **АЛЕСАНДРО** (1745 – 1827) – італійський фізик, хімік та фізіолог, винахідник джерела постійного електричного струму. У 1799 р. сконструював перше хімічне джерело електричного струму – вольтів стовп. Відкрив у 1795 р. взаємну електризацію різнорідних металів при їх контакті (контактний струм) та розмістив метали у так званий ряд напруг (1801).

ГАУСС (Gauss) КАРЛ ФРІДРІХ (1777 – 1855) – німецький математик, астроном, фізик. Досліди присвячені багатьом розділам фізики. У 1832 р. створив абсолютну систему мір. У 1839 р. виклав ряд положень та теорем, наприклад основну теорему електростатики (теорема Гаусса-Остроградського). Ще в 1845 р. дійшов думки щодо кінцевої швидкості поширення електромагнітних взаємодій.

ГЕЛЬМГОЛЬЦ (Helmholtz) GERMAN ЛЮДВИГ ФЕРДИНАНД (1821 – 1894) – німецький вчений. Фізичні дослідження належать до оптики, електродинаміки, акустики, теплоти, гідродинаміки. У 1847 р. сформулював та математично обґрунтував закон збереження енергії. У 1881 р. висунув теорію атомарної будови струму.

ГЕНРІ (Henry) ДЖОЗЕФ (1797 – 1878) – американський фізик. Праці присвячені електромагнетизму. Першим сконструював потужні підковоподібні електромагніти у 1828 р. У 1831 р. відкрив принцип електромагнітної індукції, збудував електричний двигун. У 1832 р. відкрив явище самоіндукції, у 1842 р. встановив коливальний характер розряду конденсатора.

ГЕРЦ (Hertz) ГЕНРІХ РУДОЛЬФ (1857 – 1894) – німецький фізик. Основні праці належать до електродинаміки та механіки. У 1887 р. вперше розробив теорію відкритого вібратора, випромінюючого електромагнітні хвилі у просторі. Користуючись вібратором і резонатором, створеним у 1887 р., 1888 р. експериментально довів існування електромагнітних хвиль. Розвиваючи теорію Максвелла, він надав рівнянням електродинаміки симетричної форми. Експериментально довів тотожність основних властивостей електромагнітних хвиль і світових хвиль.

ГІЛЬБЕРТ (Gilbert) УІЛЬЯМ (1544 – 1603) – англійський фізик та лікар. В роботі «Про магніт, магнітні тіла та великий магніт-Земля» (1600) послідовно дослідив магнітні та електричні явища.

ГРІН (Green) ДЖОРДЖ (1793 – 1841) – англійський математик і фізик. Дослідження належать до інтегрального обчислення, теорії електрики та магнетизму. Заклав основу теорії потенціалу.

ГЮЙГЕНС (Huygens) ХРИСТІАН (1629 – 1695) – нідерландський вчений. Фізичні дослідження в області механіки, оптики, молекулярної фізики. Сконструював перший маятниковий годинник із спусковим механізмом (1656). Досліджував зіткнення твердих тіл та встановив у 1669 р. їх закони. У 1678 р. розробив хвильову теорію світла, відкрив його поляризацію. Для пояснення механізму поширення світла висунув принцип, названий на його честь (принцип Гюйгенса).

ЕРСТЕД (Ørsted) ХАНС КРИСТІАН (1777 – 1851) – датський фізик. Праці присвячені струму, акустиці, молекулярній фізиці. У 1820 р. помітив дію електричного струму на магнітну стрілку, що привело до виникнення нової галузі фізики – електромагнетизму. У 1822 – 1823 рр. незалежно від Фур'є перевірив термоелектричний ефект та побудував перший термоелемент.

КІРХГОФ (Kirchhof) ГУСТАВ РОБЕРТ (1824 – 1887) – німецький фізик. Праці присвячені струму, механіці, оптиці, математичній фізиці, теорії пружності, гідродинаміці. У 1845 – 1857 рр. відкрив закономірності в проходженні електричного струму у розгалужених електричних колах (правило Кірхгофа). Встановив у 1859 р. один із основних законів теплового випромінювання (закон Кірхгофа).

КУЛОН (Coulomb) ШАРЛЬ ОГЮСТЕН (1736 – 1806) – французький вчений. Праці належать до струму, магнетизму, прикладної механіки. Засновник електростатики. У 1781 р. сформулював закон тертя, кочення та ковзання. Встановив закони пружного крутіння. У 1785 р. встановив основний закон електродинаміки (закон Кулона).

