

С.В. Соколов, Л.Д. Писаренко, В.О. Журба

# **ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА ОСНОВИ ТЕХНІКИ НВЧ**

Навчальний посібник

За загальною редакцією Г.С. Воробйова

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України

Суми  
Сумський державний університет  
2011

УДК 537.8+621.3.09(075.8)

ББК 22.37я7

Т 59

Авторський колектив:

*С.В. Соколов*, кандидат фізико-математичних наук, доцент;  
*Л.Д. Писаренко*, доктор фізико-математичних наук, професор;  
*В.О. Журба*, кандидат фізико-математичних наук

Рецензенти:

*О.О. Шматько* – доктор фізико-математичних наук, професор  
(Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);  
*Г.І. Чурюмов* – доктор фізико-математичних наук, професор  
(Харківський національний університет радіоелектроніки);  
*В.В. Старостенко* – доктор фізико-математичних наук, доцент  
(Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямками підготовки “Мікро- та наноелектроніка” та “Електронні пристрої та системи” (лист № 1/11-149 від 11 січня 2011 року)*

**Теорія** електромагнітного поля і основи техніки НВЧ: навч. посіб. / С.В. Соколов, Л.Д. Писаренко, В.О. Журба; за заг. ред. Г.С. Воробйова. – Суми : Сумський державний університет, 2011. – 393 с.  
ISBN 978-966-657-339-4

У навчальному посібнику викладено теорію електромагнітного поля та основи техніки НВЧ для студентів денної та заочної форм навчання за напрямками підготовки “Електронні пристрої та системи”, “Мікро- та наноелектроніка”. Наведені основні методи і приклади розв'язання задач з теорії поля, типові лабораторні роботи, тести для перевірки знань студентів і інший довідковий матеріал.

**УДК 537.8+621.3.09(075.8)**

**ББК 22.37я7**

© Соколов С.В., Писаренко Л.Д.,  
Журба В.О., 2011

© Сумський державний  
університет, 2011

ISBN 978-966-657-339-4

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	8
РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ .....	12
1.1 Загальна характеристика електромагнітного поля ..	12
1.2 Рівняння Максвелла та їх фізичний зміст .....	22
1.3 Рівняння безперервності, Лапласа і Пуассона.....	26
1.4 Рівняння енергетичного балансу електромагнітного поля (теорема Умова-Пойнтінга).....	29
1.5 Закони зміни векторів електромагнітного поля на границі поділу двох середовищ (граничні умови) .....	33
1.6 Приклади використання основних рівнянь і законів при описі електромагнітних полів.....	39
Запитання для самоперевірки .....	49
РОЗДІЛ 2 ЧАСТКОВІ ВИДИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.....	51
2.1 Загальні властивості і рівняння квазістатичних, квазістаціонарних і стаціонарних полів.....	51
2.2 Електростатичне поле .....	56
2.3 Електричне поле постійного струму .....	60
2.4 Магнітне поле постійного струму .....	64
2.5 Аналогія між стаціонарними полями.....	67
2.6 Електрична ємність, власна і взаємна індуктивність, енергія стаціонарних полів.....	70
2.7 Приклади аналізу стаціонарних і квазістаціонарних полів у найпростіших компонентах електричних кіл....	76
Запитання для самоперевірки .....	90

## РОЗДІЛ 3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ 92

3.1 Хвильові функції та рівняння .....	92
3.2 Параметри плоскої хвилі в однорідному середовищі .....	99
3.3 Поляризація, відбиття і переломлення електромагнітних хвиль.....	108
3.4 Спрямовані електромагнітні хвилі .....	114
3.5 Випромінювання електромагнітних хвиль .....	126
3.6 Приклади аналізу хвильових процесів.....	132
Запитання для самоперевірки .....	142

## РОЗДІЛ 4 ОСНОВИ ТЕХНІКИ НВЧ ТА ЇЇ

## ЗАСТОСУВАННЯ .....

4.1 Загальні відомості про лінії передачі .....	147
4.2 Багатозв'язні лінії передачі.....	151
4.3 Однозв'язні лінії передачі.....	155
4.4 Хвилеводи повільних хвиль (сповільнювальні системи).....	172
4.5 Об'ємні резонатори.....	185
4.6 Основні відомості про антени.....	198
4.6.1 Класифікація й основні характеристики антен	198
4.6.2 Основні типи антен і їх властивості .....	201
4.7 Короткі відомості про пристрої НВЧ для формування електромагнітних полів і вимірювання їх параметрів.	211
4.8 Особливості квазіоптичних пристроїв міліметрового і субміліметрового діапазонів хвиль....	218
4.9 Основні принципи побудови телекомунікаційних систем зв'язку НВЧ-діапазону .....	236
Запитання для самоперевірки .....	246

РОЗДІЛ 5 МЕТОДИ І ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ТЕОРІЇ ПОЛЯ .....	248
5.1 Загальна характеристика методів розв'язання задач.....	248
5.2 Методи, що ґрунтуються на теоремі Гауса і законі повного струму в інтегральній формі з використанням властивості накладення полів .....	255
5.3 Інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа для одновимірних полів.....	257
5.4 Інтегрування рівнянь Лапласа і Гельмгольца методом розділення змінних (методом Фур'є) .....	258
5.5 Метод дзеркальних зображень.....	268
5.6 Конформне перетворення (відображення) плоскопаралельних полів .....	272
5.7 Приклади розв'язання задач .....	274
Запитання для самоперевірки .....	316
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	318
ДОДАТОК А.....	323
ДОДАТОК Б .....	342
ДОДАТОК В.....	364

## ПЕРЕДМОВА

Видані раніше підручники і посібники з електромагнітних полів і хвиль, наприклад [1-3], як і ті, що з'явилися останніми роками [4-7], в основному орієнтовані на підготовку фахівців електричного і електроенергетичного профілів, що визначає структуру їх побудови, що ґрунтується на переході від окремих видів полів (електростатичного, електричного і магнітного полів постійного струму) до загальних рівнянь електромагнітних полів. На наш погляд, заснований на багаторічному досвіді викладання теорії поля студентам напрямку підготовки «Електроніка» більш кращим є фундаментальний підхід, який базується на використанні рівнянь Максвелла для опису як стаціонарних (окремий випадок), так і змінних (загальні хвильові процеси) електромагнітних полів. Такий підхід у комбінації із прикладними аспектами електромагнітних процесів у конкретних пристроях дозволяє майбутньому фахівцю оптимально адаптуватися в галузі розроблення електронних приладів і систем на базі мікро- і нанотехнологій.

Даний навчальний посібник є розширеним і доповненим практичними питаннями варіантом посібника «Електромагнітні поля і хвилі», який надруковано у «Ризоцентрі» СумДУ у 2002 році [8]. Він призначений для організації роботи студентів з вивчення курсу «Теорія поля», який належить до базових дисциплін, що закладають основи подальшої професійної підготовки фахівців і магістрів. У свою чергу, вивчення даного курсу студенти розпочинають після освоєння розділу «Електрика і магнетизм» курсу загальної фізики [9-10] і відповідних розділів курсу вищої математики [11]. Тому основні поняття, що належать до електромагнітного поля, студентам до початку вивчення курсу відомі. У курсі «Теорія поля» ці знання розширюються і поглиблюються стосовно до методів теоретичного

аналізу та експериментального дослідження явищ в електромагнітних полях, з якими в будь-якому електронному приладі, у тому або іншому вигляді, відбувається електромагнітна взаємодія заряджених часток, що здійснюється шляхом обміну квантами електромагнітного поля – фотонами. Фотони мають властивості як частинки, так і хвилі. Закони випромінювання і поглинання фотонів зарядженими частинками вивчаються у квантовій електродинаміці.

Закономірності перебігу електромагнітних явищ у різних середовищах і системах (без урахування квантових ефектів) є предметом вивчення класичної теорії поля і прикладної електродинаміки (техніки НВЧ), яка наочно ілюструє застосування основних рівнянь при розрахунках практичних систем електроніки і техніки, принцип роботи яких полягає у використанні властивостей електромагнітних полів і хвиль.

Навчальний посібник розрахований на студентів напрямків підготовки «Електронні пристрої і системи», «Мікро- і наноелектроніка», може бути використаний аспірантами і інженерами спеціальностей «Фізична електроніка», «Фізика приладів елементів і систем» та інших напрямків підготовки фахівців, пов'язаних із розроблення і застосуванням електрофізичного обладнання.

Автори висловлюють глибоку подяку рецензентам: професору кафедри фізики НВЧ Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна Шматько О.О., професору кафедри фізичних основ електронної техніки Харківського національного університету радіоелектроніки Чурюмову Г.І., завідувачу кафедри радіофізики і електроніки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського Старостенко В.В. за критичні зауваження, поради і рекомендації щодо матеріалу рукопису, які дозволили поліпшити зміст навчального посібника.

## ВСТУП

Історично вперше термін «електрика» був уведений у 1600 році англійським вченим У. Гільбертом. У 1748 році американський вчений В. Франклін формулює закон збереження заряду, а у 1785 році французький учений Ш. Кулон сформулював закон, який названий на його честь. Вплив струму на магнітну стрілку вивчався датським ученим Х. Ерстедом у 1819 році, а взаємодія струмів – французьким ученим А. Ампером у 1820 році (вводяться поняття: електричний струм, сила струму, електрична напруга). У 1831 році англійським вченим М. Фарадеєм сформульований закон електромагнітної індукції, а у 1873 році його співвітчизником Д. Максвеллом введено поняття струмів зміщення і сформульовані рівняння змінного електромагнітного поля, які мають його ім'я. Теоретичні роботи Максвелла свідчили про існування електромагнітних хвиль і про матеріальність електромагнітного поля, що експериментально було доведено німецьким ученим Г. Герцом (1887 р.) і російським ученим П. Лебедевим (1899 р.).

Властивості електромагнітного поля суттєво залежать від характеру його зміни в часі. Часто зміни електромагнітних полів відбуваються у дуже широких межах. Для зручності весь спектр електромагнітних коливань умовно можна розбити на окремі діапазони (рис. 1), у кожному з яких електромагнітне поле має певні особливості поширення і взаємодії із речовиною.

Повний перелік діапазонів електромагнітних хвиль які найбільш широко застосовуються, і їх розшифрування наведено в таблиці 4.1 (див. розділ 4).

Діапазон дуже високих частот (ДВЧ) (рис. 1) називають діапазоном метрових хвиль ( $l = 10 - 1$  м), ультрависоких частот (УВЧ) – дециметровим діапазоном



( $l = 10-1$  дм), надвисоких частот (НВЧ) – сантиметровим ( $l = 10-1$  см), край високих частот (КВЧ) – міліметровим ( $l = 10-1$  мм), гіпервисоких частот (ГВЧ) – субміліметровим ( $l = 1-0,1$  мм). Частота коливань поля  $f$  визначається за формулою

$$f = c / l ,$$

де  $c$  – швидкість світла;

$l$  – довжина хвилі.

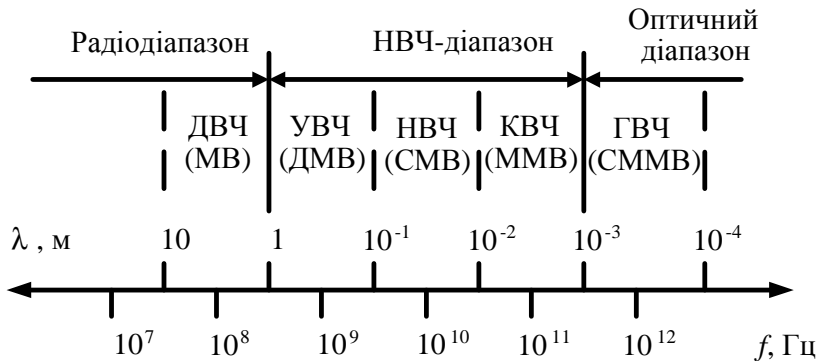


Рисунок 1 – Основна ділянка спектра електромагнітних коливань

Із рис. 1 випливає, що електромагнітні поля присутні у широкому спектрі частотного діапазону. При цьому особливо виділяють *сантиметрові хвилі* (діапазон НВЧ), оскільки фізичні явища в приладах і пристроях, характерні для цього діапазону, зберігаються у міліметровому, дециметровому і частково у субміліметровому діапазонах. Тому надалі термін НВЧ буде застосовуватися (за відсутності застереження) до всіх перелічених вище діапазонів, позначених на рис. 1.

Електромагнітні коливання НВЧ характеризуються низкою важливих фізичних властивостей, які базуються на теорії електромагнетизму і хвильових явищ.

У діапазоні НВЧ довжина хвилі стає порівнянною із розмірами елементів ланцюгів. Енергія швидкозмінних струмів у провідниках інтенсивно випромінюється у навколишній простір у вигляді електромагнітних хвиль. Якщо провідники є елементами антен, то випромінювання електромагнітної енергії в навколишній простір корисно і використовується для передавання інформації. У радіотехнічних системах за рахунок випромінювання відбувається збільшення втрат енергії і виникають небажані, як правило, неконтрольовані зв'язки між елементами. Отже, при переході до діапазону НВЧ конструкції елементів і схем повинні бути змінені так, щоб втрати енергії за рахунок випромінювань зводилися до мінімуму.

Хвилі НВЧ, особливо діапазону 100 МГц – 10 ГГц, майже безперешкодно проникають крізь атмосферу і іоносферу. Існування «вікон прозорості» у діапазоні НВЧ робить можливим використання їх для вивчення світового простору радіоастрономічними методами, для розвитку космічних досліджень, обміну інформацією між Землею і космічним обладнанням.

Діапазон НВЧ має велику інформаційну ємність, що дозволяє здійснювати багатоканальний телефонний і телевізійний зв'язок. Освоєння діапазону НВЧ спричинило перегляд усіх основних уявлень про поширення, методи резонансного виділення і каналізації електромагнітних хвиль. Системи із зосередженими параметрами на НВЧ замінюються системами із розподіленими параметрами (порожніми хвилеводами, об'ємними резонаторами); змінюються також і методи розрахунків. Аналіз електродинамічних систем НВЧ базується на математичному апараті, який використовує рівняння Максвелла або похідні від них ди-

ференціальні рівняння. Це дає можливість вивчати розподілені у просторі змінні електричні і магнітні поля, враховуючи їх хвильовий характер.

Навчальний посібник складається з *п'яти розділів і трьох додатків*. Перші три розділи присвячені висвітленню основ теорії електромагнітного поля, включаючи рівняння Максвелла, хвильові рівняння, рівняння стаціонарних і квазістаціонарних полів, теорію плоских і спрямованих електромагнітних хвиль, принципи випромінювання полів. Наступні два розділи мають прикладний характер. У них розглядаються основні типи спрямовувальних систем і резонаторів (включаючи квазіоптичні), антен, викладені короткі відомості про пристрої для формування електромагнітних полів і вимірювання їх параметрів, а також наведені основні методи і приклади розв'язання задач із «Теорії поля».

Практично всі розділи посібника мають приклади, що ілюструють фізичні процеси, які відбуваються в електромагнітних полях, а також запитання для самоконтролю.

Методика викладання, а також ступінь деталізації матеріалів і математичних викладів обрані таким чином, щоб студенти могли самостійно поглибити свої знання з викладених тематик. У додаток винесені обов'язковий перелік завдань для закріплення студентами теоретичного матеріалу, методичні вказівки до виконання типових лабораторних робіт, тестові питання та інші довідкові дані. Перелік рекомендованої літератури містить підручники і навчальні посібники з курсу «Теорія поля», а також літературні джерела за суміжними питаннями, пов'язаними із прикладною електродинамікою і технікою НВЧ, що допоможе студентам і фахівцям у даній галузі отримати додаткову інформацію практичного плану.

## РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 1.1 Загальна характеристика електромагнітного поля

*Електромагнітне поле являє собою особливий вид матерії, що виявляє силовий вплив на заряджені частинки, і визначається як сукупність змінних взаємозалежних електричного і магнітного полів, що впливають один на одного.* При порушенні даного загального визначення залежно від припущень і обмежень розрізняють такі часткові види електромагнітного поля: електростатичне, електричне і магнітне постійного струму, а також квазістаціонарне і квазістатичне поля.

На електромагнітне поле як на вид матерії поширюються поняття, які описують властивості речовини: *інерція, гравітаційна маса і енергія, кількість руху і момент кількості руху.* Наявність інертної маси електромагнітного поля підтверджується дослідями російського фізика П.Н. Лебедева, який вивчив світловий тиск на тверді тіла (1899) і газу (1907). Інертна маса електромагнітного поля має незначну густину.

Електромагнітне поле є носієм гравітаційної маси, що підтверджується скривленням світлового променя у полі тяжіння Сонця, поміченим під час сонячного затемнення (1919), а також тим, що енергія (швидкість) променя збільшується при русі до Землі і зменшується при русі від Землі (дослід Пандау, 1960).

Електромагнітне поле має енергію, тому що при взаємодії із зарядженими частинками їх енергія змінюється, а отже, передається електромагнітному полю і навпаки. Рух енергії електромагнітного поля кількісно оцінюється вектором Пойнтінга (див. п.1.4).

У даному посібнику розглядається макроскопічна теорія електромагнітного поля, яка не враховує дискретного розподілу електричних зарядів у речовині, вважаючи речовинне середовище суцільним. При такому припущенні для характеристики макроскопічного поля використовують усереднені значення мікроскопічних величин у нескінченно малому об'ємі, вводячи чотири основні вектори:

- $\vec{E}$  – напруженості електричного поля;
- $\vec{D}$  – електричного зміщення (електричної індукції);
- $\vec{H}$  – напруженості магнітного поля;
- $\vec{B}$  – магнітної індукції.

**Напруженість електричного поля**  $\vec{E}$  є силовою характеристикою електричного поля, що показує, яка сила  $\vec{F}$  діє на одиничний точковий заряд  $q$ , поміщений у це поле, тобто  $\vec{E} = \vec{F}/q$ .

Якщо в електричне поле  $\vec{E}$  помістити діелектрик, то у середині нього буде відбуватися *поляризація* (негативно заряджені електрони будуть рухатися до позитивного джерела електричного поля, позитивно заряджені іони – до негативного, створюючи, таким чином, додаткове внутрішнє електричне поле). Заряди, що беруть участь у поляризації діелектрика, є зв'язаними. Силкові лінії електричного поля  $\vec{E}$  починаються і закінчуються на вільних і зв'язаних зарядах (рис. 1.1). Із рис. 1.1 видно, що деякі силкові лінії вектора  $\vec{E}$  (суцільні лінії) на границі поділу зазнають стрибкоподібної зміни, створюючи тим самим незручності при розрахунках електростатичних полів. Тому вводиться век-

тор, який не змінюється на всьому проміжку між електродами (вектор електричного зміщення  $\vec{D}$ ).

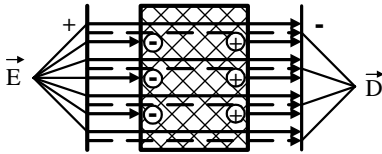


Рисунок 1.1 – Загальна схема поляризації діелектрика

Лінії такого вектора починаються і закінчуються тільки на вільних зарядах (див. рис. 1.1, пунктирна лінія). Таким чином, **вектор електричного зміщення  $\vec{D}$**  характеризує електричне поле, створене вільними зарядами, але при такому їх розподілі у просторі, який існує за наявності діелектрика.

Тоді вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  дорівнює сумі векторів зовнішнього електричного поля у вакуумі  $\vec{D}_{\text{вак}}$  і поля, що створюється зарядами речовини  $\vec{P}$ , названого **вектором поляризованості**.

З урахуванням цього можна записати

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{D}_{\text{вак}} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + c^e \vec{E} = \\ &= \epsilon_0 \left( 1 + \frac{c^e}{\epsilon_0} \right) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де  $\epsilon_0$  – діелектрична стала ( $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м);

$c^e$  – електрична сприйнятливність речовини (поляризованість);

$\epsilon = 1 + (c^e / \epsilon_0)$  – відносна діелектрична проникність речовини ( $\epsilon \geq 1$ );

$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$  – абсолютна діелектрична проникність речовини.

Із формули (1.1) випливає, що при постійному значенні  $\vec{D}$  у вакуумі та в діелектрику збільшення відносної діелектричної проникності  $\epsilon$  приводить до зменшення напруженості електричного поля в діелектрику. Тому з фізичної точки зору **відносна діелектрична проникність речовини  $\epsilon$  показує, у скільки разів електричне поле в речовині менше за електричне поле у вакуумі, тобто  $\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0$ .**

Аналогічні міркування можна навести і для магнітного поля. Якщо по провіднику пропустити струм  $I$ , то навколо нього створюється магнітне поле з **напруженістю  $\vec{H}$** . При внесенні у це поле магнетика (речовини, здатної під дією магнітного поля одержувати магнітний момент) він буде намагнічуватися (орбітальні електрони, обертаючись навколо ядер, створюють магнітні моменти, які спрямовані або уздовж зовнішнього поля або проти нього, формуючи, таким чином, своє внутрішнє магнітне поле). Тоді магнітне поле усередині речовини  $\vec{B}$  (**вектор магнітної індукції**) дорівнює сумі зовнішнього магнітного поля (поля, створеного макрострумами у вакуумі –  $\vec{B}_{\text{вак}}$ , і внутрішнього магнітного поля (поля, створеного мікрострумами  $\vec{B}_{\text{вн}}$ ), описуваного за допомогою **вектора намагніченості  $\vec{M}$** .

З урахуванням цього можна записати

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_{\text{вак}} + \vec{B}_{\text{вн}} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \\ &+ \mu_0 c^m \vec{H} = \mu_0 (1 + c^m) \vec{H} = \mu_0 m \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де  $\mu_0$  – магнітна стала ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1,256 \times 10^{-6}$  Гн/м<sup>2</sup>);

$\epsilon^M$  – магнітна сприйнятливість речовини;

$m = 1 + \epsilon^M$  – відносна магнітна проникність речовини;

$m_a = m_0 m$  – абсолютна магнітна проникність речовини.

З фізичної точки зору **відносна магнітна проникність речовини  $m$**  показує, у скільки разів магнітне поле в речовині більше (для парамагнетиків  $m > 1$  і феромагнетиків  $m \gg 1$ ) або менше (для діамагнетиків  $m < 1$ ) за магнітне поле у вакуумі, тобто  $m = m_a / m_0$ .

Рівняння (1.1) і (1.2) називають *матеріальними рівняннями*.

З іншого боку, якщо у магнітне поле помістити провідник зі струмом, то на нього буде діяти сила Ампера. Тому **магнітна індукція  $\vec{B}$**  є силовою характеристикою магнітного поля, що показує, яка сила  $\vec{F}_A$  діє на елемент провідника  $d\vec{l}$  зі струмом  $I$  (тобто на заряди, що рухаються), внесеним у це поле (закон Ампера  $d\vec{F} = I \left[ d\vec{l} \times \vec{B} \right]$ ).

Якщо поле не змінюється в часі, то таке поле називається **стаціонарним**. При описанні стаціонарних електричних полів, які є *потенційними* ( $\text{rot } \vec{E} = 0$ ), вводиться поняття скалярного електричного потенціалу  $j$ , зв'язаного із вектором  $\vec{E}$  співвідношенням [3]:

$$\vec{E} = -\text{grad}j . \quad (1.3)$$

**Потенціал  $j$**  є енергетичною характеристикою електричного поля, яка показує, яку потенційну енергію має одиничний позитивний заряд у даній точці.



Для стаціонарного магнітного поля  $\text{rot } \vec{H} = \vec{d}$  (див. п.2.1). Таке поле є *вихровим*. Однак для сукупності точок, у яких густина струму  $\vec{d} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{H} = 0$  і магнітне поле можна розглядати як потенційне, що має скалярний магнітний потенціал  $j_m$ . Отже, для таких областей можна записати

$$\vec{H} = -\text{grad} j_m. \quad (1.4)$$

Для розрахунків магнітних полів широко використовується також *векторний потенціал магнітного поля*  $\vec{A}$ , який пов'язаний з  $\vec{B}$  виразом

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (1.5)$$

Підставою для подання індукції  $\vec{B}$  у вигляді ротора від векторного потенціалу  $\vec{A}$  є те, що при підставленні (1.5) у четверте рівняння Максвелла (див. п.1.2) виконується умова соленоїдальності магнітного поля  $\text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} \equiv 0$ .

Для провідного середовища густина струму  $\vec{d}$  лінійно залежить від напруженості електричного поля  $\vec{E}$  в кожній її точці. Ця залежність описується *законом Ома у диференціальній формі* (див. п.2.3):

$$\vec{d} = g \vec{E}, \quad (1.6)$$

де коефіцієнт пропорційності  $g$  називається *питомою електричною провідністю середовища* і має розмірність  $(\text{Ом} \times \text{м})^{-1}$ .

Рівняння (1.6) доповнюються рівняннями (1.1) і (1.2) для розв'язання рівнянь Максвелла.

Властивості електромагнітних полів значною мірою визначаються *типами середовищ*, які умовно можна класифікувати в такий спосіб:

- *однорідні* – параметри середовища  $(\mathbf{e}_a, \mathbf{m}_a, \mathbf{g})$  однакові у всіх точках;

- *неоднорідні* – параметри середовища  $(\mathbf{e}_a, \mathbf{m}_a, \mathbf{g})$  змінюються від точки до точки;

- *ізотропні* – співвідношення між парами векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ ,  $\vec{d}$  і  $\vec{E}$  лінійно залежні, тобто параметри середовища  $\mathbf{e}_a$ ,  $\mathbf{m}_a$ ,  $\mathbf{g}$  є скалярними величинами;

- *анізотропні* – співвідношення між парами векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ ,  $\vec{d}$  і  $\vec{E}$  залежать від їхньої орієнтації, тобто параметри середовища  $\mathbf{e}_a$ ,  $\mathbf{m}_a$ ,  $\mathbf{g}$  є тензорами;

- *лінійні* – властивості середовища  $(\mathbf{e}_a, \mathbf{m}_a, \mathbf{g})$  не залежать від величини поля  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ ;

- *нелінійні* – властивості середовища  $(\mathbf{e}_a, \mathbf{m}_a, \mathbf{g})$  залежать від інтенсивності поля  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ .

Надалі для спрощення математичних викладів і наочності подання фізичних процесів будуть розглянуті рівняння, що характеризують поля у однорідних, ізотропних і лінійних середовищах.

Для наочного графічного уявлення електричного і магнітного полів вводяться поняття силових і еквіпотенціальних ліній (еквіпотенціальних поверхонь).

**Силова лінія** – це уявно проведена у полі лінія, дотична до якої у кожній точці збігається із напрямом вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  або вектора магніт-

ної індукції  $\vec{B}$ . Силкові лінії електричного поля починаються на позитивно зарядженому тілі і закінчуються на негативно зарядженому, що випливає із рівняння Максвелла  $\operatorname{div} \vec{D} = r$  (див. п.1.2). Умовно уздовж силової лінії міг би пересуватися досить малий позитивний заряд, якби він мав можливість вільного безінерційного переміщення у полі. Силкові лінії магнітного поля замкнені самі на себе, тому що  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  (див. п.1.2).

Під **еквіпотенціальною** (рівнопотенціальною) **поверхнею** розуміють сукупність точок поля, що мають однаковий потенціал. Якщо подумки розсікти статичне поле будь-якою січною площиною, то в отриманому перетині будуть видимі сліди перетинання площини із еквіпотенціальними поверхнями. Їх називають **еквіпотенціальними лініями** (або еквіпотенціалами). Таким чином, **еквіпотенціальними** називаються лінії поля, на яких потенціал не змінюється. Еквіпотенціальні та силкові лінії у будь-якій точці поля перетинаються під прямим кутом.

Еквіпотенціальні лінії стаціонарного електричного поля замкнені (тому що  $\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} j \equiv 0$ ).

Еквіпотенціальні лінії стаціонарного магнітного поля при  $\vec{d} = 0$  ( $\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} j_m \equiv 0$ ) починаються і закінчуються на струмах (аналогічно, як і силкові лінії електричного поля починаються і закінчуються на зарядах). Приклад розподілу силових і еквіпотенціальних ліній для електричного поля точкового заряду і магнітного поля провідника зі струмом наведено на рис. 1.2.

Із рис. 1.2 видно, що силовим лініям електростатичного поля відповідають еквіпотенціальні лінії магнітного поля, а еквіпотенціалам електростатичного поля – силкові лінії магнітного поля.

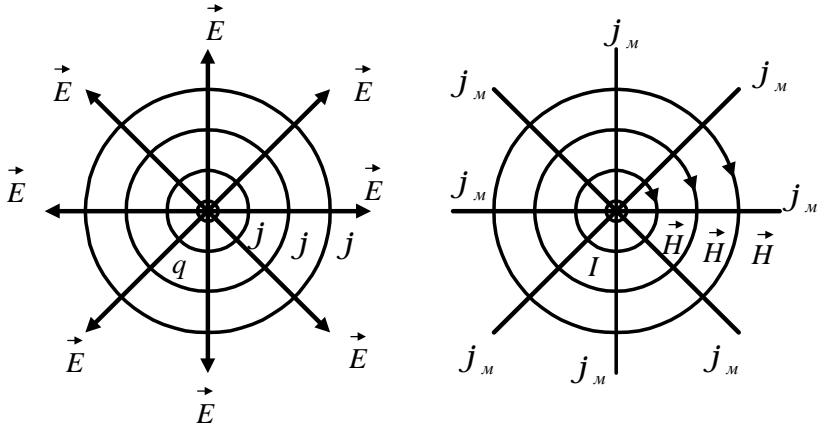


Рисунок 1.2 – Силві і екіпотенціалні лінії електричного і магнітного потенціалних полів

На закінчення даного підрозділу сформулюємо деякі теореми і принципи, які є загальними при розв'язанні багатьох задач теорії електромагнетизму.

Інтегральні теореми застосовуються при переході від рівнянь поля, записаних в інтегральній формі, до рівнянь поля в диференційній формі і навпаки.

### **Теорема Остроградського-Гаусса**

$$\int_V \operatorname{div} \vec{K} dV = \iint_S \vec{K} \cdot \vec{n} dS \quad (1.7)$$

визначає співвідношення між інтегралом дивергенції вектора  $\vec{K}$  по об'єму  $V$  і поверхневим інтегралом, узятим по замкненій поверхні  $S$ , що обмежує цей об'єм. При цьому обмежувальна поверхня повинна бути кусково-гладкою, а вектор на цій поверхні – безперервним. Позитивною є зовнішня нормаль  $\vec{n}$ .

### Теорема Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{K} dS = \oint_l \vec{K} dl \quad (1.8)$$

прирівнює поверхневий інтеграл ротора вектора  $\vec{K}$  до лінійного інтегралу цього вектора, взятого по замкненому контуру  $l$ , що обмежує цю поверхню. Вектор  $\vec{K}$  повинен бути безперервним по усьому контуру інтегрування, а контур – кусково-гладким. Позитивний напрямок нормалі до поверхні і напрямок обходу зв'язані правилом правоходового гвинта.

**Теорема одиницності (однозначного) розв'язку** придатна для постійних і змінних електромагнітних полів: *розв'язок, що задовольняє рівняння поля, граничні та початкові умови, є єдиним*. Наприклад, електричне поле описується рівнянням Лапласа або Пуассона. Вони є рівняннями у частинних похідних. Для рівнянь у частинних похідних на відміну від звичайних диференціальних рівнянь допускається у загальному випадку безліч лінійно незалежних один від одного розв'язків. У будь-якому реальному практичному завданні існує єдина картина поля, тобто єдиний розв'язок. Із безлічі лінійно незалежних розв'язків, що допускаються рівнянням Лапласа – Пуассона, єдиний вибір, який задовольняє конкретне завдання, роблять за допомогою граничних умов.

*Якщо існує деяка функція, яка задовольняє рівняння Лапласа – Пуассона і граничні умови у даному полі, то ця функція і являє собою той єдиний розв'язок конкретного завдання, який шукають.*

**Принцип накладення (суперпозиції)** застосовується для полів, які описуються лінійними рівняннями: результуючий вектор (скаляр) дорівнює сумі векторів (скалярів), створюваних кожним джерелом окремо. Наприклад,  $n$  за-

рядів створюють результуючу напруженість електричного

$$\text{поля } \vec{E} = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k .$$

**Принцип подвійності (принцип переставної подвійності)** придатний для електростатичного, електричного постійного струму і магнітного постійного струму полів та ґрунтується на аналогії стаціонарних полів (див. п.2.5): *задачі про розрахування одного поля можна замінити задачею про розрахування іншого поля, застосувавши аналогію величин і коефіцієнтів, які характеризують ці поля, якщо граничні поверхні обох полів за формою і взаємним розміщенням однакові, а граничні умови і диференціальні рівняння подібні до величин і коефіцієнтів, властивих кожному полю.*

## 1.2 Рівняння Максвелла та їх фізичний зміст

Рівняння Максвелла є фундаментальними рівняннями електромагнітного поля. *Інтегральна форма запису* рівнянь встановлює зв'язок між величинами в різних точках або на різних відрізках поверхні. *Диференціальна форма запису* описує співвідношення між величинами поблизу однієї і тієї ж точки поля у певний момент часу.

Перехід від інтегральної форми запису рівнянь Максвелла до диференціальної форми здійснюється за допомогою теорем Остроградського-Гаусса (1.7) і Стокса (1.8).

Існує чотири рівняння Максвелла:

**Перше рівняння Максвелла** (закон повного струму):

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{j} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} d\vec{s},$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$
(1.9)

*Фізичний зміст:* вихрове магнітне поле  $\vec{H}$  створюється струмом провідності  $i_{\text{пров}} = \oint_S \vec{d} \vec{d} S$  і струмом зміщення

$i_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \vec{d} S$ , де  $\frac{d \vec{D}}{dt}$  – змінне електричне поле.

*Друге рівняння Максвелла* (закон електромагнітної індукції):

$$\oint_l \vec{E} \vec{d} l = - \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \vec{d} S, \quad (1.10)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

*Фізичний зміст:* вихрове електричне поле  $\vec{E}$  створюється змінним магнітним полем  $\frac{d \vec{B}}{dt}$ .

*Третє рівняння Максвелла* (теорема Гаусса):

$$\oint_S \vec{D} \vec{d} S = \int_V r dV = \sum q, \quad (1.11)$$

$$\text{div } \vec{D} = r,$$

де  $r$  і  $q$  – вільні заряди у середовищі.

*Фізичний зміст:* силові лінії електричного поля починаються і закінчуються на зарядах  $q$ .

*Четверте рівняння Максвелла* (принцип безперервності магнітних силових ліній):

$$\oint_S \vec{B} \vec{d} S = 0, \quad (1.12)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

*Фізичний зміст:* силові лінії магнітного поля замкнені.

Для опису гармонічних змінних електромагнітних полів (які змінюються за законами синуса або косинуса) зручно використовувати *рівняння Максвелла у комплексній формі запису*. Відобразимо вектори електромагнітного поля у комплексному вигляді (за приклад візьмемо розглянутий вектор  $\vec{E}$ ):

$$\dot{\vec{E}} = E_m e^{jj} e^{j\omega t}, \quad (1.13)$$

де  $E_m$  – амплітуда поля;

$j$  – фаза поля;

$\omega = 2\pi f$  – колова частота;

$t$  – часова координата;

$j$  – комплексна одиниця.

Тоді

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \dot{\vec{E}}.$$

З урахуванням цього можна записати перше рівняння Максвелла у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\text{rot}} H &= \dot{\vec{d}} + j\omega \dot{\vec{D}} = \vec{g} \dot{\vec{E}} + j\omega \vec{e}_a \dot{\vec{E}} = (\vec{g} + j\omega \vec{e}_a) \dot{\vec{E}} = \\ &= j\omega \left( \vec{e}_a + \frac{\vec{g}}{j\omega} \right) \dot{\vec{E}} = j\omega \vec{e}_a \left( 1 - \frac{j\vec{g}}{\omega \vec{e}_a} \right) \dot{\vec{E}} = j\omega \vec{e}_{ka} \dot{\vec{E}}, \end{aligned}$$

де  $\vec{e}_{ka} = \vec{e}_a \left( 1 - \frac{j\vec{g}}{\omega \vec{e}_a} \right)$  – *комплексна діелектрична проник-*

*ність*, яка не має фізичного змісту, а вводиться для зручності і симетрії представлення рівнянь Максвелла.

Часто уявну частину у виразі для комплексної діелектричної проникності заміняють тангенсом кута діелектричних втрат  $tg\delta$  :



$$tg d = \frac{g}{we_a} = \frac{g E}{we_a E} = \frac{d_{пров}}{d_{зм}}$$

Таким чином, **тангенс кута діелектричних втрат**  $tg d$  дорівнює відношенню густини струму провідності у середовищі до густини струму зміщення. Отже,

$$e_{ka} = e_a (1 - jtgd).$$

Значення  $tg d$  для різних речовин наводяться у довідниках, наприклад [12]. Величина тангенса діелектричних втрат може бути основою для характеристики речовин. Так, якщо  $tg d \ll 1$ , то речовина є гарним діелектриком, якщо  $tg d \gg 1$ , то речовина – гарний провідник.

З урахуванням подання інших векторів поля у вигляді (1.13) **рівняння Максвелла в комплексній формі** запишуться в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\text{rot}} \vec{H} &= \overset{\bullet}{\vec{d}} + jw \overset{\bullet}{D} = jwe_{ka} \overset{\bullet}{E}, \\ \overset{\bullet}{\text{rot}} \vec{E} &= -jw \overset{\bullet}{B} = -jw m_a \overset{\bullet}{H}, \\ \overset{\bullet}{\text{div}} \vec{D} &= \overset{\bullet}{r}, \\ \overset{\bullet}{\text{div}} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Рівняння Максвелла в комплексній формі запису **фізичного змісту не мають**.

Узагальнюючи сказане вище, подамо системи рівнянь Максвелла у трьох формах запису (табл. 1.1).

Як правило, система рівнянь Максвелла доповнюється матеріальними рівняннями (1.1), (1.2) і законом Ома (1.6):

$$\vec{D} = e_0 e \vec{E} = e_a \vec{E}, \quad \vec{B} = m_0 m \vec{H} = m_a \vec{H}, \quad \vec{d} = g \vec{E}.$$

Таблиця 1.1 – Система рівнянь Максвелла у трьох формах запису

Інтегральна	Диференційна	Комплексна
$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{J} d\vec{S} +$ $+ \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon_a \vec{E}$
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \oint_s \vec{B} d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}$
$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_v r dV =$ $= \sum q$	$\text{div } \vec{D} = r$	$\text{div } \vec{D} = \dot{r}$
$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$

### 1.3 Рівняння безперервності, Лапласа і Пуассона

Рівняння безперервності (закон збереження заряду) виводиться із першого рівняння Максвелла у диференційній

формі: 
$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Застосуємо оператор  $\text{div}$  до всіх членів цього рівняння.

Одержимо 
$$\text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{J} + \text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$
 Оскільки

$$\text{div rot } \vec{H} \equiv 0, \text{ то } \text{div } \vec{J} + \frac{\partial(\text{div } \vec{D})}{\partial t} = 0.$$

Із урахуванням третього рівняння Максвелла (1.11) можна записати

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{d} = 0. \quad (1.15)$$

Отриманий вираз називається *законом збереження заряду*, або *рівнянням безперервності ліній повного струму*.

Для одержання закону збереження заряду в інтегральній формі проінтегруємо рівняння (1.15) по об'єму  $V$ . У результаті отримуємо

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V r dV \right) + \int_V \operatorname{div} \vec{d} dV = 0.$$

Скориставшись теоремою Остроградського-Гаусса (1.7), запишемо *інтегральну форму закону збереження заряду*:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V r dV \right) + \oint_S \vec{d} \vec{d} S = 0. \quad (1.16)$$

*Фізичний зміст* цього рівняння: струм провідності  $i_{\text{пров}} = \oint_S \vec{d} \vec{d} S$  обумовлений рухом вільних зарядів  $r$  або

заряди не можуть переміщуватися із однієї точки в іншу, не створивши між ними електричного струму.

*Рівняння Пуассона і Лапласа для скалярного потенціалу  $j$*  є основними диференціальними рівняннями електростатики. Вони впливають із третього рівняння Максвелла:  $\operatorname{div} \vec{D} = r$ . Оскільки  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ , а  $\vec{E} = -\operatorname{grad} j$ , то

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} j = -\frac{r}{\epsilon_a}.$$

Оператор  $\nabla^2 = \Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  називають *оператором Лапласа*, або *лапласіаном*. Тому можна записати таким чином:

$$\Delta j = -\frac{r}{e_a}. \quad (1.17)$$

Дане рівняння називають *рівнянням Пуассона*.

Якщо вільних зарядів  $r$  немає, то рівняння Пуассона переходить у *рівняння Лапласа*:

$$\Delta j = 0. \quad (1.18)$$

У *декартовій системі координат* рівняння Пуассона і Лапласа мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = -\frac{r}{e_a},$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = 0.$$

Для циліндричної та сферичної систем координат вони наведені в [3].

При отриманні *рівняння Пуассона для векторного потенціалу*  $\vec{A}$  запишемо перше рівняння Максвелла для стаціонарного поля:  $\text{rot } \vec{H} = \vec{d}$ .

Помноживши обидві частини на  $m_a$  і використавши матеріальне рівняння (1.2), отримаємо

$$m_a \text{rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{B} = m_a \vec{d}.$$

Скористаємося виразом магнітної індукції через векторний потенціал (1.5). Тоді  $\text{rot rot } \vec{A} = m_a \vec{d}$ .

З урахуванням того що  $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ , можна записати

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = m_a \vec{d}.$$

Оскільки для стаціонарного поля лінії вектора  $\vec{A}$  замкнені самі на себе, то  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ . У результаті отримуємо рівняння Пуассона для векторного потенціалу:

$$\nabla^2 \vec{A} = -m_a \vec{d}. \quad (1.19)$$

#### 1.4 Рівняння енергетичного балансу електромагнітного поля (теорема Умова-Пойнтінга)

Крім рівнянь Максвелла і закону збереження заряду, велике значення в теорії електромагнітного поля має **теорема Умова-Пойнтінга**, яка описує енергетичні співвідношення розподілу полів у заданому об'ємі. Її не складно отримати із рівнянь Максвелла.

Для виведення теореми Умова-Пойнтінга скористаємося першим і другим рівняннями Максвелла у диференціальній формі, записаними з урахуванням матеріальних рівнянь (1.1), (1.2), (1.6):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = g \vec{E} + e_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{E} = -m_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Помножимо перше рівняння Максвелла скалярно на  $\vec{E}$ , а друге – на  $\vec{H}$  і віднімемо із першого рівняння друге рівняння. У результаті отримаємо

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = g \vec{E} \vec{E} + e_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + m_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

З урахуванням того, що

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{div} \left[ \vec{H} \times \vec{E} \right] = -\operatorname{div} \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right],$$

можна записати

$$-\operatorname{div} \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] = g E^2 + e_a \vec{E} \frac{\partial \left( \vec{E} \right)}{\partial t} + m_a \vec{H} \frac{\partial \left( \vec{H} \right)}{\partial t}.$$

Перемістивши  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  під знаки операторів диференціювання, отримаємо

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] &= g E^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \left( e_a E^2 \right)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \left( m_a H^2 \right)}{\partial t} = \\ &= g E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_a E^2}{2} + \frac{m_a H^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким чином теорема Умова-Пойнтінга **в диференціальній формі запису** має такий вигляд:

$$-\operatorname{div} \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] = g E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_a E^2}{2} + \frac{m_a H^2}{2} \right). \quad (1.20)$$

У (1.20)  $\frac{e_a E^2}{2}$  являє собою енергію електричного поля

в одиниці об'єму,  $\frac{m_a H^2}{2}$  – енергію магнітного поля в одиниці об'єму  $dV$ ,  $g E^2$  – теплові втрати електромагнітної енергії. Для визначення енергії у повному об'ємі проінтегруємо вираз (1.20) за об'ємом  $V$ . Із урахуванням теореми Остроградського-Гаусса (1.7) *теорема Умова-Пойнтінга в інтегральній формі* запише набуде вигляду

$$-\oint_S \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] \cdot \vec{dS} = \int_V g E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{e_a E^2}{2} + \frac{m_a H^2}{2} \right) dV. \quad (1.21)$$

Векторний добуток  $\left[ \vec{E} \times \vec{H} \right] = \vec{\Pi}$  називають *вектором*

*Пойнтінга*; він характеризує значення і напрямок перемі-

щення енергії, яка проходить за одиницю часу крізь одиницю площі, перпендикулярної вектору  $\vec{\Pi}$  (рис. 1.3).

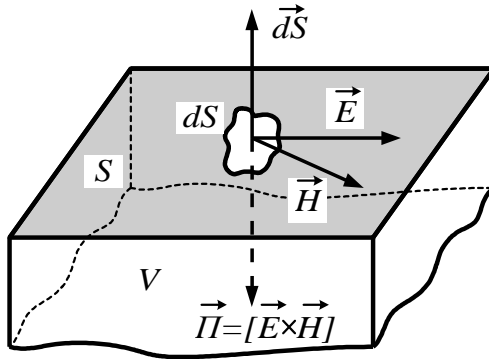


Рисунок 1.3 – Орієнтація векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{\Pi}$  до поверхні  $S$ , яка обмежує об'єм  $V$

Якщо вектор  $\vec{\Pi}$  спрямований усередину поверхні, то його потік, який проходить крізь поверхню, буде позитивним:  $-\oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} > 0$  (при позитивному напрямку  $\vec{dS}$  у бік зовнішньої нормалі до поверхні).

*Фізичний зміст* теореми Умова-Пойнтінга: енергія електромагнітного поля витрачається на теплові втрати  $gE^2$  і на збільшення електричної  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_a E^2}{2} \right)$  і магнітної

$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_a H^2}{2} \right)$  енергій у заданому об'ємі.

*Теорема Умова-Пойнтінга у комплексній формі запису* використовується для опису енергетичного балансу гармо-

нічних електромагнітних коливань. При її виведенні скористаємося першим і другим рівняннями Максвелла (1.14):

$$\overset{\cdot}{\text{rot}} \vec{H} = g \overset{\cdot}{\vec{E}} + jw e_a \overset{\cdot}{\vec{E}}; \quad \overset{\cdot}{\text{rot}} \vec{E} = -jw m_a \overset{\cdot}{\vec{H}}.$$

При знаходженні повної потужності необхідно комплекс вектора напруженості електричного поля  $\overset{\cdot}{\vec{E}}$  помножити на сполучений комплекс вектора напруженості магнітного поля  $\overset{\cdot}{\vec{H}}$  і виконати послідовність операцій, викладених вище при отриманні рівняння для миттєвих значень. Унаслідок отримаємо

$$-\overset{\cdot}{\text{div}} \vec{\Pi} = g E^2 + 2jw \left( \frac{m_a H^2}{2} - \frac{e_a E^2}{2} \right). \quad (1.22)$$

Для визначення енергії у повному об'ємі проінтегруємо (1.22) по об'єму  $V$  і застосуємо до лівої частини теорему Остроградського-Гаусса (1.7):

$$-\overset{\cdot}{\oint}_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \int_V g E^2 dV + j2w \int_V \left( \frac{m_a H^2}{2} - \frac{e_a E^2}{2} \right) dV. \quad (1.23)$$

Перший доданок правої частини являє собою активну потужність, другий – реактивну потужність. Таким чином, теорема Умова-Пойнтінга в комплексній формі може бути записана і сформульована у такий спосіб:

$$-\overset{\cdot}{\oint}_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = P + jQ,$$

*потік комплексного вектора Пойнтінга  $\vec{\Pi}$  крізь замкнену поверхню дорівнює комплексній потужності, що виділяється усередині об'єму, обмеженого цією поверхнею.*



### 1.5 Закони зміни векторів електромагнітного поля на границі поділу двох середовищ (граничні умови)

Для областей, що містять границю поділу двох або більше середовищ, безпосередній розв'язок диференціальних рівнянь Максвелла неможливий. Як правило, розв'язують рівняння для кожного середовища окремо, а отримані розв'язки «зшивають» на границі поділу. Для цього використовують так звані *граничні умови* – співвідношення між значеннями векторів поля по обидва боки від границі поділу середовищ. Оскільки рівняння Максвелла є векторними, а розв'язки їх, як правило, перебувають у проекціях на осі координат, то граничні умови зручно подати у вигляді нормальної (проекція на вісь  $y$ ) і тангенціальної (проекція на вісь  $x$ ) складових (рис. 1.4).

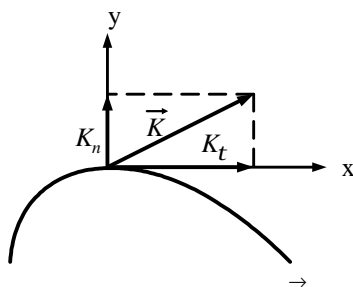


Рисунок 1.4 – Подання вектора  $\vec{K}$  в проекціях на осі координат у вигляді тангенціальної ( $K_t$ ) і нормальної ( $K_n$ ) складових

Методика виведення граничних умов базується на використанні рівнянь Максвелла (1.9) – (1.12).

**Граничні умови для нормальних складових поля.** Нехай досить гладкий елемент поверхні  $\Delta S$  розділяє два середовища 1 і 2 з різними діелектричними проникностями  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$ ; у кожному середовищі параметри  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  постійні

(рис. 1.5). Позначимо вектор електричної індукції (електричного зміщення) у середовищі 1 вектором  $\vec{D}_1$ , у середовищі 2 – вектором  $\vec{D}_2$ .

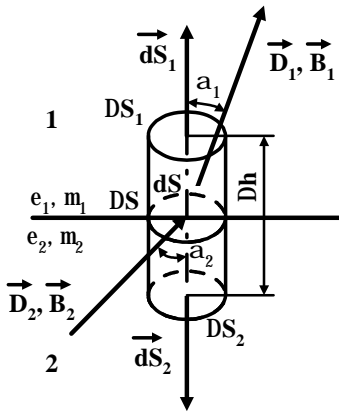


Рисунок 1.5 – Переломлення векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{B}$  на границі поділу середовищ

Побудуємо на плоскій границі поділу елемент циліндра з висотою  $\Delta h \rightarrow 0$  і основою циліндра  $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$ . Вектори  $\vec{dS}_1$  і  $\vec{dS}_2$  будуть спрямовані перпендикулярно до основ і поверхні поділу ( $\vec{dS} = \vec{n} dS$ , де  $\vec{n}$  – нормаль до поверхні поділу), на якій у загальному випадку роз-

поділений заряд з *поверхневою щільністю*  $s = \frac{dq}{dS}$ . По-

значимо кут між векторами  $\vec{D}_1$  і  $\vec{dS}_1$  через  $a_1$ , між векторами  $\vec{D}_2$  і  $\vec{dS}_2$  – через  $a_2$ .

Скористаємося третім рівнянням Максвелла у інтегральній формі (1.11):  $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \int_V r dV = \oint_S \vec{s} \cdot \vec{dS}$ .

Сумарний інтеграл по поверхні циліндра в лівій частині буде містити два інтеграли по основах і один – по бічній поверхні, який можна виключити з урахуванням того, що при  $\Delta h \rightarrow 0$  площа бічної поверхні  $\Delta S_{\text{бічн}} \rightarrow 0$ . Тоді для виділеного циліндра

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{D}_1 d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S_2} \vec{D}_2 d\vec{S}_2 = \int_{\Delta S} \vec{s} dS .$$

Оскільки  $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$ , а  $|dS_1| = |dS_2| = |dS|$ , то з урахуванням рівності підінтегральних скалярних добутків при переході до запису в проекціях на осі координат отримаємо  $D_1 \cos a_1 + D_2 \cos(180^\circ - a_2) = s$ .

Для остаточного запису граничних умов розкладемо, наприклад, вектор  $\vec{D}_1$  на нормальну і тангенціальну складові (рис. 1.6).

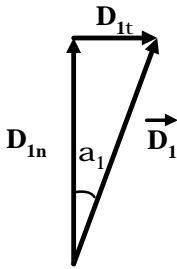


Рисунок 1.6 – Приклад розкладу вектора  $\vec{D}$  на складові

нормальних складових вектора електричної індукції на границі поділу середовищ:

$$D_{1n} - D_{2n} = s . \quad (1.24)$$

**Фізичний зміст:** нормальна складова вектора електричної індукції  $D_n$  при переході через границю поділу двох середовищ зазнає стрибка, який чисельно дорівнює поверхневій густині електричного заряду  $s$ .

Із рис. 1.6 видно, що  $\cos a_1 = \frac{D_{1n}}{D_1}$ .

Аналогічне розкладання можна провести і для вектора  $\vec{D}_2$ . Тоді  $D_1 \cos a_1 = D_{1n}$ ,  $D_2 \cos(180^\circ - a_2) = -D_{2n}$ .

Ураховуючи те що середовища 1 і 2 ізотропні, а заряд  $s$  розподілений по поверхні поділу рівномірно, отримуємо остаточний вираз для нор-

Граничну умову для нормальної складової магнітного поля можна одержати із четвертого рівняння Максвелла

$$(1.12): \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

У цьому випадку виведення граничних умов аналогічне вищенаведеному виведенню для електричного поля (студенти роблять виведення самостійно).

У результаті отримуємо

$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$

або

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (1.25)$$

**Фізичний зміст:** нормальна складова вектора магнітної індукції  $B_n$  при переході через границю поділу двох середовищ не змінюється.

**Граничні умови для тангенціальних складових** поля виводяться з першого і другого рівнянь Максвелла (1.9), (1.10).

Нехай досить гладка поверхня  $S$  розділяє два середовища 1 і 2 з різними магнітними (діелектричними) проникностями  $\mu_1$  і  $\mu_2$  ( $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$ ); параметри середовищ постійні

(рис. 1.7). Позначимо вектором  $\vec{H}_1$  напруженість магнітного поля у середовищі 1,  $\vec{H}_2$  – у середовищі 2. Охопимо

границю невеликим контуром довжиною  $\Delta l$  і висотою  $\Delta h$ , який складається із елементарних відрізків  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  і  $\Delta l_3$ ,

обумовлених за напрямками одиничними векторами  $\vec{dl}_1$ ,

$\vec{dl}_2$  і  $\vec{dl}_3$ . Припустимо, що  $|\Delta l_3| = \Delta h \rightarrow 0$ , а вздовж поверхні

$S$  у нескінченно тонкому шарі, поміщеному на границі поділу, проходить *поверхневий струм* із густиною

$i_{\text{нов}} = dI / dl$ . Позначимо кут падіння вектора  $\vec{H}_1$  на границю через  $a_1$ , а кут заломлення вектора  $\vec{H}_2$  – через  $a_2$ .

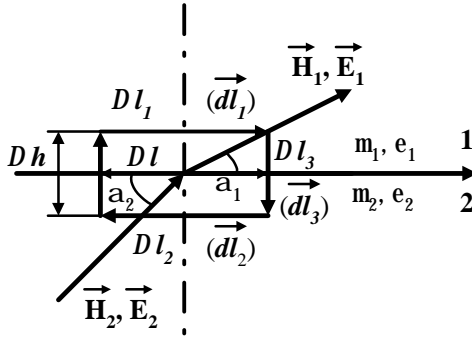


Рисунок 1.7 – Переломлення векторів  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  на границі поділу середовищ

Запишемо перше рівняння Максвелла (1.9) в інтегральній формі

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \oint_{\Delta S} \vec{d} \vec{dS} + \frac{d}{dt} \oint_{\Delta S} \vec{D} \vec{dS}.$$

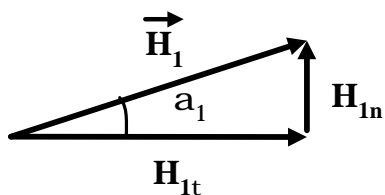
Очевидно, що з умов  $\Delta l \rightarrow 0$  і  $S_{\text{овин}} \rightarrow 0$  впливає заміна  $\oint_S \vec{d} \vec{dS}$  на  $\oint_{\Delta l} \vec{i}_{\text{нов}} \vec{dl}$ , тому що  $\vec{d}$  за розміром кінцева величина і слід урахувувати лише поверхневий струм  $i_{\text{нов}}$ . Внеском бічних сторін ( $\Delta l \rightarrow 0$ ) на контурний інтеграл тут знехтуємо. Другий інтеграл у правій частині рівняння Максвелла також прямує до нуля, оскільки  $\Delta S = \Delta l \times \Delta h \rightarrow 0$ . Тоді вихідне рівняння буде мати такий вигляд:

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \int_{\Delta l_1} \vec{H}_1 \vec{dl}_1 + \int_{\Delta l_2} \vec{H}_2 \vec{dl}_2 = \int_{\Delta l} \vec{i}_{\text{нов}} \vec{dl}.$$

Із урахуванням того що при  $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$  і  $\vec{dl}_1 = \vec{dl}_2 = \vec{dl}$  підінтегральні вирази рівні, при записі скалярних добутків векторів у проекціях на осі координат маємо:

$$H_1 \cos a_1 - H_2 \cos a_2 = i_{\text{нов}}.$$

Розкладемо вектор  $\vec{H}_1$  на нормальну і тангенціальну складові (рис. 1.8). Тоді



Тоді  $\cos a_1 = H_{1t} / H_1$ , аналогічно  $\cos a_2 = H_{2t} / H_2$ . У результаті маємо:

$$H_1 \cos a_1 = H_{1t},$$

$$H_2 \times \cos a_2 = H_{2t}.$$

Рисунок 1.8 – Приклад розкладу вектора  $\vec{H}$  на складові

Остаточно отримуємо граничну умову для тангенціальної складової магнітного поля:

$$H_{1t} - H_{2t} = i_{\text{нов}}. \quad (1.26)$$

*Фізичний зміст:* тангенціальна складова вектора напруженості магнітного поля  $H_t$  при переході через границю поділу двох середовищ зазнає стрибка, який чисельно дорівнює поверхневому струму  $i_{\text{нов}}$ .

Граничну умову для тангенціальної складової електричного поля можна отримати із другого рівняння Максвелла (1.10).

Виведення граничних умов для електричного поля аналогічне вищевикладеному виведенню для магнітного поля (студенти виведення роблять самостійно).

У результаті отримуємо

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

або

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (1.27)$$

*Фізичний зміст:* тангенціальна складова вектора напруженості електричного поля  $E_t$  при переході через границю поділу двох середовищ не змінюється.

Таким чином, загальна система граничних умов для електромагнітних полів має такий вигляд:

Електричні компоненти поля	Магнітні компоненти поля	
$D_{1n} - D_{2n} = s,$	$B_{1n} = B_{2n},$	(1.28)
$E_{1t} = E_{2t},$	$H_{1t} - H_{2t} = i_{нов}.$	

Індекс 1 відповідає верхній півплощині середовища, індекс 2 – нижній півплощині.

## 1.6 Приклади використання основних рівнянь і законів при описі електромагнітних полів

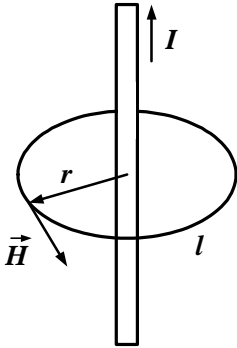
Для більш глибокого розуміння фізичної сутності наведених вище рівнянь і законів розглянемо найпростіші приклади їх використання при описі електромагнітних процесів.

### *Приклад 1.1 (перше рівняння Максвелла)*

Розглянемо прямий провідник, вздовж якого проходить постійний струм  $I$  (рис. 1.9). Навколо провідника виникає магнітне поле  $H$ , яке може бути визначене із першого рівняння Максвелла в інтегральній формі (1.9):

$$\oint_l \vec{H} \, dl = \oint_s \vec{j} \, dS, \quad \left( \frac{d\vec{D}}{dt} = 0 \right).$$

Виберемо поверхню  $S$ , обмежену контуром  $l$  у вигляді кола радіусом  $r$  із центром, що збігається з віссю провідника і розміщене у площині, перпендикулярній до осі провідника. Використовуючи осьову симетрію задачі, замінимо



скалярний добуток векторів  $\vec{H} d\vec{l}$  добутком їх довжин і винесемо  $H$  за знак інтеграла як величину сталу вздовж контуру інтегрування. Тоді  $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = 2\pi r H$ , а інтеграл у правій части-

Рисунок 1.9 –  
Магнітне поле  
провідника зі  
струмом

ні дорівнює повному струму  $I$ , який перетинає поверхню  $S$ . Отже,

$$H = \frac{I}{2\pi r}. \quad (1.29)$$

Дане співвідношення є виразом *закону Ампера* для знаходження магнітного поля провідника, через який проходить постійний струм.

Проаналізуємо значення другого доданка  $\frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} d\vec{S}$  в правій частині першого рівняння Максвелла (1.9).

Розглянемо дві пластини конденсатора (рис. 1.10), у колі якого проходить струм  $i$ . Виберемо контур інтегрування  $l$  у вигляді кола, яке охоплює провідник. Якщо поверхня  $S_1$ , обмежена цим контуром, перетинає провідник до першої пластини конденсатора, то згідно з рівнянням Максвелла (1.9) струм провідності створює магнітне поле, обумовлене таким співвідношенням:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} dS_1 = i_{np}.$$



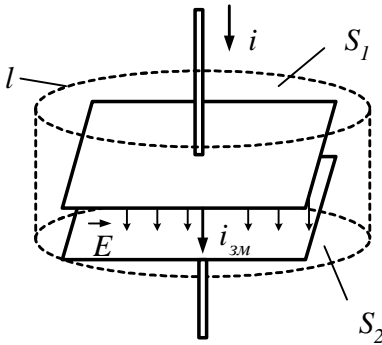


Рисунок 1.10 – Схема проходження струму по колу конденсатора

Струм провідності у колі конденсатора замикається струмом зміщення між його пластинами:

$$i_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} dS.$$

Густина струму зміщення

$$\vec{d}_{\text{зм}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Струм зміщення виникає у будь-якому діелектрику при зміні електричного поля в часі. Хоча природа струму провідності і струму зміщення різна, обоє вони утворюють магнітне поле.

### Приклад 1.2 (друге рівняння Максвелла)

У просторі, де є магнітне поле  $\vec{B}$ , розглянемо одиночний дровий контур  $l$  (рис. 1.11). Згідно із другим рівнянням Максвелла в інтегральній формі (1.10)

Виберемо іншу поверхню  $S_2$ , обмежену таким самим контуром, але розміщену між пластинами конденсатора, де струм провідності переривається. Тоді

$$\oint_l \vec{H} dl = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S}_2.$$

Однак результат виникнення магнітного поля не повинен залежати від вибору поверхні інтегрування, тому праві частини останніх виразів повинні бути рівні. Отже, струм провідності у

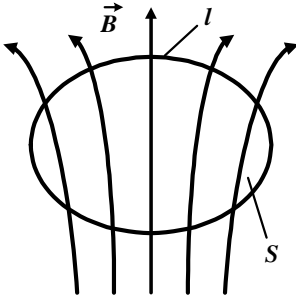


Рисунок 1.11 –  
Одиночний дров-  
вий контур у магні-  
тному полі

Рівняння

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

виражає закон електромагнітної індукції, отриманий Фарадеєм.

### Приклад 1.3 (третє рівняння Максвелла)

Розглянемо точковий заряд  $q$ , навколо якого існує електричне поле. Відповідно до третього рівняння Максвелла в інтегральній формі (1.11) маємо

$$e\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V r dV = q.$$

Якщо за поверхню інтегрування вибрати сферу (рис. 1.12) із центром у місці розміщення заряду, очевидно, що через центральну симетрію вектори  $\vec{E}$  і  $d\vec{S}$  колінеарні, а напруженість постійна по всій поверхні інтегрування. Тоді інтеграл у лівій частині дорівнює добутку  $E$  на пло-

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{у просторі}$$

виникає електричне поле. Інтеграл у правій частині являє собою потік  $\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  вектора

магнітної індукції  $\vec{B}$  через поверхню  $S$ , обмежену контуром  $l$ . Інтеграл у лівій частині являє собою електрорушійну силу, що виникає у контурі:

$e = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

щу поверхні сфери  $4\pi r^2$ , а інтеграл у правій частині дорівнює заряду  $q$ .

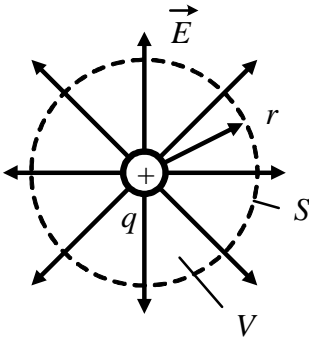


Рисунок 1.12 –  
Електричне поле то-  
чкового заряду

Напруженість поля точкового заряду визначається виразом

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Якщо в електричне поле заряду  $q$  внести пробний заряд  $q^*$ , то сила, що діє на нього, буде дорівнювати

$$F = q^* E = \frac{qq^*}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Даний вираз являє собою запис закону Кулона про взаємодію між зарядами (див. п.2.2).

#### Приклад 1.4 (четверте рівняння Максвелла)

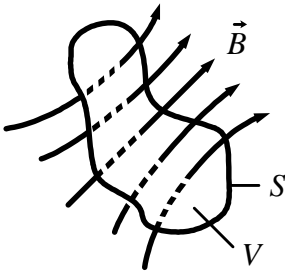


Рисунок 1.13 –  
Потік вектора маг-  
нітної індукції

Четверте рівняння Максвелла (1.12) показує, що потік вектора магнітної індукції крізь замкнену поверхню  $S$  дорівнює нулю, тобто вхідний потік дорівнює вихідному (рис. 1.13). Це означає, що магнітні силові лінії завжди замкнені і не мають ні початку, ні кінця. Силові лінії електричного поля починаються або закінчуються на зарядах.

#### Приклад 1.5 (рівняння безперервності)

Якщо у однорідному середовищі, яке характеризується питомою електропровідністю  $g$ , будь-яким чином створити об'ємний заряд  $r$ , то очевидно, що за рахунок струмів провідності цей заряд буде "розпливатися" доти, доки не розподілиться рівномірно по всьому об'єму, тобто до зникнення створеного ним електричного поля. Це явище називається релаксацією, тобто поверненням до стану рівноваги. Проведемо кількісний аналіз процесу релаксації об'ємного заряду  $r$  за допомогою рівняння безперервності (1.15), для чого замість густини струму  $\vec{d}$  підставимо його значення з (1.6), а замість  $div \vec{E}$  – величину  $\frac{r}{\epsilon\epsilon_0}$  з (1.11) (постійні величини  $g$  і  $\epsilon\epsilon_0$  можна винести за знак оператора дивергенції). У результаті отримаємо диференціальне рівняння  $\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{gr}{\epsilon\epsilon_0} = 0$ , розв'язком якого є експонентна функція  $r(t) = r(0) e^{-t/t_m}$  (рис. 1.14).

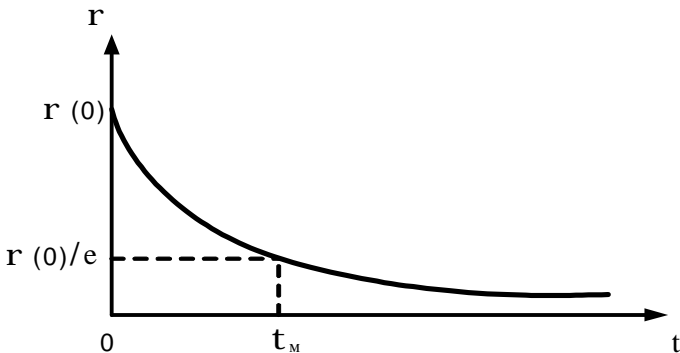


Рисунок 1.14 – Характеристика зміни об'ємного заряду  $r$  від часу  $t$

Величина  $t_m = \frac{ee_0}{g}$  характеризує швидкість спадання

об'ємного заряду і називається максвеловим часом релаксації. Треба мати на увазі, що за час  $t_m$  об'ємний заряд зменшується в  $e = 2,7$  рази. Приблизно вважається, що об'ємний заряд повністю зникає за час, що дорівнює  $(3-5)t_m$ . У металах, які мають високу провідність, цей час дуже малий (порядку  $10^{-17} - 10^{-18}$  с). У діелектриках залежно від їхньої якості він дорівнює  $10^{-2} - 10^{-6}$  с.

Описане явище спостерігається, наприклад, при такій простій ситуації, як розрядження конденсатора за рахунок струмів витоку, які проходять через ізолюючий діелектрик. Час розрядження визначається параметрами діелектрика: діелектричною проникністю  $e$  і питомою електропровідністю середовища  $g$ .

Іншим найпростішим прикладом використання рівняння безперервності є аналіз вузла електричного кола

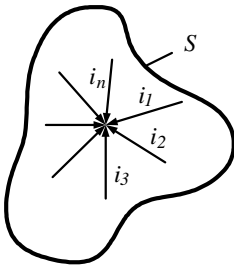


Рисунок 1.15 – Вузол електричного кола

у якому сходяться кілька провідників з постійними струмами  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ . Оточимо даний вузол деякою замкненою поверхнею  $S$  і скористаємося рівнянням безперервності у формі (1.16). Оскільки при постійних струмах заряд усередині поверхні не накопичується і не зникає, то перший доданок дорівнює нулю. Другий доданок дорівнює повному струму, який проходить крізь поверхню  $S$ , тому

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Це співвідношення являє собою перший закон Кірхгофа, який є одним із основних у теорії електронних кіл (див. п.2.3).

**Приклад 1.6 (рівняння енергетичного балансу)**

Розглянемо найпростіший приклад застосування теореми Умова-Пойнтінга.

Нехай вздовж коаксіального кабелю (рис. 1.16) проходить постійний струм  $I$ . Напруга між жилою і оболонкою  $U$ .

Провідність матеріалу жили і оболонки  $g$ . Потужність сигналу, переданого по кабелю:  $P = IU$ . Підрахуємо потік вектора Пойнтінга через поперечний переріз діелектрика, який заповнює простір між жилою і оболонкою.

Напруженість магнітного поля у діелектрику можна визначити за законом Ампера (1.29):

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Нормальна складова вектора напруженості електричного поля  $E_n$  у діелектрику для коаксіального контура визначається таким співвідношенням [3]:

$$E_n = \frac{U}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

де  $R_1$  – радіус жили;  $R_2$  – внутрішній радіус оболонки.

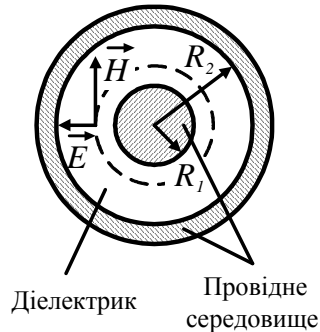


Рисунок 1.16 – Поперечний переріз коаксіального кабелю

Тоді тангенціальна складова вектора Пойнтінга для точок діелектрика на відстані  $r$  від осі ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) визначається виразом

$$P_t = E_n H = \frac{UI}{2p r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Потік вектора Пойнтінга через кільце діелектрика з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  дорівнює

$$\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} P_t 2p r dr = 2p \frac{UI}{2p \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \int_{R_1}^{R_2} (r^{-1}) dr = UI.$$

Оскільки вся подана до коаксіального кабелю потужність  $P = IU$  проходить тільки через діелектрик, то можна зробити такий висновок: *електромагнітна енергія від місця її генерування до місця споживання передається по діелектрику; дроти виконують роль каналів, по яких проходить струм, і організаторами структури поля у діелектрику. По жилі і оболонці енергія до приймача не передається. Дроти самі споживають із діелектрика енергію на покриття теплових втрат.*

Продемонструємо даний факт. Для цього підрахуємо потік вектора Пойнтінга усередині жили на довжині  $l$ . Тангенціальна складова  $E_t$  напруженості електричного поля на поверхні жили за законом Ома дорівнює  $\frac{I}{p r_1^2 g}$ .

Тоді потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню жили

$$\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_S P_n dS = \int_S E_t H dS = \int_0^l \frac{I^2}{p r_1^2 g} dl = I^2 R.$$

Таким чином, ця енергія дорівнює втратам  $I^2 R$  у жилі кабелю на довжині  $l$ .

### **Приклад 1.7 (граничні умови)**

Розглянемо особливості поведінки електричного поля біля поверхні ідеального провідника. Будемо виходити із того, що якщо його електрична провідність дорівнює нескінченності, то всередині провідника електричне поле повинно бути відсутнім. Але тоді з перших двох граничних умов (1.28) випливає те, що дотична складова поля над поверхнею дорівнює нулю, а вектор напруженості електричного поля буде перпендикулярний до поверхні і дорівнюватиме поверхневій густині заряду  $E = E_n = r_{нов} / \epsilon \epsilon_0$ . Цей висновок спрощено поширюється і на реальні метали.

Магнітна складова дорівнює нулю навіть у немагнітних металах. Це означає, що нормальна складова вектора напруженості магнітного поля також дорівнює нулю, тому магнітне поле біля поверхні буде дотичним і перпендикулярним до ліній струму, а його напруженість дорівнюватиме поверхневій густині струму (рис. 1.17):

$$H = H_t = i_{нов}.$$

Розглянемо поведінку хвиль на границі поділу діелектрик-діелектрик. За приклад заломлення вектора на границі двох діелектриків розрахуємо напрямок і величину електричного поля у слюді ( $\epsilon = 7$ ,  $g < 10^{-11}$  См/м), якщо біля її границі у повітрі напруженість електричного поля дорівнює  $10^3$  В/м, а силові лінії спрямовані під кутом  $\alpha_1 = 45^\circ$  до поверхні (рис. 1.18).

Значення питомої електричної провідності показує, що слюда – гарний діелектрик, тому зовнішнє поле не викликає появи на її поверхні наведеного заряду ( $r_{нов} = 0$ ). Використовуючи позначення на рис. 1.18, запишемо граничні



умови для нормальної ( $e_1 E_{1n} = e_2 E_{2n}$ ) і тангенціальної ( $E_{1t} = E_{2t}$ ) складових електричного поля по обидва боки від границі поділу. Оскільки  $E_{1n} = E_1 \cos a_1 \approx 707$  В/м, то  $E_{2n} = E_{1n} / e_2 \approx 101$  В/м, а  $E_{2t} = E_{1t} = E_1 \sin a_1 \approx 707$  В/м.

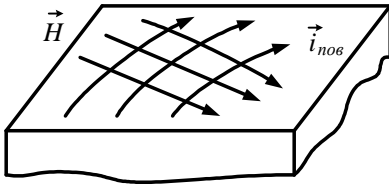


Рисунок 1.17 – Розподіл магнітного потоку і струмів на поверхні металу

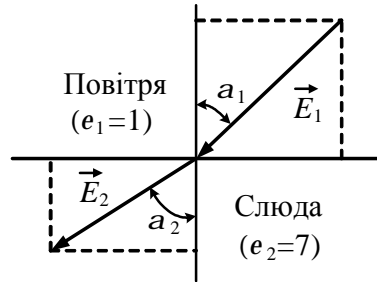


Рисунок 1.18 – Заломлення вектора  $\vec{E}$  на границі поділу слюда-повітря

Отже,

$$E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2t}^2} \approx 714 \text{ В/м,}$$

$$a_2 = \arctg \left( \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \right) \approx 82^\circ.$$

### Запитання для самоперевірки

1 На які основні діапазони можна умовно поділити спектр електромагнітних коливань? Дайте їхню коротку характеристику.

2 Які основні вектори характеризують електромагнітні поля? Запишіть зв'язок між ними через матеріальні параметри середовища.

3 Який фізичний зміст мають вектори поляризованості і намагніченості?

4 Для чого вводяться поняття скалярного електричного і векторного магнітних потенціалів?

5 Які електродинамічні параметри характеризують матеріальні середовища? Перелічіть основні типи середовищ.

6 Які лінії називаються силовими і екіпотенціальними? Продемонструйте їх розподіл на конкретних прикладах елементарних джерел електричних і магнітних полів.

7 З яких законів електромагнетизму впливають рівняння Максвелла в інтегральній формі? Запишіть їх і поясніть фізичний зміст.

8 Яким чином здійснюється перехід від інтегральної форми запису рівнянь Максвелла до диференційної?

9 Яким чином здійснюється перехід від диференційної до комплексної форми запису рівнянь Максвелла? Для якого типу електромагнітних процесів ці рівняння справедливі?

10 Які властивості електромагнітного поля характеризує закон безперервності?

11 Яким чином з рівнянь Максвелла можна одержати рівняння Лапласа і Пуассона?

12 Яким рівнянням характеризується закон збереження енергії електромагнітного поля для замкненої системи?

13 Чому в рівнянні балансу енергії для гармонійних коливань відсутні члени, які містять похідні за часом?

14 Які співвідношення зв'язують вектори електромагнітного поля на границі поділу двох середовищ?

15 Які основні теореми і принципи використовуються при розв'язанні задач теорії електромагнетизму?

## РОЗДІЛ 2 ЧАСТКОВІ ВИДИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 2.1 Загальні властивості і рівняння квазістатичних, квазістаціонарних і стаціонарних полів

Рівняння Максвелла описують змінне електромагнітне поле як єдиний процес взаємозв'язку електричного  $\partial \vec{D} / \partial t$  і магнітного  $\partial \vec{B} / \partial t$  полів. Залежно від швидкості зміни  $\partial \vec{D} / \partial t$  і  $\partial \vec{B} / \partial t$  розрізняють *квазістатичне, квазістаціонарне й швидкозмінне* поле. У граничних випадках, коли  $\partial \vec{D} / \partial t$  і  $\partial \vec{B} / \partial t$  дорівнюють нулю, рівняння Максвелла спрощуються і описують окремі види стаціонарних електромагнітних полів: *електростатичне поле, електричне поле постійного струму та магнітне поле постійного струму*. Ці поля мають свої особливості і закономірності, коротко зупинимося на найбільш загальних із них.

1 *Квазістатичним полем* називається змінне електромагнітне поле, у якому  $\partial \vec{B} / \partial t = 0$ . Таке поле вважається потенціальним, тому що  $\text{rot } \vec{E} = 0$  та для нього відсутній взаємний вплив електричного і магнітного полів.

2 *Квазістаціонарне поле* – це повільно змінне у часі вихрове поле, для якого можна вважати, що густина струму зміщення ( $\vec{d}_{zm} = \partial \vec{D} / \partial t \approx 0$ ) мала порівняно із густиною струму провідності  $\vec{d}_{np}$ . Ефект запізнювання (ефект випромінювання) відсутній. Для металевих провідників нехтування струмами зміщення ( $\frac{we_a}{g} \ll 1$ ) припустимо в широкому діапазоні частот аж до  $f = 10^{17}$  Гц. Ефект запіз-

нювання, обумовлений кінцевою швидкістю хвилі, неістотний, якщо лінійні розміри електромагнітних установок набагато менші за довжину хвиль, які поширюються в досліджуваній області. При низьких частотах, наприклад при промисловій частоті  $f = 50$  Гц, довжина хвилі в повітрі  $\lambda = 6000$  км, тому ефектом запізнювання можна знехтувати у межах великих областей поля. Більшість електромагнітних полів, які досліджуються в електродинаміці та радіотехніці, можуть розглядатися як квазістационарні.

