

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Електронні прилади і пристрої»
спеціальності 171 «Електроніка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

«Теорія поля»: Практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні прилади і пристрої» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Є.В. Вербицький – Електронні текстові данні (1 файл: 4,50 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 155 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 24.06.2021 р.)
за поданням Вченої ради Факультету електроніки (протокол № 05/21 від 31.05.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ПОЛЯ ПРАКТИКУМ

Укладач: Вербицький Євген Володимирович, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор: Ромашко В.Я., д-р техн. наук, проф.

Рецензент: Лошицький П.П., д-р техн. наук, проф.

Посібник містить базові теоретичні відомості, приклади вирішення задач і задачі для самостійного розв'язку з дисципліни «Теорія поля». Представлені задачі дозволяють отримати практичні навички, більш ґрунтовно засвоїти теоретичний матеріал курсу, підготуватись до контрольної роботи та практичних занять. Видання підготовлене на кафедрі електронних пристроїв та систем і призначене для студентів спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні компоненти і системи».

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. Довгі лінії.....	5
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1. Первинні та вторинні параметри довгої лінії. Умови узгодження довгих ліній.....	5
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2. Режими роботи лінії без втрат. Стоячі хвилі. Багаторазове відбивання хвиль з прямокутним фронтом	19
РОЗДІЛ 2. Основні рівняння електромагнітного поля.....	36
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3. Математичні основи аналізу векторного і скалярного полів. Розрахунок граничних умов при розповсюдженні електромагнітного поля в неоднорідних середовищах	36
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4. Електростатичне поле. Теорема Гауса.....	53
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5. Аналіз стаціонарних і швидкозмінних полів.....	62
РОЗДІЛ 3. Особливості розповсюдження і випромінювання електромагнітних хвиль.....	75
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6. Плоскі електромагнітні хвилі.....	75
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7. Відбивання і заломлення плоских електромагнітних хвиль.....	89
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8. Найпростіші випромінювачі електромагнітних хвиль.....	98
РОЗДІЛ 4. Спеціалізовані радіопристрої.....	109
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9. Електромагнітні хвилі в напрямних системах і хвилеводах.....	109
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	155

ВСТУП

Метою практикуму є поглиблення практичних навичок з курсу «Теорія поля». Після вирішення задач, наведених у посібнику, студенти отримають навички з:

- розрахунку електромагнітних процесів в довгих лініях;
- використання основних методів аналізу потенціальних електричних і магнітних полів;
- розрахунку електромагнітних екранів та резонаторів;
- практичного застосування методів моделювання і розрахунку процесів у технічних пристроях, принцип дії яких заснований на використанні електромагнітних явищ.

Навчальний посібник є доповненням до лекційного курсу та містить вирішення типових задач, що виносяться на практичні заняття та контрольні роботи з курсу. Короткий опис теоретичного матеріалу на початку кожного практичного заняття дає змогу для використання посібника для отримання базових знань з дисципліни «Теорія поля».

РОЗДІЛ 1. Довгі лінії
Практичне заняття № 1
Первинні та вторинні параметри довгої лінії. Умови узгодження довгих ліній

До **первинних параметрів** лінії одиничної довжини відносять індуктивність L_0 , ємність C_0 , активний опір r_0 та провідність g_0 лінії, які рівномірно розподілені вздовж усієї довжини.

До вторинних параметрів однорідної лінії відносять **коефіцієнт розповсюдження** γ та **хвильовий опір** $Z_{x\phi}$.

Коефіцієнт розповсюдження лінії:

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta.$$

Хвильовий опір лінії:

$$Z_{x\phi} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}$$

Параметр α , який входить до рівнянь, характеризує зміну амплітуди хвилі на одиницю довжини лінії і називається **коефіцієнтом затухання**.

Параметр β , що характеризує зміну фази на одиницю довжини лінії, називається **коефіцієнтом фази**.

Фазова швидкість v_ϕ хвилі – це швидкість переміщення фази коливання, що впродовж часу t та зі збільшенням відстані x , подоланою хвилею, має постійне значення:

$$v_\phi = \omega / \beta.$$

Довжиною хвилі λ називається відстань між двома точками, фази коливання у яких розрізняються на 2π :

$$\lambda = 2\pi / \beta,$$
$$v_\phi = \omega / \beta = 2\pi f / \beta = f\lambda = \lambda / T.$$

Коефіцієнт відбивання від кінця лінії n_2 :

$$n_2 = \frac{Z_2 - Z_{x\phi}}{Z_2 + Z_{x\phi}},$$

де $Z_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ – вихідний опір лінії.

При холостому ході ($\dot{I}_2 = 0$) отримаємо наступні співвідношення для визначення напруги та струму на початку лінії через напругу та струм у кінці лінії

$$\begin{cases} \dot{U}_{xx} = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l; \\ \dot{I}_{xx} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{x\phi}} \operatorname{sh}\gamma l. \end{cases}$$

При короткому замиканні отримаємо

$$\begin{cases} \dot{U}_{k3} = Z_{x6} \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l; \\ \dot{I}_{k3} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l. \end{cases}$$

Вхідний опір лінії

Вхідним опором лінії $Z_{\text{вх}}$ є опір двополюсника, яким можна замінити лінію разом з навантаженням на її кінці за умови розрахунку режиму на початку лінії. Вхідний опір лінії, виміряний у довільній точці на відстані x' від кінця, визначається відношенням $Z = \dot{U} / \dot{I}$ і може бути представлений в комплексній або гіперболічній формі. Будемо вважати, що лінія навантажена на кінці деяким опором Z_2 .

Комплексна форма виразу для вхідного опору лінії:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_{x6} \frac{e^{\gamma x'} + n_2 e^{-\gamma x'}}{e^{\gamma x'} - n_2 e^{-\gamma x'}}.$$

або

$$Z = Z_{x6} \frac{1 + n_2 e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}}{1 - n_2 e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}}.$$

Хвилеподібний характер кривої Z підлягає у загальному випадку закону зміни модуля гіперболічного тангенса з комплексним аргументом. Вказане твердження можливо отримати з аналізу формули:

$$Z = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_{x6} \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x'}{\dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \frac{\dot{U}_2}{Z_{x6}} \operatorname{sh} \gamma x'} = \frac{Z_2 + Z_{x6} \operatorname{th} \gamma x'}{1 + \frac{Z_2}{Z_{x6}} \operatorname{th} \gamma x'}.$$

При холостому ході ($Z_2 = \infty$) вхідний опір лінії:

$$Z_{xx} = Z_{x6} \operatorname{cth} \gamma x'.$$

А при короткому замиканні ($Z_2 = 0$):

$$Z_{k3} = Z_{x6} \operatorname{th} \gamma x'.$$

Вхідний опір Z виражається через Z_{xx} та Z_{k3} :

$$Z = Z_{xx} \frac{Z_2 + Z_{k3}}{Z_2 + Z_{xx}}.$$

Отриманою формулою користуються у тому випадку, коли з дослідів холостого ходу та короткого замикання відомі значення Z_{xx} та Z_{k3} . Дані дослідів холостого ходу та короткого замикання використовуються також для обчислення характеристичних параметрів лінії.

Узгоджене навантаження лінії

Якщо в кінці лінії ввімкнено навантаження Z_n , значення якого дорівнює хвильовому опору $Z_n = Z_{x6}$, то коефіцієнт відбивання від кінця лінії дорівнює нулю, $n_2 = 0$. При цьому в лінії існує тільки одна пряма хвиля, зворотна хвиля не виникає. Таке навантаження називають **узгодженим** або **навантаженням без відбивання**.

На практиці прагнуть узгодити опір приймача з хвильовим опором лінії. При цьому напруга і струм в лінії описують простішими у порівнянні з виразом виразами:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x'} ; \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x'}$$

Наведені співвідношення свідчать про те, що при переміщенні точки спостереження вздовж узгодженої лінії в напрямку від кінця до початку лінії, модуль напруги зростає у $e^{\alpha x'}$ раз, а фаза - на $\beta x'$ рад, також при узгодженому навантаженні геометричним місцем кінця вектора напруги \dot{U} є логарифмічна спіраль. На рис. 1.1, що ілюструє сказане, прийнято $\dot{U}_2 = U_2$ (вектор \dot{U}_2 направлений по дійсній осі).

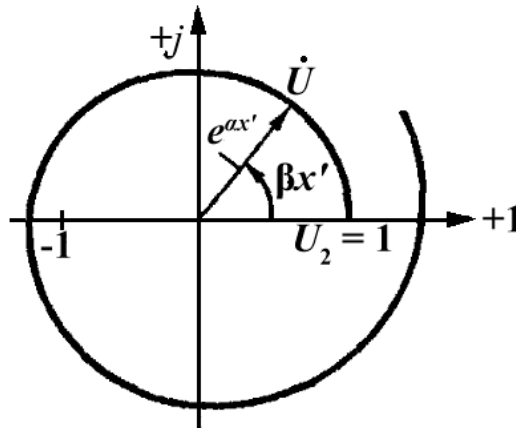


Рис. 1.1. Геометричне місце кінця вектору напруги при узгодженому навантаженні

Вважаючи початкову фазу напруги в кінці лінії рівною нулю, запишемо миттєві значення напруги та струму у будь-якій точці лінії:

$$\begin{cases} u(x, t) = U_{2m} e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x); \\ i(x, t) = \frac{U_{2m}}{Z_{x\beta}} e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x - \theta). \end{cases}$$

Відповідно до наведених рівнянь, напруга та струм в різних точках лінії відрізняються не тільки амплітудою, але й фазою.

Потужність у будь-якому перетині лінії дорівнює:

$$P = UI \cos \theta = \frac{U_2^2}{Z_{x\beta}} e^{2\alpha x} \cos \theta.$$

Ця потужність зменшується з віддаленням від початку лінії, бо на кожному елементі довжини лінії потужність втрат дорівнює сумі втрат в опорі провідників та в провідності ізоляції на елементі довжини dx .

$$dP = 2\alpha \frac{U_2^2}{Z_{x\beta}} \cos \theta dx = (r_0 I^2 + g_0 U^2) dx.$$

Потужність, що передається по узгодженій лінії, називається **природною** або **натуральною**. ККД передавання енергії узгодженою лінією розраховується з врахуванням вхідної потужності $P_1 = U_1 I_1 \cos \theta$ та вихідної потужності $P_2 = U_2 I_2 \cos \theta$.

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \theta = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \theta = P_2 e^{2\alpha l};$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}.$$

Все сказане про узгоджену лінію є справедливим і для нескінченної довгої лінії, бо в останній не може виникнути відбита хвиля.

Лінія без спотворень

Сигнали, які передаються по лінії зв'язку є сукупністю множини різних частот: дискретних – у випадку періодичних несинусоїдальних сигналів і безперервний спектр – у випадку неперіодичних сигналів. Передавання сигналу **без спотворень** забезпечується за умови, коли форма сигналу на початку і кінці лінії однакова. Таке явище має місце в тому випадку, коли коефіцієнт затухання лінії і фазова швидкість на всіх частотах однакові. Неоднакове затухання на різних частотах створює так звані **амплітудні спотворення**, а неоднакова швидкість хвиль на різних частотах – **фазові спотворення**.

Для передавання без спотворень вимагається, щоб коефіцієнт затухання α не залежав від частоти, а коефіцієнт фази β був прямопропорційним частоті. В останньому випадку фазова швидкість $v_\phi = \omega / \beta$ не залежить від частоти. Вказані умови виконуються, якщо:

$$\frac{L_0}{r_0} = \frac{C_0}{g_0}. \quad (1.1)$$

Лінія, параметри якої задовольняють умові (2.1), називається **лінією без спотворень**: будь-які сигнали розповсюджуються по ній зі збереженням їхньої форми. Лінія без спотворень є водночас і лінією з мінімальним затуханням, яке тільки і можливе при заданих параметрах r_0 та g_0 .

Хвильовий опір $Z_{xв}$ лінії без спотворень є активним і не залежить від частоти:

$$Z_{xв} = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Фазова швидкість v_ϕ у лінії без спотворень постійна і співпадає з виразом для граничної швидкості розповсюдження хвилі вздовж лінії при нескінченно високій частоті:

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Для усунення спотворень, що викликаються неузгодженістю опору приймача з опором лінії, тобто для запобігання виникнення відбиття на прийомному кінці, опір приймача повинен бути рівний хвильовому опору $Z_{xв}$. Коефіцієнт корисної дії лінії має в цьому випадку має найбільше можливе значення, рівне $\eta = e^{-2l\alpha}$, як у лінії з узгодженим навантаженням.

Зважаючи на те, що хвильовий опір лінії без спотворень є активним, при узгодженому навантаженні напруга та струм в будь-якій точці лінії співпадають по фазі. Відношення миттєвих значень напруги та струму в будь-якій точці такої лінії дорівнює:

$$\frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

звідки

$$\frac{L_0 i^2}{2} = \frac{C_0 u^2}{2}.$$

Отже, на будь-якому відрізку лінії без спотворень, навантаженої узгоджено, енергія магнітного поля в кожний момент часу дорівнює енергії електричного поля.

Слід зазначити, що на практиці умова (1.1), як правило, не виконується; відношення L_0/r_0 звичайно значно менше ніж C_0/g_0 . Внаслідок цього затухання лінії завжди перевищує мінімальне. Щоб лінія більш відповідала умові узгодженості, слід змінити будь-який первинний параметр, наприклад зменшити r_0 чи C_0 або збільшити g_0 чи L_0 .

Зменшення активного опору r_0 можливе за рахунок використання провідників більшого діаметру, що збільшує вартість лінії. Збільшення провідності ізоляції g_0 не вигідно, бо при цьому зросло би затухання лінії.

Найкращим засобом для наближення первинних електричних параметрів до узгодженого режиму є штучне збільшення індуктивності увімкненням у лінію через певну відстань індуктивних котушок чи застосування кабелю, жили якого обмотані тонкою стрічкою з матеріалу з високою магнітною проникністю.

Приклади вирішення типових задач

1. Розрахувати на частоті 1000 Гц коефіцієнт відбивання в кінці лінії, якщо первинні параметри лінії: $r_0 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} / \text{м}$; $L_0 = 2,29 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} / \text{м}$; $C_0 = 5,22 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}$; $g_0 = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Сим} / \text{м}$, і опір навантаження в кінці лінії $Z_2 = 200 \text{ Ом}$.

Розв'язок:

Коефіцієнт відбивання в кінці лінії n_2 визначається за наступною формулою:

$$n_2 = \frac{Z_2 - Z_{xв}}{Z_2 + Z_{xв}},$$

де $Z_{xв} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}$ – хвильовий опір лінії; $\omega = 2\pi f$ – кутова частота.

Підставляючи чисельні значення отримаємо:

$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 1000 = 6280 \frac{1}{c};$$

$$\begin{aligned} Z_{xв} &= \sqrt{\frac{6,5 \cdot 10^{-3} + j \cdot 6280 \cdot 2,29 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-10} + j \cdot 6280 \cdot 5,22 \cdot 10^{-12}}} = \sqrt{\frac{6,5 \cdot 10^{-3} + j \cdot 14381,2 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-10} + j \cdot 32781,6 \cdot 10^{-12}}} = \\ &= \sqrt{\frac{10^{-3} (6,5 + j \cdot 14,381)}{10^{-10} (5 + j \cdot 327,816)}} = \sqrt{\frac{15,78 \cdot 10^{-3} e^{j66^\circ}}{327,86 \cdot 10^{-10} e^{j89^\circ}}} = 693,76 e^{-j12^\circ} = \\ &= 693,76 \cos 12^\circ - j 693,76 \sin 12^\circ = (678,6 - j 144,24) \text{ Ом} \end{aligned}$$

Тоді, коефіцієнт відбивання в кінці лінії:

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{200 - (678,6 - j 144,24)}{200 + 678,6 - j 144,24} = \frac{-478,6 + j 144,24}{878,6 - j 144,24} = \frac{499,86 e^{j163^\circ}}{890,36 e^{-j9^\circ}} = 0,561 e^{j172^\circ} = \\ &= 0,561 \cos 172^\circ + j 0,561 \sin 172^\circ = (-0,555 + j 0,078) \end{aligned}$$

Відповідь: $n_2 = (-0,555 + j 0,078)$.

2. Хвильовий опір лінії на частоті 800 Гц дорівнює $(607 - j 126) \text{ Ом}$, а коефіцієнт розповсюдження – $(47,5 + j 180) 10^{-7} \text{ 1/м}$. Розрахувати первинні параметри лінії.

Розв'язок:

Коефіцієнт розповсюдження та хвильовий опір лінії визначаються за формулами:

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)},$$

$$Z_{xв} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}.$$

Помножимо та поділимо ці рівняння:

$$\gamma \cdot Z_{xв} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} \cdot \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = r_0 + j\omega L_0,$$

$$\frac{\gamma}{Z_{xв}} = \frac{\sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)}}{\sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}} = g_0 + j\omega C_0.$$

Підставляючи чисельні значення, отримаємо:

$$\gamma \cdot Z_{x6} = (47,5 + j180)10^{-7} \cdot (607 - j126) = (0,005 + j0,01),$$

$$\frac{\gamma}{Z_{x6}} = \frac{(47,5 + j180)10^{-7}}{(607 - j126)} = 10^{-7} (0,136 + j0,267).$$

Знайдемо активний опір та індуктивність вздовж довжини лінії:

$$r_0 = 0,005 \text{ Ом / м},$$

$$j\omega L_0 = j0,01,$$

$$L_0 = \frac{0,01}{\omega} = \frac{0,01}{2\pi f} = \frac{0,01}{5024} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Гн / м}.$$

Знайдемо провідність та ємність вздовж довжини лінії:

$$g_0 = 0,136 \cdot 10^{-7} \text{ Сим / м}$$

$$j\omega C_0 = j0,267 \cdot 10^{-7},$$

$$C_0 = \frac{0,267 \cdot 10^{-7}}{\omega} = \frac{0,267 \cdot 10^{-7}}{2\pi f} = \frac{0,267 \cdot 10^{-7}}{5024} = 5,32 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м}.$$

$$\text{Відповідь: } r_0 = 0,005 \text{ Ом / м}, \quad L_0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Гн / м}, \quad g_0 = 0,136 \cdot 10^{-7} \text{ Сим / м},$$

$$C_0 = 5,32 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м}.$$

3. Вхідний опір лінії довжиною 200 км при частоті 800 Гц дорівнює: на холостому ході – $(686 + j297) \text{ Ом}$, при короткому замиканні – 516 Ом .

Розрахувати вторинні параметри лінії.