ЛЕБЕДЕЄВ Петро Миколайович (1866 – 1912) – російський фізик. Уперше одержав (1895) і дослідив міліметрові хвилі.

Відкрив і дослідив тиск світла на тверді тіла (1899) і гази (1907), кількісно підтвердивши електромагнітну теорію світла.

ЛЕНЦ Емілій Христианович (1804 – 1865) – російський фізик і електротехнік. Установив (1833) правило, назване його ім'ям, експериментально обґрунтував закон Джоуля – Ленца (1842), розвив методи розрахунку електромагнітів, відкрив явища обрратимості електричних машин.

ЛОРЕНЦ (Lorentz) ХЕНДРИК АНТОН (1853 – 1928) – нідерландський фізик-теоретик. Праці в області електродинаміки, термодинаміки, оптики, статистичної механіки, атомної фізики. У 1880 – 1909 рр. створив класичну електронну теорію, виходячи з електромагнітної теорії Максвелла – Герца (рівняння Лоренца – Максвелла). Розробив теорію рухомих середовищ. Дав вираз для сили, що діє на рухомий заряд в електромагнітному полі (сила Лоренца). У 1892 р. незалежно від Фітцджеральда висунув гіпотезу про скорочення розмірів тіл у напрямку їх руху (скорочення Лоренца – Фітцджеральда).

МАКСВЕЛЛ (Maxwell) ДЖЕЙМС КЛЕРК (1831 – 1879) – англійський фізик. Праці присвячені електродинаміці, молекулярній фізиці, загальній статистиці, оптиці, механіці, теорії пружності. У 1859 р. встановив статистичний закон, що описує поділ молекул газу за швидкостями (розподіл Максвелла). У 1867 р. першим показав статистичну природу другого початку термодинаміки (закон Максвелла). У 1860 – 1865 рр. створив теорію електромагнітного поля, яку він сформулював у вигляді системи декількох рівнянь (рівняння Максвелла). Увів поняття струму зміщення та передрік важливий ефект: існування у вільному просторі електромагнітних хвиль. Виразував тиск світла (1873). Встановив співвідношення між основними теплофізичними параметрами (термодинамічні співвідношення Максвелла).

ОМ (Ohm) ГЕОРГ СИМОН (1787 – 1854) – німецький фізик. Дослідження в області струму, акустики, оптики, кристалооптики. У 1826 р. відкрив основний закон електричного кола, що зв'язує між собою сили струму, напруги та опору (закон Ома).

ОСТРОГРАДСЬКИЙ МИХАЙЛО ВАСИЛЬОВИЧ (1801 – 1862) – російський математик та механік. Основні праці в області математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки. У 1826 р. вирішив найважливіше завдання поширення тепла в твердих тілах та рідинах, ввів диференційне рівняння. У 1828 р. довів теорему про перетворення інтегралів. Відомий теоремою Гаусса – Остроградського в електростатиці.

ПОЙНТИНГ (Poynting) ДЖОН ГЕНРІ (1852 – 1914) – англійський фізик. Праці присвячені вивченню електричних явищ, перенесення енергії, теорії випромінювання та тиску світла, радіації. У 1884 р. ввів

поняття потоку електромагнітної енергії (вектор Умова – Пойнтінга). У 1903 р. висловив ідею про гальмування сонячним світлом геліоцентричного руху космічних тіл (ефект Пойнтінга – Робертсона).

ПОПОВ ОЛЕКСАНДР СТЕПАНОВИЧ (1859 – 1906) – російський фізик, винахідник радіо. Дослідження належать до різноманітних проблем електротехніки і радіотехніки. У 1894 р. сконструював генератор електромагнітних коливань та когерер – елемент приймача, чутливий до електромагнітних хвиль. Створив пристрій для реєстрації розрядів на значних відстанях – грозопозначник. 7 травня 1895 р. продемонстрував свій грозопозначник на засіданні фізичного відділення Російського фізико-хімічного товариства. У 1897 р. вперше побачив явище відбиття хвиль, яке було покладено в основу радіолокації.