Ураховуючи визначення квазістатичного та квазістационарного полів, їхні диференціальні рівняння запишуться у такий спосіб:

Квазістатичне поле	Квазістационарне поле
$\operatorname{rot} \vec{H} = g \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$	$\operatorname{rot} \vec{H} = g \vec{E},$
$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.1)$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$
$\operatorname{div} \vec{D} = r,$	$\operatorname{div} \vec{D} = r,$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$

**3 Стаціонарні поля.** Умовою стаціонарності електромагнітних полів є відсутність їх зміни в часі, тобто вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  і  $\vec{B}$  є функціями тільки координат. Це означає, що змінні у часі компоненти полів, які входять в рівняння Максвелла (1.9) – (1.12) і рівняння безперервності, відсутні. Доповнивши дану систему рівняннями Лапласа і Пуассона (1.17), (1.18), отримаємо спільну систему рівнянь, яка описує стаціонарні поля:

$$\begin{aligned}
\oint_l \vec{H} d\vec{l} &= \oint_s \vec{d} d\vec{S}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{d}, & \nabla^2 j &= -\frac{r}{e_a}, \\
\oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, & \nabla^2 \vec{A} &= -m_a \vec{d}, \\
\oint_s \vec{D} d\vec{S} &= \int_v r dV = \sum q, & \operatorname{div} \vec{D} &= r, & \vec{D} &= e_a \vec{E}, \\
\oint_s \vec{B} d\vec{S} &= 0, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \vec{B} &= m_a \vec{H}, \\
\oint_s \vec{d} d\vec{S} &= 0, & \operatorname{div} \vec{d} &= 0, & \vec{d} &= g \vec{E}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Із аналізу компонентів полів, що входять у систему (2.3), випливає, що її умовно можна розбити на дві групи рівнянь, що характеризують електричні (вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ) і магнітні (вектори  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ) поля:

Електричні поля	Магнітні поля
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = 0,$	$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{d} d\vec{S}, \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{d},$
$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = q, \operatorname{div} \vec{D} = r,$	$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0,$
$\oint_s \vec{d} d\vec{S} = 0, \operatorname{div} \vec{d} = 0,$	$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A},$
$\nabla^2 j = -\frac{r}{e_a},$	$\nabla^2 \vec{A} = -m_a \vec{d},$
$\vec{D} = e_a \vec{E}, \vec{d} = g \vec{E}.$	$\vec{B} = m_a \vec{H}.$

Із системи рівнянь (2.4) і (2.5) видно, що між ними існує тільки непрямий зв'язок через вектор густини струму

$\vec{d} = g \vec{E}$ . Якщо  $\vec{d} = 0$ , що справедливо для полів постійних магнітів і областей існування магнітних полів, не зайнятих струмами, то рівняння (2.4) і (2.5) стають цілком незалежними і характеризують електростатичні та магнітостатичні поля. Такі поля називаються **потенціальними**.

Для потенціальних (безвихрових) полів лінійний інтеграл за будь-яким замкненим контуром від вектора напруженості електричного поля  $\oint_l \vec{E} d\vec{l}$ , а також від вектора на-

пруженості магнітного поля  $\oint_l \vec{H} d\vec{l}$  в області, не зайнятій струмом, дорівнює нулю. Тому потенціальні поля характеризують скалярними функціями: *електричним потенціалом  $j$  електричного поля та магнітним потенціалом  $j_m$  – магнітного поля постійного струму*.

У розділі 1 наводилось визначення скалярного потенціалу. Зупинимося більш детально на поясненні його фізичної сутності при застосуванні для розв'язання широкого класу задач електромагнетизму. Розглянемо питання про *роботу*, яку здійснюють сили поля при переміщенні заряду, і про пов'язані з *роботою* поняття **потенціалу** і **різниці потенціалів**.

Помістимо в електричне поле деякий заряд  $q$ . На заряд буде діяти сила  $q \vec{E}$ . Нехай заряд  $q$  із точки 1 перемістився в точку 2 по шляху 1-3-2 (рис. 2.1). Робота, витрачена на перенесення заряду із точки 1 у точку 2 по шляху 1-3-2, визначиться як сума елементарних робіт  $q \vec{E} d\vec{l}$ . Ця сума може бути записана у вигляді лінійного інтеграла  $q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ .

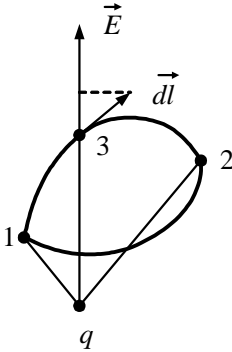


Рисунок 2.1 –  
Схема переміщення  
заряду  $q$

ності поля.

Якщо потенціал кінцевої точки шляху 2 дорівнював би нулю ( $j_2 = 0$ ), то потенціал точки 1 визначився б так:

$$j_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

тобто *потенціал* довільної точки поля може бути визначений як *робота*, що виконується силами поля із перенесення *одиночного позитивного заряду* із даної точки поля в *точку поля*, потенціал якої дорівнює нулю.

За точку, яка має нульовий потенціал, може бути взята будь-яка точка поля. Якщо така точка обрана, то потенціали всіх точок поля визначаються однозначно.

У курсах фізики потенціалом називають роботу, спричинену силами поля при перенесенні *одиночного заряду* із даної точки поля в нескінченність:  $j_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l}$ . В електротехніці вважають, що точка із нульовим потенціалом перебуває на поверхні землі (земля в умовах електростатики є

Заряд  $q$  може бути будь-яким. Візьмемо його таким, що дорівнює одиниці (одичний заряд). Під *різницею потенціалів*  $j_1 - j_2$  розуміють *роботу*, *затрачену силами поля* при перенесенні *одиночного заряду* із *початкової точки 1* у *кінцеву точку 2*:

$$j_1 - j_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) дозволяє визначити різницю потенціалів точок 1 і 2 як лінійний інтеграл від напруженості поля.

провідним тілом, тому немає різниці, де саме – на поверхні землі або в її товщі - знаходиться ця точка).

Таким чином, потенціал будь-якої точки залежить від того, якій точці поля заданий нульовий потенціал, тобто потенціал визначається із точністю до постійної величини. Однак істотного значення це не має, тому що практично важливий не потенціал якої-небудь точки поля, а різниця потенціалів і похідна від потенціалу по координатах.

При складанні різниці потенціалів довільну постійну, з точністю до якої визначають потенціал, віднімають – тобто в різницю потенціалів вона не входить. На значенні похідної від потенціалу по координатах довільна постійна також не позначиться, оскільки похідна від постійної величини дорівнює нулю.

*Картини поля є графічним зображенням сукупності ліній вектора поля та ліній рівного потенціалу.* Плоскопаралельне поле має однакову картину поля у всіх площинах, які перпендикулярні до однієї з осей прямокутної системи координат (наприклад, поле конденсатора). При плоскомеридіанному полі картина поля однакова у всіх площинах поля, які проходять крізь вісь симетрії (наприклад, поле циліндричного конденсатора).

## 2.2 Електростатичне поле

*Електростатичне поле створюється нерухомими у просторі і незмінними в часі зарядами.*

Виходячи з цього формулювання випливають такі умови існування електростатичного поля: швидкість заряду

$v_q = 0$ ; струм провідності відсутній ( $\vec{d} = 0$ ); питома провідність середовища  $g = 0$ , тобто електростатичне поле формується у середовищі вакуум – діелектрик; поле – потенціальне, тому що  $\text{rot } \vec{E} = 0$ .



У зарядженому тілі (якщо загальний заряд його незмінний з часом) елементарні заряди рухаються хаотично. Тому навіть у безпосередній близькості від поверхні цього тіла магнітне поле, створене елементарними зарядами, практично відсутнє. Це і дає можливість розглядати в електричному полі лише одну «сторону» електромагнітного поля, а саме електричну складову, яка описується векторами  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ , потенціалом  $j$  і параметром середовища  $\epsilon_a$ . Як відзначалося в п. 1.1, тут і надалі будемо розглядати поля в однорідних та ізотропних середовищах.

Основні рівняння, які описують електростатичні поля, випливають із загальної системи (2.4) із урахуванням того, що  $\vec{d} = 0$  і  $g = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0, & \text{rot } \vec{E} &= 0, \\
 \oint_s \vec{D} d\vec{S} &= q, & \text{div } \vec{D} &= r, \\
 j &= -\int_l \vec{E} d\vec{l} + \text{const}, & \vec{E} &= -\text{grad } j, \\
 \nabla^2 j &= -\frac{r}{\epsilon_a}, & \nabla^2 j &= 0 \text{ при } r=0.
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0, \\ \oint_s \vec{D} d\vec{S} &= q, \\ j &= -\int_l \vec{E} d\vec{l} + \text{const}, \\ \nabla^2 j &= -\frac{r}{\epsilon_a}, \end{aligned}} \right| (2.7)$$

Граничні умови електростатики випливають із загальних граничних умов (1.28) для електричних компонентів поля:

Границя  
діелектрик – діелектрик

$$\begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= s, \\ e_{a1} E_{1n} - e_{a2} E_{2n} &= s, \\ e_{a1} \frac{\partial j_1}{\partial n} - e_{a2} \frac{\partial j_2}{\partial n} &= s, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \text{ при } s = 0.$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \frac{\partial j_1}{\partial t} = \frac{\partial j_2}{\partial t}, \quad (2.10)$$

$$(j_1 = j_2).$$

Границя  
діелектрик – провідник  
(див. п. 1.6, приклад 1.7)

$$\begin{aligned} D_n &= -s, \quad E_n = -\frac{s}{e_a}, \\ \frac{\partial j}{\partial n} &= -\frac{s}{e_a}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$E_t = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

Граничні умови для потенціалів впливають із порівняння виразів:  $\vec{E} = \vec{t} E_t + \vec{n} E_n$  та  $\vec{E} = -\text{grad} j = -\vec{t} \left( \frac{\partial j}{\partial t} \right) - \vec{n} \left( \frac{\partial j}{\partial n} \right)$ , звідки  $E_t = -\frac{\partial j}{\partial t}$  і  $E_n = -\frac{\partial j}{\partial n}$ . Тут  $\vec{t}$  і  $\vec{n}$  – одиничні вектори тангенціальних і нормальних складових.

### **Основні властивості, теореми і закони електростатики**

1 Електростатичне поле – безвихрове, потенціальне поле ( $\text{rot } \vec{E} = 0$ ).

2 За наявності електричного поля у провідному тілі відбувається розподіл зарядів. У результаті цього усередині провідника створюється внутрішнє електричне поле, яке компенсує зовнішнє поле. Тоді усередині ідеального провідника напруженість електричного поля і вектор електричного зміщення дорівнюють нулю:  $E = 0$ ,  $D = 0$ .

3 **Теорема Гауса:** потік вектора електричного зміщення крізь замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, які перебувають усередині замкненої поверхні ( $\oint_S \vec{D} dS = \sum q$ ).

4 **Закон заломлення вектора  $\vec{E}$ :**  $\frac{tg a_1}{tg a_2} = \frac{e_1}{e_2}$ . Із гранич-

них умов електростатики (границя діелектрик - діелектрик) випливає, що безперервна тангенціальна складова вектора  $\vec{E}$ , тобто  $E_{1t} = E_{2t}$  (але  $E_{1n} \neq E_{2n}$ ) і  $D_{1n} = D_{2n}$  при  $s = 0$  (але  $D_{1t} \neq D_{2t}$ ). Звідси видно, що повні значення вектора  $\vec{E}$  і вектора  $\vec{D}$  у загальному випадку змінюються стрибком на границі поділу. Зв'язок між кутом падіння  $a_2$  і кутом заломлення  $a_1$  (рис. 1.5) знаходиться із аналізу трикутників розкладання векторів на складові (рис. 1.6 п. 1.5):

$$tg a_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}} = \frac{e_{a1} E_{1t}}{D_{1n}}, \quad tg a_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}} = \frac{e_{a2} E_{2t}}{D_{2n}} \quad \text{або} \quad \frac{tg a_1}{tg a_2} = \frac{e_1}{e_2}.$$

5 **Закон Кулона** призначений для визначення електростатичного поля і описує його механічний прояв при впливі на заряди. Сформулювати його можна таким чином: *два точкові заряди  $q_1$  і  $q_2$  у вакуумі взаємодіють один із одним з силою  $\vec{F}$ , прямо пропорційною добутку зарядів  $q_1$ ,  $q_2$  і обернено пропорційною квадрату відстані  $r$  між ними:*

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi e_0 r^2} \vec{r}_0,$$

де  $\vec{r}_0$  – одиничний вектор, спрямований вздовж лінії, яка з'єднує заряди.

Ця сила спрямована вздовж лінії, яка з'єднує точкові заряди (рис. 2.2). Якщо заряди мають однакові знаки, то вони намагаються відштовхнутися один від одного, заряди протилежних знаків намагаються зблизитися.

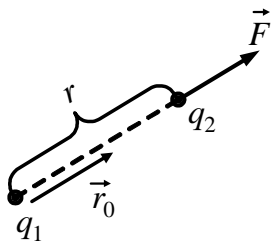


Рисунок 2.2 –  
Взаємодія зарядів  
 $q_1$  і  $q_2$

Про значення закону Кулона в фізиці. Шарль Кулон народився у 1736 році, за освітою – військовий інженер. Сформулював у 1785 році закон, названий на його честь, і експериментально підтвердив цей закон у 1789 році. Закон Кулона відіграв вирішальну роль у розвитку не тільки теорії електромагнетизму, але й у ядерній фізиці. Так, наприклад, він став основою при побудові загальної теорії електромагнітного поля Максвеллом. У 1911 році Резерфорд, використовуючи закон Кулона, побудував планетарну модель атома, на підставі якої теоретично пояснив фізику розсіювання  $\alpha$ -частинок на ядрі (формула Резерфорда). Експериментальні перевірки точності закону «зворотних квадратів» (закону Кулона) до теперішнього часу досягли рекордних значень ( $: 10^{-16}$ ), що дозволило фізикам зробити висновок про рівність нулю маси спокою фотона. Більш докладна історія відкриття закону Кулона і його роль у розвитку класичної та квантової електродинаміки описані в [13].

### 2.3 Електричне поле постійного струму

*Електричне поле постійного струму утворюється усередині та ззовні провідників при проходженні по них постійного струму, створеного зовнішніми джерелами е.р.с.*

Виходячи із визначення, умови існування електричного поля постійного струму полягають у такому: густина струму  $\vec{d} \neq 0$ ; об'ємний заряд  $r = 0$  ( $q = 0$ ); на поверхні провідника поверхнева густина заряду постійна ( $S = const$ ), питома провідність середовища  $g \gg e$ . Отже, електричне поле постійного струму характеризується векторами  $\vec{E}$ ,  $\vec{d}$ , потенціалом  $j$  і параметром середовища  $g$ . Виходячи із цього, основні рівняння електричного поля постійного струму мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0, & \text{rot } \vec{E} &= 0, \\ \oint_s \vec{d} d\vec{S} &= 0, & \text{div } \vec{d} &= 0, \\ j &= -\int_l \vec{E} d\vec{l} + const, & \vec{E} &= -grad j, \\ I &= \oint_s \vec{d} d\vec{S}, & \vec{d} &= g \vec{E}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Граничні умови електричного поля постійного струму для вектора  $\vec{E}$  впливають із системи (1.28), а для вектора  $\vec{d}$  – із рівняння  $\oint_s \vec{d} d\vec{S} = 0$  за методикою, викладеною у п. 1.5:

$$\begin{aligned} d_{1n} &= d_{2n}; g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n} \\ E_{1t} &= E_{2t}; (E_{1n} \neq E_{2n}) \text{ при } E_{cmop} = 0 \\ \frac{\partial j_1}{\partial t} &= \frac{\partial j_2}{\partial t}; j_1 = j_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

### **Основні закони електричного поля постійного струму**

1 **Закон заломлення ліній вектора  $\vec{d}$**  виводиться аналогічно до закону для вектора  $\vec{E}$  (див. п. 2.2) і має вигляд

$$\frac{\operatorname{tg} b_1}{\operatorname{tg} b_2} = \frac{g_1}{g_2},$$

де  $b_1$  і  $b_2$  – кути падіння і заломлення в провідному середовищі відповідно.

2 **Закон Ома в диференційній формі:**  $\vec{d} = g \vec{E}$  – густина струму провідності  $\vec{d}$  пропорційна напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . В інтегральній формі закон Ома має вигляд  $U = IR$ .

3 **Узагальнений закон Ома в диференційній формі** для областей, зайнятих джерелами е.р.с.:

$$\vec{d} = g \left( \vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}} \right),$$

де  $\vec{E}_{\text{стор}}$  – поле у джерелі е.р.с.

#### **4 Перший закон Кірхгофа:**

– в інтегральній формі:  $\oint_S \vec{d} \cdot d\vec{S} = 0$  – потік вектора густини струму провідності крізь замкнену поверхню дорівнює нулю;

– у диференційній формі:  $\operatorname{div} \vec{d} = 0$  – дивергенція вектора густини струму провідності дорівнює нулю (лінії  $\vec{d}$  замкнені).

### 5 Другий закон Кірхгофа:

– в інтегральній формі:  $\oint_{\vec{l}} \vec{E} dl = 0$  – циркуляція вектора

$\vec{E}$  поза джерелами е.р.с. дорівнює нулю;

– у диференційній формі:  $\text{rot } \vec{E} = 0$  – поле потенціальне поза джерелами е.р.с.

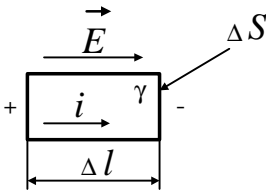


Рисунок 2.3 –  
Елемент провідника  
зі струмом

**6 Закон Джоуля-Ленца в диференційній формі:**  $p = g E^2$  – потужність теплових втрат  $p$ , що розсіюється за одиницю часу в одиниці об'єму провідного середовища при проходженні струму провідності (рис. 2.3), пропорційна питомій провідності  $g$  середовища і квадрату напруженості прикладеного електричного поля  $E$ . Даний закон є наслідком його інтегральної форми  $P = I^2 R$  при розгляді елементарного відрізка провідника зі струмом довжиною  $\Delta l$  і перерізом  $\Delta S$ . Нижче наведена схема виведення закону Джоуля-Ленца в диференційній формі:

$$p = \frac{P}{V} = \frac{I^2 R}{V} = \left| \begin{array}{l} I = d \Delta S, \\ V = \Delta l \Delta S, \\ R = \frac{1}{g} \frac{\Delta l}{\Delta S} \end{array} \right| = \quad (2.14)$$

$$= \frac{d^2 \Delta S^2}{\Delta l \Delta S} \times \frac{1}{g} \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{d^2}{g} = \frac{g^2 E^2}{g} = g E^2.$$

## 2.4 Магнітне поле постійного струму

*Магнітне поле постійного струму створюється в провіднику і навколишньому просторі при проходженні постійного струму по провіднику.*

Основною умовою існування стаціонарного магнітного поля є наявність незмінного з часом струму провідності ( $\vec{d} \neq 0$ ). Магнітне поле – вихрове ( $\text{rot } \vec{H} = \vec{d}$ ) і характеризується векторами  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{d}$ , а в областях, не зайнятих струмами, – скалярним магнітним потенціалом  $j_m$ .

*Основні властивості магнітного поля постійного струму* на підставі системи рівнянь (2.5) можуть бути сформульовані у такий спосіб:

1) *закон повного струму:*

– інтегральна форма  $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I$  – циркуляція векто-

ра напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які проходять усередині контура інтегрування;

– диференційна форма  $\text{rot } \vec{H} = \vec{d}$  – ротор вектора  $\vec{H}$  дорівнює вектору густини струму  $\vec{d}$  (поле вихрове);

2) *принцип безперервності ліній магнітної індукції:*

– інтегральна форма  $\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0$  або з використан-

ням теореми Стокса (1.8) і співвідношення  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  маємо вираз для магнітного потоку  $\Phi$  через векторний потенціал

$$\vec{A}: \Phi = \oint_s \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_l \vec{A} d\vec{l};$$



– диференційна форма  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  – дивергенція вектора магнітної індукції дорівнює нулю (магнітне поле не має джерел). Аналогічно  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ ;

3) закон **Біо-Савара-Лапласа** визначає, яку індукцію магнітного поля  $d\vec{B}$  створює елемент провідника  $d\vec{l}$  зі струмом  $I$  на відстані  $r$  від провідника за відсутності феромагнітних середовищ:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}^0]}{r^2}, \quad (2.15)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений із елемента  $d\vec{l}$  в точку, в якій визначається магнітна індукція  $d\vec{B}$  (рис. 2.4);

$\vec{r}^0$  – одиничний орт.

Результуюча індукція магнітного поля в заданій точці буде мати вигляд

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}^0]}{r^2}. \quad (2.16)$$

Вирази (2.15) і (2.16) можна записати через густину струму  $\vec{d}$  шляхом введення  $I$  у векторний добуток і заміни  $I d\vec{l}$  на  $\vec{d} dV$ , де  $dV$  – елемент об'єму провідника із густиною струму  $\vec{d}$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{d} \times \vec{r}^0]}{r^2} dV; \quad (2.17)$$

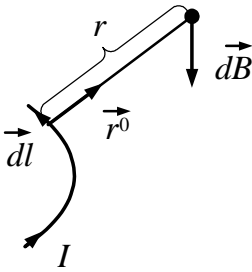


Рисунок 2.4 –  
Ілюстрація закону  
Біо-Савара-Лапласа

$$\vec{B} = \frac{m_0}{4p} \int_V \left[ \frac{\vec{d} \times \vec{r}^0}{r^2} \right] dV.$$

Формули (2.17) у літературі іноді називають *законом Ампера* за аналогією з (1.29) для замкненого контура.

Закони повного струму та Біо-Савара-Лапласа дозволяють визначити магнітну індукцію, що створюється струмом. Однак закон повного струму може бути застосований тільки до замкнених контурів, тоді як закон Біо-Савара-Лапласа справедливий і для відрізків провідників зі струмом;

4) *закони зміни векторів магнітного поля на границі поділу двох середовищ* впливають із загальної системи (1.28) і розгляду таких рівнянь для векторного потенціалу

$$\vec{A}: \oint_l \vec{A} dl = 0 \text{ і } \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (\vec{A} = \text{const}).$$

Використовуючи методу п. 1.5 та вираз (1.28), отримуємо співвідношення для векторів магнітного поля на границі поділу двох середовищ:

$$\begin{aligned} H_{1t} - H_{2t} &= i_{\text{нов}}, & A_{1t} &= A_{2t}, \\ B_{1n} &= B_{2n}, & A_{1n} &= A_{2n}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Із (2.18) випливає, що вектор  $\vec{A}$  не зазнає стрибків на границі поділу двох середовищ.

При використанні скалярних магнітних потенціалів (поле потенціальне)

$$j_{1M} = j_{2M}, \quad m_1 \frac{\partial j_{1M}}{\partial n} = m_2 \frac{\partial j_{2M}}{\partial n}.$$

Закон заломлення ліній вектора магнітної індукції має вигляд, аналогічний до електричних стаціонарних полів:

$$\frac{\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} a_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

## 2.5 Аналогія між стаціонарними полями

*Аналогія між електричним полем постійного струму і електростатичним полем.* За своєю природою електростатичне поле і поле постійного струму в провідному середовищі різні. Електростатичне поле створюється незмінними у часі і нерухомими у просторі електричними зарядами, тоді як в електричному полі в провідному середовищі електричні заряди рухаються впорядковано під дією зовнішнього джерела. Проте між двома полями може бути проведена певна формальна аналогія.

Загальною властивістю електричного поля постійного струму і електростатичного поля є їх потенціальність:

$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ . Для обох полів справедливе рівняння Лапласа  $\nabla^2 j = 0$ , якщо розглядаємо область електричного поля, яка перебуває поза джерелами енергії, а область електростатичного поля – поза об'ємним зарядом.

З подібності рівнянь, які описують ці поля, впливає формальна аналогія між відповідними величинами у цих рівняннях і тотожність граничних умов для них при однаковій формі граничних поверхонь (табл. 2.1). При цьому картини обох полів подібні, що дозволяє електростатичне поле у діелектрику моделювати електричним полем постійного струму в провідній середовищі і навпаки.

Таблиця 2.1 – Аналогія електричних стаціонарних полів

Електростатичне поле	Електричне поле постійного струму
$\oint_l \vec{E} dl = 0$	$\oint_l \vec{E} dl = 0$
$\text{rot } \vec{E} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
$\oint_s \vec{D} dS = 0$ (при $r=0$ )	$\int_s \vec{d} dS = 0$
$\text{div } \vec{D} = 0$ (при $r=0$ )	$\text{div } \vec{d} = 0$
$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$	$\vec{d} = g \vec{E}$
$\vec{E} = -\text{grad}j$	$\vec{E} = -\text{grad}j$
$j = -\int_l \vec{E} dl + \text{const}$	$j = -\int_l \vec{E} dl + \text{const}$
$\nabla^2 j = 0$	$\nabla^2 j = 0$
$E_{1t} = E_{2t}$	$E_{1t} = E_{2t}$
$D_{1n} = D_{2n}$ (при $s=0$ )	$d_{1n} = d_{2n}$
$\frac{\text{tg} a_1}{\text{tg} a_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$	$\frac{\text{tg} b_1}{\text{tg} b_2} = \frac{g_1}{g_2}$
$j_1 = j_2$	$j_1 = j_2$
$Q$	$I$
$\vec{D}$	$\vec{d}$
$\epsilon_a$	$g$

**Аналогія між магнітним полем постійного струму і електростатичним полем.** Диференційні рівняння магнітного поля постійного струму, записані для простору поза струмом, і диференційні рівняння електростатичного

поля за відсутності об'ємних зарядів аналогічні. У цьому випадку застосуємо принцип подвійності (див. п. 1.1). Розрахунки магнітного поля аналогічні до розрахунків електростатичного поля, але при розв'язанні заміняють  $\epsilon\epsilon_0$  на  $\mu\mu_0$ ,  $j$  на  $j_m$ ,  $\vec{E}$  на  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  на  $\vec{B}$  (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 – Аналогія електричного і магнітного стаціонарних полів

Електростатичне поле	Магнітне поле постійного струму
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$	$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = 0$
$rot \vec{E} = 0$	$rot \vec{H} = 0$
$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = 0$ (при $r=0$ )	$\int_s \vec{B} d\vec{S} = 0$
$div \vec{D} = 0$ (при $r=0$ )	$div \vec{B} = 0$
$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_a \vec{H}$
$\vec{E} = -grad j$	$\vec{H} = -grad j_m$
$j = -\int_l \vec{E} d\vec{l} + const$	$j_m = -\int_l \vec{H} d\vec{l} + const$
$\nabla^2 j = 0$	$\nabla^2 j_m = 0$
$E_{1t} = E_{2t}$	$H_{1t} = H_{2t}$
$D_{1n} = D_{2n}$ (при $s=0$ )	$B_{1n} = B_{2n}$

Між картиною електростатичного поля і картиною магнітного поля постійного струму в областях, не зайнятих

струмом, існує відповідність двох типів (одна з них наведена на рис. 2.5).

**Перший тип відповідності** – існує однаковий розподіл лінійних зарядів в електростатичному полі і лінійних струмів у магнітнім полі. У цьому випадку картина магнітного поля подібна до картини відповідного електростатичного поля. Відмінність полягає лише в тому, що силовим лініям електростатичного поля відповідають еквіпотенціальні лінії магнітного поля, а еквіпотенціалам електростатичного поля відповідають силові лінії магнітного поля (див. рис. 1.2, розділ 1).

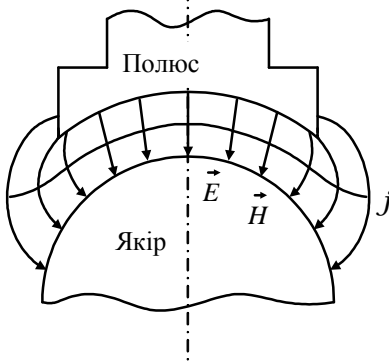


Рисунок 2.5 – Демонстрація аналогії силових і еквіпотенціальних ліній магнітостатичного і електростатичного полів

**Другий тип відповідності** – коли існує однакова форма граничних еквіпотенціальних поверхонь в електростатичному полі і в магнітному полі постійного струму. У цьому випадку картина поля виявляється повністю однаковою. Наприклад, силові лінії магнітного поля в повітряному проміжку між полюсом і якорем машини постійного струму збігаються із силовими лініями електричного поля, що створюється електродами, які мають форму полюса і якоря (рис. 2.5).

## 2.6 Електрична ємність, власна і взаємна індуктивність, енергія стаціонарних полів

Поняття електричної ємності  $C$ , власної  $L$  і взаємної  $M$  індуктивностей є інтегральними характеристиками не

тільки електростатичного і магнітного полів, але й електричних кіл. Розрахунки величин  $C$ ,  $L$  і  $M$  проводяться методами теорії поля. У деяких випадках за допомогою цих величини може бути обчислена також енергія електричного і магнітного полів.

**Електрична ємність і енергія.** При постійній діелектричній проникності середовища заряд окремого провідного тіла пропорційний його потенціалу  $Q = Cj$ . Заряд двох провідників, розділених діелектриком і заряджених рівними за значенням і протилежними за знаком зарядами, пропорційний різниці потенціалів цих тіл  $Q = C(j_1 - j_2)$ . При цьому коефіцієнт пропорційності  $C$  називається **ємністю**.

Ємність визначають як відношення заряду окремого провідного тіла до його потенціалу  $C = Q/j$ , а ємність двох провідних тіл – як відношення абсолютного значення заряду до різниці потенціалів між цими тілами:

$$C = \frac{Q}{(j_1 - j_2) U} = \frac{Q}{U}.$$

Із визначення ємності випливає одиниця її розмірності  $1 \frac{\text{Кулон}}{\text{Вольт}} = 1 \text{ Фарада (Ф)}$ . Це дуже велика одиниця, і тому на практиці користуються більш дрібними, кратними їй одиницями: мікрофарадою (мкФ) та пікофарадою (пФ):  $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ;  $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ .

Ємність залежить від геометричних розмірів, конфігурації, діелектричної проникності середовища та взаємного розміщення тіл. Пристроєм, призначеним для отримання певної величини ємності, є конденсатор, який являє собою систему із двох провідників (обкладинок, електродів), розділених діелектриком. Залежно від форми обкладинок конденсатори можуть бути плоскими, циліндричними, сферичними та ін. Якщо діелектрична проникність постійна, то ємність конденсатора не залежить від напруги між

обкладинками, його характеристика – лінійна. При залежності діелектричної проникності від напруженості поля ємність конденсатора залежить від напруги між обкладинками, а його характеристика – нелінійна.

За наявності декількох заряджених провідників вводять поняття часткових ємностей і еквівалентної ємності системи [1-3].

Запас електричної енергії в об'ємі  $V$  визначається таким співвідношенням:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV. \quad (2.19)$$

Розрахунки енергії простіше проводити, використовуючи скалярні характеристики поля: потенціали  $j$  і заряди

$q$ . Для цього в (2.19) здійснимо заміну  $\vec{E} = -grad j$  і скористаємося тотожністю векторного аналізу  $div \vec{D} = j div \vec{D} + \vec{D} grad j$ , звідки  $\vec{D} grad j \equiv div \vec{D} - j div \vec{D}$ .

У результаті отримуємо, що  $W_e = \frac{1}{2} \int_V j div \vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_V div j \vec{D} dV$ . Скориставшись теоремою Гауса

( $div \vec{D} = r$ ) і Остроградського-Гауса (1.7), остаточно маємо

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V j r dV - \frac{1}{2} \oint_S \vec{j} \vec{D} dS. \text{ Можна показати, що для}$$

локального розподілу заряду у необмеженому просторі  $V$  поверхневий інтеграл прямує до нуля, тоді

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V rj dV. \quad (2.20)$$



Якщо розподіл заряду розбити на  $N$  окремих областей  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), що несуть повні заряди  $q_i$ , то для системи провідників можна вважати, що  $j_i = const$ . Тоді

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N j_i \int_{V_i} r_i dV_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N j_i q_i. \quad (2.21)$$

Із співвідношення (2.21) електрична енергія конденсатора через ємність визначається у такий спосіб:

$$W_e = \frac{Q(j_1 - j_2)^2}{2(j_1 - j_2)} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q}{2C}. \quad (2.22)$$

Співвідношення (2.22) дозволяє обчислити ємність конденсатора (системи із двох провідників) через електричну енергію.

**Індуктивність і взаємна індуктивність, магнітна енергія.** Якщо по замкненому контуру проходить електричний струм  $I$ , то усередині контура створюється магнітне поле

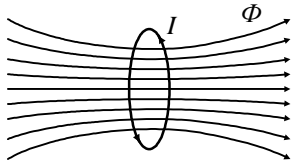


Рисунок 2.6 –  
Магнітний потік  
контура зі стру-  
мом

тричний струм  $I$ , то усередині контура створюється магнітне поле (рис. 2.6), індукція якого  $\vec{B}$  пропорційна силі струму  $I$  та визначається за законом Біо-Савара-Лапласа (2.16). Оскільки магнітний потік  $\Phi$  пов'язаний із магнітною індукцією виразом

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S},$$

то магнітний потік, створений контуром зі струмом, буде пропорційний силі струму, який проходить в контурі  $\Phi = LI$ , де  $L$  – коефіцієнт пропорційності, який називається *індуктивністю контура*.

Таким чином, *індуктивністю контура* є коефіцієнт пропорційності між власним магнітним потоком, що пронизує контур, і струмом у цьому контурі,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \oint_S \vec{n} \vec{B} dS. \quad (2.23)$$

Тепер розглянемо два контури зі струмами  $I_1$  та  $I_2$ . Такі контури створюють магнітні потоки  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  відповідно. Частина магнітного потоку  $\Phi_{12}$ , створеного струмом  $I_1$

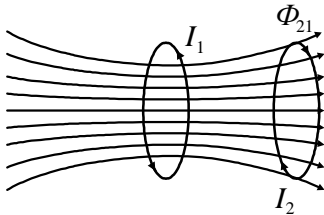


Рисунок 2.7 –  
Магнітні потоки  
двох контурів зі  
струмом

першого контура пронизує другий контур, а частина магнітного потоку  $\Phi_{21}$ , створеного струмом  $I_2$  другого контура, пронизує перший контур (рис. 2.7). Між магнітним потоком  $\Phi_{21}$ , який пронизує другий контур, і струмом  $I_1$  першого контура існує лінійний зв'язок  $\Phi_{21} = L_{21}I_1$ . Тут коефіцієнт пропорційності  $L_{21}$

називається *взаємною індуктивністю контурів*. Аналогічно можна записати і для першого контура  $\Phi_{12} = L_{12}I_2$ . Розрахунки, підтверджені дослідом, показують, що  $L_{21} = L_{12} = M$ .

*Коефіцієнт пропорційності  $M$  між струмом одного контура і магнітним потоком, створеним цим струмом, який пронизує другий контур, називається взаємною індуктивністю:*

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{1}{I_1} \oint_{S_2} \vec{n} \vec{B}_1 dS = \frac{1}{I_2} \oint_{S_1} \vec{n} \vec{B}_2 dS. \quad (2.24)$$

Магнітні потоки, створені постійним струмом, визначають статичні індуктивності, які залежать від геометричних розмірів контурів, їх взаємного розміщення, магнітної проникності матеріалів контурів і середовища. Для нелі-

нійних середовищ  $[m = f(H)]$  індуктивності  $L$  і  $M$  залежать від струмів у контурах.

При обчисленні власної індуктивності розглядають області усередині і поза дротом, тоді  $L = L_{\text{вн}} + L_{\text{зовн}}$ . Якщо радіус дроту малий порівняно із іншими розмірами контура, то можна припустити, що зовнішнє магнітне поле створюється струмом, зосередженим на осі дроту. Власна індуктивність одного контура може бути визначена виходячи із основного співвідношення для енергії магнітного поля

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V m_a H^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV. \quad (2.25)$$

Як і у випадку електричних полів, можна перейти до запису магнітної енергії через джерела  $\vec{d}$  і потенціали  $\vec{A}$ .

Проведемо в (2.25) заміну  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  і скористаємося тотожністю векторного аналізу  $\text{div} \left[ \vec{H} \times \vec{A} \right] = \vec{A} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{A}$ ,

звідки  $\vec{H} \text{rot } \vec{A} = \vec{A} \text{rot } \vec{H} - \text{div} \left[ \vec{H} \times \vec{A} \right]$ . Із урахуванням зако-

ну повного струму  $\text{rot } \vec{H} = \vec{d}$  рівність (2.25) набуде такого вигляду:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{d} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div} \left[ \vec{H} \times \vec{A} \right] dV.$$

Застосуємо до другого інтеграла теорему Остроградського – Гауса (1.7), при цьому можна показати, що потік вектора  $\left[ \vec{H} \times \vec{A} \right]$  крізь замкнену поверхню, яка охоплює всі джерела об'єму  $V$ , буде дорівнювати нулю. У результаті маємо

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} d\vec{d} dV. \quad (2.26)$$

Припустимо, що  $\int_S \vec{d} d\vec{S} = I = const$  для будь-якого від-  
різка  $d\vec{l}$  у заданому контурі, а  $\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \Phi = const$  для

будь-якого перерізу  $d\vec{S}$ , тоді об'ємний інтеграл (2.26)  
можна записати в такому вигляді:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_S \vec{d} d\vec{S} \times \int_l \vec{A} d\vec{l} = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{LI^2}{2}.$$

Для практичних розрахунків зручно виходити із таких  
рівностей:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V m_a H^2 dV = \frac{LI^2}{2}$$

або

$$\Phi_i = \int_{S_i} m_a H dS = \sum_{k=1}^n M_{ik} I_k. \quad (2.27)$$

При цьому магнітний потік може бути розрахований за  
векторним потенціалом  $\Phi_i = \oint_{l_i} \vec{A} d\vec{l}_i$ .

## 2.7 Приклади аналізу стаціонарних і квазістаціонарних полів у найпростіших компонентах електричних кіл

Найпростіші компоненти пристроїв електронної техніки – резистори, котушки індуктивності, конденсатори, від-  
різки сполучних ліній. Крім названих, електронні ланцюги містять так звані активні компоненти, які безпосередньо

підсилюють сигнали, перетворюють енергію із однієї форми в іншу, відображають інформацію і т.п. Ці компоненти є предметом вивчення курсів електроніки. Розглянемо лише найпростіші (пасивні) компоненти з погляду на їх схемотехнічні властивості, тобто зв'язки між струмом і напругою (резистори), зарядом і напругою (конденсатори), магнітним потоком і струмом (котушки індуктивності).

**Приклад 2.1 (резистор).** У найпростішому варіанті резистор – деякий об'єм речовини (рис. 2.8), яка має помітну електричну провідність і для якого виконується закон Ома в диференційній формі:

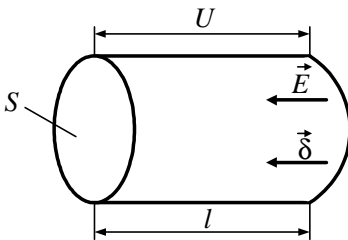


Рисунок 2.8 – Резистор

$\vec{j} = g \vec{E}$ . Помножимо обидві частини цієї рівності на елементарний об'єм  $dS dl$  і проінтегруємо за всім об'ємом.

Інтеграл від  $\vec{j} dS$  у лівій частині – повний струм  $il$ , а інтеграл від  $\vec{E} dl$  у правій – різниця потенціалів  $U$  на всій довжині зразка. Тому  $il = gSU$  або  $U = iR$ , де  $R = l/gS$  – опір.

Таким чином, для резистора характерна пряма пропорційність між струмом, що проходить і спаданням напруги. Ця закономірність називається законом Ома, а коефіцієнт пропорційності – опором. Така залежність спостерігається лише для початкової ділянки вольтамперної характеристики резистора. У сильних електричних полях питома електрична провідність стає залежною від напруженості електричного поля і закон Ома порушується.

**Приклад 2.2 (плоский конденсатор).** Відмітною ознакою елементів, що характеризуються ємністю, є електростатичне поле. Розглянемо конденсатор, на пластинах яко-

го розміщені рівні за величиною і протилежні за знаком заряди (рис. 2.9). Відомо (див. п. 2.5), що заряд однієї із пластин прямо пропорційний різниці потенціалів  $q = CU$ , де  $C$  – ємність конденсатора.

Збільшення заряду, наприклад, на верхній пластині,

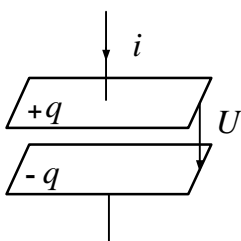


Рисунок 2.9 –  
Плоский конденсатор

є ємність конденсатора.

При підключенні до конденсатора змінної напруги у його колі буде проходити змінний струм. У припущенні

квазістаціонарності процесу ( $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ) між їхніми комплекс-

ними амплітудами спостерігається пряма пропорційність

$$\dot{i} = j\omega C \dot{U}.$$

За формою ця рівність аналогічна до закону Ома, а величина  $1/\omega C = X_C$  називається *реактивним ємнісним опором*.

**Приклад 2.3 (катушка індуктивності).** Одним із елементів електричних кіл є катушка індуктивності, при проходженні електричного струму по ній виникає магнітне поле (рис. 2.10).

Для аналізу схемотехнічних властивостей такого елемента припустимо, що він виготовлений із провідника без

приведе до збільшення різниці потенціалів. Але з іншого боку, збільшення заряду можливо лише за рахунку проходження струму  $i = dq/dt$  у колі. Тому струм у колі конденсатора пропорційний швидкості зміни напруги в часі  $i = C \frac{dU}{dt}$ , а коефіцієнтом пропорційності

вtrat і скористаємося другим рівнянням Максвелла в інтегральній формі (1.10):

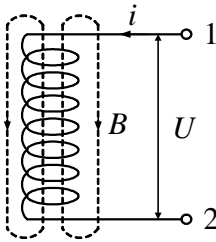


Рисунок 2.10 –  
Котушка індуктивності

$$\oint_l \vec{E} dl = - \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} dS.$$

За замкнений контур інтегрування виберемо лінію, яка проходить від точки 1 до точки 2 уздовж провідника зі струмом, і потім від точки 2 до точки 1 по вільному простору. Оскільки у ідеальному провіднику електричне поле відсутнє, інтеграл на першій ділянці дорівнює нулю, а на другій – різниці потенціалів між точками 1 і 2 (2.6), тобто спаданню напруги на котушці (зі зворотним знаком). Інтеграл у правій частині дорівнює потоку вектора магнітної індукції  $\Phi$  крізь поверхню, обмежену обраним контуром. Як відомо, цей потік пропорційний струму, тобто  $\Phi = Li$ . Тому напруга  $U$  на котушці, у припущенні квазістаціонарності процесу ( $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ ), пропорційна швидкості зміни струму у часі:

$$U = L \frac{di}{dt},$$

а коефіцієнт пропорційності  $L$  називається *індуктивністю* (див. п.2.6).

Під час роботи котушки на змінному струмі ( $i \rightarrow \dot{I} \times e^{j\omega t}$ ,  $U \rightarrow \dot{U} \times e^{j\omega t}$ ) між амплітудами напруги і струму буде спостерігатися пряма пропорційність, тоді, якщо скористатися методом комплексних амплітуд,

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}.$$

Формально ця залежність для комплексних амплітуд аналогічна до закону Ома, а коефіцієнт пропорційності  $X_L = \omega L$  називається *реактивним опором котушки індуктивності* аналогічно до ємнісного реактивного опору конденсатора (див. приклад 2.2).

**Приклад 2.4 (магнітна індукція відрізка дроту зі струмом).** Для порівняння законів повного струму і Біо-Савара-Лапласа розглянемо процедуру знаходження магнітної індукції, створеної відрізком лінійного дроту зі струмом  $i$  у довільній точці  $m$  (рис. 2.11). Для знаходження магнітної індукції скористаємося співвідношенням (2.16).

Припустимо, що точка  $m$  віддалена на відстань  $b$ . Кут між  $\vec{dl}$  і  $\vec{r}^0$  позначимо  $a$ . Із геометричних міркувань маємо:

$$\text{мо: } r = \frac{b}{\sin a}, \quad l = -bctga, \quad \text{отже, } dl = \frac{bda}{\sin^2 a};$$

$$\left[ \vec{dl} \times \vec{r}^0 \right] = dl \times 1 \times \sin a; \quad dB = \frac{m_0 i}{4\pi b} \sin a da.$$

У результаті інтеграл (2.16) і його розв'язання запишуться у вигляді:

$$B = \frac{m_0 i}{4\pi b} \int_{a_1}^{a_2} \sin a da = \frac{m_0 i}{4\pi b} (\cos a_1 - \cos a_2),$$

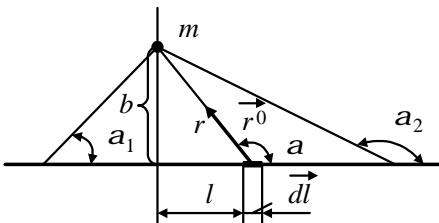


Рисунок 2.11 – До визначення магнітної індукції відрізка дроту

де вектор  $\vec{B}$  спрямований до читача.

Якщо дріт буде нескінченно довгий, то  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 180^\circ$ ,  $\cos a_1 - \cos a_2 = 2$  і  $B = \frac{m_0 i}{4\pi b}$ , що

збігається із результа-



том, отриманим за законом повного струму в п.1.6 (1.29).

**Приклад 2.5 (поле і ємність дводротової лінії).** Однією із простих задач електростатики, при розв'язанні якої використовується теорема Гауса в інтегральній формі (1.11), може бути задача зі знаходження напруженості поля  $\vec{E}$ , потенціалу  $j$  та ємності  $C$  дводротової лінії передачі – однієї із компонентів електричних кіл. При цьому для більшої наочності розв'язання задачі доцільно розбити її на три етапи: визначення поля нескінченно довгого і тонкого провідника (зарядженої осі); двох паралельних заряджених осей; дводротової лінії із урахуванням товщини провідників.

**Заряджена вісь** розміщена у діелектричному середовищі  $\epsilon_a$  і має заряд на одиницю довжини  $t = \frac{\partial q}{\partial l}$ . Для зна-

ходження напруженості поля  $\vec{E}$  у деякій точці, віддаленій на відстань  $r$  від осі (рис. 2.12), проведемо через цю точку циліндричну поверхню так, щоб її вісь збігалась із зарядженою віссю.

Тоді теорема Гауса для такої системи запишеться у такий спосіб:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{\epsilon_a} = \frac{1}{\epsilon_a} \int t \, dl. \quad (2.28)$$

У нашому випадку замкнена поверхня утворена бічною поверхнею циліндра і двома його основами. Потік вектора  $\vec{E}$  проходить тільки крізь бічну поверхню циліндра. Крізь основи потік вектора  $\vec{E}$  відсутній, оскільки елемент поверхні  $\vec{dS}$  кожного із них перпендикулярний до  $\vec{E}$ , то маємо інтегрування тільки по бічній поверхні. Із урахуванням того, що елементи  $\vec{dS}$  бічної поверхні і напруженість елек-

тричного поля  $\vec{E}$  у будь-якій точці циліндра за напрямом збігаються, а  $t$  не залежить від елемента довжини зарядженої осі, рівняння (2.28) набуде такого вигляду:

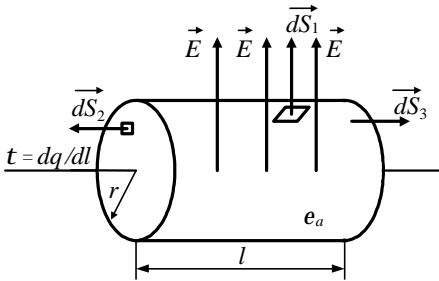


Рисунок 2.12 – До визначення напруженості електричного поля зарядженої осі

$$E \int_S dS_1 = \frac{t}{\epsilon_a} \int dl$$

$$\text{або } ES_1 = \frac{t}{\epsilon_a} l,$$

де  $S_1 = 2\pi r l$ .

Звідки напруженість поля зарядженої осі

$$E = \frac{t}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (2.29)$$

Із (2.29) видно, що напруженість у полі зарядженої осі змінюється обернено пропорційно відстані  $r$  від точки до осі, тому потенціал визначається у такий спосіб:

$$j = -\int E dr = -\frac{t}{2\pi\epsilon_a} \int (r^{-1}) dr = \frac{t}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C, \quad (2.30)$$

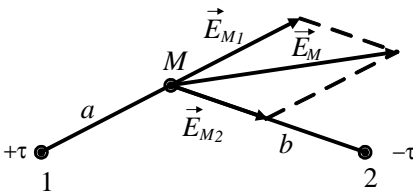


Рисунок 2.13 – Електричне поле двох заряджених осей

де  $C$  – константа інтегрування, а одиниця, що перебуває під знаком логарифма у (2.30), має сенс одиничного радіуса (одиниці вимірювання), тому логарифм береться від величини із нульовою розмірністю.

**Паралельні заряджені осі** схематично наведенні на рис. 2.13. Нехай одна вісь на одиницю довжини має заряд

$+t$ , інша – заряд  $-t$ . Візьмемо у їхньому полі деяку довільну точку  $M$ .

Результуюча напруженість поля в ній  $\vec{E}_M = \vec{E}_{M1} + \vec{E}_{M2}$ . Відстань від точки  $M$  до позитивно зарядженої осі позначимо через  $a$ , до негативно зарядженої осі – через  $b$ . Потенціал точки  $M$  дорівнює сумі потенціалів від кожної осі:

$$j_M = \frac{t}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{a} + \frac{-t}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{b} + C = \frac{t}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + C. \quad (2.31)$$

Для екіпотенціальних ліній ( $j = const$ ) відстань  $\frac{b}{a} = const$ .

**Дводротова лінія** із провідниками кінцевого радіуса схематично наведена на рис. 2.14.

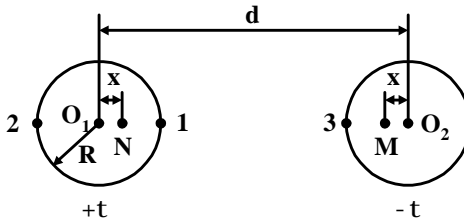


Рисунок 2.14 – Схема дводрової лінії

Нехай два дроти однакового радіуса  $R$  перебувають на відстані  $d$  друг від друга. Якщо лівий дріт буде мати заряд  $+t$  на одиницю довжини, а правий  $-t$ , то у просторі між ними виникне електричне поле. Заряди дротів розподіляться по поверхні з неоднаковою густиною: на внутрішніх стінках дротів густина заряду буде більша, ніж назовні.

Поверхня кожного дроту є екіпотенціаллю. Усередині дротів  $E=0$ . Задача про поле дводрової лінії зводиться до розглянутої вище задачі про поле двох заряджених осей.

Розташуємо дві заряджені осі так, щоб поверхні кожного дроту були екіпотенціальними.

Точками  $O_1$  і  $O_2$  позначимо геометричні осі провідників. Нехай заряджені осі будуть розміщені в точках  $M$  і  $N$ . З умови симетрії вони віддалені від геометричних осей на однакову відстань  $x$ . Запишемо умову рівності потенціалів точок 1 і 2 лівого дроту. Відношення  $\frac{b}{a}$  в (2.31) для

точки 1 є  $\frac{d-R-x}{R-x}$ ; відношення  $\frac{b}{a}$  для точки 2 дорівнює  $\frac{d+R-x}{R+x}$ .

Із рівності  $\frac{d-R-x}{R-x} = \frac{d+R-x}{R+x}$  отримаємо

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - R^2}. \quad (2.32)$$

У виразі (2.32) знак мінус перед радіусом відповідає положенню точки  $N$ , знак плюс – точки  $M$ .

Неважко переконатися в тому, що якщо  $d \gg R$ , то  $x$  стає на багато менше  $R$ . При

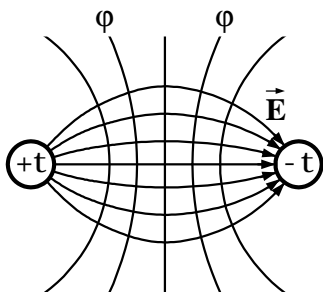


Рисунок 2.15 – Картина електричного поля дводротової лінії

цьому електричні і геометричні осі практично збігаються. На рис. 2.15 наведена картина електричного поля дводротової лінії.

Знайдемо **ємність дводротової лінії**. Для цього виразимо напругу між двома дротами з використанням заряду  $t$  на одиницю довжини. Виберемо точку 1 (див. рис. 2.14), що належить

поверхні лівого дроту, точку 3 – поверхні правого дроту. Різниця потенціалів між ними

$$U_{13} = j_1 - j_3 = \frac{t}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-R-x}{R-x} - \frac{t}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R-x}{d-R-x}.$$

$$\text{При } d \gg R \text{ і } R \gg x \quad U_{13} = \frac{t}{2\pi\epsilon_a} 2 \ln \frac{d}{R} = \frac{t}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{R}.$$

Отже, ємність одиниці довжини лінії за умови  $d \gg R$

$$C = \frac{t}{U_{13}} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{R}}. \quad (2.33)$$

Із (2.33) випливає, що **ємність** лінії *залежить тільки від її геометричних розмірів і від властивостей середовища, у якому вона розміщується*. Залежність від величини заряду і напруги  $U_{13}$  у виразі (2.33) відсутня. Слід зазначити, що якщо відстань між двома провідниками збільшувати, то ємність буде зменшуватися.

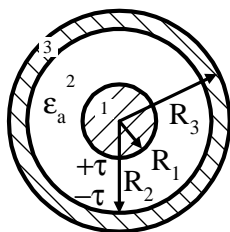


Рисунок 2.16 – Коаксіальний кабель (конденсатор)

**Приклад 2.6 (ємність і індуктивність коаксіального кабелю (циліндричного конденсатора)).**

Коаксіальний кабель (циліндричний конденсатор) являє собою два циліндричні провідники (один – суцільний, інший – порожній), розміщених так, що їхні осі збігаються (рис. 2.16). Простір між провідниками заповнений діелектриком із проникністю  $\epsilon_a$ . Нехай внутрішній і зовнішній провідники заряджені різнойменними зарядами із лінійною густиною  $+t$  та  $-t$ . Ці заряди зосереджені на обернених один до одного поверхнях. Оскільки осі циліндричних провідників коаксіального кабелю збігаються, то заряди

рівномірно розподілені по всій поверхні. Тому поле між цими електродами можна розглядати як поле, створене зарядженою віссю (див. приклад 2.5). Тоді напруженість електричного поля між провідниками визначається виразом (2.29).

Напруга між оберненими один до одного поверхнями дротів  $U = j_1 - j_2$ . Тут  $j_1$  – потенціал на поверхні внутрішнього провідника;  $j_2$  – потенціал на внутрішній поверхні зовнішнього провідника.

Із (2.30) знаходимо  $U$  :

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{t}{2pe_a} \int_{R_1}^{R_2} (r^{-1}) dr = \frac{t}{2pe_a} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Підставивши отримане значення напруги у формулу для ємності, отримуємо

$$C = \frac{t}{U} = \frac{2pe_a}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}. \quad (2.34)$$

Зі співвідношення (2.34) видно, що ємність коаксіального кабелю, як і дводрової лінії (2.33), залежить тільки від параметрів матеріального середовища і геометрії електродів.

Власна індуктивність коаксіального кабелю  $L$  на одиницю довжини при постійному струмі і  $m = const$  створюється магнітними потоками, розподіленими в трьох областях поля: усередині жили кабелю  $L_1$ , в області  $L_2$ , зайнятій ізоляцією (зовнішньою відносно до струму жили), і усередині оболонки  $L_3$  (див. рис. 2.16). Повна власна індуктивність кабелю  $L = L_1 + L_2 + L_3$ .

**Приклад 2.7 (використання аналогії стаціонарних електричних полів).** Якщо будь-які електроди помістити в провідне середовище і приєднати до джерела е.р.с., то у

середовищі виникне струм  $I$ . При напрузі між електродами  $U_{12}$  провідність середовища є величиною, зворотною опору  $G = I/U_{12}$ .

Оскільки  $I = \int \vec{d} \vec{dS} = g \int \vec{E} \vec{dS}$  та  $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \vec{dl}$ , то провідність

$$G = \frac{g \int \vec{E} \vec{dS}}{\int_1^2 \vec{E} \vec{dl}}. \quad (2.35)$$

У свою чергу, в електричному полі із електродами такої ж конструкції ємність за наявності різнойменних статичних зарядів  $Q = \int \vec{D} \vec{dS}$  буде мати вигляд

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{e_a \int \vec{E} \vec{dS}}{\int_1^2 \vec{E} \vec{dl}}. \quad (2.36)$$

Якщо розділити (2.36) на (2.35), то після скорочення отримаємо

$$\frac{C}{G} = \frac{e_a}{g}, \quad (2.37)$$

тобто ємність  $C$  між двома тілами, розділеними діелектриком із абсолютною діелектричною проникністю  $e_a$ , так відноситься до провідності  $G$  між тими ж тілами, якщо б помістити їх у середовище із електричною провідністю  $g$ , як  $e_a$  співвідноситься з  $g$ .

Співвідношення (2.37) дозволяє за відомим виразом для ємності між будь-якими тілами одержати вираз для

провідності або зробити зворотну операцію. Так, наприклад, ємність дводрової лінії (2.33):

$$C = \frac{pe_a}{\ln \frac{d}{R}}$$

Для того щоб одержати вираз для провідності між двома паралельними дротами (циліндрами) довжиною  $l$ , зануреними у середовище із провідністю  $g$ , необхідно відповідно до (2.37) замінити  $e_a$  на  $g$ . Тоді отримаємо

$$G = \frac{pgl}{\ln \frac{d}{R}}$$

Або інший приклад. Ємність коаксіального кабелю (2.34):

$$C = \frac{2pe_a}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

Провідність між двома співвісними циліндрами довжиною  $l$ , які розділені середовищем із питомою провідністю  $g$ , ідентифікується таким виразом:

$$G = \frac{2pgl}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

Аналогію можна поширити і на більш складні поля.

**Приклад 2.8 (екранування електростатичних і магнітних полів).** Екранами є пристрої, призначені для захисту установок від електромагнітних зовнішніх полів, а також навколишнього простору від полів, створених самою установкою.

Екрани поділяють на електростатичні, магнітні та електромагнітні.



**Електростатичні екрани** ґрунтуються на використанні явища електростатичної індукції: поле зовнішніх зарядів компенсується полем викликаних ними зарядів, розміщених на зовнішній поверхні екрана. Тому усередину металевого екрана зовнішнє поле не проникає (рис. 2.17).

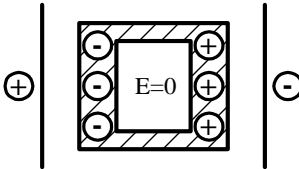


Рисунок 2.17 –  
Електростатичний екран

Товщина екрана на якість екранування не впливає. Електростатичні екрани застосовують при точних вимірах та для захисту вимірювальних установок.

**Магнітні екрани** призначені для ослаблення зовнішнього магнітного потоку усередині екрана. При екрануванні зовнішнього магнітного поля застосовують замкнені феромагнітні оболонки із листових або масивних феромагнітних матеріалів. При цьому майже всі лінії зовнішнього магнітного поля концентруються усередині стінок екрана, практично не проникаючи у внутрішню область простору (рис. 2.18). Дія екрана тим сильніша, чим більше відношення  $m$  екрана до  $m$  середовища усередині екрана.

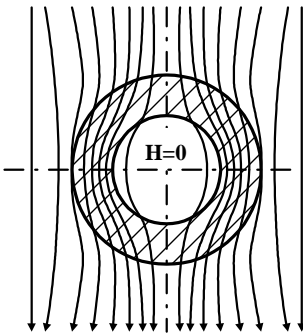


Рисунок 2.18 –  
Магнітний екран

Більш докладно матеріали щодо конструювання екранів викладені в [14].

### Запитання для самоперевірки

1 Чим відрізняються рівняння квазістатичних, квазістаціонарних і стаціонарних полів від загальної системи рівнянь Максвелла?

2 Яким способом можна розділити систему рівнянь Максвелла на рівняння електричних і магнітних стаціонарних полів?

3 Які поля називаються потенціальними? У чому полягає фізичний зміст потенціалу і різниці потенціалів?

4 Які основні теореми і закони електростатики ви знаєте?

5 Які основні закони описують електричні поля постійного струму?

6 У чому полягає принципова відмінність властивостей магнітного поля постійного струму від властивостей електричних стаціонарних полів?

7 Чим відрізняються граничні умови електричних та магнітних стаціонарних полів від загальних граничних умов електромагнітного поля?

8 У чому відмінність закону Ома в диференційній формі від його інтегральної форми запису?

9 Чим відрізняється інтегральна і диференційна форми запису закону Джоуля – Ленца?

10 У чому відмінність закону повного струму від закону Біо-Савара-Лапласа?

11 Чим відрізняється скалярний потенціал магнітного поля  $j_m$  від векторного  $\vec{A}$ ?

12 Які основні властивості і рівняння призначені для побудови аналогії стаціонарних полів? При розв'язанні яких задач у теорії поля застосовується аналогія стаціонарних полів?

13 Для яких елементів електричних кіл застосовуються поняття ємності, індуктивності і взаємної індуктивності? Дайте визначення цих параметрів.

14 Чи можливо із співвідношень для електричної та магнітної енергій визначити ємність і індуктивність?

15 Які фізичні принципи використовуються при електростатичному і магнітному екрануванні? Наведіть схеми виконання екранів.

## РОЗДІЛ 3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

Процес поширення електромагнітного збурення називається *електромагнітною хвилею*. Зміст поняття «хвильовий процес» неважко зрозуміти, проаналізувавши рівняння Максвелла (1.9), (1.10) у диференційній формі запису. Припустимо, що струм провідності проходить у будь-якому середовищі і збуджує вихрове магнітне поле (відповідно до першого рівняння Максвелла). Якщо струм змінюється в часі, подібним чином змінюється і магнітне поле, яке збуджує (відповідно до другого рівняння Максвелла) вихрове електричне поле. Але змінне електричне поле породжує струм зміщення, який, як і струм провідності, у свою чергу приводить до збудження вихрового магнітного поля. Таким чином, процес взаємного збудження полів, почавшись, може тривати скільки завгодно довго у часі і у просторі за умови відсутності втрат. Подібні процеси називають *хвильовими*.

### 3.1 Хвильові функції та рівняння

Уявлення про те, як поширюється хвиля зі швидкістю  $v$ , можна одержати, розглядаючи для простоти відоме у фізиці одновимірне хвильове рівняння [9, 10] для деякої скалярної функції  $u(z, t)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Загальний розв'язок цього диференційного рівняння має вигляд

$$u(z, t) = C^+ f(z - vt) + C^- f(z + vt), \quad (3.2)$$

де  $C^\pm$  – постійні інтегрування, що залежать від характеру зміни хвильових полів.

Функції типу  $f(z \pm vt)$  математично описують процеси, які називають хвилями. Функція  $f(z - a)$  повторює вигляд функції  $f(z)$ , але зсунута вправо на величину  $a$ . На

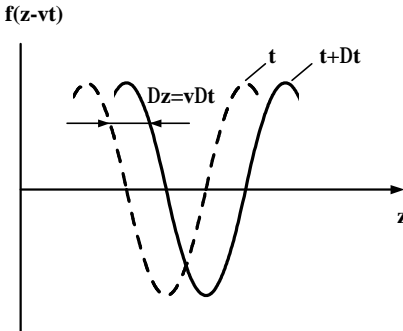


Рисунок 3.1 – До демонстрації поведінки хвильової функції

рис. 3.1 зображено дві "фотографії" деякої функції  $f(z - vt)$ , зроблені через проміжок часу  $\Delta t$ . Вони відрізняються лише тим, що всі точки другої кривої зсунуті у бік більших значень  $z$  на величину  $\Delta z = v\Delta t$ . Тому із часом функція зміщується вправо зі швидкістю  $v = \Delta z / \Delta t$ . Що стосується гармонійних хвильових процесів, коли

може бути введено поняття фази, ця швидкість називається **фазовою**  $v_\phi$ . Легко уявити, що функція  $f(z + vt)$  описує хвильовий процес, що поширюється зі швидкістю  $v_\phi$  у зворотному напрямку від осі  $z$ . Отже, доданки у виразі (3.2) показують пряму і зворотну хвилі. Якщо розглядати поширення хвиль стосовно джерела їх збудження, то необхідно використовувати терміни "падаюча" і "відбита" хвилі.

Вираз (3.2) описує так звані незатухаючі хвилі. Якщо хвиля загасає або наростає у просторі, замість сталих інтегрування  $C^\pm$  використовують відповідні координатні функції, які характеризують закон її зміни.

В електронній техніці, як правило, мають справу з гармонійними хвильовими процесами, які описуються гармо-

нійними функціями аргументу  $w(t \pm z/v_\phi) = wt \pm kz$ . Тут  $w = 2\pi f$  – **колова частота** часових коливань;  $k = w/v_\phi$  – фазова стала поширення або **хвильове число**;  $v_\phi$  – фазова швидкість (швидкість поширення фронту хвилі). Ці параметри хвилі пов'язані із часовим періодом  $T$  і просторовим періодом  $l$  (довжина хвилі) однотипними співвідношеннями:  $w = 2\pi/T$ ,  $k = 2\pi/l$ ,  $v_\phi = 2\pi/k$ .

Перейдемо до розгляду основних видів хвильових рівнянь. Визначити структуру та інші характеристики поля, безпосередньо використовуючи рівняння Максвелла, важко, оскільки у кожному із них присутні два невідомі параметри:  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  відповідно. Тому для описання поля у однорідному лінійному середовищі за відсутності струмів ( $\vec{d} = 0$ ) і вільних зарядів ( $r = 0$ ) використовуються однорідні хвильові рівняння Гельмгольца із однією змінною, а за наявності струмів ( $\vec{d} \neq 0$ ) і вільних зарядів ( $r \neq 0$ ) використовуються неоднорідні хвильові рівняння Даламбера.

**Рівняння Гельмгольца** можна отримати із першого і другого рівнянь Максвелла в диференційній формі запису (1.9), (1.10):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = e_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\vec{d} = 0); \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -m_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Подіємо оператором ротора на ліву і праву частини рівнянь:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = e_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{rot} \vec{E} \right); \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -m_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{rot} \vec{H} \right).$$

Підставимо значення  $\operatorname{rot} \vec{E}$  і  $\operatorname{rot} \vec{H}$  із вищенаведених рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{rotrot} \vec{H} = -e_a \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left( m_a \vec{H} \right); \operatorname{rotrot} \vec{E} = -m_a \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left( e_a \vec{E} \right).$$

Застосувавши тотожність  $\operatorname{rotrot} \vec{K} = \operatorname{graddiv} \vec{K} - \nabla^2 \vec{K}$ , можна записати

$$\operatorname{graddiv} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -e_a m_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

$$\operatorname{graddiv} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -e_a m_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Із урахуванням того що  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$  ( $\vec{d} = 0$ ) і  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  ( $r = 0$ ), а  $e_a m_a$  має розмірність, обернену квадрату швидкості поширення хвилі, рівняння Гельмгольца набудуть такого вигляду:

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.3)$$

На відміну від рівнянь Максвелла кожне із отриманих диференціальних рівнянь другого порядку залежить тільки від однієї змінної  $\vec{H}$  або  $\vec{E}$  і у проєкціях на осі прямокутної системи координат запишуться у вигляді трьох рівнянь такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial t^2} = 0.$$

Аналогічним способом запишуться і рівняння для вектора  $\vec{E}$ :

$$\frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial t^2} = 0.$$

Скориставшись першим і другим рівняннями Максвелла в комплексній формі запису (1.14), можна одержати рівняння Гельмгольца для гармонійних коливань:

$$\nabla^2 \vec{E} - p^2 \vec{E} = 0; \nabla^2 \vec{H} - p^2 \vec{H} = 0, \quad (3.4)$$

де  $p = jw\sqrt{\epsilon_{ka}m_a}$  – коефіцієнт поширення хвилі.

**Неоднорідне хвильове рівняння Даламбера для векторного потенціалу  $\vec{A}$ .**

Скористаємося першим рівнянням Максвелла в диференційній формі (1.9) і помножимо його на  $m_a$ :

$$m_a \operatorname{rot} \vec{H} = m_a \vec{d} + m_a e_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Внесемо  $m_a$  під оператор  $\operatorname{rot}$ , тоді з урахуванням того, що  $m_a \vec{H} = \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ , отримаємо

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = m_a \vec{d} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Застосувавши тотожність  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{K} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{K} - \nabla^2 \vec{K}$ , можна записати

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = m_a \vec{d} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Щоб перейти від вектора  $\vec{E}$  до вектора  $\vec{A}$ , скористаємося другим рівнянням Максвелла (1.10) і виразом магнітної індукції через векторний потенціал (1.5).

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Якщо рівні ротори від двох функцій, то рівні і їх функції із точністю до градієнта від деякої скалярної функції (тому що  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} j \equiv 0$ ), тобто



$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} j . \quad (3.6)$$

(Це нескладно перевірити: якщо на (3.6) подіяти оператором ротора, то вийде друге рівняння Максвелла, а для стаціонарного поля зв'язок  $\vec{E} = -\text{grad} j$  ).

Підставивши (3.6) в (3.5), маємо:

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = m_a \vec{d} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} j \right) \quad \text{або}$$

$$\text{grad} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial j}{\partial t} \right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = m_a \vec{d} . \quad (3.7)$$

Для переходу від (3.7) до стаціонарного рівняння Пуассона  $\nabla^2 \vec{A} = -m_a \vec{d}$  ( $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ ) необхідне виконання рівності

$$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial j}{\partial t} . \quad (3.8)$$

Останній вираз називається *калібруванням Лоренца*.

Остаточно отримуємо **рівняння Даламбера для векторного потенціалу**:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -m_a \vec{d} . \quad (3.9)$$

Рівняння Даламбера для векторного потенціалу можна записати через чотиривимірний Лапласіан

$$(\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) :$$

$$\square^2 \vec{A} = -m_a \vec{d} . \quad (3.10)$$

**Неоднорідне хвильове рівняння Даламбера для скалярного потенціалу  $j$ .**

Скористаємося третім рівнянням Максвелла в диференціальній формі (1.11) і підставимо в нього значення  $\vec{E}$  із (3.6):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\mathbf{r}}{e_a}; \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} j \right) = -\frac{\mathbf{r}}{e_a}$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{div} \vec{A} \right) + \operatorname{grad} \operatorname{div} j = -\frac{\mathbf{r}}{e_a}.$$

Із урахуванням калібрування Лоренца (3.8) отримаємо рівняння Даламбера для скалярного потенціалу, яке також можна записати через чотиривимірний Лапласіан:

$$\square^2 j = -\frac{\mathbf{r}}{e_a}. \quad (3.11)$$

Для більшої наочності згрупуємо отримані хвильові рівняння у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Хвильові рівняння

Вид рівняння	Електричні складові поля	Магнітні складові поля
Гельмгольца	$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ $\square^2 \vec{E} = 0$	$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$ $\square^2 \vec{H} = 0$
Даламбера	$\nabla^2 j - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{r}}{e_a}$ $\square^2 j = -\frac{\mathbf{r}}{e_a}$	$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -m_a \vec{d}$ $\square^2 \vec{A} = -m_a \vec{d}$

Слід також зазначити, що рівняння Гельмгольца в основному використовуються при вивченні гармонійних хвильових процесів у різних середовищах і напрямних системах, а рівняння Даламбера разом із рівняннями Максвелла дозволяють проаналізувати процеси випромінювання електромагнітних хвиль антенними пристроями.

### 3.2 Параметри плоскої хвилі в однорідному середовищі

За найпростішу модель електромагнітного хвильового процесу розглянемо плоску електромагнітну хвилю, що поширюється в однорідному середовищі. Хоча така модель і є ідеалізованою, але вона дозволяє у спрощеному вигляді вивчати загальні властивості і параметри електромагнітної хвилі.

Для опису поширення електромагнітних хвиль використовується поняття **фазового фронту** – *поверхні, що проходить через точки з однаковими фазами*.

**Однорідною** називається хвиля, яка має постійну амплітуду у всіх точках фазового фронту.

Хвиля називається **плоскою**, якщо її фазовий фронт являє собою площину, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі.

За формою фазового фронту, крім *плоскої* хвилі, розрізняють *циліндричну* й *сферичну* хвилі. Хвилю із циліндричним фронтом випромінює, наприклад, довгий провідник зі струмом, сферичну – куля. Але далеко від джерела електромагнітних коливань і для обмеженої області простору із достатнім ступенем точності можна вважати фронт хвилі плоским (рис. 3.2).

Тому *плоскою однорідною електромагнітною хвилею* називається електромагнітне поле, векторні величини якого  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у кожний момент часу у всіх точках площини  $(xOy)$ , перпендикулярної до напрямку поширення хвилі (вісь  $z$ ), мають постійні значення ( $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$ ), тобто  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємно перпендикулярні і залежать тільки від координати  $z$  та не залежать від  $x$  і  $y$ . Як правило, вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  змінюються вздовж осі  $z$  за гармонійним законом (законом синуса чи косинуса).

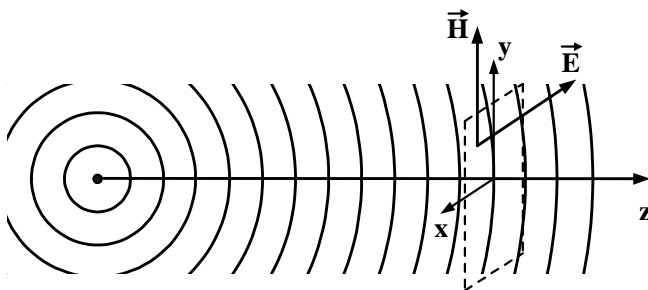


Рисунок 3.2 – Схематичне зображення фронту хвилі, яка радіально розходить від джерела

Визначимо закон поширення плоскої електромагнітної хвилі, тобто знайдемо хвильову функцію плоскої хвилі. Для цього розв'яжемо хвильові рівняння Гельмгольца в комплексній формі (3.4), які для плоскої хвилі запишуться у такий спосіб:

$$\frac{d^2 \dot{E}}{dz^2} - p^2 \dot{E} = 0; \quad \frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} - p^2 \dot{H} = 0, \quad (3.12)$$

де  $p$  – коефіцієнт поширення;

$$p = j\omega\sqrt{\epsilon_{ka} m_a} = a + jb; \quad (3.13)$$

$a$  – коефіцієнт загасання;  $b$  – коефіцієнт фази.

Розв'язок рівняння Гельмгольца будемо шукати у вигляді

$$\dot{E} = E_m e^{kz}. \quad (3.14)$$

У результаті підстановки (3.14) в (3.12) отримуємо характеристичне рівняння

$$k^2 - p^2 = 0,$$

звідки  $k = \pm p$ . Тоді

$$\dot{E} = E_m^+ e^{-pz} + E_m^- e^{pz} = E_m^+ e^{-az} e^{-jbz} + E_m^- e^{az} e^{jbz}. \quad (3.15)$$

Для відновлення дійсних значень необхідно вираз для комплексних амплітуд (3.15) помножити на  $e^{j\omega t}$  і взяти дійсну частину, використовуючи тригонометричну формулу Ейлера

$$\operatorname{Re}\left(e^{j(\omega t - bz)}\right) = \cos(\omega t - bz).$$

У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} E &= E_m^+ e^{-az} \cos(\omega t - bz + j^+) + \\ &+ E_m^- e^{az} \cos(\omega t + bz + j^-). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тут  $j^+$  і  $j^-$  – фази хвилі, що залежать від вибору початку відліку.

Аналогічні вирази можна отримати із другого рівняння (3.12) для  $H$ -компоненти поля.

Якщо вважати, що на шляху поширення хвилі немає перешкод, то амплітуди відбитої хвилі  $E_m^-$ ,  $H_m^-$  повинні дорівнювати нулю і розв'язки для плоскої електромагнітної хвилі набудуть вигляду:

$$E = E_m^+ e^{-az} \cos(\omega t - b z + j^+), \quad (3.17)$$

$$H = H_m^+ e^{-az} \cos(\omega t - b z - j^+).$$

Слід зазначити, що для незатухаючої хвилі (відсутні втрати у середовищі) графіки розв'язків (3.17) будуть за характером ідентичні рис. 3.1. Якщо середовище із втратами ( $a \neq 0$ ), то амплітуди гармонійних функцій будуть загасати за експоненціальним законом  $e^{-az}$ .

**Основними параметрами**, які характеризують поширення електромагнітної хвилі, є:

- коефіцієнт поширення  $p$  ;
- коефіцієнт фази  $b$  ;
- коефіцієнт загасання  $a$  ;
- фазова швидкість  $v_\phi$  ;
- довжина хвилі  $l$  ;
- хвильовий опір  $Z_{xв}$  ;
- глибина проникнення хвилі  $\Delta$  .

**Коефіцієнт поширення**  $p$  є комплексною величиною, яка характеризує зміну амплітуди і фази біжучої електромагнітної хвилі і для плоских однорідних хвиль при заданій частоті  $\omega$  визначається тільки параметрами середовища ( $\epsilon_a$ ,  $m_a$  і  $g$ ). Коефіцієнт поширення  $p$  (3.13) у загальному вигляді може бути записаний як через коефіцієнти загасання і фази ( $a$ ,  $b$ ), так і через тангенс кута втрат ( $tg d$ ) із урахуванням того, що  $e_{ka} = e_a (1 - jtg d)$ :

$$\begin{aligned}
 p &= a + jb = jw\sqrt{m_a e_a (1 - jtgd)} = \\
 &= j\frac{W}{c}\sqrt{me}\sqrt{(1 - jtgd)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

**Коефіцієнт фази  $b$**  показує зміну фази хвилі при проходженні  $l$  м відстані і дорівнює уявній частині коефіцієнта поширення  $p$ .

**Коефіцієнт загасання  $a$**  визначає зменшення амплітуди хвилі при проходженні  $l$  м відстані і дорівнює дійсній частині коефіцієнта поширення  $p$ .

Знайдемо  $a$  і  $b$  із загального виразу для коефіцієнта поширення (3.18), проробивши ряд нескладних тригонометричних операцій:

$$\left| \dot{p} \right|^2 = \left| \sqrt{a^2 + b^2} \right|^2 = a^2 + b^2 = \frac{W^2}{c^2} em \left( \sqrt{1 + tg^2 d} \right), \tag{3.19}$$

$$p^2 = -\frac{W^2}{c^2} me (1 - jtgd),$$

$$\operatorname{Re} \left( \dot{p}^2 \right) = a^2 + (jb)^2 = a^2 - b^2 = -\frac{W^2}{c^2} em. \tag{3.20}$$

Віднімемо і додамо вирази (3.19) і (3.20):

$$\begin{aligned}
 (a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) &= 2b^2 = \frac{W^2}{c^2} em \left( \sqrt{1 + tg^2 d} \right) + \frac{W^2}{c^2} em = \\
 &= \frac{W^2}{c^2} em \left( \left( \sqrt{1 + tg^2 d} \right) + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Звідси

$$b = \frac{W}{c} \sqrt{em} \sqrt{\frac{\left( \sqrt{1 + tg^2 d} \right) + 1}{2}}. \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) &= 2a^2 = \frac{w^2}{c^2} em \left( \sqrt{1 + tg^2 d} \right) - \frac{w^2}{c^2} em = \\ &= \frac{w^2}{c^2} em \left( \left( \sqrt{1 + tg^2 d} \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$a = \frac{w}{c} \sqrt{em} \sqrt{\frac{\left( \sqrt{1 + tg^2 d} \right) - 1}{2}}. \quad (3.22)$$

**Фазова швидкість**  $v_\phi$  – це швидкість руху фронту хвилі постійної фази. Фазова швидкість визначається за формулою

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{w}{b}. \quad (3.23)$$

**Довжина хвилі**  $l$  – відстань, пройдена хвилею вздовж її руху за період коливання  $T$  (тобто відстань, на якій фаза хвилі зміниться на  $2p$ ):

$$l = \frac{v_\phi}{T} = \frac{2p}{b}. \quad (3.24)$$

**Хвильовий опір**  $Z_{x\phi}$  – це відношення комплексної амплітуди напруженості електричного поля хвилі до комплексної амплітуди напруженості магнітного поля хвилі:

$$\dot{Z}_{x\phi} = \frac{\dot{E}}{H} = \sqrt{\frac{m_a}{e_{ka}}} = \frac{p}{g}. \quad (3.25)$$

Використовуючи визначення хвильового опору середовища, співвідношення (3.17) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} E &= E_m e^{-az} \cos(\omega t - b z), \\ H &= \frac{E_m}{\dot{Z}_{x\phi}} e^{-az} \cos(\omega t - b z - j), \end{aligned}$$



де  $\left| \dot{Z}_{x\phi} \right|$  та  $j$  – модуль і фаза комплексного значення хвильового опору середовища відповідно.