Розв'язок:

Напряга та струм на початку лінії через напрягу та струм у кінці лінії на холостому ході визначаються співвідношеннями:

$$\begin{cases} \dot{U}_{xx} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l \\ \dot{I}_{xx} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{x6}} \operatorname{sh} \gamma l \end{cases},$$

а при короткому замиканні – співвідношеннями:

$$\begin{cases} \dot{U}_{k3} = Z_{x6} \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l \\ \dot{I}_{k3} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l \end{cases}.$$

Запишемо вирази для вхідного опору лінії на холостому ході та при короткому замиканні:

$$\begin{cases} Z_{xx} = \frac{\dot{U}_{xx}}{\dot{I}_{xx}} = \frac{Z_{x6} \operatorname{ch} \gamma l}{\operatorname{sh} \gamma l} = Z_{x6} \operatorname{cth} \gamma l \\ Z_{k3} = \frac{\dot{U}_{k3}}{\dot{I}_{k3}} = \frac{Z_{x6} \operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l} = Z_{x6} \operatorname{th} \gamma l \end{cases}$$

Підставляючи чисельні значення отримаємо:

$$\begin{cases} Z_{x6} \operatorname{cth} 200000 \gamma = 686 + j297 \\ Z_{x6} \operatorname{th} 200000 \gamma = 516 \end{cases}$$

Перемножаючи та ділячи ці рівняння отримаємо:

$$\begin{cases} Z_{x6}^2 = 516(686 + j297) \\ \operatorname{cth}^2 2 \cdot 10^5 \gamma = \frac{686 + j297}{516} \end{cases}$$

Тоді, хвильовий опір:

$$Z_{x6} = \sqrt{516(686 + j297)} = \sqrt{353976 + j153252} = \sqrt{385726,8 e^{j23^\circ}} = 621,07 e^{j11,5^\circ} = (608,6 + j123,82) \text{ Ом.}$$

А коефіцієнт розповсюдження:

$$\operatorname{cth} 200000 \gamma = \sqrt{\frac{686 + j297}{516}} = \sqrt{1,33 + j0,576} = \sqrt{1,45 e^{j23^\circ}} = 1,2 e^{j11,5^\circ},$$

$$\frac{e^{4 \cdot 10^5 \gamma} + 1}{e^{4 \cdot 10^5 \gamma} - 1} = 1,2 e^{j11,5^\circ},$$

$$e^{2 \cdot 10^5 \gamma} = 2,715 e^{-j24^\circ},$$

$$2 \cdot 10^5 \gamma = \ln(2,715 e^{-j24^\circ}) = \ln(2,715 e^{-j0,413}) = \ln 2,715 + \ln e^{-j0,413} = 1 - j0,413,$$

$$\gamma = \frac{1 - j0,413}{2 \cdot 10^5} = (0,5 - j0,2) 10^{-5} \text{ 1/м.}$$

Відповідь: $Z_{x6} = (608,6 + j123,82) \text{ Ом}$, $\gamma = j(0,5 - j0,2) 10^{-5} \text{ 1/м.}$

4. Розрахувати вхідний опір лінії без втрат при короткому замиканні на кінці. Довжина лінії – 35 м, довжина хвилі – 50 м, хвильовий опір лінії $Z_{x6} = 505 \text{ Ом}$.

Розв'язок:

Для лінії без втрат ($r_0 = 0$, $g_0 = 0$) напруга та струм на початку лінії через напругу та струм у кінці лінії при короткому замиканні визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} \dot{U}_{k3} = Z_{x6} \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l; \\ \dot{I}_{k3} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l. \end{cases}$$

Вхідний опір лінії визначається наступним чином:

$$Z_1 = \frac{\dot{U}_{k3}}{\dot{I}_{k3}} = \frac{Z_{x6} \operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l} = Z_{x6} \operatorname{th} \gamma l,$$

де коефіцієнт розповсюдження $\gamma = j\beta = j \frac{2\pi}{\lambda}$.

Підставляючи чисельні значення отримаємо:

$$Z_1 = 505 \operatorname{th} j \frac{2 \cdot 3,14}{50} 35 = \left| \operatorname{th}(jx) = j \operatorname{tg} x \right. = j 505 \operatorname{tg} 4,396 = j 38,8 \text{ Ом}.$$

Відповідь: $Z_1 = j 38,8 \text{ Ом}$.

5. Кабель РК-75 довжиною 14,5 м з ізоляцією з поліетилену ($\varepsilon = 2,3$) замкнутий накоротко і живиться генератором з частотою 50 МГц. Визначити вхідний опір кабелю.

Розв'язок:

Знайдемо довжину хвилі в повітрі, відповідну частоті $f = 60 \text{ МГц} = 6 \cdot 10^7 \text{ Гц}$:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^7} = \frac{30}{6} = 5 \text{ м}.$$

Довжину хвилі в кабелі до λ_k визначають з урахуванням того, що швидкість поширення хвиль в ньому менше, ніж в повітрі в $\sqrt{\varepsilon}$ раз, тобто

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2,3}} = \frac{5}{1,52} \approx 3 \text{ м},$$

а коефіцієнт фази β для кабелю дорівнює:

$$\beta_k = \frac{2\pi}{\lambda_k} = \frac{2\pi}{3} = 120 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Вхідний опір $Z_{\text{вх}}$ лінії передачі з хвильовим опором W , навантаженої на опір $Z_{\text{н}}$, визначається виразом:

$$Z_{\text{вх}} = W \frac{Z_{\text{н}} \cos(\beta_k \ell) + iW \sin(\beta_k \ell)}{W \cos(\beta_k \ell) + iZ_{\text{н}} \sin(\beta_k \ell)},$$

оскільки лінія закорочена на кінці, опір навантаження $Z_{\text{н}}$ дорівнює нулю $Z_{\text{н}} = 0$, а вхідний опір розраховується за формулою:

$$Z_{\text{вх}} = iW \text{tg}(\beta_k \ell).$$

Тоді для лінії довжиною $x = 14,5$ м або, що те ж саме, для лінії довжиною $x = 14,5 - m\lambda_k / 2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тобто для $x = 14,5 - 7 \cdot \lambda_k / 2 = 14,5 - 7 \cdot 1,5 = 4$ м (вхідний опір через ділянки лінії, кратні цілому числу півхвиль, повторюється):

$$Z_{\text{вх}} = i75 \text{tg}(\pi \cdot 7,5) = +i48 \text{ Ом}.$$

Отже, цей опір індуктивного характеру.

Відповідь: вхідний опір має індуктивний характер і дорівнює $Z_{\text{вх}} = i48$ Ом.

6. Генератор, що працює на частоті $f = 1$ ГГц, живить лінію, що не має втрат. Довжина лінії $\ell = 20$ м, хвильовий опір $W = 100$ Ом. Розрахувати опір навантаження так, щоб вхідний опір лінії дорівнював нулю ($Z_{\text{вх}} = 0$).

Розв'язок:

Знайдемо робочу довжину хвилі генератора:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 30 \text{ м},$$

Розділимо чисельник і знаменник формули на $\cos(\beta_k x)$:

$$Z_{\text{вх}} = W \frac{Z_{\text{н}} + iW \text{tg}(\beta_k \ell)}{W + iZ_{\text{н}} \text{tg}(\beta_k \ell)} = 0.$$

Так як $W \neq 0$, то $Z_{\text{н}} + iW \text{tg}(\beta_k \ell) = 0$, звідки

$$Z_{\text{н}} = -iW \text{tg}(\beta_k x) = iW \text{tg}\left(\frac{2\pi \ell}{\lambda}\right),$$

або

$$Z_{\text{н}} = -i100 \text{tg}\left(\frac{2\pi \cdot 20}{30}\right) = -i100 \text{tg}\left(\frac{2\pi \cdot 2}{3}\right) = -i100 \text{tg}270^\circ = -i100 \cdot 1,73 =$$

$$= -i173 \text{ Ом.}$$

Отже, характер опору навантаження повинен бути ємнісним.

Відповідь: вхідний опір має ємнісний характер і дорівнює $Z_{\text{вх}} = -i173 \text{ Ом}$.

7. Визначити вхідний опір короткозамкненою лінії без втрат, якщо її довжина $\ell = 20\text{м}$, а робоча довжина хвилі $\lambda = 50\text{м}$. Лінія виконана з коаксіального кабелю з поліетиленовою ізоляцією ($\varepsilon = 2,3$) з $D / d = 6,2$. Обчислити значення ємності або індуктивності, відповідне знайденому вхідному опору.

Розв'язок:

Знайдемо фазовий коефіцієнт β :

$$\beta_k = \frac{2\pi}{\lambda_k} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{2,3}}{50} = 0,1909 \frac{\text{рад}}{\text{м}},$$

і набіг по фазі при проходженні хвилею довжини кабелю ℓ :

$$\beta_k \ell = 0,1909 \cdot 20 = 3,81 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Вхідний опір, що визначається за формулою

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + iX_{\text{вх}} = W \frac{Z_{\text{н}} + iW \operatorname{tg}(\beta_k \ell)}{W + iZ_{\text{н}} \operatorname{tg}(\beta_k \ell)}$$

для короткозамкненою лінії ($Z_{\text{н}} = 0$)

$$iX_{\text{вх}} = iW \operatorname{tg}(\beta_k \ell) = iW \operatorname{tg}3,81.$$

Хвильовий опір коаксіального кабеля знаходимо з виразу:

$$W = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \frac{D}{d} = \frac{138}{\sqrt{2,3}} \lg 6,2 = 72 \text{ Ом.}$$

Тоді

$$X_{\text{вх}} = 72 \cdot \operatorname{tg}3,81 = 72 \cdot 0,78 = 56,85 \text{ Ом.}$$

Вхідний опір має індуктивний характер. індуктивність, еквівалентна даному вхідному опору, визначається з умови

$$X_{\text{вх}} = \omega L_{\text{екв}},$$

Звідки

$$L_{\text{екв}} = \frac{X_{\text{вх}}}{\omega} = \frac{X_{\text{вх}}}{2\pi f} = \frac{X_{\text{вх}} \lambda_{\varepsilon}}{2\pi c} = \frac{X_{\text{вх}} \lambda}{2\pi c \sqrt{\varepsilon}} = \frac{56,85 \cdot 50}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{2,3}} = 99,260 \cdot 10^{-8} = 0,99 \text{ мкГн.}$$

Відповідь: значення індуктивності, що відповідає опору лінії складає
 $L_{\text{екв}} = 0,99 \text{ мкГн.}$

8. Визначити вхідний опір розімкнутої лінії без втрат, яка має хвильовий опір $W = 100 \text{ Ом.}$ Довжина лінії $\ell = 9,5 \text{ м,}$ а довжина хвилі генератора, що живить лінію, $\lambda = 30 \text{ м.}$ Обчислити також величину ємності або індуктивності, відповідну знайденому вхідному опору.

Розв'язок:

Знайдемо фазовий коефіцієнт β :

$$\beta_k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{360^\circ}{30} = 12 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Збільшення фази на довжині лінії дорівнює:

$$\beta_k \ell = 12 \cdot 9,4 = 114^\circ.$$

Вхідний опір для розімкнутої на кінці лінії ($Z_H = \infty$) має вид:

$$Z_H = R_{\text{вх}} + iX_{\text{вх}} = -iW \text{ctg}(\beta_k \ell),$$

звідки

$$X_{\text{вх}} = -W \text{ctg}(\beta_k \ell) = -100 \cdot \text{ctg}114^\circ = -\frac{200}{\text{tg}114^\circ} = -\frac{200}{-2,24} = 89,2 \text{ Ом.}$$

Отже, вхідний опір має індуктивний характер. Еквівалентна індуктивність, що відповідає цьому опору, визначається з умови:

$$X_{\text{вх}} = \omega L_{\text{екв}},$$

звідки

$$L_{\text{екв}} = \frac{X_{\text{вх}}}{\omega} = \frac{X_{\text{вх}}}{2\pi f} = \frac{X_{\text{вх}} \lambda}{2\pi c} = \frac{89,2 \cdot 30}{6,28 \cdot 3 \cdot 10^8} = 142,17 \cdot 10^{-8} \text{ Гн} = 1,42 \text{ мкГн}$$

Відповідь: значення індуктивності, що відповідає опору лінії складає
 $L_{\text{екв}} = 1,42 \text{ мкГн.}$

9. Лінія без втрат має хвильовий опір $W = 100 \text{ Ом}$ і навантажена на чисто індуктивний опір, рівний $X_H = 50 \text{ Ом.}$ Знайти вхідний опір лінії на частоті $f = 3 \text{ МГц}$ при довжині лінії $\ell = 5 \text{ м.}$

Розв'язок:

Знайдемо робочу довжину хвилі лінії:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^6} = 100 \text{ м,}$$

оскільки опір навантаження

$$Z_H = iX_H = i50 \text{ Ом},$$

то вхідний опір лінії розраховується за формулою:

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= W \frac{iX_H + iW \operatorname{tg}(k\ell)}{W + i[iX_H \operatorname{tg}(k\ell)]} = iW \frac{X_H + W \operatorname{tg}(k\ell)}{W - X_H \operatorname{tg}(k\ell)} = \\ &= i100 \frac{50 + 100 \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ \cdot 5}{100}\right)}{100 - 50 \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ \cdot 5}{100}\right)} = i100 \frac{50 + 100 \operatorname{tg}(18^\circ)}{100 - 50 \operatorname{tg}(18^\circ)} \approx i98 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Таким чином, вхідний опір лінії має індуктивний опір.

Відповідь: вхідний опір лінії має індуктивний характер і дорівнює $Z_{\text{вх}} = i98 \text{ Ом}$.

Задачі для самостійного вирішення

1. Для лінії з хвильовим опором $Z_{\text{хв}} = 300 \text{ Ом}$ знайти опір навантаження, якщо коефіцієнт відбивання в кінці лінії n_2 дорівнює $(0,23 + j0,23)$.

2. Однорідна лінія має первинні параметри: $r_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Ом/м}$, $C_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/м}$, $g_0 = 10^{-9} \text{ Сим/м}$. При якій індуктивності в лінії будуть відсутні спотворення?

3. Повітряна лінія без втрат при $\omega = 100000 \text{ рад/с}$ має хвильовий опір $Z_{\text{хв}} = 600 \text{ Ом}$ та коефіцієнт розповсюдження $\gamma = 10^3$. Визначити первинні параметри лінії та фазову швидкість.

4. Розрахувати при частоті 1000 Гц хвильовий опір, коефіцієнт розповсюдження та фазову швидкість, якщо відомі первинні параметри лінії:

$$r_0 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ Ом/м}; \quad L_0 = 2,29 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \quad C_0 = 5,22 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$g_0 = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Сим/м}.$$

5. Лінія довжиною $\ell = 25 \text{ м}$ з хвильовим опором $W = 400 \text{ Ом}$ замкнута на комплексний опір $Z_H = 100 + i300 \text{ Ом}$ при довжині хвилі в лінії $\lambda = 90 \text{ м}$. Визначити вхідний опір і вхідну провідність лінії.

6. Визначити вхідну провідність лінії без втрат довжиною $\ell = 0,16\lambda$, яка має хвильовий опір $W = 105 \text{ Ом}$ і навантажена на опір $Z_H = 50 + i150 \text{ Ом}$.

7. Знайти вхідний опір і вхідну провідність короткозамкненої лінії без втрат довжиною $\ell = 0,04\lambda$, що має хвильовий опір $W = 70 \text{ Ом}$.

8. Широкосмуговий трансформатор складається з двох чверть- хвильових відрізків з хвильовими опорами $W_{c1} = 59 \text{ Ом} = i W_{c2} = 75 \text{ Ом}$. Чому рівні хвильові опори узгоджуваних ліній?

9. До кінця лінії без втрат з хвильовим опором 50 Ом підключене навантаження. При довжині хвилі 5 м найближчий до навантаження вузол напруги знаходиться на відстані $0,25 \text{ м}$ від кінця лінії. Визначити величину і характер навантаження.

10. Лінія без втрат, навантажена на котушку індуктивності $L = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}$, має наступні параметри: $L_0 = 8 \cdot 10^{-9} \text{ Гн/м}$; $C_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$. Частота змінного струму 10^5 Гц . Необхідно довести, що в лінії присутні стоячі хвилі струму і напруги.

11. В лінії без втрат при опорі навантаження $1/6$ хвильового опору визначити коефіцієнти відбивання та біжучої хвилі.

12. Визначити вхідний опір лінії без втрат, навантаженої на опір Z_H при довжині хвилі $\lambda/3, \lambda/4$.

13. Розрахувати вхідний опір лінії без втрат при короткому замиканні на кінці. Довжина лінії $l = 50 \text{ м}$, довжина хвилі $\lambda = 25 \text{ м}$, хвильовий опір лінії $Z_{хв} = 500 \text{ Ом}$.

Практичне заняття № 2

Режими роботи лінії без втрат. Стоячі хвилі. Багаторазове відбивання хвиль з прямокутним фронтом

Якщо опір провідників лінії r_0 та провідність витoku g_0 дорівнюють нулю, $r_0 = g_0 = 0$, довга лінія є *лінією без втрат*.

Для високочастотних ліній з відносно невеликою протяжністю, які використовуються радіотехніці, часто виконуються умови $r_0 \ll \omega L_0$ та $g_0 \ll \omega C_0$, що дає підставу розглядати їх як лінії без втрат. У цьому випадку вторинні параметри лінії розраховуються за формулами:

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_0 C_0}; \alpha = 0; \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}; Z_{x\phi} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (2.1)$$

Отже, в лінії без втрат затування відсутнє. Зважаючи на постійність фазової швидкості

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

будуть відсутні також і фазові спотворення.

Вирази для коефіцієнту фази β , фазової швидкості v_ϕ та хвильового опору $Z_{x\phi}$ лінії без втрат співпадають з виразами, отриманими для лінії без спотворень.

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x' + jZ_{x\phi} \dot{I}_2 \sin \beta x'; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta x' + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{x\phi}} \sin \beta x'. \end{cases} \quad (2.2)$$

Переходячи у системі (2.2) до миттєвих значень при $\dot{U}_2 = U_2; \dot{I}_2 = I_2 e^{-j2\phi}$, одержуємо

$$\begin{cases} u(x, t) = U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t + I_{2m} Z_{x\phi} \sin \beta x \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_2 \right); \\ i(x, t) = \frac{U_{2m}}{Z_{x\phi}} \sin \beta x \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + I_{2m} \cos \beta x \sin (\omega t - \phi_2). \end{cases} \quad (2.3)$$

Режими роботи лінії без втрат. Стоячі хвилі

Дослідимо закон розподілу діючих значень напруги та струму вздовж лінії без втрат. З цією метою скористуємось рівняннями лінії у комплексній та гіперболічній формах.

Підставивши уявний коефіцієнт розповсюдження $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$, отримаємо таку систему рівнянь для будь-якої точки лінії на відстані x' від кінця:

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2} \dot{U}_2 \left(1 + \frac{Z_{x\phi}}{Z_2} \right) \left(e^{j\frac{2\pi}{\lambda} x} + n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} x} \right); \\ \dot{I} = \frac{1}{2Z_{x\phi}} \dot{U}_2 \left(e^{j\frac{2\pi}{\lambda} x} - n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} x} \right). \end{cases} \quad (2.4)$$

Коефіцієнт відбивання n_2 рівняння (2.4) є комплексним параметром:

$$n_2 = (Z_2 - Z_{x\delta}) / (Z_2 + Z_{x\delta}). \quad (2.5)$$

З аналізу системи (2.4) можна зробити висновок про те, що комплексна напруга в будь-якій точці x' складається з прямої та зворотної хвиль напруги, амплітуди яких знаходяться в співвідношенні $1:|n_2|$; в свою чергу комплексний струм рівний різниці прямої та зворотної хвиль струму з тим же співвідношенням амплітуд.

Точкам $x' = k\lambda/2$ (k – ціле число), що задовольняють умові

$$\left| e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x'} + n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x'} \right| = 1 + |n_2|, \quad (2.6)$$

відповідає максимальне діюче значення U , бо при цьому фази прямої та зворотної хвиль напруги співпадають.