РЕЛЕЙ (Rayleigh) ДЖОН УІЛЬЯМ (1842 – 1919) – англійський фізик, один із засновників теорії коливань. Фундаментальні праці з теорії акустики, розсіювання світла, електродинаміки (закон розсіювання світла, закон намагнічення, випромінювання абсолютно чорного тіла та ін.)

САВАР (Savart) ФЕЛІКС (1791 – 1841) – французький фізик. Праці належать до акустики, електромагнетизму, оптики. Разом із Біо у 1820 р. встановив закон, що визначає напруженість магнітного поля, яке створює електричний струм (закон Біо – Савара – Лапласа).

СНЕЛЛІУС (Snellius) ВІЛЛЕБРОРД (1580 – 1626) – нідерландський астроном і математик. Встановив закон заломлення світла.

СТОКС (Stokes) ДЖОРДЖ ГАБРІЕЛЬ (1819 – 1903) – англійський фізик і математик. Праці належать до гідродинаміки, оптики, спектроскопії, математичної фізики.

ТЕСЛА (Tesla) НІКОЛА (1856 – 1943) – сербський вчений в області електротехніки і радіотехніки. З 1884 р. працював у США. У 1886 р. (незалежно від Ферраріса) відкрив явище обертового магнітного поля, на основі якого побудував електричні генератори. У 1891 р. винайшов височастотний трансформатор (трансформатор Тесли). Сконструював ряд радіокерованих механізмів. Досліджував можливо-

сті безпроводової передачі енергії.

УМОВ МИКОЛА ОЛЕКСІЙОВИЧ (1846 – 1915) – російський фізик. Праці присвячені теорії коливальних процесів, струму, оптиці, земному магнетизму, молекулярній фізиці. Створив вчення про рух енергії. Стосовно електромагнітного поля вперше ввів поняття про потік електромагнітної енергії за допомогою спеціального вектора (вектор Умова – Пойнтінга).

ФАРАДЕЙ (Faraday) МАЙКЛ (1791 – 1867) – англійський фізик, один із засновників теорії електромагнетизму. Дослідження в галузі струму, магнетизму, магнітооптики, електрохімії. У 1821 р. першим забезпечив обертання магніту навколо провідника зі струмом та провідника зі струмом навколо магніту, створивши тим самим модель електродвигуна. У 1831 р. відкрив явище електромагнітної індукції та встановив її закони, у 1835 р. екстраструми під час зімкнень та розімкнень, довів тотожність відомих тоді видів струму. У 1833 р. відкрив закони електролізу (закон Фарадея). Ввів поняття поля. У 1843 р. довів закон збереження електричного заряду.

ФРЕНЕЛЬ (Fresnel) ОГЮСТЕН ЖАН (1788 – 1827) – французький фізик. Праці присвячені фізичній оптиці. У 1815 р. перевідкрив принцип інтерференції, доповнив відомий принцип Гюйгенса, ввів у 1816 р. уявлення про когерентні елементарні хвилі (принцип Гюйгенса – Френеля). У 1818 р. розробив теорію дифракції світла. У 1821 р. довів поперечність світлових хвиль. У 1823 р. встановив закони відбиття та заломлення на пласкій нерухомій поверхні двох речовин (формули Френеля).

ФРАУНГОФЕР (Fraunhofer) ЙОЗЕФ (1787 – 1826) – німецький фізик. Удосконалив виготовлення лінз та дифракційних решіток. Описав лінії поглинання у спектрі Сонця.

Додаток Б

**ЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОЇ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ
ПРОНИКНОСТІ ДЕЯКИХ РЕЧОВИН ПРИ $t = 20^0 C$**

Речовина	ϵ	Речовина	ϵ
Повітря (сухе)	1,00058	Слюда	5,7...7
Фторопласт ФФ-4	2	Склотекстоліт СФ-1-35	6
Нафта	2,1	Стеатит (кераміка)	6,25
Папір	2...2,5	Полікор (кераміка)	9,6
Дерево	2,2...3,7	Сапфір	9,4...11,7
Поліетилен	2,25	Грунт (піщаний)	10
Полістирол	2,55	Грунт (скелястий)	14
Ебоніт	2,5...2,8	Кремній (високоомний)	11,7
Лід	3,2	Арсенід галію	13,3
Плавлений кварц	3,8	Ферити	5...16
Скло (боросилікатне)	4	Вода (дистильована)	80,4
Полістирол, наповнений оксидом титану ПТ-5	5	Конденсаторна кераміка ТЛ/750	100
Фарфор	5...6,8	Титанат барію ($BaTiO_3$)	300...1500