**Глибина проникнення хвилі**  $\Delta$  – відстань уздовж напрямку поширення хвилі, при проходженні якої амплітуда падаючої хвилі ( $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ ) слабшає у  $e = 2,72$  разу, тобто

$$\frac{E e^{-az}}{E e^{-a(z+\Delta)}} = e = 2,72.$$

Візьмемо логарифм від цього виразу і отримаємо  $a(z + \Delta - z) = 1$ . Звідси

$$\Delta = 1/a. \quad (3.26)$$

Основні параметри хвилі (3.18), (3.21)-(3.26) у значній мірі визначаються типом середовища, у якому відбуваються електромагнітні процеси. На практиці умовно прийнято підрозділяти середовища на наступні різновиди залежно від параметрів  $e$ ,  $m$ ,  $g$  і  $tg d$ : **вакуум**, **ідеальний діелектрик**, **діелектрик з малими втратами** (тефлон, фторопласт, полікор та ін. – використовуються у техніці НВЧ), **провідне середовище** (ідеальний провідник – теоретичний термін).

Розглянемо коротко параметри хвилі в перерахованих середовищах, які дозволяють також визначити їхні властивості для практичних застосувань.

**Вакуум** –  $e=1$ ;  $m=1$ ;  $tg d=0$ . При даних параметрах середовища з (3.21) - (3.26) впливає:

$$a=0; v_{\phi}=c; I=I_0=\frac{c}{f}; Z_0=\sqrt{\frac{m_0}{e_0}}=377 \text{ [Ом]}.$$

Із цих співвідношень випливають наступні властивості плоских однорідних хвиль у вакуумі:

- відсутність загасання;
- незалежність швидкості поширення від частоти;
- рівність швидкості поширення хвиль у вакуумі і швидкості світла;
- хвильовий опір  $\epsilon$  константою.

**Ідеальний діелектрик** –  $e > 1$ ;  $m = 1$ ;  $tg d = 0$ . Основні параметри:  $a = 0$ ;  $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{e}}$ ;  $l = \frac{l_0}{\sqrt{e}}$ ;  $Z_{xe} = \frac{Z_0}{\sqrt{e}} = \frac{377}{\sqrt{e}}$  [Ом].

Параметри хвилі аналогічні вакууму зі зменшенням у  $\sqrt{e}$  разів.

**Діелектрики з малими втратами** –  $e > 1$ ;  $m = 1$ ;  $tg d \ll 1$ .

Основні параметри хвилі:  $a \neq 0$ ;  $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{e}}$ ;  $l = \frac{l_0}{\sqrt{e}}$ ;  
 $Z_{xe} = \frac{Z_0}{\sqrt{e}} = \frac{377}{\sqrt{e}}$  [Ом].

Оскільки  $tg d \ll 1$ , то у (3.22) проведемо заміну  $\sqrt{1 + tg^2 d} \approx 1 + \frac{tg^2 d}{2}$  та зазначимо, що  $tg d = \frac{g}{we_a}$ .

У результаті отримаємо

$$a = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{m_a}{e_a}} = \frac{g Z_{xe}}{2}. \quad (3.27)$$

Таким чином, коефіцієнт загасання в діелектрику із малими втратами залежить від питомої провідності діелектрика.

**Діелектрики з малими втратами**, які широко використовуються у техніці НВЧ (поліетилен, фторопласт, кераміка та ін.), мають значення  $tg d < 10^{-2}$ . Для розрахунків основних характеристик поля в цих середовищах застосовуються ті ж самі співвідношення, що і для ідеального діе-

лектрика. Однак за рахунок скінченності  $tg d$  у цьому випадку необхідно враховувати втрати.

**Провідне середовище** –  $e_a \ll g$ ;  $tg d \gg 1$ ;  $m \neq 1$ .

Із співвідношення (3.22) з урахуванням  $tg d = \frac{g}{we_a} \gg 1$

випливає, що  $a \approx \frac{w}{c} \sqrt{em} \sqrt{\frac{tg d - 1}{2}} \approx \sqrt{\frac{w^2 e_a m_a g}{2 w e_a}} = \sqrt{\frac{w m_a g}{2}}$ .

Аналогічно

$$b \approx \frac{w}{c} \sqrt{em} \sqrt{\frac{tg d + 1}{2}} \approx \frac{w}{c} \sqrt{\frac{em tg d}{2}} = \sqrt{\frac{w m_a g}{2}}.$$

Таким чином, для провідного середовища

$$p = a + jb = (1 + j) \sqrt{\frac{w m_a g}{2}},$$

$$a = b = k = \sqrt{\frac{w m_a g}{2}}, \quad (3.28)$$

$$v_\phi = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{2w}{m_a g}}; \quad I = \frac{2p}{k} = \sqrt{\frac{8p^2}{w m_a g}}.$$

Хвильовий опір

$$\dot{Z}_{xe} = \frac{p}{g} = (1 + j) \sqrt{\frac{w m_a}{2g}} = \sqrt{\frac{w m_a}{g}} e^{j45^\circ}. \quad (3.29)$$

Глибина проникнення поля (3.26)

$$\Delta = \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{p f m_a g}} = \sqrt{\frac{2}{w m_a g}}. \quad (3.30)$$

Аналізуючи співвідношення (3.28) – (3.30), можна зробити такі висновки щодо основних властивостей електромагнітного поля у провідному середовищі:

– коефіцієнт фази  $b$  і коефіцієнт загасання  $a$  рівні між собою;

– реактивна і активна складові хвильового опору рівні між собою;

– вектор  $\vec{H}$  відстає за фазою від вектора  $\vec{E}$  на кут  $45^\circ$ ;

– амплітуда хвиль вздовж напрямку поширення швидко зменшується.

### 3.3 Поляризація, відбиття і переломлення електромагнітних хвиль

*Поляризацією плоскої хвилі називається зміна значення і напрямку вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  в точці спостереження за період коливання хвилі.*

Розрізняють три види поляризації хвиль:

– лінійну;

– колову;

– еліптичну.

Оскільки будь-яка електромагнітна хвиля може бути подана як накладення (суперпозиція) хвиль, які поширюються самостійно одна від одної, то залежно від зсуву фаз  $j$  між ними сумарний вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  в площині, яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі, буде описувати пряму при  $j = 0^\circ$  (лінійна поляризація), коло при  $j = 90^\circ$  (колова поляризація) або еліпс при  $0^\circ < j < 90^\circ$  (еліптична поляризація).

Для лінійно поляризованої хвилі вектор  $\vec{E}$  у площині, перпендикулярній до поширення хвилі (площина  $xOy$ ), описує пряму лінію (рис. 3.3 а, б). Площина, у якій відбувається зміна амплітуди хвилі, називається **площиною поляризації**. Кут, під яким нахилена площина поляризації до горизонтальної осі  $x$ , називається **кутом поляризації**  $u$ .

Для хвилі із *коловою поляризацією* вектор  $\vec{E}$  із часом описує гвинтову поверхню з однаковою амплітудою ( $E_{mx} = E_{my}$ ). У площині, перпендикулярній до поширення хвилі (площина  $xOy$ ), вектор  $\vec{E}$  описує коло (див. рис. 3.3 в).

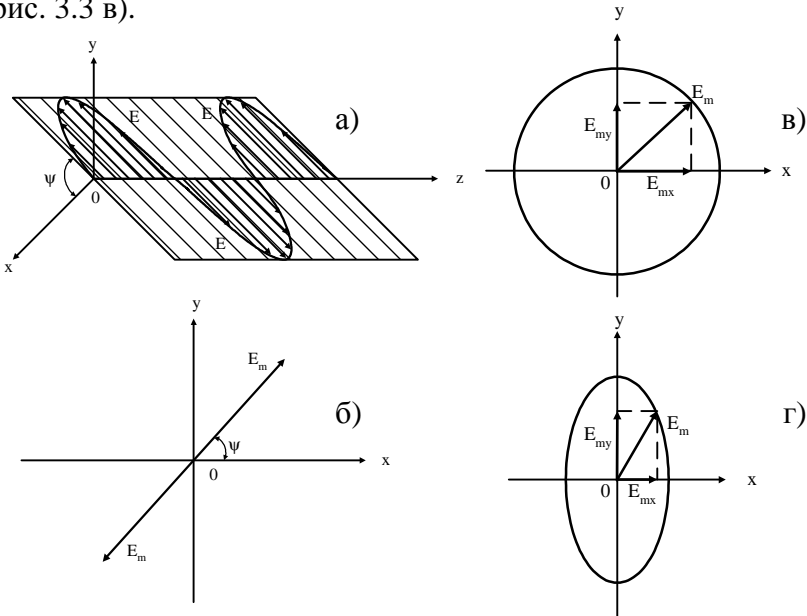


Рисунок 3.3 – Види поляризації хвиль:  
 а, б – лінійна; в – колова; г – еліптична

Для хвилі із *еліптичною поляризацією* вектор  $\vec{E}$  із часом описує еліптичну гвинтову поверхню з різною амплітудою вздовж осей  $x$  і  $y$  ( $E_{mx} \neq E_{my}$ ). У площині, перпендикулярній до поширення хвилі (площина  $xOy$ ), вектор  $\vec{E}$  описує еліпс (див. рис. 3.3 г).

Якщо вектор  $\vec{E}$  у площині, перпендикулярній до поширення хвилі, обертається за годинниковою стрілкою, то

така поляризація називається *лівою*, якщо проти годинникової стрілки – *правою*.

Приклад практичного визначення виду поляризації плоскої хвилі описано в лабораторній роботі 3 у додатку Б.

*Хвилі на поверхні поділу двох середовищ* залежно від їх параметрів можуть або повністю відбиватися, або, частково відбиваючись, заломлюватися і проходити у друге середовище. У першому наближенні (без урахування явища дифракції) поведінку хвиль на поверхні поділу двох середовищ можна описати виходячи із законів променевої оптики [15] з урахуванням їх поляризації.

Так, наприклад, якщо електромагнітна хвиля падає на поверхню поділу двох діелектриків під кутом  $j$ , то частина її відіб'ється, а частина – заломиться і буде поширюватися в другому середовищі під кутом  $q$ . Згідно із **законами Снеліуса** [16]: *кут падіння електромагнітної хвилі дорівнює куту відбиття, а відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення – величина постійна, що дорівнює відношенню показника заломлення  $n_2$  другого середовища до показника заломлення  $n_1$  першого середовища:*

$$N = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} = \frac{\sin j}{\sin q}. \quad (3.31)$$

Інтенсивність відбитої хвилі  $\dot{E}_e$  з інтенсивністю падаючої хвилі  $\dot{E}_{nad}$  зв'язана через **коефіцієнт відбиття**  $\dot{k}_e$ :

$$\dot{k}_e = \frac{\dot{E}_e}{\dot{E}_{nad}}. \quad (3.32)$$

Інтенсивність заломленої хвилі  $\dot{E}_n$  з інтенсивністю падаючої хвилі  $\dot{E}_{nad}$  зв'язана через **коефіцієнт заломлення**  $\dot{k}_n$ :

$$\dot{k}_n = \frac{\dot{E}_n}{E_{nao}}. \quad (3.33)$$

У випадку якщо вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний до площини падіння і паралельний границі поділу (тобто площина поляризації хвилі перпендикулярна до площини падіння), то така хвиля називається **перпендикулярно поляризованою** (рис. 3.4).

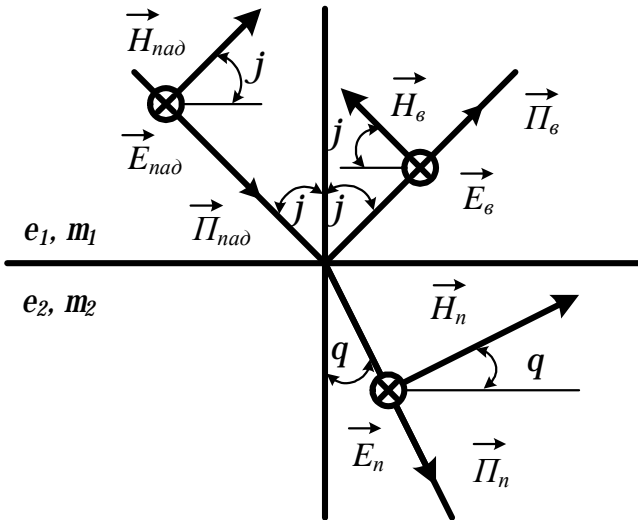


Рисунок 3.4 – Орієнтація векторів поля для перпендикулярно поляризованої хвилі

У випадку якщо вектор  $\vec{E}$  лежить у площині падіння, а вектор  $\vec{H}$  перпендикулярний до неї та паралельний границі поділу (тобто площина поляризації хвилі паралельна площині падіння), то така хвиля називається **паралельно поляризованою** (рис. 3.5).

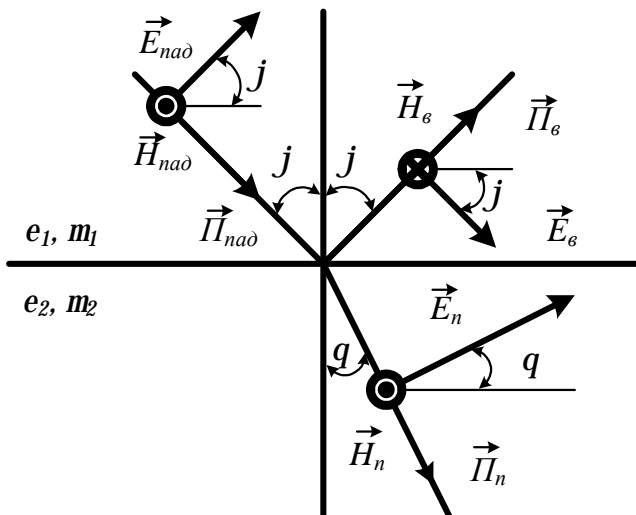


Рисунок 3.5 – Орієнтація векторів поля для паралельно поляризованої хвилі

Розглянемо випадок перпендикулярно поляризованої хвилі.

Для плоскої хвилі вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  перпендикулярні та зв'язані через хвильовий опір  $Z_{x\epsilon}$  у такий спосіб:

$$\vec{E} = Z_{x\epsilon} \vec{H}. \quad (3.34)$$

Згідно із граничними умовами  $E_{1t} = E_{2t}$ ,  $H_{1t} = H_{2t}$  (за відсутності поверхневих струмів) та рис. 3.4 можна записати:

$$E_n = E_{nad} + E_\epsilon \quad \text{або} \quad \frac{E_n}{E_{nad}} = 1 + \frac{E_\epsilon}{E_{nad}}.$$

Звідки

$$k_n^\perp = 1 + k_\epsilon^\perp. \quad (3.35)$$

З іншого боку:

$$H_{nad} \cos j - H_\epsilon \cos j = H_n \cos q.$$



Із урахуванням (3.34):

$$\frac{E_{na0}}{Z_{x\epsilon 1}} \cos j - \frac{E_{\epsilon}}{Z_{x\epsilon 1}} \cos j = \frac{E_n}{Z_{x\epsilon 2}} \cos q .$$

Поділимо обидві частини цього виразу на  $E_{na0}$ :

$$\frac{1}{Z_{x\epsilon 1}} \cos j - \frac{E_{\epsilon}}{E_{na0} Z_{x\epsilon 1}} \cos j = \frac{E_n}{E_{na0} Z_{x\epsilon 2}} \cos q .$$

Із урахуванням (3.32), (3.33) отримаємо:

$$\frac{1}{Z_{x\epsilon 1}} \cos j - \frac{\overset{\bullet}{k}_{\epsilon}^{\perp}}{Z_{x\epsilon 1}} \cos j = \frac{\overset{\bullet}{k}_n^{\perp}}{Z_{x\epsilon 2}} \cos q .$$

Помноживши обидві частини рівності на  $(Z_{x\epsilon 1} Z_{x\epsilon 2})$  і використовуючи вираз (3.35), отримаємо

$$2Z_{x\epsilon 2} \cos j = \overset{\bullet}{k}_n^{\perp} (Z_{x\epsilon 2} \cos j + Z_{x\epsilon 1} \cos q) .$$

Звідки коефіцієнт заломлення для перпендикулярно поляризованої хвилі набуде вигляду

$$\overset{\bullet}{k}_n^{\perp} = \frac{2Z_{x\epsilon 2} \cos j}{Z_{x\epsilon 2} \cos j + Z_{x\epsilon 1} \cos q} . \quad (3.36)$$

Оскільки  $\overset{\bullet}{k}_{\epsilon}^{\perp} = \overset{\bullet}{k}_n^{\perp} - 1$ , то коефіцієнт відбиття для перпендикулярно поляризованої хвилі

$$\overset{\bullet}{k}_{\epsilon}^{\perp} = \frac{Z_{x\epsilon 2} \cos j - Z_{x\epsilon 1} \cos q}{Z_{x\epsilon 2} \cos j + Z_{x\epsilon 1} \cos q} . \quad (3.37)$$

Аналогічно можна знайти коефіцієнти заломлення і відбиття для паралельно поляризованої хвилі з урахуванням того, що  $H_n = H_{na0} - H_{\epsilon}$ .

Проробивши вищеописану послідовність операцій, будемо мати такі співвідношення для коефіцієнтів заломлення і відбиття паралельно поляризованої хвилі:

$$\overset{\bullet}{k}_n^{\parallel} = \frac{2Z_{x\epsilon 2} \cos j}{Z_{x\epsilon 1} \cos j + Z_{x\epsilon 2} \cos q} , \quad (3.38)$$

$$k_e^{\bullet P} = \frac{Z_{x\theta 2} \cos q - Z_{x\theta 1} \cos j}{Z_{x\theta 1} \cos j + Z_{x\theta 2} \cos q}. \quad (3.39)$$

### 3.4 Спрямовані електромагнітні хвилі

Часто у пристроях і системах зв'язку потрібно спрямовувати електромагнітну хвилю по заданому шляху з мінімальними втратами. Для цього використовуються **спрямовуючі системи**, які також називаються *лініями передачі* або *хвилеводами*. *Електромагнітна хвиля, яка поширюється уздовж спрямовуючих систем, називається такою, що спрямовується.*

Оскільки спрямовуючих систем, які добре функціонують у всьому діапазоні частотного спектра (рис. 1В), не існує, то для кожного діапазону частот застосовуються свої спрямовуючі системи, детальне описання і їх класифікація викладені у розділі 4.

У найпростішому випадку хвилевід може бути виконаний у вигляді порожньої металевої трубки прямокутного або круглого перерізу, електродинамічні параметри якої визначають шляхом розв'язання рівнянь Максвелла і хвильових рівнянь.

Розглянемо *якісну картину* явищ, що виникають при поширенні хвиль у прямокутному хвилеводі. Якщо хвиля гармонійна, то її амплітуда змінюється за законом синуса (косинуса). Максимальну енергію така хвиля має в крайній верхній та крайній нижній точках гармонійної функції. У точках перетинання напруженості з віссю  $x$  енергія хвилі

дорівнює нулю (оскільки  $W_e = \frac{e_a E^2}{2}$ ). Тому якщо постави-

ти металеву пластину у точці, в якій амплітуда дорівнює нулю (рис. 3.5, суцільна лінія), то хвиля відіб'ється від пластини практично без втрат. Якщо металеву пластину поставити в місці, у якому амплітуда хвилі не дорівнює нулю

(пунктирна лінія), то на цій пластині виділиться енергія  $W_e = \frac{e_a E^2}{2}$  і хвиля швидко згасне. Таким чином, між двома

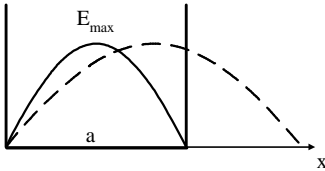


Рисунок 3.5 – Розподіл поля електромагнітної хвилі у поперечному перерізі хвилеводу

металевими пластинами (між стінками хвилеводу) не будуть загасати тільки ті хвилі, амплітуда яких у місцях розміщення пластин буде дорівнювати нулю. Інакше кажучи, у хвилеводі зі стороною  $a$  будуть існувати тільки ті хвилі, для яких між стінками хвилеводу укладається ціле число півхвиль  $l/2$ , тобто будуть існувати хвилі, для яких виконується умова

$$a = q \frac{l}{2},$$

де  $q$  – ціле число ( $q = 1, 2, 3, \dots$ ).

Хвиля із довжиною півхвилі, що дорівнює ширині хвилеводу (тобто при  $q=1$   $a = \frac{l}{2}$ ), створює стоячу хвилю, а сама не буде рухатися вздовж осі хвилеводу. Довжина такої хвилі називається **критичною** –  $l_{кр}$ . Хвилі з  $l > l_{кр}$  не будуть поширюватися у хвилеводі, оскільки їх поле на бічних стінках не буде дорівнювати нулю.

Розглянемо основні параметри хвиль у спрямовуючих системах.

**Критичною довжиною хвилі**  $l_{кр}$  називається граничне значення довжини хвилі, збуджуваної вібратором у повітрі, при якому поширення хвилі у хвилеводі неможливо.

Нехай хвиля поширюється **в прямокутному хвилеводі**. Поширення електромагнітної хвилі вздовж хвилеводу можна подати як накладення плоских хвиль, кожна з яких

відбивається від стінок хвилеводу під кутом  $j$  зі зміною фази (рис. 3.6). Як видно із рис. 3.6, сумарна хвиля поширюється вздовж осі хвилеводу з мінімальними значеннями у точках  $B$  і  $G$ , а максимальними – у точках  $D$  і  $L$ .

**Довжиною хвилі у хвилеводі**  $\Lambda$  називають відстань між двома максимумами або мінімумами електромагнітної хвилі вздовж напрямку її поширення. Довжина хвилі у хвилеводі  $\Lambda > l$ , що впливає із рис. 3.6.

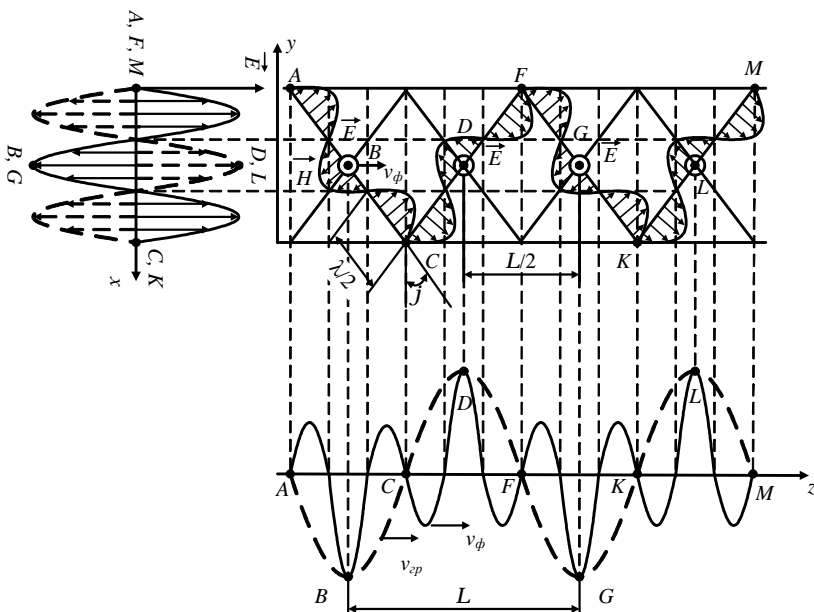


Рисунок 3.6 – Поширення хвилі у хвилеводі

**Фазовою швидкістю**  $v_\phi$  називається швидкість руху поверхонь рівних фаз плоских багаторазово відбитих від стінок хвилеводу хвиль. Із рис. 3.7 видно, що фазова швидкість  $v_\phi = \frac{c}{\sin j}$ . Але оскільки  $\sin j < 1$ , то фазова швидкість більше швидкості світла, що суперечить постулату

Бора. Тому вона не є фізичною величиною. *Фазова швидкість є швидкістю руху інтерференційної картини, утвореної сумою парціальних хвиль у хвилеводі і не пов'язаної з рухом матерії.*

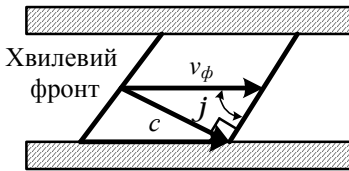


Рисунок 3.7 – Зв'язок фазової швидкості з швидкістю світла у хвилеводі

Подібність фазової швидкості можна спостерігати при морському прибої: гребені хвиль рухаються до берега похило зі швидкістю  $v_1$ , а в точці торкання берега

гребенем хвилі ця швидкість  $v = \frac{v_1}{\sin j}$  більше швидкості хвилі у морі.

При передачі інформації використовуються модульовані сигнали, у яких амплітуда, що огинає високочастотні коливання змінюється пропорційно амплітуді низькочастотних сигналів (рис. 3.8).

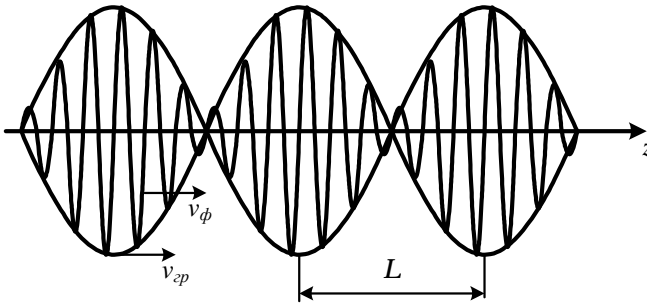


Рисунок 3.8 – Фазова і групова швидкості

Тому *групова швидкість*  $v_{gp}$  характеризує швидкість поширення сигналу вздовж осі хвилеводу. Хоча швидкість поширення електромагнітних хвиль від стінки до стінки

хвилеводу дорівнює швидкості світла, але групова швидкість менше швидкості світла і залежить від частоти.

Розглянемо *кількісні співвідношення*, що визначають введені характеристики спрямованих хвиль. Хвильові рів-

няння (3.4) для векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у проекціях на осі координат еквівалентні шістьом скалярним рівнянням для хвилеводів без втрат і мають такий загальний вигляд:

$$\nabla^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} = 0. \quad (3.40)$$

Тут під  $\vec{F}(x, y, z, t)$  треба розуміти кожен із проекцій вектора електричного або магнітного поля на задану систему координатних осей (декартову, циліндричну або сферичну). Часова залежність  $\vec{F}(t)$  визначена використанням раніше методом комплексних амплітуд:  $\vec{F}(x, y, z, t) = \vec{F}(x, y, z) \times e^{j\omega t}$ . Із проведеного у підрозділі 3.2 аналізу хвильових процесів видно, що поля у хвилеводі також можна подати у загальному вигляді як суперпозицію падаючих і відбитих хвиль, які поширюються вздовж хвилеводу (вісь  $z$ ):

$$\vec{F}(x, y, z, t) = \vec{F}^+(x, y) e^{j(\omega t - Kz)} + \vec{F}^-(x, y) e^{j(\omega t + Kz)}. \quad (3.41)$$

За хвильове число тут необхідно використовувати величину  $K \neq k$ , тобто вважати, що у хвилеводі довжина хвилі  $\Lambda = 2\pi / K$  у загальному випадку не дорівнює довжині хвилі  $l = 2\pi / k$  у вільному просторі.

Функції  $F^\pm(x, y)$  характеризують розподіл полів у поперечній площині хвилеводу і відіграють роль амплітуди падаючої та відбитої хвиль. Причому ці функції подібні і відрізняються тільки постійним множником, оскільки задовольняють одне диференціальне рівняння. Оскільки для

(3.41)  $\partial/\partial z = \pm jK$ , а  $\partial^2/\partial z^2 = -K^2$ , то (3.40) набуде вигляду

$$\nabla_{x,y}^2 \dot{F}^\pm(x, y) + (k^2 - K^2) \dot{F}^\pm(x, y) = 0, \quad (3.42)$$

тут  $\nabla_{x,y}^2$  – оператор, який містить у собі похідні тільки за поперечними координатами.

Оскільки фазова швидкість поширення хвилі у хвилеводі визначається співвідношенням  $v_\phi = \Lambda f$ , то у (3.42) позначимо різницю  $(k^2 - K^2)$  виразом  $(2p/I_{кр})^2$ , який за формою збігається із виразом хвильових чисел через відповідні довжини хвиль. Скоротивши всі члени цієї рівності на  $(2p)^2$ , отримаємо  $1/I^2 - 1/\Lambda^2 = 1/I_{кр}^2$ , звідки

$$\Lambda = \frac{I}{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_{кр}}\right)^2}}, \quad (3.43)$$

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_{кр}}\right)^2}}. \quad (3.44)$$

Щоб з'ясувати фізичний зміст формально введеної величини  $I_{кр}$ , замінимо під коренем відношення довжин хвиль зворотним відношенням відповідних частот ( $f_{кр} = c/I_{кр}$ ):

$$\Lambda = \frac{I}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}},$$

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}. \quad (3.45)$$

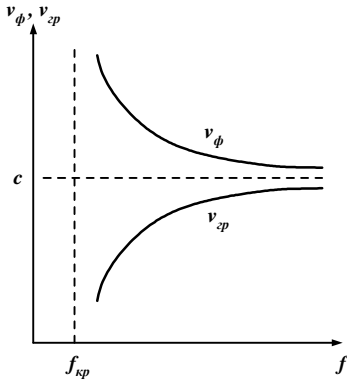


Рисунок 3.9 – Залежність фазової та групової швидкостей від частоти

Друге із цих співвідношень показує, що фазова швидкість залежить від частоти і характеризує закон дисперсії для хвилеводу, зображений у вигляді графіка на рис. 3.9. Дана залежність підтверджує отриманий якісно висновок про те, що  $v_{\phi} > c$ . Не менш важливим є те, що дійсні значення фазової швидкості, а отже, і нормальне поширення електромагнітних хвиль по хвилеводу, можливо лише для області частот  $f > f_{кр}$ . Звідси зрозумілий фізичний зміст позначення  $f_{кр}$ : **критична частота** - це гранична частота, що розділяє діапазон нормального поширення електромагнітних полів у вигляді хвиль і так званий *діапазон відсічення*  $f > f_{кр}$ . Подібний зміст має і введене раніше поняття критичної довжини хвилі  $I_{кр}$  як граничне значення довжини хвилі (відлічене у вільному просторі) між зазначеними діапазонами, але на шкалі довжин хвиль. Умова поширення в термінах довжин хвиль формулюється у вигляді нерівності  $I < I_{кр}$ , однак довжина хвилі у хвилеводі інша, ніж (на тій же самій частоті) у вільному просторі; вона завжди більше ( $\Lambda > I$ ) і при наближенні до критичного режиму прямує до нескінченності.



Енергія вздовж осі хвилеводу передається із груповою швидкістю

$$v_{gp} = c \sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_{кр}} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left( \frac{f_{кр}}{f} \right)^2}, \quad (3.46)$$

поданою графіком на рис. 3.9.

Рисунок 3.10 ілюструє зв'язок між довжиною хвилі у вільному просторі  $I = c / f$ , довжиною хвилі у хвилеводі

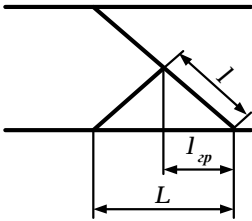


Рисунок 3.10 –  
Ілюстрація зв'язку  
між  $I$ ,  $\Lambda$  і  $I_{gp}$

$\Lambda = v_\phi / f$  та **груповою довжиною хвилі**  $I_{gp} = v_{gp} / f$  – відстанню, на яку переміщується енергія вздовж осі хвилеводу за період коливань  $\Lambda I_{gp} = I^2$  або  $v_\phi v_{gp} = c^2$ .

Розуміння описаних вище явищ було б неповним без з'ясування особливостей поведінки електромагнітних полів у режимі відсічення. Якщо будемо намагатися збуджувати хвилевод на частоті нижче критичної, то відповідно до (3.45) довжина хвилі, фазова швидкість, а отже, і хвильове число у хвилеводі, повинні бути уявними величинами. Тому хвильові множники в (3.41) набирають форми  $e^{\pm Kz} e^{j\omega t}$ , яка показує, що складові поля у всіх точках хвилеводу змінюються синфазно у часі, а амплітуда їх уздовж хвилеводу спадає експоненціально. Таке явище не можна назвати загасанням, тому що воно спостерігається у хвилеводах без втрат, а можна розглядати як крайові поля, які існують на деякій відстані від місця збудження, але які не здатні збудити електромагнітну хвилю, яка біжить по хвилеводу.

Крім розглянутого у даному підрозділі явища, дисперсія у хвилеводі можлива також за рахунок втрат на стінках хвилеводу або у його діелектрику, що заповнює простір

подібно тому, як це мало місце для випадку плоскої хвилі (див. п. 3.2).

Чи можливе поширення у хвилеводах без втрат електромагнітних хвиль, для яких не спостерігається дисперсія? Формули (3.43) – (3.46) справедливі, якщо  $(k^2 - K^2) > 0$ . Саме ця нерівність була вихідною для таких висновків про характер дисперсії у хвилеводах. Якщо можливе існування бездисперсійних хвиль, то необхідною умовою є рівність  $(k^2 - K^2) = 0$  або  $k = K$ . Вона означає, що швидкість поширення таких хвиль дорівнює швидкості світла  $v_\phi = c$  у середовищі, що заповнює хвилевід, а довжина хвилі у хвилеводі дорівнює довжині хвилі у вільному просторі ( $\Lambda = l$ ). Ці ж самі рівності утворюються, якщо в (3.43) – (3.46) формально взяти  $I_{kr} \rightarrow \infty$  або  $f_{kr} = 0$ . Беручи до уваги фізичний зміст  $f_{kr}$ , можна зробити висновок про те, що хвилі без дисперсії не мають режиму відсічення, тобто їхнє поширення у хвилеводі можливо на будь-яких частотах, включаючи найнижчі.

Про характер полів у хвилеводі без дисперсії можна судити з виразу (3.42), якщо в ньому взяти  $k = K$ :

$$\nabla_{x,y}^2 \dot{F}^\pm(x, y) = 0.$$

Даний вираз за формою збігається із двовимірним рівнянням Лапласа, яке задовольняють статичні поля. Але оскільки граничні умови на стінках хвилеводу і для змінних і для статичних полів однакові, можна зробити такі висновки: характер розподілу полів у поперечному перерізі хвилеводу для хвиль без дисперсії такий самий, як і для статичних полів; поширення хвиль без дисперсії можливо лише у хвилеводах, що допускають існування статичних полів. До них належать такі лінії передачі, як коаксіальний хвилевід, смугова лінія і т.п., вони мають, як мінімум, два

провідники, які і допускають підключення джерела постійної напруги.

Поля у *поперечному перерізі хвилеводу* розраховуються шляхом розв'язання рівняння (3.42). Слід зазначити, що функції  $F^\pm(x, y)$ , які характеризують розподіл полів, подібні. Тому для з'ясування їх загальних закономірностей обмежимося розглядом лише падаючої хвилі. Рівняння типу (3.42) у частинних похідних зручно розв'язувати методом поділу змінних (див. п. 5.4). Позначивши  $F^\pm(x, y) = X(x)Y(y)$  і виконавши процедуру поділу, отримаємо замість (3.42) два рівняння:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} - k_y^2 Y = 0. \quad (3.47)$$

Тут через  $k_x$  і  $k_y$  позначені так звані постійні поділу, для яких виконується рівність

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 - K^2$$

і які іноді називають (за аналогією із  $k$  та  $K$ ) *поперечними хвильовими числами*, незважаючи на те, що у поперечному напрямку поширення хвиль не відбувається.

Розв'язок рівнянь (3.47) може бути подано у вигляді гармонійних функцій:

$$X(x) = C_x \frac{\sin}{\cos}(k_x x + j_x), \quad Y(y) = C_y \frac{\sin}{\cos}(k_y y + j_y).$$

Подвійний запис означає, що, виходячи зі зручності, можна вибирати кожен із функцій, поки постійні інтегрування  $j_x$  та  $j_y$  не визначені.

Отримані вирази дозволяють записати загальний вигляд розв'язку хвильових рівнянь для кожної зі складових електричного і магнітного полів у формі

$$\dot{F}(x, y, z, t) = \dot{F}^+(x, y) e^{j(\omega t - Kz)} =$$

$$= C^+ \frac{\sin(k_x x + j_x)}{\cos} \frac{\sin(k_y y + j_y)}{\cos} e^{j(\omega t - Kz)}. \quad (3.48)$$

Цей вираз показує, що гармонійні зміни напруженості аналогічні до полів стоячої хвилі у поперечному перерізі, а у поздовжньому напрямку у хвилеводі існує хвильовий процес, що характеризується поздовжнім хвильовим числом  $K$ . Постійні інтегрування  $j_x$  та  $j_y$  знаходять із граничних умов, які можуть бути сформульовані для кожного конкретного хвилеводу (див. главу 4).

**Типи хвиль у хвилеводах** визначаються за наявністю або відсутності поздовжніх складових полів  $E_z$  і  $H_z$ . Зробимо спочатку деякі формальні перетворення. Скористаємося комплексними виразами рівнянь Максвелла в проєкціях на осі координат і будемо вважати, що у хвилеводі поширюється тільки падаюча хвиля. Це не змінить суті висновків, тому що функції  $\dot{F}^+(x, y)$  і  $\dot{F}^-(x, y)$  подібні. Розв'язуючи ці системи рівнянь, отримуємо такі вирази для поперечних складових полів через поздовжні [1]:

$$\dot{E}_x = - \frac{j \left( K \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + w m m_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)}{(k^2 - K^2)}, \quad (3.49)$$

$$\dot{H}_y = - \frac{j \left( w e e_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + K \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)}{(k^2 - K^2)},$$

$$\dot{E}_y = - \frac{j \left( K \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - w m m_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)}{(k^2 - K^2)},$$

$$\dot{H}_x = \frac{j \left( wee_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - K \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)}{(k^2 - K^2)}.$$

Структура цих виразів однотипна: перший доданок у чисельнику визначається поздовжньою складовою електричного поля, другий – поздовжньою складовою магнітного поля. Очевидно, що можливе існування таких структур хвиль, у яких відсутня поздовжня складова або електричного, або магнітного поля. У окремому випадку при  $k \rightarrow K$  можуть бути відсутні обидві поздовжні складові. Відповідно виділяють три основні групи хвиль: так звані  $H$ -хвилі,  $E$ -хвилі та  $T$ -хвилі.

1  $H$ -хвилі характеризуються відсутністю поздовжньої складової електричного поля ( $\dot{E}_z=0$ ). Однією із особливостей таких хвиль є те, що відношення поперечних складових електричного і магнітного полів не залежить від координат. Це відношення називається *еквівалентним опором хвилеводу*, причому

$$Z_e^H = \frac{\left| \dot{E}_\perp \right|}{\left| \dot{H}_\perp \right|} = \frac{wmm_0}{K} = Z_0 \frac{\Lambda}{l} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{kp}}{f} \right)^2}}. \quad (3.50)$$

2  $E$ -хвилі характеризуються відсутністю поздовжньої складової магнітного поля ( $\dot{H}_z=0$ ). Еквівалентний опір хвилеводу для цих хвиль

$$Z_e^E = \frac{\left| \dot{E}_\perp \right|}{\left| \dot{H}_\perp \right|} = \frac{K}{wee_0} = Z_0 \frac{l}{\Lambda} = Z_0 \sqrt{1 - \left( \frac{f_{kp}}{f} \right)^2}. \quad (3.51)$$

З *T-хвиль* характеризуються відсутністю обох поздовжніх компонентів поля ( $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$ ). Для таких хвиль характерна відсутність дисперсії ( $k = K$ ,  $v_\phi = c$ ,  $\Lambda = 1$ ), а

еквівалентний опір  $Z_e^T = Z_0 = 377 \sqrt{\frac{m_0}{e_0}}$  [Ом]. Для *E-* або

*H-*хвиль можливе існування нескінченної безлічі їх типів. *T-хвилі* (розподіл поперечних полів для яких такий самий, як і для статичних полів) при заданій конфігурації хвилеводу мають єдиний розв'язок рівнянь Лапласа.

Доцільність проведеної класифікації полягає у тому, що порівняно легко можна кількісно аналізувати лише окремі типи хвиль, а будь-які складні гібридні поля можна подати як їх суперпозицію. До таких хвиль належать

*HE-хвилі* ( $\dot{H}_z \neq 0$ ,  $\dot{E}_z \neq 0$ ).

### 3.5 Випромінювання електромагнітних хвиль

*Випромінюванням* електромагнітних хвиль називають явище поширення у просторі електромагнітних хвиль, які мають кінцеву швидкість і які втратили зв'язок зі своїми джерелами (змінними зарядами і струмами). Існування електромагнітного поля далеко від його джерел обумовлюється

взаємним зв'язком змінних магнітного ( $\partial \vec{B} / \partial t$ ) і

електричного ( $\partial \vec{D} / \partial t$ ) полів. Початкове ж виникнення електромагнітного поля залежить від джерел поля. Основним завданням розрахунків електромагнітного поля випромінювання є визначення структури поля і його напруженості залежно від заданого розподілу струмів і зарядів випромінювача. Знаходження співвідношень між характеристиками поля і його джерела зводиться до спільного розв'язання рівнянь Максвелла та подальшого інтегруван-

ня неоднорідних диференційних рівнянь Даламбера (3.9), (3.11).

Припустимо, що фронт хвилі випромінювання є сферичним. Тоді рівняння (3.11) із урахуванням сферичної симетрії пабуде такого вигляду:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dj}{dr} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{r}{e_a}.$$

Розв'язок шукається у вигляді функції  $\frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$  і для складової потенціалу від заряду  $r(t) dV$ , яка змінюється в часі, має вигляд [1]:

$$\frac{r\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{4\pi e_a r}.$$

Вираз  $r\left(t - \frac{r}{v}\right)$  слід розуміти так: об'ємний заряд  $r$  є функцією аргументу  $\left(t - \frac{r}{v}\right)$ . Результуюче значення потенціалу отримаємо, якщо додамо складові потенціалу від зарядів, розподілених в об'ємі  $V$ :

$$j = \frac{1}{4\pi e_a v} \int \frac{r\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r}. \quad (3.52)$$

Обговоримо розв'язання рівняння (3.9). У загальному випадку це рівняння можна розбити на три рівняння для трьох проекцій вектора-потенціалу. Кожне із рівнянь у проекціях буде складено відносно скалярної величини (проекція вектора є величина скалярна). Загальний розв'язок для кожної із проекцій проводиться так само, як і про-

водився розв'язок для скалярної величини  $j$ , але замість об'ємного заряду буде брати участь відповідна проекція густини струму і  $m_a$  замість  $1/e_a$ .

Після множення розв'язків на відповідні орти і додавання виявиться, що складова вектора-потенціалу від елемента струму  $\vec{d} dV$  у деякій точці простору, віддаленій від елемента струму на відстань  $r$ ,

$$d\vec{A} = \frac{m_a \vec{d} \left( t - \frac{r}{v} \right) dV}{4\pi r}.$$

Для одержання результуючого значення  $\vec{A}$  необхідно геометрично додати складові від усіх елементів струму:

$$\vec{A} = \frac{m_a}{4\pi} \int \frac{\vec{d} \left( t - \frac{r}{v} \right) dV}{r}. \quad (3.53)$$

Вирази (3.52), (3.53) також можна подати у комплексній формі запису [1] за умови завдання гармонічно змінного струму  $i = I_m \sin(\omega t + j)$ .

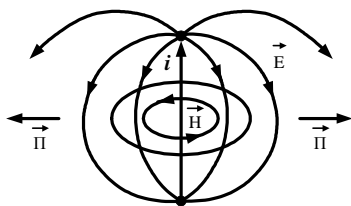


Рисунок 3.11 – Загальна картина розподілу електричного та магнітного полів в випромінювальній установці

Аналіз поля випромінювання, як правило, проводять, досліджуючи поле елементарних випромінювачів. При цьому випромінювальні установки (антени) розглядають як сукупність елементарних випромінювачів. Установка є *випромінювальною*, якщо електричне і магнітне поля розподілені в одній і тій самій області простору (рис. 3.11).



Електромагнітне поле, створене елементарними випромінювачами в оточуючому їх діелектричному середовищі ( $r=0$ ), аналізують за допомогою запізнених потенціалів (див. приклад 3.6). Для гармонійних випромінювачів застосовують комплексні зображення. Знаходять комплекс

запізненого векторного потенціалу  $\vec{A}$ , за яким визначають комплексний вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A} / m_a$ . Напруженість електричного поля розрахо-

вують за рівнянням Максвелла  $\vec{E} = \text{rot } \vec{H} / (j\omega\epsilon_a)$ .

За приклад розглянемо основні типи випромінювачів.

**Елементарним електричним випромінювачем** називають відрізок провідника із гармонійним струмом  $i$  (однаковим по всій довжині у будь-який момент часу) та довжиною провідника  $l$ , значно меншою ніж довжина хвилі  $l \ll \lambda$  генератора:  $l \ll \lambda$  (див. рис. 3.11). Провідник є лінійним, тому що його переріз малий порівняно із довжиною. При дослідженні поля гармонійний струм провідника  $i = I_m \sin(\omega t + j)$  заміняють його комплексним зображен-

ням  $I_m$ . Комплексний векторний потенціал  $\vec{A}$  збігається за напрямком зі струмом, який спрямований вздовж осі  $z$ . Припускають, що в полі об'ємні заряди відсутні ( $r=0$ ).

Електричним **диполем зі змінним зарядом** (диполем Герца) називають відрізок дроту, на кінцях якого розміщені металеві кульки (рис. 3.12), які утворюють зосереджені ємності. Високочастотний генератор періодично перезаряджає кульки, змінюючи їх заряди за гармонійним законом  $+Q_m \cos \omega t$  і  $-Q_m \cos \omega t$ . При цьому по відріжку дроту, який з'єднує кульки, проходить струм провідності

$i = dQ/dt = \pm w Q_m \sin wt$ , а через діелектрик, що оточує диполь, проходить струм зміщення.

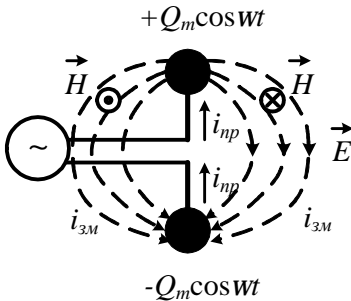


Рисунок 3.12 –  
Електромагнітне поле електричного диполя

використовується петля зі струмом провідності. Принцип роботи магнітного вібратора такий: при проходженні змінного електричного струму провідності по петлі у стрижні створюється змінне магнітне поле, яке спрямовано вздовж

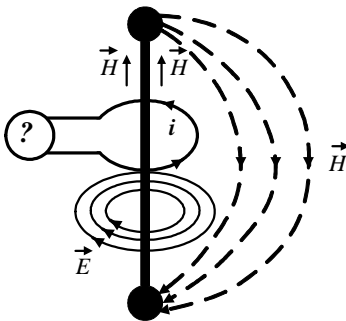


Рисунок 3.13 –  
Електромагнітне поле елементарного магнітного вібратора

штиря. Тому розрахунки поля диполя проводять аналогічно до розрахунків електромагнітного поля, створеного елементарним електричним випромінювачем.

**Елементарний магнітний вібратор** являє собою штир із матеріалу з великою магнітною проникністю  $m \gg 1$  (наприклад, ферит), на кінцях якого знаходяться кулі (рис. 3.13). За пристрій збудження, як правило,

використовується петля зі струмом провідності. Оскільки  $m \gg 1$ , то це магнітне поле підсилюється феромагнітним стрижнем. Із четвертого рівняння Максвелла випливає, що силові лінії магнітного поля замкнені. Тому силові лінії магнітного поля, створеного в стрижні, проходять через кулі і замикаються через повітряний простір (див. рис. 3.13). Вектори напруженості електричного поля  $\vec{E}$  будуть спрямовані навколо

феромагнітного стрижня. Кулі потрібні для сталості вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  уздовж стрижня. При зміні напрямку струму змінюється напрямок магнітного поля у стрижні і у повітряному просторі, тобто в повітрі створюється змінне магнітне поле, яке згідно з рівняннями Максвелла (1.9), (1.10) і створить електромагнітне поле.

**Елементарний щілинний вібратор** являє собою тонкий металевий лист необмежених розмірів, у якому прорізана щілина довжиною  $l$  і шириною  $\Delta$ , причому  $\Delta \ll l \ll l$  (рис. 3.14).

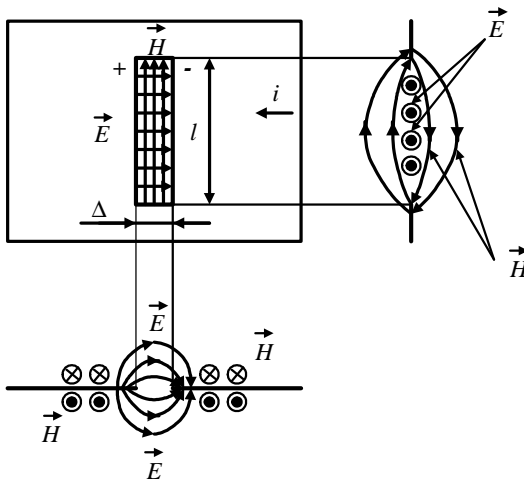


Рисунок 3.14 – Електромагнітне поле елементарного щілинного вібратора

По поверхні такого листа проходить змінний поверхневий електричний струм, створюючи на краях щілини змінні заряди (змінне електричне поле). Силкові лінії електричного поля  $\vec{E}$  щілинного вібратора перпендикулярні до площини листа і починаються на одному краю щілини (вздовж вирізу зі стороною  $\Delta$ ), а закінчуються – на іншому

(протилежно напрямку струму) (див. рис. 3.14). Магнітні силові лінії щільного вібратора спрямовані перпендикулярно до площині листа уздовж вирізу зі стороною  $l$ .

### 3.6 Приклади аналізу хвильових процесів

**Приклад 3.1 (Нормальне падіння хвиль на границю метал-діелектрик).** Якщо випромінюючий пристрій розміщений перпендикулярно до поверхні поділу середовищ, тобто  $j = 0$ ,  $q = 0^\circ$  (див. рис. 3.4, 3.5) та незалежно від параметрів середовищ падаючий, відбитий і переломлений промені спрямовані по одній лінії. Коефіцієнти переломлення і відбиття у цьому випадку не будуть залежати від поляризації падаючої хвилі, співвідношення (3.36) – (3.39) збігаються і приймають наступний вигляд:

$$k_n^0 = \frac{2Z_{x62}}{Z_{x61} + Z_{x62}}, \quad k_e^0 = \frac{Z_{x62} - Z_{x61}}{Z_{x62} + Z_{x61}}.$$

З їхнього аналізу можна бачити, що значення модуля коефіцієнта відбиття знаходиться у межах  $0 \leq \left| k_e^0 \right| \leq 1$ .

Однією із крайніх ситуацій є випадок однакових середовищ ( $\dot{Z}_{x61} = \dot{Z}_{x62}$ ), при якому відбиття відсутнє, тому що фактично відсутня границя поділу. Повне відбиття електромагнітної хвилі походить від поверхні ідеально провідного середовища ( $g \rightarrow \infty$ ,  $\dot{Z}_{x62} \rightarrow \infty$ ). У цьому випадку  $k_e^0 = -1$  і амплітуда хвилі при відбитті не змінюється. Знак "–" для коефіцієнта відбиття показує, що фаза хвилі електричного поля змінюється на  $180^\circ$ , а фаза хвилі магнітного поля залишається незмінною. У результаті накладення падаючих і відбитих хвиль перед поверхнею відбиття утворюється так звана "*стояча*" хвиля. Особливості цього явища можна зрозуміти, розглядаючи вираз (3.15) для ви-

падку  $\dot{k}_g^0 = -1$  і для спрощеності  $a = 0$  ( $\dot{p} = k$ ). Відновлюючи часовий множник  $e^{j\omega t}$  і виділяючи дійсну частину, отримуємо:

$$E = 2E_m^+ \sin(kz) \sin(\omega t + j),$$

$$H = 2H_m^+ \cos(kz) \cos(\omega t + j).$$

Дані вирази описують не хвильовий процес, а гармонійні коливання, фаза і амплітуда яких залежать від позовжньої координати.

Миттєві «фотографії» цих коливань, зроблені через проміжки часу  $T/8$ , зображені на рис. 3.17 а і нагадують коливання струни. У межах одного півперіоду коливання відбуваються синфазно, але амплітуда їх у різних точках різна.

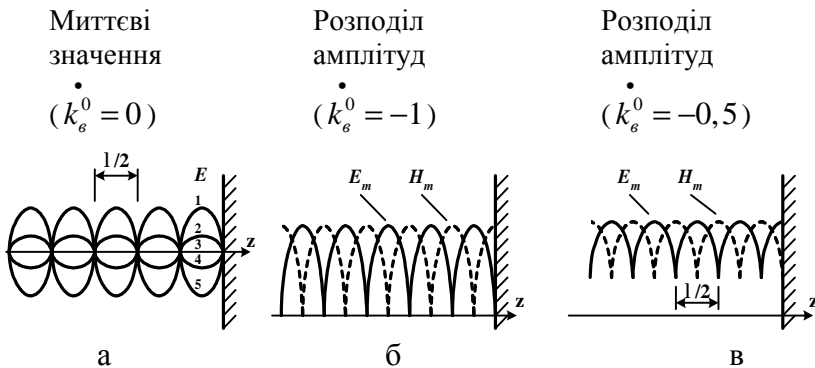


Рисунок 3.17 – Ілюстрація миттєвих значень коливань при нормальному падінні хвилі на границю діелектрик-метал

Розподіл амплітуди, нормованої до амплітуди падаючої хвилі, показано на рис. 3.17 б, в. Характерною рисою є наявність «вузлів», тобто точок із нульовою амплітудою, і «пучностей», де амплітуда максимальна та вдвічі переви-

ще амплітуду падаючої хвилі. Причому положення цих точок у просторі незмінне, що і пояснює використана назва – стояча хвиля. Причину такої ситуації зрозуміти неважко – вузли утворюються в точках, де падаюча та відбита хвилі зустрічаються в протифазі. Для електричного поля «вузли» розміщені на відстанях, кратних півхвилі, оскільки на цих відстанях «набіг» фази при проходженні хвилі вперед і назад становить ціле число періодів, а протифазність забезпечується зсувом фази на  $180^\circ$  при відбитті. Оскільки для магнітного поля фаза при відбитті не змінюється, то в тих самих точках падаюча і відбита магнітні хвилі будуть зустрічатися синфазно та утворюватимуть «пучності». Легко уявити, що між двома сусідніми «вузлами» будуть розміщені «пучності» електричного і «вузли» магнітного полів.

Подібне явище спостерігається і при неповному відбитті, коли  $\left| k_g^0 \right| < 1$ . У цих ситуаціях перед площиною відбиття буде утворюватися стояча хвиля (рис. 3.17 в), однак амплітуда коливань в «пучностях» буде не у два, а в  $1 + \left| k_g^0 \right|$  разів перевищувати амплітуду падаючої хвилі, а у «вузлах» – пропорційна  $1 - \left| k_g^0 \right|$ .

**Приклад 3.2 (падіння хвилі на границю діелектрик – метал під кутом).** Розглянемо якісну картину явищ, які виникають при падінні плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню під кутом. На рис. 3.18 прямими лініями показані фронти хвилі, які відповідають «гребеням» і «западинам».

На основі принципу суперпозиції таку хвилю можна подати як суму нормально падаючої хвилі і хвилі, що поширюється паралельно поверхні. Нормально падаюча хвиля буде зазнавати повного відбиття, у результаті чого утво-

рюється стояча хвиля з «вузлами» і «пучностями», які чередуються в напрямку, перпендикулярному до поверхні. У поздовжньому напрямку електромагнітне поле буде поширюватися як біжуча хвиля, причому її довжина, відлічувана уздовж поверхні,  $\Lambda = l / \sin j$ . Відповідно фазова швидкість  $v_\phi = c / \sin j$  перевищує швидкість світла для даного середовища. У граничному випадку нормального падіння ( $j \rightarrow 0$ ) довжина хвилі і фазова швидкість будуть мати нескінченно велике значення.

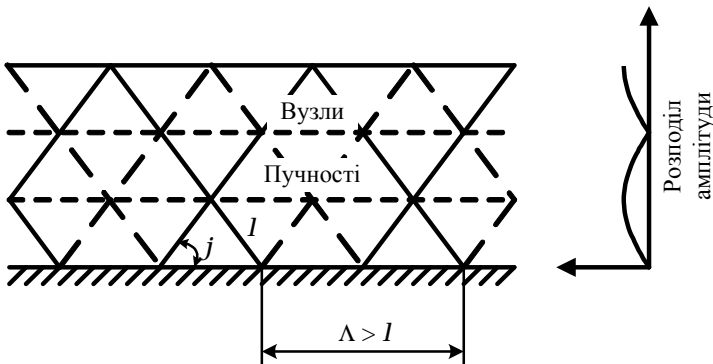


Рисунок 3.18 – Ілюстрація хвильових явищ при похилому падінні хвилі на провідну поверхню

**Приклад 3.3 (Скін-ефект і його застосування).** Проаналізуємо співвідношення (3.30), яке визначає глибину проникнення поля в провідне середовище:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega m_a g}}.$$

Видно, що глибина проникнення  $\Delta$  залежить від властивостей провідного середовища ( $m_a$ ,  $g$ ) і частоти  $\omega$ . Зокрема, для металів питома провідність  $\gamma$  висока, отже, глибина проникнення  $\Delta$  дуже мала (кілька мікрометрів).

Для ідеального провідника  $g \rightarrow \infty$  і глибина проникнення електромагнітного поля дорівнює нулю. Тому можна вважати, що енергія електромагнітного поля при потраплянні на поверхню металевого провідника виділяється у тонкому поверхневому шарі та сильно поглинається цим шаром. *Явище сильного поглинання електромагнітного поля тонким поверхневим шаром провідника називається **скін-ефектом**, а шар, у якому відбувається поглинання, називається **скін-шаром**.*

Скін-ефект *застосовується* при побудові електромагнітних екранів та в електрофізичних приладах з нагрівання поверхні провідників. Товщина металевого екрана повинна бути не менше довжини електромагнітної хвилі зовнішнього поля, тому що на відстані довжини хвилі від поверхні екрана електромагнітна хвиля практично повністю загасає і не проникає у простір, обгороджений екраном.

На низьких частотах (наприклад,  $f = 50$  Гц) електромагнітні екрани виконують із феромагнітних матеріалів, довжина електромагнітної хвилі в яких менше, ніж у мідних або алюмінієвих матеріалах при одній і тій самій частоті. На радіочастотах екрани із феромагнітних матеріалів не застосовують через великі втрати в них. Довжина хвилі в міді, алюмінії та інших добре провідних матеріалах може бути менше 1 мм, тому екрани з таких матеріалів мають незначну товщину стінок. Основні принципи побудови екранів викладені в [14].

Розігрів поверхні провідників електромагнітним полем використовується для одержання на їхній поверхні твердих загартованих або мартенситних фаз, що дозволяють у кілька разів збільшити ресурс роботи металевих виробів.

**Приклад 3.4 (поля, які поширюються та не поширюються у хвилеводі).** Проаналізуємо фізичний зміст введеного в п. 3.4 поняття критичної довжини хвилі (критичної частоти). Оскільки  $x$ ,  $y$  і  $z$  – незалежні змінні, то од-



новимірне хвильове рівняння, що описує залежність векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  від поздовжньої координати, відповідно до (3.42) буде мати такий вигляд:

$$\frac{d^2 F^\pm}{dz^2} - (K^2 - k^2) F^\pm = 0. \quad (3.54)$$

Це рівняння має розв'язок

$$F(z) = Ae^{-pz} + Be^{pz}, \quad (3.55)$$

де  $A$  і  $B$  – постійні інтегрування;

$$p = \sqrt{K^2 - k^2}. \quad (3.56)$$

Із (3.56) випливає, що залежно від співвідношення між  $K$  і  $k$  значення  $p$  може бути або дійсним, або уявним, або дорівнювати нулю.

Якщо взяти у загальному випадку  $p = a + jb$  і враховувати зв'язок між векторами  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і функцією  $F$ , будь-яку складову векторів поля у хвилеводі можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+(x, y) e^{-az} e^{-j bz} + \dot{E}^-(x, y) e^{az} e^{j bz}, \\ \dot{H} &= \dot{H}^+(x, y) e^{-az} e^{-j bz} + \dot{H}^-(x, y) e^{az} e^{j bz}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Розглянемо фізичний зміст доданків у (3.57). Перші доданки описують електромагнітне поле, що поширюється в позитивному напрямку осі  $z$ , на що вказує множник  $\exp(-j bz)$ . Таке поле називають *прямою (падаючою)* хвилею. Другі доданки описують поле, що поширюється у від'ємному напрямку осі  $z$ . Таке поле називають *зворотною (відбитою)* хвилею. Властивості падаючих і відбитих хвиль ідентичні, тому обмежимося вивченням тільки падаючих хвиль. Очевидно, що у виразах (3.57) за аналогією

із плоскою хвилею (п.3.2)  $a$  – коефіцієнт загасання;  $b$  – коефіцієнт фази;  $p$  – коефіцієнт поширення.

Дослідимо характер розподілу поля вздовж хвилеводу при різних співвідношеннях між  $K$  і  $k$ . Для цього перейдемо до такої форми запису співвідношень (3.57), обмежившись випадком прямих хвиль:

$$E = \left| E_n^+(x, y) \right| e^{-az} \cos(\omega t - b z + j_1), \quad (3.58)$$

$$H = \left| H_n^+(x, y) \right| e^{-az} \cos(\omega t - b z + j_2),$$

де  $j_1, j_2$  – початкові фази компонентів поля. Залежно від співвідношення між  $K$  і  $k$  можливі три випадки (підкреслимо, що  $K$  і  $k$  – дійсні числа).

*Випадок 1* – поля, що поширюються. Нехай  $k > K$ . При цьому згідно з (3.56)

$$p = j\sqrt{k^2 - K^2} = jb, \quad a = 0, \quad b = \sqrt{k^2 - K^2}. \quad (3.59)$$

Для розглянутого випадку згідно з (3.58)

$$E = \left| \dot{E}^+ \right| \cos(\omega t - b z + j_1), \quad H = \left| \dot{H}^+ \right| \cos(\omega t - b z + j_2).$$

Із отриманих виразів випливає, що поле у хвилеводі являє собою хвилю, що поширюється без загасання. Із часом  $t$  хвиля переміщається в позитивному напрямку осі  $z$ . Фаза поля лінійно залежить від  $z$ , фронтом хвилі є площина  $z = \text{const}$  перпендикулярна до осі хвилеводу.

*Випадок 2* – поля, що не поширюються. Нехай  $k < K$ . При цьому

$$p = \sqrt{K^2 - k^2} = a, \quad b = 0.$$

Вирази для полів у хвилеводі набувають вигляду

$$E = \left| \dot{E}^+ \right| e^{-az} \cos(\omega t + j_1), \quad (3.60)$$

$$H = \left| H^+ \right| e^{-az} \cos(\omega t + j_2).$$

Згідно з (3.60) із часом  $t$  поля не переміщуються вздовж осі  $z$ . Відсутність залежності фази від  $z$  свідчить про те, що розглянуте поле не є хвилею, яка поширюється вздовж осі  $z$  хвилеводу. Поле коливається між бічними стінками хвилеводу. Неважко показати, що у цьому випадку поздовжня складова середнього за період коливання значення вектора Пойнтінга хвилі у хвилеводі відсутня, тобто уздовж осі хвилеводу потужність полем не переноситься. Такі хвилі називаються *місцевими* або такими, що не поширюються. Експонентне зменшення амплітуди цих хвиль зі збільшенням  $z$  можна пояснити інтерференцією між хвилями, що відбиваються від стінок хвилеводу.

*Випадок 3* – нехай  $K = k$ . Отже  $a = 0$ ,  $b = 0$ , що відповідає переходу від хвиль, що поширюються, до хвиль, що не поширюються. Тоді  $E$ - та  $H$ -хвилі у будь-якому хвилеводі можуть бути або такими, що поширюються, або такими, що не поширюються. Належність до того або іншого типу визначається співвідношенням між  $K$  і  $k$ .

Частота, яка визначається з умови  $K = k = w_{кр} \sqrt{e_a m_a} = 2p f_{кр} \sqrt{e_a m_a}$ , є критичною:

$$f_{кр} = \frac{K}{2p \sqrt{e_a m_a}}. \quad (3.61)$$

Відповідно до даної частоти критична довжина хвилі

$$l_{кр} = \frac{v}{f_{кр}} = \frac{2p}{K}, \quad (3.62)$$

де  $v = 1/\sqrt{e_a m_a}$  – швидкість електромагнітної хвилі у середовищі із параметрами  $e_a$  і  $m_a$ , що відповідають параметрам діелектричного заповнення хвилеводу. Із (3.61) і (3.62) випливає, що умову поширення хвилі у хвилеводі ( $k > K$ )

можна подати як  $f > f_{кр}$  ( $l < l_{кр}$ ). Отже, критичною довжиною хвилі називається така довжина хвилі електромагнітного поля у необмеженому вільному просторі, яка має такі самі параметри, що і діелектрик хвилеводу, при якій відбувається перехід від поля, яке поширюється, до поля, яке не поширюється, і навпаки.

Оскільки кожний конкретний хвилевід має свій спектр значень  $K$ , то він має і свій спектр критичних довжин хвиль (критичних частот). Оскільки значення  $K$  в заданому хвилеводі являють собою дискретний ряд чисел, які починаються з мінімального значення  $K_1$  і зростають нескінченно, то значення  $l_{кр}$  також являють собою безліч дискретних чисел, які починаються від максимального значення  $l_{кр1}$  і прямують до нуля, а значення  $f_{кр}$  являють собою ряд дискретних чисел, аналогічний до  $K$  (рис. 3.19). Як видно із рис. 3.19, при заданій частоті (довжині хвилі у вільному просторі) у хвилеводі існує кінцеве число полів, що поширюються, для яких  $f > f_{кр}$  ( $l < l_{кр}$ ), та нескінченне число полів, що не поширюються, для яких  $f < f_{кр}$  ( $l > l_{кр}$ ).

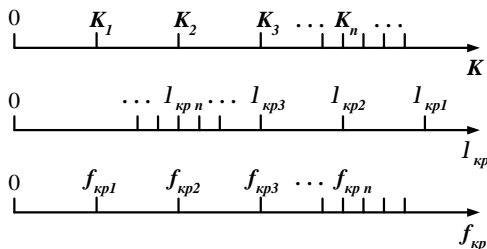


Рисунок 3.19 – Діаграма дискретних значень  $K$ ,  $l_{кр}$  і  $f_{кр}$

При виконанні умови

$$f_{кр1} < f < f_{кр2} \quad (I_{кр2} < I < I_{кр1}) \quad (3.63)$$

у хвилеводі буде поширюватися тільки одна хвиля, у якій  $f_{кр} = f_{кр1}$  ( $I_{кр} = I_{кр1}$ ). Ця хвиля має мінімальну критичну частоту (максимальну критичну довжину хвилі) і називається *основною* хвилею. Співвідношення (3.63) називають *умовою одиничності* основної хвилі.

Як правило, передача енергії по хвилеводу відбувається на основній хвилі з виконанням умови її одиничності. Якщо крім основної хвилі можливе поширення і деяких вищих типів хвиль, то між усіма хвилями виникає взаємодія, яка приводить до викривлення переданого сигналу. Поряд із цим ускладнюється узгодження хвилеводу із навантаженням, оскільки для різних типів хвиль, які поширюються, їхні характеристики, такі, як довжина хвилі у хвилеводі, фазова швидкість та інші – різні.

Згідно з (3.61) критична частота, будучи характеристикою хвилеводу, залежить від форми і розмірів контура поперечного перерізу хвилеводу, типу хвилі (від даних характеристик залежить  $K$ ) і проникностей  $\epsilon_a$  і  $m_a$  середовища, яке заповнює хвилевід.

Чим більше значення  $\epsilon_a$  і  $m_a$ , тим менше  $f_{кр}$ . Отже, із зростанням  $\epsilon_a$  і  $m_a$  умова поширення заданої хвилі виконується на більш низьких частотах. Подібну обставину у ряді випадків використовують для зменшення поперечних розмірів хвилеводу при роботі на заданій частоті  $f$ .

Оскільки для  $T$ -хвиль  $K=0$ , то  $I_{крT} = \infty$  ( $f_{крT} = 0$ ). Це означає, що  $T$ -хвиля завжди є основною (якщо вона взагалі існує в даному хвилеводі) і такою, що поширюється.

**Приклад 3.5 (запізнені потенціали).** З'ясуємо, у чому полягає фізичний зміст підінтегральних виразів у (3.52) і (3.53):

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{r \left( t - \frac{r}{v} \right) dV}{r^3}; \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{d} \left( t - \frac{r}{v} \right) dV}{r^2}.$$

Електромагнітна хвиля поширюється зі швидкістю  $v$ . Відстань  $r$  вона пройде за час  $r/v$ . Тому значення складової потенціалу  $j$  у змінному електромагнітному полі в деякій точці, віддаленій від заряду на відстань  $r$  у момент часу  $t$ , визначається значенням заряду в момент часу  $\left( t - \frac{r}{v} \right)$ . Точно так само слід розуміти і вираз для  $\vec{A}$ .

Внаслідок кінцевої швидкості поширення електромагнітної хвилі значення вектора-потенціалу від елемента струму  $\vec{d} dV$  в точці, віддаленій від елемента струму на відстань  $r$ , змінюється із запізнюванням у часі на величину  $r/v$ . Тому потенціали змінного електромагнітного поля називають *запізненими потенціалами*.

Запізнювання пояснюється тим, що електромагнітна хвиля проходить відстань  $r$  до точки спостереження не миттєво, а з кінцевою швидкістю  $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ .

### Запитання для самоперевірки

- 1 Який фізичний зміст хвильової функції?
- 2 У чому відмінність хвильових однорідних рівнянь Гельмгольца від неоднорідних хвильових рівнянь Даламбера?
- 3 Яким способом із рівнянь Гельмгольца можна одержати рівняння плоскої хвилі в однорідному середовищі?
- 4 Чим відрізняються параметри плоскої хвилі в діелектрику від параметрів у провідному середовищі?
- 5 Чим відрізняється лінійна поляризація хвилі від колової та еліптичної?

6 У чому полягає відмінність поширення хвиль в однорідному середовищі і на поверхні поділу двох середовищ?

7 Якими фізичними факторами обумовлене явище скін-ефекту і для яких цілей воно застосовується?

8 У чому відмінність спрямованих електромагнітних хвиль від хвиль в однорідному середовищі?

9 Який фізичний зміст критичної довжини хвилі (частоти)?

10 Чим відрізняються фазова і групова швидкості хвиль?

11 Які основні типи хвиль у спрямовуючих системах можуть поширюватися?

12 Які режими існування полів можливі у хвилеводі?

13 У чому полягають основні принципи випромінювання електромагнітних хвиль?

14 Чим відрізняються елементарні електричні та магнітні випромінювачі?

15 Який фізичний зміст терміна «запізнені потенціали»?

## РОЗДІЛ 4 ОСНОВИ ТЕХНІКИ НВЧ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Техніка НВЧ особливо широко застосовується в радіо-системах передавання і отримання інформації (радіозв'язку, радіомовленні, радіоастрономії, космонавтиці та ін.).

У системі передавання інформації дані про фізичний процес за допомогою електрофізичного перетворювача трансформуються в електричний сигнал і подаються на модулятор. До модулятора підходить також НВЧ-сигнал несучої частоти. У модуляторі корисний сигнал (сигнал електрофізичного перетворювача) модулює один із параметрів сигналу несучої частоти (амплітуду, фазу, частоту). Після модулятора НВЧ-сигнал (радіосигнал) надходить на підсилювач потужності, проходить через фільтр, який гасить побічні коливання і за допомогою лінії передачі підходить до антени, яка випромінює модульований сигнал у вільний простір у вигляді електромагнітних хвиль (радіохвиль). Випромінена радіохвиля збуджує в приймальній антені, яка, як правило, перебуває на великій відстані, малопотужні коливання переданого радіосигналу НВЧ, які виділяються преселектором (фільтром НВЧ) серед безлічі різних за частотою сигналів, перетворюються в коливання проміжної частоти, підсилюються, детектуються, зазнають додаткового посилення і надходять на пристрій обробки та відображення інформації.

У більшості радіолокаційних систем спостереження, що належать до систем отримання інформації, для передавання і приймання радіосигналів використовується одна антена. У цьому випадку для розділення приймання і передавання застосовуються антенні перемикачі. Для спостереження та сканування вільного простору застосовуються механізми обертання або спеціальні конструкції антен.



НВЧ-пристрої широко застосовуються у ядерній фізиці для розганяння елементарних частинок до швидкостей, близьких до швидкості світла, за допомогою електромагнітних полів хвилеводів.

У наш час досліджується проблема (у деяких випадках реалізується) передавання енергії у вільному просторі за допомогою електромагнітних хвиль НВЧ-діапазону. Широке застосування знаходить НВЧ-нагрівання у харчовій промисловості з метою прискореного готування їжі, пастеризації, стерилізації та зневоднення харчових продуктів.

Особливо широке застосування останнім часом хвилі НВЧ-діапазону отримали в медицині для глибинних локальних нагрівів і прискорення лікування багатьох захворювань [17].

Далеко не повний перелік використання техніки НВЧ вимагає розроблення спеціальних пристроїв, які внаслідок причин принципового характеру істотно відрізняються від пристроїв діапазону низьких частот, де фізичні явища в основному описуються за допомогою понять струму і напруги. До основних пристроїв техніки НВЧ можна віднести хвилеводні, резонаторні та випромінювальні системи, на підставі яких будується вимірювальна і функціональна бази техніки НВЧ: генераторні й підсилювальні пристрої, розгалужувачі і розділювачі потужності, антенні системи, вимірювачі рівня НВЧ-потужності і т.д. Принцип роботи та конструктивне виконання елементів і вузлів НВЧ-техніки значною мірою визначається діапазоном хвиль, у якому вони повинні функціонувати (табл. 4.1).

Крім того, практично будь-яка радіоелектронна система (РЕС) перебуває у полі дії небажаних джерел електромагнітних перешкод і сама випромінює перешкоди на розміщене поряд електронне обладнання.

Забезпечення спільної нормальної роботи РЕС без втрати інформації і погіршення їх функціональних елек-

тричних характеристик – основна проблема електромагнітної сумісності [18].

Таблиця 4.1 – Діапазон електромагнітних хвиль за міжнародним регламентом

Номер діапазону	Границі за частотою $f$ і довжиною хвилі $l$	Назва
4	3-30 кГц 100-10 км	Дуже низькі частоти (ДНЧ) Міріаметрові хвилі
5	30-300 кГц 10-1 км	Низькі частоти (НЧ) Кілометрові хвилі
6	300-3000 кГц 1000-100 м	Середні частоти (СЧ) Гектометрові хвилі
7	3-30 МГц 100-10 м	Високі частоти (ВЧ) Декаметрові хвилі
8	30-300 МГц 10-1 м	Дуже високі частоти (ДВЧ) Метрові хвилі
9	300-3000 МГц 100-10 див	Ультрависокі частоти (УВЧ) Дециметрові хвилі
10	3-30 ГГц 10-1 див	Надвисокі частоти (НВЧ) Сантиметрові хвилі
11	30-300 ГГц 10-1 мм	Край високі частоти (КВЧ) Міліметрові хвилі
12	300-3000 ГГц 1-0,1 мм	Гіпервисокі частоти (ГВЧ) Субміліметрові хвилі

Одним із основних конструктивних засобів забезпечення електромагнітної сумісності є *екранування*, призначене для значного зменшення небажаної електромагнітної енергії, яка випромінюється РЕС та проникає в апаратуру. Частково на рівні загальних понять дані питання викладено у розділах 2 та 3 (див. приклади 2.8 і 3.3), а більш докладну інформацію можна знайти в [14, 18].

Ураховуючи широкий спектр питань, що стосуються техніки НВЧ (*прикладної електродинаміки*), які достатньою мірою висвітлені у спеціальній літературі, наприклад [18-21], даний розділ в основному містить оглядово-методичний матеріал, який дозволяє студенту або аспіранту сформулювати загальне уявлення про практичне застосування теорії поля у техніці НВЧ і за необхідності поглибити свої знання з конкретних питань, користуючись додатковими літературними джерелами.

#### **4.1 Загальні відомості про лінії передачі**

Усі лінії передачі можна поділити на два великі класи: лінії передачі *закритого* і *відкритого* типів. У лініях передачі закритого типу вся енергія зосереджена в просторі, екранованому від зовнішнього середовища металевою оболонкою. У лініях передачі відкритого типу електромагнітне поле, строго кажучи, розподілене у всьому просторі, який оточує лінію. Однак лінії виконують таким чином, що більша частина енергії електромагнітного поля зосереджується в безпосередній близькості від її поверхні. Відкриті лінії зазнають впливу навколишнього середовища.

Очевидно, не існує універсальних спрямовуючих систем, які задовільно працюють у всіх діапазонах частот. Освоєння кожної нової ділянки частотного спектра незмінно супроводжується створенням нових типів спрямовуючих систем.

Класифікація ліній передачі, пов'язана з їхньою конструкцією і належністю до різних частотних діапазонів, наведена на рис. 4.1 [22].

До *основних* ліній передачі діапазону НВЧ слід віднести коаксіальні і порожні металеві хвилеводи (рис. 4.2 а), смугові і діелектричні хвилеводи (рис. 4.2 б, в), променеві хвилеводи (рис. 4.2 г).

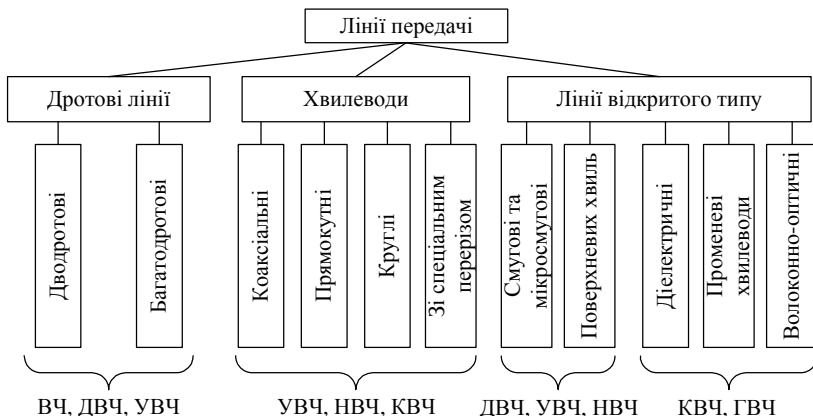


Рисунок 4.1 – Класифікація ліній передачі [22]

Розрізняють *регулярні* та *нерегулярні* хвильоводи. *Регулярним* називають хвильовід, який має у напрямку поширення енергії незмінну форму і постійні розміри поперечного перерізу.