На відстані $\lambda/4$ від цих точок пряма та зворотна хвилі знаходяться у протифазі і діюче значення напруги має мінімум. При цьому задовольняється умова

$$\left| e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x'} - n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x'} \right| = 1 - |n_2|. \quad (2.7)$$

Координати максимумів та мінімумів напруги, що є функціями двох змінних n_2 і λ , і не залежать від часу. Координати максимумів і мінімумів є постійними. Мінімум напруги розташується посередині між двома сусідніми максимумами напруги, причому відстань між найближчими максимумами (або мінімумами) складає $\lambda/2$.

Таким чином, крива діючих значень напруги вздовж лінії без втрат має хвилеподібну форму, максимуми та мінімуми якої чергуються.

При $|n_2| = 1$, тобто при рівності амплітуд прямої та зворотної хвиль, в лінії встановлюються **стоячі хвилі** напруги та струму. Криві діючих значень напруги і струму вздовж лінії подають мають форму «випрямлених» синусоїд. Вздовж лінії утворюються **вузли**, тобто точки, в яких напруга та струм дорівнюють нулю, і **пучності** – точки, в яких напруга або струм мають м максимальні значення. Вузли напруги співпадають з пучностями струму і навпаки – вузли струму співпадають з пучностями напруги. Відповідно вузли (або пучності) напруги та струму зсунуті на чверть довжини вільні відносно один одного.

Умови, за якої модуль коефіцієнта відбивання дорівнює одиниці, $|n_2| = 1$ є такими: $Z_2 = \infty$ (холостий хід), $Z_2 = 0$ (коротке замикання) і $Z_2 = jx$ (реактивне навантаження). Цим умовам відповідає режим роботи зі стоячими хвилями в лінії без втрат.

У режимі холостого ходу ($I_2 = 0$):

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_{x\delta}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{cases} \quad (2.8)$$

Вузли напруги знаходяться в точках, для яких $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = 0$ або

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ звідки } x'_v = \frac{2k+1}{4} \lambda.$$

Пучності напруги знаходяться в точках, для яких $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = \pm 1$ або

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = k\pi \text{ звідки } x'_n = \frac{k}{2} \lambda.$$

Розімкнений кінець лінії співпадає з вузлом струму та пучністю напруги, рис 3.1, а.

При короткому замиканні, підставляючи в (2.3) $\dot{U}_2 = 0$, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U} = jZ_{xe} \dot{I}_2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{cases} \quad (2.9)$$

На замкненому кінці лінії $x'=0$ і в точках, віддалених від нього на ціле число півхвиль $x' = k\lambda/2$, знаходяться вузли напруги і пучності струму, а в точках, віддалених від кінця на непарне число чвертей хвиль $x' = (2k+1)\lambda/2$ знаходяться пучності напруги та вузли струму.

Для кількісної оцінки ступеню узгодження лінії з навантаженням використовується **коефіцієнт біжучої хвилі**, який є відношенням мінімуму в кривій розподілу напруги чи струму до максимуму тієї ж величини:

$$K_{\sigma} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}};$$

$$K_{\sigma} = \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|};$$

$$|n_2| = \frac{1 - K_{\sigma}}{1 + K_{\sigma}} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}.$$

У реальних умовах коефіцієнт біжучої хвилі звичайно не нижче 0.5-0.6.

Криву розподілу діючих значень напруги вздовж лінії використовують на практиці для виміру довжини хвилі чи частоти. Довжина хвилі визначається подвійною відстанню між сусідніми максимумами або мінімумами кривої розподілу, а частота обчислюється по довжині хвилі.

Потужність у лінії без втрат

За наявності стоячих хвиль з вузлами, коли амплітуди прямої та зворотної хвиль однакові, а саме при холостому ході, короткому замиканні або чисто реактивному навантаженні, потужність у вузлах напруги та струму дорівнює нулю. В інших точках лінії потужність реактивна, бо напруга і струм зсунуті по фазі на 90° .

У цьому випадку енергія не передається вздовж лінії, а відбувається лише обмін енергією між електричним і магнітним полями на ділянках ліній, обмежених вузлами напруги і струму.

Якщо в лінії є втрати або приймач споживає активну потужність, то вузли зникають, амплітуда прямої хвилі перевищує амплітуду зворотної хвилі і через різницю амплітуд відбувається процес передачі енергії вздовж лінії.

Максимум діючого значення напруги спостерігається при співпадінні фаз прямої і зворотної хвиль напруги, а мінімум - при фазовому зміщенні 180° ; у відповідності з (2.7)

$$U_{\max} = \frac{1}{2}U \left| 1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right| (1 + |n_2|);$$

$$U_{\min} = \frac{1}{2}U \left| 1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right| (1 - |n_2|).$$
(2.10)

Максимум струму спостерігається за умови, коли пряма і зворотна хвилі струму знаходяться в протифазі, а мінімум – за умови збігу їх фаз:

$$I_{\max} = \frac{1}{2Z_{x\delta}}U \left| 1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right| (1 + |n_2|);$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2Z_{x\delta}}U \left| 1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right| (1 - |n_2|).$$
(2.11)

На підставі (2.10) і (2.11) можна записати

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{U_{\min}}{I_{\min}} = Z_{x\delta}; \quad \frac{U_{\max}}{I_{\min}} = Z_{x\delta} \frac{1 + |n_2|}{1 - |n_2|} = r_{\max}; \quad \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = Z_{x\delta} \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|} = r_{\min}.$$
(2.12)

Якщо втрати в лінії будуть відсутні, то вся активна потужність надходить у навантаження:

$$P = r_{\min} I_{\max}^2 = r_{\max} I_{\min}^2;$$

$$P^2 = r_{\max} r_{\min} I_{\max}^2 I_{\min}^2.$$
(2.13)

Використовуючи формулу (2.2) можна довести, що

$$P = Z_{x\delta} I_{\max} I_{\min} = U_{\max} U_{\min} / Z_{x\delta}.$$
(2.14)

З допомогою виразу (2.14) обчислюється активна потужність в лінії без втрат. Разом з тим вказане співвідношення доводить, що при гранично допустимій (з точки зору діелектричної міцності ізоляції) напрузі U_{\max} активна потужність, що передається, тим більше, чим вище коефіцієнт біжучої хвилі, тобто чим менше коефіцієнт відбивання від кінця лінії n_2 . Максимум потужності, що передається, настає при узгодженому навантаженні ($Z_2 = Z_{x\delta}$), коли $U_{\max} = U_{\min}$ чи $K_\delta = 1$.

При неузгодженому навантаженні в лінії частина енергії витрачається на відбивання. Оскільки діючі значення напруг прямої і зворотної хвиль U_n та $U_{3\delta}$ для всіх точок лінії без втрат незмінні, то, очевидно,

$$U_{\max} = U_n + U_{3\delta};$$

$$U_{\min} = U_n - U_{3\delta};$$

$$K_\delta = U_{\min} / U_{\max} = (U_n - U_{3\delta}) / (U_n + U_{3\delta});$$
(2.15)

$$P = \frac{1}{Z_{x\delta}}(U_n - U_{3\delta})(U_n + U_{3\delta}) = \frac{1}{Z_{x\delta}}(U_n^2 - U_{3\delta}^2).$$

З аналізу формул (2.15) можна зробити висновок, що потужність прямої хвилі ($P_n = U_n^2/Z_{x\delta}$) складається з корисної потужності, що споживається приймачем (P), і потужності відбитої хвилі ($P_{3\delta} = U_{3\delta}^2/Z_{x\delta}$).

Відношення корисної потужності до потужності падаючої хвилі дорівнює

$$\frac{P}{P_n} = \frac{P_n - P_{3\delta}}{P_n} = \frac{U_n^2 - U_{3\delta}^2}{U_n^2} = 1 - |n_2|^2 = 1 - \left(\frac{1 - K_\delta}{1 + K_\delta}\right)^2 = \frac{4K_\delta}{(1 + K_\delta)^2}. \quad (2.16)$$

Виникнення хвиль з прямокутним фронтом

Для з'ясування фізичних основ виникнення і руху хвилі з прямокутним фронтом розглянемо лінію, що в момент часу $t = 0$ під'єднується до джерела постійної напруги U_0 (внутрішній опір джерела рівний нулю). Для повітряної лінії напруги промислової частоти ($\lambda \approx 6000$ км) за час проходження хвилею відстані в межах декількох десятків кілометрів напругу у певній точці лінії можна вважати постійною. Після під'єднання джерела до лінії виникає хвиля з напругою $u_n = U_0$, де U_0 миттєве значення напруги джерела у момент під'єднання до лінії. Утворена хвиля заряджає послідовно один елемент лінії за іншим до напруги U_0 .

Припустимо, що в момент t хвиля досягла перетину mn , рис. 2.1. У цей момент в усіх точках x лівіше перетину напруга між провідниками дорівнює U_0 , а правіше цього перетину напруга дорівнює нулю.

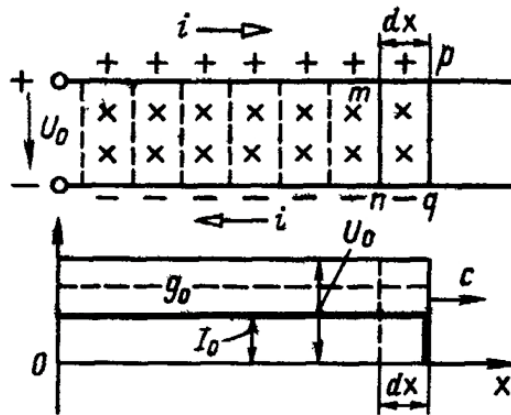


Рис. 2.1. Процес утворення хвилі з прямокутним фронтом при під'єднанні джерела

На поверхні верхнього провідника лівіше перетину mn відбувається накопичення позитивного заряду $q_0 = C_0 U_0$, правіше цього перетину заряд дорівнює нулю. За час dt хвиля переміщується правіше перетину mn на відстань $dx = c dt$. При цьому елемент лінії dx отримає заряд $dq = q_0 dx = C_0 U_0 dx$, що повинен пройти по верхньому провіднику через перетин mn і через будь-який перетин верхнього провідника лівіше mn . Розповсюдження заряду створює вздовж верхнього провідника від джерела до перетину mn струм

$$i = dq/dt = q_0 dx/dt = C_0 U_0 c = I_0. \quad (2.17)$$

Водночас з накопиченням позитивного заряду на поверхні верхнього провідника лінії відбувається накопичення негативного заряду на поверхні

нижнього провідника. Розповсюдження негативного заряду вздовж нижнього провідника з ліва направо пов'язане з електричним струмом у нижньому провіднику, який направлений у протилежну сторону, тобто з права наліво.

Процес розповсюдження зарядів можна уявити собі таким чином, що з переміщенням хвилі з ліва направо елементи верхнього провідника один за одним накопичують певний позитивний заряд і такий же позитивний заряд віднімається від елементів нижнього провідника. Протилежні заряди утворюють електричне поле між провідниками по всій довжині лінії, яку пройшла хвиля. При виникненні електричного поля у фронті хвилі між елементами провідників, які заряджаються (mp і nq на рис. 2.1), протікає струм зміщення. Одержується замкнений ланцюг струму. Від позитивного полюса джерела струм іде по верхньому провіднику, замикається у фронті хвилі струмом зміщення між провідниками і після цього іде по нижньому провіднику до негативного полюса джерела. Одночасно з рухом хвилі ланцюг подовжується, але струм в ланцюзі залишається незмінними: $I_0 = C_0 U_0 c$.

У контурі що утвориться цим ланцюгом виникає магнітний потік, лінії якого лежать в площинах, перпендикулярних осям провідників. При переміщенні хвилі на відстань $dx = c dt$ магнітний потік збільшується на значення $d\Phi = L_0 I_0 dx = L_0 I_0 c dt$. При виникненні потоку $d\Phi$ в контурі $mpqn$ наводиться ЕРС самоіндукції

$$d\Phi / dt = L_0 I_0 dx / dt = L_0 I_0 c, \quad (2.18)$$

що діє проти годинникової стрілки. Таким чином, ЕРС самоіндукції у фронті хвилі, скерована по лінії qp , дорівнює:

$$U_0 = L_0 c I_0. \quad (2.19)$$

Звідки

$$U_0 / I_0 = L_0 c = L_0 / \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{L_0 / C_0} = Z_{xв}. \quad (2.20)$$

Енергія, що віддається в одиницю часу джерелом, дорівнює $U_0 I_0$. В одиницю часу хвиля переміщується на відстань, рівну c . На кожному одиничному відрізку лінії, пройденому хвилею, запасається енергія $C_0 U_0^2 / 2$ в електричному полі та $L_0 I_0^2 / 2$ в магнітному полі. На підставі закону збереження енергії

$$U_0 I_0 = c (C_0 U_0^2 / 2 + L_0 I_0^2 / 2). \quad (2.21)$$

Підставивши в ліву частину рівняння (4.5) $I_0 = C_0 U_0 c$, отримаємо співвідношення

$$C_0 U_0^2 / 2 = L_0 I_0^2 / 2. \quad (2.22)$$

Тобто для хвилі значення енергії електричного і магнітного полів на ділянці лінії, пройденій хвилею, рівні між собою.

Розглянута хвиля має прямокутну форму

$$u_n(t - x/c) = U_0, \text{ при } t < x/c$$

$$u_n(t - x/c) = 0, \text{ при } t > x/c,$$

і називається **хвилею з прямокутним фронтом**.

Якщо до лінії підключається джерело з внутрішнім опором $r_{вн}$, струм і напруга хвилі стають меншими. У цьому випадку

$$\begin{aligned} u_n &= U_0 - r_n i_n; \\ i_n &= u_n / Z_{xв}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Звідки

$$\begin{aligned} u_n &= U_0 Z_{xв} / (Z_{xв} + r_n); \\ i_n &= U_0 / (Z_{xв} + r_n). \end{aligned} \quad (2.24)$$

При під'єднанні генератора з індуктивним внутрішнім опором фронт хвилі змінюється і хвиля перестає бути прямокутною.

Під'єднання навантаження

Хвилі прямокутної форми виникають і при під'єднання до зарядженої лінії навантаження з активним опором. Розглянемо лінію з хвильовим опором $Z_{xв}$, заряджену до напруги U_0 . Якщо в момент часу $t = 0$ до кінця лінії під'єднується навантаження з опором r_n , рис. 2.2, у кінці лінії виникає зворотна хвиля, яка рухається від кінця лінії до її початку.

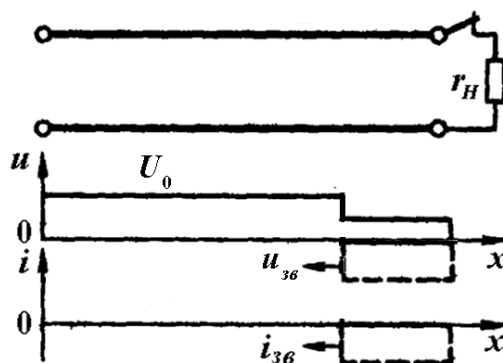


Рис. 2.2. Епюр виникнення зворотної хвилі

Напруга і струм цієї хвилі можуть бути легко розраховані за допомогою рівнянь, складених за законом Ома для хвилі і для опору навантаження:

$$\begin{aligned} u_{зв} &= Z_{xв} i_{зв}; \\ u_n &= U_0 + u_{зв} = r_n (i_n - i_{зв}) = -r_n i_{зв}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Звідки

$$\begin{aligned} u_{зв} &= -U_0 Z_{xв} / (Z_{xв} + r_n); \\ i_{зв} &= -U_0 / (Z_{xв} + r_n). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Від'єднання джерела

При від'єднанні лінії від джерела живлення в ній також виникають хвилі. Нехай в лінії з опором навантаження r_n встановився струм $I_n = U_0 / r_n = U_n / r_n$. Якщо в момент $t = 0$ від'єднати джерело енергії рис. 2.3, виникне хвиля з напругою і струмом

$$u_n = -Z_{xв} I_n; i_n = -I_n. \quad (2.27)$$

У результаті накладання цієї хвилі на напругу та струм, що є в лінії $i = I_n + i_n = 0$, а напруга $u = U_n + u_n = U_n - Z_{xв} I_n$.

Якщо струм навантаження I_n менший зарядного струму I_0 при від'єднанні лінії від джерела постійної напруги $U_0 = U_n$, виконується умова $I_n < U_n / Z_{xв}$, тоді напруга лінії $u = U_n - Z_{xв} I_n > 0$, що свідчить про те, що після від'єднання джерела

на пройденій хвилею ділянці збережеться деяка частка напруги того ж знаку. Якщо ж $I_n > U_n/Z_{xв}$, то напруга на ділянці, яку пройшла хвиля, матиме інший знак.

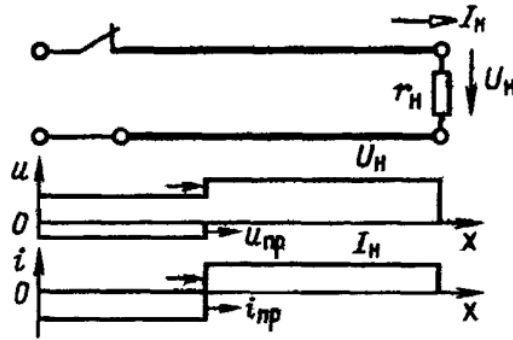


Рис. 2.3. Епюри виникнення хвиль струму і напруги для випадку від'єднання джерела

Від'єднання навантаження

Після від'єднання навантаження у лінії виникає така ж хвиля, як і при від'єднанні джерела. Різниця полягає тільки в тому, що ця хвиля має протилежний знак і розповсюджується в зворотному напрямі.

У результаті накладення цієї хвилі на значення струму, який протікав по лінії $I_n + i_0 = 0$, та на значення напруги $u = U_n + u_0 = U_n + Z_{xв}I_n$ у лінії виникнуть хвилі з прямокутним фронтом епюри яких показано на рис. 2.4.

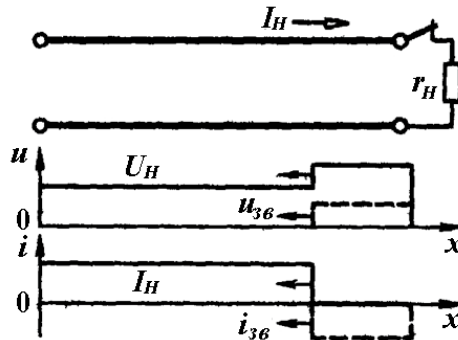


Рис. 2.4. Епюри виникнення хвиль струму і напруги для випадку від'єднання навантаження

При від'єднанні навантаження зворотна хвиля викликає підвищення напруги лінії, яка збільшується пропорційно хвильовому опорі лінії. За допомогою аналогічних міркувань можуть бути знайдені хвилі, що виникають у складніших випадках.

Відбивання хвилі з прямокутним фронтом від кінця лінії

Розглянемо хвилю з прямокутним фронтом

$$u_n = U_0; i_n = I_0 = U_0/Z_{xв},$$

яка рухається по однорідній лінії і досягає навантаження з резистивним опором $Z_2 = r_n$, рис. 2.5, а і б. Коли хвиля дійде до кінця лінії, рис. 4.5 в, вона частково відіб'ється.