Додаток В

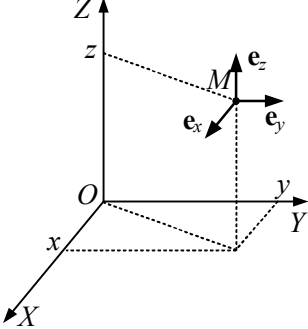
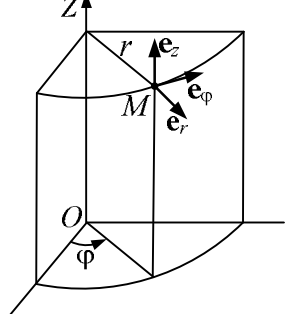
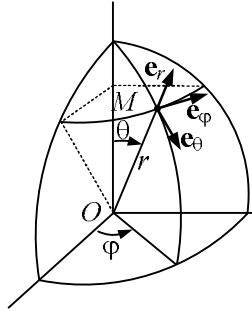
**ЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОЇ МАГНІТНОЇ ПРОНИКНОСТІ
ДЕЯКИХ РЕЧОВИН ПРИ $t = 20^0 C$**

Речовина	μ	Речовина	μ
<i>Парамагнетики</i>		<i>Феромагнетики</i>	
Повітря	1,0000004	НЧ ферити	До 10^5
Ебоніт	1,000014	Залізо (трансформаторне)	10^4
Алюміній	1,000023	Пермалой (78% Ni, 22% Fe)	$8 \cdot 10^4$
Кисень (рідкий)	1,0034	Чисте залізо (відпалене)	$2,8 \cdot 10^5$
<i>Діамагнетики</i>			
Вода	0,999991		
Мідь	0,9999904		
Скло	0,999987		

**ЗНАЧЕННЯ ПИТОМОЇ ПРОВІДНОСТІ
ДЕЯКИХ РЕЧОВИН ПРИ $t = 20^0C$**

Речовина	$\sigma / 10^7, \text{См/м}$	Речовина	$\sigma, \text{См/м}$
Срібло	6,1	Вода (морська)	3,3
Мідь	5,8	Германій	2,13
Золото	4,13	Грунт (вологий)	10^{-2}
Алюміній	3,54	Вода (дистильована)	10^{-4}
Латунь (90% <i>Cu</i>)	2,41	Кварц	10^{-9}
Цинк	1,69	Суха деревина	$10^{-9} \dots 10^{-10}$
Латунь (70% <i>Cu</i>)	1,45	Скло	$10^{-9} \dots 10^{-13}$
Нікель	1,37	Слюда	$10^{-11} \dots 10^{-13}$
Графіт	1,25	Пінопласт	10^{-11}
Платина	1,0	Склотекстоліт	$10^{-11} \dots 10^{-12}$
Залізо	1,0	Гума	$10^{-11} \dots 10^{-12}$
Олово	0,88	Полістирол	$10^{-13} \dots 10^{-15}$
Сталь (вилита)	0,77	Поліетилен	10^{-15}
Свинець	0,48	Ебоніт	$10^{-12} \dots 10^{-14}$
Чавун (сірий)	0,1	Фарфор	$3 \cdot 10^{-13}$
Кремній	$1,7 \cdot 10^{-3}$	Повітря	$10^{-15} \dots 10^{-18}$

ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Найменування системи координат. Позначення координат і ортів	Рисунок системи координат	Визначення координатних поверхонь
<p>Декартова x, y, z $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Площина $x = \text{const}$ 2. Площина $y = \text{const}$ 3. Площина $z = \text{const}$
<p>Циліндрична r, φ, z $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Коловий циліндр $r = \text{const}$ 2. Площина $\varphi = \text{const}$ 3. Площина $z = \text{const}$
<p>Сферична r, θ, φ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Сфера $r = \text{const}$ 2. Конічна поверхня $\theta = \text{const}$ з вершиною на початку координат 3. Площина $\varphi = \text{const}$

ФОРМУЛИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

ВИЗНАЧЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1. Запис векторів у декартових координатах:

\mathbf{a} і \mathbf{b} – вектори; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – координатні орти;

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x a_x + \mathbf{e}_y a_y + \mathbf{e}_z a_z, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_x b_x + \mathbf{e}_y b_y + \mathbf{e}_z b_z, \quad (\text{E.1})$$

де a_x, a_y, a_z та b_x, b_y, b_z – проекції векторів на осі координат.