Середовище, яке заповнює хвильовід, також повинне мати незмінні властивості в зазначеному напрямку. Якщо в напрямку поширення енергії характеристики хвильоводу змінюються, хвильовід називають *нерегулярним*.

Хвильоводи можуть бути *однорідними* і *неоднорідними*. Хвильовід, заповнений середовищем, властивості якого у поперечному перерізі залишаються незмінними, називається *однорідним*. Якщо властивості середовища, не змінюючись у поздовжньому напрямку, змінюються в поперечному, то хвильовід називають *неоднорідним*. Отже, хвильовід постійного перерізу, заповнений середовищем, яке складається із ізотропних і однорідних шарів різних діелектриків, буде регулярним, але неоднорідним.

Регулярний хвильовід називається *ізотропним*, якщо середовище, яке його заповнює, ізотропне за електричними і магнітними властивостями.

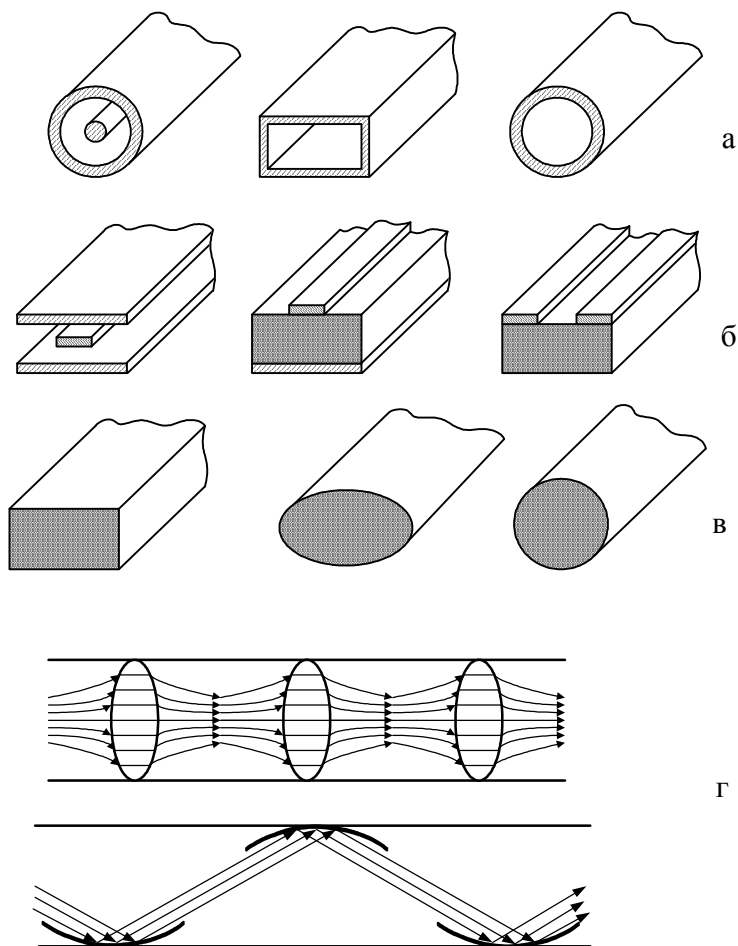


Рисунок 4.2 – Основні лінії передачі діапазону НВЧ

Розглянемо основні поняття, які використовуються при аналізі регулярних хвильоводів, на прикладі *хвильоводу узагальнено-циліндричної форми* (рис. 4.3).

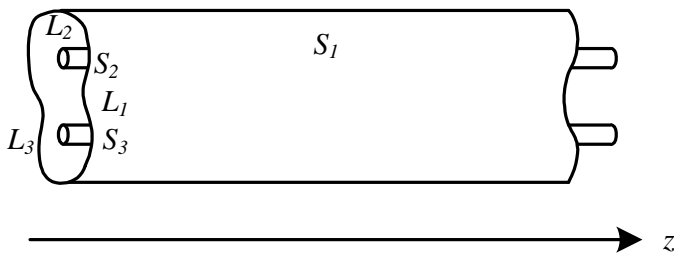


Рисунок 4.3 – Хвилевід узагальнено-циліндричної форми

Такий хвилевід складається із циліндричних металевих поверхонь  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , що утворюють бічну поверхню хвилеводу  $S$ . Для опису бічної поверхні хвилеводу і полів у ньому використовується узагальнено-циліндрична система координат  $x, h, z$ , у якій  $x, h$  – поперечні координати,  $z$  – поздовжня координата.

При аналізі різних хвилеводів під координатами  $x, h$  розуміються конкретні координати:  $x, y$  – у прямокутній системі при аналізі прямокутного хвилеводу;  $r, j$  – у циліндричній системі при аналізі круглих і коаксіальних хвилеводів і т.д. Площина  $z = const$  перетинає поверхні  $S_1, S_2, S_3$  (див. рис. 4.3) по контурах  $L_1, L_2, L_3$ , які утворюють контур поперечного перерізу хвилеводу  $L_{\perp}$ . Частина площини  $z = const$ , розміщена між зовнішнім контуром  $L_1$  і внутрішніми контурами  $L_2, L_3$ , називається *поперечним перерізом* хвилеводу  $S_{\perp}$ . Хвилевід із зовнішнім контуром називається *закритим*. Якщо такого контура немає, то хвилевід називається *відкритим* і поперечний переріз необмежений. Якщо число контурів поперечного перерізу дорівнює  $p_c$ , то хвилевід називається  $p_c$ -*зв'язаним*.

Виходячи із цього, лінії передачі можна також розділити на багатозв'язні (кількість контурів  $p_c \geq 2$ , наприклад, дводротова, коаксіальна і смугова лінії передачі) і однозв'язні ( $p_c = 1$ , наприклад, порожні металеві і діелектричні хвилеводи).

Розглянемо низку ліній передач, які найбільш часто використовуються на практиці.

## 4.2 Багатозв'язні лінії передачі

Характерною рисою розглянутих нижче дводрової, коаксіальної і смугової ліній передачі є те, що основним типом хвилі в них є  $T$ -хвиля, яка характеризується відсутністю дисперсії і, як наслідок, – рівністю фазової швидкості і швидкості світла для даного діелектричного середовища.

Характер розподілу полів у поперечній площині для біжучих  $T$ -хвиль збігається із розподілом статичних полів і підпорядковується рівнянню Лапласа.

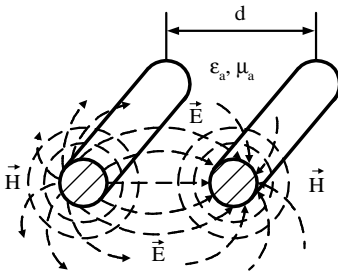


Рисунок 4.4 – Дводротова лінія

### *Дводротова лінія передачі*

являє собою два дроти, які розміщені у повітряному (на ізоляторах) або у діелектричному середовищі із параметрами  $\epsilon_a$  і  $m_a$  (рис. 4.4). Енергія електромагнітного поля передається по діелектрику вздовж дротів при  $l \gg d$ . Частина енергії, яка надходить із діелектрика в дроти, перетворюється у тепло. Швидкість передачі енергії дорівнює швидкості руху електромагнітної хвилі в діелектрику  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a m_a}$ . При високих частотах (дециметрові хвилі) така лінія не може використовуватися

для передачі енергії, тому що вона вже активно випромінює енергію в навколишній простір. При цьому втрати енергії в дротах за рахунок явища скін-ефекту (див. п. 3.6, приклад 3.3) стають значними.

**Коаксіальний хвилевід** – найпоширеніша лінія передачі. Використовуються як жорсткі хвилеводи з повітрям, так і гнучкі з діелектричним заповненням (коаксіальні кабелі).

Отримати аналітичні вирази для полів біжучої  $T$ -хвилі можна, розглядаючи у виразах для статичних  $E$ - і  $H$ -полів струм і напругу як миттєві значення, що дорівнюють відповідним значенням амплітуд, помножених на хвильовий множник:

$$E = \left( \frac{U_m}{r \ln \left( \frac{D}{d} \right)} \right) \cos(\omega t - k z),$$

$$H = \left( \frac{I_m}{2\pi r} \right) \cos(\omega t - k z).$$

Напрямок векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і характер їх зміни у просторі для фіксованого моменту часу показані на рис. 4.5. Із часом уся картина розподілу полів зміщується вздовж осі  $z$  зі швидкістю світла.

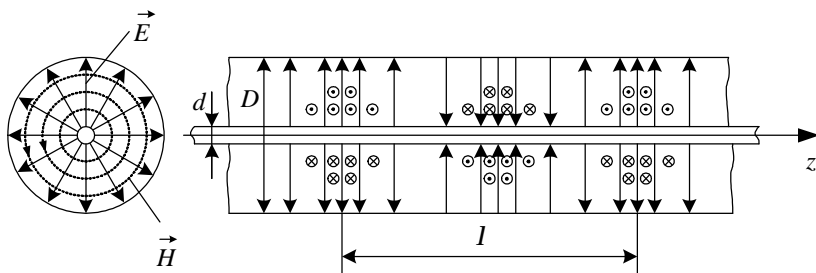


Рисунок 4.5 - Розподіл полів у коаксіальному хвилеводі



Важливим параметром коаксіальних ліній є так званий *хвильовий опір*, який у цьому випадку визначається як відношення амплітуд напруги і струму для падаючої хвилі. Враховуючи, що для  $T$ -хвиль відношення амплітуд  $E$  і  $H$  дорівнює хвильовому опору середовища, отримуємо

$$Z_{xв} [Ом] = 60 \sqrt{\frac{m}{e}} \ln \left( \frac{D}{d} \right).$$

Коаксіальний хвилевід можна використовувати для будь-яких частот, включаючи постійний струм. Однак на високих частотах у ньому можуть збуджуватися вищі типи хвиль і значно зростати теплові втрати. Тому верхня частота використання обмежена найближчим вищим типом хвилі  $H_{11}$ , який має критичну довжину хвилі, що приблизно дорівнює довжині середнього кола поперечного перерізу коаксіальної лінії. Тому в діапазоні НВЧ коаксіальні хвилеводи в основному використовуються у вигляді коротких відрізків сполучних кабелів.

**Смугові лінії передачі.** У радіоелектронній апаратурі широке застосування знаходять друковані схеми, використання яких дозволяє спростити конструкції елементів і вузлів, знизити їхню масу, зменшити габарити, удосконалити процес виготовлення. Технологічні методи створення звичайних друкованих схем виявилися прийнятними і у діапазоні НВЧ для виготовлення смугових ліній (СЛ) передачі.

Смугову лінію (хвилевід) можна одержати, деформуючи коаксіальний хвилевід (рис. 4.5) із круглим поперечним перерізом так, щоб перетин його внутрішнього і зовнішнього провідників став прямокутним. Вилучивши вузькі стінки зовнішнього провідника, одержимо *симетричну смугову лінію* (ССЛ) (рис. 4.6 а), а при усуненні однієї із зовнішніх пластин – *несиметричну смугову лінію* (НСЛ) (див. рис. 4.6 б).



Основне застосування СЛ знайшли в пристроях НВЧ-апаратури, які довгий час стримували вирішення проблеми комплексної мініатюризації. Використання матеріалів з малими втратами і високою відносною діелектричною проникністю, прогрес технології привели до освоєння МСЛ, виготовлених методом плівкової технології. Прагнення поліпшити характеристики пристроїв НВЧ стимулювала поява інших модифікацій ПЛ. До них належать, наприклад, щілинні і компланарні лінії передачі. *Щілинна лінія* (рис. 4.2 б) утворюється вузькою щілиною в провідному шарі, нанесеному на поверхню основи у вигляді тонкої діелектричної пластини. Інша поверхня пластини залишається вільною від покриття. *Компланарна лінія* складається із розміщених на поверхні діелектричної основи центральної смужки і двох паралельних їй заземлених провідників.

Для компланарної, симетричної і несиметричної ліній основною є квазі  $T$ -хвиля. Її існування обумовлене наявністю ізольованої смужки, яка забезпечує двозв'язність поперечного перерізу лінії. Можна вважати, що вектори поля лежать у площині поперечного перерізу СЛ і не мають позовжніх складових (див. рис. 4.6).

Діапазон частот СЛ досить широкий: від метрового до міліметрового. Обмеження з боку низьких частот обумовлені розмірами смугових елементів, а на високих частотах – допусками на виготовлення, а також рівнем втрат. Більш докладну інформацію щодо смугових ліній передачі можна знайти в [23].

### 4.3 Однозв'язні лінії передачі

Характерною рисою однозв'язних ліній передачі є наявність тільки  $E$ - і  $H$ -хвиль, для яких характерна дисперсія.

За приклад однозв'язної лінії розглянемо прямокутний хвилевод. Прямокутні хвилеводи (рис. 4.7) широко використовуються при передачі електромагнітних хвиль, особливо при високих рівнях потужності. Для спрощення будемо вважати, що втрати на стінках хвилеводу і в діелектрику, що його заповнює, відсутні.

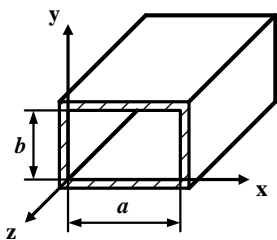


Рисунок 4.7 –  
Прямокутний  
хвилевод

Це дає можливість простіше сформулювати граничні умови: на стінках хвилеводу відсутня дотична складова електричного поля ( $E_y = E_z = 0$  при  $x=0$  і  $x=a$ ,  $E_x = E_z = 0$  при  $y=0$  і  $y=b$ ). Щоб не визначати сталі інтегрування для кожної складової поля, скористаємося таким прийомом: запишемо вираз для поздовжньої складової поля у формі (3.48), а поперечні знайдемо із (3.49), при цьому можна обійтися без формулювання граничних умов для магнітного поля. Крім того, припущення про нескінченну довжину хвилеводу дозволяє розглядати лише падаючу хвилю. Деякі особливості  $E$ - і  $H$ -хвиль вимагають їхнього роздільного аналізу.

$H$ -хвилі ( $E_z = 0$ ). Запишемо вираз для амплітуди (хвильовий множник опускаємо) поздовжньої складової магнітного поля:  $\dot{H}_z = j \dot{H}_0 \cos(k_x x + j_x) \times \cos(k_y y + j_y)$ , підставляючи його в (3.49), отримуємо вираз для поперечних складових:

$$\dot{E}_x = - \frac{\dot{H}_0 k_y \omega \mu_0 \cos(k_x x + j_x) \sin(k_y y + j_y)}{(k^2 - K^2)},$$

$$\dot{E}_y = \frac{\dot{H}_0 k_x w m m_0 \sin(k_x x + j_x) \cos(k_y y + j_y)}{(k^2 - K^2)}, \quad (4.1)$$

$$\dot{H}_y = -\frac{\dot{H}_0 k_x K \sin(k_x x + j_x) \cos(k_y y + j_y)}{(k^2 - K^2)},$$

$$\dot{H}_x = -\frac{\dot{H}_0 k_y K \cos(k_x x + j_x) \sin(k_y y + j_y)}{(k^2 - K^2)}.$$

Вважаючи відповідно до граничних умов  $\dot{E}_y=0$  при  $x=0$  і  $x=a$ , одержуємо  $j_x=0$  і  $k_x=mp/a$ , де  $m=0, 1, 2, 3, \dots$ . На широких стінках хвилеводу  $\dot{E}_x=0$  ( $y=0$ ,  $y=b$ ) отримуємо  $j_y=0$  і  $k_y=np/b$ , де  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ . Визначення сталих інтегрування і сталих розподілу дозволяє одержати вираз для  $H$ -хвиль у явному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -\dot{H}_0 Z_{\ominus}^H \frac{k_y K}{k_x^2 + k_y^2} \cos\left(\frac{mp}{a} x\right) \sin\left(\frac{np}{b} y\right), \\ \dot{E}_y &= \dot{H}_0 Z_{\ominus}^H \frac{k_x K}{k_x^2 + k_y^2} \sin\left(\frac{mp}{a} x\right) \cos\left(\frac{np}{b} y\right), \\ \dot{H}_y &= -\dot{H}_0 \frac{k_y K}{k_x^2 + k_y^2} \cos\left(\frac{mp}{a} x\right) \sin\left(\frac{np}{b} y\right), \\ \dot{H}_x &= -\dot{H}_0 \frac{k_x K}{k_x^2 + k_y^2} \sin\left(\frac{mp}{a} x\right) \cos\left(\frac{np}{b} y\right), \\ \dot{H}_z &= j \dot{H}_0 \cos\left(\frac{mp}{a} x\right) \cos\left(\frac{np}{b} y\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Стала  $\dot{H}_0$  може бути визначена із початкових умов або, наприклад, при відомій потужності, яка передана по хвилеводу.

Дуже важливий результат отриманого розв'язку полягає в тому, що у хвилеводі можлива безліч різних типів (мод) хвиль, кожний із яких характеризується певною парою значень чисел  $m$ ,  $n$  і позначається  $H_{mn}$ . З виразів для компонентів полів легко усвідомити фізичний зміст цих чисел: вони показують кількість півхвиль, які укладаються вздовж широкої і вузької стінок хвилеводу відповідно. Числа  $m$  і  $n$  можуть незалежно набувати будь-яких цілих позитивних значень. Винятком є випадок одночасної рівності  $m=0$  і  $n=0$ , коли всі поперечні складові набувають нульових значень. Найпростішу конфігурацію полів мають типи хвиль із найменшими індексами. На рис. 4.8 зображений розподіл поздовжньої складової магнітного поля у поперечному перерізі для деяких типів хвиль. Штриховими лініями для хвилі  $H_{32}$  виділені «осередки», у яких розподіл поля має такий самий вигляд, як і для хвилі  $H_{11}$ .

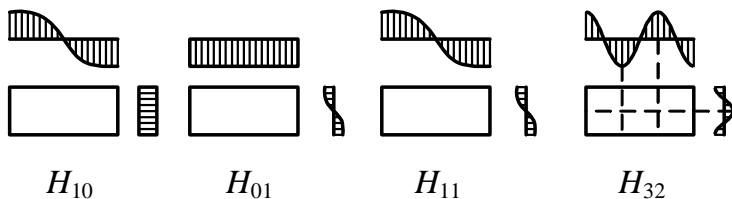


Рисунок 4.8 – Приклади розподілу полів для різних типів  $H$ -хвиль

Другий важливий результат полягає у тому, що визначення сталих  $k_x$  і  $k_y$  дозволяє з рівності  $k_x^2 + k_y^2 = k^2 - K^2$  в явному вигляді знайти критичну довжину хвилі, яка залежить від типу хвилі і розмірів хвилеводу:

$$I_{кр}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \quad (4.3).$$

*E*-хвилі ( $\dot{H}_z=0$ ). У цьому випадку зручно вибрати вираз для поздовжньої складової електричного поля у формі  $\dot{E}_z = j \dot{E}_0 \sin(k_x x + j_x) \sin(k_y y + j_y)$ . Такий вибір  $\dot{E}_z$  зручний тим, що використання граничних умов приводить до тих самих значень сталих інтегрування ( $j_x = j_y = 0$ ) і сталих розподілу ( $k_x = mp/a, k_y = np/b$ ). Остаточні вирази для складових поля після підставлення сталих набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_0 \frac{k_x K}{k_x^2 + k_y^2} \cos\left(\frac{mp}{a} x\right) \sin\left(\frac{np}{b} y\right), \\ \dot{E}_y &= \dot{E}_0 \frac{k_y K}{k_x^2 + k_y^2} \sin\left(\frac{mp}{a} x\right) \cos\left(\frac{np}{b} y\right), \\ \dot{H}_y &= \frac{\dot{E}_0}{Z_{\mathcal{O}}^E} \frac{k_x K}{k_x^2 + k_y^2} \cos\left(\frac{mp}{a} x\right) \sin\left(\frac{np}{b} y\right), \\ \dot{H}_x &= -\frac{\dot{E}_0}{Z_{\mathcal{O}}^E} \frac{k_y K}{k_x^2 + k_y^2} \sin\left(\frac{mp}{a} x\right) \cos\left(\frac{np}{b} y\right), \\ \dot{E}_z &= j \dot{E}_0 \sin\left(\frac{mp}{a} x\right) \sin\left(\frac{np}{b} y\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тут, як і для *H*-хвиль, можливо безліч мод, які позначаються  $E_{mn}$ . Істотна відмінність полягає лише у тому, що для *E*-хвиль неможливі нульові значення жодного з індексів *m* і *n*, тому що при цьому  $\dot{E}_z=0$ , а отже, дорівнюють нулю й усі інші складові поля.

На рис. 4.9 схематично зображено розподіл поздовжньої складової електричного поля вздовж широкої і вузької стінок хвилеводу. Найпростішим буде розподіл для хвилі  $E_{11}$ . Усі інші типи хвиль якісно повторюють розподіл  $E_{11}$   $m$  і  $n$  раз. Вирази для розрахунків критичної довжини хвилі  $E_{mn}$  такі ж, як і для хвиль  $H_{mn}$ .

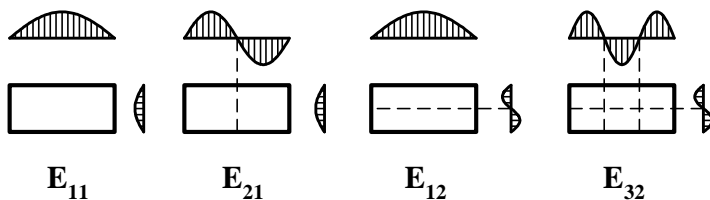


Рисунок 4.9 – Приклади розподілу полів для різних типів  $E$ -хвиль

На прикладі прямокутного хвилеводу, використовуючи отримані результати, можна проаналізувати деякі загальні закономірності поширення хвиль у хвилеводах і правила вибору його геометричних розмірів. Із ряду причин, зазначених у розділі 3 (див. приклад 3.4), хвилевід використовують, як правило, в так званому одномодовому режимі, тобто на тих частотах, на яких у хвилеводі може поширюватися лише один тип хвилі. Для знаходження цього діапазону розглянемо діаграму (рис. 4.10), на якій уздовж осі частот нанесені значення  $f_{кр}^{mn} = c / I_{кр}^{mn}$ , які можуть бути розраховані за значеннями  $I_{кр}^{mn}$  для різних індексів  $m$  і  $n$ . Найменше значення  $f_{кр}$  буде мати хвиля  $H_{10}$ . Усі інші типи хвиль мають більші значення  $f_{кр}$ , їх взаємне розміщення буде залежати від співвідношення розмірів хвилеводу  $a$  і  $b$  (див. рис. 4.7). Якщо  $a > 2b$ , то найближчим до  $f_{кр}^{10}$  буде  $f_{кр}^{20}$ , а якщо ні, то –  $f_{кр}^{01}$ .



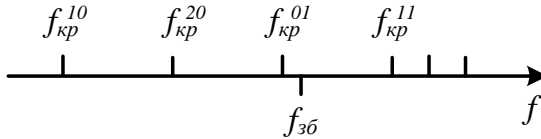


Рисунок 4.10 – Діаграма критичних частот  $H$ -хвилі в прямокутному хвилеводі

Зауважимо, що деякі типи хвиль мають однакові значення  $f_{кр}$  (наприклад,  $E_{11}$  і  $H_{11}$ ) – вони називаються *ви-родженими*.

Якщо збуджувати хвилевід на деякій частоті, позначеній на діаграмі  $f_{зб}$ , то у хвилеводі будуть поширюватись лише хвилі  $H_{10}$ ,  $H_{20}$ ,  $H_{01}$ , для яких виконується умова поширення  $f_{кр}^{mn} < f_{зб}$ . Для всіх інших хвиль буде режим відсічення. При зменшенні частоти збудження в режим відсічення будуть попадати хвилі  $H_{01}$ , потім  $H_{20}$  і останньою  $H_{10}$ . Звідси зрозуміло, що лише для хвилі  $H_{10}$  можна знайти діапазон частот, у якому вона може поширюватися без впливу інших хвиль. Тому хвиля  $H_{10}$  називається *основною*, а всі інші – *вищими*.

Діапазон одномодового режиму хвилеводу лежить у межах від  $f_{кр}$  основної хвилі до  $f_{кр}$  найближчого вищого типу хвилі. Використовуючи це правило, неважко розрахувати геометричні розміри  $a$  і  $b$  хвилеводу, який забезпечить передачу електромагнітних хвиль у заданому діапазоні частот. Слід пам'ятати, що реальний діапазон вужчий, ніж розглянутий, оскільки при використанні хвилеводу в режимі, близькому до критичного, суттєво збільшуються втрати енергії і загасання хвилі.

На закінчення, враховуючи особливе значення хвилі  $H_{10}$ , охарактеризуємо розподіл її полів. Аналітичні вирази

для складових поля легко отримати із загальних виразів (4.2) при  $m=1$ ,  $n=0$ :

$$\begin{aligned} \dot{E}_x = \dot{H}_y = \dot{E}_z = 0, \\ \dot{E}_y = H_0 Z_{xg} \left( \frac{2a}{l} \right) \sin \left( \frac{px}{a} \right), \\ \dot{H}_x = H_0 \left( \frac{2a}{l} \right) \sin \left( \frac{px}{a} \right), \\ \dot{H}_z = jH_0 \cos \left( \frac{px}{a} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

На рис. 4.11 зображена «фотографія» силових ліній електричного (суцільні лінії) і магнітного (штрихові лінії) полів, побудованих для фіксованого моменту часу при поширенні хвилі вздовж осі  $z$  (хвильовий множник  $e^{-jkz}$  опущений).

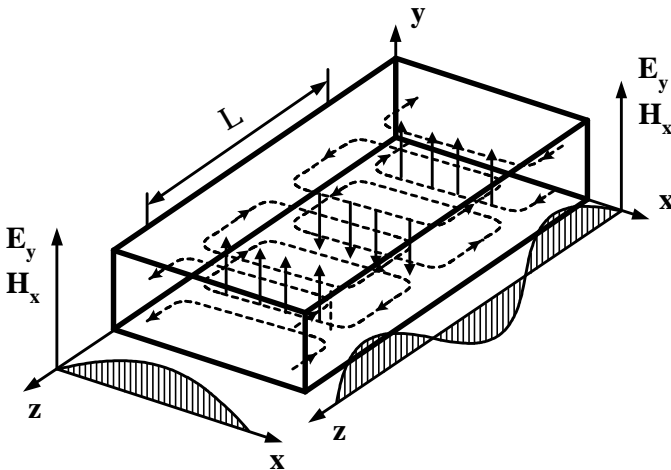


Рисунок 4.11 – Розподіл силових ліній полів для основного типу хвилі  $H_{10}$

Електричні силові лінії мають лише одну складову і «з'єднують» широкі стінки. Найбільше значення  $E_y$  має в центрі хвилеводу, а на бічних стінках зменшується до нуля. Магнітні силові лінії являють собою замкнені лінії, що лежать у площинах, паралельних широким стінкам. Важливою особливістю є те, що положення максимумів поперечних складових  $E$  і  $H$  полів збігається. У цих же точках має максимальне значення і поздовжня складова вектора Пойнтінга. Із часом вся картина поля переміщається вздовж осі  $z$  із фазовою швидкістю

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{2a}\right)^2}}.$$

При поширенні хвиль по хвилеводу на його стінках з'є поверхневий електричний струм, який пов'язаний з вектором напруженості магнітного поля співвідношенням  $\vec{i}_{\text{пов}} = \left[ \vec{H} \times \vec{n}^0 \right]$ , де  $\vec{n}^0$  – одинична нормаль до густини роз-

поділу  $\vec{H}$ . Звідси випливає, якщо відома картина розподілу силових ліній  $\vec{H}$  досліджуваної хвилі, то побудова ліній струму на стінках не викликає труднощів. Ці лінії утворюють сімейство кривих, ортогональне сімейству силових ліній магнітного поля (на рис. 4.11 лінії струму не показані). Очевидно, що лінії струму завжди повинні бути замкнені. У хвилеводі струми провідності на стінках замикаються за допомогою струмів зміщення, які формуються у внутрішньому просторі хвилеводу в напрямку осі  $y$ . В областях, де струми провідності близькі до нуля, струми зміщення набувають максимального значення. У результаті силові лінії повного струму замкнені. Розподіл струму по стінках хвилеводу важливо знати при конструюванні на його осно-

ві різних НВЧ-пристроїв, наприклад, вимірювальних ліній, антенних систем і т.д.

При наближенні частоти до критичного значення довжина хвилі у хвилеводі, тобто і період поля (див. рис. 4.11), зростає нескінченно, складова  $H_x \rightarrow 0$  і магнітне поле стають поздовжніми, а у всіх точках хвилеводу відбуваються синфазні коливання. Вектор Пойнтінга для такого режиму визначається тільки складовими  $E_y$ ,  $H_z$  і буде спрямований перпендикулярно до осі хвилеводу. Це означає, що передача енергії по хвилеводу не відбувається.

**Хвилеводи П- і Н-подібних перетинів.** Для передачі електромагнітної енергії високої частоти в ряді випадків використовуються хвилеводи П- (рис. 4.12 а) і Н-подібних (рис. 4.12 б) перетинів. Ці хвилеводи являють собою видозмінену конструкцію прямокутного хвилеводу. Їх можна розглядати як прямокутний хвилевід, у який уведено один або два поздовжні металеві гребені. Якщо поперечні розміри хвилеводів підібрати так, щоб смуга пропускання їх була тією ж, що і у прямокутному хвилеводі, то як П-, так і Н-хвилевід будуть мати менші габарити порівняно із прямокутним хвилеводом.

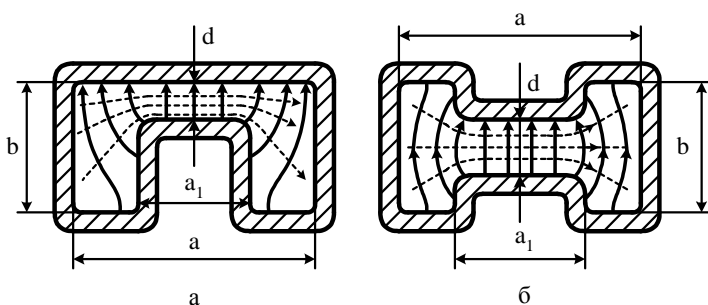


Рисунок 4.12 - Хвилеводи П- і Н-подібних перетинів

Основна хвиля описуваних хвилеводів є аналогом  $H_{10}$ -хвилі прямокутного хвилеводу. У цьому випадку поперечні електричні і магнітні поля концентруються переважно у вузькому зазорі шириною  $d$ . Поздовжній компонент  $\dot{H}_z$  відносно невеликий. Поле в зазорі близьке за структурою до поля  $T$ -хвилі, у якої  $f_{кр} = 0$  ( $I_{кр} = \infty$ ). Тому П- і Н-подібні хвилеводи мають більш низьку критичну частоту, ніж прямокутний хвилевід із такими самими габаритами.

Чим менша ширина зазору  $d$  (див. рис. 4.12), тем вища концентрація поля в зазорі і тим нижча  $f_{кр}$  основної хвилі. У той самий час вплив вузького ребра (як правило,  $a_1/a \leq 0,2-0,3$ ) на критичну частоту  $H_{20}$ -хвилі незначний, оскільки ребро вводиться у переріз, де напруженість електричного поля  $H_{20}$ -хвилі мала. Тому при  $a_1/a \leq 0,2-0,3$  смуга пропускання П- і Н-хвилеводів суттєво вище смуги пропускання прямокутного хвилеводу із тими ж розмірами  $a$  і  $b$ . Критична довжина хвилі основного типу розраховується за наближеною формулою  $I_{кр} \approx p \sqrt{\frac{(a-a_1)a_1b}{d}}$ . Не-

обхідно, однак, зауважити, що концентрація електричного поля у вузькому зазорі і збільшення поверхні стінок призводять до зниження електричної міцності і збільшення втрат у П- і Н-хвилеводах порівняно із прямокутними.

**Круглий хвилевід.** Даний хвилевід являє собою порожню нескінченно протяжну металеву трубку із внутрішнім радіусом  $R_0$  (рис. 4.2 а). Вихідні передумови в розглянутому випадку залишаються такими ж, як і при дослідженні прямокутного хвилеводу. При аналізі полів у круглому хвилеводі природно використовувати циліндричну систему координат  $r, \alpha, z$ , сполучаючи  $z$  з поздовжньою віссю хвилеводу.

Шляхом запису рівняння Гельмгольца (3.40) у циліндричній системі координат і розв'язання його методом розділення змінних, який використовувався вище для прямокутного хвилеводу, отримуємо вирази для проекції векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  [22], а також співвідношення для критичних частот і довжин хвиль:

$$\begin{aligned} \text{– для } E\text{-хвилі } f_{кр} &= \frac{v a_{mn}}{2p R_0}, I_{кр} = \frac{2p R_0}{a_{mn}}, \\ \text{– для } H\text{-хвилі } f_{кр} &= \frac{v b_{mn}}{2p R_0}, I_{кр} = \frac{2p R_0}{b_{mn}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де  $a_{mn}$  –  $n$ -й корінь функції Бесселя  $m$ -го порядку;

$b_{mn}$  –  $n$ -й корінь похідної функції Бесселя  $m$ -го порядку;

$m=0, 1, 2, \dots$  – кількість варіацій поля уздовж кола хвилеводу;

$n=0, 1, 2, \dots$  – кількість варіацій поля уздовж радіуса хвилеводу.

Коефіцієнти поширення  $E$ - і  $H$ -хвиль мають такий вигляд:

$$p_E = \sqrt{\left(\frac{a_{mn}}{R_0}\right)^2 - \left(\frac{2p}{I}\right)^2}, p_H = \sqrt{\left(\frac{b_{mn}}{R_0}\right)^2 - \left(\frac{2p}{I}\right)^2}. \quad (4.7)$$

Розрахунки довжини хвилі у хвилеводі, фазової і групової швидкостей і еквівалентних опорів круглого хвилеводу проводяться за формулами (3.43)-(3.46), (3.50), (3.51).

Надаючи різних значень індексам  $m$  і  $n$ , а також знаючи значення коренів функцій Бесселя і їх похідних, на підставі формул (4.6) можна отримати значення критичних довжин хвиль (критичних частот) типу  $E$  і  $H$ . Аналіз значень  $I_{кр}$  показує, що основною хвилею круглого хвилеводу є  $H_{11}$ -хвиля. Далі критичні довжини хвиль розміщуються в такій послідовності:

$$I_{кр}^{H_{11}} > I_{кр}^{E_{01}} > I_{кр}^{H_{21}} > I_{кр}^{H_{01}} = I_{кр}^{E_{11}} > I_{кр}^{H_{31}} > I_{кр}^{E_{21}} > \dots,$$

тобто із зростанням частоти за основною хвилею будуть поширюватися  $E_{01}$  - і  $H_{21}$ -хвилі і т.д. Відзначимо, що  $H_{0n}$  - і  $E_{1n}$  -хвилі круглого хвилеводу попарно вироджені.

Якщо вибрати  $I$  в межах  $2,61 R_0 < I < 3,41 R_0$ , то у круглому хвилеводі буде поширюватися тільки одна основна  $H_{11}$  -хвиля. Структура електричного і магнітного полів цієї хвилі у поперечному перерізі хвилеводу показана на рис. 4.13 а. Оскільки на поверхні хвилеводу є дві відмінні від нуля складові вектора напруженості магнітного поля  $H_a$  і  $H_z$ , їм відповідають складові струми провідності  $i_z$  та  $i_a$ . Розподіл сумарної густини струму наведений на рис. 4.13 б.

Очевидна подібність структури поля основних хвиль –  $H_{11}$  у круглому і  $H_{10}$  у прямокутному хвилеводах. У зв'язку з цим один із можливих способів збудження круглого хвилеводу – плавний перехід від прямокутного хвилеводу із  $H_{10}$  -хвилею до круглого (рис. 4.13 в).

Із усіх хвиль вищого типу найбільший інтерес становлять  $E_{01}$  - і  $H_{01}$ -хвилі. Нижчим типом серед  $E$  -хвиль є  $E_{01}$  -хвиля ( $I_{кр} = 2,61 R_0$ ). Вона містить компоненти  $E_z$ ,  $E_r$  і  $H_a$ . Поздовжня складова  $E_z$  досягає найбільших значень на осі хвилеводу. Структура поля хвилі  $E_{01}$  наведена на рис. 4.13 г. Поле хвилі має осьову симетрію, що використовується в ряді пристроїв НВЧ. Так, відрізки круглих хвилеводів з  $E_{01}$ -хвилею застосовуються в обертових з'єднаннях.

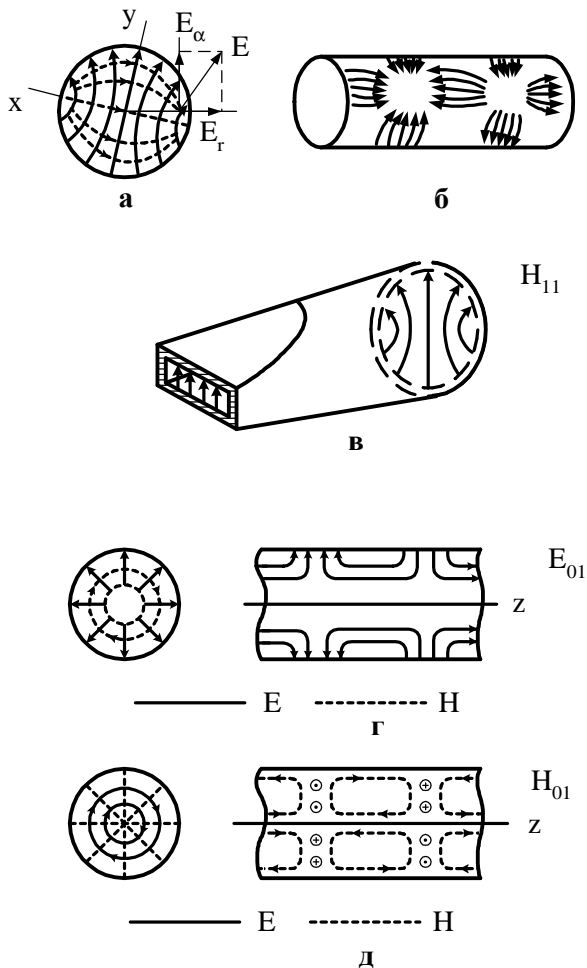


Рисунок 4.13 – Приклади структури поля і струмів для різних типів хвиль у круглому хвилеводі

Друга із названих хвиль –  $H_{01}$ -хвиля (рис. 4.13 д) – має складові  $H_z$ ,  $H_r$  і  $E_\alpha$ . У стінок хвилеводу при  $r = r_0$  відмінна від нуля лише одна складова поля  $H_z$ , тому на стін-



ках існують лише кільцеві струми  $i_a$ . Відсутність поздовжніх струмів робить  $H_{01}$ -хвилю мало чутливою до поперечних щілин. Можливий, наприклад, невеликий зазор між двома секціями хвилеводу.

**Хвилеводи складних перерізів.** При широкому використанні у техніці НВЧ традиційних хвилеводів прямокутного і круглого перерізів усе частіше застосовуються лінії передачі, які умовно назовемо хвилеводами складних перерізів. До них належать, наприклад, П- і Н-подібні хвилеводи, еліптичні, Г-подібні, секторальні, трикутні та ін. Порівняно із хвилеводами найпростіших перерізів вони мають більшу робочу смугу частот на основній хвилі, менші габарити і масу, більш низький хвильовий опір при малій дисперсії.

Із усіх перелічених вище охарактеризуємо стисло еліптичний хвилевід, який порівняно із круглим є більш загальним випадком циліндричних хвилеводів. При аналізі розглянутих хвилеводів використовується еліптична система координат, що зображує взаємно ортогональні сімейства співфокусних прямих еліптичних і гіперболічних циліндрів. В еліптичному хвилеводі можливе існування  $E$ - і  $H$ -хвиль, які, у свою чергу, поділяються на парні і непарні хвилі. Картини ліній поля хвилі в еліптичному і круглому хвилеводах аналогічні.

**Загальні принципи збудження хвилеводів.** Збудження хвилеводів здійснюється шляхом створення в ньому високочастотного електромагнітного поля. Розглянуті раніше вільні хвилі хвилеводу ( $E$ -,  $H$ - і  $T$ -хвилі) – це можливі поля за відсутності зовнішніх енергетичних зв'язків. Створені електромагнітні поля являють собою наслідок дії джерел. За певних умов вимушене поле у хвилеводі може бути дуже близьким за будовою до вільного поля того або іншого типу. Збудження хвилі заданого типу може бути здійснене такими способами:

– застосуванням збуджуючого пристрою, який створює в деякому перетині хвилеводу електричне поле, що збігається за напрямом електричних силових ліній з полем хвилі бажаного типу;

– використанням збуджуючого пристрою, який створює магнітне поле, що збігається за напрямом силових ліній з магнітним полем хвилі бажаного типу;

– застосуванням збуджуючого пристрою, що створює в стінках хвилеводу високочастотні струми, які за напрямком і розподілом на деякій ділянці хвилеводу збігаються зі струмами хвилі бажаного типу.

Відповідно збуджуючі пристрої можуть бути таких типів: *штирові*, *рамкові* (петля), *щілинні*. Для найбільш ефективного збудження полів штир потрібно розміщувати в місці, де напруженість електричного поля максимальна. Вісь

штиря повинна збігатися з напрямом вектора  $\vec{E}$ . Пристрої у вигляді рамки розміщують у місці, де напруженість магнітного поля у хвилеводі максимальна, причому площа рамки повинна бути перпендикулярна до  $\vec{H}$ . Для збудження у хвилеводі поля необхідного типу за допомогою щілинного пристрою щілини у хвилеводі необхідно прорізати перпендикулярно до силових ліній струму. Зовнішнім джерелом на щілині створюється електричне поле із силовими лініями, які продовжують силові лінії струму. Умови й способи збудження легко пояснити на підставі принципу взаємності, згідно з яким конструкції для збудження і введення енергії повинні бути однакові.

На рис. 4.14 наведено приклад збудження  $H_{10}$ -хвилі в прямокутному хвилеводі за допомогою штиря та петлі. Конструктивно штир (петля) є продовженням внутрішнього дроту коаксіальної лінії, приєднаного з іншого боку до генератора.

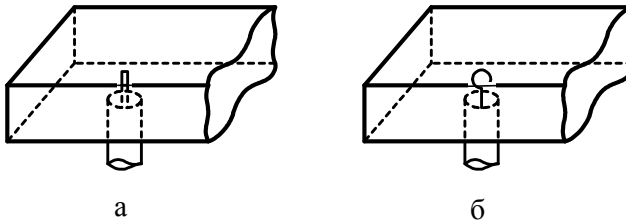


Рисунок 4.14 – Приклади збудження  $H$ -хвилі в прямокутному хвилеводі

Як правило, хвилевід на одному кінці закритий провідною стінкою, завдяки чому передача енергії відбувається тільки в один бік.

Введення елемента збудження призводить до порушення регулярності хвилеводу. Поле у хвилеводі у цьому випадку повинне задовольняти граничні умови не тільки на стінках хвилеводу, але й на поверхні елемента збудження. Очевидно, що поле одного типу задовольнити граничні умови не може. Лише сукупність безлічі хвиль, що утворюють результуюче поле складної конфігурації, задовольняє граничні умови. Які із хвиль поширюються по хвилеводу - залежить від співвідношення між  $I$  і  $I_{кр}$  для розглянутого типу хвилі. Усі хвилі, для яких  $I > I_{кр}$ , загасують поблизу джерела збудження. Отже, у близькій зоні від збуджуючого пристрою поле завжди має складну структуру і не відповідає полю хвилі якого-небудь одного типу. У дальній зоні за рахунок вибору розмірів хвилеводу всі небажані типи хвиль відсутні.

У випадках, коли у хвилеводі збуджуються хвилі, що мають не найменші критичні частоти, необхідно вживати спеціальних заходів, що виключають появу інших типів хвиль. Наприклад, для збудження  $H_{20}$ -хвилі штирі зі струмами повинні бути розміщені таким чином, щоб вони яв-

ляли собою взаємні електричні зображення відносно вертикальної площини, яка проходить посередині поперечного перерізу хвилеводу. При виконанні цієї умови поля  $H_{10}$ -хвилі, які створюють штирі, будуть взаємно знищуватися.

#### 4.4 Хвилеводи повільних хвиль (сповільнювальні системи)

Раніше були розглянуті спрямовувальні системи, у яких можуть поширюватися електричні і магнітні хвилі з фазовою швидкістю, більшою за швидкість світла у середовищі, яке заповнює систему. Подібні лінії передачі називають також *хвилеводами швидких хвиль*. Поряд із ними у техніці НВЧ широко застосовуються лінії передачі, у яких фазова швидкість хвилі менше швидкості світла. Такі лінії називають *сповільнювальними системами*, або *хвилеводами повільних хвиль*.

Характерною рисою сповільнювальної системи є те, що вона складається принаймні із двох різнорідних шарів. Електромагнітна хвиля поширюється уздовж границі поділу середовищ. Її фазова швидкість задовольняє нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{a2} m_{a2}}} < v_{\phi} < \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{a1} m_{a1}}}.$$

Отже,  $v_{\phi}$  менша за швидкість світла в оптично менш щільному середовищі.

Відзначимо також, що напруженість поля хвилі у середовищі із параметрами  $\epsilon_{a1}$ ,  $m_{a1}$  убуває при віддаленні від граничної поверхні. Основна частина енергії у даному середовищі переноситься вздовж границі поділу середовищ, яку називають сповільнювальною поверхнею. При цьому чим менша  $v_{\phi}$  хвилі (більше сповільнення), тим сильніше її поле концентрується поблизу *сповільнювальної поверхні*.

Такий поверхневий характер електромагнітної хвилі обумовив її іншу назву – *поверхнева хвиля*.

Вираз для фазової швидкості поверхневої хвилі неважко отримати, використовуючи співвідношення, розглянуті у загальній теорії регулярних хвилеводів (див. розділ 3). Як було показано вище,  $v_\phi = w/b$ , де  $b = \sqrt{k^2 - K^2}$ . Для по-вільної хвилі  $v_\phi$  менше швидкості світла у середовищі. Це можливо, якщо  $K$  – число уявне:  $K = jp$ .

Тоді  $b = \sqrt{k^2 + p^2}$ , а вираз для  $v_\phi$  можна звести до вигляду

$$v_\phi = \frac{v_1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{w^2 e_{a1} m_{a1}}}}, \quad (4.8)$$

де  $v_1$  – швидкість хвилі у першому середовищі.

При визначенні групової швидкості необхідно користуватися загальним виразом  $v_{gp} = dw/db$  із урахуванням того, що коефіцієнт поширення  $p$  для сповільнювальних систем є функцією частоти. Неважко показати, що

$$v_{gp} = \frac{\sqrt{w^2 e_{a1} m_{a1} + p^2}}{w e_{a1} m_{a1} + p \left( \frac{dp}{dw} \right)}. \quad (4.9)$$

Знаючи закон зміни  $p$  для конкретної сповільнювальної системи, можна знайти  $v_{gp}$ .

Визначення величини  $p$  базується на розв'язанні електродинамічної задачі поширення електромагнітного поля, яке зображує єдиний хвильовий процес як у першому, так і у другому середовищі. При цьому двовимірне хвильове рівняння (3.42) для одного середовища зберігає свій вигляд.

Для іншого середовища із урахуванням того, що  $K$  – уявне число, отримаємо

$$\nabla_{x,y}^2 F(x, y) - p^2 F(x, y) = 0. \quad (4.10)$$

Характер залежності електромагнітного поля від координати  $z$  описується рівняннями типу (3.12), розв'язок яких має вигляд (3.15). Вирази для компонентів полів можуть бути отримані зі співвідношень (3.49).

Одним із важливих параметрів, які характеризують поверхневу хвилю, є *поверхневий опір*, що дорівнює відношенню дотичних складових електричного і магнітного полів на границі поділу середовищ:  $Z_s = E_t / H_t$ . Якщо границя поділу виконана з ідеально провідного матеріалу, то поверхневий опір перетворюється в нуль. Аналіз складових вектора  $\vec{E}$  для повільної хвилі показує, що тангенціальна складова електричного поля не може обертатися в нуль одночасно на всіх граничних поверхнях, які утворюють лінію передачі з уповільненою хвилею. Одержати скінченну величину дотичної складової електричного поля можна за умови, якщо поверхневий опір відмінний від нуля, тобто границя поділу двох середовищ повинна являти собою імпедансну поверхню, яка має розподілений індуктивний або ємнісний опір, або якщо втрати припустимі – розподілений активний опір. У випадку  $E$ -хвиль поверхневий опір має індуктивний характер. Поверхневий опір, необхідний для існування  $H$ -хвиль, має ємнісний характер.

Створення реактивного поверхневого опору можливо декількома способами. Один із них – покриття гладкої металевої поверхні шаром діелектрика. Сповільнювальні системи такого типу називають *гладкими*. Другий спосіб – розміщення уздовж спрямовувальної металевої поверхні періодичних неоднорідностей, які не поглинають потужність. Подібні сповільнювальні системи називають *пері-*

*одичними*. Зауважимо, що періодичні сповільнювальні системи ділять на *однорідні*, коли період або крок системи набагато менше довжини хвилі, та *неоднорідні*, коли ця умова не виконується.

Іноді сповільнювальні системи класифікують за формою сповільнювальної поверхні. У такому випадку розрізняють циліндричні, плоскі, конічні, кільцеві та інші сповільнювальні системи.

**Діелектрична пластина.** Розгляд конкретних типів сповільнювальних систем почнемо із найпростішого прикладу – плоскої діелектричної пластини із параметрами  $\epsilon_{a2}$ ,  $m_{a2}$ , товщиною  $2d$  (рис. 4.15), яка перебуває у однорідному середовищі з параметрами  $\epsilon_{a1}$ ,  $m_{a1}$ . Для спрощення будемо вважати, що пластина не обмежена уздовж осей  $y$ ,  $z$  і збуджується джерелом, однорідним уздовж осі  $y$ . При впливі такого джерела збуджуване електромагнітне поле не залежить від  $y$ . Нескінченно протяжна пластина являє собою ідеалізацію реального плоского діелектричного хвилеводу, що суттєво спрощує аналіз і дозволяє наочно простежити процеси, характерні для хвилеводів повільних хвиль.

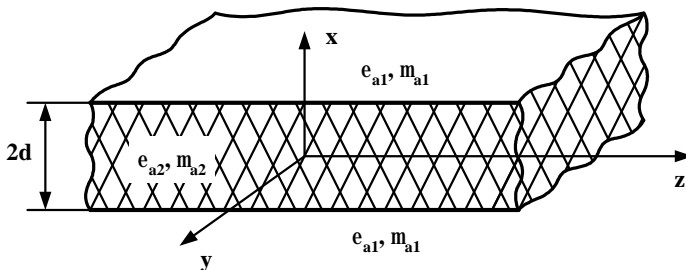


Рисунок 4.15 – Спрощена модель прямокутного діелектричного хвилеводу – діелектрична пластина

Електромагнітне поле хвилі, що поширюється у пластині, можна знайти в результаті розв'язання двовимірного рівняння Гельмгольца (3.42), яке у зв'язку із прийнятим припущенням про незалежність поля від координати  $y$  набуде вигляду  $(d^2F/dx^2) + K^2F = 0$ , а поле поза пластиною знаходиться із рівняння (4.10). Детальне розв'язання даних рівнянь і їх аналіз наведені в [24], де показано, що в діелектричній пластині, як і у прямокутному хвилеводі, можлива присутність  $E_{m0}$  - і  $H_{m0}$ -хвиль, які, у свою чергу, поділяються на парні ( $m=2, 4, 6, \dots$ ) і непарні ( $m=1, 3, 5, \dots$ ) хвилі. У розглянутій системі індекс  $n=0$ , що пов'язано із положенням про незалежність полів по координаті  $y$ . При цьому  $E$  - і  $H$ -хвилі визначають повний набір хвиль, які спрямовуються у плоскому діелектричному хвилеводі. У реальних хвилеводах, розміри яких обмежені по осі  $y$ , поля залежать від координати  $y$ . У цьому випадку з'являються змішані типи хвиль, які містять усі шість компонентів полів.

Значення критичної колової частоти (для заданих параметрів пластини), починаючи з якого можливе існування хвилі заданого типу, визначається співвідношенням

$$w_{kp} = \frac{mp}{2d\sqrt{e_{a2}m_{a2} - e_{a1}m_{a1}}}. \quad (4.11)$$

Очевидна деяка аналогія між діелектричною пластиною і хвилеводом швидких хвиль. Однак вона умовна, оскільки при критичних частотах у випадку пластини фазова швидкість дорівнює швидкості  $v_1$ , а у хвилеводі  $v_\phi \rightarrow \infty$ . Інша відмінність полягає у тому, що при частоті нижче критичної в діелектричній пластині відповідного типу хвиль взагалі не виникає, а у хвилеводі швидких хвиль вони існують, але загасають.

Співвідношення (4.11) можна подати у вигляді



$$d_{кр} = \frac{ml}{4\sqrt{e_2 m_2 - e_1 m_1}}.$$

Значення  $2d_{кр}$  визначають товщину пластини, при якій виникають вищі типи хвиль.

Для  $E_{00}$ -хвилі  $w_{кр}=0$ . Однак сказане не означає, що діелектрична пластина може бути використана як хвилеводна система на яких завгодно частотах, оскільки для малих значень частоти коефіцієнт поширення  $p \rightarrow 0$  і поверхнева хвиля зникає.

Таким чином, для всіх типів поверхневих хвиль їх фазові швидкості **менші** від фазової швидкості хвилі, що поширюється в необмеженому просторі із параметрами  $e_{a1}$ ,  $m_{a1}$  і **більші** від фазової швидкості хвилі, що поширюється у необмеженому просторі із параметрами  $e_{a2}$ ,  $m_{a2}$ . Поверхневі хвилі стосовно першого середовища є повільними. Один із параметрів, який характеризує їх, – *коефіцієнт сповільнення*  $k_c = v_1 / v_\phi$ , дорівнює відношенню швидкості хвилі у першому середовищі до фазової швидкості даної хвилі.

Поряд із  $k_c$  при аналізі поверхневих хвиль використовується поняття поверхневого опору, який у цьому випадку має такий вигляд [22]:

$$Z_s = \frac{\dot{E}_{z1}}{\dot{H}_{y1}|_{x=d}} = j \frac{p}{we_{a1}}. \quad (4.12)$$

Очевидно, що  $Z_s$  – величина реактивна і має індуктивний характер.

Фізичний зміст явищ у вивчених хвилевідних системах стає очевидним, якщо електромагнітне поле в них розклас-

ти на плоскі хвилі так, як для прямокутного хвилеводу (див. рис. 3.6).

Тоді поле усередині діелектричного хвилеводу є сумою двох плоских хвиль, які на границі поділу середовищ випробовують повне внутрішнє відбиття [19], завдяки чому значна частина електромагнітної енергії зберігається в межах діелектрика. Поле у просторі навколо діелектрика виникає завдяки просочуванню енергії в інше середовище, причому поле, яке просочується, – експоненціально згасає при віддаленні від границі поділу. При частотах, які значно перевищують  $w_{кр}$ , плоскі хвилі поширюються майже вздовж осі  $z$ .

**Круглий діелектричний хвилевід (ДХ).** Для електромагнітних хвиль, які поширюються вздовж діелектричного циліндра радіусом  $R = R_0$  (рис. 4.16), характерні ті самі закономірності, що і у випадку діелектричної пластини. При дослідженні полів слід використовувати також двовимірне хвильове рівняння Гельмгольца, записане у циліндричній системі координат.

Критична частота круглого хвилеводу визначається таким співвідношенням [24]:

$$w_{кр} = \frac{a_{0n}}{R_0 \sqrt{e_{a2} m_{a2} - e_{a1} m_{a1}}}, \quad (4.13)$$

де  $a_{0n}$  – корені функції Бесселя.

При критичній частоті  $b = w \sqrt{e_{a1} m_{a1}}$  фазова швидкість дорівнює фазовій швидкості у необмеженому просторі із параметрами  $e_{a1}$ ,  $m_{a1}$ . Хвиля буде поширюватися по хвилеводу, якщо частота коливань  $w > w_{кр}$ . При  $w \rightarrow \infty$  фазова швидкість збігається зі швидкістю поширення хвилі в просторі із параметрами  $e_{a2}$ ,  $m_{a2}$ . При великих частотах компоненти поля у зовнішньому просторі швидко загасають у

радіальному напрямку. Енергія поля виявляється зосередженою, головним чином, усередині хвилеводу.

Аналогічні властивості мають симетричні  $H$ -хвилі. Фазова швидкість усіх хвиль знаходиться в інтервалі  $[1/\sqrt{\epsilon_{a_2} m_{a_2}}, 1/\sqrt{\epsilon_{a_1} m_{a_1}}]$ . Також зберігається і загальний характер зміни поля при зростанні частоти від критичної до значень  $w \rightarrow \infty$ .

Серед несиметричних хвиль основна хвиля діелектричного хвилеводу –  $HE_{11}$ -хвиля – не має критичної частоти ( $w_{кр} = 0$ ). Структура поля цієї хвилі показана на рис. 4.16.

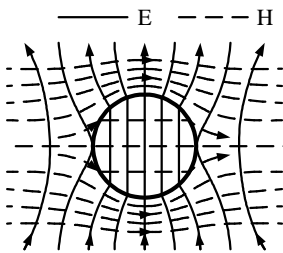


Рисунок 4.16 – Структура поля основного типу хвилі у круглому діелектричному хвилеводі

Усередині діелектричного стрижня структура поля нагадує  $H_{11}$ -хвилю круглого металевого хвилеводу (див. рис. 4.13). Структура поля  $HE_{11}$ -хвилі поза хвилеводом у міру зменшення частоти усе більше наближається до структури поля поперечної електромагнітної хвилі вільного простору, яка поширюється практично без прямого впливу з боку діелектрика. У хвилеводі  $HE_{11}$ -хвиля може бути єдиною, саме це є перевагою порівняно із симетричними хвилями. Крім того, для симетричних хвиль, як показують розрахунки, невеликі зміни діаметра хвилеводу приводять до різкого збільшення втрат. Для несиметричної хвилі таких різких змін не відбувається. Однак в  $HE_{11}$ -хвилі є істотний недолік – поляризаційна нестійкість. Для її усунення переходять від круглого до еліптичного або прямокутного (рис. 4.2 в) перерізу або використовують дзеркальний ДХ. У цьому випадку діелектричний стрижень напівкруглого

перерізу розміщений на металевій пластині. Недоліком такого хвилеводу є підвищене загасання хвилі через додаткові втрати у металі. Конструктивно діелектричні дзеркальні хвилеводи дуже прості та технологічні, вони можуть бути виготовлені шляхом напилювання діелектрика на металеву стрічку.

Широкого застосування круглий ДХ набув як спрямовувальна частина діелектричної антени. Можливе також використання діелектричних хвилеводів, які працюють у однохвильовому режимі як лінії передачі невеликої довжини міліметрового і субміліметрового діапазонів. Досить перспективне застосування ДХ у оптичному діапазоні.

**Волоконні світловоди.** Світловодні лінії передачі призначені для каналізації електромагнітної енергії у оптичному діапазоні довжин хвиль. Вони можуть бути використані при передачі світлових сигналів на відстань від декількох міліметрів, наприклад, у логічних елементах інтегральних мікросхем, до десятків кілометрів – у системах оптичного дальнього зв'язку. Перспективність оптичних ліній обумовлена можливістю передачі великої кількості інформації при малих витратах енергії. Основою для побудови оптичної лінії передачі є волоконні світловоди. Такі хвилеводи являють собою одно- (рис. 4.17 а), дво- (рис. 4.17 б) або тришарове (рис. 4.17 в) скляне волокно, яке об'єднують у джгути.

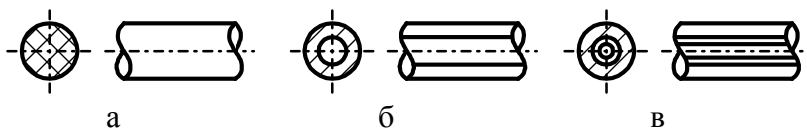


Рисунок 4.17 – Основні типи волоконних світловодів

При тісному укладанні світлових волокон у джгуті за певних умов внаслідок порушення явища повного внутрі-

шнього відбиття частина світлової енергії може переходити із одного волокна в інше. Це приводить до викривлення переданого сигналу. Для запобігання просочуванню енергії з одного волокна в інші кожне волокно джгута світлоізолюють, покриваючи оболонкою із оптично прозорого матеріалу з меншим значенням показника заломлення порівняно із показником заломлення матеріалу сердечника. Оболонки виготовляють також з напівпрозорого або поглинаючого світло матеріалу.

Світловод у вигляді джгута покривають зовнішньою оболонкою для захисту від впливу зовнішніх впливів.

При розгляді властивостей волоконних світловодів можна користуватися методами геометричної оптики, у рамках якої поширення електромагнітної енергії у світловоді відбувається за рахунок відбиття променів від границі поділу сердечник-оболонка. Повне внутрішнє відбиття відбувається завдяки тому, що сердечник хвилеводу виготовляють із діелектричного матеріалу з більш високим показником заломлення, ніж матеріал оболонки.

Для оптичних хвилеводів характерний не тільки однохвильовий (одномодовий), але і багатохвильовий (багатомодовий) режими роботи. Одномодове передавання, при якому викривлення переданих сигналів значно менше порівняно із багатомодовим, можливо тоді, коли діаметр сердечника волокна близький до довжини хвилі, що поширюється у хвилеводі. Однак виготовлення таких надтонких оптичних волокон і оптичних кабелів на їхній основі викликає значні труднощі внаслідок малої механічної міцності. Утрудняються також умови стикування, збудження і приймання сигналів через малу площу поперечного перерізу волокна.

Можливе використання волокон таких типів, які дозволяють здійснювати одномодовий режим роботи при діаметрі сердечника, який перевищує довжину хвилі елект-

ромагнітного поля. При цьому загасання вищих типів хвиль за рахунок поглинання повинно бути значно більше, ніж загасання основної хвилі.

У випадку одномодового режиму передавання як джерела випромінювання застосовуються монохроматичні лазери. Якщо джерело некогерентне, доцільно використовувати волоконний світловод, який працює у багатомодовому режимі.

Поширення хвиль по оптичному хвилеводу можливо у певному діапазоні частот – приблизно у смузі  $10^{14} - 10^{15}$  Гц. Ширина робочої смуги частот залежить, головним чином, від фазової та групової швидкостей мод та їх спектрального складу.

**Періодичні сповільнювальні системи (ПСС).** Поряд із гладкими сповільнювальними системами в антенній техніці та електроніці НВЧ широко застосовуються *періодичні сповільнювальні системи*, які складаються із повторюваних структурних елементів (рис. 4.18).

Хвильові процеси в періодичних системах мають свої відмінні риси. Наявність уздовж осі системи періодичних неоднорідностей спричиняє періодичний характер залежності поля уповільненої хвилі від координати  $z$  і можливість зображення поля у вигляді суми так званих просторових гармонік. Кожній просторовій гармоніці властива власна фазова швидкість поширення [25]:

$$v_{\phi n} = \frac{w}{b_n} = \frac{w}{\left(b + \frac{2p}{L_n}\right)}, \quad (4.13)$$

де  $n$  – номер гармоніки (будь-яке ціле число);

$L_n$  – просторовий період системи (див. рис. 4.18).

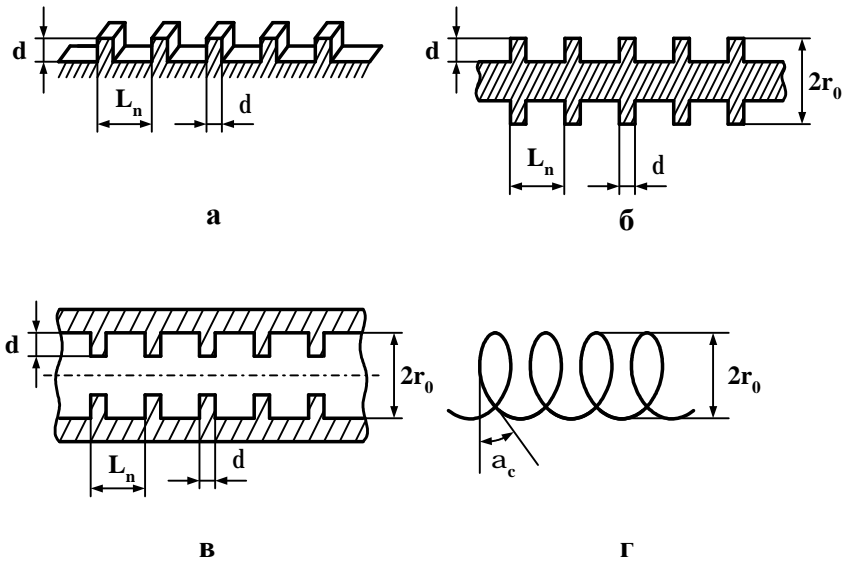


Рисунок 4.18 – Основні типи періодичних сповільнювальних систем: а – гребінчаста; б – гофрований циліндр; в – діафрагмований хвилевід; г – спіральний хвилевід

Відповідно до (4.13) фазові швидкості гармонік можуть бути позитивними і негативними. Таким чином, хвильовий процес у періодичній системі подається у вигляді сукупності прямих ( $v_\phi > 0$ ) і зворотних ( $v_\phi < 0$ ) хвиль (гармонік). Чим більше  $|n|$ , тим менше  $|v_{\phi n}|$ , тобто гармоніка уповільнена сильніше. Гармоніку, яка має найбільшу фазову швидкість, називають *основною хвилею*, що звичайно відповідає випадку  $n=0$ . На практиці, як правило, у сповільнювальних системах використовуються гармоніки із  $n=0, -1, +1$ . Групова швидкість для всіх просторових гармонік однакова і не залежить від номера  $n$ :

$$v_{zpn} = 1 / (db_n / dw) = 1 / (db / dw) = v_{zp}.$$

Це пояснюється тим, що просторові гармоніки незалежно один від одного не існують, оскільки кожна гармоніка окремо не задовольняє граничні умови. Вздовж сповільнювальної системи поширюється єдиний хвильовий процес, який обумовлює перенесення енергії.

Вибором періоду  $L_n$  та інших геометричних параметрів сповільнювальної системи відносно довжини хвилі можна зробити амплітуду якоїсь однієї гармоніки такою, що вона буде переважати над іншими. Такі гармоніки називають *резонуючими*.

Існує велика кількість хвильових систем, які працюють на поверхневих повільних хвилях, що являють собою ту або іншу металеву структуру, періодичну вздовж осі поширення. Розглянемо найпростішу із них – *гребінчасту* структуру (див. рис. 4.18 а). Якщо електричні струми, які проходять по поверхні металу гребінчастого хвилеводу орієнтовані уздовж осі  $z$ , то за рахунок канавок у структурі їх шлях подовжується порівняно із відстанню уздовж осі  $z$ . За певних умов це приводить до уповільнення фазової швидкості електромагнітного поля, яке поширюється уздовж осі  $z$ . Такі електричні струми можуть бути створені тільки магнітним полем, що містяться у площині, перпендикулярній до напрямку орієнтації струмів, тобто у площині  $xu$ . Отже, вони можуть бути створені тільки хвилею електричного типу. При  $d \ll l$  гребінка, по суті, аналогічна діелектричному шару на ідеально провідній площині.

Викладений вище якісний опис фізичних процесів, які відбуваються при сповільненні хвилі, певною мірою належить також до періодичної системи типу «металевий циліндр із гофрованою поверхнею» (рис. 4.18 б) і «діафрагмований хвилевід» (рис. 4.18 в). Дані ПСС широко застосовуються в електронних приладах НВЧ з біжучою хвилею



[26], у лінійних прискорювачах, у яких повільна хвиля взаємодіє з пучком електронів.

Однією із найпростіших за конструкцією ПСС є *спіральний хвилевід* (рис. 4.18 г), утворений металевим дротом або стрічкою, намотаною з радіусом  $R_0$  і кутом намотування  $\alpha_c$ . Подібні хвилеводи широко використовуються в приладах НВЧ та антенних пристроях [18].

Поряд зі сповільнювальною системою у вигляді одиначної спіралі застосовуються й інші типи спіральних систем, такі, як двозахідна (біспіраль) і багатозахідна спіралі; спіраль усередині круглого металевого хвилеводу; із коаксіальним внутрішнім провідником; спіраль, поміщена в магнітодіелектричне середовище, та ін.

Докладний аналіз і характеристики наведених вище ПСС описані в роботах [19, 21, 25].

#### 4.5 Об'ємні резонатори

На низьких частотах як коливальна система використовується коливальний контур, що складається із зосереджених індуктивності  $L$  і ємності  $C$ . Коливальний процес у такій системі являє собою обмін енергією між електричним і магнітним полями. Запас електричної енергії створюється у конденсаторі, запас магнітної енергії – у котушці індуктивності. Розміри коливальної системи малі порівняно із довжиною хвилі.

У діапазоні НВЧ коливальні контури із зосереджених елементів виявилися непридатними. Із збільшенням частоти розміри коливального контуру стають порівнянними із довжиною хвилі. У результаті контур починає інтенсивно випромінювати електромагнітну енергію в навколишній простір. У такій системі стає неможливим накопичення енергії. Вона втрачає свої резонансні властивості, у зв'язку з чим у діапазоні дециметрових та більш коротких хвиль

застосовують коливальні системи із елементів з розподіленими параметрами. У цьому випадку енергія системи залишається в межах обмеженого об'єму. Можливість побудови таких систем впливає із рівнянь Максвелла. Як відзначалося у розділі 3, змінне електричне поле є джерелом змінного магнітного поля, а змінне магнітне поле, у свою чергу, збуджує змінне електричне поле і т.д. Таким чином, обмін енергією між електричним і магнітним полями відбувається безупинно в будь-якій області простору. Якщо усунути випромінювання електромагнітних хвиль із деякої області простору та добитися відсутності теплових втрат, то обмін енергією буде проходити як завгодно довго. Отже, в ізольованому від зовнішнього простору об'ємі, заповненому середовищем без втрат, можливий незатухаючий коливальний процес.

Подібні системи одержали назву *об'ємних резонаторів*. Найпростіший об'ємний резонатор являє собою діелектричний об'єм, обмежений замкненою металевою поверхнею. Резонатори такого типу називають *закритими*. Застосовуються закриті резонатори в діапазоні сантиметрових і дециметрових хвиль як вибірккові системи у підсилювачах, генераторах, вимірниках частоти, використовуються для побудови частотних фільтрів.

У міліметровому, субміліметровому і оптичному діапазонах, де довжина хвилі набагато менша за розміри резонатора, застосовуються так звані *відкриті резонатори*. У них відсутня замкнена металева оболонка. У найпростішому випадку відкритий резонатор – це система із двох конфронтуючих дзеркал, що взаємно відбивають електромагнітні хвилі.

Приклади переходу від звичайного коливального контуру до деяких найпоширеніших типів об'ємних резонаторів показані на рис. 4.19.

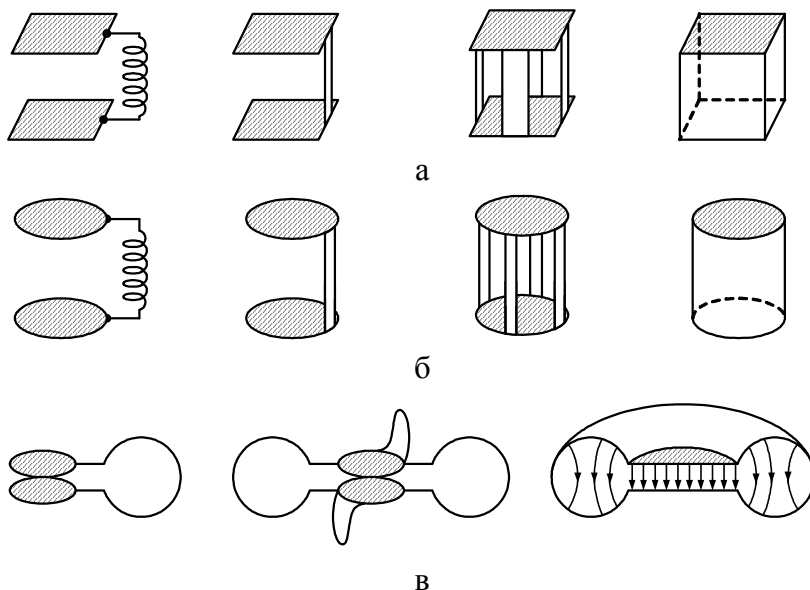


Рисунок 4.19 – Переходи від звичайного контура до об'ємного резонатора: а – прямокутного; б – циліндричного; в – торіодального

При підключенні великої кількості паралельних витків до конденсатора утворюється суцільна замкнена порожнина, тобто об'ємний резонатор, усередині якого відбуваються коливання. Власна частота такого резонатора визначається його еквівалентними ємністю та індуктивністю. Залежно від форми конденсатора і під'єднаних витків можна одержати різні форми об'ємних резонаторів.

Об'ємні резонатори застосовуються на сантиметрових хвилях у магнетронних та клістронних генераторах, у спеціальних тріодних генераторах, в антенних перемикачах, хвилемірах і т.д.

Переваги об'ємного резонатора – малі втрати енергії і висока добротність ( $Q \approx 10^4$ ), повне екранування і відсутність внаслідок цього напруги і струмів на зовнішній по-

верхні, жорсткість конструкції, її міцність і невеликі розміри.

**Квазістаціонарні резонатори.** Звичайно коливальні контури, які складаються із конденсаторів і котушок, є квазістаціонарними системами (див. п. 2.1). Квазістаціонарні системи характеризуються тим, що розміри їх малі порівняно із довжиною хвилі, а електричні і магнітні поля майже розділені в просторі. Велика кількість порожніх резонаторів, які застосовуються в техніці НВЧ, належить до квазістаціонарних об'ємних резонаторів. Ці резонатори не є відрізками хвилеводів і для їх розрахунків потрібні спеціальні методи.

До квазістаціонарних резонаторів належить, наприклад, тороїдальний резонатор, показаний на рис. 4.19 в, а також низка інших резонаторів [19, 21]. Характерна риса цих резонаторів – наявність у них ділянки, обмеженої двома металевими поверхнями, відстань між якими мала порівняно із довжиною хвилі. На цій ділянці сконцентроване майже все електричне поле резонатора, тому дана ділянка називається *конденсаторною*. Електричне поле в інших ділянках майже відсутнє. Магнітним полем у конденсаторній ділянці можна знехтувати. Магнітне і електричне поля квазістаціонарного резонатора майже розділені у просторі, цим він подібний до звичайного коливального контуру. Коливання найпростішого типу в такому резонаторі можна уявити собі як періодичне перерозрядження конденсаторної частини через бічну поверхню (індуктивність).

Резонансна довжина хвилі квазістаціонарних резонаторів значно перевищує їхні геометричні розміри. Із цієї причини такі резонатори широко застосовуються у техніці НВЧ. Вони зручні для застосування в магнетронних і клістронних генераторах [18, 26], а також тим, що в конденсаторних ділянках або на їхній границі можлива ефективна взаємодія поля резонатора з електронним потоком.

Квазістаціонарні резонатори настроюються зміною їх еквівалентної ємності або еквівалентної індуктивності, тобто зміною розмірів конденсаторної або індуктивної частини.

**Прямокутний резонатор.** У прямокутному резонаторі (рис. 4.20) можуть існувати коливання різних типів, які відрізняються один від одного розподілом полів і частотою. Кожний тип коливань має свою резонансну частоту. Отже, об'ємному резонатору властива безліч резонансних частот. У цьому легко переконатися, зобразивши резонатор як відрізок хвилеводу, закритий по обидва боки металевими стінками. Припустимо, що у прямокутному хвилеводі поширюються хвилі певного типу.

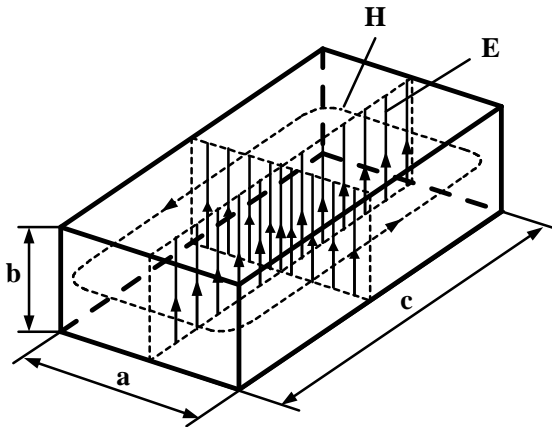


Рисунок 4.20 – Прямокутний резонатор

Якщо такий хвилевід закрити на протилежному від збудника кінці металевією стінкою, то енергія падаючих хвиль не буде поглинатися – вона буде відбиватися. У результаті додавання падаючих і відбитих хвиль утворюються стоячі хвилі (див. п. 3.5). На закороченому кінці буде вузол електричного та пучність магнітного полів. Вузли

електричного та пучності магнітного полів утворюються уздовж хвилеводу через кожену половину хвилі від закороченого кінця. У вузлах електричного поля можна поставити металеві стінки, і це не змінить розподілу електромагнітного поля стоячих хвиль (втратами можна знехтувати). Відрізок хвилеводу, обмежений двома металевими стінками, у якому виникли стоячі хвилі, утворює об'ємний резонатор. Тип коливань в об'ємному резонаторі позначається  $H_{mnp}$  або  $E_{mnp}$ .

Коливання типу  $H_{mnp}$  у частині хвилеводу утворюють стоячі хвилі  $H_{mn}$ , а коливання  $E_{mnp}$  – стоячі хвилі  $E_{mn}$ . Індокси  $m$ ,  $n$ ,  $p$  позначають кількість стоячих півхвиль електричного поля, що укладаються вздовж сторін  $a$ ,  $b$ ,  $c$  прямокутного резонатора.

Резонансна довжина хвилі для прямокутного резонатора визначається за формулою

$$l_{рез} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}. \quad (4.14)$$

Найпростішим типом коливань у прямокутному резонаторі є коливання  $H_{101}$ , що відповідають стоячим хвилям  $H_{10}$  у відрітку прямокутного хвилеводу довжиною  $L = \lambda/2$ . Розподіл електричного поля стоячої хвилі для цього типу коливань показаний на рис. 4.20. Електричне поле має пучності усередині резонатора і спадає до нуля біля бічних стінок. Силкові електричні лінії починаються на позитивних зарядах нижньої стінки і закінчуються на негативних зарядах верхньої стінки. Напрямок електричних силових ліній змінюється через кожен півперіод. Магнітне поле, створене вертикальними струмами зміщення, має пучності біля бічних стінок і спадає до нуля в центрі резона-

тора. Струми провідності проходять від верхньої стінки до нижньої та навпаки. У центрах верхньої і нижньої стінок утворюються вузли струму і пучності зарядів, а на бічних стінках – пучності струмів і вузли зарядів. Магнітне і електричне поля зрушені за фазою на чверть періоду, тобто при коливаннях електрична енергія переходить у магнітну і навпаки. На резонансній частоті максимум енергії, накопиченої в електричному полі, дорівнює максимуму енергії, накопиченої в магнітному полі. Резонансна довжина хвилі цього типу коливань визначається за формулою

$$I_{\text{рез}} = \frac{2ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Настройка резонатора проводиться зміною його довжини  $c$  або ширини  $a$ .

Коливання типу  $H_{101}$ , як і коливання будь-якого іншого типу, можна збудити в резонаторі шляхом уведення в його об'єм зовнішніх джерел типу «штир» та «петля» (див. п. 4.3).

Найбільш важливим параметром об'ємного резонатора є його *добротність*, яка визначається за формулою

$$Q = \frac{2pW}{W_n} = \frac{wW}{P_n},$$

де  $W$  – занесена в резонатор енергія;

$W_n$  – втрати енергії за один період коливань;

$P_n$  – потужність втрат.