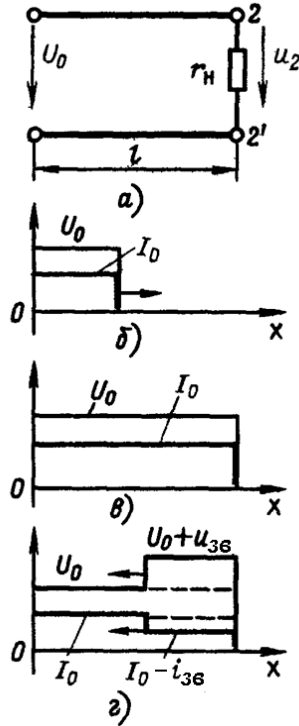


Рис. 2.5. Епюри відбивання хвилі від кінця лінії

Для визначення умов відбивання хвилі знайдемо струм через опір r_n . Напряга у кінці лінії $u_2 = u_n + u_{3b}$, а струм $i_2 = i_n - i_{3b}$. Тому струм зворотної хвилі дорівнює

$$i_{3b} = i_n - i_2 = I_0 - i_2, \quad (2.28)$$

і напруга

$$u_2 = Z_{x6} i_0 = Z_{x6} (I_0 - i_2) = U_0 - Z_{x6} i_2. \quad (2.29)$$

Виразивши з формул (4.12) і (4.13) струм i_2 і напругу u_2 на кінці лінії, отримаємо

$$\begin{aligned} i_2 &= 2U_0 / (r_n + Z_{x6}); \\ u_2 &= 2U_0 r_n / (r_n + Z_{x6}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

З аналізу формули (4.40) можна зробити висновок, що струм через опір r_n дорівнює струму, який можна отримати у схемі з джерелом напруги $2U_0$ і опорам r_n і Z_{x6} з'єднаними послідовно.

Напряга в кінці лінії u_2 залежить від значення і знаку зворотної хвилі, рис. 2.4 г. З формул (2.28) і (2.29) знаходимо

$$\begin{aligned} u_{3b} &= U_0 - Z_{x6} i_2 = nU_0; \\ i_{3b} &= \frac{u_{3b}}{Z_{x6}} = nI_0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

де $n = (r_n - Z_{x6}) / (r_n + Z_{x6})$ - коефіцієнт відбивання.

Отже,

$$\begin{aligned} u_2 &= U_0 + u_{3b} = (1 + n)U_0; \\ i_2 &= I_0 - i_{3b} = (1 - n)I_0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Якщо лінія на кінці розімкнена ($r_n = \infty$), то $n = 1$ і $u_{3\phi} = U_0$, $i_{3\phi} = I_0$, хвиля відбивається повністю без зміни знаку. Напруга на кінці подвоюється: $u_2 = 2U_0$, а струм $i_2 = 0$.

Якщо лінія на кінці коротко замкнена ($r_n = 0$), то $n = -1$ і $u_{3\phi} = -U_0$, $i_{3\phi} = -I_0$, хвиля відбивається повністю зі зміною знаку. Напруга в кінці лінії $u_2 = 0$, а струм $i_2 = 2I_0$.

Якщо опір навантаження більше хвильового опору лінії $r_n > Z_{x\phi}$, тобто $n > 0$, то пряма хвиля зустрічає в кінці лінії більший опір і напруга в кінці лінії зростає, $u_2 = (1+n)U_0 > U_0$. Зворотна хвиля має той же знак, що і пряма. Якщо $r_n < Z_{x\phi}$, то це приводить до зниження напруги в лінії. Відбита хвиля має протилежний знак і в кінці лінії значення напруги зменшується.

Якщо $r_n = Z_{x\phi}$, тобто $n = 0$, то $u_{3\phi} = 0$, $i_{3\phi} = 0$ і зворотна хвиля не утворюється. Як тільки хвиля дійде до кінця, в ланцюзі відразу встановиться незмінний струм, і вся енергія, що передається прямою хвилею поглинається опором r_n (узгоджене навантаження).

При досягненні зворотною хвилею початку лінії вона розглядається як пряма хвиля, яка рухається в зворотному напрямі.

Загальний метод визначення відбитих хвиль

На практиці часто однорідність лінії порушується: до лінії під'єднуються елементи з зосередженими параметрами, інші лінії з різними хвильовими опорами, вузли паралельного під'єднання декількох ліній. Для визначення перехідних режимів при падінні хвилі на вузол, аналогічно комутаціям, розроблений загальний метод, що застосовується при будь-якій схемі з'єднання ліній і ланцюгів з зосередженими параметрами.

Нехай вздовж лінії з хвильовим опором $Z_{x\phi 1}$ рухається хвиля довільної форми з параметрами u_n і i_n , причому $u_n = Z_{x\phi 1} i_n$. Хвиля досягає точки перерізу неоднорідності 2-2', рис 2.6.

В усіх випадках частину ланцюга, приєднану до лінії праворуч перерізу 2-2', можна розглядати як пасивний двополюсник (рис. 2.6, а), напруга u_2 і струм i_2 якого є деякими функціями часу.

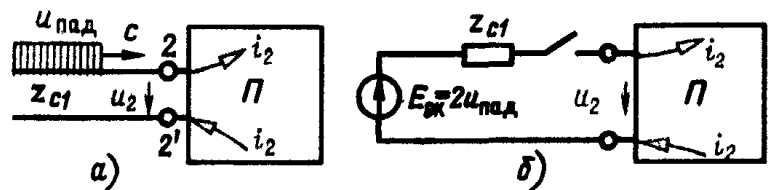


Рис. 2.6. Довга лінія (а) і її схема заміщення (б)

Виводи двополюсника 2-2' відносяться до лінії з хвильовим опором $Z_{x\phi 1}$, напруга на цих виводах дорівнює сумі напруг прямої та зворотної хвиль, а струм – різниці струмів хвиль:

$$\begin{cases} u_2 = u_n + u_{3\phi}; \\ i_2 = i_n - i_{3\phi} = u_n / Z_{x\phi 1} - u_{3\phi} / Z_{x\phi 1}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Вирішивши систему (4.17), отримаємо

$$2u_n = u_2 + Z_{x\phi 1} i_2. \quad (2.34)$$

Рівняння (2.34) є основним розрахунковим рівнянням для визначення напруги і струму в місці відбивання хвилі. З аналізу цього рівняння можна зробити висновок, що струм і напруга лінії в місці відбивання хвилі такі ж, як і при заміні лінії, по якій рухається хвиля, еквівалентною схемою з зосередженими параметрами, що складається з послідовно під'єданого джерела з ЕРС $2u_n$ і хвильового опору $Z_{xв1}$, рис. 2.6, б.

Таким чином, вирішення задачі про перехідний режим у довгій лінії при падінні хвилі на вузол розгалуження може бути зведене до розрахунку перехідного процесу в схемі заміщення із зосередженими параметрами.

На підставі сказаного можна сформулювати наступне правило. **При падінні на вузол хвилі з напругою u_n , яка рухається по лінії з хвильовим опором $Z_{xв}$, напруга і струм в цьому вузлі будуть такими ж, як і при під'єднанні джерела з ЕРС з напругою $2u_n$, і внутрішнім опором $Z_{xв}$ безпосередньо до даного вузла.**

Знаючи напругу u_2 і струм i_2 , легко визначити значення зворотної хвилі.

$$u_{зв} = u_2 - u_n; i_{зв} = i_n - i_2. \quad (2.35)$$

За відомими значеннями напруг і струмів прямої і зворотної хвиль можна знайти розподіл напруги і струму вздовж лінії в будь-який момент часу.

Багаторазові відбивання хвиль з прямокутним фронтом від активного навантаження

Під'єднання джерела

Для дослідження багаторазових відбивань хвиль за наявності поглинення енергії на кінцях лінії розглянемо лінію з навантаженням $r_n = r_2$. Джерело живлення постійної ЕРС E_0 має резистивний внутрішній опір $r_в = r_1$. У загальному випадку $r_2 \neq Z_{xв}$ і $r_1 \neq Z_{xв}$.

Обчислимо коефіцієнти відбивання n_1 і n_2 на початку і кінці лінії:

$$n_1 = (r_1 - Z_{xв}) / (r_1 + Z_{xв}); n_2 = (r_2 - Z_{xв}) / (r_2 + Z_{xв}).$$

Перша пряма хвиля має напругу $u_{n1} = E_0 Z_{xв} / (r_1 + Z_{xв})$, а перша відбита зворотна хвиля - $u_{зв1} = n_2 u_{n1}$. Аналогічно визначаються відбиті хвилі: $u_{n2} = n_1 u_{зв1}$, $u_{зв2} = n_2 u_{n1}$, $u_{n3} = n_1 u_{зв2}$ і т. д.

Таким чином, для k -ої хвилі $u_{звk} = (n_1 n_2)^{k-1} n_2 u_{n1}$, а для $k+1$ відповідно $u_{n(k+1)} = (n_1 n_2)^k u_{n1}$.

Накладання цих хвиль дасть значення напруг (струмів) у будь-який момент часу.

Від'єднання навантаження

Якщо лінія, заряджена до напруги U_0 , розряджається з одного з кінців через резистивний елемент з опором r , то зміна напруги і струму в лінії може бути визначена аналогічно попередньому випадку.

$$i_{n1} = -U_0 / (r + Z_{xв}) = -I;$$

$$u_{n1} = -U_0 Z_{xв} / (r + Z_{xв}) = -Z_{xв} I.$$

Знаходимо коефіцієнти відбивання для початку і кінця лінії: $n_1 = (r - Z_{xв}) / (r + Z_{xв})$, $n_2 = 1$. Струми хвиль

$$i_{3\epsilon 1} = i_{n1} = -I; \quad i_{n2} = n_1 i_{3\epsilon 1} = -n_1 I;$$

$$i_{3\epsilon 2} = i_{n2} = -n_1 I; \quad i_{n3} = n_1 i_{3\epsilon 1} = -n_1^2 I.$$

$$i_{nk} = -n_1^{k-1} I; \quad i_{3\epsilon k} = i_{nk}.$$

Враховуючи рівність $i_{3\epsilon k} = i_{nk}$ можна помітити, що кожна наступна зворотна хвиля струму компенсує попередню пряму хвилю і струм на початку лінії завжди рівний струму останньої прямої хвилі. Струм в опорі r по абсолютному значенню такий же і протилежний за знаком.

Приклади вирішення типових задач

1. Розрахувати еквівалентний опір навантаження до якого під'єднана узгоджувальна лінія: а) довжиною $l = \lambda/2$; б) довжиною $l = \lambda/4$; в) довжиною $l = \lambda/8$, якщо опір навантаження є активним і дорівнює Z_H .

Розв'язок:

Вхідний опір лінії розраховується за формулою:

$$Z_{BX} = Z_{XB} \frac{Z_H + j Z_{XB} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} x}{Z_H j \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} x + Z_{XB}}.$$

1) При $l = \lambda/2$:

$$Z_{BX} = Z_{XB} \frac{Z_H + j Z_{XB} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}}{Z_H j \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} + Z_{XB}} = Z_H;$$

2) При $l = \lambda/4$:

$$Z_{BX} = Z_{XB} \frac{Z_H + j Z_{XB} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}}{Z_H j \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} + Z_{XB}} = \frac{Z_{XB}^2}{Z_H};$$

3) При $l = \lambda/8$:

$$Z_{BX} = Z_{XB} \frac{Z_H + j Z_{XB} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8}}{Z_H j \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} + Z_{XB}} = Z_{XB} \frac{Z_H + j Z_{XB}}{j Z_H + Z_{XB}}.$$

Відповідь: при $l = \lambda/2, Z_{BX} = Z_H$; при $l = \lambda/4, Z_{BX} = \frac{Z_{XB}^2}{Z_H}$; при $l = \lambda/8, Z_{BX} =$

$$Z_{XB} \frac{Z_H + j Z_{XB}}{j Z_H + Z_{XB}}.$$

2. Показати, що довга лінія без втрат з первинними параметрами $L_0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$; $C_0 = 8 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}$, що навантажена на індуктивність $L = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, працює в режимі стоячих хвиль.

Розв'язок:

Відомо, що режим стоячих хвиль існує, якщо коефіцієнт відбивання від кінця лінії n_2 по модулю дорівнює одиниці, $|n_2| = 1$.

Коефіцієнт відбивання n_2 розраховується за формулою:

$$n_2 = \frac{Z_2 - Z_{XB}}{Z_2 + Z_{XB}},$$

де Z_{XB} – хвильовий опір, $Z_{XB} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 50 \text{ Ом}$;

Z_2 – опір навантаження, $Z_2 = j\omega L = 100000\pi \text{ Ом}$

Отже, $|n_2| = \left| \frac{-50 + j\pi \cdot 10^5}{50 + j\pi \cdot 10^5} \right| = 1$.

Відповідь: у довгій лінії існують стоячі хвилі.

3. Розрахувати коефіцієнт відбивання від кінця лінії n_2 і коефіцієнт біжучої хвилі K_6 за умови, що опір навантаження $Z_2 = \frac{2}{3} Z_{XB}$.

Розв'язок:

Коефіцієнт відбивання від кінця лінії n_2 розраховується за формулою:

$$n_2 = \frac{Z_2 - Z_{XB}}{Z_2 + Z_{XB}} = \frac{\frac{2}{3} Z_{XB} - Z_{XB}}{\frac{2}{3} Z_{XB} + Z_{XB}} = \frac{-\frac{1}{3} Z_{XB}}{\frac{5}{3} Z_{XB}} = \frac{-Z_{XB}}{5 Z_{XB}} = \frac{-1}{5} = -0,2.$$

Коефіцієнт біжучої хвилі K_6 :

$$K_6 = \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|} = \frac{1 - 0,2}{1 + 0,2} = \frac{0,8}{1,2} = \frac{2}{3} = 0,67.$$

Відповідь: $n_2 = -0,2$, $K_6 = 0,67$.

4. До кінця лінії без втрат з хвильовим опором $Z_{XB} = 100 \text{ Ом}$ підключене навантаження. При довжині хвилі $\lambda = 3 \text{ м}$ найближчий до навантаження вузол напруги знаходиться на відстані $x = 0,25 \text{ м}$ від кінця лінії. Визначити величину і характер навантаження.

Розв'язок:

Закон зміни напруги відносно точки під'єднання до навантаження в лінії без втрат задається рівнянням:

$$U' = \frac{1}{2} U'_2 \left(1 + \frac{Z_{XB}}{Z_2}\right) \left(e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x} + n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x}\right) \quad (1)$$

За умови, що на відстані $x = 0.25$ є вузол напруги, з рівняння (1) випливає:

$$e^{j\frac{2\pi}{\lambda}0.25} + \frac{Z_2 - Z_{XB}}{Z_2 + Z_{XB}} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}0.25} = 0. \quad (2)$$

Після підстановки відомих значень у рівняння (2) і вираження вирішення його відносно опору навантаження Z_2 , отримаємо:

$$Z_2 = \frac{100 \left(1 - e^{j\frac{\pi}{3}}\right)}{1 + e^{j\frac{\pi}{3}}} = -57.735j.$$

Оскільки опір навантаження уявний з від'ємним знаком, характер навантаження ємнісний.

Відповідь: характер навантаження ємнісний.

5. До джерела напруги $E = 30$ В з внутрішнім опором $r_{вн} = 2$ Ом під'єднана довга лінія з хвильовим опором $Z_{XB} = 250$ Ом, до кінця якої в свою чергу під'єднано активне навантаження $R_H = 150$ Ом. Розрахувати амплітуду першої прямої і зворотної хвиль напруги і струму u_{n1} , i_{n1} , $u_{зв1}$, $i_{зв1}$.

Розв'язок:

Амплітуда прямої хвилі напруги u_{n1} і струму i_{n1} дорівнює:

$$u_{n1} = \frac{E \cdot Z_{XB}}{r_{вн} + Z_{XB}} = \frac{30 \cdot 250}{2 + 250} = 29,76 \text{ В};$$

$$i_{n1} = \frac{u_{n1}}{Z_{XB}} = 0,12 \text{ А}.$$

Амплітуда зворотної хвилі напруги $u_{зв1}$ і струму $i_{зв1}$

$$u_{зв1} = n_2 \cdot u_{n1};$$

$$i_{зв1} = \frac{u_{зв1}}{Z_{XB}}.$$

визначається через коефіцієнт відбивання від кінця лінії n_2 , що розраховується за формулою:

$$n_2 = \frac{R_H - Z_{XB}}{R_H + Z_{XB}} = \frac{15 - 250}{15 + 250} = -0,887.$$

Отже,

$$u_{зв1} = n_2 \cdot u_{n1} = -0,887 \cdot 29,76 = -26,4 \text{ В};$$

$$i_{зв1} = \frac{U_{зв1}}{Z_{зв}} = -0,1 \text{ А}.$$

Відповідь: $u_{n1} = 29,76 \text{ В}; i_{n1} = 0,12 \text{ А}; u_{зв1} = -26,4 \text{ В}; i_{зв1} = -0,1 \text{ А}.$

6. До джерела напруги $E = 30 \text{ В}$ з внутрішнім опором $r_{вн} = 2 \text{ Ом}$ під'єднана довга лінія з хвильовим опором $Z_{хв} = 250 \text{ Ом}$, до кінця якої в свою чергу під'єднано активне навантаження $R_n = 150 \text{ Ом}$. Розрахувати сумарну напругу u і струм i в лінії на інтервалі часу $t = 0..t_0$ і $t = t_0..2t_0$, де t_0 – час потрібний для руху хвилі з одного кінця довгої лінії в інший. Довжина лінії – l .

Розв'язок:

Скориставшись рішенням попередньої задачі маємо: $u_{n1} = 29,76 \text{ В}; i_{n1} = 0,12 \text{ А}; u_{зв1} = -26,4 \text{ В}; i_{зв1} = -0,1 \text{ А}.$

На інтервалі часу $t = 0..t_0$ у лінії існує лише перша пряма хвиля, отже: для ділянки лінії з координатами $[0..x)$, де $x = l \cdot t/t_0$, $u = u_{n1} = 29,76 \text{ В}; i = i_{n1} = 0,12 \text{ А};$ для ділянки лінії з координатами $[x..l)$ $u = 0; i = 0$, оскільки пряма хвиля ще не досягла цієї ділянки лінії.

На інтервалі часу $t = t_0..2t_0$ у лінії існує перша пряма і зворотня хвилі, тому: для ділянки лінії з координатами $(l-x_1..l]$, де $x_1 = l \cdot t/2t_0$, $u = u_{n1} + u_{зв1} = 3,36 \text{ В}; i = i_{n1} - i_{зв1} = 0,22 \text{ А};$ для ділянки лінії з координатами $[0.. l-x_1]$ $u = u_{n1} = 29,76 \text{ В}; i = i_{n1} = 0,12 \text{ А};$ оскільки зворотня хвиля ще не досягла цієї ділянки лінії.

Відповідь: На інтервалі часу $t = 0..t_0$ на ділянці $[0..x)$ $u = 29,76 \text{ В}; i = 0,12 \text{ А};$ на ділянці $[x..l)$ $u = 0; i = 0;$ на інтервалі часу $t = t_0..2t_0$ на ділянці $(l-x_1..l]$ $u = 3,36 \text{ В}; i = 0,22 \text{ А};$ на ділянці $[0.. l-x_1]$ $u = 29,76 \text{ В}; i = 0,12 \text{ А}.$

7. До джерела напруги $E = 30 \text{ В}$ з внутрішнім опором $r_{вн} = 2 \text{ Ом}$ під'єднана довга лінія з хвильовим опором $Z_{хв} = 250 \text{ Ом}$, до кінця якої в свою чергу під'єднано активне навантаження $R_n = 150 \text{ Ом}$. Розрахувати кількість відбивань від кінця і початку лінії k , після яких амплітуда хвилі зменшиться до рівня менше ніж 5 % від початкового значення.