$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – модуль (довжина) вектора.

2. Скалярний добуток двох векторів

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = ab \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{E.2})$$

3. Векторний добуток двох векторів

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}_n ab \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (\text{E.3})$$

де \mathbf{e}_n – орт нормалі до площини, у якій лежать обидва вектори.

Напрямок \mathbf{e}_n визначається за правилом правого гвинта.

4. Подвійний векторний добуток

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}). \quad (\text{E.4})$$

5. Потік векторного поля \mathbf{R} через поверхню S :

$$\Phi = \oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint_S R_n dS, \quad (\text{E.5})$$

Продовження додатку Е

де $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_n dS$; \mathbf{e}_n – орт зовнішньої нормалі до елемента $d\mathbf{S}$ замкненої поверхні S .

6. Циркуляція вектора \mathbf{R} по контуру L

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l} = \oint_L R_t dl, \quad (\text{E.6})$$

де dl – елемент замкненого контура L ; R_t – дотична до контура складова вектора \mathbf{R} .

7. Градієнт скалярної функції u

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_n \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (\text{E.7})$$

де \mathbf{e}_n – орт нормалі до поверхні $u = \text{const}$.

8. Дивергенція вектора \mathbf{R}

$$\text{div } \mathbf{R} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S}}{\Delta V}, \quad (\text{E.8})$$

де S – поверхня, що обмежує об'єм ΔV .

9. Ротор (вихор) вектора \mathbf{R} .

Ротор векторного поля \mathbf{R} в точці M – це вектор, проекція якого на нормаль до площадки ΔS дорівнює

$$\mathbf{e}_n \text{rot} \mathbf{R} = \text{rot}_n \mathbf{R} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l}}{\Delta S}, \quad (\text{E.9})$$

де ΔS – пласка площадка, обмежена контуром L , $\text{rot}_n \mathbf{R}$ – проекція вектора $\text{rot} \mathbf{R}$ на нормаль \mathbf{e}_n до площадки ΔS .

Продовження додатку Е

Точка M належить ΔS .

ОПЕРАЦІЇ В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Векторний оператор Гамільтона (набла)

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{E.10})$$

$$\text{grad } u = \nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{E.11})$$

$$\text{div } \mathbf{R} = \nabla \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}. \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{R} &= [\nabla, \mathbf{R}] = \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Оператор Лапласа (лапласіан)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{E.14})$$

ОПЕРАЦІЇ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{E.15})$$

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{E.16})$$

Продовження додатку Е

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rR_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R_z}{\partial z}. \quad (\text{E.17})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{R} = \mathbf{e}_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial R_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial R_\varphi}{\partial z} \right] + \mathbf{e}_\varphi \left[\frac{\partial R_r}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial r} \right] + \mathbf{e}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rR_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial R_r}{\partial \varphi} \right]. \quad (\text{E.18})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{E.19})$$

ОПЕРАЦІЇ В СФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{E.20})$$

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad (\text{E.21})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 R_r) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta R_\theta) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (\text{E.22})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{R} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta R_\varphi) - \frac{\partial R_\theta}{\partial \varphi} \right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial R_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rR_\varphi)}{\partial r} \right] + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rR_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial R_r}{\partial \theta} \right]. \quad (\text{E.23})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{E.24})$$

ОПЕРАЦІЇ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ В КРИВОЛІНІЙНИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ КООРДИНАТАХ

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3},$$

$$\text{div } \mathbf{R} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_2 h_3 R_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 R_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 R_3)}{\partial q_3} \right\},$$

$$\text{rot } \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1/h_2 h_3 & \mathbf{e}_2/h_3 h_1 & \mathbf{e}_3/h_1 h_2 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1 R_1 & h_2 R_2 & h_3 R_3 \end{vmatrix}.$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right\}.$$

У наведених формулах:

\mathbf{e}_i – орти відповідної криволінійної системи координат;

q_i – координати;

h_i – метричні коефіцієнти, що пов'язують диференціал довжини по i -й координаті з диференціалом координати ($dl = h_i dq_i$).

Для двох найбільш часто застосовуваних систем координат (сферичної та циліндричної) формули легко конкретизуються за допомогою табл. Е.1.