При заданій напруженості електричного і магнітного полів кількість запасеної в резонаторі енергії пропорційна його об'єму, а потужність втрат пропорційна об'єму поверхневого шару у якому відбуваються втрати. Тому добротність контуру пропорційна відношенню об'єму резонатора до площі його внутрішньої поверхні. Добротність об'ємного резонатора значно більша за добротність зви-





тобто поздовжні струми зміщення. Магнітне поле має пучність біля бічної поверхні циліндра і спадає до нуля на його осі. Магнітне і електричне поля зсунуті по фазі на чверть періоду. У стінках резонатора проходить струм, який має вузли в центрах верхньої та нижньої стінок.

Резонансна довжина хвилі при коливаннях типу  $E_{010}$  визначається за формулою  $l_{рез} = 2,61R$ .

*Коаксіальний резонатор* являє собою відрізок коаксіального хвилеводу довжиною  $L$ , закритий на кінцях металевими пластинами (рис. 4.21 б). Поперечні розміри коаксіального резонатора вибирають так само, як і поперечні розміри коаксіальної лінії відповідно до  $l_{кр} = p(R_1 - R_2)$ , та щоб забезпечити відсутність вищих типів коливань.

Резонатори *біжучих хвиль*. Поле біжучої хвилі у замкненому об'ємі можна створити, зробивши із спрямовуючої системи замкнений ланцюг (наприклад, зігнувши в кільце прямокутний хвилевід).

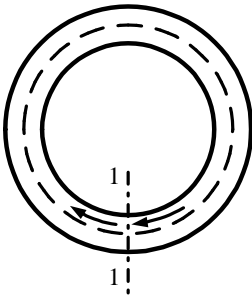


Рисунок 4.22 –  
Резонатор біжучої  
хвилі

Розглянемо відрізок лінії передачі НВЧ, зігнутої у кільце (рис. 4.22). Припустимо, що у деякому перетині кільця 1-1 перебуває джерело, яке збуджує хвилю, яка, у свою чергу, поширюється по кільцю тільки в одному напрямку. Якщо вибрати середню довжину кільця такою, що дорівнює цілому числу хвиль у лінії ( $l_{сеп} = p l_{хв}$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ ),

то фаза хвилі, яка пройшла по кільцю, збігається в перетині 1-1 із фазою хвилі, збуджуваної джерелом. Відбувається синфазне додавання хвиль, а отже, і збільшення амплітуди поля.

*Діелектричні резонатори* [27]. Одним із перспективних видів коливальних систем вважаються резонатори, виконані з використанням діелектриків з великою проникністю, малими втратами та високою термостабільністю. Такі властивості діелектричних резонаторів, як малі розміри і маса, висока власна добротність, здатність концентрувати електромагнітну енергію в малому об'ємі, простота і технологічність виготовлення дозволяють створювати пристрої НВЧ із покращеними електричними і експлуатаційними якостями.

Відомі діелектричні резонатори (ДР) найчастіше мають правильну форму: паралелепіпеда (прямокутний резонатор), колового циліндра (дискові та стрижневі циліндричні резонатори), сфери, кільця. Залежно від наявності металевого екрана діелектричні резонатори поділяють на відкриті і екрановані. Крім того, діелектричні резонатори можуть бути одношаровими та багатошаровими (складовими), які складаються із декількох шарів діелектриків, що відрізняються, наприклад, діелектричною проникністю, температурною залежністю параметрів діелектриків і т.п.

Робота діелектричного резонатора базується на використанні явища повного внутрішнього відбиття на границях діелектрика. Якщо діелектрична проникність матеріалу велика, то електричне і магнітне поля сконцентровані в об'ємі діелектрика. Поза діелектричним тілом амплітуди полів різко зменшуються. На відстанях від його границь, малих порівняно із довжиною хвилі у вільному просторі, електромагнітне поле дуже мале. Наявність зовнішнього поля – одна із відмінних рис діелектричного резонатора, у якому можливе існування  $E$ - і  $H$ -коливачь, які позначаються індексами  $m$ ,  $n$ ,  $d$ , де  $m$  і  $n$  – кількість варіацій поля у поперечних координатах;  $d$  – частина півхвилі (неповна варіація) поля усередині резонатора уздовж осі  $z$ . Основний вид коливачь у *прямокутному* резонаторі –

$H_{11d}$ -коливання, у якого магнітне поле має максимум за поздовжньою віссю. Структура силових ліній поля прямокутного резонатора показана на рис. 4.23 а. Для *циліндричного* резонатора основними є  $H_{01d}$ -коливання. Силві лінії електричного поля являють собою кола, які лежать у площині, перпендикулярній до осі циліндра, магнітне поле має максимум уздовж осі  $z$  резонатора (рис. 4.23 б).

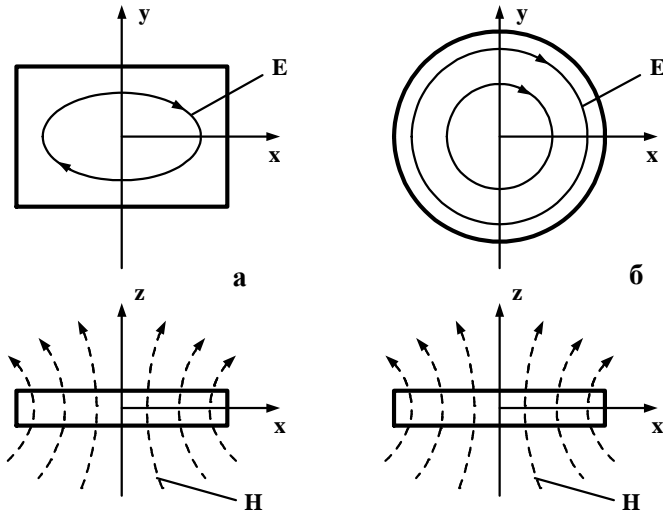


Рисунок 4.23 – Структура силових ліній поля прямокутного (а) і циліндричного (б) діелектричних резонаторів

У більшості НВЧ-пристроїв, які використовують ДР, поблизу границі поділу діелектрик-повітря можуть перебувати провідні поверхні, які частково або повністю екранують резонатор. Їхня наявність приводить до зміни добротності і власної частоти коливань резонатора. Зменшення добротності обумовлене втратами на провідних стінках. Збурювання металевими поверхнями електромагнітного поля резонатора приводить до зміни власної частоти.

Основним фактором, що визначає резонансні властивості при використанні матеріалів з великою діелектричною проникністю ( $\epsilon = 40 - 100$  і більше), є об'ємний резонанс у діелектричному зразку. Вплив провідних поверхонь, розміщених поблизу діелектрика, можна розглядати як мале збурювання, тому що електромагнітне поле сконцентроване переважно в діелектрику.

У діелектричних же резонаторів, виконаних із матеріалів з малою проникністю, резонансні явища обумовлені як частковим відбиттям від границі поділу діелектрик - повітря, так і повним відбиттям від провідних поверхонь. Тому аналіз таких резонаторів (вони мають назву *хвилевідно-діелектричних*) пов'язаний з відшукуванням розв'язків рівнянь Максвелла, які одночасно задовольняють граничні умови на провідній поверхні та імпедансній границі поділу. Розв'язок, як правило, отримують різними наближеними методами.

У конструктивному відношенні хвилевідно-діелектричний резонатор являє собою хвилевід із діелектричною неоднорідністю (у вигляді паралелепіпеда, циліндра, сфери). Розміри хвилеводу, діелектричної неоднорідності, проникності матеріалу, із якого виконані дані резонатори, вибирають так, щоб у структурі виникав хвилевідно-діелектричний резонанс.

Подібні резонатори широко використовуються на практиці. Застосування низькопроникних матеріалів спрощує вирішення питань перестроювання частоти резонатора. Допуски на геометричні розміри менш критичні, що особливо суттєво в міліметровому діапазоні.

Однією із проблем, які виникають при використанні ДР, є забезпечення температурної стабільності їх параметрів. Два основні фактори приводять до температурної нестабільності електричних параметрів: дрейф лінійних розмірів резонатора та діелектричної проникності матеріалу.

Для створення термостабільних ДР ведуться роботи за такими напрямками:

- розроблення і застосування діелектричних матеріалів з низьким температурним коефіцієнтом діелектричної проникності  $TK_e$  та низьким температурним коефіцієнтом лінійного розширення;

- застосування складних, багат шарових ДР із матеріалів з протилежними знаками  $TK_e$  ;

- забезпечення механічної стабілізації за рахунок використання технологічних зазорів між діелектричним резонатором і іншими елементами НВЧ пристрою.

**Смугові резонатори.** Основою для побудови смугових резонаторів є як симетричні, так і несиметричні СЛ із діелектричним і повітряним заповненням. Резонатори можуть бути виконані на базі регулярних і нерегулярних СЛ. У випадку застосування нерегулярних СЛ закон зміни хвильового опору вздовж довжини лінії найчастіше задається зміною ширини струмонесучої смужки. Найбільш широко використовуються резонатори, виконані на основі МСЛ, що дозволяє успішно вирішувати завдання мініатюризації різних НВЧ-пристроїв.

Виходячи із геометрії струмонесучого провідника, розрізняють такі основні види резонаторів у мікросмуговому виконанні [27]: прямокутні (рис. 4.24 а), круглі (рис. 4.24 б), кільцеві (рис. 4.24 в), еліптичні (рис. 4.24 г).

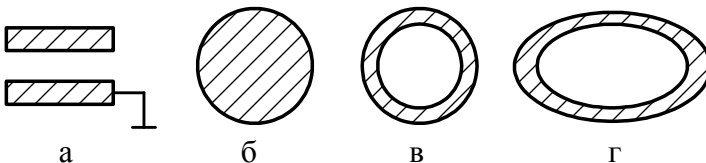


Рисунок 4.24 – Основні типи геометрії струмонесучого провідника, який використовується у мікросмугових резонаторах

## 4.6 Основні відомості про антени

Одним із основних елементів РЕС є антени, які забезпечують приймання і передавання електромагнітних хвиль при організації систем зв'язку на великі відстані.

### 4.6.1 Класифікація й основні характеристики антен

Антени класифікуються за діапазоном радіохвиль, застосуванню, спільності окремих характеристик (смуги пропускання, діаграми спрямованості і т.д.) і принципу дії. Найбільш доцільно антени класифікувати за принципом дії, який багато у чому визначає форму, основні характеристики і застосування антен.

За **принципом дії** антени можна поділити на три групи:

1) *лінійна антена* – випромінювальна система з поперечними розмірами, значно меншими від довжини хвилі та змінними струмами, які проходять уздовж осі системи. До лінійних антен НВЧ-діапазону відносять вібратори (див. п. 3.5);

2) *антенна решітка* – система однотипних випромінювачів, розміщених певним чином і збуджуваних одним або декількома когерентними генераторами. Типовими антенними решітками є директорна антена, щілинна антена, поверхневі антени з напівхвильових симетричних вібраторів та ін.;

3) *апертурна антена* – пристрій, у якому потік випромінюваної (прийнятої) електромагнітної енергії проходить через деяку поверхню. Розміри цієї поверхні, називають *апертурою*, або *розкриттям*, який більший за довжину хвилі. До апертурних антен відносять системи акустичного типу (рупори), оптичного типу (дзеркала та лінзи), антени поверхневої хвилі.

**Основні параметри і характеристики антен.** До них належать:

1) *ефективна площа антени*  $S_g$  характеризує розмір площі, через яку приймальна антена збирає енергію.

$$S_g = K_g S,$$

де  $K_g < 1$  – коефіцієнт використання поверхні розкриття;  
 $S$  – поверхня розкриття антени;

2) *коефіцієнт корисної дії (ККД)* являє собою відношення випромінюваної потужності до повної потужності підведеної до антени;

3) *коефіцієнт спрямованої дії (КСД)* – відношення потужностей випромінювання спрямованої і неспрямованої антен, які створюють у даному напрямку на тій самій відстані однакову напруженість поля. КСД показує, який енергетичний виграш дає застосування спрямованої антени порівняно із неспрямованою антеною.

Іноді замість КСД використовують коефіцієнт підсилення (КП) антени, який дорівнює добутку КСД на ККД ( $КП = КСД \times ККД$ ). Оскільки  $ККД \approx 1$ , то  $КП \approx КСД$ ;

4) *вхідний опір антени*  $Z_{ex}$  є еквівалентною величиною, яка визначає узгодження антени із НВЧ-трактом.

$$Z_{ex} = R + jX,$$

де  $R = R_n + R_\Sigma$  – активний опір антени, який складається із опору теплових втрат  $R_n$  і опору випромінювання  $R_\Sigma$ ;

$X$  – реактивний опір антени, який характеризує відбиття хвиль від антени.

За умови  $R \gg X$  вхідний опір антени приблизно дорівнює хвильовому опору живильного тракту  $Z_{ex} \approx Z_{xв}$ ;

5) *робочий діапазон частот антени* характеризується інтервалом частот від  $f_{max}$  до  $f_{min}$ , у якому значення всіх параметрів антени не виходять за межі заданих;

б) *діаграма спрямованості (ДС)* – це залежність амплітуди напруженості електричного поля  $\vec{E}$  в точці спосте-

реження від напрямку випромінювання антени (кутових координат у полярній системі координат  $q$  і  $j$ ) при постійній відстані від антени до точки спостереження.

Зазвичай діаграму спрямованості зображують у вигляді двох графіків у полярній системі координат: у вигляді залежності  $E = f(j)$  в горизонтальній площині навколо антени і залежності  $E = f(q)$  у вертикальній площині. На рис. 4.25 схематично наведена найпоширеніша форма діаграми спрямованості – голчаста, яка застосовується на радіорелейних лініях, у радіолокації та в радіоуправлінні.

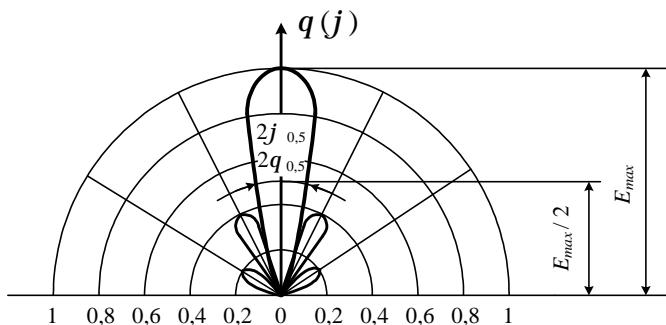


Рисунок 4.25 – Найпоширеніша форма діаграми спрямованості у вертикальній та горизонтальній площинах

7) *ширина головної пелюстки*. Діаграма спрямованості має кілька напрямків максимального випромінювання (кілька пелюсток). Одна з них, яка має найбільшу амплітуду, називається *головною*. *Ширина головної пелюстки визначається як кут  $2q_{0,5}$  або  $2j_{0,5}$  при напруженості електричного поля, що становить половину від максимального значення ( $E = \frac{E_{\max}}{2}$ )* (див. рис. 4.25). У спрямованих антен

ширина головної пелюстки знаходиться у межах від декількох десятків градусів до декількох хвилин;



8) *поляризаційна характеристика* – це залежність амплітуди сигналу в приймальній антені із лінійною поляризацією від кута повороту цієї антени в площині, перпендикулярній випромінюванню. Поляризаційна характеристика визначається видом поляризації хвиль (лінійна, колова та еліптична поляризація).

Визначенню основних параметрів і характеристик рупорних антен присвячена лабораторна робота 3 (див. додаток Б).

#### 4.6.2 Основні типи антен і їх властивості

Розглянемо *основні типи антен*.

1 *Вібраторні антени* належать до найбільш простих типів антен. У НВЧ-діапазоні вони використовуються як збуджувачі антенних пристроїв або як елементи складних пристроїв із дискретними випромінювачами (антенних решіток). Вібратори як антени найчастіше використовуються у довго-, середньо- і короткохвильових частинах радіодіапазону.

До найпоширеніших конструкцій вібраторних антен відносять електричні (рис. 4.26 а, б) і магнітні (рис. 4.26 в, г), чверть- (рис. 4.26 а, в) і напівхвильові (рис. 4.26 б, г) вібратори.

Принципи їх роботи і основні властивості повністю відповідають раніше описаним принципам роботи і властивостям елементарних вібраторів. Напів- та чвертьхвильові електричні вібратори можна розглядати як розімкнену лінію передачі із властивим для неї розподілом струмів і напруги. Частотна залежність входного опору вібратора має форму резонансної характеристики. Резонансна довжина симетричного вібратора дорівнює  $l_0/2$ , а несиметричного –  $l_0/4$ .

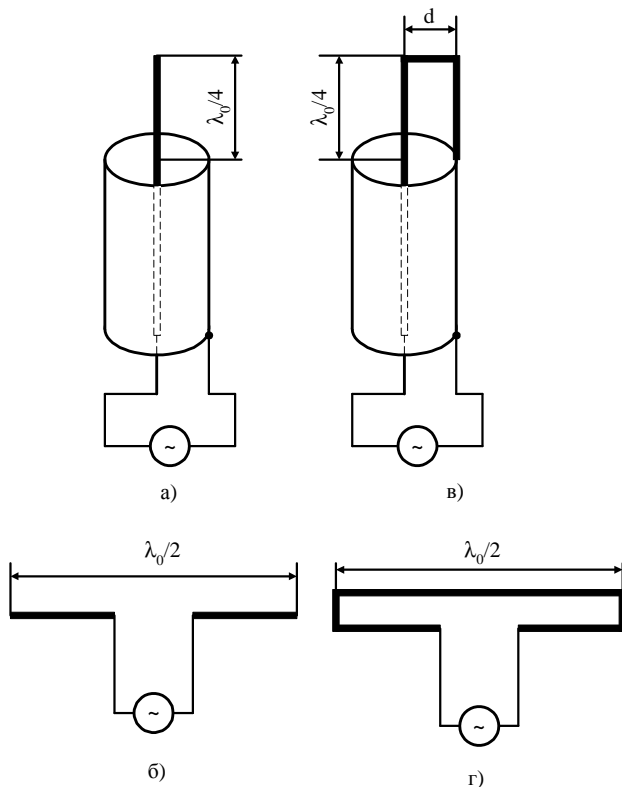


Рисунок 4.26 – Конструкції вібраторів:

- а) – несиметричного електричного;
- б) – симетричного електричного;
- в) – несиметричного магнітного;
- г) – симетричного магнітного

Поле випромінювання вібраторів можна знайти, підсумувавши поля його окремих елементарних ділянок, які являють собою елементарні вібратори.

Електричний симетричний напівхвильовий вібратор має КСД=1,74,  $S_g = 0,21I^2$ ,  $R_\Sigma = 73,1$  Ом. Магнітний напівхвильовий вібратор має КСД=1,64,  $S_g = 0,21I^2$ .

2 *Антенні решітки*. Багатовібраторні антени називаються антенними решітками. Вібратори в антенній решітці розміщуються певним чином відносно один одного і живляться за заданим законом від загального або когерентних джерел сигналу.

За випромінювачі можуть використовуватися не тільки розглянуті вібратори, але і рупори, діелектричні, спіральні та інші антени. Залежно від розміщення випромінювачів (вібраторів) розрізняють *лінійні* (одновимірні) і *поверхневі* (двовимірні) решітки. Поле, що створене решітками, являє собою результат суперпозиції хвиль, збуджуваних кожним випромінювачем окремо.

3 *Директорна антена* являє собою лінійну решітку напівхвильових вібраторів. Її конструкція показана на рис. 4.27.

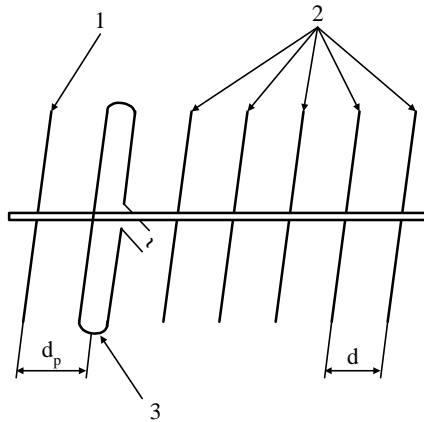


Рисунок 4.27 – Конструкція директорної антени:  
1 – рефлектор; 2 – директор; 3 – активний вібратор

Директорна антена складається із одного активного 3 і декількох пасивних 2 вібраторів. Вібратори кріпляться на металевому стрижні. Така конструкція допустима у зв'язку із тим, що в місці кріплення знаходиться вузол електрич-

ного поля, а сам стрижень, що кріпить вібратори, перпендикулярний до площини поляризації випромінювачів.

Взаємний вплив вібраторів зменшує вхідний опір антени, тому за активний вібратор вибирають вібратор у вигляді петлі, який кріплять у центрі петлі до стрижня. Поряд із активним вібратором на відстані  $l_0/4$  (з протилежного боку відносно напрямку випромінювання) поміщають пасивний вібратор, який виконує функцію рефлектора 1.

Оскільки рефлектор підсилює поле в напрямку активного вібратора і послаблює його у зворотному напрямку, застосування декількох рефлекторів не має сенсу, оскільки всі рефлектори, які йдуть за першим, будуть збуджуватися дуже слабо. Ефект концентрації електромагнітної енергії в напрямку випромінювання підсилюється зі збільшенням кількості директорів. Однак на практиці застосовується не більше 5-7 директорів. Це пояснюється малим збільшенням КСД при подальшому збільшенні кількості вібраторів і подовженою антени. Коефіцієнт спрямованої дії антени невисокий і може бути визначений за наближеною формулою

$$\text{КСД} \approx K_a l_a / l_0,$$

де  $l_a$  – загальна довжина антени;

$K_a \approx (5-7)$  – коефіцієнт, який залежить від довжини антени (убуває зі збільшенням довжини).

Директорні антени застосовуються у *метровому та дециметровому діапазонах* хвиль. Їхня робоча смуга частот становить (5-15)%, діаграма спрямованості має ширину (15-40)° і залежить від кількості вібраторів і якості налаштування.

4 *Хвилевідно-щілинні антени*, використовують як випромінювачі. Вони мають кілька щілинних вібраторів, прорізаних у хвилеводі (рис. 4.28). Принцип роботи відповідає раніше розглянутому елементарному щілинному віб-

ратору. Щілина, як і вібратори антени, має резонансні властивості. Резонансна довжина щілини  $2l$  приблизно дорівнює  $\lambda_0/2$ . Прорізана у хвилеводі щілина, як правило, має односпрямоване випромінювання. Вона може бути прорізана в широкій та вузькій стінках хвилеводу. При цьому поздовжня щілина в широкій та вузькій стінках еквівалентна паралельно включеному в лінію резистору, поперечна щілина в широкій стінці – послідовно вбудованому резистору.

Опір щілини залежить від місця розміщення у хвилеводі. У тих випадках, коли необхідно забезпечити узгодження антени із трактом, міняють місце розміщення щілини або повертають її.

Досягти синфазного збудження антени можна двома способами: вибором відстані між сусідніми щілинами, що дорівнює  $\lambda$  (див. рис. 4.28), або вибором відстані, що дорівнює  $\lambda/2$ .

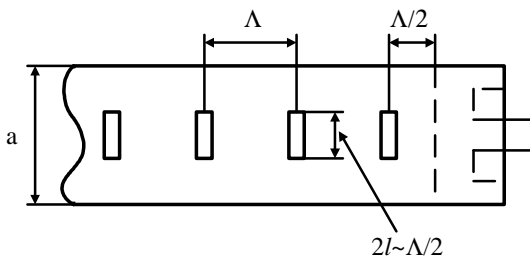


Рисунок 4.28 – Резонансна хвилевідно-щілинна антена

При цьому додатковий зсув фаз на  $\rho$  можна реалізувати за рахунок неідентичного розміщення щілин. Синфазні антени зазвичай працюють у режимі стоячої хвилі, для забезпечення якого наприкінці антени встановлюють короткозамикаючий поршень. Відстань між поршнем і останньою щілиною повинна бути такою, щоб щілини перебу-

вали в пучності стоячої хвилі у хвилеводі. Синфазні багатощільові антени є резонансними (вузькосмуговими).

Кращі діапазонні властивості мають нерезонансні антени, у яких щілини розміщені на відстанях, небагато більших або менших за  $\lambda$ . У зв'язку з тим що у хвилеводі має місце біжуча хвиля, до нього підключають навантаження (поглинач) для усунення відбиття від короткозамкненого кінця антени. Хвилевідно-щілинні антени застосовуються в сантиметровому і дециметровому діапазонах хвиль.

За приклад наведемо параметри хвилевідно-щілинної антени, яка використовує хвилевід перерізом  $7,2 \text{ мм} \times 3,4 \text{ мм}$  і працює на частоті  $36 \text{ ГГц}$ : довжина –  $2,6 \text{ м}$ ,  $432$  похилі щілини, смуга пропускання  $12\%$ , ширина головної пелюстки  $14^\circ$ .

*5 Рупорні антени.* Відкритий кінець хвилеводу можна розглядати як найпростішу антену НВЧ, але такі випромінювачі є слабоспрямованими. Крім того, відкритий кінець хвилеводу відбиває помітну частину НВЧ енергії, не випромінюючи її у вільний простір. Розширення хвилеводу, яке утворює рупор, поліпшує спрямованість і зменшує відбиття.

Якщо хвилевід розширений з одного із боків, утворюється секторний  $E$ - або  $H$ -рупор (рис. 4.29). Рупор, розширений з обох площин, називається *пірамідальним*.

Секторний рупор утворює віялоподібну діаграму спрямованості. Рупор, який розходить в магнітній площині ( $H$ -рупор), має менше побічного випромінювання, ніж рупор, який розходить в електричній площині ( $E$ -рупор), тому  $H$ -рупор переважає.

Якщо необхідно одержати максимальний КСД від рупора даної довжини  $l$ , то використовують пірамідальні рупори. У випадку пірамідального рупора КСД пропорційний КСД двох секторних рупорів відповідного розкриття.

Коефіцієнт спрямованої дії оптимальних  $E$ - і  $H$ -рупорів можна розрахувати за формулою

$$КСД_E = КСД_H = 4\rho 0,64S / I_0,$$

де  $S = a_m \times b_m$  – площа розкриття рупора.

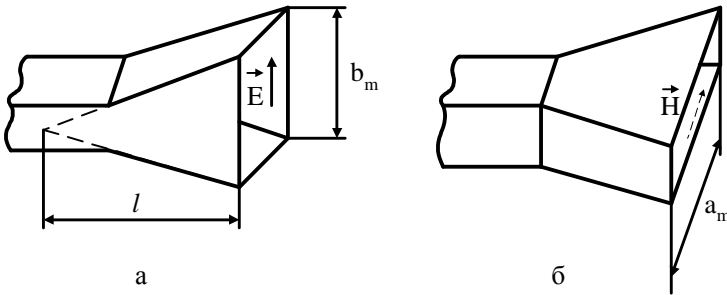


Рисунок 4.29 – Рупорні антени:

а – секторний  $E$ -рупор;

б – секторний  $H$ -рупор

Основним недоліком рупорної антени є її громіздкість. Рупорні антени використовують у дециметровому і сантиметровому діапазонах хвиль для формування відносно широких ДС (приблизно  $q_{0x} = q_{0y} = 10-20^\circ$ ) при невеликих КСД (не більше 20 дБ). Крім того, їх застосовують як елементи антенних решіток, а також як опромінювачі дзеркальних і лінзових антен.

*б Дзеркальні антени.* За дзеркальні антени використовують металеві поверхні спеціальної форми: параболічні, сферичні, плоскі та кутові дзеркала. Найпоширеніші параболічні дзеркальні антени (рис. 4.30). Параболічні відбивачі можуть виконуватися у вигляді параболоїда: частини циліндра із параболічним поперечним перерізом; сектора, вирізаного із параболоїда, та ін. На практиці, із деяким наближенням, вважається, що параболічне дзеркало перетворює сферичний хвильовий фронт опромінювача в плоский

(плоску хвилю). Форму дзеркала характеризують відношенням радіуса розкриття параболоїда  $R_0$  до фокусної відстані  $f$  ( $R_0/2f$ ). Якщо  $R_0/2f < 1$ , то дзеркало називається довгофокусним (дрібним), якщо  $R_0/2f > 1$  – короткофокусним (глибоким).

Дзеркальна антена (див. рис. 4.30) складається із слабоспрямованої антени (опромінювача) 1 і металевого дзеркала 2. Джерело збудження дзеркала антени поміщається у фокус. При падінні електромагнітної хвилі на металеву поверхню дзеркала на останньому виникають поверхневі струми, які створюють вторинне електромагнітне поле. Це поле створює електромагнітну хвилю із плоским фронтом у розкритті.

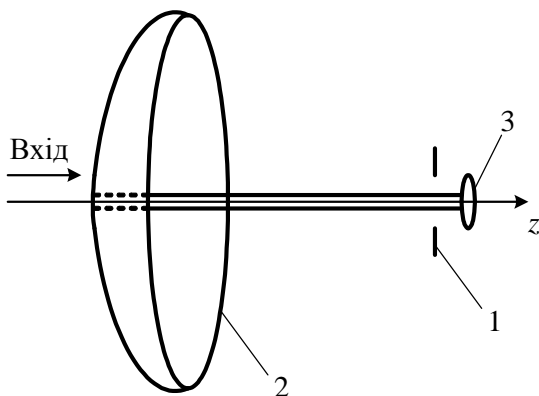


Рисунок 4.30 – Дзеркальна параболічна антена:  
1 – опромінювач; 2 – дзеркало; 3 – рефлектор

Для параболічного дзеркала можна керувати діаграмою спрямованості за допомогою зміщення опромінювача в напрямку, перпендикулярному до осі дзеркала. Діаграму спрямованості антени формує дзеркало. Діаграма спрямованості опромінювача не повинна бути занадто широкою, тому що при цьому частина енергії буде випромінюватися



за межі дзеркала. Із цією метою в опромінювач ставиться рефлектор 3, який виключає випромінювання енергії у бік, протилежний дзеркалу.

Для параболічної антени максимальний коефіцієнт використання поверхні  $K_g$  досягає (0,5-0,6). Якщо при заданій формі дзеркала розширювати ДС опромінювача, то опромінення дзеркала стає більш рівномірним,  $K_g$  росте, що веде до збільшення КСД. Однак разом із цим збільшується частка енергії, що проходить повз дзеркало, а це, у свою чергу, зменшує  $K_g$  і КСД. У зв'язку із цим існує умова оптимального опромінення дзеркала. Очевидно, що при заданій діаграмі спрямованості опромінювача існує оптимальна величина  $R_0/2f$ , яка визначає максимальний результуючий  $K_g$  і максимальний КСД.

Дзеркальні антени широко застосовуються у всіх областях радіотехніки через простоту конструкції, великий коефіцієнт підсилення, широку смугу пропускання і т.д.

Конструкції дзеркальних антен створюються в діапазонах від *десятків метрів до міліметрів*.

7 *Діелектрична стрижнева антена* (рис. 4.31) являє собою конусний діелектричний стрижень (відрізок діелектричного хвилеводу), який випромінює електромагнітні хвилі в напрямку поздовжньої осі  $z$ . При конструюванні антени за допомогою переходу в ній прагнуть збудити хвилю нижчого типу  $HE_{11}$ . Ця хвиля не має критичної частоти, тобто може поширюватися вздовж діелектричного стрижня на всіх частотах і при будь-якому діаметрі стрижня. Зменшуючи діаметр стрижня, наближають фазову швидкість хвилі діелектричного хвилеводу до швидкості  $T$ -хвилі у повітрі. Рівність цих швидкостей забезпечує відсутність відбиття (повне випромінювання енергії). Воно настає при діаметрі кінця антени  $d_{\min}$ , що дорівнює

$$d_{\min} = \frac{0,4l_0}{\sqrt{e-1}}.$$

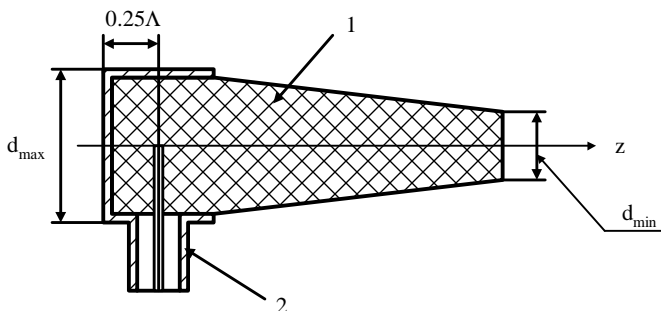


Рисунок 4.31 – Діелектрична стрижнева антена:  
1 – корпусний діелектричний стрижень; 2 – перехід

Для одержання гарної форми ДС важливо, щоб уздовж стрижня не поширювалися вищі типи хвиль. Для досягнення цієї мети максимальний діаметр стрижня  $d_{\max}$  повинен задовольняти рівність

$$d_{\max} = \frac{0,5l_0}{\sqrt{e-1}}.$$

Довжина діелектричної антени зазвичай не перевищує значення  $(6-7)l_0$ , при цьому ширина головної пелюстки ДС дорівнює  $(24-25)\lambda$ , а КСД  $(15-20)$  дБ. Діелектричні антени найчастіше застосовуються як опромінювачі лінз і дзеркал, а також як випромінюючі елементи антенних решіток. Більш докладну інформацію про антени можна одержати із джерел [14, 18].

#### **4.7 Короткі відомості про пристрої НВЧ для формування електромагнітних полів і вимірювання їх параметрів**

До таких пристроїв належать: електронні прилади НВЧ, каналізуючі пристрої (див. п. 4.1-4.4), об'ємні резонатори (див. п. 4.5), пристрої, які приймають і випромінюють хвилі (див. п. 4.6), атенюатори, вентиля, фазообертачі, спрямовані відгалужувачі, детекторні секції, трійники, узгоджені навантаження, відрізки хвилеводів спеціальної форми, вимірювальні лінії і хвилеміри, вимірювальні перетворювачі, напівпровідникові НВЧ-діоди, терморезистори, болометри. Більшість із цих пристроїв побудовані на базі описаних вище хвилеводів і резонаторів.

*Електронні прилади НВЧ* [18, 26] у радіоапаратурі виконують функції генераторів, підсилювачів, детекторів, множників частоти, змішувачів НВЧ-сигналів та ін. При значному збільшенні частоти електромагнітних коливань електричні параметри і характеристики звичайних електронних приладів (діодів, тріодів, пентодів, транзисторів) суттєво погіршуються, що обмежує застосування цих приладів у високочастотній області. Основні причини цих погіршень такі:

– інерція електронів, яка визначає їх кінцевий час прольоту, що і ускладнює керування електронним потоком у приладі;

– паразитні ємності та індуктивності елементів конструкцій, які впливають на входні, прохідні та вихідні опори, а у підсумку на максимальну частоту і смугу робочих частот приладу;

– збільшення втрат енергії в елементах конструкцій за рахунок скін-ефекту і випромінювання, які зменшують коефіцієнт підсилення і ККД приладу.

Долаючи труднощі, що виникають, розвиток електровакуумних приладів відбувався в основному у напрямку

розроблення нових принципів і конструкцій ламп, які виключали причини частотних обмежень, наявних у звичайних лампах. Так були розроблені специфічні для діапазону НВЧ-прилади, які використовують ефекти кінцевого часу прольоту електронів для безпосереднього передавання енергії електронного потоку електромагнітному полю коливальної системи. Серед них – лампи біжучої хвилі (ЛБХ), лампи зворотної хвилі (ЛЗВ), клістри, магнетрони та ін. Електровакуумні прилади НВЧ поділяються на дві основні групи, які відрізняються напрямом і призначенням постійного магнітного поля. До першої групи так званих *приладів O-типу* відносять лампи, у яких електрони рухаються вздовж статичного електричного поля, магнітне поле або не використовується зовсім, або застосовується тільки для фокусування електронного потоку і принципового значення для процесу енергообміну не має. Друга група ламп називається *приладами M-типу* та відрізняється тим, що електрони рухаються у взаємно перпендикулярних (схрещених) постійних електричних і магнітних полях по складних траєкторіях.

Нові дослідження в галузі фізики напівпровідників і розвиток технології сприяли створенню НВЧ-транзисторів, діодів Ганна, варакторних діодів,  $p-i-n$ -діодів і лавинопролітних діодів [14], що дозволило створити в діапазоні НВЧ ряд конструкцій транзисторних підсилювачів і генераторів, перетворювачів частоти, перемикачів, генераторів і підсилювачів, які використовують ефект негативного опору, та ін.

*Атенюатор* (ослаблювач) використовується для дискретного або плавного регулювання амплітуди НВЧ-сигналів шляхом зміни розмірів поперечного перерізу хвилеводу, введення вставок, у яких загасають НВЧ-коливання, або за рахунок використання поляризаційних особливостей НВЧ-коливань.

**Вентиль** пропускає НВЧ-енергію тільки в одному напрямку, тобто тільки падаючу хвилю, яка необхідна для роботи НВЧ-тракту в режимі біжучої хвилі та усунення впливу навантаження на джерело коливальних сигналів. Вентилі будуються на основі хвилеводів із розміщенням у їхньому об'ємі феритових пластин, які перебувають у зовнішньому магнітному полі.

**Фазообертач** дозволяє змінити фазу НВЧ-коливань на фіксоване значення дискретно або плавно і являє собою відрізок лінії передачі регульованої довжини або зі змінюваними електричними параметрами середовища ( $m$  або  $e$ ), це дозволяє регулювати електричну довжину відрізка і приводить до додаткового набігу фази, яка залежить від відношення електричної довжини відрізка до довжини хвилі.

**Спрямований відгалужувач** має один вхід і два виходи, на які передає у потрібний хвилевід НВЧ-тракту тільки певну частину падаючої або відбитої хвилі. Він може бути використаний як дільник потужності в певній пропорції, а також для додавання або віднімання сигналів.

**Детекторна секція** (амплітудний детектор, випрямляч) перетворює НВЧ-коливання в сигнали постійного струму або в сигнали, пропорційні лінії, яка огинає НВЧ-коливання. Вона виконується на базі НВЧ випрямного пристрою з напівпровідниковим діодом. Для збільшення значень вихідних сигналів детекторна секція зазвичай містить резонаторну частину, яка настроюється спеціальним поршнем у режимі резонансу на робочу частоту. В апаратурі із аналоговою обробкою сигналу до детекторної секції підключається чутливий мікроамперметр, підсилювач або прилад, який реєструє сигнал.

**Змішувальна секція** подібна до детекторної, але має два входи, до яких підводять НВЧ-коливання двох різних частот. У результаті їх накладення і випрямлення на виході змішувальної секції виділяється складова коливань різниці

частот, яка на багато менша за частоти НВЧ-коливань, і обробка сигналів, на якій проводиться набагато простіше.

**Трійники** мають три або більше хвилевідних відгалужень і використовуються для поділу потоку НВЧ-енергії або, навпаки, – для підсумовування (віднімання) НВЧ-коливань. В апаратурі радіохвильового контролю використовують *E*-трійник (рис. 4.33 а), *H*-трійник (рис. 4.33 б) і подвійний трійник. Розглянемо характерні випадки застосування трійників в апаратурі (стрілками на рис. 4.33 показаний напрямок вектора напруженості електричного поля).

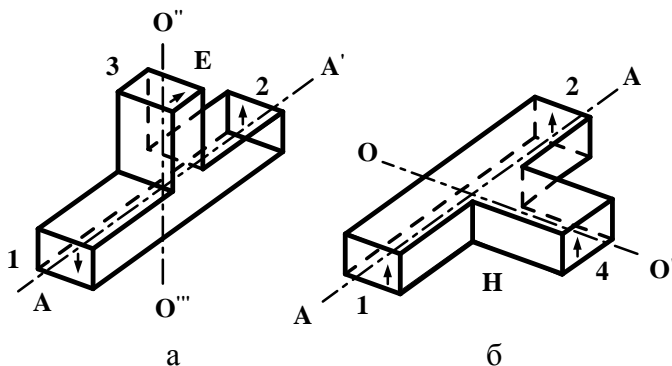


Рисунок 4.33 – Хвилевідні НВЧ-трійники:  
а – *E*-трійник; б – *H*-трійник

Нехай у трійнику (рис. 4.33 а) до відгалуження 3 підходить НВЧ-енергія генератора. Тоді на відгалуженнях 1 і 2 у поперечному перерізі, рівновіддалених від центра трійника, амплітуди напруженості електричного поля будуть однакові, а фази – однакові для *H*-трійника (рис. 4.33 б) і мають зсув на  $180^\circ$  для *E*-трійника (рис. 4.33 а). У цьому випадку НВЧ енергія буде поділена порівну між двома хвилеводами. Якщо ж, навпаки, два потоки НВЧ-енергії підводять до відгалужень 1 і 2, то у відрізках хвилеводу 3 і 4 НВЧ-коливання будуть складатися із урахуванням їх фа-

зи. Зокрема, рівні за величиною потоки енергії з однаковими фазами коливань приведуть до подвоєння енергії коливань у відгалуженні 4  $H$ -трійника і до відсутності коливань у відгалуженні 3  $E$ -трійника. Коли НВЧ-коливання у відгалуженнях 1 і 2 будуть протифазні, ефект проходження НВЧ-енергії буде зворотним – відсутність коливань у відгалуженні 4 для  $H$ -трійника і подвоєння енергії у відгалуженні 3 для  $E$ -трійника.

Подвійний трійник має особливості одночасно  $E$ - і  $H$ -трійників і, крім того, дозволяє вести обробку сигналів у діапазоні НВЧ.

**Узгоджені навантаження** призначені для підключення до НВЧ-тракту для того, щоб поглинути падаючу хвилю і усунути, тим самим, відбиття НВЧ-коливань. Вони виконуються у вигляді замкненого відрізка лінії передачі, який має активний опір, що дорівнює опорі лінії ( $Z_n = Z_d$ ), це досягається розміщенням наприкінці лінії передачі поглинаючого клина, узгодженого із падаючою хвилею.

**Вимірювальні лінії** являють собою відрізок хвилеводу (див. рис. 4.11) із прорізом для введення зонда детекторної резонаторної секції. У проріз відрізка вводиться зонд, який практично не вносить змін у лінію і може переміщатись вздовж осі  $z$ , це дозволяє розмістити його в місці, де досягається необхідне співвідношення між падаючою і відбитою хвилями та відповідно утворюються певні значення НВЧ-коливань (максимальне, мінімальне та середнє). Вимірювальна лінія має точне градування і дозволяє вимірювати багато величин, які характеризують НВЧ-коливання: коефіцієнт біжучої хвилі (КБХ), хвильовий опір, амплітудний розподіл полів уздовж руху хвилі.

**Хвилеміри** – пристрої для визначення частоти  $f$  або довжини  $\Lambda$  хвилі НВЧ-коливань (у найпростішому випадку – це короткозамкнена вимірювальна лінія (резонатор) із каліброваними розмірами елементів). Наприклад, для пря-

мокутного хвилеводу при збудженні у ньому хвилі типу  $H_{10}$  довжина хвилі дорівнює

$$\Lambda = \frac{I}{\sqrt{e - \left(\frac{I}{2a}\right)^2}},$$

де  $I$  – довжина хвилі у вакуумі;  $e$  – відносна діелектрична проникність речовини, яка заповнює хвилевід;  $a$  – розмір широкої стінки хвилеводу.

Визначаючи резонансні поглинання енергії із основного тракту, хвилеміром можна вимірювати  $f$  та  $\Lambda$ .

**Вимірювальні перетворювачі** (первинні вимірювальні перетворювачі, датчики) виконують перетворення компонентів НВЧ-випромінювань і полів в електричні сигнали, зручні для подальшої обробки. За первинні вимірювальні перетворювачі застосовують: *напівпровідникові* і *термоелектричні* прилади. Напівпровідникові прилади (НВЧ-діоди і транзистори) побудовані на базі р-п-переходу та за рахунок його нелінійних властивостей дають можливість перетворити НВЧ-коливання в сигнали постійного струму, відеосигнали або сигнали більш низької частоти (перетворення частоти). При випрямленні НВЧ-коливань одержують відеосигнали або сигнали низької частоти (який огинає НВЧ-коливання) і постійну складову випрямленого струму, яка використовується для безпосередньої індикації сигналів магнітоелектричними мікроамперметрами. Коли напівпровідникові діоди використовуються як змішувачі для перетворення частоти, лінії, огинаючи НВЧ-коливання, та їх фаза переноситься на знижену несучу (різницева) частоту, обробка сигналу якої виконується радіоелектронною технікою, що має кращі технічні та метрологічні показники. Найбільше застосування у вимірювальній апаратурі одержали НВЧ-діоди. Термоелектричні прилади (терморезистори, термістори і болометри) використовують теплову



дію НВЧ-енергії, тому їх виготовляють із матеріалів, які добре перетворюють теплові зміни в електричні сигнали.

*Напівпровідниковий НВЧ-діод* – це точковий діод, спеціально призначений для застосування у НВЧ-діапазоні. Його конструкція найчастіше виконується у вигляді коаксіальних форм із товстими і короткими елементами – виводами, зручними для монтажу і електричного з'єднання з каналізуючими НВЧ-пристроями (хвилеводами, коаксіальними лініями). Враховуючи те що НВЧ-діод і елементи секції (зазвичай параметри НВЧ-діодів задають разом із хвилевідною секцією) мають паразитні індуктивності і ємності, які обмежують його можливості, для кожного діода визначають робочий діапазон довжин хвиль і найбільше значення коефіцієнта біжучої хвилі, яке можна одержати при його використанні.

Напівпровідникові НВЧ-діоди часто випускають парами із більш близькими параметрами, що дозволяє одержати найкращі метрологічні характеристики при встановленні в балансові або мостові ланцюги. Для підвищення чутливості апаратури і узгодження вимірювального ланцюга із НВЧ-трактом діоди зазвичай підключають до петлі зв'язку, встановленої в резонаторі, що підстроюється. Напівпровідникові діоди порівняно із іншими первинними вимірювальними перетворювачами НВЧ-енергії відрізняє висока швидкодія, більша чутливість і простота використання. Їхній недолік – невисокі метрологічні характеристики та погана перевантажувальна здатність.

*Терморезистор* – нелінійний напівпровідниковий резистор, опір якого сильно залежить від температури. Терморезистори виконуються із напівпровідникового матеріалу складного складу. Для роботи у НВЧ-діапазоні застосовують вимірювальні терморезистори (термістори), які дозволяють проводити вимірювання потужності від одиниць мікровата до декількох міліват. Властивості терморезисто-

ра описують дві характеристики: температурна  $R(T)$  та вольтамперна  $U(I)$  характеристики. Оскільки НВЧ-енергія в терморезисторі перетворюється в теплову, терморезистор характеризують температурним коефіцієнтом і сталою часу, яка порівняно із діодами виявляється більшою і обмежує сферу їх застосування.

*Болометри* – спеціально виконані резистори із провідникового або напівпровідникового матеріалу, призначені для виявлення і вимірювання надзвичайно малих потоків потужності. Порівняно із іншими терморезисторами болометри відрізняє більш висока стабільність характеристик (металеві болометри), але разом із тим – знижені температурні коефіцієнти. Їх так само, як НВЧ-діоди, виготовляють парами, причому розміщують поряд і один із них екранують від випромінювання. Болометри часто застосовують із охолодженням до низьких температур з метою збільшення їх чутливості і зниження похибки вимірювань.

*Індикатори НВЧ-випромінювання* перетворюють розподіл густини НВЧ-енергії у видиме зображення. Індикація інтенсивності НВЧ-випромінювання найчастіше полягає у тому, що речовина індикатора нагрівається падаючою на нього НВЧ-енергією.

Більш повну інформацію про пристрої НВЧ можна одержати з літературних джерел [14, 18-21].

#### **4.8 Особливості квазіоптичних пристроїв міліметрового і субміліметрового діапазонів хвиль**

Сучасний розвиток фізики, астрономії, біології та хімії привів до різкого збільшення досліджень електромагнітних коливань міліметрових і субміліметрових (МСМ) хвиль. Стимулювання розробок у цих діапазонах диктується також внутрішньою потребою власне радіофізики і електро-

ніки, особливо таких її розділів, як зв'язок, локація, спектроскопія.

Досягти певних результатів при освоєнні МСМ-діапазонів стало можливо завдяки застосуванню методу масштабного моделювання. Закономірності, характерні для сантиметрового діапазону хвиль, зберігають свій фізичний зміст при лінійній зміні (скороченні) геометричних розмірів електродинамічних структур: закритих резонаторів, хвилеводів, періодичних систем.

Однак метод масштабного моделювання дозволяє лише частково вирішити завдання створення міліметрової, а особливо субміліметрової техніки, оскільки при використанні даного методу технологія виготовлення хвилеводів, резонаторів, окремих елементів і вузлів перетворюється у прецизійну для зазначених діапазонів довжин хвиль. Разом із цим при зростанні частоти збільшується загасання хвилі, яка поширюється вздовж хвилеводу, зменшується максимальна потужність, яку можна передавати. При збільшенні частоти об'ємні резонатори стають усе більш мініатюрними, а їх добротність зменшується.

Переходячи на більш високі частоти, здавалося, можна було б застосовувати коливання вищих типів, залишаючи розміри об'ємного резонатора постійними. Однак у міру підвищення частоти кількість власних коливань в одиничній смузі частот збільшується. Згущення спектра перешкоджає застосуванню вищих типів коливань. Якщо власні частоти коливань мало відрізняються один від одного, то резонансні криві можуть перекриватися навіть при високій добротності, і, таким чином, втрачаються частотно-вибіркові властивості резонатора.

Аналогічні ускладнення виникають і у випадку передавання енергії по хвилеводу за допомогою вищих типів хвиль. При збільшенні частоти кількість хвиль, які можуть поширюватися у хвилеводі, збільшується. Звідси впливає,

що для хвилеводів, поперечні розміри яких суттєво більші від довжини хвилі, передана електромагнітна енергія буде розподілена між багатьма хвилями. Подібний багатохвильовий режим роботи в більшості випадків неприпустимий, як і відзначалося раніше.

При освоєнні дуже коротких хвиль описані вище явища приводять до необхідності використовувати нові принципи, за допомогою яких можна усунути недоліки, властиві методу масштабного моделювання.

У МСМ-діапазонах хвиль для вирішення проблем каналізації, генерування та посилення запропоновані так звані *відкриті системи*: відкриті резонатори і хвилеводи [28].

Міліметрові та субміліметрові хвилі за деякими властивостями подібні до когерентних оптичних хвиль, для яких успішно застосовують відкриті резонатори і відкриті хвилеводи. Однак є і істотні відмінності, які вимагають як відповідних теоретичних методів дослідження, так і нових підходів до експериментального вивчення фізичних явищ і побудови радіосистем. У цьому напрямку успішно застосовуються квазіоптичні методи формування полів. Терміном «квазіоптика» поєднують коло питань, які ставляться до таких пристроїв формування електромагнітних полів, у яких використовуються методи геометричної оптики (фокусування, заломлення у призмах і лінзах), але разом із тим значну роль відіграють і явища дифракції.

Відзначимо, що квазіоптичні методи розв'язання граничних задач електродинаміки можна поділити на дві групи: *асимптотичні* методи дослідження точних розв'язків і *евристичні* методи, що ґрунтуються на комбінації різних фізичних ідей. До евристичних методів належать променеві та хвильові. *Променим* називають метод геометричної оптики та такі його уточнення, як геометрична теорія дифракції, яка поширює геометричні методи на задачу дифракції та комплексна геометрична оптика. *Хвильові* методи мі-

стять у собі метод фізичної оптики і уточнюючі його методи, такі, як метод крайових хвиль.

**Основні принципи формування полів у квазіоптичних системах.** Поле у квазіоптичних системах являє собою довгий вузький пучок, названий параксіальним хвильовим пучком, який багато в чому аналогічний до плоскої хвилі (див. п. 3.2). Іноді подібний пучок можна приблизно розглядати як промінь, поведінка якого описується законами геометричної оптики. Загалом кажучи, під *параксіальним хвильовим* пучком зазвичай розуміють пучок променів, які поширюються уздовж осі системи і утворюють дуже малі кути із віссю та нормаллями до поверхонь, які заломлюють і відбивають промені. Для таких пучків виконуються співвідношення

$$2\pi a/l \gg 1, \quad L/a \gg 1, \quad (4.15)$$

де  $a$  – поперечний розмір системи;  $L$  – довжина пучка.

Поведінка реальних хвильових пучків відрізняється від поведінки променів. Причини відмінності полягають в явищі дифракції, обумовленому згідно з Зомерфельдом як «будь-яке відхилення світлових променів від прямої лінії, яке не можна пояснити відбиттям або заломленням».

За допомогою методів теорії дифракції [28] вивчають хвильові процеси в тих випадках, коли на шляху поширення хвиль є перешкоди: неоднорідність середовища (лінзи), екрани або отвори в непрозорих або напівпрозорих екранах.

Розглянуті нижче квазіоптичні системи – це **відкриті резонатори** (ВР) і **відкриті хвилеводи** (ВХ), наявність електромагнітного поля в яких може супроводжуватися випромінюванням у навколишній простір. У таких резонаторах і хвилеводах спостерігається значне *радіаційне* (обумовлене випромінюванням) *загасання* більшості коливань і хвиль, що приводить до розрідження спектра власних частот порівняно із закритими системами.

Коливання або хвилі із малими радіаційними втратами у відкритих системах можуть бути реалізовані за рахунок використання певних фізичних ефектів.

У відкритих резонаторах (рис. 4.33 а) і хвилеводах із плоскими дзеркалами (рис. 4.33 б) вплив кожного дзеркала на структуру хвилі полягає у тому, що частина електромагнітного поля, яка не попадає на дзеркало, випромінюється. Аналогічно (так званий фокусуєчий) вплив країв системи характерний для хвилеводу, який утворений діафрагмами в поглинаючих екранах (див. рис. 4.33 в) та для інших структур.

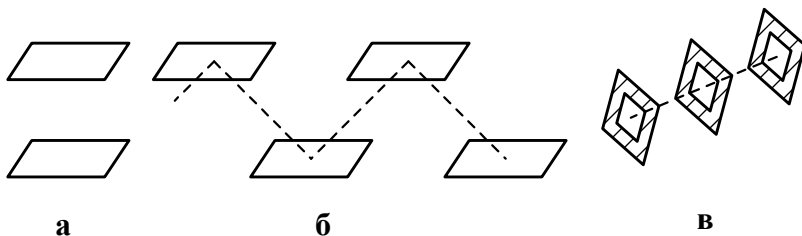


Рисунок 4.33 – Квазіоптичні системи, утворені структурами плоскої геометрії:

а – ВР; б – ВХ; діафрагмований ВХ

У ряді систем спостерігається утворення поверхонь, названих *каустичними*, яких торкаються всі промені і за які вони не виходять. Це явище має місце у відкритих резонаторах і хвилеводах із сферичними дзеркалами (рис. 4.34 а, б), у лінзових хвилеводах (див. рис. 4.34 в) і інших аналогічних системах.

Реалізація коливань і хвиль із малим загасанням можлива також і за рахунок відбиття на границі поділу двох середовищ, коли оптично більш щільне середовище оточене менш щільним. Прикладом є волоконні світловоди (див. п. 4.4).

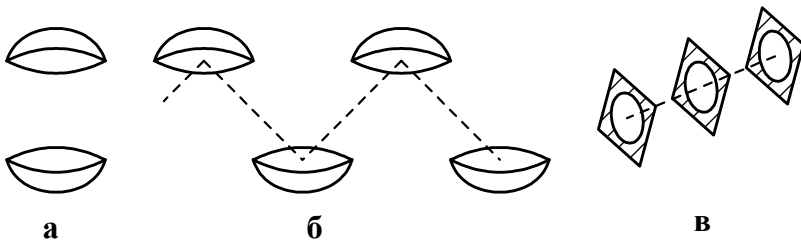


Рисунок 4.34 – Квазіоптичні системи, утворені структурами із квадратичною корекцією:

а, б – ВР і ВХ із сферичними дзеркалами;  
в – лінзовий хвилевід

Описаним явищам властива селективність: краї дзеркал і діафрагм утримують поле лише певної структури і частоти, каустичні поверхні також утворюються лише за певних умов, і нарешті, сильне відбиття від границі поділу діелектрика можливо при певних частотах і кутах падіння. Це і приводить до істотного розрідження спектра.

Особливості *каналізації* хвиль МСМ діапазонів розглянемо на прикладі лінії, яка складається з ряду розміщених на загальній осі діелектричних лінз (рис. 4.35). Кожна лінза в системі фокусує падаючий на неї пучок електромагнітних хвиль і спрямовує його до наступної лінзи. При проходженні відстані між лінзами відбувається дифракційне розходження пучка. Поперечний розмір області, зайнятої полем поблизу лінзи, менший або дорівнює її апертурі. При віддаленні від апертури він спочатку зменшується, а потім – знову збільшується. На наступну лінзу попадає розбіжний пучок, лінза знову фокусує його і картина повторюється. Такий процес можна зобразити у вигляді картини променів, зображеної на рис. 4.35. Усі промені торкаються деякої поверхні – каустики (штрихова лінія). Роль лінзи, таким чином, полягає в тому, щоб відновити розпо-

діл фази поля по перетину пучка, оскільки розподіл амплітуди поля практично не порушується. Якщо поле хвилі (будь-якої її компоненти), яке підходить до лінзи, є  $\dot{U}(x, y)$ , то хвиля, яка відходить, повинна мати  $\dot{U}(x, y) \exp[-j\gamma(x, y)]$  поле. Функція  $\gamma(x, y)$  характеризує фазову корекцію, яка забезпечується відмінністю в оптичних довжинах променів, що проходять крізь різні точки лінзи. Таким чином, можна сказати, що лінза – це *фазовий коректор* поля.

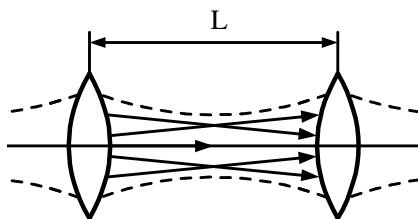


Рисунок 4.35 – Схема формування квазіоптичного хвильового пучка діелектричними лінзами

Найбільш вивчені квадратичні коректори, для яких

$$\gamma(x, y) = -n k (x^2 + y^2) / L. \quad (4.16)$$

У виразі (4.16) величина  $n$  дорівнює відношенню відстані між лінзами (дзеркалами) до подвоєної фокусної відстані:  $n = L / 2f$ . Найбільша концентрація поля поблизу осі досягається при  $n = 1$ , тобто при фазовій корекції

$$\gamma(x, y) = -k (x^2 + y^2) / 2f. \quad (4.17)$$

Дзеркала резонаторів, для яких виконана умова (4.17), являють собою частини поверхні сфери. У випадку лінзової лінії форма лінз залежить від діелектричної проникності матеріалу.



Принципи збудження відкритих резонаторів багато в чому аналогічні до принципів збудження об'ємних резонаторів (див. п. 4.5). Зазвичай використовуються зосереджені елементи зв'язку (щілини, отвори), які розміщуються на поверхні одного із дзеркал ВР [28, 29]. Зауважимо, що зосереджене збудження відкритого хвилеводу внаслідок відсутності резонансу менш ефективне, ніж таке саме збудження відкритого резонатора. Тому для збудження хвилі у відкритому хвилеводі потрібно вводити в нього хвильовий пучок, близький за структурою поля до відповідної хвилі, удаючись до пристроїв, які формують такий хвильовий пучок [28].

Так, наприклад, в електроніці МСМ діапазонів для збудження квазіоптичних систем в основному використовують радіаційні ефекти, які виникають під час руху заряджених частинок. До таких ефектів належать черенковське і перехідне випромінювання, а також їх різновиди: індуковане випромінювання, випромінювання Сміта-Парселла (дифракційне випромінювання).

*Черенковське випромінювання* (ЧВ) збуджується при рівномірному русі електронів (або іншої зарядженої частинки) у середовищі зі швидкістю  $v_e$ , більшою за швидкість хвилі у цьому середовищі. Існує залежність фазової швидкості хвилі  $v_\phi$  в безмежному середовищі від діелектричної і магнітної проникностей, яка визначається співвідношенням  $v_\phi = c / \sqrt{\epsilon m}$ . Дане електромагнітне випромінювання характеризується специфічним кутовим розподілом, який полягає у тому, що хвильовий вектор випромінених хвиль утворює із вектором швидкості  $v_e$  кут  $g_0$ , обумовлений співвідношенням  $\cos g_0 = c / v_e \sqrt{\epsilon m}$ . Оскільки  $\cos g_0$  завжди менше одиниці, то черенковське випромінювання можливе тільки при  $v_e > v_\phi$ . Черенковське випромі-

нювання буде спостерігатися і у тому випадку, коли електронний потік буде рухатися не тільки в суцільному середовищі, але й поблизу середовища на відстані порядку довжини випроміненої хвилі.

У випадку ЧВ передбачається, що середовище, у якому виникає випромінювання, є однорідним і його властивості незмінні в часі. Якщо ж властивості середовища змінюються в часі вздовж траєкторії руху частинки, то випромінювання виникає при будь-якій швидкості руху заряду. Таке випромінювання одержало назву *перехідного* і у найпростішому випадку виникає на границі поділу двох середовищ при прямолінійному та рівномірному русі заряду із будь-якою швидкістю.

При русі частинки поблизу інших неоднорідностей, таких, як екрани із отворами або тіла кінцевих розмірів, також виникає випромінювання, і воно одержало назву *дифракційного* випромінювання (ДВ). Фізична природа перехідного і дифракційного випромінювань та сама. Поле частинки, яка пролітає, наводить у неоднорідності змінні струми або заряди. Заряд і неоднорідність являють собою дві необхідні компоненти для того, щоб виникло випромінювання. При періодичному розміщенні неоднорідностей (наприклад, періодична структура типу гребінки, див. рис. 4.18 а) інтенсивність і когерентність дифракційного випромінювання суттєво зростають при відповідному виборі параметрів періодичної структури і швидкості електронного пучка [30].

Крім потоків заряджених частинок (релятивістських і нерелятивістських), за розподілені джерела формування просторових (об'ємних) хвиль у квазіоптичних системах МСМ-діапазонів широкого застосування набули також планарні ДХ, які при їх розміщенні вздовж періодичних неоднорідностей різного типу дозволяють за рахунок збудження поверхневої хвилі і трансформації її у просторову

[30, 31], моделювати режими черенковського та дифракційного випромінювань у квазіоптичних системах. Різні типи комбінацій періодичної системи-ДХ дозволяють також вирішувати питання створення складних антенних систем, організації виводу енергії в пристроях електроніки і побудови функціональних елементів РЕС [32].

При цьому кут випромінювання просторових хвиль на дифракційних решітках (ДР) типу «гребінка» визначається таким співвідношенням [31]:

$$a = \arccos(1/b_{xg} + n/k), \quad (4.18)$$

де  $b_{xg} = v_{\phi} / c$  – відносна швидкість хвилі в діелектричному хвилеводі;  $v_{\phi}$  – фазова швидкість хвилі;  $n = -1, -2, \dots$  – номер просторової гармоніки випромінювання;  $k = L_n / l$  – хвильове число;  $L_n$  – період дифракційної решітки;  $l$  – довжина хвилі випромінювання. Переваження того або іншого типу хвиль можна добитися шляхом вибору параметрів випромінювача: періоду решітки, швидкості хвилі у хвилеводі (або швидкості електронного пучка) і відстані ДХ-ДР.

**Класичні квазіоптичні системи.** До класичних квазіоптичних систем можна віднести дводзеркальні відкриті резонатори і лінії передачі без неоднорідностей, які наведені на рис. 4.33 та рис. 4.34.

У найпростішому випадку відкритий резонатор складається із двох плоских тонких дисків, розміщених паралельно один одному так, що їх осі симетрії збігаються (див. рис. 4.33 а). Такий резонатор називається *плоскопаралельним* і є аналогом відомого в оптиці інтерферометра Фабрі-Перо.

Плоскопаралельні резонатори мають ряд цінних якостей: розріджений спектр резонансних частот, однорідне поле вздовж осі симетрії резонатора, довжина хвилі в ре-

зонаторі мало відрізняється від довжини хвилі у вільному просторі.

Однак складність юстування, порівняно більші розміри, недостатнє розділення видів коливань за втратами привели до того, що більш перспективними в МСМ діапазонах є резонатори із відбивачами, які володіють властивістю квадратичної фазової корекції. Резонатори такого типу одержали назву *конфокальних* і складаються із сферичних дзеркал, як показано на рис. 4.34 а. Такі резонатори мають більшу роздільну здатність, ніж плоскопаралельні. Крім того, конфокальні резонатори менш критичні до роз'юстування. Для резонатора зі сферичними відбивачами характерні значно менші втрати енергії за один прохід порівняно із відкритим резонатором, який має плоскі дзеркала з такою ж апертурою. Важливою його перевагою є більше розділення за втратами основного та вищих видів коливань, які прийнято позначати  $TEM_{mq}$ , де індекси  $m$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  описують поперечні складові коливань (аналогічно до об'ємних резонаторів), а  $q$  – поздовжній індекс коливань, визначає кількість півхвиль, які укладаються по осі ВР. Для резонатора із круглими дзеркалами резонансні відстані або резонансні довжини хвиль видів коливань повинні задовольняти такому співвідношенню:

$$\frac{2H}{l} = q + \frac{1}{p}(m + 2n + 1) \arccos \sqrt{g_1 g_2},$$

де  $H$  – відстань між дзеркалами;  $l$  – довжина хвилі у відкритому резонаторі;  $g_1 = 1 - H/R_1$ ;  $g_2 = 1 - H/R_2$ ;  $R_1, R_2$  – радіуси викривлення дзеркал.

Обмеження апертур ВР викликає втрати на випромінювання у вільний простір і слабо впливає на розподіл полів у відкритому резонаторі. Тому щоб втрати були малі, поле повинне бути сконцентроване поблизу центра дзеркала. Це, у свою чергу, накладає обмеження на вибір співвід-

ношень між радіусами викривлення дзеркал і відстанню між ними. Для одержання резонаторів, поле в яких досить швидко спадає при збільшенні радіальної координати, відстань між дзеркалами повинна вибиратися в інтервалах:

$$0 < g_1 g_2 < 1.$$

Останній вираз називають *умовою "стійкості" резонатора* із квадратичною корекцією.

Велике поширення в техніці МСМ хвиль одержали також напівсферичні резонатори, які складаються із одного плоского та одного сферичного дзеркал. Відомо, що в напівсферичному ВР основними коливаннями є азимутально-однорідні коливання  $TEM_{m0q}$ . Добротність коливань напівсферичного ВР залежить від дифракційних втрат (втрат на випромінювання) на краях плоского і сферичного дзеркал, омичних втрат на тих самих дзеркалах, втрат на зв'язок, втрат на загасання у середовищі.

За коливальну систему можна також ефективно використовувати ВР із дзеркалами, виконаними у вигляді двограних відбивачів. Резонатор із двограними відбивачами характеризується дуже малими дифракційними втратами і порівняно мало чутливий до перекосів відбивачів. У міліметровому діапазоні його виготовлення порівняно із конфокальним резонатором простіше.

***Квазіоптичні системи з періодичними металевими неоднорідностями.*** Для збудження об'ємних хвиль у квазіоптичних системах широко застосовуються періодичні структури (див. п. 4.4), які з урахуванням специфіки МСМ-діапазону одержали назву *дифракційних решіток*. Основні типи квазіоптичних систем із періодичними неоднорідностями наведені на рис. 4.36.

На базі напівсферичного ВР із дифракційною решіткою (див. рис. 4.36 а), розміщеною в центральній частині плоского дзеркала, реалізовані *генератори дифракційного*

випромінювання (ГДВ) [30], принцип дії яких ґрунтується на використанні ефекту дифракційного випромінювання.

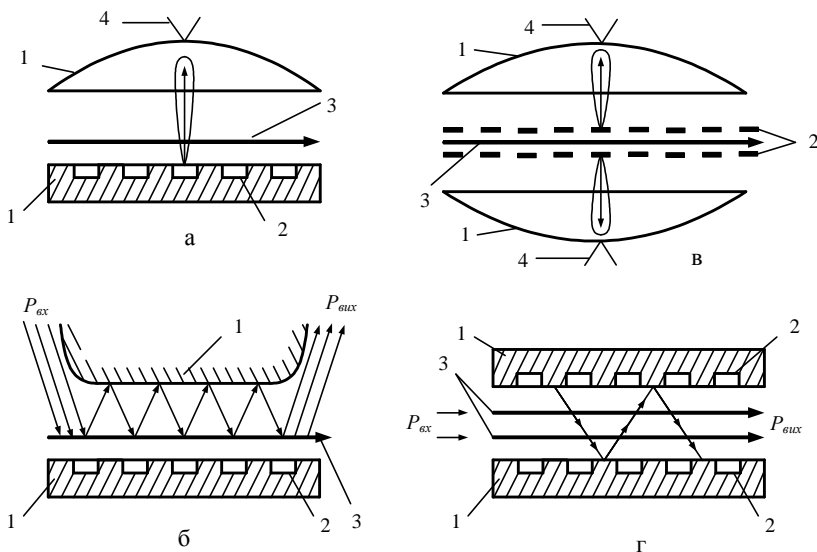


Рисунок 4.36 – Основні типи квазіоптичних систем із періодичними металевими неоднорідностями: а – напівсферичний ВР з відбивною ДР; б – відкритий хвилевід з відбивною ДР; в – паралельно зв'язані через стрічкові ДР відкриті резонатори; г – відкритий хвилевід з дифракційно зв'язаними джерелами випромінювання (1 – дзеркала ВР або ВХ, 2 – відбивна або стрічкова ДР, 3 – джерело поверхневої хвилі (ЕП або ДХ), 4 – вихід енергії)

Збуджувані у ВР об'ємні хвилі, відбиваючись від сферичного дзеркала, падають на решітку і, трансформуючись у поверхневі, взаємодіють із електронним потоком (ЕП). При цьому в такій системі можлива реалізація режимів генерації і підсилення електромагнітних хвиль. Отже, вихідні характеристики ГДВ істотно обумовлюються властивостями використаного ВР. Наявність періодичної структури в

ВР ГДВ значно видозмінює характеристики описаних вище класичних резонансних квазіоптичних структур. Основним у такому ВР є  $TEM_{20q}$  тип коливання.

Уперше хвилевідний варіант підсилювача на ефекті Сміта-Парселла (дифракційного випромінювання) був запропонований у [32], де нерелятивістський ЕП взаємодіє із біжучою хвилею дифракційного випромінювання у відкритій хвилевідній системі, яка утворена поверхнями пасивного і активного (з дифракційною решіткою) дзеркал (див. рис. 4.36 б).

Перспективними в плані створення нових модифікацій пристроїв електроніки і техніки МСМ хвиль є також багатозв'язні квазіоптичні системи, які містять не менше двох джерел об'ємних хвиль. Зокрема, до таких систем можна віднести зв'язані ВР, які можуть бути реалізовані як за рахунок послідовного розміщення вздовж загальної осі, наприклад, двох напівсферичних ВР (див. рис. 4.36 а), так і за рахунок паралельного включення ВР відносно осі розподіленого джерела випромінювання (рис. 4.36 в).

У першому випадку зв'язок у таких пристроях реалізується через дифраговане на краях дзеркал поле, а у другому варіанті – через стрічкові решітки, розміщені в об'ємі сфероїдального ВР, поділяючи його на два напівсферичні резонатори. Пристрої, виконані на зв'язаних ВР, порівняно із однорезонаторними мають ряд переваг: більш широку смугу пропускання, можуть ефективно використовуватися як електродинамічні системи підсилювачів потужності і помножувачів частоти [30].

Відкритий хвилевід, утворений двома дифракційними решітками плоскої або циліндричної форми (див. рис. 4.36 г), також належить до багатозв'язної квазіоптичної системи, яка може бути використана при створенні підсилювача на ефекті Сміта-Парселла. Ефект підсилення в такій системі реалізується шляхом використання двох ди-

фракційно зв'язаних джерел випромінювання, одне з яких (активне) утворене системою «відбивна решітка-ЕП», а інше (пасивне) являє собою пристрій введення-виведення енергії, виконаний у вигляді системи ДР-ДХ. При квазі-синхронізмі швидкості ЕП з однієї із поверхневих хвиль дифрагованого на решітці поля відбувається групування електронів у згустки, які випромінюються на частоті вхідного сигналу. На решітці пасивного дзеркала відбувається зворотне перетворення об'ємної хвилі в поверхневу хвилю діелектричного хвилеводу із подальшим її перевипромінюванням у відкритий хвилевід. За умови синфазного випромінювання з активного і пасивного джерел спостерігається ефект підсилення повільною хвилею просторового заряду ЕП прямої хвилі ВХ.

При збудженні системи двома пасивними джерелами випромінювання (діелектричними хвилеводами) (див. рис. 4.36 г) відбувається послідовне перетворення поверхневих хвиль у просторові, а просторових – у поверхневі. Уздовж осі системи формуються синфазні і протифазні хвилі, у результаті інтерференції яких відбувається розділення падаючої і відбитої потужностей, що дозволяє на базі такої системи створити квазіоптичний спрямований відгалужувач [33].

При реалізації напівпровідникових джерел МСМ-хвиль і елементної бази широке застосування знайшли кутиково-ешелетні ВР. На базі таких електродинамічних систем запропоновані різні модифікації квазіоптичних твердотільних генераторів накачування із сферо-кутиково-ешелетними ВР, які конструктивно реалізовані за схемою із реактивновідбивними і прохідним резонаторами [34].

Різноманітність пристроїв релятивістської електроніки [35, 36] зумовила необхідність розроблення спеціальних відкритих резонансних і хвилевідних електродинамічних систем, які мають підвищену електричну міцність і ефек-



тивну селекцію типів коливань. До таких резонансних систем належить, наприклад, кільцевий резонатор, який являє собою сукупність дзеркал, розміщених таким чином, щоб промінь, зазнавши відбиття від резонаторних дзеркал, замикався сам на себе (режим біжучих хвиль). У МСМ діапазоні перспективним є використання також брегівських резонаторів. Конструктивно вони складаються із резонаторів Фабрі-Перо, дзеркала яких утворюють зубчасті або хвилясті дзеркальні поверхні. Відрізняючись багатофункціональністю, брегівський резонатор є багаточастотною системою. Крім того, для хвилі накачування, яка поширюється вздовж осі резонатора, система дзеркал є високоселективною сповільнювальною структурою. Із хвилевідних систем в основному застосовуються нерегулярні або слабо нерегулярні хвилеводи. До їх різновидів можна віднести надрозмірні хвилеводи різних форм і перерізів, хвилеводи із періодичними неоднорідностями, такими, як провідні спіралеподібні, типу «гребінка», штирові, брегівські, діафрагмовані та інші різні різновиди діелектричних хвилеводів.

***Квазіоптичні системи із періодичними металодіелектричними структурами (МДС)***

Багатозв'язні системи, виконані у вигляді ВР і ВХ, в об'ємі яких розміщена МДС, дозволяють реалізувати різні режими трансформації енергії поверхневих хвиль в об'ємі [30].

Найпростіша електродинамічна система із МДС схематично зображена на рис. 4.37 а. Вона утворена металевим дзеркалом і діелектричним шаром із проникністю  $\epsilon$ , на бічній поверхні якого нанесена стрічкова дифракційна решітка. Уздовж решітки розміщене розподілене джерело випромінювання, яке залежно від параметрів системи може збуджувати різні просторові гармоніки випромінювання із номерами  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  і щільністю енергії  $S_n$ . Зокрема,

на рис. 4.37 а показаний варіант збудження черенковської ( $S_{0e}$ ) і мінус першої дифракційної ( $S_{-1e}$ ) гармонік випромінювання в діелектрик, а також мінус першої дифракційної гармоніки випромінювання ( $S_{-1n}$ ) у вакуум, яка може відбиватися від металевого екрана і надходити в металодіелектричний канал.

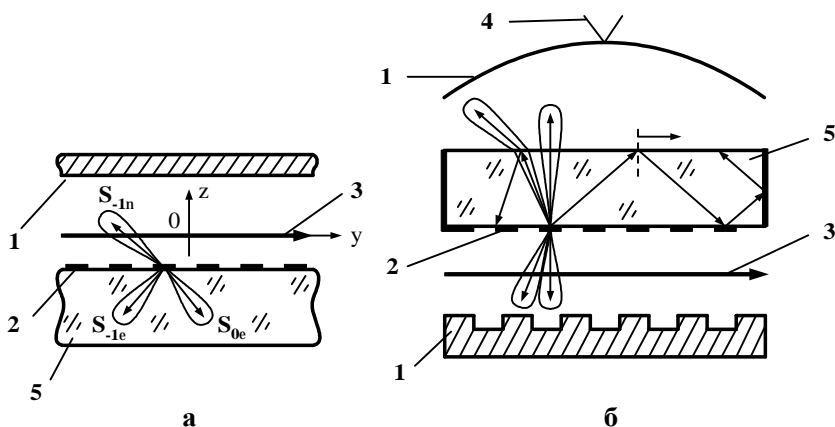


Рисунок 4.37 – Приклади виконання квазіоптичних систем з МДС: а – металодіелектричний канал; б – відкритий резонатор з МДС (1 – відбивні дзеркала; 2 – стрічкова дифракційна решітка; 3 – джерело когерентної хвилі (ЕП або ДХ); 4 – вихід енергії; 5 – діелектричний шар)

Для такої системи розроблені чисельні і експериментальні методи моделювання різних режимів дифракційного і черенковського випромінювань, які дозволяють визначити кількісні співвідношення густини енергії просторових гармонік і оптимізувати параметри електродинамічної системи відповідно до поставленого завдання. При цьому кути гармонік ДВ визначаються таким співвідношенням [30]:

$$g_{ne} = \arccos \frac{h+n}{k\sqrt{e}},$$

де  $h = k / b_0$ ;

$k$  – хвильове число;

$b_0$  – відносна швидкість електронів.

Природним переходом від найпростіших систем (див. рис. 4.37 а) до більш складних є відкритий резонатор з МДС (див. рис. 4.37 б), який утворений, наприклад, сферичним дзеркалом із виводом енергії і плоским дзеркалом з відбивною дифракційною решіткою. Між дзеркалами ВР розміщена МДС, виконана у вигляді діелектричного резонатора. Така електродинамічна система є базовою при створенні дифракційно-черенковських генераторів. На рис. 4.37 б наведені можливі режими збудження об'ємних хвиль розподіленим джерелом випромінювання, розміщеним уздовж границь діелектричної призми зі стрічкової ДР і відбивної ДР. Встановлено, що введення у відкритий резонатор МДС приводить до якісно нових електродинамічних властивостей такої системи: при зміні параметрів МДС можлива реалізація режимів загасання енергії у ВР, збільшення амплітуди коливань і їх добротності, селекції коливань. Виявлені властивості такої системи пояснюються у рамках фізичної моделі дифракційно-черенковського випромінювання для МДС кінцевої товщини [37]. Такі системи можуть бути використані при реалізації конкретних приладів електроніки, наприклад, дифракційно-черенковського генератора та черенковської ЛЗХ [38].

Більш докладну інформацію щодо матеріалів даного підрозділу можна одержати із монографій [28-32, 35] і оглядових статей останніх років [34, 36, 39-41].

#### 4.9 Основні принципи побудови телекомунікаційних систем зв'язку НВЧ-діапазону

Оскільки електромагнітні хвилі НВЧ діапазону широко застосовуються в телекомунікаційних системах зв'язку, то при розгляді НВЧ техніки доцільним є стислий аналіз основних принципів побудови таких систем, які для широкого кола споживачів характеризуються терміном «бездротовий зв'язок» [42].