Розв'язок:

Розрахуємо коефіцієнт відбивання хвилі від початку n_1 і кінця n_2 лінії:

$$n_1 = \frac{r_{\text{BH}} - Z_{\text{XB}}}{r_{\text{BH}} + Z_{\text{XB}}} = \frac{2 - 250}{2 + 250} = -0,984;$$
$$n_2 = \frac{R_{\text{H}} - Z_{\text{XB}}}{R_{\text{H}} + Z_{\text{XB}}} = \frac{15 - 250}{15 + 250} = -0,887.$$

За k пар відбивань від кінця і початку лінії амплітуда прямої хвилі зменшиться до значення $u_{n(k)}$:

$$u_{n(k)} = u_{n(1)} |n_1 n_2|^k.$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$0.05 = |n_1 n_2|^k.$$

Звідки:

$$k > \ln(0.5) / \ln(|n_1 n_2|) = 5.09.$$

Відповідь: $k > 5$.

Задачі для самостійного вирішення

1. Розрахувати еквівалентний опір навантаження до якого під'єднана узгоджувальна лінія без втрат довжиною $l = 10$ м, якщо частота напруги становить $f = 100$ кГц, опір навантаження дорівнює $Z_{\text{H}} = 5$ Ом, а первинні параметри лінії становлять $L_0 = 10^{-6}$ Гн/м, $C_0 = 10^{-8}$ Ф/м.
2. Показати, що довга лінія без втрат з первинними параметрами $L_0 = 6 \cdot 10^{-4}$ Гн/м; $C_0 = 8 \cdot 10^{-7}$ Ф/м, що навантажена на ємність $C = 4 \cdot 10^{-5}$ Ф, працює в режимі стоячих хвиль.
3. Розрахувати коефіцієнт відбивання від кінця лінії n_2 і коефіцієнт біжучої хвилі K_{δ} за умови, що опір навантаження $Z_2 = \frac{1}{5} Z_{\text{XB}}$.
4. До кінця лінії без втрат з хвильовим опором $Z_{\text{XB}} = 30$ Ом підключене навантаження. При довжині хвилі $\lambda = 8$ м найближчий до навантаження пучність струму знаходиться на відстані $x = 0.4$ м від кінця лінії. Визначити величину і характер навантаження.
5. До джерела напруги $E = 20$ В з внутрішнім опором $r_{\text{вн}} = 20$ Ом під'єднана довга лінія з хвильовим опором $Z_{\text{XB}} = 250$ Ом, до кінця якої в свою чергу

під'єднано активне навантаження $R_n = 15$ Ом. Розрахувати амплітуду першої прямої і зворотної хвиль напруги і струму $u_{n1}, i_{n1}, u_{zв1}, i_{zв1}$.

6. До джерела напруги $E = 10$ В з внутрішнім опором $r_{вн} = 2$ Ом під'єднана довга лінія з хвильовим опором $Z_{хв} = 25$ Ом, до кінця якої в свою чергу під'єднано активне навантаження $R_n = 150$ Ом. Побудувати епюри струмів і напруг та амплітуди прямої і зворотної хвилі вздовж лінії на інтервалі часу $t = 0..t_0$ і $t = t_0..2t_0$, де t_0 – час потрібний для руху хвилі з одного кінця довгої лінії в інший. Довжина лінії – l .

7. До джерела напруги $E = 5$ В з внутрішнім опором $r_{вн} = 23$ Ом під'єднана довга лінія з хвильовим опором $Z_{хв} = 50$ Ом, до кінця якої в свою чергу під'єднано активне навантаження $R_n = 50$ Ом. Розрахувати кількість відбивань від кінця і початку лінії k , після яких амплітуда хвилі зменшиться до рівня менше ніж 3 % від початкового значення.

РОЗДІЛ 2. Основні рівняння електромагнітного поля

Практичне заняття № 3

Математичні основи аналізу векторного і скалярного полів. Розрахунок граничних умов при розповсюдженні електромагнітного поля в неоднорідних середовищах

Скалярне поле – область простору, кожна точка якого характеризується деяким значенням скалярної функції. У декартовій системі координат скалярна функція є функцією координат $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Прикладом скалярного поля є поле температур. Якщо поле залежить від часу $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ воно називається нестационарним.

Точки поля $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ з однаковими значеннями, утворюють поверхню, що називається поверхнею рівня або екіпотенціальною поверхнею:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const} = c. \quad (3.1)$$

Надаючи параметру c різні значення, одержимо сімейство поверхонь рівня, розподіл яких у просторі характеризує поле. У випадку поля температур, створеного у ізотропному середовищі точковим джерелом тепла, поверхні рівня є сферами, центром яких є джерело тепла. У випадку нитки нескінченної довжини поверхнями рівня є циліндри, вісь яких співпадає з положенням нитки.

Швидкість зміни скалярного поля характеризується його похідною за певним напрямком. Приріст поля у точці M_0 у напрямку точки M визначається через різницю значень поля у цих точках $\Delta\varphi = \varphi(M_0) - \varphi(M)$ і довжину вектора $\Delta l = M_0M$. Відношення $\Delta\varphi/\Delta l$ визначає середню швидкість зміни скалярного поля на одиницю довжини у заданому напрямку. Границя виразу $\Delta\varphi/\Delta l$ при $\Delta l \rightarrow 0$ називається **похідною скалярної функції** за напрямком. У декартовій системі координат похідна за напрямком розраховується за формулою:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right|_{M_0} \cos(\alpha) + \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right|_{M_0} \cos(\beta) + \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \right|_{M_0} \cos(\gamma), \quad (3.2)$$

де $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ – напрямні косинуси вектора $l = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, які розраховуються за формулами:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{|l|}; \cos(\beta) = \frac{a_2}{|l|}; \cos(\gamma) = \frac{a_3}{|l|}; |l| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (3.3)$$

Вектор, чисельно рівний $d\varphi/dn$ і направлений по нормалі до екіпотенціальної поверхні у бік зростання скаляра φ , називається **градієнтом скаляра**, тобто

$$\text{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n}_0 = \frac{d\varphi}{dx_1} \vec{e}_1 + \frac{d\varphi}{dx_2} \vec{e}_2 + \frac{d\varphi}{dx_3} \vec{e}_3, \quad (3.4)$$

де \vec{n}_0 – орт зовнішньої нормалі,

e_1, e_2, e_3 – одиничні вектори за напрямками осей координат x_1, x_2, x_3 відповідно.

Властивості градієнта:

1. Градієнт направлений по нормалі до поверхні рівня.
2. Градієнт направлений в сторону зростання функції скалярного поля $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

3. Модуль градієнта дорівнює найбільшій похідній за напрямком в даній точці.

$$\max \frac{\partial \varphi}{\partial l} = |\text{grad} \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2}. \quad (3.5)$$

Швидкість зміни скаляра в будь-якому іншому напрямку \vec{l} дорівнює проекції градієнта на цей напрямок

$$\frac{d\varphi}{dl} = \text{grad} \varphi \vec{l} = \text{grad}_l \varphi. \quad (3.6)$$

У напрямках дотичних до поверхні рівня значення φ зовсім не змінюється, тобто $d\varphi / d\tau = 0$.

Векторне поле – область простору, кожна точка якого характеризується деяким значенням вектора. Якщо використовується декартова система координат, векторне поле задається трьома скалярними функціями:

$$\vec{A} = A_1(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_1 + A_2(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_2 + A_3(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_3. \quad (3.7)$$

Якщо векторне поле не залежить від часу воно є стаціонарним, у інакшому випадку – нестаціонарним. Прикладами векторних полів є магнітне, електричне і гравітаційне. Поле градієнта скалярного поля також є векторним. Векторне поле графічно можна характеризувати векторними або силовими лініями. **Векторною або силовою лінією** називається крива, дотична до якої в кожній точці збігається з напрямком векторного поля, рис. 3.1.

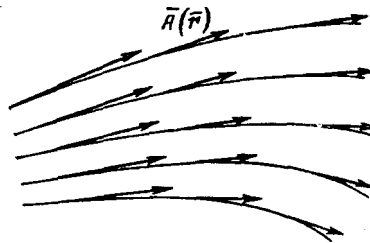


Рис. 3.1. Графічне зображення векторного поля за допомогою силових ліній

Векторні лінії характеризують напрямок поля в точках, через які вони проведені. Проте за допомогою цих ліній можна характеризувати і модуль вектора, проводячи векторні лінії густіше там, де абсолютна величина вектора більше.

Потік векторного поля Π є однією з характеристик векторного поля. Потік поля через гладку поверхню S розраховується за формулою:

$$\Pi = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma. \quad (3.8)$$

Нормаль \vec{n} до поверхні S береться зовнішня.

Більш зручна форма розрахунку потоку векторного поля, виводиться з **теорема Остроградського-Гауса**. Для її запису використовують поняття **дивергенції** векторного поля, яка є однією з диференціальних характеристик векторного поля

$$\text{div} \vec{A} = (\nabla \vec{A}). \quad (3.9)$$

або з урахуванням (3.7) у декартовій системі координат

$$\operatorname{div}\vec{A} = \nabla_i A_i = \frac{dA_i}{dx_i}. \quad (3.10)$$

Отже, за теоремою **Остроградського-Гауса** потік вектора \vec{A} через замкнуту поверхню S дорівнює інтегралу від його дивергенції $\operatorname{div}\vec{A}$, узятому по об'єму V , обмеженому цією поверхнею, тобто

$$\Pi = \oiint_S \vec{A} dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{A} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dV. \quad (3.11)$$

або

$$\oiint_S A_n dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{A} dV, \quad (3.12)$$

де A_n - проекція вектора \vec{A} на напрямок нормалі \vec{n}_0 до поверхні S .

Якщо поверхня S настільки мала, що у всіх точках, що знаходяться в її середині, дивергенцію можна вважати постійною, то

$$\oiint_S A_n dS \approx \operatorname{div}\vec{A} \Delta V,$$

або в граничному випадку нескінченно малої поверхні

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{A}_n dS}{\Delta V}.$$

Отже, **дивергенція** вектора \vec{A} в даній точці дорівнює межі відношення потоку вектора \vec{A} через замкнуту поверхню S , що містить цю точку, до об'єму ΔV , який обмежений поверхнею S .

Дивергенція є скалярною величиною, що характеризує інтенсивність джерел або стоків поля. Точки поля, де $\operatorname{div} < 0$, називаються стоками поля; векторні лінії сходяться до цих точок; точки, де $\operatorname{div} > 0$, називаються джерелами поля, векторні лінії розходяться з цих точок. Якщо $\operatorname{div} = 0$, то поле не має ні джерел, ні стоків.

Циркуляція векторного поля

Циркуляцією Z векторного поля \vec{A} називається лінійний інтеграл, який взято вздовж замкненої орієнтованої кривої L .

$$Z = \oint_L \vec{A} dr. \quad (3.13)$$

Якщо векторне поле задано в декартовій системі координат, циркуляція векторного поля дорівнює:

$$Z = \oint_L (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3). \quad (3.14)$$

Диференційною характеристикою циркуляції векторного поля є **ротор або вихор** векторного поля \vec{A} . Звичайна форма запису:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3. \quad (3.15)$$

Операторна форма запису:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = [\nabla\vec{A}].$$

Матрична форма запису:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_3 \\ d & d & d \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ A_1 & \cdots & A_2 & \cdots & A_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема Стокса. Циркуляція вектора \vec{A} по замкнутому контуру L дорівнює потокові $\operatorname{rot}\vec{A}$ через поверхню S , що опирається на цей контур, тобто

$$\oint_L \vec{A} dl = \iint_S \operatorname{rot}\vec{A} dS, \quad (3.16)$$

або

$$\oint_L \vec{A} dl = \iint_S \operatorname{rot}_n \vec{A} dS, \quad (3.17)$$

де rot_n - проекція ротора на напрямок нормалі \vec{n}_0 до поверхні S .

Якщо поверхня ΔS настільки мала, що у всіх її точках значення $\operatorname{rot}_n \vec{A}$ можна вважати постійним, то

$$\oint_L \vec{A} dl \approx \operatorname{rot}_n \vec{A} \Delta S. \quad (3.18)$$

Формула (3.18) справедлива в граничному випадку нескінченно малої поверхні ΔS , тобто

$$\operatorname{rot}_n \vec{A} \approx \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} dl}{\Delta S}.$$

Проекція rot_n буде найбільшою, коли вектор нормалі збігається по напрямку з ротором. Очевидно, напрямок вектора ротора збігається з напрямком нормалі до площини, у якій циркуляція вектора \vec{A} найбільша. Модуль ротора вектора \vec{A} в даній точці поля дорівнює межі відношення циркуляції вектора \vec{A} , що проходить через цю точку і збігається з площиною, де циркуляція максимальна, до розміру площадки, коли вона стягається в цю точку. Величина ротора характеризує обертальну здатність поля.

Граничні умови

Рівняння Максвелла дозволяють розраховувати параметри поля в будь-який момент часу, як всередині області V , обмеженою поверхнею S («внутрішня» задача електродинаміки), так і для будь-якої точки поза цією областю («зовнішня» задача електродинаміки). Однак для рішення цих рівнянь необхідні додаткові умови, що дозволять визначити постійні інтегрування. До таких умов відносяться умови на межах різнорідних середовищ – граничні умови.

Гранична умова для нормальних складових вектора магнітної індукції
 \vec{B} визначається інтегральним рівнянням:

$$\oint_S \vec{B} dS = 0.$$

Розглянемо циліндр, що перетинає поверхню розділу двох середовищ, рис. 3.2, висота h якого прямує нуля, $h \rightarrow 0$. $\mu_2 \neq \mu_1$

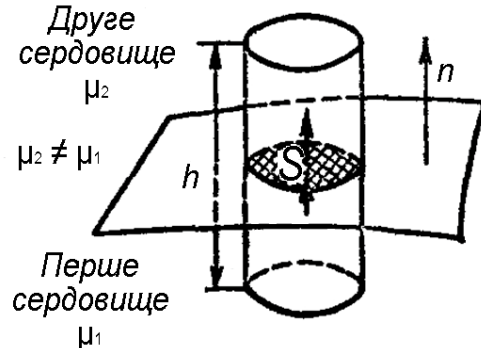


Рис. 3.2. Ілюстрація до розрахунку нормальних складових вектора магнітної індукції \vec{B}

Магнітні поля на верхній і нижній основах циліндра, зважаючи на те, що їх висота відносно межі розділу прямує до нуля, вважаються однорідними, а потік крізь бічну поверхню циліндра – рівним нулю. Тоді потік, який перетинає поверхню S , розташовану на поверхні розділу з боку першого середовища, повинен дорівнювати потоку, що виходить з неї зі сторони другого середовища. При цьому виконуються умови

$$\begin{aligned} B_{n(2)} &= B_{n(1)}; \\ H_{n(2)} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n(1)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отже, нормальні складові вектору магнітної індукції B_n на межі двох середовищ безперервні, а нормальні складові вектора напруженості магнітного поля H_n зазнають стрибка.

Гранична умова для нормальних складових вектора електричної індукції \vec{D} визначається за допомогою рівняння:

$$\oint_S \vec{D} dS = Q. \quad (3.20)$$

Якщо висота циліндра прямує до нуля $h \rightarrow 0$, згідно з рівнянням (3.20) різниця між потоком, що виходить з одного середовища, і потоком, який виходить з іншого середовища, дорівнює розподіленому на площині S заряду $Q = S\chi$, де χ - поверхнева щільність заряду [$\text{Кл}/\text{м}^2$], тому:

$$D_{n(2)} - D_{n(1)} = \chi. \quad (3.21)$$

Тобто за наявності поверхневих зарядів нормальні складові вектора електричної індукції D на межі двох серед зазнають розриву.

Якщо ж поверхневі заряди будуть відсутні, то

$$D_{n(2)} = D_{n(1)};$$

$$E_{n(2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n(1)}.$$

Тобто нормальні складові вектора електричної індукції D безперервні, а нормальні складові вектора напруженості електричного поля E зазнають стрибка.

Граничні умови для тангенціальних складових вектора \vec{E} розраховуються з рівняння

$$\oint_l \vec{E} dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} dS.$$

Розглянемо контур, частково розташований в одному середовищі, частково – в іншому, рис. 3.3.

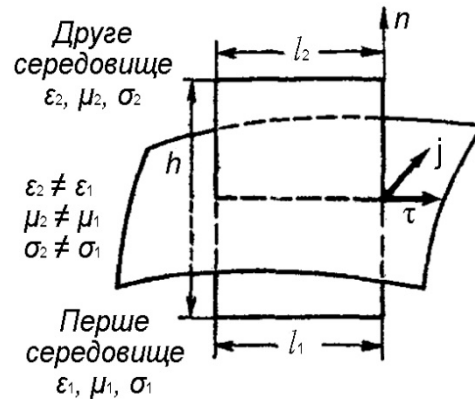


Рис. 3.3. Ілюстрація до розрахунку граничних умов для тангенціальних складових вектора \vec{E}

Якщо вважати довжину контуру відносно малою, тоді електричне поле на окремих його ділянках є однорідним. При $h \rightarrow 0$ і $l_1 \rightarrow l_2$ права частина рівняння дорівнює нулю. У результаті цього $E_{\tau(2)}l_2 - E_{\tau(1)}l_1 = 0$. Отже,

$$E_{\tau(2)} = E_{\tau(1)}.$$

При цьому

$$D_{\tau(2)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{\tau(1)}.$$

Тобто на межі розділу двох середовищ тангенціальні складові вектора напруженості електричного поля \vec{E} безперервні, а тангенціальні складові вектора електричної індукції \vec{D} зазнають стрибка.

Гранична умова для тангенціальних складових напруженості магнітного поля \vec{H} визначається рівнянням

$$\oint_l \vec{H} dl = \int_S \left(\vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS.$$

Аналогічно попередньому випадку, в межі при $h \rightarrow 0$

$$H_{\tau(2)} - H_{\tau(1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \vec{\delta} h = \delta_{нов},$$

де $\delta_{нов}$ - поверхнева щільність струму [А/м], яка дорівнює значенню струму, який протікає в нескінченно тонкому шарі через одиницю довжини лінії, перпендикулярній напрямку струму.

Таким чином, тангенціальні складові вектору напруженості магнітного поля H на межі двох середовищ зазнають розриву, значення якого дорівнює поверхневій щільності струму в тонкому шарі. Хоч такий струм є абстракцією (може мати місце лише на поверхні ідеального провідника), однак введення його набуває фізичного змісту за умови аналізу високочастотного поля. При цьому в провіднику струм протікає тільки в дуже тонкому поверхневому шарі, в межах якого відбувається стрибок вектору \vec{H} , і за яким поле практично відсутнє.

Якщо поверхневий струм відсутній, то

$$H_{\tau(2)} = H_{\tau(1)};$$

$$B_{\tau(2)} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{\tau(1)}.$$

Тобто за відсутності струму на поверхні розділу двох середовищ тангенціальні складові напруженості магнітного поля H безперервні, а тангенціальні складові вектору магнітної індукції B зазнають стрибка.