Таблиця Е.1

Сферичні координати				Циліндричні координати		
i	1	2	3	1	2	3
q_i	r	θ	φ	r	φ	z
\mathbf{e}_i	\mathbf{e}_r	\mathbf{e}_θ	\mathbf{e}_φ	\mathbf{e}_r	\mathbf{e}_φ	\mathbf{e}_z
h_i	1	r	$r \sin \theta$	1	r	1

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

Теорема Остроградського-Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV = \oint_S \mathbf{R} d\mathbf{S}. \quad (\text{E.25})$$

Теорема Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{R} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{R} d\mathbf{l}. \quad (\text{E.26})$$

Теорема Гріна:

$$\int_V (\nabla\psi\nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi) dV = \oint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS, \quad (\text{E.27})$$

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi) = \oint_S \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{E.28})$$

ДЕЯКІ ТОТОЖНОСТІ

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi, \quad (\text{E.29})$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{R}) = (\mathbf{R}\operatorname{grad}\varphi) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{R}, \quad (\text{E.30})$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{R}, \mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{R} - \mathbf{R} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (\text{E.31})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{R} = 0, \quad (\text{E.32})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0, \quad (\text{E.33})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{R} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{R} - \nabla^2 \mathbf{R}, \quad (\text{E.34})$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{R}) = [\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{R}] + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{R}, \quad (\text{E.35})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u, \quad (\text{E.36})$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{R}, \mathbf{B}] = \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{R} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{R} - (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{B}. \quad (\text{E.37})$$

ЗМІСТ

Перелік скорочень та умовних позначень	3
Предметний покажчик	5
ПЕРЕДМОВА	9
ВСТУП	10
1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ	12
1.1. Електромагнітне поле і його основні характеристики. Електромагнітні властивості середовищ	
1.1.1. Аналіз основних дослідних фактів	13
1.1.2. Джерела і вектори електромагнітного поля	19
1.1.3. Електромагнітні властивості середовищ	27
1.1.4. Силкові лінії поля	29
1.1.5. Класифікація середовищ	31
1.2. Система рівнянь Максвелла. Класифікація електромагнітних явищ	35
1.2.1. Умова макроскопічності	35
1.2.2. Рівняння Максвелла в інтегральній формі	36
1.2.3. Рівняння Максвелла в диференційній формі	44
1.2.4. Висновки з рівнянь Максвелла	50
1.2.5. Класифікація електромагнітних явищ	52
1.3. Система рівнянь Максвелла для монохроматичних полів	56
1.3.1. Метод комплексних амплітуд	56
1.3.2. Рівняння Максвелла в комплексній формі	57
1.3.3. Класифікація середовищ за електричною провідністю	59
1.3.4. Сторонні струми і заряди. Повна система рівнянь Максвелла	61
1.4. Граничні умови для векторів електромагнітного поля	64
1.4.1. Граничні умови для нормальних складових ЕМП	64
1.4.2. Граничні умови для тангенційних складових ЕМП	66
1.4.3. Повна система граничних умов. Граничні умови на поверхні ідеального провідника	67
1.4.4. Фізична суть граничних умов	70
1.5. Енергія електромагнітного поля. Теорема Пойнтінга	75
1.5.1. Рівняння балансу миттєвих значень потужності	75
1.5.2. Перенесення енергії по лінії передачі	82
1.5.3. Рівняння балансу комплексної потужності	86

2. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ І ТЕОРЕМИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ	92
2.1. Класифікація задач електродинаміки	92
2.2. Принцип суперпозиції	93
2.3. Теорема єдиності розв'язання рівнянь Максвелла	94
2.3.1. Фізичний аналіз умов єдиності розв'язання рівнянь Максвелла	94
2.3.2. Теорема єдиності розв'язання внутрішньої задачі електродинаміки	96
2.3.3. Умови єдиності розв'язання зовнішньої задачі електродинаміки	98
2.4. Лема Лоренца. Теорема взаємності	100
2.5. Принцип переставної двоїстості	104
2.5.1. Симетрична система рівнянь електромагнітного поля	104
2.5.2. Суть принципу переставної двоїстості	105
2.6. Еквівалентні джерела електромагнітного поля	108
2.7. Хвильові рівняння і електродинамічні потенціали	110
2.7.1. Хвильові рівняння для векторів поля	110
2.7.2. Хвильові рівняння для електродинамічних потенціалів	112
2.7.3. Хвильові рівняння в комплексній формі	114
2.7.4. Запізнювальні потенціали	116
3. СТАТИЧНІ, СТАЦІОНАРНІ ТА КВАЗИСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ	123
3.1. Електростатика	123
3.1.1. Основні рівняння електростатики	123
3.1.2. Приклади розрахунку електростатичних полів	127
3.1.3. Електричне поле рівномірно зарядженої кулі	127
3.1.4. Розкладання поля на мультиполі. Поле електростатичного диполя	130
3.1.5. Енергія електростатичного поля	136
3.1.6. Ємність (конденсатори)	138
3.1.7. Електростатичний захист	141
3.1.8. Провідна і діелектрична кулі в однорідному електростатичному полі	143
3.2. Магнітостатика	148
3.2.1. Аналогія між магніто- та електростатикою	149
3.2.2. Приклади розрахунків магнітостатичних полів	151
3.3. Стаціонарні поля	153
3.3.1. Основні положення	153
	283

3.3.2. Порівняння стаціонарного електричного та електростатичного полів	155
3.3.3. Магнітне поле постійного струму. Лінійний струм	157
3.3.4. Приклади розрахунку магнітних полів лінійних струмів	160
3.3.5. Енергія стаціонарного магнітного поля	164
3.4. Квазістаціонарне наближення	167
4. ПЛАСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В НЕСКІНЧЕННОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ	171
4.1. Основні поняття теорії хвильових процесів	171
4.2. Однорідні хвильові рівняння. Хвильовий характер електромагнітного поля	173
4.3. Основні властивості пласкої однорідної електромагнітної хвилі в нескінченному середовищі	180
4.4. Пласкі хвилі в діелектриках і провідниках	183
4.5. Поляризація пласких електромагнітних хвиль	191
5. ПОШИРЕННЯ ПЛАСКИХ ОДНОРІДНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ	199
5.1. Анізотропні середовища	199
5.2. Плазма в магнітному полі	201
5.3. Параметри намагніченої плазми	205
5.4. Феромагнетики в магнітному полі	207
5.5. Параметри намагнічених феритів	208
5.6. Електромагнітні хвилі в анізотропному середовищі	212
5.7. Електромагнітні хвилі в гіротропному середовищі	216
5.8. Бі-ізотропні та бі-анізотропні середовища	231
6. ЯВИЩА ВІДБИТТЯ І ЗАЛОМЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ	236
6.1. Закони Снелліуса	236
6.2. Формули Френеля	239
6.2.1. Коефіцієнти відбиття і проходження хвиль з нормальною поляризацією	241
6.2.2. Коефіцієнти відбиття і проходження хвиль з паралельною поляризацією	243

6.3. Відбиття та заломлення плоских хвиль на межі ідеальних діелектриків	245
6.4. Поверхневі хвилі біля межі поділу двох середовищ	247
6.5. Побудова електромагнітного поля над межею поділу двох середовищ за наявності явища повного відбиття	250
6.6. Падіння плоскої хвилі на межу поглинального середовища. Поверхневий ефект	252
6.7. Відбиття і заломлення електромагнітних хвиль на межі поділу діелектрик-провідник	254
6.8. Відбиття плоских хвиль від рухомої межі поділу двох середовищ. Ефект Доплера	260
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	264
ДОДАТКИ	267

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Основна література

1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высш. шк., 1992. – 416 с.
2. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. Учеб. пособие / Под ред. И.Н. Топтыгина. – СПб: Изд-во «Лань», 2003. – 400 с.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
4. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 487 с.
5. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. – М.: Сов. радио, 1971. – 664 с.
6. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. – М.: Наука, 1966. – 240 с.
7. Ковалев И.С. Прикладная электродинамика. – Минск: Наука и техника, 1978. – 344 с.
8. Кугушев А.М., Голубева Н.С, Митрохин В.Н. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 368 с.
9. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Сов. радио, 1979. – 374 с.
10. Матвеев А.Н. Электродинамика: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1980. – 383 с.
11. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика / Под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2000. Т.1. – 509 с.
12. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика / Под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – М.: Радио и связь, 2001. Т.2. – 575 с.
13. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 544 с.
14. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. для вузов. М.: Радио и связь, 2000. – 559 с.
15. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Ю.В. Пименова. – М.: Радио и связь, 2000. – 536 с.

16. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн» / Под ред. С.И. Баскакова. – М.: Высш. шк., 1981.

17. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма: Пер с англ. / Под ред. С.М. Рытова. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 540 с.

18. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

19. Терлецкий. Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика: Учеб. пособие для студентов физ. спец. университетов. – М.: Высш. шк. 1990. – 352 с.

20. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм / Пер. с англ.; под ред. Я.А. Смородинского. – М.: Мир, 1966. – Т. 5.

21. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика / Пер. с англ; под ред. Я.А. Смородинского. – М.: Мир, 1966. – Т. 6.

До розділу 1

1. Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки. – М.: Высш. шк., 1989. – 576 с.

2. Григорьян А.Т., Вяльцев А.Н. Генрих Герц. – М.: Наука, 1968. – 308 с.

3. Карцев В. Приключения великих уравнений. – М.: Знание, 1986. – 288 с.

4. Туров Е.Л. Материальные уравнения электродинамики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 160 с.

5. Шимони К. Теоретическая электродинамика / Пер. с нем.; Под ред. К.М. Поливанова. – М.: Мир, 1964. – 775 с.

До розділу 2

1. Красюк Н.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – Л.: СЗПИ, 1968. Ч.1. Техническая электродинамика. – 272 с.

2. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. – М.: Высш. шк., 1980. – 399 с.

До розділу 3

1. Боровой А.А., Финкельштейн Э.Б., Херувимов А.Н. Законы электромагнетизма. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 168 с.

2. Миролубов Н.Н., Костенко М.В. Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. – М.: Высш. шк., 1963. – 415 с.

3. Бессонов В.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высш. шк., 1964. – 750 с.

До розділу 4

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики / Пер. с англ.; под ред. Г.П. Матулевич. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 383 с.
3. Кравченко И.Т. Теория волновых процессов. – Минск: Вышейш. шк., 1985. – 237 с.

До розділу 5

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967. – 683 с.
2. Микаэлян Ф.Л. Теория и применение ферритов на СВЧ. – М.; Л.: Госэнергоиздат., 1963. – 664 с.
3. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. – М.: Наука, 1973. – 502 с.
4. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. – М.: Связь, 1972. – 336 с.
5. Бокринская А.А., Вунтесмери В.С., Красилич Г.П. Радиотехнические устройства на основе геликоновых волн. – Киев: Вища шк., 1984. – 88 с.
6. Ильченко М.Е., Кудинов Е.В. Ферритовые и диэлектрические резонаторы СВЧ. – К.: КГУ, 1973. – 175 с.
7. Бокринська О.Я., Вунтесмері В.С., Кисляковський А.В. Ферромагнітний резонанс у техніці сантиметрових хвиль. К.: Техніка, 1966. – 106 с.
8. Ландсберг Г.С. Оптика. Изд.5. – М.: Наука, 1976. – 928 с.
9. Шевченко В.В. Киральные электромагнитные объекты и среды // Соросовский образовательный журнал. 1999. №2. Физика. С. 109 – 114.
10. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, би-изотропные и некоторые би-анизотропные материалы (обзор) // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. Вып. 10. С. 1457 – 1470.
11. Туров Е.А. Материальные уравнения электродинамики. – М.: Наука, 1983. – 158 с.

До розділу 6

1. Матвеев А.Н. Оптика: Учеб. пособие для физ. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 351 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики / Пер. с англ.; под ред. Г.П. Матулевич. – М.: Наука, 1973. – 720 с.

Навчальне видання

ШОКАЛО Володимир Михайлович
ПРАВДА Володимир Іванович
УСІН Володимир Ананійович
ВУНТЕСМЕРІ Володимир Семенович
ГРЕЦЬКИХ Дмитро Вячеславович

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ

Частина 1

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Підручник для студентів
вищих навчальних закладів

За загальною редакцією проф. В.М. Шокало та проф. В.І. Правди

Редактор Л.І. Сашенко
Виконавець комп'ютерної верстки Д.В. Грецьких

Підп. до друку. 01.03.2009. Формат 60x84 1/16. Гарнітура Таймс.
Умов. друк. арк.17, 79. Облік.-вид. арк. 16,27. Тираж 500 прим. Зам. №123.

ПФ «Колегіум», тел (057)703-53-74
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої діяльності
до державного реєстра видавців.
Сер. ДК №1722 от 23.03.2004.