Можливість передавати інформацію без наявності ліній передачі, описаних у даному розділі, завжди була дуже привабливою. Як тільки технічні можливості ставали достатніми для того, щоб новий вид таких послуг набув двох необхідних складових успіху – зручності використання та низької вартості, – успіх йому був гарантований. Останній тому доказ – *мобільна телефонія*.

Починаючи із середини 90-х років досягла необхідної зрілості і технологія *мобільних комп'ютерних мереж*. З появою стандарту IEEE 802.11 у 1997 році з'явилася можливість будувати мобільні мережі Ethernet, які забезпечують взаємодію користувачів незалежно від того, у якій країні вони перебувають і обладнанням якого виробника вони користуються.

Бездротові мережі часто зв'язують із *радіосигналами*, однак це не завжди правильно. Бездротовий зв'язок використовує широкий діапазон електромагнітного спектра, від радіохвиль низької частоти у декілька кілогерц до видимого світла, частота якого становить приблизно  $8 \times 10^{14}$  Гц (див. рис. В1 і табл. 4.1).

Умовно бездротові системи передавання інформації поділяються на чотири групи:

1) діапазон до 300 МГц має загальну стандартну назву – радіодіапазон (див. рис. В1). Союз ІТУ розділив його на декілька піддіапазонів, починаючи від наднизьких частот (Extremely Low Frequency, ELF) і закінчуючи надвисокими

(Extra High Frequency, EHF, див. табл. 4.1). Звичні для нас радіостанції працюють у діапазоні від 20 кГц до 300 МГц, і для цих діапазонів існує хоча і не чітка, однак часто використовувана назва *широкомовне радіо*. Сюди потрапляють низькошвидкісні системи АМ- і FM-діапазонів, призначені для передавання даних зі швидкостями від декількох десятків до сотень кілобіт за секунду. Прикладом можуть бути радіомодеми, які з'єднують два сегменти локальної мережі на швидкостях 2400, 9600 або 19200 Кбіт/с;

2) кілька діапазонів від 300 МГц до 3000 ГГц (див. табл. 4.1) мають також нестандартну назву мікрохвильових діапазонів. *Мікрохвильові системи* становлять найбільш широкий клас систем, який поєднує радіорелейні лінії зв'язку, супутникові канали, бездротові локальні мережі та системи фіксованого бездротового доступу, названі також системами бездротових абонентських закінчень (Wireless Local Loop, WLL);

3) вище мікрохвильових діапазонів розміщується інфрачервоний діапазон. Мікрохвильовий та інфрачервоний діапазони також широко використовують для бездротової передавання інформації. Оскільки інфрачервоне випромінювання не може проникати через стіни, то *системи інфрачервоних хвиль* використовують для утворення невеликих сегментів локальних мереж у межах одного приміщення;

4) останніми роками видиме світло також стало застосовуватися для передавання інформації (за допомогою лазерів). *Системи видимого світла* використовуються як високошвидкісна альтернатива мікрохвильовим двоточковим каналам організації доступу на невеликих відстанях.

Бездротова лінія зв'язку будується відповідно до досить простої схеми (рис. 4.38).

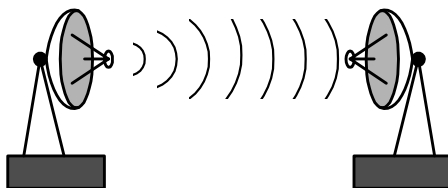


Рисунок 4.38 – Спрощена схема бездротової лінії зв'язку

Кожний вузол лінії зв'язку оснащується антеною, яка одночасно є передавачем і приймачем електромагнітних хвиль. Електромагнітні хвилі поширюються в атмосфері або вакуумі зі швидкістю  $3 \times 10^8$  м/с у всіх напрямках або ж у межах певного сектора залежно від типу антени.

На рис. 4.38 показана параболічна антена (див. п. 4.6), яка є *спрямованою*. Інший тип антен – ізотропні антени, які являють собою вертикальний провідник довжиною у чверть хвилі випромінювання і є *неспрямованими*. Вони широко використовуються в автомобілях і портативних пристроях. Поширення випромінювання у всіх напрямках можна також забезпечити декількома спрямованими антенами.

Оскільки при неспрямованому поширенні електромагнітні хвилі заповнюють увесь простір (у межах певного радіуса, обумовленого загасанням потужності сигналу), то цей простір може бути *розділювальним середовищем*. Поділ середовища передавання породжує ті ж проблеми, що і у локальних мережах, однак тут вони збільшуються тим, що простір на відміну від кабелю є загальнодоступним, а не належить одній організації. Крім того, лінія передавання строго визначає напрямок поширення сигналу у просторі, а «бездротове середовище» є неспрямоване.

Для передавання дискретної інформації за допомогою бездротової лінії зв'язку необхідно модулювати електро-

магнітні коливання передавача відповідно до потоку переданих бітів. Цю функцію здійснює DCE-пристрій, розміщений між антеною та DTE-пристроєм, яким може бути комп'ютер, комутатор або маршрутизатор комп'ютерної мережі.

Потреба у швидкісному передаванні інформації є переважачою, тому всі сучасні системи бездротового передавання інформації працюють у високочастотних діапазонах, починаючи із 800 МГц, незважаючи на переваги, які дають низькочастотні діапазони завдяки поширенню сигналу вздовж поверхні землі або відбиття від іоносфери.

Для успішного використання мікрохвильового діапазону необхідно також враховувати додаткові проблеми, пов'язані із поведінкою сигналів, які поширюються в режимі прямої видимості та тих, які стикаються на своєму шляху з перешкодами. На рис. 4.39 показано, що сигнал, зустрівшись із перешкодою, може поширюватися відповідно до трьох механізмів: відбиття, дифракції та розсіювання.

У результаті подібних явищ, які завжди спостерігаються при бездротовому зв'язку у місті, приймач може одержати кілька копій того самого сигналу. Такий ефект називається *багатопроменевим поширенням сигналу*. Оскільки час поширення сигналу вздовж різних шляхів буде в загальному випадку різним, то може також спостерігатися і *міжсимвольна інтерференція*.

Викривлення через багатопроменеве поширення призводять до ослаблення сигналу, цей ефект називається *багатопроменевим завмиранням*. У містах багатопроменеве завмирання приводить до того, що ослаблення сигналу стає пропорційним не квадрату відстані, а його кубу або навіть четвертій степені.

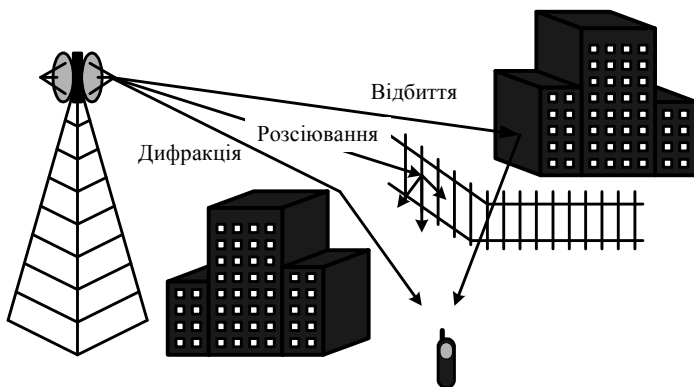


Рисунок 4.39 – Можливі варіанти поширення електромагнітної хвилі в системах зв'язку

Проблема високого рівня перешкод бездротових каналів вирішується різними засобами. Важливу роль відіграють спеціальні методи кодування, які розподіляють енергію сигналу в широкому діапазоні частот. Крім того, передавачі сигналу (і приймачі, якщо це можливо) намагаються розмістити на високих вежах, щоб уникнути багаторазових відбиттів. Ще одним способом є застосування протоколів із установленням з'єднань і повторними передачами кадрів уже на *каналному* рівні стека протоколів. Ці протоколи дозволяють швидше корегувати помилки, тому що вони працюють із меншими значеннями тайм-аутів, ніж коригувальні протоколи *транспортного* рівня, такі як, TCP (Transmission Control Protocol).

Особливого значення в цьому напрямку набуває так звана «*техніка розширеного спектра*», яка розроблена спеціально для бездротового передавання. Вона дозволяє поліпшити перешкодостійкість коду для сигналів малої потужності, що дуже важливо для мобільних застосувань. Однак необхідно зазначити, що техніка розширеного спектра – не єдина техніка кодування, яка застосовується для



бездротових ліній зв'язку мікрохвильового діапазону. Тут також застосовуються частотна (FSK) і фазова (PSK) маніпуляції. Амплітудна маніпуляція (ASK) не використовується з тієї причини, що канали мікрохвильового діапазону мають широку смугу пропускання, а підсилювачі, які забезпечують однаковий коефіцієнт підсилення для широкого діапазону частот, дуже багато коштують.

З урахуванням перелічених вище властивостей електромагнітних полів і загальних принципів побудови бездротових систем зв'язку до теперішнього часу застосовуються такі типи каналів телекомунікаційних систем мікрохвильового діапазону:

- двоточковий канал;
- канал із одним джерелом і декількома приймачами;
- канал з декількома джерелами і декількома приймачами;
- супутниковий канал зв'язку.

1 **Двоточковий канал зв'язку.** Типова схема провідного двоточкового каналу є популярною і для бездротового зв'язку. За двоточною схемою можуть працювати бездротові канали різного призначення, які використовують різні діапазони частот.

У телекомунікаційних первинних мережах така схема вже довгий час використовується для створення так званих *радіорелейних ліній зв'язку*. Таку лінію утворюють кілька веж, на яких установлені параболічні спрямовані антени (рис. 4.40). Кожна така лінія працює в мікрохвильовому діапазоні на частотах декількох гігагерц. Спрямована антена концентрує енергію у вузькому пучку, який дозволяє передавати інформацію на значні відстані, як правило, до 50 км. Високі вежі забезпечують пряму видимість антен.

Інший приклад бездротової двоточної лінії зв'язку показаний на рис. 4.41. Тут вона використовується для з'єднання двох комп'ютерів. Така лінія утворює найпрос-

тіший сегмент локальної мережі, тому відстані і потужності сигналу тут принципово інші.

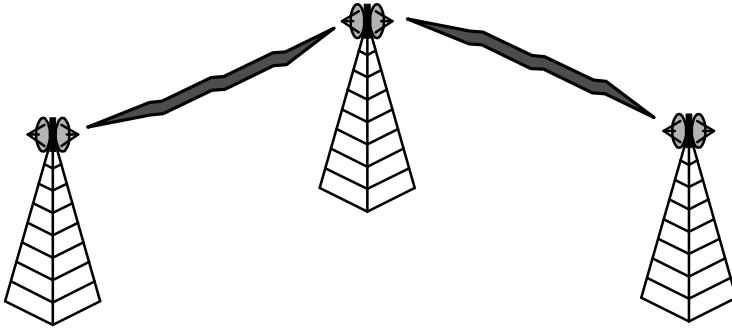


Рисунок 4.40 – Схема радіорелейної лінії зв'язку

Для відстаней у межах одного приміщення можуть використовуватися як діапазон інфрачервоних хвиль, так і мікрохвильовий діапазон (рис. 4.41).

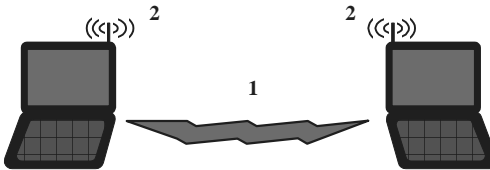


Рисунок 4.41 – Бездротовий зв'язок двох комп'ютерів:  
1 – через інфрачервоний порт;  
2 – через мікрохвильові антени

Більшість сучасних ноутбуків оснащена вбудованим інфрачервоним портом, тому таке з'єднання може бути утворене автоматично, як тільки порти двох комп'ютерів виявляться в межах прямої видимості (або видимості відбитого променя).

**2 Канал зв'язку одного джерела і декількох приймачів.** Схема бездротового каналу з одним джерелом і декількома приймачами характерна для такої організації доступу, при якій термінали користувача з'єднуються з базовою станцією (Base Station, BS).

Бездротові лінії зв'язку для схеми одного джерела і декількох приймачів використовуються як для фіксованого доступу, так і для мобільного.

На рис. 4.42 показаний варіант фіксованого доступу за допомогою мікрохвильових ліній зв'язку.

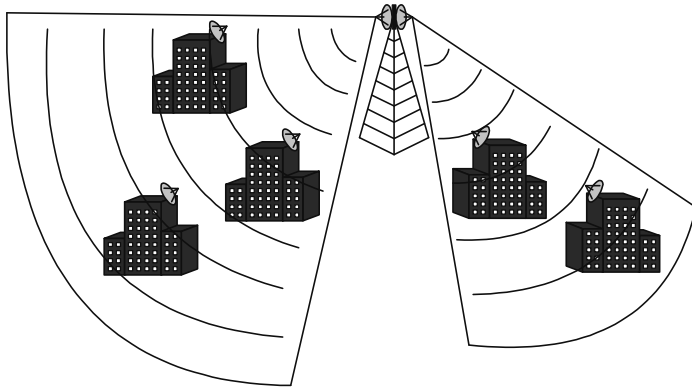


Рисунок 4.42 – Фіксований бездротовий доступ

Оператор зв'язку використовує високу вежу (можливо, телевізійну), щоб забезпечити пряму видимість із антенами, установленими на дахах будинків своїх клієнтів. Фактично такий варіант може являти собою набір двоточкових ліній зв'язку – за кількістю будинків, які необхідно з'єднати з базовою станцією. Однак це досить марнотратний варіант, тому що для кожного нового клієнта потрібно встановлювати нову антену на вежі. Тому для економії частіше застосовують антени, які захоплюють певний сектор, наприклад у  $45^\circ$ . Тоді за рахунок декількох антен оператор

може забезпечити зв'язок у межах повного сектора в  $360^\circ$ , як правило, на обмеженій відстані (переважно у кілька кілометрів).

**3 Канал зв'язку декількох джерел і декількох приймачів.** У цьому випадку бездротова лінія зв'язку являє собою загальне електромагнітне середовище, поділене декількома вузлами. Кожний вузол може використовувати це середовище для взаємодії із будь-яким іншим вузлом без звертання до базової станції. Оскільки базова станція відсутня, то необхідно використовувати децентралізований алгоритм доступу до середовища.

Найчастіше такий варіант бездротового каналу застосовується для з'єднання комп'ютерів (рис. 4.43).

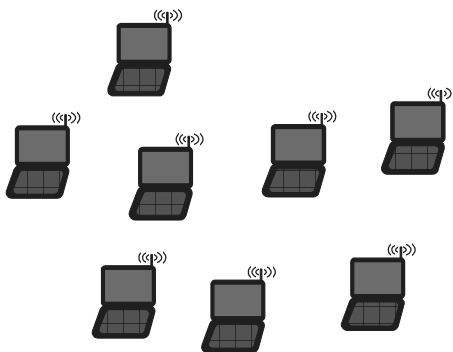


Рисунок 4.43 – Схема бездротової багатоточкової лінії зв'язку

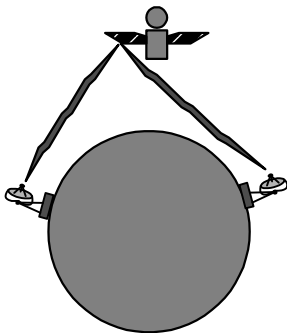


Рисунок 4.44 – Супутник як відби-

Сьогодні такі мережі передають дані зі швидкістю понад 100 Мбіт/с у мікрохвильовому або інфрачервоному діапазоні.

**4 Супутникові канали зв'язку.** Супутниковий зв'язок використовується для організації високошвидкісних мікрохвильових протяжних

ліній. Оскільки для таких ліній зв'язку потрібна пряма видимість, яку через викривлення Землі неможливо забезпечити на великих відстанях, то супутник як відбивач сигналу є природним розв'язком цієї проблеми (рис. 4.44).

Сьогодні супутник може відігравати роль вузла первинної мережі, а також телефонного комутатора і комутатора-маршрутизатора комп'ютерної мережі. Для цього апаратура супутників може взаємодіяти не тільки з наземними станціями, але і між собою, утворюючи прямі космічні бездротові лінії зв'язку. Принципово техніка передавання мікрохвильових сигналів у космосі і на Землі не відрізняється, однак у супутникових ліній зв'язку є і очевидна специфіка – один із вузлів такої лінії постійно перебуває в польоті, причому на великій відстані від інших вузлів. Для супутникового зв'язку союз ІТУ виділив кілька частотних діапазонів, наведених у табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Частотні діапазони для супутникового зв'язку

Діапазон	Частота спадання, ГГц	Частота сходу, ГГц
<i>L</i>	1,5	1,6
<i>S</i>	1,9	2,2
<i>C</i>	3,7-4,2	5,925-6,425
<i>Ku</i>	11,7-12,2	14,0-14,5
<i>Ka</i>	17,7-21,7	27,5-30,5

Історично першим використовувався діапазон *C*, у якому для кожного із дуплексних потоків Земля-Супутник (частота сходу) і Супутник-Земля (частота спадання) виділяється по 500 МГц, що достатньо для великої кількості каналів. Діапазони *L* та *S* призначають для організації мобільних послуг за допомогою супутників. Вони також часто використовуються наземними системами. Діапазони

*Ku* та *Ka* поки що мало «населені» на Землі, їх застосуванню перешкоджає висока вартість обладнання, особливо для діапазону *Ka*.

### **Запитання для самоперевірки**

1 Які основні типи ліній передачі використовують у техніці НВЧ? За якими ознаками вони класифікуються?

2 У чому відмінність принципів побудови багатозв'язних і однозв'язних ліній передачі?

3 Чим відрізняються смугові лінії передачі від коаксіальних?

4 Які загальні властивості мають хвилеводи швидких хвиль: прямокутні, круглі, П- і Н-подібних перерізів?

5 У чому полягають загальні принципи збудження хвилеводів?

6 Які типи хвилеводів повільних хвиль вам відомі? У чому їх відмінність від хвилеводів швидких хвиль?

7 Які основні типи волоконних світловодів вам відомі?

8 Який принцип побудови періодичних сповільнювальних систем?

9 У чому відмінність об'ємних резонаторів від коливальних контурів із зосередженими параметрами?

10 Які основні принципи побудови діелектричних резонаторів?

11 На які групи можна поділити антени за принципом дії та які основні характеристики визначають їхні властивості?

12 У чому полягає відмінність антенних решіток від апертурних антен? Як класифікують антени за конструкцією?

13 Які основні ознаки принципів формування полів у відкритих (квазіоптичних) та закритих (хвилевідних) електродинамічних системах?

14 Які типи квазіоптичних систем з періодичними металевими неоднорідностями вам відомі?

15 Яку роль виконують періодичні металодіелектричні структури при побудові нових функціональних елементів квазіоптичних систем?

## РОЗДІЛ 5 МЕТОДИ І ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

### 5.1 Загальна характеристика методів розв'язання задач

Умовно методи розв'язання задач з «Теорії поля» можна поділити на три групи: аналітичні, числові, експериментального моделювання і графічної побудови. Найбільш наочними з погляду фізичного аналізу електромагнітних процесів є аналітичні методи, які в основному застосовуються для потенційних електричних і магнітних полів. Високий рівень розвитку числових методів практично звів нанівець роль багатьох методів експериментального моделювання і графічної побудови, які у наш час в основному використовуються з метою демонстрації, наприклад, при поставленні лабораторних робіт. Зупинимося коротко на порівняльному аналізі основних методів розв'язання задач теорії поля із зазначенням рамок їх застосування.

*Аналітичні методи аналізу постійних полів* умовно можна розділити на розв'язання прямих і зворотних задач.

Пряма задача аналізу постійних електричних полів полягає у визначенні розподілу  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $j$  у діелектрику та  $\vec{E}$ ,  $\vec{d}$ ,  $j$  у провідному середовищі як функції координат за заданим розкладом зарядів, струмів або потенціалів (різниці потенціалів) заряджених тіл. Розрахунки постійного магнітного поля полягають в обчисленні  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $j_m$  і  $A$  залежно від координат за відомим розподілом струмів або різницею магнітних скалярних потенціалів.

Зворотна задача аналізу полягає у визначенні закону розподілу зарядів або струмів за заданим розподілом напруженостей або потенціалів. При розв'язанні обох за-



вдань, як правило, відомі параметри, розміри, розміщення тіл і електротехнічні властивості середовища.

Аналітичні методи аналізу крайових задач постійних електричних і магнітних полів, а також хвильових процесів передбачають розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних: Лапласа, Пуассона, Гельмгольца і Даламбера. Розрахунки полів проводять у такій системі координат, у якій координатні поверхні збігаються або близькі до граничних поверхонь.

*Метод, який ґрунтується на застосуванні теореми Гауса і закону повного струму.* Теорему Гауса в інтегральній формі  $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \sum_k Q_k$  застосовують для визначення вектора  $\vec{D}$  ( $\vec{E}$ ), коли потік цього вектора рівномірно розподілений по поверхні інтегрування, а його числове значення однакове в кожній точці поверхні. Закон повного струму в інтегральній формі  $\oint_l \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum I$  застосовують, коли може

бути використана симетрія поля, числове значення  $\vec{H}$  у всіх точках контуру інтегрування те саме.

*Метод безпосереднього інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа.* Із рівнянь Пуассона  $\nabla^2 j = -r/e_a$  та

$\nabla^2 \vec{A} = -m_a \vec{d}$  знаходять розподіл у просторі потенціалів  $j$

і  $\vec{A}$  за заданими зарядами, струмами, і, навпаки, за відомим розподілом  $j$  і  $\vec{A}$  визначають розподіл зарядів і струмів. Для електростатичного поля поза зарядами та для постійних електричного і магнітного полів поза струмами використовують рівняння Лапласа  $\nabla^2 j = 0$ ,  $\nabla^2 j_m = 0$ . Рівняння розв'язують у системі координат, що відповідає фор-

мі граничної поверхні. При заданих зарядах і струмах задача зводиться до інтегрування диференційних рівнянь у частинних похідних і визначення постійних інтегрування за граничними умовами. Рівняння Пуассона і Лапласа розв'язують для кожної області із постійними  $\epsilon$  та  $m$ .

*Метод розділення змінних.* Одержати розв'язок рівнянь Пуассона і Лапласа в частинних похідних для двовимірних і особливо тривимірних полів часто дуже важко. У випадку можливого розділення змінних і виконання граничних умов розв'язання рівнянь виконують методом Фур'є (методом розділення змінних). При цьому розв'язок рівняння наводять у вигляді добутку або добутку сум невідомих функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

*Метод дзеркальних зображень* застосовують для розрахунків електричних і магнітних полів у неоднорідних середовищах. Задачу зводять до кількох задач у однорідних середовищах, кількість яких залежить від кількості середовищ, які граничать між собою. Поле в однорідному середовищі, яке граничить з іншим однорідним середовищем, визначають, замінюючи друге середовище першим. Вплив другого середовища на поле першого враховують введенням додаткових (фіктивних) зарядів (струмів), розміщених у другому середовищі. Значення, знак і розміщення додаткових зарядів (струмів) у другому середовищі визначають так, щоб вони задовольняли граничні умови на межі поділу середовищ у вихідній задачі.

*Метод конформного перетворення (відображення)* застосовується для аналізу плоскопаралельних полів, які описуються рівнянням Лапласа. Плоскопаралельні поля складної конфігурації, зображені на комплексній площині, перетворюють за допомогою комплексного потенціалу в поля більш простої конфігурації на іншій комплексній площині. При цьому область дійсного поля відображається конформно, тобто без зміни значень і знаків кутів перети-

нання двох криволінійних ділянок поля, а, отже, зі збереженням подібності нескінченно малих елементів площі полів. Відображення здійснюють в основному на канонічні області – паралельну смугу, прямокутник, кругове кільце. Основними труднощами є відсутність загального способу одержання виразів для комплексного потенціалу (комплексної функції, яка відображає поле). В окремому випадку відображення полів, обмежених  $n$ -кутником, комплексний потенціал знаходять за формулою Крістофеля – Шварца.

**Числові методи розв'язання задач теорії поля.** Числові методи розрахунків електромагнітних полів приводять до системи алгебраїчних рівнянь. Як правило, порядок системи рівнянь збігається із загальним числом невідомих, яке може бути досить велике (сотні, тисячі).

Для реалізації числових методів здійснюють програмування розв'язання задачі на ЕОМ. Основним із недоліків цих методів є труднощі оцінки похибки. Джерелом похибок є як сам метод, так і похибки, викликані застосуванням ЕОМ.

*Метод інтегральних рівнянь (вторинних джерел)* [43]. Дослідження поля у неоднорідному середовищі зводять до розрахунків його у однорідному середовищі. Вплив на поле неоднорідностей (діелектричних, магнітних та тіл, які проводять струм) ураховують введенням у поле замість неоднорідностей вторинних джерел – зарядів поляризації, струмів намагніченості, наведених вихрових струмів та ін., розподілених на границях (в об'ємі) неоднорідностей. Спочатку визначають інтегральні рівняння, які повинні відповідати розподілу вторинних джерел, а потім за рівняннями поля з урахуванням заданих і вторинних джерел вирішують завдання аналізу поля.

*Метод кінцевих елементів* широко застосовується при розрахунках полів електронно-оптичних систем [44]. Область поля розбивається на кінцеве число підобластей –

елементів. У середині кожного елемента отримана функція апроксимується, наприклад, поліномом, коефіцієнти якого виражають через невідомі значення функції у вузлах елемента. Отримані співвідношення для коефіцієнтів підставляють в апроксимуючий поліном, який приводить до рівняння одержуваної функції залежно від її вузлових значень і форми елемента. Це інтерполяційне рівняння записують для кожного елемента згідно з наскрізною нумерацією всіх елементів області. Після цього за допомогою обраного методу знаходять рівняння для вузлових значень функції.

*Метод сіток*, як і попередній метод, застосовується при розрахунках електронної та іонної оптики [45]. Він ґрунтується на розв'язаннях рівнянь Лапласа і Пуассона в кінцевих різницях. В області досліджуваного поля наносять квадратну або полярну сітку, для вузлів якої розраховують значення потенціалів. Для цього на сітку наносять передбачувану картину поля, задаючись значеннями потенціалів у вузлах, потім за рівнянням зв'язку, отриманим із рівняння Лапласа, знаходять потенціали вузлів сітки. При першому підрахунку передбачувані і розраховані значення потенціалів за рівнянням зв'язку можуть не збігатися, утворюючи залишок. Тому знову задаються потенціали у вузлах і знову їх обчислюють. Розрахунки проводять доти, поки значення потенціалів не збіжаться або їхній залишок у всіх вузлах не буде перевищувати заданого значення. Метод застосовують у випадку граничних поверхонь довільної форми для двовимірних, тривимірних із осью симетрії та інших більш складних полів. Він дозволяє знайти розподіл скалярного потенціалу електричних і магнітних полів, а також розподіл векторного потенціалу магнітного поля.

*Метод кінцевих різниць у часовій області* [46, 47]. На сьогодні зростаюча швидкодія персональних комп'ютерів призводить до широкого застосування методу кінцевих рі-

зниць у часовій області FDTD (Finite-Difference Time-Domain), який є одним із основних методів числового розв'язання електродинамічних задач. Метод FDTD універсальний – він може бути з успіхом застосований практично у всіх задачах електродинаміки, які вимагають числового розв'язку. Частотні характеристики досліджуваного об'єкта можуть бути отримані за допомогою дискретного перетворення Фур'є або умовно, шляхом завдання квазігармонічного джерела і виконання розрахунків до виходу на режим, який установився. Крім простоти постановки, метод FDTD має безсумнівні переваги в плані моделювання електродинамічних об'єктів із неоднорідними, анізотропними та нелінійними середовищами з довільними формами поверхонь. У своїй класичній постановці метод FDTD ґрунтується на дискретизації рівнянь Максвелла, записаних у диференційній просторово-часовій формі.

*Експериментальні методи моделювання електромагнітних полів.* Моделювання за допомогою електричних ванн і провідних аркушів [1-3]. Експериментальне моделювання одного потенційного поля іншим базується на аналогії рівнянь і подібності картин електростатичного, електричного і магнітного полів (див. п. 2.5). Електростатичне поле і магнітне поле постійного струму заміняють електричним полем струму низької частоти (для виключення явища поляризації, а також більш легкого відтворення поля). При моделюванні полів необхідно дотримуватися геометричних конфігурацій і заданого розміщення електродів (полюсів), а також граничні умови. Двовимірні поля досліджують за допомогою металевих аркушів або аркушів із провідного паперу (див. додаток Б). Тривимірні поля моделюють за допомогою похилих ванн, заповнених слабопровідною рідиною. У всіх випадках еквіпотенціальні лінії досліджують за допомогою зонда.

*Моделювання за допомогою електричних сіток [1-3].* Будують електричну модель поля із великої кількості елементів електричного кола. Кожний елементарний об'єм поля приблизно замінюють резисторами, конденсаторами і котушками. За допомогою конденсаторів і котушок ураховують струми зміщення і е.р.с., збуджені змінним магнітним полем. Даний метод може бути застосований і для моделювання змінних електромагнітних полів. Метод передбачає числове оброблення результатів.

*Моделювання випромінювання електронного потоку за допомогою поверхневої хвилі діелектричного хвилеводу.* У [30] показано, що ефективним способом дослідження нових модифікацій квазіоптичних систем пристроїв дифракційної електроніки є метод експериментального моделювання, при якому випромінювання електронної хвилі струму просторового заряду моделюється випромінюванням поверхневої хвилі планарного діелектричного хвилеводу, розміщеного поблизу дифракційних решіток. При рівномірному і прямолінійному русі електронного потоку власне його поле має вигляд плоскої хвилі, подібну хвилю можна сформуванати плоским діелектричним хвилеводом. Частина потужності, яка поширюється вздовж хвилеводу, зосереджена в зовнішній стосовно нього області у вигляді поверхневого поля повільних хвиль, обумовлюючи його дифракцію на елементах періодичної структури. Це дозволяє за допомогою тільки хвильових полів моделювати ефекти дифракційного та черенковського випромінювань [40]. У результаті енергія повільних хвиль перетвориться в енергію швидких просторових гармонік, випромінювану у навколишній простір (відкритий резонатор, відкритий хвилевід і т.д.).

Оскільки в рамках даного навчального курсу для наочної ілюстрації електромагнітних процесів в основному використовуються аналітичні методи розв'язання задач теорії

поля, то зупинимось на більш докладному їх опису з демонстрацією на конкретних прикладах.

## 5.2 Методи, що ґрунтуються на теоремі Гауса і законі повного струму в інтегральній формі з використанням властивості накладення полів

Вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  або вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , який має плоску осьову або сферичну симетрію, визначається за допомогою теореми

Гауса в інтегральній формі  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum Q$  або

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum Q / \epsilon_a$  при  $\epsilon_a = const$  (див. п. 2.2). У цьому ви-

падку в кожній точці замкненої поверхні інтегрування (поверхні симетрії), яка охоплює заряди і проведена через

точку спостереження, вектор  $\vec{E}$  має те саме значення і може бути винесений з-під знака інтеграла. Наприклад, для поля точкового заряду і зарядженої кулі поверхнею інтегрування є сферична поверхня, а для поля зарядженої нескінченної осі і циліндра – циліндрична поверхня. У кожній

точці цих поверхонь вектор  $\vec{E}$  має тільки радіальну складову. Тому вектори  $\vec{E}$  та  $d\vec{S}$  збігаються за напрямком.

Тоді  $E = Q / (\epsilon_a S)$ , а потенціал  $j = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C$ .

За наявності декількох точкових (електричний диполь, однойменні точкові заряди, рівномірно заряджене кільце) або розподілених зарядів (рівномірно заряджений відрізок, нескінченно довга заряджена вісь, циліндри) поле розраховують, застосовуючи принцип накладення (див. п. 1.1). При цьому розподілені заряди за об'ємом поверхні та лінії

зображують у вигляді сукупності точкових зарядів  $r dV$ ,  $s dS$  і  $t dl$  відповідно.

Поле близько розміщених різнойменно заряджених нескінченних циліндрів (паралельно розміщених поза і усередині один одного) розглядають як поле, створене фіктивними різнойменно зарядженими осями – електричними осями (див. п. 2.7, приклад 2.5). Електричні осі не збігаються із геометричними осями циліндрів. Електричні осі розміщують таким чином, щоб поверхні кожного циліндра, який є еквіпотенціальною поверхнею, збігалися з еквіпотенціальною поверхнею поля електричних осей. У просторі поза циліндрами поле електричних осей збігається з полем циліндрів. У середині провідних циліндрів електричне поле відсутнє, а поверхнева густина зарядів на поверхні циліндрів нерівномірна внаслідок електростатичної індукції. Положення електричних осей можна визначити аналітично (див. приклад 2.5, формула (2.32)).

Вектор напруженості  $\vec{H}$  або вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  магнітного поля постійного струму, який має симетрію щодо контуру інтегрування, визначають за допомогою закону повного струму в інтегральній формі  $\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I$  (див. п. 2.4). У кожній точці замкненого контуру інтегрування, що охоплює струми, і проведеного через точку спостереження вектор  $\vec{H}$  має те саме значення і може бути винесений з-під знака інтеграла. При збігові векторів  $\vec{H}$  і  $d\vec{l}$  (вектор  $\vec{H}$  спрямований по дотичній до елемента контуру інтегрування  $d\vec{l}$ ) закон повного струму набуває вигляду  $H l = \sum I$ . Наприклад, напруженість магнітного поля, створюваного постійним струмом  $I$ , який проходить



по циліндричному дроту на відстані  $r$  від його осі,  $H = I / (2pr)$ . Докладне розв'язання задачі розглянуто в прикладі 1.1.

За наявності декількох проводів зі струмом або котушки із числом витків  $\nu$  вектор напруженості  $\vec{H}$  розраховують, застосовуючи, як і для електростатичного поля, метод накладення (див. п. 1.1).

### 5.3 Інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа для одновимірних полів

Найбільш просте рівняння Пуассона і Лапласа розв'язуються у випадку одновимірних полів, потенціал яких залежить від однієї координати. При цьому диференціальне рівняння в частинних похідних переходить в одновимірне диференціальне рівняння другого порядку, розв'язок якого при відомих граничних умовах не викликає труднощів. Якщо потенціал є функцією двох або трьох координат, то розв'язати рівняння в частинних похідних значно важче.

У крайовій електричній задачі необхідно враховувати такі умови, які повинен задовольняти потенціал  $j$  :

– у всіх точках поля, які не лежать на граничних поверхнях і не зайняті зовнішніми джерелами, справедливе рівняння Лапласа;

– потенціал  $j$  усюди безперервний, включаючи границі діелектриків і провідників;

– потенціал  $j$  усюди кінцевий;

– потенціал  $j$  має постійне значення усередині і на поверхні провідників;

–  $j$  – регулярна функція на нескінченності.

Крім цих умов, для однозначності розв'язку необхідне виконання граничних умов (2.10), (2.11) для векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  (див. п. 2.2).

При розв'язанні рівняння Лапласа для магнітного потенціалу  $j_m$  він усюди кінцевий і безперервний, включаючи граничні поверхні:  $j_{m1} = j_{m2}$ .

При визначенні магнітного поля усередині провідника з постійним струмом розв'язується рівняння Пуассона для векторного потенціалу  $\nabla^2 \vec{A} = -m_a \vec{d}$  при виконанні таких умов:

- у всіх точках поза областями зі струмом  $\nabla^2 \vec{A} = 0$ ;
- у всіх точках, які не лежать на границі  $\text{div} \vec{A} = 0$ ;
- тангенціальні та нормальні складові вектора  $\vec{A}$  – безперервні ( $A_{1t} = A_{2t}$ ,  $A_{1n} = A_{2n}$ ).

#### 5.4 Інтегрування рівнянь Лапласа і Гельмгольца методом розділення змінних (методом Фур'є)

Метод розділення змінних в основному використовується для розв'язання рівнянь Лапласа і однорідних хвильових рівнянь Гельмгольца. Розглянемо для простоти двовимірні випадки у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат.

*Система плоскопаралельних електродів.* Для поля, створеного плоскими, необмеженими по осі  $z$  електродами, рівняння Лапласа набуває вигляду [3]:

$$\frac{\partial^2 j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язок рівняння Лапласа можна записати у формі добутку двох незалежних функцій

$$j(x, y) = M(x)N(y).$$

Підставивши цей розв'язок у рівняння Лапласа і по-членно розділивши на добуток  $M(x)N(y)$ , знаходимо

$$\frac{1}{M(x)} \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -\frac{1}{N(y)} \frac{d^2 N(y)}{dy^2}.$$

Оскільки ліва і права частини цього рівняння залежать від різних змінних, то вони повинні дорівнювати деякій сталій, наприклад  $K^2$  (стала розділення).

У результаті одержують два незалежні диференціальні рівняння:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \pm K^2 M(x), \quad \frac{d^2 N(y)}{dy^2} = \mathbf{m}K^2 N(y).$$

Розв'язок цих рівнянь при першій комбінації знаків при  $K$  має вигляд

$$M(x) = A \cos(Kx) + B \sin(Kx),$$

$$N(y) = C \operatorname{ch}(Ky) + D \operatorname{sh}(Ky).$$

При зворотній комбінації знаків при  $K$  гіперболічні і тригонометричні функції міняються місцями.

Спочатку знаходять ту незалежну функцію, за змінною якої задані нульові граничні умови, наприклад  $M(x)$ . Ця функція буде задовольняти задані однорідні граничні умови і не буде дорівнювати нулю (що не є цікавим) тільки при певних значеннях чисел  $K_n$ . Числа  $K_n$  у загальному випадку обчислюють, прирівнюючи до нуля головний визначник системи рівнянь, отриманої шляхом підстановки розв'язку  $M_n(Kx)$  у вираз для граничних умов (при  $x = a$  і  $x = b$ ). Визначник складають із коефіцієнтів при  $A_n$  та  $B_n$ , які розглядають як величини, які необхідно знайти. Потім будь-яке зі знайдених чисел  $K_n$  підставляють у цю систе-

му рівнянь і знаходять одну зі сталих, наприклад  $A$ , виражену через  $B$ . Однак числа  $K_n$  у ряді випадків можуть бути розраховані без складання системи рівнянь, безпосередньо за граничними умовами із урахуванням властивостей отриманого поля. Після знаходження  $K_n$  записують частковий розв'язок для функції:

$$N_n(y) = C_n \operatorname{ch}(K_n y) + D_n \operatorname{sh}(K_n y).$$

Загальний розв'язок вихідного диференційного рівняння має вигляд

$$j(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (A_n \cos(K_n x) + B_n \sin(K_n x)) \times \right. \\ \left. \times (C_n \operatorname{ch}(K_n y) + D_n \operatorname{sh}(K_n y)) \right].$$

Сталі  $C_n$  і  $D_n$  визначають із граничних умов за змінною  $y$  залежно від умови задачі. Знаючи  $j$ , нескладно визначити напруженість поля:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{\partial j}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial j}{\partial y}\right)^2}.$$

*Куля в зовнішньому однорідному полі* (схема розв'язання). Для кулі (кулястої порожнини) із урахуванням незалежності потенціалу від координати  $a$  рівняння Лапласа в сферичній системі координат має два доданки [3]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial j}{\partial q} \right) = 0. \quad (5.1)$$

Представляючи потенціал у вигляді  $j = M(r)N(q)$  і підставляючи його в (5.1), отримаємо

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{1}{N \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial N}{\partial q} \right) = 0. \quad (5.2)$$

У цьому рівнянні перший доданок залежить тільки від  $r$ , другий – від  $q$ , а їх сума дорівнює нулю. Ця умова ви-

конується або коли кожний доданок дорівнює нулю, або коли кожний доданок дорівнює якомусь поки що невідомому числу  $p$  (нехай перший доданок дорівнює  $+p$ , другий доданок дорівнює  $-p$ ), тобто:

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial M}{\partial r} \right) = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{N \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial N}{\partial q} \right) = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial M}{\partial r} \right) = p, \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{N \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial N}{\partial q} \right) = -p. \quad (5.6)$$

Із розв'язання рівнянь (5.3) і (5.4) випливає, що  $M_1 = \frac{A_1}{r} + A_2$  та  $N_1 = A_3$ .

Використовуючи підстановку Ейлера і рівняння (5.5), отримаємо  $M_2 = Cr^n$ , де  $n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p}$ . Розв'язок рівняння (5.6) має такий вигляд:  $N_2 = B \cos q$ , при підстановці якого знаходимо, що  $p=2$ . Тут  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $C$  і  $B$  – сталі інтегрування.

Повний розв'язок рівняння Лапласа можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} j = j_1 + j_2 = M_1 N_1 + M_2 N_2 = \frac{C_1}{r} + C_2 + \\ + \left( C_3 r + \frac{C_4}{r^2} \right) \cos q. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Позначимо потенціал усередині кулі  $j_i$ , поза кулею  $j_e$ .

Тоді потенціали для внутрішньої і зовнішньої областей кулі запишуться у такий спосіб:

$$j_i = \frac{C_{1i}}{r} + C_{2i} + \left( C_{3i}r + \frac{C_{4i}}{r^2} \right) \cos q, \quad (5.8)$$

$$j_e = \frac{C_{1e}}{r} + C_{2e} + \left( C_{3e}r + \frac{C_{4e}}{r^2} \right) \cos q.$$

Сталі інтегрування  $C$  знаходять із граничних умов, які залежать від типу заданого поля (електричного або магнітного) і матеріалу кулі (діелектрик, магнетик, провідник).

*Циліндр у зовнішньому однорідному полі* (схема розв'язання). Рівняння Лапласа в циліндричній системі координат із урахуванням нескінченності системи по осі  $z$  має вигляд [3]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 j}{\partial a^2} = 0. \quad (5.9)$$

Аналогічно до кулі розв'язок знайдемо у вигляді  $j = M(r)N(a)$ , у результаті підстановки якого в (5.9) отримуємо

$$\frac{r}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial a^2} = 0. \quad (5.10)$$

У цьому рівнянні перший доданок залежить тільки від  $r$ , другий – від  $a$ , а їх сума дорівнює нулю. Ця умова виконується або коли кожний доданок дорівнює нулю, або коли кожний доданок дорівнює якомусь поки що невідомому числу  $p$  (нехай перший доданок дорівнює  $+p$ , другий доданок дорівнює  $-p$ ), тобто:

$$\frac{r}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial M}{\partial r} \right) = 0, \quad (5.11) \quad \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial a^2} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{r}{M} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial M}{\partial r} \right) = p, \quad (5.13) \quad \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial a^2} = -p. \quad (5.14)$$

Із рівняння (5.11) отримуємо, що  $M_1 = A_1 \ln r + A_2$ , із (5.12) отримуємо, що  $N_1 = A_3$ .

Із рівняння (5.13) отримуємо, що  $M_2 = Cr^n$ , де  $n_{1,2} = \pm\sqrt{p}$ . Розв'язок рівняння (5.14) має вигляд  $N_2 = B \cos a$ , звідки  $p=1$ . Тут  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $C$  і  $B$  – сталі інтегрування.

Тоді повний розв'язок рівняння Лапласа можна навести у вигляді

$$j = j_1 + j_2 = M_1 N_1 + M_2 N_2 = C_1 \ln r + C_2 + \left( C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos a. \quad (5.15)$$

Позначимо потенціал усередині циліндра  $j_i$ , поза циліндром  $j_e$ .

Тоді потенціали для внутрішньої і зовнішньої областей

$$j_i = C_{1i} \ln r + C_{2i} + \left( C_{3i} r + \frac{C_{4i}}{r} \right) \cos a, \quad (5.16)$$

$$j_e = C_{1e} \ln r + C_{2e} + \left( C_{3e} r + \frac{C_{4e}}{r} \right) \cos a.$$

Сталі інтегрування  $C$  знаходять із граничних умов і залежать від того, з якого матеріалу виготовлений циліндр.

*Граничні умови для кулі і циліндра*

1 Для діелектричних і магнітних куль (циліндрів) зручно потенціал на початку координат взяти таким, що дорівнює нулю ( $j_{r=0} = 0$ ).

2 Заряд кулі  $Q$  на нескінченності ( $r \rightarrow \infty$ ) сприймається як точковий заряд  $j_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r} - Er \cos a$ , а заряджений

циліндр – як заряджена вісь  $j_0 = \frac{t}{2\pi\epsilon_a} \ln r - Er \cos a$ .

3 На поверхні провідної незарядженої кулі (циліндра) потенціал безперервний (поверхня екіпотенціальна  $j_{r=R} = const$ ):  $j_{1(r=R)} = j_{2(r=R)}$  або  $E_{1t} = E_{2t}$  ( $H_{1t} = H_{2t}$ ).

4 На границі поділу діелектричних середовищ нормальні складові вектора  $\vec{D}$  безперервні:  $D_{1n} = D_{2n}$ ,  $e_1 \frac{\partial j_1}{\partial r} = e_2 \frac{\partial j_2}{\partial r}$  (із урахуванням заданої поляризованості  $\vec{P}$  кулі  $D_{1n} = e_0 \vec{E}_2 + \vec{P}$ ).

5 На границі поділу провідних середовищ нормальні складові вектора  $\vec{d}$  безперервні:  $d_{1n} = d_{2n}$ ,  $g_1 \frac{\partial j_1}{\partial r} = g_2 \frac{\partial j_2}{\partial r}$ .

6 На границі поділу магнітних середовищ нормальні складові вектора  $\vec{B}$  дорівнюють:  $B_{1n} = B_{2n}$ ,  $m_1 \frac{\partial j_{1m}}{\partial r} = m_2 \frac{\partial j_{2m}}{\partial r}$  ( $j_m$  – магнітний потенціал поля з урахуванням заданої намагніченості  $\vec{M}$  кулі  $B_{1n} = m_0 \vec{H}_2 + m_0 \vec{M}$ ).

З урахуванням граничних умов 1-6 загальні розв'язки (5.8) і (5.16) для конкретних об'єктів будуть мати такий вигляд.

1. Якщо куля діелектрична, то потенціал на нескінченності  $j = j_0 + E_0 r \cos q$ , звідси

$$j_e = j_0 + \left( E_0 r + \frac{C_{4e}}{r^2} \right) \cos q, \quad j_i = j_0 + C_{3i} r \cos q.$$

Із граничних умов (при  $r = R$ )  $j_i = j_e$  і  $D_{1n} = D_{2n}$  знаходимо, що  $C_{3i} = E_0 \frac{3e_e}{2e_e + e_i}$ ,  $C_{4e} = R^3 E_0 \frac{e_e - e_i}{2e_e + e_i}$ .

$$\text{Тоді } j_i = j_0 + E_0 r \frac{3e_e}{2e_e + e_i} \cos q = j_0 + E_0 \frac{3e_e}{2e_e + e_i} z,$$



$$j_e = j_0 + E_0 \left( r + \frac{R^3}{r^2} \frac{(e_e - e_i)}{(2e_e + e_i)} \right) \cos \alpha .$$

2. Якщо куля провідна, але не заряджена, то  $j_i = j_0$ .  
 $C_{4e} = -E_0 R^3$ .

$$j_e = j_0 + E_0 \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \alpha .$$

3. Якщо провідна куля заряджена, то  $j_i = j_0$ .

$$j_e = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} + j_0 + E_0 \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \alpha .$$

Для опису магнітного середовища замість потенціалу  $j$  використовують скалярний магнітний потенціал  $j_m$ .

Знаючи  $j$ , нескладно визначити напруженість поля

$$E_i = -\frac{\partial j_i}{\partial z}, \quad E_e = \sqrt{E_r^2 + E_q^2} = \sqrt{\left( -\frac{\partial j_e}{\partial r} \right)^2 + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial j_e}{\partial \alpha} \right)^2} .$$

4. Якщо циліндр діелектричний, то потенціал на нескінченності  $j = j_0 + E_0 r \cos \alpha$ , звідси

$$j_e = j_0 + \left( E_0 r + \frac{C_{4e}}{r} \right) \cos \alpha, \quad j_i = j_0 + C_{3i} r \cos \alpha .$$

Із граничних умов (при  $r = R$ )  $j_i = j_e$  і  $D_{1n} = D_{2n}$  знаходимо, що  $C_{3i} = E_0 \frac{2e_e}{e_e + e_i}$ ;  $C_{4e} = R^2 E_0 \frac{e_e - e_i}{e_e + e_i}$ .

Тоді  $j_i = j_0 + E_0 r \frac{2e_e}{e_e + e_i} \cos \alpha = j_0 + E_0 \frac{2e_e}{e_e + e_i} z$ ,

$$j_e = j_0 + E_0 \left( r + \frac{R^2}{r} \frac{(e_e - e_i)}{(e_e + e_i)} \right) \cos \alpha .$$

5. Якщо циліндр провідний, але незаряджений, то  $j_i = j_0$ .  $C_{4e} = -E_0 R^2$ .

$$j_e = j_0 + E_0 \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \cos a.$$

6. Якщо провідний циліндр заряджений, то  $j_i = j_0$ .

$$j_e = \frac{t}{2pe_a} \ln r + j_0 + E_0 \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \cos a.$$

Для опису магнітного середовища замість потенціалу  $j$  використовують скалярний магнітний потенціал  $j_m$ .

Знаючи  $j$ , нескладно визначити напруженість поля

$$E_i = -\frac{\partial j_i}{\partial z}, \quad E_e = \sqrt{E_r^2 + E_a^2} = \sqrt{\left( -\frac{\partial j_e}{\partial r} \right)^2 + \left( -\frac{\partial j_e}{\partial a} \right)^2}.$$

Аналізуючи отримані вище співвідношення для потенціалів куль і циліндрів із урахуванням конкретних граничних умов, можна зробити узагальнюючі висновки стосовно досліджуваних об'єктів.

1. У діелектричних кулі та циліндрі з діелектричною проникністю більшою, ніж діелектрична проникність середовища, результуюче поле менше від зовнішнього поля. Це пояснюється тим, що поле зв'язаних зарядів усередині тіла спрямоване назустріч зовнішньому полю. Таке поле зв'язаних зарядів називають *деполяризуючим*. Деполяризуюче електричне та результуюче поля в кулі і циліндрі є однорідними тільки в діелектричному еліпсоїді, кулі і циліндрі.

2. Вирази для потенціалу усередині та поза кулею (циліндром), а також для напруженості зовнішнього електричного поля в діелектрику і магнітного поля у феромагнетику аналогічні. Перехід від одного виразу до іншого може бути здійснений заміною відповідних величин, виходячи із аналогії рівнянь полів (див. п. 2.5). Наприклад, напруженість

поля усередині діелектричної кулі із проникністю  $\epsilon_1$ , поміщеної в однорідне електричне поле напруженістю  $\vec{E}_0$  в середовищі із проникністю  $\epsilon_2$ ,  $E_i = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0$ , а усередині кулі в магнітному полі  $H_i = \frac{3m_2}{m_1 + 2m_2} H_0$ .

3. Задачу про магнітну кулю і циліндр, внесені в однорідне магнітне поле, розв'язують, використовуючи аналогію рівнянь із рівняннями електростатичного поля (див. п. 2.5). Намагнічування магнітної кулі також отримують однорідним. При внесенні магнітної кулі в однорідне магнітне поле напруженість магнітного поля усередині кулі обумовлена намагніченістю кулі, спрямована назустріч напруженості зовнішнього поля. Таке поле називають полем, що розмагнічує. При цьому результуюче магнітне поле усередині кулі менше від зовнішнього поля.

*Розв'язок рівняння Гельмгольца для  $H$ -хвилі в прямокутному хвилеводі.* Рівняння Гельмгольца для  $H$ -хвилі

$$\nabla^2 \vec{H}_z + w^2 \epsilon_a m_a \vec{H}_z = 0. \quad (5.17)$$

Підставивши значення  $\dot{H}_z(x, y, z, t) = \dot{H}_z(x, y) e^{j(\omega t - k_p z)}$  і здійснивши диференціювання по  $z$ , отримаємо

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + (w^2 \epsilon_a m_a - k_p^2) \dot{H}_z = 0, \quad (5.18)$$

де  $w^2 \epsilon_a m_a = k^2$ .

Тоді рівняння (5.17) перетвориться у двовимірне диференційне рівняння такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + (k^2 - k_p^2) \dot{H}_z = 0. \quad (5.19)$$

Скористаємося методом розділення змінних і зобразимо  $\dot{H}_z$  у вигляді добутку двох незалежних функцій:

$$\dot{H}_z(x, y) = X(x)Y(y). \quad (5.20)$$

Підставивши (5.20) в (5.19), маємо

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + (k^2 - k_p^2) = 0. \quad (5.21)$$

Позначимо  $k^2 - k_p^2 = k_x^2 + k_y^2$ , де  $k_x$  і  $k_y$  за аналогією із поздовжніми хвильовими числами називаються поперечними хвильовими числами.

Таким чином, одержуємо два незалежні рівняння:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2.$$

Загальний розв'язок цих рівнянь має такий вигляд:

$$\dot{H}_z = jH_0 \cos(k_x x + j_x) \cos(k_y y + j_y), \quad (5.22)$$

де  $H_0 = \frac{E_0}{Z_c}$  – задана амплітуда поля;

$k_x, k_y, j_x, j_y$  – сталі інтегрування, які знаходять із граничних умов на стінках прямокутного хвилеводу (див. п. 3.4).

### 5.5 Метод дзеркальних зображень

Для розрахунків електростатичних полів, особливо обмежених якою-небудь провідною поверхнею правильної форми або в яких є геометрично правильної форми границя між двома діелектриками, широко застосовують *метод дзеркальних зображень*. Це штучний прийом розрахунків, у якому, крім заданих зарядів, вводять ще додаткові заряди, величини і місце розміщення яких вибирають так, щоб задовольнити граничні умови у полі. Якщо границя між двома середовищами плоска, то додаткові («фіктивні») за-

ряди поміщають територіально там, де перебувають дзеркальні (у геометричному змісті) відображення заданих зарядів. Метод дзеркальних зображень застосовують не тільки для розрахунків електростатичних полів, але й для розрахунків електричних полів у провідному середовищі та магнітних полів постійного струму. Обґрунтуванням методу і правильності розв'язку є теорема одиничності розв'язку (див. п. 1.1).

Розглянемо два приклади на метод дзеркальних зображень.

*Система «провідне середовище-діелектрик».* Якщо в діелектричному середовищі із діелектричною проникністю  $\epsilon$  помістити точковий заряд (заряджену нитку), то вільні електрони провідного середовища будуть рухатися у бік (або в протилежний бік) цього заряду (явище електростатичної індукції). У результаті електричне поле в діелектрику буде дорівнювати сумі електричного поля, створеного точковим зарядом, і поля, створеного вільними електронами провідного середовища.

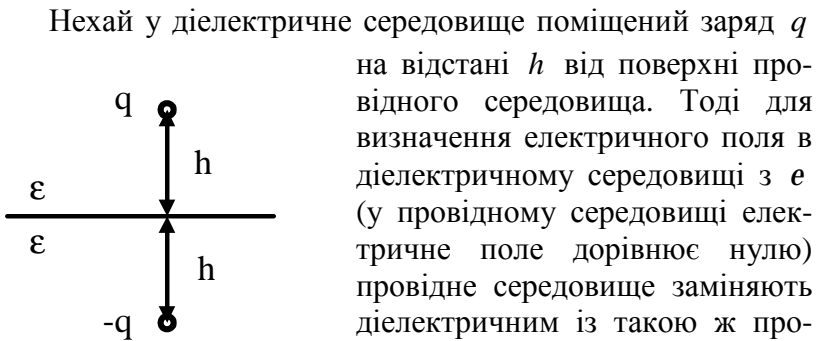


Рисунок 5.1 – Метод дзеркальних відображень для системи «діелектрик-провідник»

Нехай у діелектричне середовище поміщений заряд  $q$  на відстані  $h$  від поверхні провідного середовища. Тоді для визначення електричного поля в діелектричному середовищі з  $\epsilon$  (у провідному середовищі електричне поле дорівнює нулю) провідне середовище замінюють діелектричним із такою ж проникністю  $\epsilon$  і вводять додатковий «уявний» заряд  $q$  тієї самої величини, але протилежний за знаком, розміщений дзеркально на відстані  $h$  від поверхні поділу (рис. 5.1). Поле в будь-якій

точці діелектрика буде дорівнювати векторній сумі поля фактичного і «уявного» зарядів.

Розглянемо застосування методу дзеркальних зображень для системи «діелектрик-діелектрик». Нехай у діелектрику з діелектричною проникністю  $\epsilon_1$  на відстані  $h$  від поверхні поділу перебуває заряд  $q_1$  (рис. 5.2 а). Необхідно визначити поле в одному із діелектриків. Для розв'язання цієї задачі має важливе значення те, у якому із діелектриків – з  $\epsilon_1$  або з  $\epsilon_2$  – необхідно визначити поле.

Розглянемо два випадки.

Нехай необхідно визначити поле в діелектрику з  $\epsilon_1$ , де перебуває заряд  $q_1$ . Тоді діелектрик із  $\epsilon_2$  замінюють на діелектрик з  $\epsilon_1$  і в діелектрику з  $\epsilon_2$  вводять додатковий «уявний» заряд  $q_2$ , розміщений дзеркально на відстані  $h$  від поверхні поділу (див. рис. 5.2 б). Причому

$$q_2 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} q_1.$$

Тоді поле в будь-якій точці діелектрика, у якому перебуває заряд, буде дорівнювати векторній сумі поля фактичного  $q_1$  та «уявного»  $q_2$  зарядів.

Нехай необхідно визначити поле в діелектрику з  $\epsilon_2$ , у якому відсутній заряд  $q$ . Тоді діелектрик із  $\epsilon_1$  замінюють на діелектрик з  $\epsilon_2$ , а заряд  $q_1$  замінюють на заряд  $q_3$ , розміщений у тому ж місці, де і  $q_1$  (див. рис. 5.2 в). Причому

$$q_3 = \frac{2\epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} q_1.$$

Тоді поле в будь-якій точці діелектрика з  $\epsilon_2$  буде визначатися полем, створеним зарядом  $q_3$ .

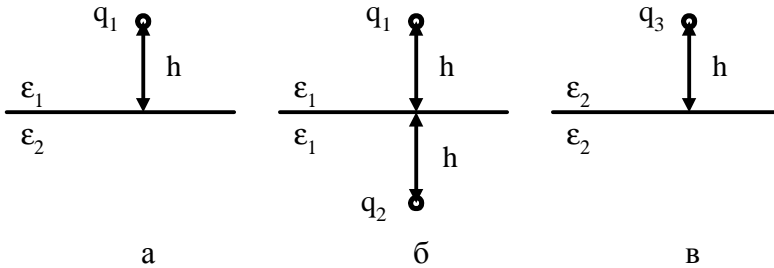


Рисунок 5.2 – Метод дзеркальних зображень для системи діелектрик-діелектрик:

а – вихідне завдання;

б – визначення поля в діелектрику з  $\epsilon_1$ ;

в – визначення поля в діелектрику з  $\epsilon_2$

Абсолютно ідентичне застосування методу дзеркальних зображень і у випадку поля, створеного зарядженою ниткою. Тільки в цьому разі замість поля заряду  $q$  визначається поле зарядженої нитки  $t$ .

Метод дзеркальних зображень застосовують не тільки для розрахунків електростатичних полів, але й для розрахунків електричних полів у провідному середовищі та магнітних полів.

У випадку електричного поля постійного струму визначається електричне поле, створене не зарядом  $q$ , а струмом  $I$ , і замість діелектриків з діелектричними проникностями  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  розглядаються провідні середовища з питомими провідностями  $g_1$  і  $g_2$ .

У випадку магнітного поля постійного струму визначається результуюче магнітне поле, створене додатковими струмами  $I_2$  та  $I_3$ :

$$I_2 = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} I_1, \quad I_3 = \frac{2m_1}{(m_2 + m_1)} I_1.$$

## 5.6 Конформне перетворення (відображення) плоскопаралельних полів

Перетворення двовимірного плоскопаралельного поля, яке задовольняє рівняння Лапласа ( $\partial^2 j / \partial x^2 + \partial^2 j / \partial y^2 = 0$ ) у комплексній площині  $z = x + jy$ , справедливе і для комплексної площини  $w = u + jv$ , де одержують більш просте поле. Залежність  $w(z)$  встановлює зв'язок між точками площини  $Z$  і точками площини  $W$ . При цьому будь-яка нескінченно мала фігура на площині  $Z$  переходить у подібну нескінченно малу фігуру на площині  $W$ . Тому кути між пересічними кривими зберігаються. При цьому коефіцієнт лінійного розтягання (стиску) довільного нескінченно малого відрізка дорівнює модулю похідної  $dw/dz$ , а кут повороту відображення  $w(z)$  в точці  $z$  – аргументу цієї похідної. Таке відображення називають *конформним*.

Для здійснення конформного відображення необхідно і достатньо, щоб відображувана функція  $w(z)$  була аналітичною, однозначною, а похідна  $dw/dz$  усередині області ніде не перетворювалася в нуль.

При конформному перетворенні залишаються незмінними потенціал електродів, сумарні заряди, зосереджені на електродах, ємності електродів і загальна енергія поля. Конфігурація і лінійні розміри електродів, напруженість поля і густина зарядів на електродах змінюються.

При розв'язанні задач методом конформного перетворення основною невідомою функцією є комплексний потенціал – це комплексна функція  $w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ , яка описується сукупністю силових, наприклад,  $u(x, y) = const$ , і екіпотенціальних, наприклад,  $v(x, y) = const$ , ліній плоскопаралельного двовимірного



поля. За допомогою функції  $w(z)$  здійснюється перетворення поля із площини  $z(x, y)$  на площину  $w(u, v)$ , де картина поля спрощується. Значення комплексного потенціалу дозволяє одержати картину поля і всі величини, які характеризують досліджуване поле: напруженість, енергію, ємність, індуктивність та ін. При цьому для комплексного потенціалу повинні виконуватися такі умови:

- у кожній точці заданої області комплексний потенціал повинен бути однозначною функцією, маючи кінцеву і безперервну похідні, які не повинні перетворюватися в нуль (для цього необхідні і достатні умови  $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$  і  $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ );

- задовольняти рівняння Лапласа;

- дійсна і уявна частини – ортогональні, тому залежно від завдання одну із частин комплексного потенціалу, наприклад уявну частину, можна вважати потенційною функцією, а дійсну зобразити як потік вектора напруженості поля.

Таким чином, визначення плоскопаралельного поля, створеного двома електродами відомої форми, методом конформного перетворення зводиться до відшукування такої функції  $w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  або в полярних координатах  $w(z) = r \cdot e^{ja}$ , за допомогою якої можливо здійснити конформне відображення області  $D_z$  на площині  $Z$  із шуканим комплексним потенціалом на області  $D_w$  площини  $W$  з відомим комплексним потенціалом (або на якій комплексний потенціал легко розрахувати). Спільного методу знаходження функції  $w(z)$  для будь-якої форми електродів немає. Серед найпоширеніших відзначимо такі методи перетворення плоскопаралельних полів із застосуванням комплексного потенціалу [1-3]:

- метод заданого комплексного потенціалу;
- метод перетворення областей у канонічні;
- метод відображення за допомогою інтеграла Крістофеля – Шварца.

Як приклад проаналізуємо комплексну функцію вигляду  $w = Az = A \ln(r \cdot e^{ja})$  і визначимо конформне перетворення яких полів здійснюється цією функцією.

Перетворимо задану функцію  $r \cdot e^{ja}$ , виділивши уявну і дійсну частини:

$$w(z) = A \ln(r \cdot e^{ja}) = A \ln r + jAa = u + jv.$$

Візьмемо за рівняння еквіпотенціалей рівняння  $u = A \ln r = \text{const}$  (рівняння концентричних кіл), тоді рівняння силових ліній буде мати вигляд  $v = Aa = \text{const}$  (рівняння радіальних прямих), а модуль напруженості електричного поля запишеться у такий спосіб:

$$\left| \frac{\dot{\phantom{E}}}{E} \right| = \left| \frac{dw(z)}{dz} \right| = \frac{A}{r}.$$

Задана функція здійснює перетворення поля одиночного провідника круглого перерізу. Стала інтегрування  $A$  визначається за граничною умовою.

## 5.7 Приклади розв'язання задач

### *Теорема Гауса*

*Приклад 1* Визначити напруженість і потенціал електричного поля провідної рівномірно зарядженої кулі: заряд кулі  $Q$  радіус –  $a$ .

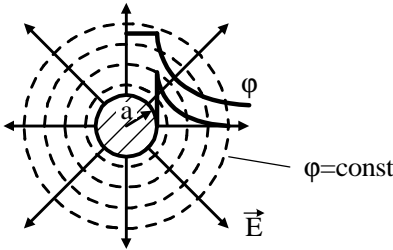
Розв'язок. Оскільки куля провідна, то усередині кулі поле відсутнє:  $E = 0$  при  $r < a$ .

На поверхні кулі рівномірно розподілений сумарний заряд  $Q$ .

Для знаходження електричного поля поза кулею  $r \geq a$  скористаємося теоремою Гауса в інтегральній формі (див. п. 2.2), яка для нашого випадку запишеться у такий спосіб:

$$e_a \oint_S \vec{E} d\vec{S} = Q. \quad (5.23)$$

За поверхню інтегрування виберемо сферу радіусом  $r > a$  із центром у місці розміщення центра кулі (рис. 5.3).



Очевидно, що через центральну симетрію  $\vec{E}$  і  $d\vec{S}$  колінеарні, а напруженість постійна на всій поверхні інтегрування. Тоді (5.23) набуде такого вигляду:

$$e_a E \oint_S dS = Q,$$

Рисунок 5.3 – Картина поля провідної рівномірно зарядженої кулі

звідси із урахуванням площі поверхні сфери маємо

$$e_a E 4\pi r^2 = Q, \quad E = \frac{Q}{4\pi e_a r^2}.$$

Потенціал кулі визначимо із загального співвідношення (див. п. 2.1)  $j = -\int_l \vec{E} d\vec{l}$ , яке для нашої задачі набуде вигляду

$$j = -\int E dr = -\frac{Q}{4\pi e_a} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi e_a r} + C.$$

Із отриманого виразу випливає, що  $j = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , отже, стала інтегрування  $C = 0$ .

$$\text{Відповідь: } E = \frac{Q}{4\pi e_a r^2}, j = \frac{Q}{4\pi e_a r}.$$

Порівнюючи дану відповідь із прикладом 1.3 (див. п. 1.6), доходимо висновку, що поле провідної кулі із зарядом  $Q$  збігається з полем, яке має однаковий із ним точковий заряд при розміщенні його в центрі кулі. Ідентичними є також картини полів (див. рис. 1.12 і рис. 5.3).

*Приклад 2* Визначити напруженості і потенціал електричного поля діелектричної рівномірно зарядженої кулі: заряд кулі  $Q$ , радіус –  $a$ .

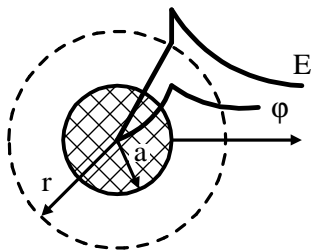


Рисунок 5.4 – Рівномірно заряджена діелектрична куля

При  $r < a$

$$e_a \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \vec{r} dV, \quad (5.24)$$

де для нашої задачі  $\vec{r} = \frac{Q}{V_{кулі}} = \frac{Q}{4/3\pi a^3}$ .

Підставивши в (5.24) значення  $\vec{r}$  і перетворивши ліву частину шляхом першого прикладу, будемо мати

$$e_a E \oint_S dS = \frac{Q}{4/3\pi a^3} \int_V dV. \quad (5.25)$$

Присутні в даній рівності інтеграли дорівнюють відповідно площі поверхні і об'єму кулі, що дозволяє рівність (5.25) записати в такому вигляді:

Розв'язок. Оскільки куля діелектрична, то електричне поле буде присутнє як усередині (за рахунок поляризаційних ефектів), так і ззовні кулі. При цьому електричне поле усередині кулі буде залежати від об'ємної густини заряду, тому теорему Гауса необхідно застосовувати для двох вищезазначених областей:  $r < a$  і  $r \geq a$  (рис. 5.4).

$$e_a E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{4/3\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Зробивши нескладні перетворення, отримаємо такий вираз для напруженості електричного поля:

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi e_{a1} a^3} = \frac{r}{3e_{a1}}.$$

Потенціал усередині кулі

$$j_1 = -\int E_1 dr = -\frac{r}{3e_{a1}} \int r dr = -\frac{r^2}{6e_{a1}} + C_1 = -\frac{Qr^2}{8\pi e_{a1} a^3} + C_1.$$

При  $r \geq a$  задача зводиться до прикладу 1, у результаті чого маємо:

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi e_{a2} r^2}, j_2 = \frac{Q}{4\pi e_{a2} r} + C_2.$$

Сталі інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  визначаються із граничних умов:  $j_2 = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ;  $j_1 = j_2$  при  $r = a$ . У результаті отримаємо, як і для попередньої задачі,  $C_2 = 0$ .

$$\text{Із } j_1 = j_2 \text{ при } r = a \text{ маємо } -\frac{Qa^2}{8\pi e_{a1} a^3} + C_1 = \frac{Q}{4\pi e_{a2} a}, \text{ звід-}$$

$$\text{ки } C_1 = \frac{Q}{4\pi a} \left( \frac{1}{e_{a2}} + \frac{1}{2e_{a1}} \right) = \frac{Q}{8\pi a} \cdot \frac{2e_{a1} + e_{a2}}{e_{a1} e_{a2}}.$$

У результаті потенціал усередині кулі буде описуватися такою функцією:

$$j_1 = -\frac{Qr^2}{8\pi e_{a1} a^3} + \frac{Q}{8\pi a} \cdot \frac{2e_{a1} + e_{a2}}{e_{a1} e_{a2}} = \frac{Q}{8\pi a} \left( \frac{2e_{a1} + e_{a2}}{e_{a1} e_{a2}} - \frac{r^2}{e_{a1} a^2} \right).$$

Відповідь:

$$\text{при } r < a \quad E_1 = \frac{Qr}{4\pi e_{a1} a^3}, j_1 = \frac{Q}{8\pi a} \left( \frac{2e_{a1} + e_{a2}}{e_{a1} e_{a2}} - \frac{r^2}{e_{a1} a^2} \right),$$

$$\text{при } r \geq a \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{a2} r^2}, \quad j_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{a2} r}.$$

Графічна картина розподілу полів і потенціалів для діелектричної кулі зображена на рис. 5.4.

### Закон повного струму

*Приклад 1* Через дрiт круглого перерізу радіуса  $a$  проходить постійний струм  $I$  (рис. 5.5). Визначити напруженості магнітного поля  $H$  усередині і поза проводом. Побудувати якісну картину розподілу полів.

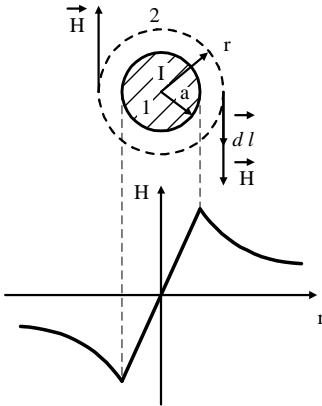


Рисунок 5.5 – Картина магнітного поля провідника зі струмом кінцевого діаметру

Розв'язок. Для знаходження магнітного поля усередині ( $r \leq a$ ) і поза ( $r \geq a$ ) проводом зі струмом скористаємося законом повного струму в інтегральній формі:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I, \quad (5.26),$$

$$\text{де } I = \int_s \vec{j} dS.$$

За контури інтегрування виберемо два кола з радіусами  $r \leq a$  і  $r \geq a$ . В обох випадках вектори  $\vec{H}$  і  $d\vec{l}$  колінеарні, тому  $H$  постійне на контурі інтегрування, і його можна ви-

нести за знак інтеграла  $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = H \oint_l dl = H \cdot 2\pi r$ . Вираз (5.26) набуде такого вигляду:

$$H = \frac{\sum I}{2\pi r}. \quad (5.27)$$

Для області  $r \leq a$ :

$$d = \frac{I}{p a^2}, \quad I_1 = \int_s \frac{I}{p a^2} dS = \frac{I}{p a^2} \int_s dS = \frac{I}{p a^2} \cdot \frac{p r^2}{2} = I \frac{r^2}{a^2}.$$

Підставимо в (5.27) значення  $I_1$  та отримаємо, що

$$H_1 = \frac{I r}{2p a^2}.$$

Для області  $r \geq a$ :  $I_2 = I$  і значення  $H_2 = \frac{I}{2p r}$ .

Відповідь:  $H_1 = \frac{I r}{2p a^2}$  при  $r \leq a$ ;  $H_2 = \frac{I}{2p r}$  при  $r \geq a$ .

Із отриманих відповідей випливає, що усередині дроту поле змінюється за лінійним законом, а поза проводом - як  $1/r$ . Поза проводом зміна поля аналогічна до тонкого провідника зі струмом, розглянутим у прикладі 1.1 (див. п. 1.6).

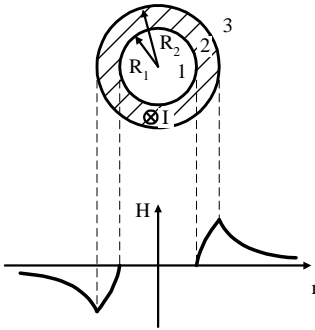


Рисунок 5.6 – Картина магнітного поля в трубі зі струмом

*Приклад 2* Уздовж труби круглого перерізу із внутрішнім радіусом  $R_1$  і зовнішнім радіусом  $R_2$  проходить постійний струм  $I$  (рис. 5.6). Визначити напруженості магнітного поля  $H$  усередині труби, у тілі труби і поза трубою. Побудувати якісну картину поля.

Розв'язок. За контури інтегрування виберемо три кола із радіусами  $r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  і  $r > R_2$ . Для знаходження полів скористаємося виразом (5.27).

Для області  $r < R_1$  струм усередині контуру  $I = 0$ , отже,  $H_1 = 0$ .

Для області  $R_1 < r < R_2$

$$d = \frac{I}{p(R_2^2 - R_1^2)},$$

$\oint_S dS = S_2 = p(R_2^2 - R_1^2)$  – площа кільця шириною  $R_2 - R_1$ .

$$\text{Тоді } I_2 = d S_2 = \frac{I p (r^2 - R_1^2)}{p (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{I (r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Підставляючи значення  $I_2$  в (5.27), отримуємо

$$H_2 = \frac{I}{2p r} \cdot \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Для області  $r > R_2$   $I_3 = I$ , тому  $H_3 = \frac{I}{2p r}$ .

*Відповідь:*  $H_1 = 0$  при  $r < R_1$ ;  $H_2 = \frac{I}{2p r} \cdot \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}$  при

$R_1 < r < R_2$ ;  $H_3 = \frac{I}{2p r}$  при  $r > R_2$ .

Із отриманих відповідей випливає те, що усередині труби поле відсутнє, у тілі труби і поза трубою поле змінюється за законом  $1/r$  зі збільшенням абсолютного значення  $H$  у першому випадку і зменшенням його у другому випадку.

*Приклад 3* По внутрішньому провіднику коаксіального кабелю радіуса  $R_1$  і зовнішньому провіднику товщиною  $R_3 - R_2$  в протилежних напрямках проходить постійний струм  $I$  (рис. 5.7). Визначити напруженість магнітного



поля в провідниках кабелю, а також у внутрішній і зовнішній областях. Побудувати якісну картину розподілу полів.

Розв'язок. За контури інтегрування розглянемо чотири області з радіусами  $r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$ ,  $R_2 < r < R_3$  і  $r > R_3$ . Для знаходження полів, як і раніше, скористаємося співвідношенням (5.27).

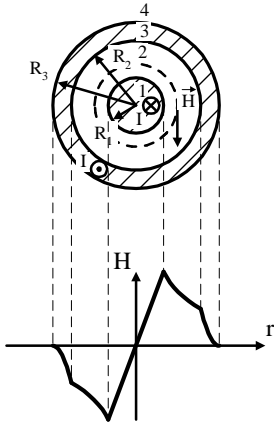


Рисунок 5.7 –  
Картина магнітного  
поля у коаксіальному  
кабелі

Із урахуванням того, що зовнішній провідник являє собою трубу зі струмом  $I$ , то його власне поле  $H_{mp}$  визначається аналогічно прикладу 2 таким виразом:

$$H_{mp} = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)}.$$

Тоді

Область  $r < R_1$  являє собою провідник радіуса  $R_1$  зі струмом  $I$  і напруженістю магнітного поля, визначеною в прикладі 1:

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi R_1^2}.$$

В області  $R_1 < r < R_2$  магнітне поле визначається струмом внутрішнього провідника  $I$  та може бути записано у вигляді

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}.$$

Поле в області  $R_2 < r < R_3$  визначається за принципом накладення полів, створених внутрішнім і зовнішнім провідниками.

$$H_3 = H_2 - H_{mp} = \frac{I}{2p r} - \frac{I}{2p r} \cdot \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)}$$

$$= \frac{I}{2p r} \left( 1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right).$$

Знак «-» при накладенні полів обумовлений протилежним напрямком струмів у внутрішньому і зовнішньому провідниках.

Для області  $r > R_3$  із отриманого виразу для  $H_3$  видно, що при  $r = R_3$  магнітне поле на поверхні кабелю відсутнє, отже,  $H_4 = 0$ .

Відповідь:  $H_1 = \frac{I r}{2p R_1^2}$  при  $r < R_1$ ;  $H_2 = \frac{I}{2p r}$  при  $R_1 < r < R_2$ ;  $H_3 = \frac{I}{2p r} \left( 1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right)$  при  $R_2 < r < R_3$ ;  $H_4 = 0$  при  $r > R_3$ .

На рис. 5.7 наведена картина розподілу магнітного поля в коаксіальному кабелі, із якої випливає, що магнітне поле присутнє по всьому поперечному перерізу кабелю, обмеженому його зовнішньою частиною оболонки.

### ***Рівняння Пуассона і Лапласа для одновимірних полів.***

*Приклад 1* Повітряний конденсатор складається із двох плоских пластин, розміщених по осі  $x$  на відстані  $d$  (рис. 5.8). Одна пластина заземлена, інша пластина під'єднана до позитивного електрода джерела постійної напруги  $U$ . Між пластинами розподілений вільний заряд з об'ємною щільністю  $r(x) = -kx$ . Визначити  $j(x)$  і  $E(x)$ .

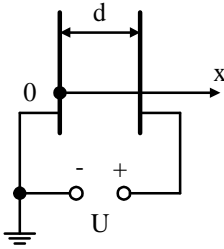


Рисунок 5.8 – Плоский конденсатор

Розв'язок. Рівняння Пуассона для плоского конденсатора

$$\frac{d^2 j}{dx^2} = -\frac{r}{e_0} = \frac{k}{e_0} x.$$

У результаті інтегрування по  $x$  маємо:

$$\frac{dj}{dx} = \frac{k}{2e_0} x^2 + C_1.$$

Після повторного інтегрування по  $x$  отримаємо

$$j = \frac{k}{6e_0} x^3 + C_1 x + C_2.$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  можна знайти із граничних умов  $j = 0$  при  $x = 0$ ;  $j = U$  при  $x = d$ .

Із першої граничної умови випливає, що  $C_2 = 0$ , а із другої:

$$U = \frac{kd^3}{6e_0} + C_1 d.$$

Звідси

$$C_1 = \frac{U}{d} - \frac{kd^2}{6e_0}.$$

Тоді

$$j = \frac{k}{6e_0} x^3 + \left( \frac{U}{d} - \frac{kd^2}{6e_0} \right) x, \quad E = -\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{k}{2e_0} x^2 - \frac{U}{d} + \frac{kd^2}{6e_0}.$$

$$\text{Відповідь: } j(x) = \frac{k}{6e_0} x^3 + \frac{6Ue_0 - kd^3}{6de_0} x,$$

$$E(x) = -\left( \frac{k}{2e_0} x^2 + \frac{6Ue_0 - kd^3}{6de_0} \right).$$

*Приклад 2* Циліндричний конденсатор із двома шарами діелектрика  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  (рис. 5.9) під'єднаний до джерела постійної напруги  $U$ . Визначити закон розподілу потенціалу в кожному шарі, якщо заряд у другому шарі змінюється за законом  $r = ar^2$ .