Граничні умови для вектора щільності струму $\vec{\delta}$ отримуються з умови безперервності тангенціальних складових напруженості електричного поля \vec{E} .

$$\frac{\delta_{\tau(1)}}{\delta_{\tau(2)}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Умова для нормальних складових знаходиться з виразу $div \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, враховуючи, що $\rho = div \vec{D}$. Аналогічно знаходженню граничних умов для нормальних складових \vec{B} і \vec{D} , отримаємо:

$$\delta_{n(1)} + \frac{\partial D_{n(1)}}{\partial t} = \delta_{n(2)} + \frac{\partial D_{n(2)}}{\partial t}.$$

З урахуванням виразу (3.21)

$$\delta_{n(1)} = \delta_{n(2)} + \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

При $\chi = 0$ або в випадку стаціонарного поля

$$\delta_{n(1)} = \delta_{n(2)}.$$

Таким чином, тангенціальні складові струму на поверхні розділу середовищ зазнають стрибка, а його нормальні складові за відсутності поверхневих зарядів або в випадку стаціонарного поля безперервні.

Приклади вирішення типових задач

1. Розрахувати похідну скалярного поля $\phi = x \cdot y \cdot z$ у точці $M_0(1;-1;1)$ у напрямку до точки $M(2;3;1)$.

Розв'язок:

Вектор M_0M має такі координати $(1;4;0)$. Довжина вектора $|l| = \sqrt{17}$.

Напрямні косинуси вектора M_0M мають такі значення:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{17}}; \cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}; \cos(\gamma) = 0.$$

Значення часткових похідних у точці M_0 дорівнюють:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{M_0} = yz \Big|_{M_0} = -1; \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{M_0} = xz \Big|_{M_0} = 1; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{M_0} = xy \Big|_{M_0} = -1.$$

$$\text{Отже } \frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{-1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

2. Розрахувати градієнт скалярного поля $\varphi = x - 2y + 3z$.

Розв'язок:

Похідна скалярної функції φ за змінними координат є такою:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1; \frac{d\varphi}{dy} = -2; \frac{d\varphi}{dz} = 3.$$

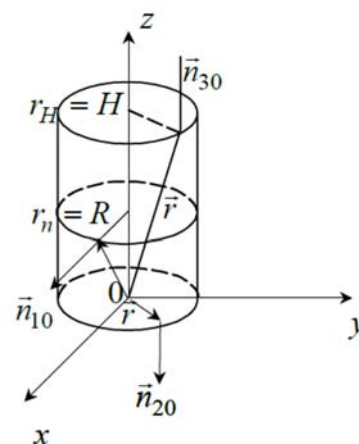
Відповідь: градієнт функції описується вектором $\{1; -2; 3\}$.

3. Розрахувати потік векторного поля радіус-

вектора $\vec{r} = xe_1 + ye_2 + ze_3$ через прямий циліндр радіуса R з центром в початку координат, який має висоту H .

Розв'язок:

Згідно з умовою задачі поверхня S через яку проходить потік векторного поля складається з бічної поверхні і двох основ циліндра. Тому потік вектора можливо виразити через суму трьох інтегралів:



$$\Pi = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{S_6} r_n d\sigma + \iint_{S_{01}} r_n d\sigma + \iint_{S_{02}} r_n d\sigma.$$

На бічній поверхні S_6 зовнішня нормаль n_{10} паралельна площині xOy , проекція r_n на площину xOy дорівнює радіусу циліндра, $r_n = R$. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює

$$\oiint_{S_0} r_n d\sigma = 2\pi RH.$$

Тому

$$\oiint_{S_0} r_n d\sigma = R \oiint_{S_0} d\sigma = 2\pi R^2 H.$$

Зовнішню нормаль до нижньої основи циліндра позначено n_{20} . Проекція радіус-вектора на основу циліндра дорівнює нулю $r_n = 0$. Тому $\oiint_{S_{01}} r_n d\sigma = 0$. На

верхній основі нормаль n_{30} направлено вгору відносно осі Oz , $r_n = H$. Площа основи $\oiint_{S_{02}} d\sigma = \pi R^2$. Тому $\oiint_{S_{02}} r_n d\sigma = \pi R^2 H$. Отже

$$\Pi = \oiint_S (\vec{A}, n) d\sigma = \oiint_{S_0} r_n d\sigma + \oiint_{S_{01}} r_n d\sigma + \oiint_{S_{02}} r_n d\sigma = 3\pi R^2 H.$$

Відповідь: $\Pi = 3\pi R^2 H$.

4. Розрахувати дивергенцію векторного поля $\vec{A} = 2xy\vec{e}_1 + (x-y)\vec{e}_2 + xz^3\vec{e}_3$ у точці $M(1;1;1)$.

Розв'язок:

Розраховуємо часткові похідні векторного поля:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial 2xy}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial A_2}{\partial y} = \frac{\partial (x-y)}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{\partial (xz^3)}{\partial z} = 3xz^2.$$

Відповідь: $\operatorname{div} \vec{A} = 2 - 1 + 3 = 4$.

5. Розрахувати циркуляцію векторного поля $\vec{A} = -y^3\vec{e}_1 + x^3\vec{e}_2$ вздовж еліпса L :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Розв'язок:

Підставивши вираз поля \vec{A} у формулу (5.13), отримаємо:

$$Z = \oint_L (-y^3 dx + x^3 dy).$$

Запишемо рівняння еліпса у параметричних координатах:

$$\begin{cases} x = a \cos(t); \\ y = b \sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Звідки $dx = -a \sin(t) dt$; $dy = b \cos(t) dt$.

Підставимо отримані вирази у формулу для розрахунку циркуляції Z :

$$Z = ab \int_0^{2\pi} (b^2 \sin(t)^4 dt + a^2 \cos(t)^4 dt) = \frac{3}{4} \pi ab (a^2 + b^2).$$

Відповідь: циркуляція поля $Z = \frac{3}{4} \pi ab (a^2 + b^2)$.

6. Розрахувати ротор векторного поля:

$$\vec{A} = (x+z)\vec{e}_1 + (y+z)\vec{e}_2 + (x^2+z)\vec{e}_3.$$

Розв'язок:

Використовуючи формулу (5.15), отримаємо:

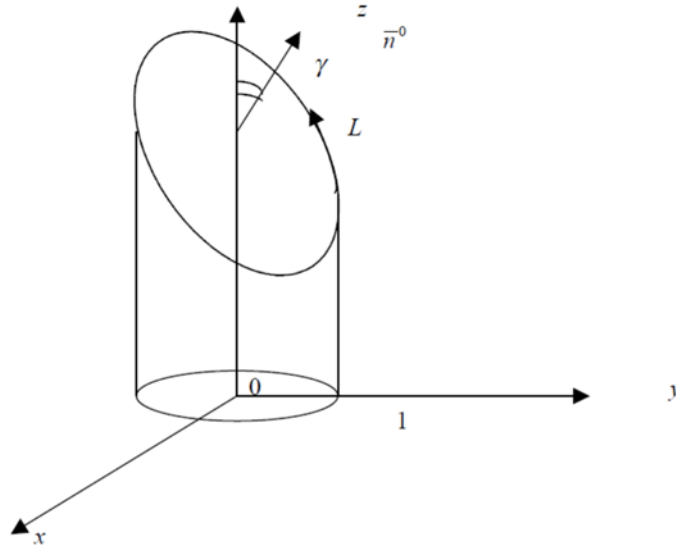
$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dx_3} \\ (x+z)(y+z)(x^2+z) \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 - (2x-1)\vec{e}_2.$$

Відповідь: ротор поля $\operatorname{rot} \vec{A} = -\vec{e}_1 - (2x-1)\vec{e}_2$.

7. Розрахувати циркуляцію векторного поля $\vec{A} = 2y\vec{e}_1 - 3x\vec{e}_2 + 3x\vec{e}_3$, вздовж контура $L: \{x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 3\}$.

Розв'язок:

Контур L , по якому розраховується інтеграл є множиною точок перетину циліндра і площини.



Знаходимо ротор поля:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 2y & -3x & 3x \end{vmatrix} = 0\vec{e}_1 - (3+0)\vec{e}_2 + (-3-2)\vec{e}_3 = -3\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3.$$

Як поверхню S розглядаємо площину $F = x + y + z - 3$.

Нормаль до поверхні S розраховується через градієнт:

$$n = \frac{\operatorname{grad}(F)}{|\operatorname{grad}(F)|} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{3}}.$$

Використовуючи теорему Стокса, отримуємо:

$$\oint_L \vec{A} dl = \iint_S \operatorname{rot}_n \vec{A} dS = \iint_S \frac{-3-5}{\sqrt{3}} dS = \frac{-8}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{-8}{\sqrt{3}} \iint_S \frac{dxdy}{\cos(\gamma)} = -8 \iint_S dxdy = -8\pi.$$

Відповідь: циркуляція векторного поля $\oint_L \vec{A} dl = -8\pi$.

8. В однорідне поле в трансформаторному маслі $\epsilon_1 = 4$ потрапив повітряний пухирець. Знайти максимально допустиму напруженість поля в маслі E_{1max} якщо максимально допустима напруженість поля в повітрі становить 40 кВ / см.

Розв'язок:

На межі середовищ повітряний пухирець - масло нормальна складова вектора електричного зміщення що зазнає розрив $D_{2n} - D_{1n} = \chi$.

За умовою на межі розділу середовищ вільного заряду немає, тому $D_{2n} = D_{1n}$ або $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$. Так як повітряний пухирець $\varepsilon_2 = 2$ можна вважати сферичним, максимальне значення напруженості поля буде в точці, що лежить на осі обертання бульбашки, що збігається з лініями однорідного поля. Нормальна складова напруженості поля в цій точці дорівнює:

$$E_{1n} = \frac{\varepsilon_2 E_{2n}}{\varepsilon_1},$$

(дотична складова тут відсутня). Підставляючи числові значення, знайдемо:

$$E_{1max} = E_{1n} = 10 \text{ кВ / см.}$$

Відповідь: $E_{1max} = 20 \text{ кВ / см.}$

9. В однорідне поле в трансформаторному маслі $\varepsilon_1 = 2$ потрапила крапля води $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$. В одній з точок поверхні каплі напруженість поля $E = 1000 \text{ В/м.}$ Знайти поверхневу густину заряду в цій точці.

Розв'язок:

Оскільки $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ то краплю води можна вважати про- провідною. Всередині провідника поле відсутнє $D_2 = 0$, а на його поверхні лінії поля завжди перпендикулярні поверхні, тобто $D_1 = D_{1n}$. Тому маємо $D_{1n} = \chi$.

Величина поверхневої густини індукованого заряду дорівнює $\chi = \varepsilon_{1a} E_1$ або чисельно $\chi = 17,7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$.

Відповідь: $\chi = 17,7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$.

10. З боку діелектрика $\varepsilon_1 = 3$ на межі поділу двох середовищ відомі складові вектора напруженості поля: дотична $E_{1\tau} = 10 \text{ В / м}$ і нормаль $E_{1n} = 30 \text{ В/м}$. Знайти напруженість поля в цій же точці з боку другого діелектрика $\varepsilon_2 = 2$.

Розв'язок:

Згідно граничним умовам

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \text{ і } E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

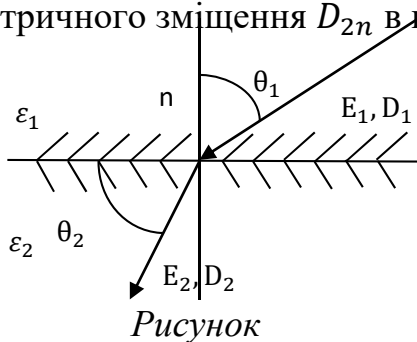
Звідки

$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1 E_{1n}}{\varepsilon_2} \text{ і } E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2}.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо $E_2 = 46,09 \text{ В / м.}$

Відповідь: $E_2 = 46,09 \text{ В / м.}$

11. На межі розділу двох діелектриків $\epsilon_1 = 6$; $\epsilon_2 = 4$ густина вільного поверхневого заряду $\sigma = 50 \text{ мкКл/м}^2$? У точці а (див. рисунок) напруженість поля $E_1 = 60 \text{ кВ / см}$, а кут $\theta_1 = 60^\circ$. Визначити нормальну складову вектора електричного зміщення D_{2n} в цій точці з боку другого діелектрика.



Рисунок

Розв'язок:

Згідно граничними умовами

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$\text{де } D_{1n} = \epsilon_{1a} E_{1n} = \epsilon_{1a} E_1 \cos \theta_1, E_{1\tau} = E_1 \sin \theta_1$$

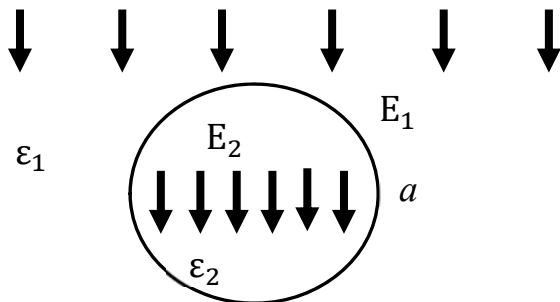
Звідси випливає

$$D_{2n} = \sigma + \epsilon_{1a} E_1 \cos \theta_1$$

Підставляючи числові значення, де отримуємо $D_{2n} = 51,03 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$.

Відповідь: $D_{2n} = 300 \text{ мкКл / м}^2$.

12. У середині протяжного циліндра з оргскла $\epsilon_2 = 4$, внесеного в однорідне поле в повітрі $\epsilon_1 = 1$, встановилося однорідне поле напруженістю $E_2 = 90 \text{ кВ / см}$. Визначити напруженість поля в повітрі E_1 , в точці а (дивись рисунок).



Рисунок

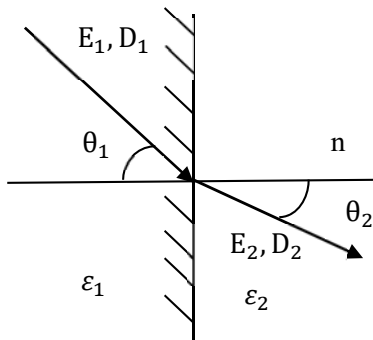
Розв'язок:

У точці а в обох середовищах поле має тільки дотичні складові, причому $E_{1\tau} = E_{2\tau}$

Всередині циліндра поле однорідне з напруженістю $E_2 = E_{2\tau} = 90 \text{ кВ / см}$

Відповідь: $E_{1a} = E_{1\tau} = E_2 = 90 \text{ кВ / см}$.

13. Знайти кут, під яким силові лінії однорідного електричного поля виходять з порцеляни з діелектричною проникністю $\epsilon_1 = 6$ в повітря $\epsilon_2 = 1$. У порцеляні силові лінії по відношенню до нормалі розвложені під кутом $\alpha_1 = 45^\circ$.



Рисунок

порцеляні силові лінії по відношенню до нормалі розвложені під кутом $\alpha_1 = 45^\circ$.

Розв'язок:

Згідно граничним умовам, якщо на межі розділу середовищ немає вільного заряду, силові лінії поля переломлюються за законом:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}$$

Звідси випливає, що шуканий кут $\alpha_2 = \arctg(\epsilon_2 \operatorname{tg} \alpha_1 / \epsilon_1)$

Підставляючи числові значення, знаходимо $\alpha_2 = \arctg(0,16 \cdot 1) = 9,09^\circ$.

Відповідь: $\alpha_2 = 9,09^\circ$.

Задачі для самостійного вирішення

1. Розрахувати похідну скалярного поля $\phi = (x^3 - 1) \cdot \ln(y^2 + 1) \cdot 4^z$ у точці $M_0(3; 5; -2)$ у напрямку до точки $M(4; 35; 10)$ та визначити напрямок та значення найбільшої похідної.

2. Розрахувати потік векторного поля радіус-вектора $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ через прямий циліндр радіуса R та висотою H , якщо початок координат проходить на висоті $H/3$ від нижньої основи циліндра.

3. Записати перше і друге рівняння Максвелла в декартовій системі координат.

4. Розрахувати ротор і дивергенцію векторного поля:

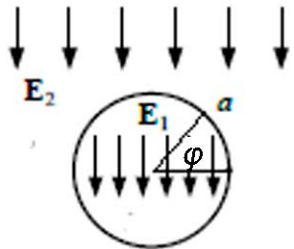
$$\vec{A} = (x^2 + 3z)\vec{e}_1 + (e^y + 3xy)\vec{e}_2 + (x^2 + y)\vec{e}_3.$$

5. Розрахувати циркуляцію векторного поля $\vec{A} = 5y^2\vec{e}_1 - 3xy\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, вздовж контура $L: \{x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

6. На межі розділу двох діелектриків з відносними діелектричними проникностями $\epsilon_1 = 12$, $\epsilon_2 = 3$ щільність поверхневого заряду $\chi = 20$ мкКл/м². В другому діелектрику напруженість поля складає $E_2 = 100$ В/м, кут між напрямком вектора поля і нормаллю до межі розділу діелектриків в другому середовищі

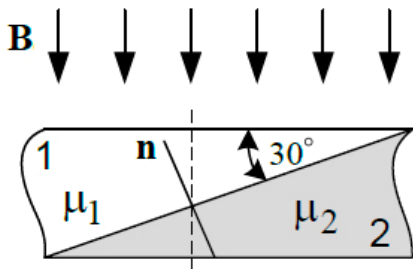
складає $\varphi = 30^\circ$. Розрахувати значення нормальної складової вектора електричного зміщення D_{1n} в першому діелектрику.

7. На межі розподілу двох діелектриків з відносними діелектричними проникностями $\epsilon_1 = 5$, $\epsilon_2 = 7$ відомі складові вектора напруженості поля в другому діелектрику: $E_{2\tau} = 150$ В/м, $E_{2n} = 200$ В/м. Знайти значення складових вектора напруженості у першому діелектрику.

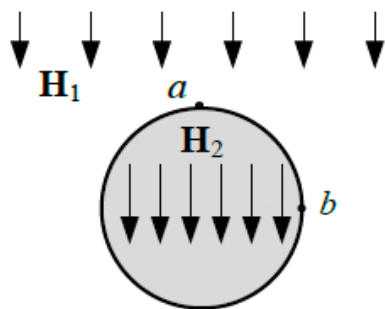


3. Всередині циліндра з оргскла з відносною діелектричною проникністю $\epsilon_1 = 7$, який розміщено у середовищі з відносною діелектричною проникністю $\epsilon_2 = 2$, створено поле з напруженістю $E_2 = 50$ В/м. Визначити напруженість поля у середовищі у точці а ($\varphi = 30^\circ$).

8. Нормальна складова вектора магнітної індукції в повітрі складає $B_{1n} = 0,5$ Тл, а тангенціальна складова по іншу сторону границі розділу відповідно $B_{2n} = 0,3$ Тл. Знайти значення вектора індукції в повітрі B_1 ($\mu_1 = 2$), якщо відносна магнітна проникність другого середовища складає $\mu_2 = 30$.

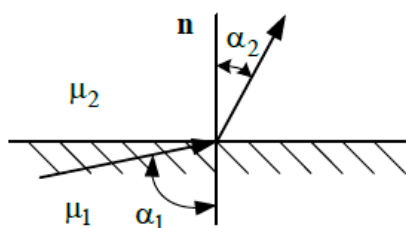


9. Плита, яка складається з двох матеріалів з магнітними проникностями $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 5$, з'єднаних під кутом 30° розміщена в однорідному магнітному полі $B = 1$ Тл перпендикулярно лініям поля. Визначити значення тангенціальної і нормальної складової магнітного поля зі сторони другого матеріалу.