Розв'язок. Потенціал для циліндричного конденсатора можна визначити із рівняння Пуассона в циліндричній системі координат:

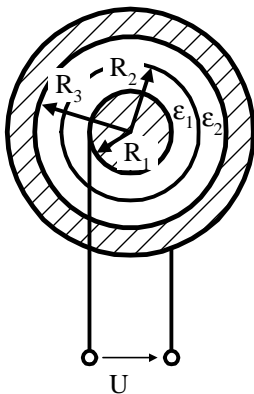


Рисунок 5.9 – Двошаровий циліндричний конденсатор

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 j}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = -\frac{r}{e_a}.$$

Внаслідок аксіальної симетрії циліндричного конденсатора

$\left( \frac{\partial^2 j}{\partial a^2} = 0 \right)$  та рівномірності розподілу заряду по всій довжині конденсатора

$\left( \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = 0 \right)$  рівняння Пуассона

набуває вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j}{\partial r} \right) = -\frac{ar^2}{e_a}.$$

Із рівняння Пуассона для шару радіусом  $R_2$  у результаті подвійного інтегрування маємо

$$j_1(r) = -\frac{ar^4}{16e_{a1}} + C_1 \ln r + C_2.$$

Із рівняння Лапласа для шару радіусом  $R_3$ , для якого  $r = 0$ , знаходимо аналогічно:

$$j_2(r) = C_3 \ln r + C_4.$$

Визначимо константи інтегрування із граничних умов:

1)  $j_1 = U$  при  $r = R_1$ . Тоді

$$U = -\frac{aR_1^4}{16e_{a1}} + C_1 \ln R_1 + C_2.$$

2)  $j_2 = 0$  при  $r = R_3$ . Тоді

$$0 = C_3 \ln R_3 + C_4.$$

3)  $j_1 = j_2$  при  $r = R_2$ . Тоді

$$-\frac{aR_2^4}{16e_{a1}} + C_1 \ln R_2 + C_2 = C_3 \ln R_2 + C_4.$$

4)  $D_{1n} = D_{2n}$  при  $r = R_2$ . Тоді  $e_{a1}E_{1n} = e_{a2}E_{2n}$  або

$$e_{a1} \frac{\partial j_1}{\partial r} = e_{a2} \frac{\partial j_2}{\partial r}. \text{ Звідки випливає:}$$

$$e_{a1} \left( -\frac{aR_2^3}{4e_{a1}} - \frac{C_1}{R_2} \right) = e_{a2} \frac{C_3}{R_2}.$$

Розв'язуючи систему із чотирьох рівнянь, можна знайти сталі інтегрування, а відповідно, і значення потенціалів для першої та другої областей. (Розв'язання системи рівнянь студенти виконують самостійно).

$$\text{Відповідь: } j_1(r) = \frac{a(R_1^4 - r^4)}{16e_{a1}} +$$

$$+ \left( \frac{\left( 16e_{a1}e_{a2}U + 4ae_{a1}R_2^4 \ln \left( \frac{R_2}{R_3} \right) + ae_{a2}(R_1^4 - R_2^4) \right)}{16e_{a1} \left( e_{a1} \ln \left( \frac{R_3}{R_2} \right) + e_{a2} \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) + U,$$

$$j_2(r) = \left( \frac{\left( 16e_{a1}e_{a2}U + 4ae_{a1}R_2^4 \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) + ae_{a2}(R_1^4 - R_2^4) \right)}{16e_{a2} \left( e_{a1} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + e_{a2} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} + \frac{aR_2^4}{4e_{a2}} \right) \times \ln\left(\frac{R_3}{r}\right).$$

*Приклад 3 (зворотна задача)* Чи може потенціал електричного поля  $j$  в області простору, де об'ємна густина заряду  $r=0$ , виражатися рівнянням у циліндричній системі координат:

$$j(r, a, z) = 3r^2 \cos^3 a + 5r - \cos^3 a ?$$

Розв'язок. Запишемо рівняння Лапласа в циліндричній системі координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 j}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = 0.$$

Перевіримо, чи виконується рівність  $\nabla^2 j = 0$ .

Знайдемо кожний доданок:

$$r \frac{\partial j}{\partial r} = 6r^2 \cos^3 a + 5r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j}{\partial r} \right) = 12 \cos^3 a + \frac{5}{r}.$$

$$\frac{\partial j}{\partial a} = 3r^2 \cdot 3 \cos^2 a (-\sin a) - 3 \cos^2 a (-\sin a).$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial a^2} = -9r^2 (\cos^2 a \cdot \cos a + \sin a \cdot 2 \cos a (-\sin a)) + 3 \cos^2 a \cdot \cos a + 6 \cos a (-\sin^2 a).$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \nabla^2 j &= 12 \cos^3 a + \frac{5}{r} - 9 \cos^3 a + 18 \cos a \cdot \sin^2 a + \\ &+ \frac{3}{r^2} \cos^3 a - \frac{6}{r^2} \cos a \cdot \sin^2 a = 3 \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) \cos^3 a + \\ &+ 6 \left( 3 - \frac{1}{r^2} \right) \cos a \cdot \sin^2 a + \frac{5}{r} \neq 0. \end{aligned}$$

Відповідь: не може.

### Метод розділення змінних

**Приклад 1** Визначити потенціал і напруженість поля

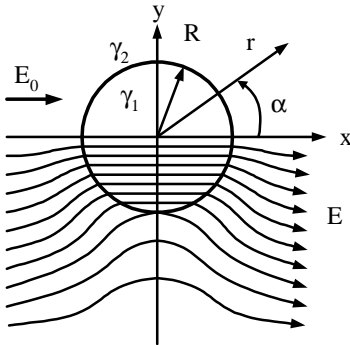


Рисунок 5.10 – Провідний циліндр у однорідному електричному полі

відсутності складової по осі  $z$  (циліндр нескінченно довгий):

$$\nabla^2 j = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 j}{\partial a^2} = 0.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді  $j = M(r)N(a)$ . Одержимо два звичайні диференційні рівняння, які містять

усередині і поза провідним незарядженим ( $t = 0$ ) нескінченно довгим циліндром радіусом  $R$ , який поміщений у однорідне електричне поле  $E_0$ , методом розділення змінних. Циліндр і навколишнє його середовище мають питомі провідності  $g_1$  і  $g_2$ . Зовнішнє поле напруженістю  $E_0$  перпендикулярне до осі циліндра  $z$  (рис. 5.10).

Розв'язок. Рівняння Лапласа в циліндричній системі координат з урахуванням

незалежний параметр  $K$ , що не залежить від  $r$  і  $a$ :

$$\frac{r}{M(r)} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dM}{dr} \right) = K^2, \quad \frac{1}{N(a)} \frac{d^2 N}{da^2} = -K^2.$$

Розв'язки отриманих диференціальних рівнянь будуть мати такий вигляд:

$$M(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 - 1) A_n r^{n-2} = 0,$$

звідси  $n = \pm 1$ ,

$$N(a) = A \cos(Ka) + B \sin(Ka).$$

Визначимо функцію  $N(a)$  за граничними умовами для сталої розділення  $K$ . Оскільки потенціал є парною функцією відносно  $a$ , тобто  $j(r, a) = j(r, -a)$ , то  $B = 0$  і  $N(Ka) = A \cos(Ka)$ .

Якщо вважати, що потенціал на осі  $y$  дорівнює нулю  $j(r, \pm p/2) = 0$ , то  $N(\pm p/2) = 0$ , а, отже,  $K = 1$ . При  $K > 1$  нульова потенційна лінія буде нахилена до осі  $y$ , що не відповідає досліджуваному полю (потенціал дорівнює нулю по осі  $z$ ). Таким чином,  $N(a) = A \cos a$ .

Розв'язок рівняння, що відповідає частковому значенню  $K = 1$ , такий:

$$j(r, a) = M(r) N(a) = (C_1 r + C_2 / r) \cos a.$$

Тоді потенціал усередині і поза циліндром буде мати такий вигляд:

$$j_i(r, a) = (C_{1i} r + C_{2i} / r) \cos a = -\frac{2g_2}{g_1 + g_2} E_0 r \cos a,$$

$$j_e(r, a) = (C_{1e} r + C_{2e} / r) \cos a = E_0 \left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r} - r \right) \cos a.$$



Значення сталих інтегрування знаходять із граничних умов (див. п. 5.4):

$$1) j_i = j_e \text{ при } r = R;$$

$$2) d_{in} = d_{en} \text{ (тобто } g_1 \left( -\frac{\partial j_i}{\partial r} \right)_{r=R} = g_2 \left( -\frac{\partial j_e}{\partial r} \right)_{r=R} \text{ )}.$$

Напруженість поля усередині і поза циліндром

$$E = \sqrt{\left( -\frac{\partial j}{\partial r} \right)^2 + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial a} \right)^2}.$$

Усередині циліндра напруженість поля має те саме значення і напрямок:  $E_i = \frac{2g_2}{g_1 + g_2} E_0 = const.$

Поза циліндром

$$E_e = E_0 \sqrt{\left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r^2} + 1 \right)^2 \cos^2 a + \left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r} - 1 \right)^2 \sin^2 a}.$$

Картина поля наведена на рис. 5.10.

*Відповідь:* потенціали провідного циліндра в зовнішньому електричному полі дорівнюють

$$j_i = -\frac{2g_2}{g_1 + g_2} E_0 r \cos a, \quad j_e = E_0 \left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r} - r \right) \cos a,$$

напруженість поля усередині циліндра постійна

$$E_i = \frac{2g_2}{g_1 + g_2} E_0 = const, \text{ поза циліндром напруженість поля}$$

$$E_e = E_0 \sqrt{\left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r^2} + 1 \right)^2 \cos^2 a + \left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r} - 1 \right)^2 \sin^2 a}.$$

*Приклад 2* Виходячи із загального розв'язку задачі для кулі в зовнішньому однорідному полі (див. п. 5.4), визначити потенціал і напруженість поля провідної кулі радіусом  $R$  із зарядом  $Q$ , розміщеної в діелектричному середовищі із проникністю  $\epsilon$ . Зовнішнє поле напруженістю  $E_0$  спрямоване вздовж осі  $z$  (рис. 5.11).

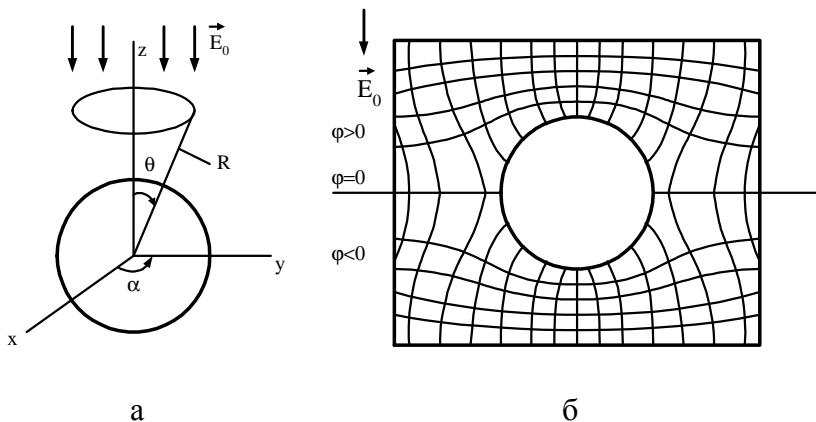


Рисунок 5.11 – Провідна куля в однорідному електричному полі діелектричного середовища:

- а) куля у сферичній системі координат;  
б) картина поля

Розв'язок. Оскільки куля провідна, то поле усередині кулі відсутнє ( $j_i = 0$ ), розв'язок для потенціалу кулі, розміщеної в зовнішньому однорідному полі, має такий вигляд:

$$j_e = \frac{C_{1e}}{r} + C_{2e} + \left( C_{3e}r + \frac{C_{4e}}{r^2} \right) \cos \varphi. \quad (5.28)$$

У (5.28) присутні чотири невідомі сталі  $C_{1e}$ ,  $C_{2e}$ ,  $C_{3e}$  і  $C_{4e}$ , для визначення яких необхідно врахувати не тільки умову на поверхні кулі, але й умови на нескінченно великій відстані від кулі, тобто на нескінченності.

Сукупність досить віддалених від кулі точок в умовному сенсі розглядається при цьому як нескінченність. Якщо куля не заряджена, то всі точки площини  $XOY$ , яка проходить через центр кулі, мають той самий потенціал (позначимо через  $j_0$ ).

При віддаленні від кулі на великій відстані  $z = r \cos q$ , порівняно з якими радіус кулі  $R$  досить малий, змушувальна дія кулі на поле проявляється як збурення від точкового заряду  $Q$ . Потенціал на нескінченності визначається так:

$$j = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r} + j_0 + E_0 r \cos q. \quad (5.29)$$

Перший доданок правої частини (5.29) дає складову потенціалу від заряду кулі  $Q$ , доданок  $E_0 r \cos q$  урахує приріст потенціалу від напруженості рівномірного поля  $E_0$  на шляху  $z = r \cos q$ . Оскільки розв'язок (5.28) підходить і для точок поля, досить далеко віддалених від кулі, то можна порівняти вирази (5.28) і (5.29). Вони повинні давати той самий результат. Це буде тільки в тому випадку, коли відповідні доданки в обох виразах рівні. Із порівняння випливає, що  $C_2 = j_0$ ,  $C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a}$ ,  $C_3 = E_0$ .

Порівняння на нескінченності не дає можливості знайти величину  $C_4$ , тому що в (5.29) немає складових, які змінюються обернено пропорційно другому ступеню  $r$ . Для знаходження  $C_4$  скористаємося тим, що в умовах електростатики всі точки поверхні кулі мають той самий потенціал. Ця умова рівносильна тому, що тангенціальна складова напруженості поля на поверхні кулі дорівнює нулю. При

$$r = R \quad j = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \left( E_0 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos q + j_0.$$

Права частина буде постійною зі зміною  $q$  тільки за умови, що  $\left(E_0 R + \frac{C_4}{R^2}\right) = 0$ . Звідси  $C_4 = -E_0 R^3$ .

Таким чином, для всіх точок діелектрика

$$j = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r} + E_0 \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos q + j_0. \quad (5.30)$$

Оскільки потенціал залежить тільки від  $r$  і  $q$ , напруженість електричного поля має тільки дві складові:

$$E_r = -\frac{\partial j}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} - E_0 \left( 1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos q, \quad (5.31)$$

$$E_q = -\frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial q} = E_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin q.$$

Якщо  $Q=0$ , то на поверхні кулі (при  $r=R$ )  $E_r = -3E_0 \cos q$ .

При  $q=0$  напруженість  $E_r = -3E_0$ ; при  $q=180^\circ$   $E_r = 3E_0$ , тобто в цих точках напруженість в три рази більша за напруженість рівномірного поля  $E_0$ , у яке була внесена куля. На «екваторі» при  $q=90^\circ$  напруженість дорівнює нулю.

Відповідь: 
$$j = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r} + E_0 \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos q + j_0,$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} - E_0 \left( 1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos q, \quad E_q = E_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin q.$$

З аналізу крайніх випадків випливає, що крапелька води, потрапивши в бак трансформатора із масляним заповненням, викликає значне місцеве збільшення напруженості поля.

На рис. 5.11 б наведена загальна картина розподілу електричного поля (вектора  $\vec{D}$  і еквіпотенціальних ліній) для провідної кулі в діелектричному середовищі.

*Приклад 3* У рівномірне електричне поле  $E_0=800$  В/м внесена куля із діелектрика ( $\epsilon_1=4$ ) радіуса  $R=2$  см. Навколишнє середовище – повітря ( $\epsilon_2=1$ ). Потенціали усередині  $j_i$  і поза  $j_e$  кулю змінюються за законами:

$$j_i = j_0 + E_0 r \frac{3\epsilon_2}{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)} \cos q ,$$

$$j_e = j_0 + E_0 \left( r + \frac{R^3}{r^2} \cdot \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)} \right) \cos q .$$

Визначити напруженості електричного поля  $E$  при  $r=1$  см,  $q=0^\circ$  і при  $r=10$  см,  $q=90^\circ$ .

Розв'язок. Оскільки за умовою задачі маємо кулю, то розв'язок задачі зручно виконувати у сферичній системі координат.

Використовуємо вираз (1.3):  $\vec{E} = -\text{grad} j$  .

Із урахуванням відсутності залежності потенціалу  $j$  від кута  $\alpha$  вираз для  $\text{grad} j$  у сферичній системі координат набуде вигляду:

$$\text{grad} j = \vec{r}^0 \frac{\partial j}{\partial r} + \vec{q}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial q} = \vec{r}^0 (-E_r) + \vec{q}^0 (-E_q) ,$$

де  $\vec{r}^0$  і  $\vec{q}^0$  – одиничні орти,  $E = \sqrt{E_r^2 + E_q^2}$  .

Знайдемо поле усередині кулі:

$$E_{ri} = -\frac{\partial j}{\partial r} = -E_0 \frac{3\epsilon_2}{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)} \cos q ,$$

$$E_{qi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial q} = E_0 \frac{3e_2}{(2e_2 + e_1)} \sin q.$$

Тоді

$$E_i = E_0 \frac{3e_2}{(2e_2 + e_1)} \sqrt{\cos^2 q + \sin^2 q} = E_0 \frac{3e_2}{(2e_2 + e_1)}.$$

Знайдемо поле поза кулею:

$$E_{re} = -\frac{\partial j}{\partial r} = -E_0 \left( 1 - \frac{2R^3}{r^3} \cdot \frac{(e_2 - e_1)}{(2e_2 + e_1)} \right) \cos q,$$

$$E_{qe} = -\frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial q} = E_0 \left( 1 + \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{(e_2 - e_1)}{(2e_2 + e_1)} \right) \sin q.$$

Тоді

$$E_e = E_0 \sqrt{\left( 1 - \frac{2R^3}{r^3} \cdot \frac{(e_2 - e_1)}{(2e_2 + e_1)} \right)^2 \cos^2 q + \left( 1 + \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{(e_2 - e_1)}{(2e_2 + e_1)} \right)^2 \sin^2 q}.$$

При  $r=1$  см,  $q=0^\circ$ ,  $E = E_i = E_0 \frac{3e_2}{(2e_2 + e_1)} = 400$  В/м.

При  $r=10$  см,  $q=90^\circ$ ,

$$E = E_{re} = E_0 \left( 1 - \frac{2R^3}{r^3} \cdot \frac{(e_2 - e_1)}{(2e_2 + e_1)} \right) \cos q = 793,6 \text{ В/м.}$$

*Відповідь:* при  $r=1$  см і  $q=0^\circ$   $E=400$  В/м, при  $r=10$  см і  $q=90^\circ$   $E=793,6$  В/м.

### **Метод дзеркальних зображень**

*Приклад 1* На відстані  $h$  від границі поділу двох діелектриків з діелектричними проникностями  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  у середовищі з  $\epsilon_2$  розміщена заряджена нитка з лінійною щільністю заряду  $t$  (рис. 5.12). Визначити потенціал  $j$  і напруженість електричного поля  $E$  для точки, яка лежить на

границі поділу діелектриків по нормалі від заряду, вважаючи її такою, що належить двом середовищам.

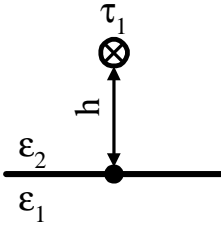


Рисунок 5.12 – Заряджена нитка над границею поділу двох діелектриків

Розв'язок. Для розв'язання задачі скористаємося методом дзеркальних зображень. Розглянемо два випадки:

- 1) точка належить верхній півплощині;
- 2) точка належить нижній півплощині.

У першому випадку вводимо уявну нитку з лінійною щільністю заряду  $t_2 = t_1 \frac{(e_2 - e_1)}{(e_2 + e_1)}$  і замі-

няємо середовище з  $e_1$  на середовище з  $e_2$  (рис. 5.13 а). Поле, створене зарядженою ниткою, визначається за формулою (див. приклад 2.5)

$$E = \frac{t}{2pe_a r}.$$

Поле, створене двома зарядженими нитками,

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = \frac{t_1}{2pe_{a2}h} + \frac{t_2}{2pe_{a2}h} = \\ &= \frac{t_1}{2pe_{a2}h} \left( 1 + \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} \right) = \frac{t_1}{ph(e_{a2} + e_{a1})}. \end{aligned}$$

Потенціал зарядженої нитки визначається за формулою (див. приклад 2.5)

$$j = \frac{t}{2pe_a} \ln \frac{1}{r}.$$

Тоді потенціал від двох заряджених ниток за законом накладення полів

$$j = j_1 + j_2 = \frac{t_1}{2pe_{a2}} \ln \frac{1}{h} + \frac{t_2}{2pe_{a2}} \ln \frac{1}{h} = \frac{t_1}{p(e_{a2} + e_{a1})} \ln \frac{1}{h}.$$

У другому випадку замінимо заряджену нитку з  $t_1$  на уявну нитку з  $t_3 = t_1 \frac{2e_1}{(e_2 + e_1)}$ , а середовище з  $e_2$  на середовище з  $e_1$  (див. рис. 5.13 б).

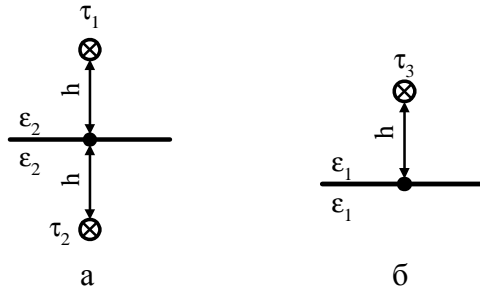


Рисунок 5.13 – Метод дзеркальних зображень для визначення  $E$  в точці, яка перебуває:

- а) у верхній півплощині;
- б) у нижній півплощині

Тоді напруженість електричного поля, створеного зарядженою ниткою з  $t_3$ ,

$$E = \frac{t_3}{2pe_{a1}h} = \frac{t_1}{ph(e_{a2} + e_{a1})}.$$

Потенціал

$$j = \frac{t_3}{2pe_{a1}} \ln \frac{1}{h} = \frac{t_1}{p(e_{a2} + e_{a1})} \ln \frac{1}{h}.$$

*Відповідь:* для точки, яка перебуває на границі поділу двох середовищ, напруженість електричного поля

$$E = \frac{t_1}{ph(e_{a2} + e_{a1})}; \text{ потенціал } j = \frac{t_1}{p(e_{a2} + e_{a1})} \ln \frac{1}{h}.$$



*Приклад 2* Над границею поділу двох магнітних середовищ із магнітними проникностями  $m_1=1$  і  $m_2=999$  у середовищі з  $m_1$  на відстані  $R$  від границі розміщений провідник зі струмом.

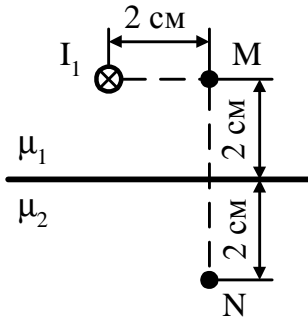


Рисунок 5.14 – Провідник зі струмом над поверхнею поділу двох середовищ

Визначити напруженості магнітного поля в точках  $M$  і  $N$  (рис. 5.14):  $R=2$  см; точка  $M$  перебуває на відстані  $R_1=2$  см від провідника зі струмом; точка  $N$  перебуває на відстані 4 см від точки  $M$  перпендикулярно до поверхні поділу; сила струму  $I_1=10$  А. Знайти напруженості магнітного поля  $H$  в точках  $M$  і  $N$ .

Розв'язок. Для розв'язання задачі скористаємося методом дзеркальних зображень.

Для знаходження поля в точці  $M$  введемо уявний струм

$$I_2 = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} I_1$$

і замінимо середовище з магнітною проникністю  $m_2$  на середовище з  $m_1$  (рис. 5.15 а). Тоді за принципом накладення напруженість магнітного поля в точці  $M$

$$\vec{H}_M = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

Для прямолінійного провідника зі струмом

$$H_1 = \frac{I_1}{2p R_1} = 79,5 \text{ А/м},$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2p R_2} = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} \cdot \frac{I_1}{2p \sqrt{R_1^2 + (2R_1)^2}} = 35,4 \text{ А/м.}$$

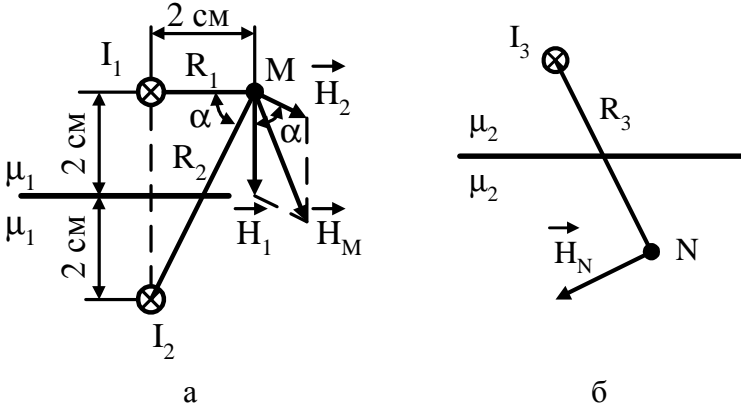


Рисунок 5.15 – Метод дзеркальних зображень для визначення  $H$ : а) у точці  $M$ ; б) у точці  $N$

Склавши два вектори за формулою косинусів

$$H_M = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + 2H_1H_2 \cos a},$$

отримаємо  $H_M = 101 \text{ А/м}$ . Тут

$$\cos a = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Для знаходження поля в точці  $N$  замінимо струм  $I_1$  уявним струмом  $I_3$ :

$$I_3 = \frac{2m_1}{(m_2 + m_1)} I_1,$$

а середовище з  $m_1$  на середовище з  $m_2$  (рис. 5.15 б).

Тоді

$$H_N = \frac{I_3}{2p R_3} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{I_1}{p \sqrt{R_1^2 + (2R_1)^2}} = 0,0715 \text{ А/м.}$$

Відповідь:  $H_M = 101 \text{ А/м}$ ,  $H_N = 0,0715 \text{ А/м}$ .

### **Приклади розрахунків параметрів деяких компонент електричних кіл**

*Приклад 1* Вивести формулу для напруженості електричного поля  $E$  коаксіального кабелю через напругу  $U$  і розрахувати, під яку напругу  $U$  можна увімкнути кабель, якщо максимальна напруженість  $E_{\max}$  поля не повинна перевищувати  $1/3$  пробивної напруженості  $E_{np} = 2 \times 10^4 \text{ кВ/м}$ . Кабель має такі розміри: радіус внутрішньої жили  $R_1 = 2 \text{ мм}$ , радіус оболонки  $R_2 = 5 \text{ мм}$ .

Розв'язок. Розглянемо жилу кабелю як заряджену нитку, для якої напруженість електричного поля  $E$  визначається за формулою (див. приклад 2.5)

$$E = \frac{t}{2pe_a r},$$

де  $t$  – лінійна густина заряду.

Тоді

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{t}{2pe_a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{t}{2pe_a} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Підставивши  $\frac{t}{2pe_a} = Er$  в останній вираз, отримуємо

$$U = E r \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Звідси

$$E = \frac{U}{r \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

Оскільки за умовою задачі  $E_{\max} = \frac{E_{np}}{3}$

( $E = E_{\max}$  при  $r = R_1$ ), то  $E_{\max} = \frac{U}{R_1 \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$ .

Звідки

$$U_{np} = \frac{E_{np}}{3} R_1 \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) = 12,2 \text{ кВ.}$$

*Відповідь:* напруженість електричного поля коаксіального кабелю  $E = \frac{U}{r \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$ , пробивна напруга  $U_{np} = 12,2 \text{ кВ}$ .

*Приклад 2* Вивести формулу для визначення величини напруженості поля  $E$  двохшарового плоского конденсатора (рис. 5.16). Товщина першого шару діелектрика з  $\epsilon_{a1}$  дорівнює  $d_1$ , другого шару з  $\epsilon_{a2}$

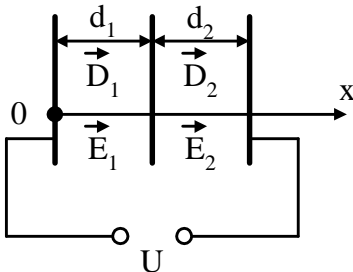


Рисунок 5.16 –  
Двошаровий плоский  
конденсатор

дорівнює  $d_2$ . Вважати, що  $\epsilon_{a1} = 2\epsilon_{a2}$ ,  $d_2 = 1,5 d_1$ , напруга на конденсаторі дорівнює  $U$ .

*Розв'язок.* Нехай до першого шару конденсатора прикладена напруга  $U_1$ , до другого –  $U_2$ . Прикладена напруга  $U$  пов'язана з напруженістю електричного поля  $E$  виразом

$$U = \int_1^2 E dx.$$

Причому

$$U = U_1 + U_2 = \int_0^{d_1} E_1 dx + \int_{d_1}^{d_1+d_2} E_2 dx = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Тут ураховано те, що напруженість електричного поля  $E$  в кожному шарі конденсатора постійна.

Оскільки вектор  $\vec{E}$  спрямований нормально до поверхні пластин конденсатора, то  $E = E_n$ . Із граничних умов  $D_{1n} = D_{2n}$  випливає, що  $e_{a1} E_1 = e_{a2} E_2$  або

$$E_2 = \frac{e_{a1}}{e_{a2}} E_1.$$

Тоді

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{e_{a1}}{e_{a2}} d_2}, \quad E_2 = \frac{e_{a1}}{e_{a2}} \cdot \frac{U}{d_1 + \frac{e_{a1}}{e_{a2}} d_2} = \frac{U}{d_2 + \frac{e_{a2}}{e_{a1}} d_1}.$$

При  $e_{a1} = 2 e_{a2}$  і  $d_2 = 1,5 d_1$  отримуємо, що

$$E_1 = \frac{1}{4} \frac{U}{d_1}, \quad E_2 = \frac{3}{4} \frac{U}{d_2}.$$

$$\text{Відповідь: } E_1 = \frac{1}{4} \frac{U}{d_1}, \quad E_2 = \frac{3}{4} \frac{U}{d_2}.$$

*Приклад 3* Сталева пластина являє собою  $3/4$  диска із концентрично вирізаним круглим отвором (рис. 5.17). Внутрішній радіус диска  $R_1 = 1$  см, зовнішній радіус  $R_2 = 2$  см. Товщина пластини постійна. Між кінцями пластини підтримується постійна різниця потенціалів  $U$ . Знайти різницю потенціалів  $j_2 - j_1$ , якщо найбільше значення густини

струму  $d_{\max} = 5 \times 10^6 \text{ А/м}^2$ , питома провідність стали  $g = 10^7 \text{ См/м}$ .

Розв'язок. Різниця потенціалів  $j_2 - j_1$  пов'язана із напруженістю виразом  $j_2 - j_1 = \int_1^2 \vec{E} dr = E \cdot \frac{3}{4} \cdot 2p r = \frac{3p}{2} E r$ .

Звідки

$$E = \frac{2(j_2 - j_1)}{3p r}$$

Із закону Ома випливає, що

$$d = g E = 2g \frac{(j_2 - j_1)}{3p r}$$

За умовою задачі відома максимальна густина струму  $d_{\max}$  ( $d = d_{\max}$  при  $r = R_1$ ). Тоді

$$d_{\max} = 2g \frac{(j_2 - j_1)}{3p R_1}$$

$$\text{Різниця потенціалів } j_2 - j_1 = \frac{3p R_1 d_{\max}}{2g} = 0,0235 \text{ В.}$$

*Відповідь:* різниця потенціалів  $j_2 - j_1 = 0,0235 \text{ В}$ .

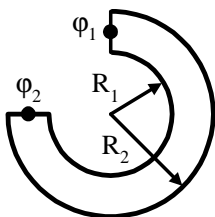


Рисунок 5.17 – Сектор диска з отвором

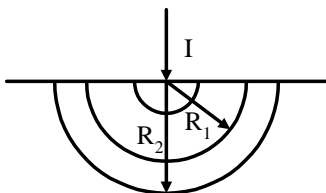


Рисунок 5.18 – Заземлювач

*Приклад 4* Заземлювач являє собою металеву півсферу (рис. 5.18). Через заземлювач проходить струм  $I = 1000 \text{ А}$ ; питома провідність землі  $g = 10^{-2} \text{ Ом}^{-1} \times \text{м}^{-1}$ . Знайти напругу  $U$  між точками, розміщеними на відстані  $R_1 = 22 \text{ м}$  і  $R_2 = 23 \text{ м}$  від заземлювача.

Розв'язок. Напряга  $U$  пов'язана з напруженістю електричного поля  $E$  формулою

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} dr.$$

Напруженість  $\vec{E}$  можна визначити із закону Ома

$$\vec{E} = \frac{\vec{d}}{g}.$$

Оскільки струм  $I$  проходить через півсферу (площа сфери  $S_{сф} = 4\pi r^2$ ), то

$$d = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi r^2}.$$

Тоді

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{2\pi g} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi g} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 31,9 \text{ В}.$$

*Відповідь:* напруга між точками 1 і 2  $U_{12} = 31,9 \text{ В}$ .

*Приклад 5* У циліндричному конденсаторі із недосконалою ізоляцією питома провідність міняється за законом

$$g = g_1 (2 - kr),$$

де  $g_1 = 10^{-9} \text{ См/см}$ ;

$k = 0,1 \text{ см}^{-1}$ .

Радіус внутрішнього циліндра  $a = 5 \text{ см}$ , радіус зовнішнього циліндра  $b = 10 \text{ см}$ ; довжина конденсатора  $l = 1 \text{ м}$ . Конденсатор під'єднаний до постійної напруги  $U = 1 \text{ кВ}$ . Знайти закон розподілу густини струму  $d(r)$  як функцію відстані  $r$  від осі циліндра. Обчислити струм втрати  $I_{втр}$ .

Розв'язок. Струм втрати  $I_{втр}$  (струм через бічну поверхню) можна визначити за формулою

$$I_{\text{emp}} = \int_{S_{\text{біч}}} \vec{d} dS = d S_{\text{біч}} = d \cdot 2p r l.$$

Густину струму можна визначити із закону Ома в диференційній формі:  $\vec{d} = g \vec{E}$ . Тоді

$$I_{\text{emp}} = 2p r l g E.$$

Напруженість поля  $E$  не відома, але відома прикладена напруга  $U$ , яка пов'язана із  $E$  виразом

$$U = \int_a^b E dr = \frac{I_{\text{emp}}}{2p l g_1} \int_a^b \frac{1}{(2-kr)r} dr = \frac{I_{\text{emp}}}{4p l g_1} \ln \left( \frac{b(2-ka)}{a(2-kb)} \right).$$

Звідси струм втрати

$$I_{\text{emp}} = \frac{4p l g_1 U}{\ln \left( \frac{b(2-ka)}{a(2-kb)} \right)} = 1,13 \times 10^{-3} \text{ А.}$$

Тоді з урахуванням заданих параметрів густина струму визначиться у такий спосіб:

$$d = \frac{2g_1 U}{r \ln \left( \frac{b(2-ka)}{a(2-kb)} \right)} = \frac{2g_1 U}{r \ln(2-0,1r)} = \frac{2 \times 10^{-4}}{r \ln(2-0,1r)}.$$

*Відповідь:* струм втрати  $I_{\text{emp}} = 1,13 \times 10^{-3}$  А, розподіл густини струму  $d(r) = \frac{2 \times 10^{-4}}{r \ln(2-0,1r)}$ .

*Приклад 6* За допомогою закону Біо-Савара-Лапласа вивести формулу для визначення напруженості магнітного поля  $H$  на осі колового витка радіусом  $a$  зі струмом  $I$  (рис. 5.19).

Розв'язок. Закон Біо-Савара-Лапласа має вигляд



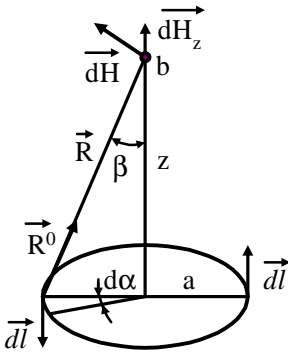


Рисунок 5.19 –  
Коловий контур зі  
струмом

$$\vec{dB} = \frac{m_0 I}{4p} \frac{[\vec{dl} \times \vec{r}^0]}{r^2}.$$

Магнітна індукція  $\vec{B}$  і напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  зв'язані між собою формулою  $\vec{B} = m_0 \vec{H}$ . За теоремою Піфагора (див. рис. 5.19)

$$R^2 = a^2 + z^2.$$

З урахуванням цього можна записати, що

$$\vec{dH} = \frac{I}{4p} \frac{[\vec{dl} \times \vec{r}^0]}{(a^2 + z^2)}.$$

$$\text{Векторний добуток } \left[ \vec{dl} \times \vec{r}^0 \right] = \left| \vec{dl} \right| \left| \vec{r}^0 \right| \sin \angle \vec{dl} \vec{r}^0 =$$

$$= dl \sin \angle \vec{dl} \vec{r}^0.$$

З іншого боку, з рис. 5.20 видно, що  $\text{tg}(da) = \frac{dl}{a}$ .

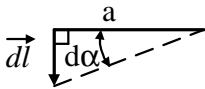


Рисунок 5.20 –  
Визначення кута  
 $da$

Для малих кутів  $da \text{ tg}(da) \approx da$ , тоді  $dl = ada$ .

Із урахуванням цього можна записати, що

$$\vec{dH} = \frac{I}{4p} \cdot \frac{ada}{(a^2 + z^2)} \sin \angle \vec{dl} \vec{r}^0.$$

У точці  $A$  поле  $dH$  буде створюватися кожною ділянкою витка  $dl$ . Вектори  $\vec{dH}$  у точці

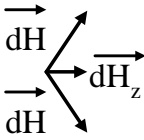


Рисунок 5.21 –  
Вектор  $\vec{dH}$  у точці  
А

А створюють симетричне конічне віяло (рис. 5.21). Результуючий вектор

$$\vec{dH}_z = \vec{dH} \sin b$$

буде перпендикулярний до площини витка, тобто  $\vec{r}_z^0 \perp \vec{dl}$ . Тоді

$$\sin \angle \vec{dl} \vec{r}_z^0 = \sin 90^\circ = 1.$$

З рис. 5.22 видно, що  $\sin b = \frac{a}{R} = \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$ .

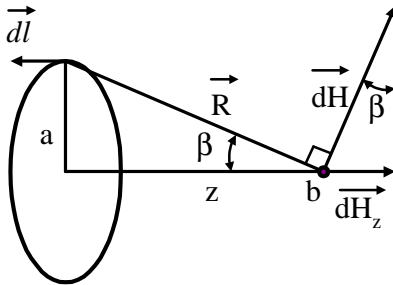


Рисунок 5.22 – Визначення  $\sin b$

Тоді напруженість магнітного поля, створеного ділянкою витка  $dl$ , у точці А  $\vec{dH}_z = \frac{I}{4p} \cdot \frac{a^2 da}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$ .

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо

$$\vec{H}_z = \frac{I}{4p} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2p} da = \frac{I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

*Відповідь:* напруженість магнітного поля на осі колового витка зі струмом  $H = \frac{I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$ .

*Приклад 7* Постійний струм  $I = 5$  А проходить уздовж рамки, виконаної у вигляді правильного багатокутника, вписаного в коло радіусом  $a = 10$  см (рис. 5.23). Кількість сторін багатокутника  $n = 6$ , кількість витків рамки  $w = 5$ . Визначити напруженість магнітного поля  $H$  в центрі багатокутника.

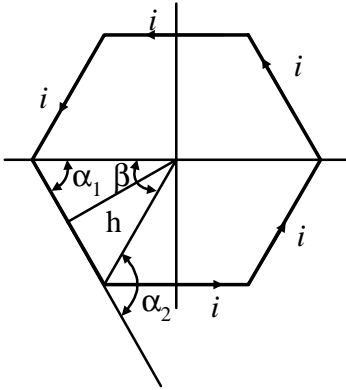


Рисунок 5.23 – Багатокутник зі струмом

*Розв'язок.* Напруженість магнітного поля  $H$  в центрі багатокутника дорівнює сумі напруженостей, створених кожною стороною багатокутника. Напруженість кожної сторони можна розглядати як напруженість відрізка дроту

$$H = \frac{I}{4ph} (\cos a_1 - \cos a_2).$$

З рис. 5.23 видно, що

$$a_2 = 180^\circ - a_1, \cos a_1 = -\cos a_2,$$

$$\sin a_1 = \frac{h}{a}.$$

Звідси  $h = a \sin a_1$ .

Тоді

$$H = \frac{I}{4p a \sin a_1} (\cos a_1 + \cos a_1) = \frac{I}{2pa} \cdot \frac{\cos a_1}{\sin a_1}.$$

З рис. 5.23 видно, що  $a_1 = \frac{p}{2} - \frac{b}{2}$ , де  $b = \frac{2p}{n}$ .

Тоді

$$a_1 = \frac{p}{2} - \frac{p}{n}.$$

Напруженість магнітного поля  $H$  від  $n=6$  сторін буде в  $n$  разів більше; від  $w$  витків – у  $w$  разів більше. Тоді сумарна напруженість магнітного поля

$$H = \frac{Inw \cos\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{n}\right)}{2pa \sin\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{n}\right)} = \frac{Inw \sin\left(\frac{p}{n}\right)}{2pa \cos\left(\frac{p}{n}\right)} = \frac{Inw}{2pa} \operatorname{tg}\left(\frac{p}{n}\right) =$$

$=143,6 \text{ А/м}$ .

*Відповідь:* у центрі багатокутника напруженість магнітного поля  $H=143,6 \text{ А/м}$ .

*Приклад 8* Прямолінійний довгий дрот і прямокутна одновиткова рамка розміщені в одній площині. Розміри рамки:  $b=50 \text{ см}$ ;  $c=30 \text{ см}$ . Уздовж дроту проходить синусоїдальний струм  $i = I_m \sin(10t)$  з амплітудою  $I_m=10 \text{ А}$ .

Рамка рухається зі швидкістю  $v=80 \text{ см/с}$  у напрямку, перпендикулярному до осі дроту (рис. 5.24). Записати вираз для е.р.с., яка наводиться в рамці, якщо при  $t=0$  найближча сторона рамки перебуває на відстані  $a=10 \text{ см}$  від осі дроту. Знайти миттєве значення е.р.с., коли найближча сторона рамки перебуває на відстані  $x=20 \text{ см}$  від її початкового положення.

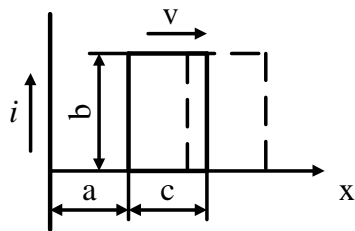


Рисунок 5.24 – Провідник зі струмом і прямокутна рамка

Розв'язок. Е.р.с., яка наводиться в рамці, дорівнює сумі е.р.с., обумовленої зміною магнітного поля в часі ( $e_1$ ), і е.р.с., обумовленої рухом рамки ( $e_2$ ), тобто  $e = e_1 + e_2$ .

Значення  $e_1$  можна визначити із закону Фарадея:

$$e_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

де магнітний потік  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ .

У свою чергу,  $\vec{B} = m_0 \vec{H}$ ,  $dS = bdx$ . Тоді

$$\Phi = m_0 b \int_x \vec{H} dx.$$

Напруженість магнітного поля  $H$  можна визначити із закону повного струму

$$\int_l \vec{H} dl = i.$$

Звідки

$$H = \frac{i}{2p r} = \frac{i}{2p (a+x)};$$

$$\Phi = \frac{m_0 i b}{2p} \int_x^{c+x} \frac{dx}{a+x} = \frac{m_0 i b}{2p} \ln \frac{a+c+x}{a+x}.$$

Оскільки за умовою задачі  $i = 10 \sin(10t)$ , то

$$e_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{w m_0 b I_m \cos(wt)}{2p} \ln \frac{a+c+x}{a+x}.$$

Е.р.с., яка наводиться в одній стороні рамки на відстані  $a$  від провідника зі струмом, обумовлена рухом рамки, дорівнює:

$$e_{21} = \oint_l \left[ \vec{v} \times \vec{B}_1 \right] \vec{dl} = \oint_l v B_1 \sin 90^\circ dl = v \oint_l B_1 dl = v m_0 \oint_l H_1 dl = \\ = v m_0 b H_1.$$

Е.р.с., яка наводиться в одній стороні рамки на відстані  $(a+c)$ , дорівнює:

$$e_{22} = v m_0 b H_2,$$

$$\text{тут } H_1 = \frac{i}{2p(a+x)}, \quad H_2 = \frac{i}{2p(a+c+x)}.$$

Тоді е.р.с. між проводами, які перебувають на відстані  $c$ ,

$$e_2 = e_{21} - e_{22} = \frac{v b m_0 I_m \sin(\omega t)}{2p} \left[ \frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+c+x} \right].$$

Представивши  $t = \frac{x}{v}$ , отримаємо остаточний вираз для

е.р.с.:

$$e = -\frac{m_0 b I_m}{2p} \left[ w \ln \frac{a+c+x}{a+x} \cos\left(w \frac{x}{v}\right) - v \left( \frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+c+x} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(w \frac{x}{v}\right) \right].$$

При  $x=20$  см  $e=6,32 \times 10^{-6}$  В.

*Відповідь:* е.р.с., яка наводиться в рамці,  $e = -\frac{m_0 b I_m}{2p} \times$

$$\times \left[ w \ln \frac{a+c+x}{a+x} \cos\left(w \frac{x}{v}\right) - v \left( \frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+c+x} \right) \sin\left(w \frac{x}{v}\right) \right].$$

При  $x=20$  см  $e=6,32 \times 10^{-6}$  В.

*Приклад 9* Визначити тангенс кута  $\alpha$ , який утворюється напруженістю електричного поля  $\vec{E}$  з нормаллю  $\vec{n}$  до

поверхні мідної жили коаксіального кабелю (рис. 5.25) у точці, яка перебуває на її поверхні. Підрахувати величину потоку вектора Пойнтінга через бічну поверхню жили на довжині в  $l=1$  м. Радіус жили  $R_1=0,3$  см; внутрішній радіус оболонки  $R_2=1$  см; струм, який проходить по кабелю,  $I=50$  А; напруга між жилою і оболонкою  $U=10$  кВ; питома провідність міді  $g=5,7 \times 10^7$  Ом $^{-1}$ м $^{-1}$ .

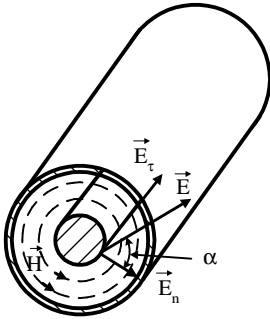


Рисунок 5.25 –  
Коаксіальний кабель

Розв'язок. Із умови задачі випливає, що  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_t}{E_n}$

(див. рис. 5.25), де  $E_n$  обумовлена прикладеною напругою між жилою і оболонкою коаксіального кабелю, тобто  $E_n = f(U)$ .

Зобразимо жилу кабелю як заряджену нитку, для якої

$$E_n = \frac{t}{2\pi\epsilon_a r},$$

де  $t$  – лінійна густина заряду, невідома з умови задачі.

Тоді

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_n dr = \frac{t}{2\pi\epsilon_a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{t}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Із порівняння двох останніх виразів видно, що

$$\frac{t}{2\pi\epsilon_a} = E_n r$$

або

$$U = E_n r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Звідси

$$E_n = \frac{U}{r \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

На поверхні жили (за умовою задачі)

$$E_n = \frac{U}{R_1 \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

Із рис. 5.25 видно, що  $E_t$  обумовлена струмом, який проходить по кабелю, тобто  $E_t = f(I)$ . Отже,  $E_t$  можна визначити із закону Ома:

$$E_t = \frac{d}{g}.$$

Густина струму  $d = \frac{I}{S} = \frac{I}{p R_1^2}$ .

$$\text{Тоді } E_t = \frac{I}{g p R_1^2}. \quad \text{тга} = \frac{E_t}{E_n} = \frac{I \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{U g p R_1^2} = 1,1 \times 10^{-7}.$$

Знайдемо потік вектора Пойнтінга  $\oint_{S_{\text{бічн}}} \vec{\Pi} dS$  через бічну

поверхню. Оскільки  $\vec{\Pi} = \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right]$ , то всі три вектори взає-

мно перпендикулярні. Якщо вектор Пойнтінга  $\vec{\Pi}$  спрямований через бічну поверхню (за умовою задачі), а вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  перебуває в поперечному перерізі кабелю, то вектор напруженості електричного



поля  $\vec{E}$  буде спрямований уздовж коаксіального кабелю, тобто  $\vec{E} = E_t$ .

Оскільки вектори  $\vec{\Pi}$  і  $\vec{dS}$  спрямовані перпендикулярно до бічної поверхні, то кут між ними дорівнює нулю. Також вектор Пойнтінга  $\vec{\Pi}$  постійний по всій бічній поверхні жили кабелю. Тоді можна записати:

$$\int_{S_{\text{біч}}} \vec{\Pi} \vec{dS} = \int_{S_{\text{біч}}} \Pi dS \times \cos 0^\circ = \Pi \int_{S_{\text{біч}}} dS = E_t H S_{\text{біч}} = \frac{I^2 l}{\rho g R_1^2} = 1,523 \text{ Вт.}$$

*Відповідь:*  $\text{tga} = 1,1 \times 10^{-7}$ , потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню коаксіального кабелю

$$\int_{S_{\text{біч}}} \vec{\Pi} \vec{dS} = 1,523 \text{ Вт.}$$

*Приклад 10* На границі поділу діелектрик-повітря ( $z=0$ ) напруженість електричного поля плоскої хвилі змінюється за законом

$$E = E_m \sin(\omega t + \Psi_n),$$

де  $E_m = 0,2 \text{ В/м}$ ;  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $\Psi_n = 30^\circ$ .

Записати вирази для миттєвих значень напруженості магнітного поля  $H$  і вектора Пойнтінга  $\vec{\Pi}$  в площині  $z = 0,5 \text{ км}$ .

$$\text{Розв'язок: вектор Пойнтінга } \vec{\Pi} = \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right].$$

У площині  $z \neq 0$  для  $E$  можна записати

$$E = E_m \sin(\omega t - k z + \Psi_n),$$

де  $k = \frac{w}{v_\phi}$  – хвильове число, обумовлене кутовою частотою

$w$  і фазовою швидкістю хвилі  $v_\phi$ .

Для плоскої хвилі компонента  $H$  і  $E$  зв'язані через хвильовий опір  $Z_{x\phi}$  співвідношенням

$$H = \frac{E}{Z_{x\phi}} = \frac{E_m}{Z_{x\phi}} \sin\left( wt - \frac{w}{v_\phi} z + y_n \right) = 5,315 \times 10^{-4} \times \sin(10^6 t - 65^\circ 20')$$

$\times \sin(10^6 t - 65^\circ 20')$  А/м.

Для повітря  $Z_0 = 377$  Ом. Тоді

$$P = EH = \frac{E^2}{Z_{x\phi}} = \frac{1}{Z_{x\phi}} E_m^2 \sin^2\left( wt - \frac{w}{v_\phi} z + y_n \right).$$

Оскільки у більшості випадків розглядаються гармонійні коливання (які змінюються за законом синуса або косинуса, а не  $\sin^2(t)$ ), то понизимо ступінь синуса, використовуючи тригонометричну формулу

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

У підсумку одержимо

$$P = \frac{E_m^2}{2Z_{x\phi}} \left( 1 - \cos\left( 2wt + 2y_n - \frac{2w}{v_\phi} z \right) \right) = 5,315 \times 10^{-5} \times (1 - \cos(2 \times 10^6 t - 130^\circ 40')).$$

*Відповідь:* напруженість магнітного поля  $H = 5,315 \times 10^{-4} \times \sin(10^6 t - 65^\circ 20')$ , вектор Пойнтінга  $P = 5,315 \times 10^{-5} \times (1 - \cos(2 \times 10^6 t - 130^\circ 40'))$ .

*Приклад 11* Плоска електромагнітна хвиля проникає із повітря в металеву плиту ( $g = 5 \times 10^6$  Ом<sup>-1</sup>×м<sup>-1</sup>;  $m = 1$ ). Фазовий фронт паралельний поверхні плити. Частота коливань  $f = 5$  кГц. Амплітуда густини струму на поверхні

$d_m = 5\sqrt{2} \times 105 \text{ A/m}^2$ . Визначити активну потужність  $P$ , яка поглинається шаром металу товщиною  $x = 0,5 \text{ см}$  і площею  $S = 1 \text{ м}^2$ .

Розв'язок. Активну потужність  $P$ , яка поглинається шаром металу, можна визначити, якщо із потужності на поверхні металу  $P_1$  відняти потужність  $P_2$  на глибині  $x = 0,5 \text{ см}$ , тобто  $P = P_1 - P_2$ .

$$\text{Потужність } P = \oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}.$$

Оскільки вектори  $\vec{\Pi}$  і  $\vec{dS}$  спрямовані перпендикулярно до поверхні плити, то кут між ними дорівнює нулю. Також вектор  $\vec{\Pi}$  постійний по всій поверхні металевої плити. Тоді можна записати

$$P_1 = \oint_S \vec{\Pi}_1 \cdot \vec{dS} = \oint_S \Pi_1 \cdot dS \cos 0^\circ = \Pi_1 \oint_S dS = \Pi_1 S.$$

Знайдемо комплекс діючого значення модуля вектора

$$\text{Пойнтінга на поверхні плити } \dot{\Pi}_1 = \dot{E}_1 \dot{H}_1.$$

$$\text{Із закону Ома випливає, що } \dot{E}_1 = \frac{\dot{d}}{g} = \frac{\dot{d}_{1m}}{\sqrt{2}g}.$$

Для плоскої хвилі напруженість магнітного поля  $\dot{H}$  пов'язана із напруженістю електричного поля  $\dot{E}$  через хвильовий опір  $\dot{Z}_{xв}$  формулою

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_1}{\dot{Z}_{xв}}.$$

Для провідного середовища хвильовий опір визначається виразом (див. п. 3.2)

$$\dot{Z}_{x6} = \sqrt{\frac{wm_a}{g}} e^{j45^\circ}.$$

Із урахуванням цього  $\dot{\Pi}_1 = \frac{\dot{E}_1}{\dot{Z}_{x6}} = \frac{\dot{d}_{1m}^2}{2g^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{wm_a}{g}} e^{-j45^\circ}} =$

$$= \frac{\dot{d}_{1m}^2}{2g^2} \sqrt{\frac{g}{wm_a}} e^{j45^\circ} = 1130 \cos 45^\circ = 799 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

При проходженні в провіднику електромагнітна хвиля загасає з коефіцієнтом загасання

$$a = k = \sqrt{\frac{wm_a g}{2}} = 314 \text{ м}^{-1},$$

тобто  $\dot{E}_2 = \dot{E}_1 e^{-kx}$ ;  $\dot{H}_2 = \dot{H}_1 e^{-kx}$ .

Тоді  $\dot{\Pi}_2 = \dot{E}_1 \dot{H}_1 e^{-2kx} = \dot{\Pi}_1 e^{-2kx}$ .

У підсумку маємо, що активна потужність, яка поглинається шаром металу товщиною  $x$ , дорівнює

$$P = \left( \dot{\Pi}_1 - \dot{\Pi}_2 \right) S = \left( \dot{\Pi}_1 - \dot{\Pi}_1 e^{-2kx} \right) S = \dot{\Pi}_1 S (1 - e^{-2kx}) =$$

$$= 762 \text{ Вт}.$$

*Відповідь:* активна потужність, яка поглинається шаром металу товщиною 0,5 см,  $P = 762 \text{ Вт}$ .

### Запитання для самоперевірки

1 Які основні методи розв'язання задач використовують в «Теорії поля»?

2 У чому полягає перевага аналітичних методів розв'язання задач перед числовими?

3 Які існують аналітичні методи аналізу стаціонарних полів?

4 Для якого типу задач застосовують теорему Гауса і закон повного струму?

5 У чому полягає метод безпосереднього інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа?

6 Для розв'язання задач якого типу застосовується метод розділення змінних (метод Фур'є)?

7 У чому полягає метод розділення змінних?

8 Для розрахунків яких полів застосовується метод дзеркальних зображень?

9 Яким штучним прийомом користуються в методі дзеркальних зображень?

10 У чому полягає метод конформного перетворення (відображення)?

11 Чим відрізняється метод інтегральних рівнянь від методу кінцевих елементів?

12 Яка послідовність визначення потенціалів методом сіток?

13 У чому полягає універсальний метод кінцевих різниць у часовій області (метод FDTD)?

14 Чим відрізняються експериментальні методи моделювання полів від числових методів?

15 Які існують методи інтегрування рівнянь Лапласа і Пуассона?

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

з курсу «Теорія поля» і суміжних дисциплін

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: учебник для студентов энергетических и электротехнических вузов. – М.: Высшая школа, 1973. – 752 с.

2. Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники / Л.Р. Нейман, К.С. Демирчан. – Т. 2. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 408 с.

3. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля: справочное пособие для электротехн. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1989. – 271 с.

4. Карпов Ю.О. Теоретичні основи електротехніки. Магнітне та електромагнітне поле: навчальний посібник / Ю.О. Карпов, Ю.Г. Ведміцький, В.В. Кухарчук. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 167 с.

5. Карпов Ю.О. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле: Навчальний посібник / Ю.О. Карпов, Ю.Г. Ведміцький, В.В. Кухарчук. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 406 с.

6. Башарин С.А. Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля: учебное пособие / С.А. Башарин, В.В. Фёдоров. – М.: Академия, 2007. – 304 с.

7. Демирчан К.С. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / К.С. Демирчан, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. – Том 2. – СПб: Питер. – 2009. – 432 с.

8. Воробйов Г.С. Електромагнітні поля та хвилі: навчальний посібник / Г.С. Воробйов, К.О. Пушкаръов, А.І. Рубан. – Суми: Вид-во СумДУ, 2002. - 112 с.

9. Бушок Г.Ф. Курс фізики: у 2-х кн. – Кн.1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. – 2-ге видання /

Г.Ф. Бушок, В.В. Левандовський, Г.Ф. Півень. – К.: Либідь, 2001. – 448 с.

10. Бушок Г.Ф. Курс фізики: навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів. – Кн.2. Електрика і магнетизм / Г.Ф. Бушок, Є.Ф. Венгер. – К.: Вища школа, 2003. – 278 с.

11. Вища математика: математичний аналіз, диференційні рівняння: підручник / І.І. Веренич, В.П. Лавренчук, Г.С. Пасічник, І.М. Черевко. – Чернівці: Рута, 2008. – 255 с.

12. Доброневский О.В. Справочник по радиоэлектронике. – К.: Высшая школа, 1978. – 360с.

13. Филопович С.Р. Судьба классического закона. – М.: Наука, 1990. – 240 с.

14. Конструирование экранов и СВЧ-устройств: учебник для вузов / А.М. Чернушенко, Б.В. Петров, Л.Г. Малорацкий и др.; под ред. А.М. Чернушенко. – М.: Радио и связь, 1990. – 352 с.

15. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.

16. Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с.

17. Девятков Н.Д. Миллиметровые волны и их роль в процессах жизнедеятельности / Н.Д. Девятков, М.Б. Голант, О.В. Бецкий. – М.: Радио и связь, 1991. – 168 с.

18. Техническая электродинамика: учеб. пособие / П.Н. Чернышёв, В.П. Самсонов, Н.П. Чернышёв. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 272 с.

19. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ. – М.: Высшая школа, 1990. – 335 с.

20. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1992. – 416 с.

21. Семёнов Н.А. Техническая электродинамика: учебное пособие для вузов. – М.: Связь, 1973. – 480с.

22. Демидчик В.И. Электродинамика СВЧ: учебное пособие для вузов. – Минск: Университетское, 1992. – 255 с.

23. Нефедоров Е.И. Полосковые линии передачи: электродинамические основы автоматизированного проектирования интегральных схем СВЧ / Е.И. Нефедоров, А.Т. Филалковский. – М.: Наука, 1980. – 312 с.

24. Взятыйшев В.Ф. Диэлектрические волноводы. – М.: Советское радио, 1970. – 216 с.

25. Силин Р.А. Замедляющие системы / Р.А. Силин, В.П. Сазонов. – М.: Советское радио, 1966.

26. Шматько А.А. Электронные приборы сверхвысоких частот: учебное пособие. – Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 328 с.

27. Диэлектрические резонаторы / М.Е. Ильченко, В.Ф. Взятыйшев, Л.Г. Гасанов и др.; под ред. М.Е. Ильченко. – М.: Радио и связь, 1989. – 328 с.

28. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Советское радио. – 1966. – 475 с.

29. Техника субмиллиметровых волн / под ред. Р.А. Валитова. – М.: Советское радио, 1969. – 480 с.

30. Генераторы дифракционного излучения / под ред. В.П. Шестопалова. – Киев: Наукова думка. – 1991. – 320 с.

31. Шестопалов В.П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. – К.: Наукова думка. – 1985. – Т.1. – 216 с. – (Открытые структуры). – Т.2. – 256 с. – (Источники, элементарная база. – Радиосистемы).

32. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции. Электроника СВЧ. – М.: Радио и связь. – 1995. – 600 с.

33. Квазиоптический направленный ответвитель на дифракционно-связанных линиях передачи / Г.С. Воробьёв, В.О. Журба, А.С. Кривец и др. // Приборы и техника эксперимента. - №4. – 2009. – С. 110-113.

34. Vorobyov G.S. Perspectives of applications of new modifications of resonant quasioptical structures in ENF



equipment and electronics / G.S. Vorobyov, M.V. Petrovsky, A.I. Ruban, V.O. Zhurba, O.I. Belous, A.I. Fisun // Telecommunications and Radio Engineering. – 2007. – №66(20). – P. 1839-1862.

35. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках взаимодействий / В.А. Балакирев, Н.И. Карбушев, А.О. Островский, Ю.В. Ткач. – Киев: Наукова думка. – 1993. – 192 с.

36. Вакуумная СВЧ электроника: сборник обзоров. – Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2002. – 160 с.

37. Воробьёв Г.С. Волновое моделирование черенковского и дифракционного излучений в пространственно-ограниченных металло-диэлектрических структурах // Радиотехника. – 2000. – Вып. 116. – С.12–20.

38. Воробьёв Г.С. О возможности применения квазиоптических открытых резонансных металлодиэлектрических структур в электронике КВЧ / Г.С. Воробьёв, М.В. Петровский, А.С. Кривец // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2006. – Т.49, №7. – С.56–61.

39. Vorobyov G.S., Krivets A.S., Petrovsky M.V., Tsvyk A.I., Shmatko A.A. The Smith-Pursell effect amplification of the electromagnetic waves in an open waveguide with a metal-dielectric layer // Telecommunications and Radio Engineering. – 2003. – №59(10, 11 and 12). – P. 80–92.

40. Воробьёв Г.С. Моделирование черенковского и дифракционного излучений на периодических металлодиэлектрических структурах (обзор) / Г.С. Воробьёв, А.С. Кривец, М.В. Петровский и др. // Вісник СумДУ. Серія Фізика, математика, механіка. – 2003. – №10(56). – С.110–130.

41. Воробьёв Г.С. Резонансные квазиоптические структуры в технике и электронике КВЧ (обзор) / Г.С. Воробьёв, М.В. Петровский, В.О. Журба // Вісник СумДУ. Серія Фізика, математика, механіка. – 2006. – №6(90). – С.5–12.

42. Олифер В.Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: учеб. для вузов / В.Г. Олифер, Н.А. Олифер. – 3-е изд. – С-Пб.: Питер Принт, 2006. – 958 с.

43. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия. – 1975. – 250 с.

44. Молоковский С.И. Интенсивные электронные и ионные пучки / С.И. Молоковский, А.Д. Сушков. – М.: Энергоатомиздат. – 1991. – 304 с.

45. Сальери М. Электронная и ионная оптика. – М.: Мир. – 1990. – 639 с.

46. Электродинамическое моделирование методом конечных разностей во временной области (FDTD) / под ред. В.Н. Малышева. – СПб.: Изд-во СПб. ГЭТУ «ЛЭТИ», 2000. – 76 с.

47. Сиренко Ю.К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических волноводах и компактных резонаторах, ИРЭ НАН Украины. – Харьков: ЭДЭНА, 2003. – 363 с.

48. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: учебное пособие для вузов / под ред. Л.А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 1975. – 488 с.

49. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для вузов / под ред. проф. П.А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

50. Методические указания к лабораторным работам «Стационарные электрические поля» по курсу «Теория электромагнитного поля» / сост.: Г.С. Воробьёв, К.А. Пушкарёв, А.Н. Лысенко. – Сумы: МГИПП «Мрия», 1991. – 27 с.

51. Методические указания к лабораторной работе «Изучение свойств электромагнитного поля» по курсу «Теория электромагнитного поля» / сост.: Г.С. Воробьёв, К.А. Пушкарёв. – Харьков: ХПИ, 1991. – 16 с.

**ДОДАТОК А**  
(обов'язковий)  
**ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

***Тема А1 Електростатичне поле***

Даний перелік задач додатка, який охоплює основні розділи курсу «Теорія поля», є обов'язковим у самостійній роботі студентів щодо закріплення теоретичного матеріалу. Він містить як задачі, наведені як приклади п. 5.7, так і задачі, які входять у класичні збірники [48, 49].

*Задача 1\** Вивести формулу для напруженості електричного поля  $E$  коаксіального кабелю через напругу  $U$  і розрахувати, під яку напругу  $U$  можна підключити кабель, якщо максимальна напруженість  $E_{\max}$  поля не повинна перевищувати  $1/3$  пробивної напруженості  $E_{np} = 2 \times 10^4$  кВ/м. Кабель має такі розміри: радіус внутрішньої жили  $R_1 = 2$  мм, радіус оболонки  $R_2 = 5$  мм.

*Задача 2* Тонкий прямий стрижень довжиною  $l$  рівномірно заряджений з лінійною густиною  $t$ . На продовженні осі стрижня на відстані  $a$  від найближчого кінця перебуває точковий заряд  $q_0$ . Визначити силу взаємодії  $F$  стрижня і заряду, вважаючи, що нескінченно малий елемент довжини  $dx$  стрижня має заряд  $dq$ .

*Задача 3* Уздовж осі  $z$  циліндричної системи координат розміщена нескінченно довга заряджена нитка.

---

\* – розв'язання цих задач наведено в п.5.7

Напруженість поля в точці  $P$  ( $r_p=20$  см;  $\alpha_p=0^\circ$ )  
 $\vec{E}_p = \vec{r}_0 \times 500$  В/м. Розрахувати напругу  $U_{MN}$  між точками  
 $M$  ( $r_M=10$  см;  $\alpha_M=270^\circ$ ) і  $N$  ( $r_N=30$  см;  $\alpha_N=135^\circ$ ).

*Задача 4* Радіус зовнішнього електрода циліндричного конденсатора  $R_2=5,4$  см, відносна діелектрична проникність діелектрика  $\epsilon=2$ . Підібрати оптимальне значення радіуса внутрішнього електрода  $R_1$  так, щоб конденсатор витримував найбільшу напругу.

*Задача 5\** Повітряний конденсатор складається із двох плоских пластин, розміщених нормально по осі  $x$  на відстані  $d$ . Одна пластина заземлена, інша пластина під'єднана до позитивного електрода джерела постійної напруги  $U$ . Між пластинами розподілений вільний заряд із об'ємною густиною  $r(x) = -kx$ . Визначити  $j(x)$  і  $E(x)$ .

*Задача 6* Між двома концентричними циліндричними електродами, розміщеними у вакуумі, зміна потенціалу описується за законом

$$j = ar^3 + b \ln(r) + c,$$

де  $r$  – відстань до осі циліндрів;  
 $a, b, c$  – числові коефіцієнти.

Знайти закон розподілу напруженості електричного поля  $\vec{E}$ ,  $\text{div} \vec{E}$ ,  $\text{rot} \vec{E}$  і об'ємної густини заряду  $r$  між електродами.

*Задача 7\** Чи може потенціал електричного поля  $j$  в області простору, де об'ємна густина заряду  $r=0$ , виража-

тися рівнянням у циліндричній системі координат  $j(r, a, z) = 3r^2 \cos^3 a + 5r - \cos^3 a$  ?

*Задача 8\** Циліндричний конденсатор із двома шарами діелектрика  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  під'єднаний до джерела постійної напруги  $U$ . Визначити закон розподілу потенціалу в кожному шарі, якщо заряд у другому шарі змінюється за законом  $r = ar^2$ .

*Задача 9* Чи може потенціал електричного поля  $j$  в області простору, де об'ємна густина заряду  $r=0$ , виражатися такими рівняннями у сферичній системі координат:

$$1) j(r, q, a) = -ar \cos q ;$$

$$2) j(r, q, a) = -ar \cos q + \frac{b}{r^2} \cos q ,$$

де  $a$  і  $b$  – сталі?

*Задача 10\** Вивести формулу для визначення величини напруженості поля  $E$  двошарового плоского конденсатора. Товщина першого шару діелектрика із  $\epsilon_{a1}$  дорівнює  $d_1$ , другого шару із  $\epsilon_{a2}$  дорівнює  $d_2$ . Вважати, що  $\epsilon_{a1} = 2\epsilon_{a2}$ ,  $d_2 = 1,5d_1$ , напруга на конденсаторі дорівнює  $U$ .

*Задача 11* Напруженість рівномірного електричного поля в трансформаторному маслі ( $\epsilon_1 = 2,5$ )  $E_1 = 10^5$  В/м. Кут  $\alpha_1$  між вектором напруженості  $\vec{E}$  і нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні скляної пластини ( $\epsilon_2 = 7$ ), яка граничить із маслом, становить  $30^\circ$ . Вважаючи, що скляна пластинка не-

скінченна, знайти напруженість електричного поля  $E_2$ , а також кут заломлення  $\alpha_2$  у склі.

*Задача 12\** Визначити напруженість і потенціал електричного поля провідної рівномірно зарядженої кулі: заряд кулі  $Q$ , радіус –  $a$ .

*Задача 13\** Виходячи із загального розв'язку задачі для кулі в зовнішньому однорідному полі (див. п. 5.4), визначити потенціал і напруженість поля провідної кулі радіуса  $R$  із зарядом  $Q$ , розміщеної в діелектричному середовищі із проникністю  $\epsilon$ . Зовнішнє поле напруженістю  $E_0$  спрямоване вздовж осі  $z$ .

*Задача 14* У рівномірне електричне поле  $E_0$  внесена провідна куля радіусом  $R$ . Потенціал поза кулею заданий таким співвідношенням:

$$j_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r} + j_0 + E_0 \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos q.$$

Одержати вирази для складових напруженості електричного поля  $E_r$  і  $E_q$ . Проаналізувати напруженість поля на поверхні кулі ( $r = R$ ) при  $q = 0^\circ$ ,  $q = 90^\circ$  і  $q = 180^\circ$ .

*Задача 15\** Визначити потенціал і напруженість поля усередині та зовні провідного незарядженого ( $t = 0$ ) нескінченно довгого циліндра радіусом  $R$ , поміщеного в однорідне електричне поле  $E_0$ , методом розділення змінних. Циліндр і навколишнє середовище мають питомі провідності  $g_1$  і  $g_2$ . Зовнішнє поле напруженістю  $E_0$  перпендикулярне до осі циліндра  $z$ .

*Задача 16\** Визначити напруженості і потенціал електричного поля діелектричної рівномірно зарядженої кулі: заряд кулі  $Q$ , радіус –  $a$ .

*Задача 17\** У рівномірне електричне поле  $E_0=800$  В/м внесена куля із діелектрика ( $\epsilon_1=4$ ) радіусом  $R=2$  см. Навколишнє середовище – повітря ( $\epsilon_2=1$ ). Потенціали усередині  $j_i$  і поза  $j_e$  кулю змінюються за законами:

$$j_i = j_0 + E_0 r \frac{3\epsilon_2}{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)} \cos q,$$

$$j_e = j_0 + E_0 \left( r + \frac{R^3}{r^2} \cdot \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)} \right) \cos q.$$

Визначити напруженості електричного поля  $E$  при  $r=1$  см,  $q=0^\circ$  і при  $r=10$  см,  $q=90^\circ$ .

*Задача 18* Яка сила  $F$  діє на точковий заряд  $q=10^{-10}$  Кл, розміщений у повітрі на відстані  $d=5$  см від плоскої скляної поверхні ( $\epsilon=6$ )?

*Задача 19* На відстані 4 см від безмежної плоскої поверхні поділу двох діелектриків із діелектричними проникностями  $\epsilon_1=3$  і  $\epsilon_2=7$  у середовищі із  $\epsilon_1$  розміщений точковий заряд  $q=10^{-9}$  Кл. Обчислити напруженість поля  $E$  на відстані 3 см від заряду по нормалі до поверхні поділу.

*Задача 20\** На відстані  $h$  від границі поділу двох діелектриків із діелектричними проникностями  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  у середовищі із  $\epsilon_2$  розміщена заряджена нитка з лінійною густиною заряду  $t$ . Визначити потенціал  $j$  і напруженість електричного поля  $E$  для точки, яка лежить на границі по-

ділу діелектриків по нормалі від заряду, враховуючи те, що нитка належить двом середовищам.

### **Тема А2 Електричне поле постійного струму**

**Задача 21\*** Сталева пластина являє собою  $3/4$  диска із концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска  $R_1=1$  см, зовнішній радіус  $R_2=2$  см. Товщина пластини постійна. Між кінцями пластини підтримується постійна різниця потенціалів  $U$ . Знайти різницю потенціалів  $j_2 - j_1$ , якщо найбільше значення густини струму  $d_{\max} 5 \times 10^6$  А/м<sup>2</sup>, питома провідність сталі  $g = 10^7$  См/м.

**Задача 22** Потенціал постійного електричного поля  $j$ , створеного у провідному середовищі із питомою провідністю  $g = 10^{-4}$  См/м, змінюється за законом

$$j = cx^2 - cy^2 + d,$$

де  $c=1$  В/м<sup>2</sup>;  $d=2$  В.

Знайти закони зміни густини струму  $\vec{d}(x, y)$  і  $\text{div}d(x, y)$  залежно від координат точки.

**Задача 23** Визначити струм втрати  $I_{\text{втр}}$  коаксіального кабелю довжиною  $l=1$  км. Простір між жилою і оболонкою коаксіального кабелю заповнений неідеальним діелектриком з питомою провідністю  $g = 10^{-8}$  Ом<sup>-1</sup>×м<sup>-1</sup>. Радіус жили –  $R_1$ ; радіус оболонки  $R_2 = e R_1$ ;  $e$  – основа натурального логарифма. Напруга між жилою і оболонкою  $U = 10$  кВ.



*Задача 24\** Заземлювач являє собою металеву півсферу. Через заземлювач проходить струм  $I = 1000$  А; питома провідність землі  $g = 10^{-2}$  Ом $^{-1}$ ×м $^{-1}$ . Знайти напругу  $U$  між точками, розміщеними на відстані  $R_1 = 22$  м і  $R_2 = 23$  м від заземлювача.

*Задача 25* У пластині із алюмінію ( $g_e = 3,57 \times 10^7$  Ом $^{-1}$ ×м $^{-1}$ ) створене рівномірне електричне поле напруженістю  $E_0 = 0,1$  В/м. Визначити густину струму  $d_i$  у мідному тілі ( $g_i = 5,7 \times 10^7$  Ом $^{-1}$ ×м $^{-1}$ ), яке має циліндричну форму і розміщене перпендикулярно до поля, створеного в пластині алюмінію.

*Задача 26* У морську воду із питомою провідністю  $g = 0,1$  Ом $^{-1}$ ×м $^{-1}$  вертикально опущено дві металеві труби із зовнішнім діаметром  $D = 5$  см і довжиною  $l = 3$  м. Знайти провідність  $G$  між трубами, якщо осі труб віддалені на відстань  $d = 25$  м.

*Задача 27* Радіус внутрішнього електрода сферичного конденсатора  $R_1 = 2$  см, радіус зовнішнього електрода  $R_2 = 5$  см, питома провідність діелектрика  $g = 10^{-10}$  Ом $^{-1}$ ×м $^{-1}$ . До електродів конденсатора прикладена постійна напруга  $U = 3000$  В. Знайти залежність модуля густини струму  $d(r)$  як функцію відстані від центра сфер. Підрахувати струм втрати  $I_{втр}$  через недосконалу ізоляцію.

*Задача 28* Між електродами сферичного конденсатора знаходиться діелектрик, питома провідність  $g$  якого змінюється за законом

$$g = g_0 / r,$$

де  $R_1 < r < R_2$ ;  $g_0 = 10^{-4}$  См/м.

Радіуси внутрішньої і зовнішньої сфер  $R_1 = 1$  см і  $R_2 = 5$  см відповідно. Струм втрати через недосконалу ізоляцію  $I_{\text{втр}} = 0,2$  А. Знайти закон зміни потенціалу  $j(r)$  між електродами, якщо зовнішній електрод заземлений. Визначити напругу  $U$  між електродами і провідність втрати  $G_{\text{втр}}$  конденсатора.

*Задача 29\** У циліндричному конденсаторі з недосконалою ізоляцією питома провідність змінюється за законом

$$g = g_1 (2 - kr),$$

де  $g_1 = 10^{-9}$  См/см;  $k = 0,1$  см<sup>-1</sup>.

Радіус внутрішнього циліндра  $a = 5$  см, радіус зовнішнього циліндра  $b = 10$  см; довжина конденсатора  $l = 1$  м. Конденсатор під'єднаний до постійної напруги  $U = 1$  кВ. Знайти закон розподілу густини струму  $d(r)$  як функцію відстані  $r$  від осі циліндра. Обчислити струм втрати  $I_{\text{втр}}$ .

*Задача 30* Напівсферичний заземлювач радіусом  $R_0$  розміщений у ґрунті із питомою провідністю  $g_1$ . Відстань від центра півсфери до поверхні поділу двох шарів різного ґрунту із питомими провідностями шарів  $g_1$  і  $g_2$  ( $g_1 > g_2$ ) –  $a$ . Через заземлювач у ґрунт проходить постійний струм  $I_1$ . Визначити закон зміни потенціалу  $j(r)$  як функцію відстані. Вважати  $j = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

### *Тема А3 Магнітне поле постійного струму*

*Задача 31* Знайти кут  $\alpha_2$ , під яким силові лінії магнітного поля виходять у середовище із відносною магнітною проникністю  $m_2$ , якщо кут падіння  $\alpha_1 = 89^\circ$ ,  $m_1 = 10^4$ ,  $m_2 = 1$ .

*Задача 32* За допомогою закону Біо-Савара-Лапласа визначити магнітну індукцію  $B$ , створену відрізком лінійного дроту  $L$  зі струмом  $I$ , у точці  $M$ , віддаленій від дроту на відстань  $b$ .

*Задача 33\** За допомогою закону Біо-Савара-Лапласа вивести формулу для визначення напруженості магнітного поля  $H$  на осі колового витка радіусом  $a$  зі струмом  $I$ .