10. Всередині сталевого шару з відносною магнітною проникністю $\mu_2 = 100$, який знаходиться під дією магнітного поля з напруженістю H_1 , встановилось поле $H_2 = 100$ А/м. Знайти напруженість магнітного поля в точках а і b зі сторони повітря.

11. Знайти кут α_2 під яким лінії вектора напруженості магнітного поля H



виходять з феромагнітного матеріалу з відносною магнітною проникністю $\mu_1 = 150$ в середовище з магнітною проникністю $\mu_2 = 2$. Значення кута $\alpha_1 = 50^\circ$.

Практичне заняття № 4

Електростатичне поле. Теорема Гауса

Статичне поле – поле в просторі без струмів, незмінне у часі. Електричне поле, утворюване нерухомими зарядами, називається **електростатичним**. Магнітне поле, створюване зарядами, що рівномірно рухаються, але траєкторії яких не входять в область поля, називається **магнітостатичним**.

Вважаючи в рівняннях $\partial / \partial t = 0$ і $\vec{\delta} = 0$, одержимо дві незалежних системи рівнянь: електростатики

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \end{aligned}$$

і магнітостатики

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Електростатичне поле

Електростатичне поле, створюється нерухомими зарядами. Нерухомі заряди, звичайно зосереджені на провідниках і на діелектриках. Це можуть бути: а) заряди надлишкові, тобто додані даному тілу ззовні; при цьому створюється заряджений провідник або заряджений діелектрик, що несе заряд $|q| > 0$; б) заряди, індуковані зовнішнім полем, у яке внесене дане тіло; у цьому випадку створюється відповідно поляризований провідник або поляризований діелектрик, причому його заряд $|q| = 0$.

Так як в провідниках завжди є вільні електрони, то в процесі утворення статичних зарядів у провідному тілі виникає струм. Протікає він доти, поки напруженість електричного поля усередині провідника не стане рівною нулю, а заряди розподіляться по поверхні провідника, створюючи навколо нього в просторі електростатичне поле. Умова $\vec{E} = 0$ всередині провідника відповідає відсутності руху зарядів, тобто умові електростатичного поля. На відміну від провідника, всередині діелектрика $\vec{E} \neq 0$.

Електростатичне поле описується рівняннями

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi; \vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (4.1)$$

і задовольняє граничним умовам

$$\begin{aligned} D_{n(2)} - D_{n(1)} &= \chi; \\ E_{\tau(2)} &= E_{\tau(1)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рівняння (4.1) і (4.2) підтверджують, що в електростатичному полі електричні силові лінії не замкнуті і починаються та закінчуються на зарядах.

Так як \vec{E} - сила, що діє на одиничний заряд, що знаходиться у даному полі, то при переміщенні його уздовж шляху dl робота сил поля дорівнює:

$$dU = (\vec{E} dl) = E_i dx_i.$$

При переміщенні одиничного заряду з точки поля M в точку поля M' повна робота

$$U = \int_M^{M'} E_i dx_i.$$

Так як $E_i dx_i = -grad \varphi dx_i = -d\varphi$ то

$$U = - \int_M^{M'} d\varphi = \varphi - \varphi',$$

де φ' - потенціал поля в точці M' , φ - у точці M , U – різниця потенціалів цих точок, яка називається електричною напругою.

У багатьох задачах, пов'язаних з електростатичним полем зарядів, розташованих у кінцевій області простору, потенціал нескінченно віддаленої точки зручно приймати рівним нулю. Тоді електростатичний потенціал точки M

$$\varphi = U = \int_M^{\infty} E dl,$$

визначається роботою на переміщення одиничного заряду з даної точки в нескінченність.

У області, де існують заряди, потенціал φ визначається рівнянням Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

рішення якого має вигляд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{\rho}{r} dV.$$

В області, де заряди відсутні, потенціал визначається рівнянням Лапласа

$$\Delta \varphi = 0.$$

При вирішенні рівнянь Пуассона і Лапласа постійні інтегрування знаходять із забезпечення граничних умов, що утворюються з умов

$$D_{n(2)} - D_{n(1)} = \chi;$$

$$E_{\tau(2)} = E_{\tau(1)},$$

і зводяться до наступного:

а) при переході через поверхню розділу двох середовищ потенціал залишається незмінним, тобто

$$\varphi_{(2)} = \varphi_{(1)}.$$

у іншому випадку напруженість поля, яка визначається похідною потенціалу по напрямку, оберталася б у нескінченність, що фізично неможливо;

б) на межі двох діелектриків

$$-\varepsilon_{a(2)} \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial n} + \varepsilon_{a(1)} \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial n} = \chi; \quad \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \tau}.$$

в) на межі провідник-діелектрик

$$\varepsilon_{a(2)} \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial n} = -\chi; \quad \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \tau} = 0.$$

У середовищі, що не містить зарядів електростатичне поле описується системою рівнянь

$$\operatorname{rot}\vec{E}=0; \operatorname{div}\vec{D}=0; \vec{D}=\varepsilon_a\vec{E}.$$

Енергія електростатичного поля, утвореного системою з n заряджених провідників і об'ємним зарядом, розподіленим в оточуючому їх діелектрику, визначається наступним виразом:

$$W_e = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E}\vec{D} dV = -\frac{1}{2} \int_V \vec{D} \operatorname{grad}\varphi dV.$$

Відповідно до рівняння

$$\vec{D} \operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}(\varphi\vec{D}) - \varphi \operatorname{div}\vec{D}.$$

і теореми Остроградського-Гауса

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi\vec{D}) dV = \oint_S \varphi\vec{D} dS = \oint_{S_0} \varphi\vec{D} dS + \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \varphi\vec{D} dS,$$

де S_0 – поверхня, що обмежує всю систему; S_i – поверхня i -го провідника.

З огляду на попередні рівняння і рівняння $\operatorname{div}\vec{D}=\rho$ одержимо:

$$W_e = -\frac{1}{2} \int_{S_0} \varphi\vec{D} dS - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \varphi\vec{D}_n dS + \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV. \quad (4.3)$$

Якщо заряд зосереджений тільки в цій області (відокремлений заряд), то перший член правої частини рівняння (4.3) дорівнює нулю, тому що в цьому випадку інтегрування можна поширити на безмежний простір і заряд цей можна розглядати як точковий. Дійсно, підставляючи під знак інтегралу вирази для φ і \vec{D} точкового заряду й інтегруючи по поверхні сфери, одержимо:

$$\oint_{S_0} \varphi\vec{D} dS = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{q}{4\varepsilon_a r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2} \rightarrow 0.$$

Тому що на поверхні будь-якого i -го провідника $D_n = -\chi_i$ (нормаль спрямована усередину провідника) і потенціал кожного провідника постійний на всій його поверхні

$$\oint_{S_i} \varphi D_n dS = \varphi_i \oint_{S_i} \chi_i dS = \varphi_i q_i,$$

Де q_i і φ_i - відповідно заряд і потенціал i -го провідника.

Остаточний вигляд для енергії поля

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i. \quad (4.4)$$

Якщо відстані між зарядами q_i достатньо великі, то їх можна розглядати як точкові. Енергія зосереджена не в самих зарядах, а в їхньому електричному полі і розподілена в навколишньому просторі. Перший доданок у правій частині виразу (4.4) є енергією поля заряду, розподіленого в діелектричному середовищі

$$W_p = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV,$$

а другий - енергію поля зарядів, розподілених на провідниках

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i.$$

Інтегральні рівняння електромагнітного поля

Експериментально встановлені наступні закони.

Закон Ампера про збудження магнітного поля струмами (закон повного струму):

$$\oint_l \vec{H} dl = \sum i. \quad (4.5)$$

Циркуляція напруженості магнітного поля \vec{H} по контуру дорівнює сумі струмів, що охоплюються цим контуром, рис. 4.1. Це означає, що **причиною магнітного поля є струм**.

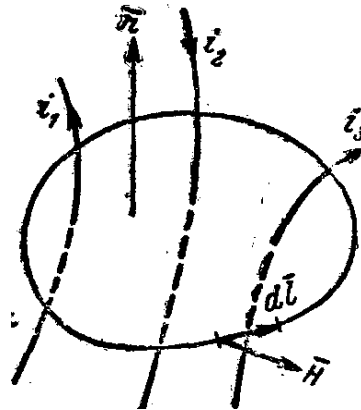


Рис.4.1. Ілюстрація до закону повного струму

Закон електромагнітної індукції (Фарадея):

$$\oint_l \vec{E} dl = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Циркуляція напруженості електричного поля \vec{E} по контуру дорівнює зміні потоку індукції $\Phi[B\vec{\sigma}]$ через площу, обмежену цим контуром, рис. 4.2. Це означає, що **причиною вихрового електричного поля є зміна магнітного потоку**.

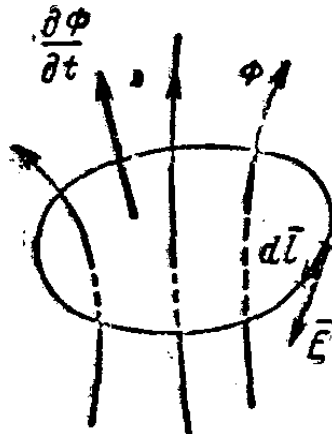


Рис. 4.2. Ілюстрація до закону електромагнітної індукції

Закон взаємодії електричних зарядів (Кулона):

$$\vec{F} = \vec{e} \frac{QQ'}{4\pi\xi_a r^2}. \quad (4.7)$$

Сила взаємодії зарядів обернено пропорційна квадрату відстані між ними. В правій частині рівнянь (4.5) і (4.6) можуть бути зроблені підстановки:

$$i = \int_S \vec{\delta} dS;$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} dS,$$

що визначають електричний струм i і потік магнітної індукції Φ через дану поверхню S .

У загальному випадку праву частину рівняння (4.5) можна записати в вигляді

$$\sum i = \int_S (\vec{\delta} + \vec{\delta}_{zm}) dS.$$

Підставляючи цей вираз у (4.5), одержуємо перше інтегральне рівняння електромагнітного поля:

$$\oint_L \vec{H} dl = \int_S \left(\vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS. \quad (4.8)$$

Друге інтегральне рівняння електромагнітного поля має вид:

$$\oint_L \vec{E} dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} dS. \quad (4.9)$$

Вважаючи в виразі (4.7), що $Q' \ll Q$, і розглядаючи Q' як пробний заряд, можна визначити напруженість електричного поля \vec{E} , через заряд Q в точці розміщення, що створюється пробним зарядом в вигляді

$$\vec{E} = \vec{e} \frac{Q}{4\pi\xi_a r^2}. \quad (4.10)$$

На підставі виразу (4.10), визначаючи потік електричної індукції через поверхню сфери радіусу r , можна написати рівняння

$$Q = \oint_S \vec{D} dS, \quad (4.11)$$

що виражає теорему Гауса: *потік електричної індукції через замкнуту поверхню S дорівнює електричному заряду, розташованому в об'ємі, обмеженому цією поверхнею.* У загальному випадку заряд можна представити у вигляді

$$Q = \int_V \rho dV,$$

де ρ [κ/m^3] – об'ємна щільність заряду.

Підставляючи останній вираз до (4.11), одержуємо третє інтегральне рівняння

$$\oint_S \vec{D} dS = \int_V \rho dV, \quad (4.12)$$

що є узагальненням емпіричного факту про переривчастість електричних силових ліній на поверхні зарядів.

Використовуючи вираз $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, можемо написати $\text{div} \vec{B} = 0$, бо $\text{div} \text{rot} = 0$. Отже,

$$\int_V \text{div} \vec{B} dV = 0. \quad (4.13)$$

На основі формули (7.13), застосовуючи теорему Остроградського-Гауса, одержуємо четверте інтегральне рівняння, що виражає безперервність ліній магнітної індукції:

$$\oint_S \vec{B} dS = 0. \quad (4.14)$$

Електричний струм визначається величиною заряду, крізь дану поверхню S в одиницю часу

$$i = -\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (4.15)$$

Звідси можна написати інтегральне рівняння безперервності струму, що підтверджує закон збереження заряду:

$$\oint_S \vec{\delta} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (4.16)$$

Диференціальне рівняння Максвела узагальнює закон про переривчастість ліній електричної індукції і одержується з інтегрального рівняння (4.12) з використанням теореми Остроградського-Гауса:

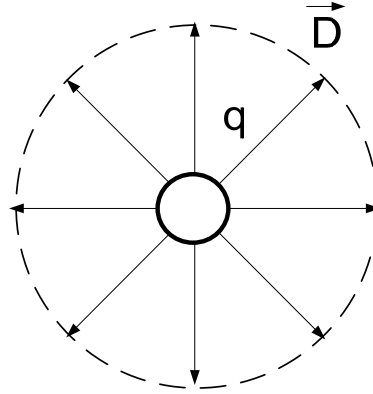
$$\text{div} \vec{D} = \rho.$$

Приклади вирішення типових задач

1. Визначити значення вектора електричного зміщення D на відстані r від точкового заряду q , див рис.

Розв'язок:

Заряд є початком ліній вектора електричного зміщення. З міркувань симетрії випливає, що це радіальні прями, що прямують з однаковою щільністю.



Скористаємося третім рівнянням Максвелла в диференціальній формі:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

де ρ - об'ємна щільність заряду, і проінтегруємо його за об'ємом V , що знаходиться всередині поверхні S :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dv = \int_V \rho dv.$$

Використовуючи у формулі теорему Остроградського-Гауса, отримаємо:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dv = \oint_S \vec{D} d\vec{s}$$

де $d\vec{s} = \vec{n} ds$, а також визначення

$$q = \int_V \rho ds,$$

знаходимо

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q. \quad (4.17)$$

Вираз (4.17) описує закон Гауса або третє рівняння Максвелла в інтегральній формі, згідно з яким потік вектора електричного зміщення через довільну замкнуту поверхню S з зарядом q , зосередженим всередині цієї поверхні, дорівнює цьому заряду. При необмеженій зменшенні V вектор \vec{D} всередині S можна вважати постійним і винести його за знак інтеграла.

Тоді

$$D \cdot 4\pi r^2 = q \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Відповідь: $D = \frac{q}{4\pi r^2}$

2. Електростатичне поле створено вільним зарядом, рівномірно розподіленим тонким шаром по протяжній плоскій поверхні межі розділу двох діелектриків $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 1$ з густиною $\sigma = 1 \text{ нКл/м}^2$. Визначити напруженість поля E_1 на межі розділу середовищ з боку діелектрика ϵ_1 при відсутності зовнішнього поля.

Розв'язок:

При відсутності зовнішнього поля (крім поля вільного заряду, розподіленого на межі розділу середовищ) вектори електричного поля E і D в силу симетрії матимуть тільки нормальні складові, спрямовані в різні боки від межі розділу. Виділивши на межі розділу середовищ невеликий циліндр, бічна поверхня якого нормалізована поверхні, а основи ΔS лежать по обидві сторони шару і застосувавши теорему Гаусса, отримаємо

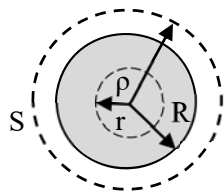
$$D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = \sigma\Delta S.$$

З огляду на це рівність, після скорочення на ΔS , отримуємо: $2D_{1n} = \sigma$. Напруженості поля з боку діелектрика ϵ_1 буде дорівнювати

$$E_1 = E_{1n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_{1a}}, \text{ де } \epsilon_{1a} = \epsilon_1\epsilon_0.$$

Підставляючи числові дані, знайдемо $E_1 = 0,282 \text{ кВ/м}$.

Відповідь: $E_1 = 0,282 \text{ кВ/м}$.



3. Об'ємний заряд розподілений рівномірно з густиною ρ всередині непровідної сфери радіусом R . Визначити напруженість поля E всередині $r < R$ і поза $r > R$ сфери (r - координата сферичної системи). Проникність середовища всюди ϵ_a .

Розв'язок:

Оскільки заряд розподілений в сфері рівномірно, то вектори D і E в сферичній системі координат мають тільки радіальні складові E_r , і D_r . Для будь-якої поверхні радіусом r за теоремою Гаусса з урахуванням сказаного маємо:

$$\oint D dS = D_r \oint dS = q.$$

де q - заряд, який потрапив всередину поверхні S .

Поверхня S - сферична, тому

$$D = r_0 D_r = r_0 \frac{q}{4\pi r^2} \text{ або } E = r_0 E_r = r_0 \frac{q}{4\pi \epsilon_a r^2},$$

де r_0 - орт радіуса r - сферичної системи координат.

Визначимо величину заряду q для двох випадків $r < R$ і $r > R$. В першому випадку вільний заряд, який потрапив всередину поверхні інтегрування, рівний $q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, в другому $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Підставивши дані значення у формулу для вектора E , отримуємо:

$$E = r_0 \frac{\rho r}{3\epsilon_a} \text{ при } r < R \text{ і } E = r_0 \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_a} \text{ при } r > R .$$

Зауваження. В області $r > R$ поле сфери з зарядом, рівномірно розподіленим всередині непровідної сфери, збігається з полем провідної сфери того ж радіуса, на поверхні якого рівномірно розподілений той же заряд q , а також з полем точкового заряду q , розміщеним в центрі сферичної системи координат.

$$\text{Відповідь: } E = r_0 \frac{\rho r}{3\epsilon_a} \text{ при } r < R \text{ і } E = r_0 \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_a} \text{ при } r > R .$$

4. По поверхні протяжного металевого циліндру кругового перетину, поміщеного в однорідний діелектрик (ϵ_a), рівномірно розподілений електричний заряд з лінійною густиною σ . Визначити закон зміни напруженості електричного поля E і потенціалу ϕ , приймаючи радіус циліндра рівним R .

Розв'язок:

Поверхня циліндра має всюди один і той же потенціал (еквіпотенційна). Усередині циліндра поля немає: $E=0$. З міркувань симетрії для протяжного циліндра слід прийняти, що вектор напруженості поля перпендикулярний осі циліндра і в точках рівновіддалених від осі циліндра, має однакові значення. Провівши замкнуту циліндричну поверхню S радіусом $r \geq R$, що охоплює одиницю довжини циліндра, і застосувавши до неї теорему Гаусса, можна записати:

$$\oint_S E dS = \frac{q_s}{\epsilon_a} = \frac{2\pi E \cdot 1 \cdot \sigma}{\epsilon_a}.$$

Через основу циліндра потік вектора E відсутній (вектор нормальний осі циліндра), а його бічна поверхня одиничної довжини дорівнює $2\pi r$. З огляду на це, отримуємо

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = E 2\pi r = \frac{2\pi R \sigma}{\epsilon_a}.$$

Звідси випливає $E = \frac{\sigma R}{\epsilon_a r}$.