*Задача 34\** Постійний струм  $I = 5$  А проходить уздовж рамки, виконаної у вигляді правильного багатокутника, вписаного у коло радіусом  $a = 10$  см. Кількість сторін багатокутника  $n = 6$ , кількість витків рамки  $w = 5$ . Визначити напруженість магнітного поля  $H$  в центрі багатокутника.

*Задача 35\** Через провідник круглого перерізу радіусом  $a$  проходить постійний струм  $I$ . Визначити напруженості магнітного поля  $H$  усередині і поза проводом. Побудувати якісну картину розподілу полів.

*Задача 36\** Уздовж труби круглого перерізу з внутрішнім радіусом  $R_1$  і зовнішнім радіусом  $R_2$  проходить постійний струм  $I$ . Визначити напруженості магнітного поля  $H$  усередині труби, у тілі труби і поза трубою. Побудувати якісну картину поля.

*Задача 37\** По внутрішньому провіднику коаксіального кабелю радіусом  $R_1$  і зовнішньому провіднику товщиною  $R_3 - R_2$  в протилежних напрямках проходить постійний струм  $I$ . Визначити напруженість магнітного поля в провідниках кабелю, а також у внутрішній і зовнішній областях. Побудувати якісну картину розподілу полів.

*Задача 38* Знайти різницю скалярних магнітних потенціалів  $j_{mA} - j_{mB}$  між точками  $A$  і  $B$ , розміщеними в магнітному полі лінійного провідника зі струмом  $I = 10$  А. Координати точок:  $r_A = 2$  см;  $q_A = 90^\circ$ ;  $r_B = 4$  см;  $q_B = 0^\circ$ .

*Задача 39* У повітрі створене рівномірне магнітне поле напруженістю  $H_0 = 240$  А/м. У це поле помістили феромагнітну кульку, відносна магнітна проникність якої  $m_r = 20$ . Знайти магнітну індукцію в кульці  $B_i$ .

*Задача 40\** Над границею поділу двох магнітних середовищ із магнітними проникностями  $m_1 = 1$  і  $m_2 = 999$  у середовищі з  $m_1$  на відстані  $R$  від границі розміщений провідник зі струмом. Визначити напруженості магнітного поля в точках  $M$  і  $N$ :  $R = 2$  см; точка  $M$  перебуває на відстані  $R_1 = 2$  см від провідника зі струмом; точка  $N$  перебуває на відстані 4 см від точки  $M$  перпендикулярно до поверхні поділу; сила струму  $I_1 = 10$  А.

*Задача 41* Прямолінійний довгий дрід, уздовж якого проходить струм  $I_1 = 60$  А, розміщений у повітрі паралельно плоскій поверхні сталевій ( $m \rightarrow \infty$ ) плити на відстані  $h = 2$  см від неї. Визначити напруженості магнітного поля

$H$  у точках  $A$  і  $B$ , координати яких:  $x_A=0$ ;  $y_A=0$ ;  $x_B=3$  см;  $y_B=2$  см.

**Задача 42** Уздовж довгого циліндричного сталевого дроту проходить постійний струм. Радіус дроту  $R_0=1$  см. Відносна магнітна проникність сталі  $m=50$ . Середовищем, яке оточує дріт, є повітря. Проекція векторного магнітного потенціалу  $A_z$  на осі  $z$  змінюється як функція відстані  $r$  від осі дроту за такими законами:

– усередині дроту  $A_1=-6,28 r^2$  Вб/м;

– поза дротом  $A_2=-25,1 \times 10^{-6} \ln \frac{r}{0,01} - 6,28 \times 10^{-4}$  Вб/м.

Знайти закони зміни модулів напруженості магнітного поля  $H(r)$  і вектора намагніченості  $M(r)$ .

### **Тема А4 Змінні електромагнітні поля**

**Задача 43\*** Прямолінійний довгий дріт і прямокутна одновиткова рамка розміщені в одній площині. Розміри рамки:  $b=50$  см;  $c=30$  см. Уздовж дроту проходить синусоїдальний струм  $i=10 \sin(10t)$  А. Рамка рухається зі швидкістю  $v=80$  см/с у напрямку, перпендикулярному до осі дроту. Записати вираз для е.р.с., яка наводиться в рамці, якщо при  $t=0$  найближча сторона рамки перебуває на відстані  $a=10$  см від осі дроту. Знайти миттєве значення е.р.с., коли найближча сторона рамки перебуває на відстані  $x=20$  см від її початкового положення.

**Задача 44** Кільце радіусом  $R_0=40$  см поміщене в рівномірне магнітне поле, індукція якого змінюється за законом

$$\vec{B} = z^0 0,1 \sin(100\pi t) \text{ Тл.}$$

До кільця короткими провідниками приєднаний електромагнітний вольтметр, опір якого нескінченний. Знайти показання  $U$  вольтметра.

*Задача 45\** Визначити тангенс кута  $\alpha$ , який утворюється напруженістю електричного поля  $\vec{E}$  з нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні мідної жили коаксіального кабелю в точці, яка перебуває на її поверхні. Підрахувати величину потоку вектора Пойнтінга через бічну поверхню жили на довжині в  $l=1$  м. Радіус жили  $R_1=0,3$  см; внутрішній радіус оболонки  $R_2=1$  см; струм, який проходить по кабелю  $I=50$  А; напруга між жилою і оболонкою  $U=10$  кВ; питома провідність міді  $g=5,7 \times 10^7 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ .

*Задача 46\** На границі поділу діелектрик-повітря ( $z=0$ ) напруженість електричного поля плоскої хвилі змінюється за законом

$$E = E_m \sin(\omega t + \Psi_n),$$

де  $E_m=0,2$  В/м;  $\omega=10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $\Psi_n=30^\circ$ .

Записати вираз для миттєвих значень напруженості магнітного поля  $H$  і вектора Пойнтінга  $\vec{P}$  в площині  $z=0,5$  км.

*Задача 47\** Плоска електромагнітна хвиля проникає з повітря в металеву плиту ( $g=5 \times 10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ ;  $m=1$ ). Фазовий фронт паралельний поверхні плити. Частота коливань  $f=5$  кГц. Амплітуда густини струму на поверхні  $d_m=5\sqrt{2} \times 10^5 \text{ А/м}^2$ . Визначити активну потужність  $P$ , яка

поглинається шаром металу товщиною  $x=0,5$  см і площею  $S=1$  м<sup>2</sup>.

*Задача 48* Коаксіальний кабель із двошаровим діелектриком має радіус внутрішньої жили  $R_0=5$  мм, радіус поверхні поділу двох діелектриків  $R_1=21,8$  мм, внутрішній радіус оболонки  $R_2=40$  мм. Відносні діелектричні проникності внутрішнього шару діелектрика  $\epsilon_1=5$ , зовнішнього шару діелектрика  $\epsilon_2=2$ . Кабель перебуває під постійною напругою  $U=100$  кВ. Уздовж жили і оболонки кабелю проходить струм  $I=100$  А. Жила і оболонка кабелю виконані із міді ( $g=57 \times 10^6$  См/м). Вибрати товщину оболонки  $\Delta$  так, щоб потоки вектора Пойнтінга через бічні поверхні жили і оболонки були рівні.

*Задача 49* З метою дослідження електричних властивостей склопластику дослідним шляхом знайдений коефіцієнт відбиття  $\overset{\perp}{K}_0 = -0,4$  при куті падіння  $j=45^\circ$  з повітря. Вважаючи склопластик ідеальним діелектриком, визначити його діелектричну проникність  $\epsilon_2$ .

*Задача 50* Електромагнітна хвиля має частоту  $f=5000$  Гц і проникає із повітря в провідне середовище з питомою провідністю  $g=10^7$  Ом<sup>-1</sup>×м<sup>-1</sup> і відносною магнітною проникністю  $m=10^3$ . Визначити коефіцієнт загасання  $a$ , коефіцієнт фази  $b$ , хвильове число  $k$ , глибину проникнення  $\Delta$ , довжину хвилі  $l$ , фазову швидкість хвилі  $v_\phi$  в провідному середовищі.

*Задача 51* Плоска електромагнітна хвиля поширюється в міді, питома провідність якої  $g = 57 \times 10^6 \text{ Ом}^{-1} \times \text{м}^{-1}$ . Знайти фазові швидкості хвиль  $v_\phi$ , хвильові опори  $Z_{xв}$  і еквівалентні глибини проникнення хвиль із частотами  $f_1 = 50 \text{ Гц}$  і  $f_2 = 10^6 \text{ Гц}$ , якщо  $m = 1$ .

*Задача 52* У прямокутному хвилеводі перетином  $a \times b = 8,64 \times 4,32 \text{ см}^2$  потрібно збудити хвилю типу  $H_{10}$ . Знайти критичну довжину хвилі  $l_{кр10}$ , довжину хвилі у вільному просторі  $l$  і довжину хвилі у хвилеводі  $\Lambda$  при частоті генератора  $f = 3 \times 10^9 \text{ Гц}$ . Чи може поширюватися хвиля типу  $H_{10}$  в даному хвилеводі? Обчислити фазову  $v_\phi$  і групову  $v_{gp}$  швидкості.

### Відповіді до задач

Задача 1  $E = \frac{U}{r \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$ ,  $U_{np} = 12,2 \text{ кВ}$ .

Задача 2  $F = \frac{q_0 t}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{(a+l)} \right)$ .

Задача 3  $U_{MN} = 110 \text{ В}$ .

Задача 4  $R_1 = 2 \text{ см}$ .

Задача 5  $j(x) = \frac{k}{6\epsilon_0} x^3 + \frac{6U\epsilon_0 - kd^3}{6d\epsilon_0} x$ ,

$E(x) = - \left( \frac{k}{2\epsilon_0} x^2 + \frac{6U\epsilon_0 - kd^3}{6d\epsilon_0} \right)$ .



Задача 6  $\vec{E} = -\left(3ar^2 + \frac{b}{r}\right)\vec{r}^0$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} = -6ar + \frac{b}{r^2}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ ,

$\vec{r} = -9\mathbf{e}_0 ar$ .

Задача 7 Не може.

Задача 8  $j_1(r) = \frac{a(R_1^4 - r^4)}{16e_{a1}} +$

$$+ \left( \frac{\left( 16e_{a1}e_{a2}U + 4ae_{a1}R_2^4 \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) + ae_{a2}(R_1^4 - R_2^4) \right)}{16e_{a1} \left( e_{a1} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + e_{a2} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + U;$$

$$j_2(r) = \left( \frac{\left( 16e_{a1}e_{a2}U + 4ae_{a1}R_2^4 \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) + ae_{a2}(R_1^4 - R_2^4) \right)}{16e_{a2} \left( e_{a1} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + e_{a2} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} + \frac{aR_2^4}{4e_{a2}} \right) \times \ln\left(\frac{R_3}{r}\right).$$

Задача 9 Може.

Задача 10  $E_1 = \frac{1}{4} \frac{U}{d_1}$ ,  $E_2 = \frac{3}{4} \frac{U}{d_2}$ .

Задача 11  $E_2 = 5,9 \times 10^4$  В/м,  $\alpha_2 = 58^\circ$ .

Задача 12  $E = \frac{Q}{4\pi e_a r^2}$ ,  $j = \frac{Q}{4\pi e_a r}$ .

Задача 13  $j = \frac{Q}{4\pi e_a r} + E_0 \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos q + j_0$ ,

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} - E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right) \cos q, \quad E_q = E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \sin q.$$

Задача 14  $E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2} - E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right) \cos q,$

$$E_q = E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \sin q, \text{ при } r=R \text{ и } q=0^\circ \quad E = -3E_0, \text{ при}$$

$$r=R \text{ и } q=90^\circ \quad E = 0, \text{ при } r=R \text{ и } q=180^\circ \quad E = 3E_0.$$

Задача 15  $j_i = -\frac{2g_2}{g_1 + g_2} E_0 r \cos a,$

$$j_e = E_0 \left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r} - r \right) \cos a, \quad E_i = \frac{2g_2}{g_1 + g_2} E_0,$$

$$E_e = E_0 \sqrt{\left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r^2} + 1 \right)^2 \cos^2 a + \left( \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)} \cdot \frac{R^2}{r^2} - 1 \right)^2 \sin^2 a}.$$

Задача 16 При  $r < a$   $E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_{a1} a^3},$

$$j_1 = \frac{Q}{8\pi a} \left( \frac{2e_{a1} + e_{a2}}{e_{a1} e_{a2}} - \frac{r^2}{e_{a1} a^2} \right), \text{ при } r \geq a \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{a2} r^2},$$

$$j_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{a2} r}.$$

Задача 17 При  $r=1$  см и  $q=0$   $E=400$  В/м, при  $r=10$  см и  $q=90^\circ$   $E=793,6$  В/м.

Задача 18  $F = -6,43 \times 10^{-9}$  Н.

Задача 19  $E=720$  В/м.

Задача 20  $E = \frac{t_1}{\pi h (e_{a2} + e_{a1})}, j = \frac{t_1}{\pi (e_{a2} + e_{a1})} \ln \frac{1}{h}.$

Задача 21  $j_2 - j_1 = 0,0235 \text{ В}$ .

Задача 22  $\vec{d} = 2 \times 10^{-4} \left( y \vec{j} - x \vec{i} \right)$ ,  $\text{div} d = 0$ .

Задача 23  $I_{\text{emp}} = 0,628 \text{ А}$ .

Задача 24  $U_{12} = 31,9 \text{ В}$ .

Задача 25  $d_i = 4,36 \times 10^6 \text{ А/м}^2$ .

Задача 26  $G = 0,13 \text{ См}$ .

Задача 27  $d = \frac{gU}{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) r^2}$ ,  $I_{\text{emp}} = 1,256 \times 10^{-7} \text{ А}$ .

Задача 28  $j = \frac{I}{4p g_0} \ln \left( \frac{R_2}{R} \right)$ ,  $U = 256 \text{ В}$ ,

$G_{\text{emp}} = 7,82 \times 10^{-4} \text{ См}$ .

Задача 29  $I_{\text{emp}} = 1,13 \times 10^{-3} \text{ А}$ ,  $d(r) = \frac{2 \times 10^{-4}}{r \ln(2 - 0,1r)}$ .

Задача 30  $j_1 = \frac{I_1}{4p g_1} \left( \frac{1}{r} + \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + g_2)(2a - r)} \right)$ ,

$j_2 = \frac{I_1}{2p(g_1 + g_2)r}$ .

Задача 31  $a_2 = 20'$ .

Задача 32  $B = \frac{m_0 I}{4p b} (\cos a_1 - \cos a_2)$ .

Задача 33  $H = \frac{I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$ .

Задача 34  $H = 143,6 \text{ А/м}$ .

Задача 35  $H_1 = \frac{I r}{2p a^2}$  при  $r \leq a$ ,  $H_2 = \frac{I}{2p r}$  при  $r \geq a$ .

Задача 36  $H_1 = 0$  при  $r < R_1$ ,  $H_2 = \frac{I}{2p r} \cdot \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}$  при

$R_1 < r < R_2$ ,  $H_3 = \frac{I}{2p r}$  при  $r > R_2$ .

Задача 37  $H_1 = \frac{I r}{2p R_1^2}$  при  $r < R_1$ ,  $H_2 = \frac{I}{2p r}$  при

$R_1 < r < R_2$ ,  $H_3 = \frac{I}{2p r} \left( 1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right)$  при  $R_2 < r < R_3$ ;  $H_4 = 0$

при  $r > R_3$ .

Задача 38  $j_{mA} - j_{mB} = 2,5 \text{ В}$ .

Задача 39  $B_i = 7,29 \times 10^{-3} \text{ Тл}$ .

Задача 40  $H_M = 101 \text{ А/м}$ ,  $H_N = 0,0715 \text{ А/м}$ .

Задача 41  $H_A = 0$ ,  $H_B = 459 \text{ А/м}$ .

Задача 42  $H_1 = 2 \times 10^5 r \text{ А/м}$ ,  $M_1 = 9,8 \times 10^6 r \text{ А/м}$ ,

$H_2 = 20 \frac{1}{r} \text{ А/м}$ ,  $M_2 = 0$ .

Задача 43  $e = -\frac{m_0 b I_m}{2p} \times$

$\times \left[ w \ln \frac{a+c+x}{a+x} \cos \left( w \frac{x}{v} \right) - v \left( \frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+c+x} \right) \sin \left( w \frac{x}{v} \right) \right]$ .

При  $x = 20 \text{ см}$   $e = 6,32 \times 10^{-6} \text{ В}$ .

Задача 44  $U = 11,1 \text{ В}$ .

Задача 45  $\text{tg } \alpha = 1,1 \times 10^{-7}$ ,  $\oint_{S_{\text{от}}} \vec{\Pi} d\vec{S} = 1,523 \text{ Вт}$ .

Задача 46  $H = 5,315 \times 10^{-4} \sin(10^{6t} - 65^\circ 20')$ ,

$$П = 5,315 \times 10^{-5} (1 - \cos(2 \times 10^{6t} - 130^\circ 40')).$$

Задача 47  $P = 762$  Вт.

Задача 48  $\Delta = 3 \times 10^{-4}$  м.

Задача 49  $e_2 = 3,22$ .

Задача 50  $k = a = b = 14100 \text{ м}^{-1}$ ,  $\Delta = 7 \times 10^{-5}$  м,  
 $I = 4,45 \times 10^{-4}$  м,  $v_\phi = 2,25$  м/с.

Задача 51  $v_{\phi 1} = 2,96$  м/с,  $I_1 = 0,059$  м,  $Z_{x61} = 1,87 \times 10^{-7}$  Ом,  
 $\Delta_1 = 0,009$  м,  $v_{\phi 2} = 418,67$  м/с,  $I_2 = 4,187 \times 10^{-4}$  м,  
 $Z_{x62} = 2,63 \times 10^{-4}$  Ом,  $\Delta_2 = 6,67 \times 10^{-5}$  м.

Задача 52  $I_{kp10} = 0,1728$  м,  $I = 0,1$  м,  $\Lambda = 0,1225$  м,  
 $v_\phi = 3,68 \times 10^8$  м/с,  $v_{\phi p} = 2,45 \times 10^8$  м/с.

## ДОДАТОК Б

(обов'язковий)

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

***Лабораторна робота 1 Дослідження електричного поля постійного струму в провідному середовищі***

*Мета роботи* – експериментально дослідити картину електричного поля постійного струму в провідному середовищі.

***1.1 Пояснення до роботи***

Розподіл зарядів, які рухаються, у провіднику при постійному струмі є стаціонарним, тому що кількість електрики, яка входить у будь-який об'єм провідника за деякий проміжок часу, дорівнює кількості електрики, яка виходить із нього за той самий проміжок часу.

Картина електричного поля стаціонарно розподілених зарядів, які рухаються поза джерелом е.р.с., тотожна картині електричного поля аналогічна до розподілених нерухоливих зарядів (рис. Б1). Тому в області поза джерелами е.р.с. електричне поле стаціонарно розподілених зарядів, які рухаються, є потенційним і описується системою рівнянь (2.12) (див. розділ 2). При цьому в провідному середовищі можна провести ряд екіпотенціальних поверхонь і ряд силових ліній, які перетинають екіпотенціальні поверхні під прямим кутом. У кожній точці силової лінії вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  спрямований по дотичній до цієї лінії і для ізотропного середовища, збігається з вектором  $\vec{d} = g \vec{E}$ , який визначає силові лінії струму (див. рис. Б1).

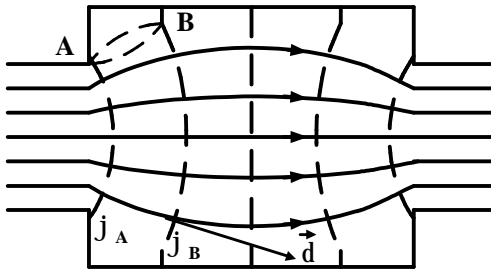


Рисунок Б1 – Картина електричного поля, стаціонарно розподілених зарядів, які рухаються поза джерелом е.р.с.

Отже, в ізотропному середовищі лінії струму перетинають поверхні рівного потенціалу під прямим кутом. Знаючи конфігурацію еквіпотенціальних поверхонь у провіднику, можна побудувати перпендикулярні лінії струму.

Простір, у якому існує постійний струм, можна розділити на трубки однакового струму, обмежені лініями струму. При цьому кількість усіх трубок буде пропорційна загальному струму. При побудові трубок рівного струму користуються графоаналітичним методом розрахунків [1, 50], ураховуючи те, що матеріал провідника однорідний та ізотропний.

### 1.2 Опис лабораторної установки і порядок виконання роботи

Для виконання роботи складається схема, яка наведена на рис. Б2.

Металевий аркуш спеціальної форми (рис. Б2) через міліамперметр і опір включається в ланцюг регульованого джерела постійного струму. Для зручності побудови еквіпотенціальних ліній на поверхні аркуша поміщена координатна сітка.

Експериментальне визначення еквіпотенціальних ліній здійснюється за допомогою металевого щупа  $K$ , з'єднаного гнучким ізольованим дротом з одним із затискачів гальванометра. Інший затискач гальванометра підключається до точки аркуша  $C'$ . При постійній товщині аркуша поле в ньому буде плоскопаралельним.

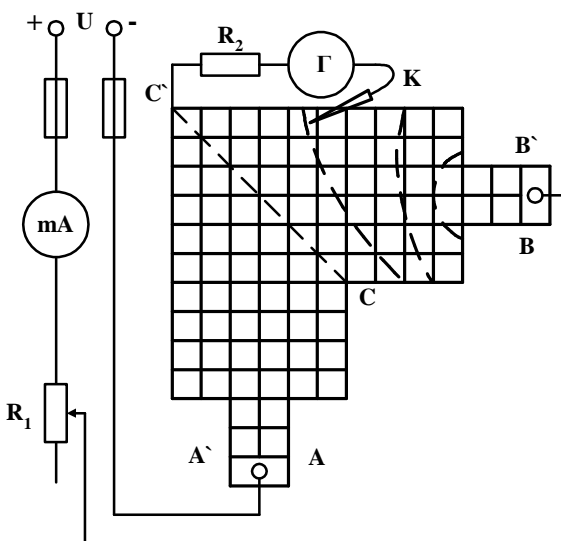


Рисунок Б2 – Електрична схема досліду

Якщо жало щупа вести по поверхні аркуша так, щоб відхилення покажчика гальванометра залишалося незмінним, то опишеться одна із еквіпотенціальних ліній. У міру переміщення щупа окремі точки кожної лінії рівного потенціалу переносяться на міліметровий папір або вводяться у комп'ютер, де заздалегідь повинен бути накреслений досліджуваний аркуш у масштабі 1:1.

1 *Зняття ліній рівного потенціалу.* Підтримуючи струм у ланцюзі незмінним, можна зняти лінії рівного по-



тенціалу. При цьому різниця потенціалів між двома сусідніми лініями повинна бути постійною, що відповідає постійному значенню спадання напруги, яка фіксується по відхиленню покажчика гальванометра. Побудову доцільно починати від середньої лінії  $CC'$  в напрямку до лінії  $AA'$  або  $BB'$  (див. рис. Б2). Кількість ліній рівного потенціалу вибирається довільно так, щоб вийшла досить густа сітка, утворена лініями рівного потенціалу і лініями струму. Рекомендується на ділянці аркуша від лінії  $CC'$  до лінії  $BB'$  взяти 10-12 ліній рівного потенціалу.

При виконанні досліду необхідно дотримуватися такого правила: щупом не можна торкатися точок аркуша, які виходять за межі координатної сітки, тобто далі від лінії  $AA'$  або  $BB'$ , оскільки у цьому випадку на затискачах гальванометра виявиться значна напруга і гальванометр може вийти з ладу.

2 *Побудова трубок рівного струму.* По експериментальних екіпотенціальних лініях, отриманих із досліду, на кресленні будується задана кількість трубок рівного струму. Для двох шарів, зазначених керівником, розраховуються границі трубок рівного струму. Усі розрахункові дані зводяться в таблицю. За даними таблиці для кожного шару будуються криві розподілу струму вздовж шару. На ділянці аркуша  $CC'$  -  $BB'$  одержуємо лінії, які утворюють групи трубок рівного струму.

3 За картиною поля визначають числові значення густини струму  $d$  і напруженості електричного поля  $E$  в областях двох довільних точок аркуша, зазначених викладачем.

### 1.3 *Зміст звіту*

Звіт повинен містити:

- 1) мету роботи;
- 2) електричну схему досліду;

- 3) картину електричного поля в аркуші, накреслену на міліметровому папері або на комп'ютері;
- 4) криві розподілу струму в аркуші;
- 5) розрахунки густини струму  $d$  і напруженості поля  $E$  в заданих точках.

1.4 *Запитання, які виносяться на захист лабораторної роботи:*

- 1 Яка мета виконання даної роботи?
- 2 У чому полягає відмінність потенційного і вихрового полів?
- 3 Який вигляд має система рівнянь електричного поля постійного струму в провідному середовищі за відсутності і наявності сторонніх е.р.с.?
- 4 Що називається потенціалом  $j$  електричного поля і різницею потенціалів?
- 5 Які граничні умови електричного поля постійного струму в провідному середовищі?
- 6 Яка методика побудови трубок рівного струму і силових ліній за результатами експерименту?
- 7 У чому полягає графоаналітичний метод розрахунків і побудови трубок рівного струму?

## ***Лабораторна робота 2 Моделювання електричного поля дводрової лінії***

*Мета роботи* – вивчити електричне поле дводрової лінії методом моделювання плоскопаралельних полів полем струму в провідному середовищі.

### *2.1 Пояснення до роботи*

Моделювання потенційних полів застосовується в тих випадках, коли аналітичні розрахунки провести складно, а безпосереднє експериментальне дослідження об'єкта неможливе. Використовуючи властивість аналогії, потенційні поля моделюють при напругах більш низьких, ніж напруга в об'єктах. Розміри моделі і об'єкта також можуть масштабно різнитися.

Можливість моделювання ґрунтується на аналогії поля в діелектрику і поля в провідному середовищі, якщо в розглянутій області в діелектрику відсутні вільні заряди ( $r=0$ ), а в провідному середовищі – сторонні е.р.с. Зіставлення рівнянь і параметрів матеріальних середовищ для електричного поля в діелектрику і у провідному середовищі для перелічених вище умов наводиться в табл. 2.1 (див. п. 2.12).

Із табл. 2.1 випливає, що обидва поля задовольняють рівняння Лапласа  $\nabla^2 j = 0$  і у них виконуються тотожні граничні умови для подібних величин. Тоді при однаковій формі граничних поверхонь на підставі теореми одиницості розв'язку (див. п. 1.16) сукупність силових і еквіпотенціальних ліній у цих двох полях буде однаковою.

В окремому випадку для дводрової лінії можна вважати, що її проводи мають нескінченно велику провідність і поміщені в необмежене за розмірами провідне середовище з кінцевою питомою провідністю  $g$ . Тоді спаданням напруги на електродах можна знехтувати і вважати їхні

поверхні екіпотенціальними, а картину поля струму в провідному середовищі – такою, що збігається з картиною електростатичного поля в діелектрику, який оточує два нескінченно довгі паралельні різнойменно заряджені циліндричні проводи. При цьому лініями струму в провідному середовищі є кола, які проходять через електричні осі електродів, а лініями рівного потенціалу – сімейство ексцентричних кіл із центрами на прямій, яка проходить через осі електродів.

Для дослідження такої системи досить із усього провідного середовища вирізати частину, обмежену з усіх боків лініями струму. Тому в даній роботі використовується круглий плоский металевий аркуш, плоскі поверхні якого відповідають двом площинам, перпендикулярним до нескінченно довгих електродів. Бічна циліндрична поверхня аркуша відповідає циліндричній поверхні, утвореній в електростатичному полі паралельних проводів силовими лініями того ж радіуса. Розрахунки поля дводротової лінії докладно викладені в прикладі 2.5 (див. п. 2.7).

## *2.2 Опис лабораторної установки і порядок виконання роботи [50]*

Схема установки наведена на рисунку Б3.

Установка складається із круглого плоского металевого аркуша з координатною сіткою, джерела живлення постійного струму, вимірювальних приладів і сполучних дротів. Струміввідні затискачі розміщені на пластині парами ( $N_1$  і  $N_1'$ ,  $N_2$  і  $N_2'$ ,  $N_3$  і  $N_3'$ ) симетрично стосовно середньої діаметральної лінії  $AP$ . До пари затискачів підходить постійна напруга  $U$  і через аркуш пропускається постійний струм. Під час проведення вимірів струм підтримується незмінним.

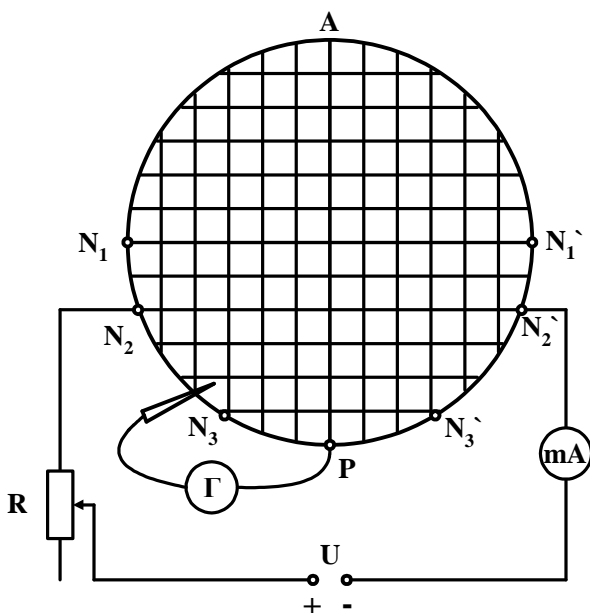


Рисунок Б3 – Електрична схема установки

1 *Зняття експериментальної картини еквіпотенціалей.* Експериментальна картина еквіпотенціалей знімається за допомогою металевого щупа, з'єднаного із гальванометром, за яким здійснюється контроль рівності потенціалів при переході від точки до точки. Точки рівного потенціалу переносяться на міліметровий папір або вводяться у комп'ютер, де заздалегідь накреслений досліджуваний аркуш у відповідному масштабі. Лінія  $AP$  вважається лінією нульового потенціалу. Наступною наноситься лінія, яка прилягає до струмопровідного електрода. Різниця потенціалів між середньою і крайньою лініями ділиться на  $n$  рівних частин і далі знімаються інші лінії рівного потенціалу, які лежать між ними так, щоб різниця потенціалів між сусідніми лініями була незмінною (рівні показання гальваноме-

тра). З'єднуючи еквіпотенціальні точки, одержують лінії рівного потенціалу (рис. Б4).

2 Побудова теоретичних еквіпотенціальних ліній і порівняння їх із експериментом. На експериментально отриману картину еквіпотенціальних ліній (рис. Б4) наносяться лінії теоретичних еквіпотенціалей, які являють собою сімейство кіл, радіуси і центри яких визначаються за методикою, викладеною в прикладі 2.5 (див. п. 2.7).

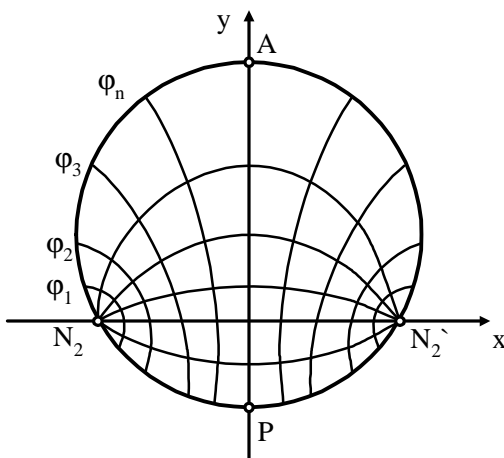


Рисунок Б4 – Картина плоскопаралельного поля дводрової лінії

За початок відліку вибирається середня лінія  $AP$ . Інші лінії рівного потенціалу  $j_n$  повинні проходити через точку перетинання еквіпотенціалей із прямою  $N_2N_2'$  (див. рис. Б4).

Шляхом порівняння теорії із експериментом визначають похибку моделювання.

3 *Розрахунки ємності дводрової лінії.* За формулою (2.33) (див. приклад 2.5) для заданих  $\epsilon_a$  розраховують досліджені і теоретичні значення ємностей системи.

### 2.3 *Зміст звіту*

Звіт повинен містити:

- 1) мету роботи;
- 2) електричну схему досліду;
- 3) картину електричного поля із зображенням експериментальних і розрахункових ліній рівного потенціалу, а також силових ліній;
- 4) розрахунки ємності  $C$  дводрової лінії за моделлю і теоретичною формулою;
- 5) порівняльний аналіз теоретичних розрахунків і розрахунків за отриманими даними.

2.4 *Запитання, які виносяться на захист лабораторної роботи:*

- 1 Яка мета виконання даної роботи?
- 2 У чому полягає аналогія електричних полів у діелектрику і провідному середовищі? Наведіть приклади систем рівнянь цих полів.
- 3 Що називається напруженістю електричного поля  $\vec{E}$ , потенціалом  $j$ , різницею потенціалів, ємністю  $C$ ?
- 4 Чому при дослідженні електричного поля дводрової лінії у роботі використаний плоский круглий аркуш?
- 5 Яка методика виведення формул для визначення ємності  $C$  і напруженості електричного поля  $E$  дводрової лінії?
- 6 Яким чином визначається ємність  $C$  системи через провідність  $G$ ?
- 7 У чому полягає методика аналізу потенційних полів за допомогою графічного методу?

### *Лабораторна робота 3 Визначення основних властивостей змінного електромагнітного поля*

*Мета роботи* – експериментальне дослідження основних характеристик плоскої електромагнітної хвилі і випромінюючих систем типу рупорної антени.

#### *3.1 Пояснення до роботи*

Основні властивості і характеристики електромагнітних хвиль на прикладі плоскої хвилі, наведені в п. 3.2.

Випромінювання і приймання електромагнітних хвиль можна забезпечити за допомогою спеціальних пристроїв, які називаються антенами (див. п. 4.6). У даній лабораторній роботі для вивчення і приймання електромагнітних хвиль використовуються рупорні антени, які описані в п. 4.6.2.

#### *3.2 Опис лабораторної установки і порядок виконання роботи [51]*

Лабораторна установка (рис. Б5) складається із генератора НВЧ 1, який через хвилевід збуджує пірамідальний рупор 2. Рупорна антена може обертатися навколо вертикальної і горизонтальної осі і фіксуватися під потрібним кутом. Приймач електромагнітних хвиль 3 складається із аналогічної рупорної антени, навантаженої на узгоджену детекторну головку 4 і під'єднану до індикатора 5.

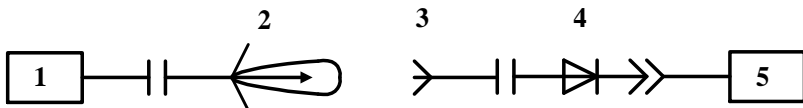


Рисунок Б5 – Схема лабораторної установки



Необхідне для роботи положення приймальної антени досягається так само, як і для передавальної. Передавальна і приймальна антени встановлені на спрямовуючих штангах, які забезпечують їх переміщення уздовж поздовжньої осі.

Передавач і приймач мають градусні шкали, за допомогою яких можна вимірювати кути повороту антени в горизонтальній і вертикальній площинах. Крім того, у комплект лабораторної установки входять приймач із дипольною антеною, металеві і діелектричні аркуші, поляризаційні решітки і лінза плосковипуклої форми.

1 *Визначення довжини хвилі випромінювання і коефіцієнта стоячої хвилі.* Довжина хвилі визначається виміром відстані між максимумами і мінімумами в системі стоячих або частково стоячих хвиль. Одержати стоячі хвилі можна, відбивши електромагнітну хвилю від металевої площини.

Тому для одержання стоячих хвиль у лабораторній роботі на шляху їх поширення ставиться гладка металева пластина. Пластина встановлюється нормально до осі випромінювача в його далекій зоні на відстані, обумовленій співвідношенням

$$z \geq \frac{a_m^2}{l}, \quad (\text{Б1})$$

де  $a_m$  – максимальний розмір випромінювача;

$l$  – довжина хвилі коливань.

Ступінь відбиття хвилі визначається коефіцієнтом стоячої хвилі (КСХ):

$$\text{КСХ} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}}, \quad (\text{Б2})$$

де  $E_{\max}$ ,  $E_{\min}$ ,  $P_{\max}$ ,  $P_{\min}$  – відповідно максимальні і мінімальні значення напруженості  $E$  або потужності  $P$  випромінювання (рис. Б6).

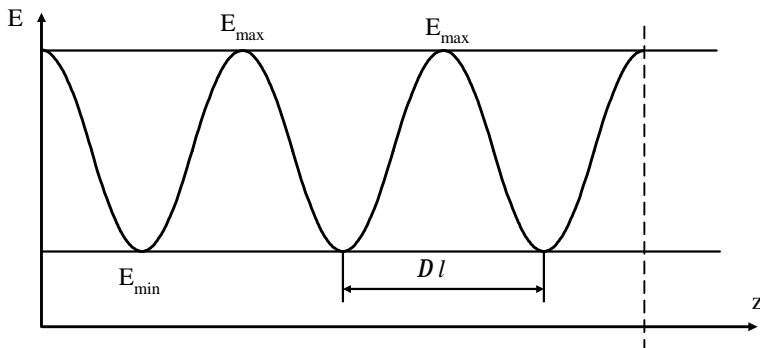


Рисунок Бб – Частково стояча хвиля

В області відкриття передавального рупора встановлюється плосковипукла лінза таким чином, щоб вона трансформувала сферичний фронт хвилі в плоский фронт, а в області пластини, яка відбиває хвилю, встановлюється диполь, який під'єднується до індикатора.

Шляхом обертання диполя навколо вертикальної осі необхідно настроїтися на максимальне показання індикатора і зафіксувати його положення. Переміщуючи диполь уздовж осі випромінювача від пластини до випромінювача, визначається розподіл потужності випромінювання  $P = f(z)$ . Координата  $z$  відлічується від початкового положення диполя. Переміщати диполь необхідно на відстань до  $10l$ . Близько до випромінювача проводити виміри не рекомендується.

На підставі експериментальних даних будується графік зміни потужності  $P = f(z)$ , якісна картина якого наведена на рис. Бб. Цей графік ілюструє інтерференцію двох хвиль – прямої і відбитої.

*Довжину хвилі* можна визначити зі співвідношення

$$l_0 = 2 \Delta l, \quad (\text{Б3})$$

де  $\Delta l$  – відстань між двома сусідніми максимумами або мінімумами сигналу детектора (див. рис. Б6).

За формулою (Б2) визначається коефіцієнт стоячої хвилі. Основні характеристики електромагнітного поля в повітрі (вакуумі) розраховуються за формулами п. 3.2 на підставі отриманих експериментальних даних.

*2 Вивчення властивостей електромагнітної хвилі при проходженні через діелектрик і метал.* Для цього в області рупора поміщають діелектричний аркуш (площина аркуша – нормальна осі рупор-диполь) і знімають кілька значень  $P_{\max}$  і  $P_{\min}$ . Ці значення наносять на графік  $P = f(z)$  і визначають фазове зміщення хвилі при проходженні її через діелектрик. Для раніше отриманого значення  $I_0$  (Б3) за формулами п.3.2 розраховують основні характеристики електромагнітної хвилі при проходженні через даний діелектрик.

Помістивши між рупором і диполем екран, який відбиває хвилі, легко переконатися у тому, що амплітуда прийнятого сигналу різко зменшується. За формулами п. 3.2 для отриманого значення  $I_0$  розраховують основні характеристики електромагнітного поля в металі екрана.

Значення  $tg d$ ,  $e$  і  $m$  для використаних у роботі діелектриків і металів визначають за довідником [12].

Отримані результати розрахунків зводять у таблицю і роблять висновки щодо основних властивостей електромагнітного поля в повітрі (вакуумі), діелектрику і металі.

*3 Вимірювання діаграм спрямованості і поляризації поля рупорної антени.* Для одержання діаграм спрямованості антени по кутах  $j$  і  $q$  (див. рис. 4.25) необхідно встановити замість диполя приймальну рупорну антену і під'єднати її до індикатора. Площину відкривання приймальної антени орієнтують нормально до напрямку випромінювання і встановлюють на відстані, обумовленій спів-

відношенням (Б1). Повертаючи передавальну антену в горизонтальній площині, виміряється потужність прийнятого сигналу через кожні  $3^\circ$  до одержання нульових значень. Аналогічні виміри виконуються і для вертикальної площини.

Прибравши із площини розкривання передавальної антени лінзу, виміри повторюють. Результати вимірювань слід подати у вигляді графіків, показаних на рис. 4.25.

За формулами п. 4.6 можна оцінити КСД та ширину діаграм спрямованості досліджуваної антени. Необхідно зробити висновок щодо впливу плосковипуклої лінзи на ширину діаграм спрямованості і порівняти розрахункові значення із експериментальними даними.

Для вимірювання поляризації поля застосовується або допоміжна антена із лінійною поляризацією, або поляризаційні решітки. Виміри зводяться до знімання показань індикатора від кута повороту випробуваної антени або решітки. Якщо обмірювана крива має два симетрично розміщені нулі, то поле лінійно поляризоване; за наявності точок мінімуму буде еліптична поляризація; якщо показання індикатора не залежать від кута повороту, то поляризація колова.

У нашому випадку необхідно встановити між антенами поляризаційну решітку так, щоб її площина була орієнтована перпендикулярно до осі передавальної і приймальної антен. Потім визначається вид поляризації спостережуваного поля шляхом зміни орієнтації стрижнів решітки.

### 3.3 Зміст звіту

Звіт повинен містити:

- 1) мету роботи;
- 2) схему лабораторної установки і перелік додаткових пристроїв, які входять до установки;

3) графіки зміни потужності  $P = f(z)$  для повітря і при проходженні хвилі через діелектрики;

4) результати розрахунків основних характеристик поля в повітрі, діелектрику і металі; висновки щодо основних властивостей поля в цих середовищах;

5) діаграми випромінювання рупорної антени без лінзи і з лінзою, розрахунки ширини діаграм спрямованості та  $КНД$ , висновки щодо виду поляризації спостережуваних полів і впливу плосковипуклої лінзи на ширину діаграм спрямованості.

*3.4 Запитання, які виносяться на захист лабораторної роботи:*

1 Яка мета виконання даної роботи?

2 Запишіть рівняння Максвелла в інтегральній і диференціальній формах запису і поясніть їх фізичний зміст.

3 Дайте визначення плоскої хвилі та запишіть для неї хвильове рівняння.

4 Дайте визначення основних характеристик електромагнітного поля.

5 Поясніть загальні принципи роботи антен і опишіть конструкції рупорних антен.

6 Дайте визначення основних характеристик антен і видів поляризації випромінювання.

7 У чому полягає методика одержання діаграм спрямованості антен і визначення видів поляризації випромінювання?

#### *Лабораторна робота 4 Дослідження просторових хвиль електромагнітного випромінювання у системі «періодична структура-діелектричний хвилевод»*

*Мета роботи* – експериментальне дослідження діаграм спрямованості випромінювання просторових хвиль періодичної структури типу «гребінка» при збудженні її поверхневою хвилею діелектричного хвилеводу.

##### *4.1 Пояснення до роботи*

У міліметровій і субміліметровій техніці важливе місце займають ефекти, пов'язані із перетворенням періодичними структурами (дифракційними решітками) поверхневих хвиль діелектричних хвилеводів (ДХ) [31]. У цьому випадку поверхневі хвилі ДХ трансформуються за допомогою дифракційних решіток (ДР) або в поверхневі хвилі ДХ, або в об'ємні хвилі, які відриваються від них. Дане фізичне явище широко застосовується при розробленні антен, каналізуючих пристроїв, при створенні логічних елементів для обчислювальних машин нових поколінь, у голографії та ін.

Умови випромінювання об'ємних хвиль на відбивних металевих ДР прямокутного перерізу визначаються таким співвідношенням [31]:

$$|\cos g_n| = \frac{1}{k} \left( a - \frac{2pn}{L_n} \right) \leq 1, \quad (Б4)$$

де  $g_n$  – кут випромінювання гармоніки з індексом  $n = -1, -2, -3, \dots$ ;  $a$  – стала поширення;

$L_n$  – просторовий період системи;

$k = L_n / \lambda$ ;  $\lambda$  – довжина хвилі випромінювання.

Зі співвідношення (Б4) випливає, що хвиля з  $n \geq 0$ ,  $|\cos g_n| > 1$  являє собою спектр неоднорідних плоских

хвиль, які існують поблизу решітки і поширюються вздовж осі  $y$  із фазовими швидкостями  $v_\phi < c$ .

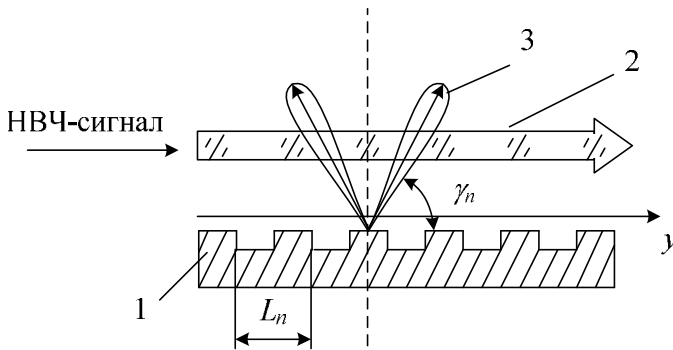


Рисунок Б7 – Схема збудження об'ємних хвиль відбивної ДР:

1 – дифракційна решітка; 2 – діелектричний хвилевід;  
3 – діаграми спрямованості випромінювання

Для значень  $n < 0$  при розсіюванні неоднорідної хвилі ДХ на періодичному випромінювачі у вигляді відбивної решітки поле являє собою суперпозицію плоских хвиль, частина із яких іде у вільний простір під кутом (Б4) у вигляді спектра об'ємних хвиль, а частина – локалізована поблизу розсіювача у вигляді спектра повільних гармонік. Вибравши відповідним чином параметри електродинамічної структури і поверхневої хвилі, яка поширюється вздовж ДХ, можна добитися переваги того або іншого типу хвиль. При цьому спектр кутів поширення об'ємних плоских хвиль становить  $0^\circ \leq g_n \leq 180^\circ$  і визначається співвідношенням

$$g_n = \arccos(1/b_x + n/k), \quad (\text{Б5})$$

де  $b_x = v_x/c$  – відносна швидкість хвилі у діелектричному хвилеводі;

$v_x$  – фазова швидкість хвилі у хвилеводі.

Задаючи значення  $b_x$ ,  $n$  і  $k$ , можна реалізувати у системі «дифракційна решітка-діелектричний хвилевід» різні режими трансформації поверхневих хвиль ДХ в об'ємні.

#### 4.2 Опис лабораторної установки і порядок виконання роботи

Для виконання лабораторної роботи використовується установка, наведена на рис. Б8.

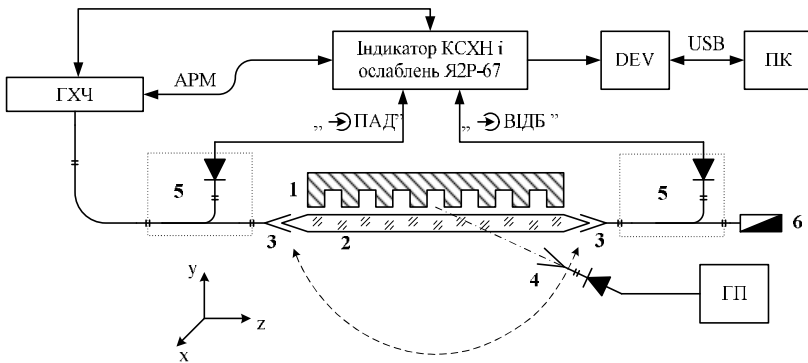


Рисунок Б8 – Схема експериментальної установки для вимірювання просторових характеристик випромінювальної системи «дифракційна решітка - діелектричний хвилевід»

Основним елементом установки є випромінювальна система, утворена відбивною дифракційною решіткою 1 і діелектричним хвилеводом 2, підключеними до вимірювального тракту через переходи 3.

Просторові характеристики (діаграми спрямованості випромінювань і їх інтенсивності) вимірюють за допомогою рухливої антени 4. При цьому вісь обертання прий-



мального рупора 4 в  $E$ -площині проходить через випромінювальну апертуру і сполучається із вертикальною віссю решітки 1, а вісь обертання в  $H$ -площині збігається із поздовжньою віссю ДХ 2, це забезпечує реєстрацію кутів випромінювання в інтервалі  $j = 10^\circ - 170^\circ$  з точністю  $\Delta j = \pm 0,25^\circ$ . У ході вимірювання діаграм спрямованості сигнал, прийнятий рупором 4, надходить на вхід «Y» двокоординатного графопобудовника (ГП), вхід «X» якого підключений до датчика кута повороту прийомного рупора. Таким чином, при переміщенні рухливої антени на графопобудовнику фіксуються діаграми випромінювання, які після оцифрування використовують для комп'ютерної обробки отриманих даних.

Для визначення частотних характеристик, коефіцієнта стоячої хвилі (КСХ) і коефіцієнта передачі досліджуваної системи використовується панорамний вимірник КСХН і ослаблень, який складається із блока генератора хитної частоти (ГХЧ), індикатора КСХН і ослаблень (Я2Р-67), спрямованих відгалужувачів 5 з детекторними секціями, підключеними до відповідних з'єднувачів блока Я2Р-67. Залежно від способу підключення відгалужувачів до вимірювальної лінії, визначають залежності або коефіцієнта передачі, або КСХ у заданому діапазоні частот. Отримані результати обробляються за допомогою блока DEV, який являє собою аналого-цифровий перетворювач, і надходять через шину USB у персональний комп'ютер (ПК) для подальшої обробки результатів вимірювань.

При проведенні вимірювань на вході в досліджуваний об'єкт забезпечується постійний рівень потужності за допомогою автоматичного регулятора потужності (АРП), який входить у панорамний вимірник, а мінімальні відбиття на виході ДХ забезпечуються за рахунок підключення до вимірювального тракту погодженого навантаження б.

Перед початком виконання роботи студенти вивчають інструкцію з експлуатації використаного в роботі панорамного вимірника КСХН і ослаблень.

1 *Розрахунки кутів випромінювання.* Для заданих викладачем параметрів  $b_x$ ,  $L_n$ ,  $n$  і трьох значень  $I$  (частоти) за формулою (Б5) розраховуються кути випромінювання  $g_n$ .

2 *Вимірювання діаграм спрямованості випромінювання.* Для заданих значень  $I$  шляхом установаження їх на панорамному вимірнику КСХН проводиться серія вимірювань інтенсивності та кутів діаграм спрямованості випромінювань із паралельною фіксацією коефіцієнтів проходження або КСХН на панорамному вимірнику.

3 *Побудова діаграм спрямованості випромінювань.* Для трьох фіксованих значень  $I$  (частоти) будуються діаграми спрямованості випромінювань у координатних осях  $P/P_{\max}$  ( $P$  – потужність випромінювання,  $P_{\max}$  – максимальне значення потужності) від  $g$  (кут випромінювання).

4 *Порівняння експериментальних значень і кутів випромінювання із теоретичними оцінками.* Порівнюються отримані кути випромінювання в експерименті із розрахунковими і аналізуються обмірювані КСХН у заданому діапазоні довжин хвиль для різних значень кутів випромінювань.

#### 4.3 Зміст звіту

Звіт повинен містити:

- 1) мету роботи;
- 2) схему експериментальної установки і її опис;
- 3) розрахункові значення кутів діаграм спрямованості випромінювання;
- 4) експериментально отримані діаграми спрямованості випромінювання;

5) висновки щодо порівняння експериментальних результатів із розрахунковими.

4.4 *Запитання, які виносяться на захист лабораторної роботи:*

1 Яка мета виконання даної роботи і принципи її побудови?

2 Чим відрізняються періодичні сповільнювальні системи від гладких хвилеводів сповільнювальних систем (діелектричних хвилеводів)?

3 У чому полягає принцип перетворення поверхневих хвиль діелектричного хвилеводу в об'ємні хвилі на періодичних структурах?

4 Який принцип роботи панорамного випромінювача КСХН і ослаблень? Поясніть призначення його основних елементів.

5 У чому полягає метод рухливої антени при вимірюванні діаграм спрямованості випромінювань?

6 У яких приладах міліметрового діапазону хвиль може бути використаний принцип перетворення поверхневих хвиль діелектричних хвилеводів в об'ємні на дифракційних решітках?

**ДОДАТОК В**  
(обов'язковий)  
**В1. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ**  
**за розділом 1**

**«Основні рівняння і закони електромагнітного поля»**

1 Який учений-фізик сформулював спільну систему рівнянь електромагнітного поля:

- а) Кулон;
- б) Ампер;
- в) Фарадей;
- г) інша відповідь?

2 Які довжини хвиль належать до НВЧ-діапазону:

- а)  $l = 1-0,1$  мм;
- б)  $l = 10-1$  см;
- в)  $l = 10-1$  м;
- г) інша відповідь?

3 Які вектори характеризують електричну складову поля:

- а)  $\vec{E}$  - напруженість;
- б)  $\vec{B}$  - індукція;
- в)  $\vec{d}$  - вектор густини струму;
- г) інша відповідь?

4. Які основні параметри характеризують діелектричне середовище:

- а) провідність  $g$  ;
- б) проникність  $\epsilon$  ;
- в) проникність  $m$  ;
- г) інша відповідь?

5 Який із зв'язків електричних компонентів поля записаний вірно:

а)  $\vec{D} = g \vec{E}$  ;

б)  $\vec{E} = m_a \vec{D}$  ;

в)  $\vec{E} = g \vec{D}$  ;

г) інша відповідь?

6 Яке співвідношення відповідає закону Ома в диференційній формі:

а)  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  ;

б)  $\vec{d} = g \vec{E}$  ;

в)  $\vec{E} = -\text{grad } j$  ;

г) інша відповідь?

7 Середовище називається однорідним, якщо  $e_a$ ,  $m_a$  і  $g$  :

а) не залежать від  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  ;

б) змінюються від точки до точки;

в) є тензорами;

г) інша відповідь.

8 Яке рівняння Максвелла в диференційній формі записує закон повного струму:

а)  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ;

б)  $\text{rot } \vec{H} = \vec{d} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  ;

в)  $\vec{d} = g \vec{E}$ ;

г) інша відповідь?

9 В якій формі запису рівняння Максвелла описують гармонійні коливання:

а) диференційній;

б) комплексній;

в) інтегральній;

г) інша відповідь?

10 Диференційна форма запису встановлює зв'язок між величинами поля:

а) у різних точках;

б) на різних відрізках і поверхнях;

в) поблизу точки в заданий момент часу;

г) інша відповідь.

11 Вихрове магнітне поле створюється:

а) змінним магнітним полем;

б) нерухомими зарядами;

в) струмом зміщення;

г) інша відповідь.

12 Яке рівняння Максвелла в диференційній формі запису є неповним:

а)  $\text{rot } \vec{H} = \vec{d}$ ;

б)  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ;

в)  $\text{div } \vec{D} = \vec{r}$ ;

г) інша відповідь?

13 Вихрове електричне поле створюється:

- а) змінним магнітним полем;
- б) струмом провідності;
- в) струмом зміщення;
- г) інша відповідь.

14 Скалярний потенціал електричного поля  $\epsilon$ :

- а) частотною характеристикою;
- б) енергетичною характеристикою;
- в) часовою характеристикою;
- г) інша відповідь.

15 Яке рівняння Максвелла є законом електромагнітної індукції:

- а)  $\operatorname{div} \vec{D} = r$ ;
- б)  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{d} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ;
- в)  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ;
- г) інша відповідь?

16 Яке рівняння Максвелла відображає принцип безперервності магнітних силових ліній:

- а)  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ;
- б)  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ;
- в)  $\operatorname{div} \vec{D} = r$ ;
- г) інша відповідь?

17. Яке із рівняння Максвелла є математичним формулюванням теореми Гауса:

а)  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ;

б)  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{d} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ;

в)  $\operatorname{div} \vec{D} = r$ ;

г) інша відповідь?

18 Силкові лінії електростатичного поля  $\vec{E}$ :

а) починаються і закінчуються на провідниках зі струмом;

б) замкнені;

в) нескінченні;

г) інша відповідь.

19 Силкові лінії магнітного поля  $\vec{B}$ :

а) починаються і закінчуються на вільних зарядах;

б) замкнені;

в) нескінченні;

г) інша відповідь.

20 Для яких середовищ вводиться поняття тангенса кута втрат  $\operatorname{tg} d$ :

а) вакуум;

б) провідник;

в) ідеальний діелектрик;

г) інша відповідь?

21 Якщо тангенс кута втрат  $\operatorname{tg} d \gg 1$ , то речовина:

а) провідник;

б) напівпровідник;

в) діелектрик;

г) інша відповідь.



22 Якщо тангенс кута втрат  $tg d \ll 1$ , то речовина:

- а) напівпровідник;
- б) ідеальний діелектрик;
- в) провідне середовище;
- г) інша відповідь.

23 Яке рівняння відповідає рівнянню Лапласа:

- а)  $\Delta j = -\frac{r}{e_a}$ ;
- б)  $\Delta j = 0$ ;
- в)  $\Delta \vec{A} = -m_a \vec{d}$ ;
- г) інша відповідь?

24 Яке рівняння відповідає рівнянню Пуассона:

- а)  $\Delta j = 0$ ;
- б)  $\Delta \vec{A} = 0$ ;
- в)  $\Delta \vec{A} = -m_a \vec{d}$ ;
- г) інша відповідь?

25 Яке рівняння описує закон збереження заряду:

- а)  $\Delta j = -\frac{r}{e_a}$ ;
- б)  $\Delta j = 0$ ;
- в)  $\frac{\partial r}{\partial t} = -div \vec{d}$ ;
- г) інша відповідь?

26 Теорема Умова-Пойнтінга описує:

- а) часові співвідношення полів;
- б) енергетичні співвідношення полів;

- в) частотні залежності полів;  
г) інша відповідь.

27 Який доданок характеризує теплові втрати в рівнянні енергетичного балансу:

а)  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_a H^2}{2} \right);$

б)  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_a E^2}{2} \right);$

в)  $d E;$

- г) інша відповідь?

28 Яка гранична умова використовується при знаходженні електричних компонентів поля:

а)  $d_{1n} = d_{2n};$

б)  $H_{1t} - H_{2t} = i_{нов};$

в)  $A_{1t} = A_{2t};$

- г) інша відповідь?

29 Яка гранична умова використовується при знаходженні магнітних компонентів поля:

а)  $H_{1t} - H_{2t} = i_{нов};$

б)  $E_{1t} = E_{2t};$

в)  $d_{1n} = d_{2n};$

- г) інша відповідь?

30 Яке співвідношення описує електростатичне поле точкового заряду:

а)  $H = \frac{I}{2p r};$

$$\text{б) } E = \frac{t}{2pe_a r};$$

$$\text{в) } E = \frac{I}{pg r^2};$$

г) інша відповідь?

**Еталони відповідей на тест В1: 1г; 2б; 3а; 4б; 5г; 6б; 7г; 8б; 9б; 10в; 11в; 12а; 13а; 14б; 15г; 16б; 17в; 18г; 19б; 20б; 21а; 22г; 23б; 24в; 25в; 26б; 27в; 28а; 29а; 30г.**

В2. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ  
за розділом 2  
«Часткові види електромагнітного поля»

1 Яка умова задовольняє існування квазістатичного поля:

а)  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0;$

б)  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0;$

в)  $\text{rot } \vec{E} = 0;$

г) інша відповідь?

2 Яка умова задовольняє існування квазістаціонарного поля:

а)  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0;$

б)  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0;$

в)  $\frac{we_a}{g} \ll 1;$

г) інша відповідь?

3 Яка умова задовольняє існування стаціонарних полів:

а)  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0;$

б)  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0;$

$$\text{в) } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0;$$

г) інша відповідь?

4 Яке рівняння описує стаціонарні поля:

$$\text{а) } \text{rot } \vec{H} = \vec{d};$$

$$\text{б) } \text{rot } \vec{H} = \vec{d} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$\text{в) } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

г) інша відповідь?

5 Потенціал  $j$  (різниця потенціалів) характеризує:

а) швидкість переміщення зарядів;

б) роботу з переміщення зарядів;

в) імпульс руху зарядів;

г) інша відповідь.

6 Які умови існування електростатичного поля:

а) швидкість руху заряду  $v_q < c$ ;

б) швидкість руху заряду  $v_q > c$ ;

в) струм  $I \neq 0$ ;

г) інша відповідь?

7 Які рівняння справедливі при описанні електростатичного поля:

$$\text{а) } \text{rot } \vec{E} = 0;$$

$$\text{б) } \text{div } \vec{B} = 0;$$

в)  $\operatorname{div} \vec{d} = 0$ ;

г) інша відповідь?

8 Які рівняння Лапласа і Пуассона справедливі при описанні електростатичних полів:

а)  $\Delta j = -\frac{r}{e_a}$ ;

б)  $\Delta \vec{A} = -m_a \vec{d}$ ;

в)  $\Delta \vec{A} = 0$ ;

г) інша відповідь?

9 Яка гранична умова може бути використана при розв'язанні задач електростатики:

а)  $A_{1n} = A_{2n}$ ;

б)  $B_{1n} = B_{2n}$ ;

в)  $d_{1n} = d_{2n}$ ;

г) інша відповідь?

10 Який із перелічених законів справедливий для електростатичного поля:

а) закон Фарадея;

б) закон Кулона;

в) закон Ампера;

г) інша відповідь?

11 Яка умова задовольняє існування електричного поля постійного струму:

а)  $r = 0$ ;

б)  $\vec{d} = 0$ ;

в)  $g \ll e_a$ ;

г) інша відповідь?

12 Електричне поле постійного струму є:

- а) імпульсним;
- б) потенціальним;
- в) вихровим;
- г) інша відповідь.

13 Яке рівняння описує електричне поле постійного струму:

- а)  $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ ;
- б)  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ;
- в)  $\operatorname{div} \vec{d} = 0$ ;
- г) інша відповідь?

14 Яка гранична умова використовується при розв'язанні задач електричного поля постійного струму:

- а)  $d_{1n} = d_{2n}$ ;
- б)  $B_{1n} = B_{2n}$ ;
- в)  $D_{1n} = D_{2n}$ ;
- г) інша відповідь?

15 Яке співвідношення описує закон Джоуля-Ленца в диференційній формі:

- а)  $\operatorname{div} \vec{d} = 0$ ;
- б)  $\vec{d} = g \vec{E}$ ;
- в)  $p = g E^2$ ;
- г) інша відповідь?

16 Яке із записаних рівнянь є законом повного струму:

- а)  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  ;  
 б)  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{d}$  ;  
 в)  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  ;  
 г) інша відповідь?

17 Які гранична умова використовується при розв'язанні задач магнітного поля постійного струму:

- а)  $E_{1t} = E_{2t}$  ;  
 б)  $A_{1n} = A_{2n}$  ;  
 в)  $D_{1n} = D_{2n}$  ;  
 г) інша відповідь?

18 Які рівняння мають однакову форму запису при описанні аналогії стаціонарних електричних полів:

- а)  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  ;  
 б)  $\operatorname{div} \vec{D} = 0$  ;  
 в)  $\operatorname{div} \vec{d} = 0$  ;  
 г) інша відповідь?

19 Які рівняння ідентичні за своїми властивостями при описанні аналогії електричних і магнітних стаціонарних полів:

- а)  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \rightarrow \operatorname{rot} \vec{A} = 0$  ;  
 б)  $\operatorname{div} \vec{D} = 0$  ( $r = 0$ )  $\rightarrow \operatorname{div} \vec{d} = 0$  ;  
 в)  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E} \rightarrow \vec{B} = \mu_a \vec{H}$  ;  
 г) інша відповідь?



20 Який закон використовують при описанні електричного поля постійного струму:

- а) закон Кулона;
- б) закон повного струму;
- в) закон Біо-Савара-Лапласа;
- г) інша відповідь?

21 Які із перелічених нижче законів використовують при описанні магнітного поля постійного струму:

- а) другий закон Кірхгофа;
- б) закон Ома;
- в) закон повного струму;
- г) інша відповідь?

22 Ємність  $C$  – це коефіцієнт пропорційності у відношенні:

- а) заряду до потенціалу;
- б) власного магнітного потоку до струму;
- в) струму до напруги;
- г) інша відповідь.

23 Індуктивність  $L$  – це коефіцієнт пропорційності у відношенні:

- а) заряду до потенціалу;
- б) струму до напруги;
- в) власного магнітного потоку до струму;
- г) інша відповідь.

24 Взаємна індуктивність  $M$  – це коефіцієнт пропорційності у відношенні:

- а) заряду до потенціалу;
- б) струму до напруги;
- в) власного магнітного потоку до струму;
- г) інша відповідь.

25 Яке співвідношення справедливе для енергії електричного поля:

а)  $W = \frac{1}{2} \int_V rj \, dV$  ;

б)  $W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{d} \, dV$  ;

в)  $W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} \, dV$  ;

г) інша відповідь?

26 Яке співвідношення справедливе для енергії магнітного поля:

а)  $W = \frac{1}{2} \int_V rj \, dV$  ;

б)  $W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{d} \, dV$  ;

в)  $W = \frac{CU^2}{2}$  ;

г) інша відповідь?

27 Котушка індуктивності складається:

а) з одного відрізка провідника;

б) з двох металевих ізольованих пластин;

в) з декількох витків дроту;

г) інша відповідь.

28 Яке співвідношення правильно відображає відношення ємності до провідності:

а)  $\frac{C}{G} = \frac{m_a}{e_a}$  ;

$$\text{б) } \frac{C}{G} = \frac{e_a}{g};$$

$$\text{в) } \frac{C}{G} = \frac{g}{e_a};$$

г) інша відповідь?

29 Електростатичний екран може бути виготовлений з:

а) фторопласту;

б) скла;

в) пермалою;

г) інша відповідь.

30 Магнітний екран може бути виготовлений з:

а) міді;

б) тефлону;

в) магнітом'якої сталі;

г) інша відповідь.

**Еталони відповідей на тест В2: 1в; 2б; 3а; 4а; 5б; 6г; 7а; 8а; 9г; 10б; 11г; 12б; 13в; 14а; 15в; 16б; 17б; 18а; 19а,в; 20г; 21в; 22а; 23в; 24г; 25а; 26б; 27в; 28б; 29г; 30в.**

ВЗ. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ  
за розділом 3  
«Електромагнітні хвильові процеси»

1 Які види електромагнітних полів характеризують виникнення хвильових процесів:

- а) електростатичне поле;
- б) вихрове електричне поле;
- в) вихрове магнітне поле;
- г) інша відповідь?

2 Яка із наведених функцій описує хвильові процеси:

- а)  $u = f(x, z)$ ;
- б)  $u = f(z - a)$ ;
- в)  $u = f(z \pm vt)$ ;
- г) інша відповідь?

3 Яке рівняння є однорідним рівнянням Гельмгольца:

- а)  $\square^2 \mathbf{j} = 0$  ;
- б)  $\square^2 \vec{H} = 0$  ;
- в)  $\square^2 \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{r}}{e_a}$  ;
- г) інша відповідь?

4 Яке із записаних рівнянь дозволяє проаналізувати процеси випромінювання електромагнітних хвиль:

- а)  $\nabla^2 \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{r}}{e_a}$  ;
- б)  $\nabla^2 \vec{A} = -m_a \vec{d}$  ;
- в)  $\nabla^2 \mathbf{j} = 0$  ;

г) інша відповідь?

5 Однорідною називається хвиля, яка має постійну амплітуду:

- а) у часі;
- б) у просторі;
- в) у всіх точках фазового фронту;
- г) інша відповідь.

6 Хвиля називається плоскою, якщо її фазовий фронт являє собою:

- а) циліндричну поверхню;
- б) сферичну поверхню;
- в) плоску поверхню;
- г) інша відповідь.

7 Коефіцієнт поширення хвилі  $p$  характеризує:

- а) швидкість поширення площини рівних фаз;
- б) відстань, пройдену хвилею за період коливання;
- в) зміну амплітуди і фази хвилі при проходженні хвилею відстані 1 м;
- г) інша відповідь.

8 Коефіцієнт загасання  $a$  характеризує:

- а) швидкість поширення площини рівних фаз;
- б) відстань, пройдену хвилею за період коливання;
- в) зміну фази хвилі при проходженні хвилею відстані 1 м;
- г) інша відповідь.

9 Коефіцієнт фази  $b$  характеризує:

- а) зміну фази хвилі при проходженні хвилею відстані 1 м;

б) зміну амплітуди і фази хвилі при проходженні хвилею відстані 1 м;

в) зменшення амплітуди хвилі при проходженні хвилею відстані 1 м;

г) інша відповідь.

10 Фазова швидкість  $v_\phi$  – це:

а) швидкість руху заряджених часток;

б) швидкість поширення площини рівних фаз;

в) швидкість поширення сигналу уздовж осі хвилеводу;

г) інша відповідь.

11 Групова швидкість  $v_{gp}$  – це:

а) швидкість поширення площини рівних фаз;

б) швидкість руху заряджених часток;

в) швидкість поширення сигналу уздовж осі хвилеводу;

г) інша відповідь.

12 Довжина хвилі  $\lambda$  характеризує:

а) відстань між двома найближчими точками, у яких амплітуда хвилі дорівнює нулю;

б) відстань, пройдену хвилею за період коливання;

в) відстань, яку проходить хвиля за 1 секунду;

г) інша відповідь.

13 Хвильовий опір  $Z_{xв}$  – це відношення комплексних амплітуд:

а) напруги до струму;

б) електричного поля до струму;

в) напруженості електричного поля до магнітного;

г) інша відповідь.

- 14 Глибина  $\Delta$  проникнення хвилі в середовище – це:
- а) відстань, пройдена хвилею за період коливання;
  - б) відстань, при якій амплітуда хвилі зменшується в  $e$  разів;
  - в) відстань, яку проходить хвиля за 1 секунду;
  - г) інша відповідь.

15 Основні параметри вакуумного середовища:

- а)  $\epsilon = 1$ ;
- б)  $m > 1$ ;
- в)  $tg d \ll 1$ ;
- г) інша відповідь.

16 Основні параметри ідеального діелектрика:

- а)  $\epsilon = 1$ ;
- б)  $m < 1$ ;
- в)  $tg d = 1$ ;
- г) інша відповідь.

17 Основні параметри провідного середовища:

- а)  $tg d \gg 1$ ;
- б)  $\epsilon_a \gg g$ ;
- в)  $m = 0$ ;
- г) інша відповідь.

18 Основні види поляризації хвиль:

- а) лінійна;
- б) гвинтова;
- в) еліптична;
- г) інша відповідь.

19 На границі поділу двох середовищ падаюча електромагнітна хвиля:

- а) не змінює свого напрямку;
- б) переломлюється без відбиття;
- в) переломлюється і частково відбивається;
- г) інша відповідь.

20 Яке зі співвідношень може задовольняти фазова швидкість  $v_\phi$  хвилі, яка поширюється у спрямовувальній системі:

- а)  $v_\phi > c$ ;
- б)  $v_\phi < c$ ;
- в)  $v_\phi = 0$ ;
- г) інша відповідь?

21 Яка нерівність справедлива для довжини хвилі у хвилеводі  $\Lambda$  відносно довжини хвилі в необмеженому просторі  $l$  :

- а)  $\Lambda = l$  ;
- б)  $\Lambda > l$  ;
- в)  $\Lambda < l$  ;
- г) інша відповідь?

22 Групова швидкість хвилі у хвилеводі  $v_{gp}$  характеризує:

- а) швидкість поширення сигналу;
- б) швидкість поширення фронту хвилі;
- в) швидкість зміни амплітуди хвилі;
- г) інша відповідь.

23 Значення критичної довжини хвилі  $l_{кр}$  у спрямовувальних системах визначає:

- а) граничне значення довжини хвилі;
- б) оптимальне значення довжини хвилі;



- в) не впливає на поширення хвилі;
- г) інша відповідь.

24 Електромагнітна хвиля може поширюватись, якщо виконується одне зі співвідношень для критичної довжини хвилі  $I_{кр}$ :

- а)  $I = I_{кр}$ ;
- б)  $I > I_{кр}$ ;
- в)  $I < I_{кр}$ ;
- г) інша відповідь.

25 Критична частота  $f_{кр}$  хвилі у хвилеводі – це:

- а) проміжна частота;
- б) оптимальна частота;
- в) резонансна частота;
- г) інша відповідь.

26  $H$ -хвилі характеризуються відсутністю компонентів:

- а)  $E_y = 0$ ;
- б)  $H_x = 0$ ;
- в)  $H_z = 0$ ;
- г) інша відповідь.

27  $E$ -хвилі характеризуються відсутністю компонентів:

- а)  $E_y = 0$ ;
- б)  $H_z = 0$ ;
- в)  $H_x = 0$ ;
- г) інша відповідь.

28  $T$ -хвилі характеризуються відсутністю компонентів:

- а)  $E_z=0$ ;
- б)  $H_x=0$ ;
- в)  $H_z=0$ ;
- г) інша відповідь.

29 Елементарний електричний випромінювач – це відрізок провідника зі струмом довжиною  $l$ :

- а)  $l=I$  ;
- б)  $l \gg I$  ;
- в)  $l > I$  ;
- г) інша відповідь.

30 Елементарний магнітний вібратор – це стрижень із:

- а) фторопласту;
- б) фериту;
- в) міді;
- г) інша відповідь.

**Еталони відповідей на тест В3: 1б,в; 2в; 3б; 4г; 5в; 6в; 7в; 8г; 9а; 10б; 11в; 12б; 13в; 14б; 15а; 16г; 17а; 18а,в; 19в; 20а; 21б; 22а; 23а; 24в; 25г; 26г; 27б; 28а,в; 29г; 30б.**

В4. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ  
за розділом 4  
«Основи техніки НВЧ та її застосування»

1 Лінії передачі поділяються на такі класи:

- а) закритого типу;
- б) відкритого типу;
- в) комбінованого типу;
- г) інша відповідь.

2 Лінії передачі бувають:

- а) дротові;
- б) хвилевідні;
- в) комбіновані;
- г) інша відповідь.

3 Хвилеводні лінії передачі можуть бути:

- а) дводротові;
- б) прямокутного перерізу;
- в) смугові;
- г) інша відповідь.

4 Для багатозв'язної лінії передачі характерними є такі типи хвиль:

- а)  $H$  -хвилі;
- б)  $HE$  -хвилі;
- в)  $E$  - хвилі;
- г) інша відповідь.

5 Для однозв'язних ліній передачі характерними є такі типи хвиль:

- а)  $H$  -хвилі;
- б)  $T$  -хвилі;
- в)  $E$  -хвилі;

г) інша відповідь.

6 Коаксіальна лінія передачі відрізняється від прямокутного хвилеводу:

- а) наявністю двох рознесених у просторі провідників;
- б) одного загального провідника;
- в) двох концентрично розміщених провідників;
- г) інша відповідь.

7 Смугові лінії передачі бувають таких типів:

- а) компланарні;
- б) нерегулярні;
- в) регулярні;
- г) інша відповідь.

8 Які із перелічених ліній передачі належать до однозв'язних?

- а) дводротова;
- б) коаксіальна;
- в) смугова;
- г) інша відповідь.

9 Модифікаціями смугових ліній є:

- а) коаксіальні;
- б) щілинні;
- в) хвилевідні;
- г) інша відповідь.

10 Які хвилі можуть збуджуватися в прямокутному хвилеводі:

- а)  $H_{10}$ ;
- б)  $H_{00}$ ;
- в)  $E_{11}$ ;
- г) інша відповідь?

11 Критична довжина хвилі в прямокутному хвилеводі не залежить від:

- а) поперечних розмірів хвилеводу;
- б) довжини хвилеводу;
- в) типу хвилі;
- г) інша відповідь.

12 Який тип хвилі є основним у прямокутному хвилеводі:

- а)  $H_{01}$ ;
- б)  $E_{10}$ ;
- в)  $H_{10}$ ;
- г) інша відповідь?

13 Які із перелічених металевих хвилеводів мають найбільш широку смугу пропускання:

- а) круглий;
- б) П – образний;
- в) еліптичний;
- г) інша відповідь?

14. Діелектричний хвилевід є хвилеводом:

- а) швидких хвиль;
- б) повільних хвиль;
- в) прискорених хвиль;
- г) інша відповідь.

15 В діелектричному хвилеводі основне поле сконцентроване:

- а) у поперечному перерізі;
- б) поблизу поверхні;
- в) у навколишньому просторі;
- г) інша відповідь.

16 В якому діапазоні довжин хвиль можуть використовуватися порожні металеві хвилеводи:

- а) сантиметровому;
- б) міліметровому;
- в) оптичному;
- г) інша відповідь?

17 В якому із діапазонів довжин хвиль можуть використовуватися діелектричні хвилеводи:

- а) метровому;
- б) міліметровому;
- в) субміліметровому;
- г) інша відповідь?

18 В якому із діапазонів довжин хвиль можуть використовуватися волоконні світловоди:

- а) сантиметровому;
- б) дециметровому;
- в) оптичному;
- г) інша відповідь?

19 Для яких хвилеводів не характерне поняття критичної частоти  $f_{кр}$  (критичної довжини хвилі  $l_{кр}$ ):

- а) коаксіальних;
- б) прямокутних металевих;
- в) круглих металевих;
- г) інша відповідь?

20 Які нерівності справедливі для фазової швидкості хвилі ( $v_\phi$ ) у періодичній сповільнювальній системі:

- а)  $v_\phi > c$ ;
- б)  $v_\phi = 0$ ;
- в)  $v_\phi < c$ ;

г) інша відповідь?

21 На базі яких ліній передачі можуть бути виконані об'ємні резонатори:

- а) дводрової;
- б) коаксіальної;
- в) прямокутної;
- г) інша відповідь?

22 Який параметр об'ємного резонатора є найбільш важливим:

- а) смуга пропускання;
- б) власна частота;
- в) добротність;
- г) інша відповідь?

23 Стінки об'ємного резонатора можуть бути виконані із таких матеріалів:

- а) провідників;
- б) напівпровідників;
- в) феромагнетиків;
- г) інша відповідь.

24 Які резонатори є малогабаритними:

- а) об'ємні;
- б) біжучої хвилі;
- в) діелектричні;
- г) інша відповідь?

25 Яке призначення антени:

- а) випромінювання хвилі;
- б) приймання хвилі;
- в) відбиття хвилі;
- г) інша відповідь?

26 За принципом дії антени можна поділити на:

- а) нелінійні;
- б) лінійні;
- в) апертурні;
- г) інша відповідь.

27 Які антени не належать до основних типів:

- а) антенні решітки;
- б) директорні антени;
- в) дзеркальні антени;
- г) інша відповідь?

28 Яку із перелічених нижче систем можна вважати квазіоптичною:

- а) дводзеркальний відкритий резонатор;
- б) лінзовий хвилевід;
- в) порожній металевий хвилевід;
- г) інша відповідь?

29 В якому із перелічених нижче пристроїв НВЧ утворюється стояча хвиля:

- а) нескінченному відкритому хвилеводі;
- б) відкритому резонаторі;
- в) об'ємному резонаторі;
- г) інша відповідь?

30 Які властивості характерні для квазіоптичних систем:

- а) радіаційне загасання більшості коливань і хвиль;
- б) згущення спектра власних частот;
- в) розрідження спектра власних частот;
- г) інша відповідь?



**Еталони відповідей на тест В4:1 а,б; 2а,б; 3б; 4г; 5а,в;  
6в; 7а; 8г; 9б; 10а,в; 11б; 12в; 13б; 14б; 15б; 16а,б 17б,в;  
18в; 19а; 20в; 21б,в; 22в; 23а; 24в; 25а,в; 26б,в; 27г; 28а,б;  
29б,в; 30а,в.**