Зручніше визначати поле протяжне рівномірно зарядженого циліндра через лінійну щільність заряду $\tau = q/l$, де l - довжина циліндра. Тоді для напруженості поля в області $r \geq R$ отримаємо

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}.$$

Щоб знайти потенціал, скористаємося формулою, записавши її з урахуванням осьової симетрії в циліндричній системі координат:

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \text{ або } \varphi = -\frac{\tau}{2\pi} \int \frac{dr}{r} + A,$$

де $A = \text{const}$. Після підстановки і інтегрування, отримуємо

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi} \ln r + A.$$

Зауваження. Поле рівномірно зарядженого циліндра в області $r \geq R$ співпадає з полем рівномірно зарядженої нитки (зарядженої осі) з лінійною густиною $\tau = 2\pi R\sigma$, вміщеної на осі циліндра на відмінність від поля циліндра поле зарядженої осі існує в усьому просторі.

Відповідь: $\varphi = -\frac{\tau}{2\pi} \ln r + A$.

5. У протяжному циліндричному конденсаторі потенціал внутрішньої обмотки з радіусом R_1 дорівнює нулю. Потенціал зовнішньої обмотки радіусом R_2 дорівнює φ_2 . Визначити закон зміни потенціалу $\varphi(r)$ між обкладками конденсатора.

Розв'язок:

Поле має осьову симетрію. Напруженість поля в будь-якій точці між обкладками конденсатора ($R_1 \leq r \leq R_2$), розташованої на відстані r від осі.

$$E = E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}.$$

де τ - заряд внутрішньої обкладки конденсатора на одиницю довжини.

$$\text{Потенціал поля } \varphi = -\int E dr \text{ або } \varphi = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a}$$

де A - постійна інтегрування.

Постійну A знаходимо з граничних умов $r = R_1, \varphi = 0$. Для внутрішньої обкладки конденсатора $r = R_1$ записуємо: $0 = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln R_1 + A$, звідки слідує що $A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln R_1$.

Для зовнішньої обкладки $r = R_2$ відповідно отримуємо:

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right).$$

Виражаючи лінійний заряд τ через заданий потенціал φ_2 і підставивши його в формулу шуканого розподілу потенціалу, знаходимо:

$$\varphi(r) = \frac{2\pi\epsilon_a\varphi_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \cdot 2\pi\epsilon_a} \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) = \frac{\varphi_2 \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Відповідь:
$$\varphi(r) = \frac{\varphi_2 \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Задачі для самостійного вирішення

1. Об'ємний заряд розподілено середині кулі з радіусом $R = 5$ см за законом $\rho(r) = 3r^2$, де r – відстань від центру кулі до заданої точки. Куля знаходиться у вакуумі. Визначити закон, за яким змінюється напруженість поля $E(r)$ всередині кулі ($r \leq R$) і поза нею ($r > R$).

2. По поверхні нескінченного металічного циліндра радіусом $R = 3$ м, розміщеного в діелектрику з відносною діелектричною проникністю $\epsilon = 5$, розподілено заряд з лінійною щільністю $\sigma = 10$ мКл/м. Визначити закон зміни електричного поля $E(r)$ і його потенціалу $\varphi(r)$.

3. Визначити значення вектора електричного зміщення D на відстані r від сферичного заряду радіусом R з щільністю заряду ρ для двох випадків: а) $R < r$, б) $R > r$.

4. Електростатичне поле створено вільним зарядом, рівномірно розподіленим тонким шаром по протяжній плоскій поверхні межі розділу двох діелектриків $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 5$ з густиною $\sigma = 5$ нКл/м². Визначити напруженість поля E_1 на межі розділу середовищ з боку діелектрика ϵ_1 , якщо стороннє поле є постійним і дорівнює $E_{cm} = 300$ В/м.

Практичне заняття № 5

Аналіз стаціонарних і швидкозмінних полів

Швидкозмінне поле – поле, що швидко змінюється в часі; створюється змінним струмом великої частоти. Таке поле описується всією системою рівнянь Максвелла.

Швидкозмінним вважається поле, у якому струм зміщення значно більший струму провідності, тобто

$$\left| \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} \right| \gg |\sigma E|.$$

Співвідношення між значеннями струму провідності і струму зміщення визначається не тільки параметрами середовища σ і ε_a , але істотно залежить від того, наскільки швидко електричне поле змінюється в часі.

Розглянемо випадок, коли електромагнітне поле змінюється в часі за гармонічним законом. З цією метою напишемо перше рівняння Максвелла для комплексних амплітуд векторів \vec{E} і \vec{H} в точках, де немає сторонніх джерел:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = (\sigma + j\omega\varepsilon_a) \dot{\vec{E}}. \quad (5.1)$$

Перепишемо далі (5.1) так:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = i\omega \left(\varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\vec{E}},$$

і введемо позначення

$$\varepsilon_k = \varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (5.2)$$

Тоді замість (5.1) будемо мати

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = i\omega \varepsilon_k \dot{\vec{E}}. \quad (5.3)$$

Отримане рівняння дозволяє розглядати будь-яке середовище як діелектрик з комплексною діелектричною проникністю ε_k . Співвідношення між значеннями дійсної частини ε_a і уявної частини σ/ω комплексної діелектричної проникності ε_k даного середовища дозволяє визначити, чи є це середовище провідником, діелектриком або напівпровідником.

Середовище може вважатися провідником, якщо $\sigma \gg \varepsilon_a \omega$, і діелектриком, якщо $\sigma \ll \varepsilon_a \omega$.

Для кожного середовища можливо визначити значення граничної частоти ω_{gp} , при якій амплітуди струмів провідності і зміщення рівні між собою

$$\omega_{gp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_a}.$$

На високих частотах ($\omega \gg \omega_{gp}$) в середовищі переважну роль грають струми зміщення. У цьому випадку середовище можна розглядати як діелектрик. Для низьких частот ($\omega \ll \omega_{gp}$) в середовищі переважають струми провідності, тепер уже середовище можна розглядати як провідник. Обчислимо значення ω_{gp} для деяких випадків.

Стаціонарне поле – поле, створюване зарядами, що рівномірно рухаються, тобто постійним струмом. Вважаючи в рівняннях системи (5.3), що $\partial / \partial t = 0$, а $\vec{\delta} \neq 0$ диференціальні рівняння стаціонарного поля мають вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma \vec{E}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{\delta} &= -\partial \rho / \partial t; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho. \end{aligned}$$

Окремими видами стаціонарного поля є електричне поле постійного струму і магнітне поле постійного потоку.

Стаціонарне поле створюється зарядами, які рівномірно рухаються, тобто постійним струмом. Таке поле описується рівняннями:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{\delta}; \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho / \varepsilon_a; \\ \operatorname{div} \vec{\delta} &= 0. \end{aligned}$$

Останнє з цих рівнянь вказує на те, що поле вектора $\vec{\delta}$ соленоїдальне, тобто лінії струму замкнуті.

Хвилеві рівняння при стаціонарному полі переходять в рівняння Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= -\mu_a \vec{\delta}; \\ \Delta \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \end{aligned}$$

Напруженості поля зв'язані з електромагнітними потенціалами співвідношеннями

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \vec{A}; \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \tag{5.4}$$

У області, що не містить сторонніх джерел, як і у випадку статичних полів, рівняння Пуассона переходять у рівняння Лапласа

$$\Delta \vec{A} = 0; \Delta \varphi = 0.$$

Сталі інтегрування при вирішенні рівнянь Пуассона і Лапласа знаходять із забезпечення граничних умов, які можна звести до наступних:

- а) на межі будь-яких середовищ потенціал незмінний, тобто $\varphi_{(1)} = \varphi_{(2)}$;
- б) на межі провідник - провідник

$$\sigma_2 \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial n};$$

в) на межі діелектрик - провідник

$$-\frac{\partial\varphi_{(1)}}{\partial\tau} = -\frac{\partial\varphi_{(2)}}{\partial\tau} = E_{\tau(2)} = \frac{\delta}{\sigma_2};$$

$$-\frac{\partial\varphi_{(1)}}{\partial n} = E_{n(1)} = -\frac{\chi}{\varepsilon_{a1}}.$$

Стаціонарне поле в діелектричному середовищі, що не містить зарядів, і провідника з постійним струмом

$$I = \int_S \vec{\delta} dS,$$

описується наступними рівняннями:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0; \operatorname{div}\vec{E} = 0; \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi; \Delta\varphi = 0. \quad (5.5)$$

Рівняння (5.5) збігаються з рівняннями електростатичного поля. Проте граничні умови стаціонарного поля відрізняються від граничних умов для електростатичного поля. У випадку електростатичного поля поверхня провідника еквіпотенціальна, тобто $E_{\tau} = 0$. У стаціонарному ж полі дотична складова вектора \vec{E} має ненульове значення в напрямку ліній струму, тобто $E_{\tau} = \delta / \sigma \neq 0$, і електричні силові лінії відходять від поверхні провідника не по нормалям, як це має місце в електростатичному полі. У силу цього електричне поле постійного струму поза провідником характеризується складовими

$$E_n \neq 0; E_{\tau} \neq 0.$$

У більшості практичних випадків $E_n \gg E_{\tau}$ і тому зазвичай наявністю поздовжнього поля в навколишньому просторі при розрахунках нехтують. При такому допущенні граничні умови для стаціонарного поля збігаються з умовами для електростатичного поля. Тому при розгляді електричного поля в просторі між провідниками з постійним струмом можна скористатися рішенням відповідних електростатичних задач.

У середині провідника з постійним струмом напруженість електричного поля не дорівнює нулю; оскільки

$$\vec{E} = \frac{\vec{\delta}}{\sigma},$$

тоді як електростатичне поле в цьому випадку відсутнє ($\vec{E} = 0$).

Магнітне поле, утворюване провідником зі струмом, рис. 5.1, у точці $M(r)$ визначається на основі формули $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}$. Так як лінії струму безперервні ($\operatorname{div}\vec{\delta} = 0$), то струм $\vec{\delta}$ постійний у будь-якому перетині провідника, векторний потенціал поля розраховується за формулою:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta}}{r} dV = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \int_L \frac{\vec{\delta}}{r} dS dl = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_L \frac{dl}{r}. \quad (5.6)$$

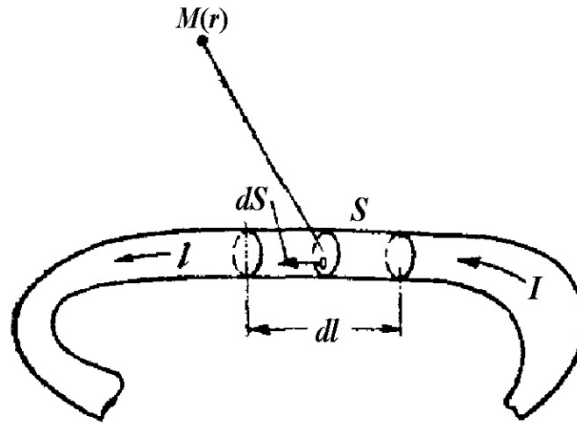


Рис. 5.1. Ілюстрація до визначення поля провідника з постійним струмом

Формулу (5.6) використовують для визначення векторного потенціалу поля на великій відстані (у порівнянні з лінійними розмірами поперечного перетину провідника).

Використовуючи співвідношення (5.4), за допомогою формули (5.6) розраховують напруженість магнітного поля провідника з постійним струмом

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \text{rot} \int_L \frac{dl}{r} = \frac{I}{4\pi} \int_L \text{rot} \left(\frac{dl}{r} \right).$$

Інтегрування проводиться по контуру провідника, а диференціювання в тій точці, де визначається напруженість поля.

На підставі формули

$$\text{rot} \left(\frac{dl}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot} dl + \left[\text{grad} \frac{1}{r} dl \right], \quad (5.7)$$

де $\text{rot} dl = 0$, тому що dl не залежить від координат точки, у якій визначається \vec{H} , а

$$\left[\text{grad} \frac{1}{r} dl \right] = -\frac{1}{r^2} [e_r dl] = \frac{1}{r^2} [dle_r], \quad (5.8)$$

де e_r - орт радіуса-вектора.

З урахуванням співвідношень (5.7), (5.8) знаходимо:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[dle_r]}{r^2}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) є інтегральною формою закону Біо-Савара. У диференціальній формі він має наступний вигляд:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2} [dle_r]. \quad (5.10)$$

З виразів (5.9), (5.10) можна зробити висновок, що напрямок вектора \vec{H} збігається з напрямком обертання правого гвинта, якщо його поступальний рух збігається з напрямком вектора dl (або напрямком струму), що ілюструється на рис. 5.2.

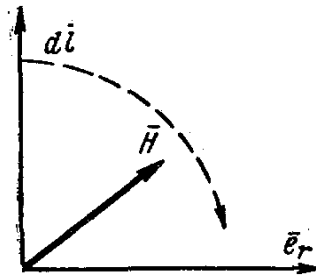


Рис. 5.2. Ілюстрація до визначення напрямку магнітного поля

Якщо густина струму однакова на всьому перетині провідника S , то магнітне поле \vec{H} усередині провідника на відстані r , рис. 5.3, створюється тільки частиною струму, обумовленою співвідношенням

$$I' = \frac{I}{S} \pi r^2.$$

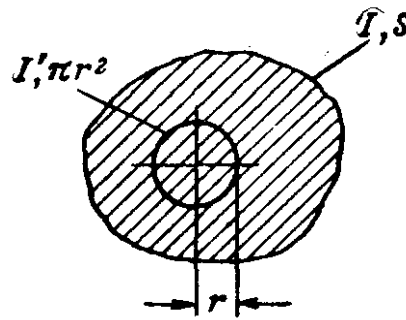
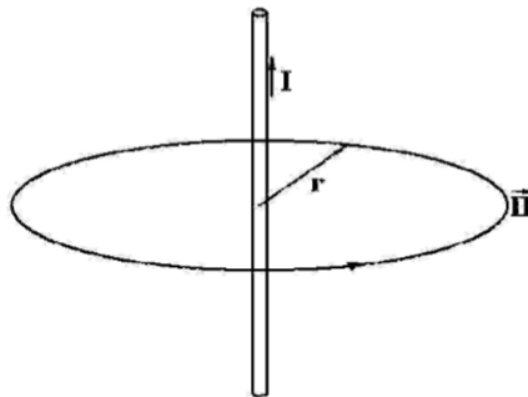


Рис.5.3. Ілюстрація до визначення магнітного поля усередині провідника

Підкреслимо, що магнітне поле усередині провідника має вихровий характер, тому що в цій області $rot\vec{H} = \vec{\delta}$, а поза провідником – потенційний, тому що тут $rot\vec{H} = 0$.

Приклади вирішення типових задач

1. Визначити величину напруженості магнітного поля на відстані $r = 2,5\text{м}$ від постійного прямолінійного струму $I = 5\text{А}$, див. рис.



Рисунок

Розв'язок:

Лінії магнітної індукції мають вигляд замкнутих кривих. З міркувань симетрії випливає, що це концентричні кола, що лежать в площинах, перпендикулярних лінії струму, і охоплюють його. Якщо навколишнє середовище - вакуум, то

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

отже, такий же вигляд мають і лінії вектора \vec{H} .

З першого рівняння Максвелла в інтегральній формі отримаємо:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s},$$

в разі постійного струму ($d/dt = 0$):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{s} = I,$$

де $I = \int_S \vec{j} d\vec{s}$ - потік вектора щільності струму провідності через поверхню S , тобто струм провідності, що перетинає цю поверхню. Обчислюючи циркуляцію \vec{H} по контуру L , що збігається з однією з ліній вектора \vec{H} , знаходимо

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H \cdot 2\pi r,$$

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

і на відстані 2,5 м від прямолінійного постійного струму в 5 А напруженість магнітного поля дорівнює:

$$H = \frac{5}{5\pi} = \pi \text{ А/м.}$$

Відповідь: $H = \pi \text{ А/м}$.

2. Шматок скла, що має відносну діелектричну проникність $\epsilon = 6$ і питому провідність $\sigma = 2 \cdot 10^{-12} \text{ См / м}$, в певний момент часу має об'ємно розподілений заряд. Визначити час, протягом якого заряд в будь-якій точці внутрішньої області зменшиться в e раз.

Розв'язок:

Застосуємо закон збереження заряду (рівняння безперервності):

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Використовуючи закон Ома в диференціальній формі,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Отримуємо

$$\sigma \operatorname{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

На підставі третього рівняння Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

з урахуванням матеріального рівняння

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

знаходимо

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ або } \frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} dt.$$

Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\ln \rho + C = -\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} t,$$

де постійну інтегрування C з міркувань зручності виберемо рівною $C = \ln(1/\rho_0)$. Тоді

$$\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} t \rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} t},$$

де ρ_0 можна визначити як щільність заряду в початковий момент часу. За умовою задачі:

$$\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} t} = \frac{\rho_0}{e} = \rho_0 e^{-1} \rightarrow -\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} t \ln e = -\ln e \rightarrow t = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma};$$

$$t = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma} = \frac{6 \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot 2 \cdot 10^{-12}} = 26,55 \text{ с.}$$

Відповідь: $t = 26,55 \text{ с.}$

3. Визначити відношення щільності струму зміщення до щільності струму провідності в морській воді ($\sigma = 3 \text{ См/м}$, $\varepsilon = 80$, $\mu = 1$) для хвиль з частотами $f_1 = 0.1 \text{ КГц}$, $f_2 = 10 \text{ МГц}$, $f_3 = 1 \text{ ГГц}$.

Розв'язок:

У першому рівнянні Максвелла в диференціальній формі

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

перший доданок в правій частині є вектором щільності струму провідності, який відповідно до закону Ома в диференціальній формі дорівнює

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}.$$

Другий доданок в правій частині – це вектор щільності струму зміщення, який після використання співвідношень:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E};$$

$$\vec{D} = \vec{D}_m e^{i\omega t},$$

запишемо так:

$$\vec{J}_{\text{зм}} = i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

Таким чином, амплітуди щільності струму провідності і струму зміщення мають вигляд

$$\vec{J}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}; \vec{J}_{\text{зм}} = i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

а їх співвідношення

$$\frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} = \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0}{\sigma}.$$

Використовуючи співвідношення, отримуємо:

- для частоти $f_1 = 0.1 \text{ КГц} = 10^2 \text{ Гц}$:

$$\frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} = \frac{2\pi \cdot 10^2 \cdot 90 \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot 3} = 1.67 \cdot 10^{-7};$$

- для частоти $f_2 = 10 \text{ МГц} = 10^7 \text{ Гц}$:

$$\frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} = \frac{2\pi \cdot 10^7 \cdot 90 \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot 3} = 1.67 \cdot 10^{-2};$$

- для частоти $f_3 = 1 \text{ ГГц} = 10^9 \text{ Гц}$:

$$\frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} = \frac{2\pi \cdot 10^9 \cdot 90 \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot 3} = 1.67.$$

Відповідь: - для частоти $f_1 = 0.1 \text{ КГц}$: $\frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} = 1.67 \cdot 10^{-7}$; для частоти $f_2 = 10 \text{ МГц}$: $\frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} = 1.67 \cdot 10^{-2}$; для частоти $f_3 = 1 \text{ ГГц}$: $\frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} = 1.67$.

4. Визначити для частоти $f = 1200 \text{ МГц}$ комплексну діелектричну проникність середовища ε' , яка має відносну проникність $\varepsilon = 60$ і питому провідність $\sigma = 8 \cdot 10^{-3} \text{ См / м}$. Знайти співвідношення між струмами зміщення та провідності в даному середовищі.

Розв'язок:

З першого рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + i\omega \varepsilon_a \vec{E} = (\sigma + i\omega \varepsilon_a) \vec{E} = i\omega \varepsilon'_a \vec{E};$$

$$\varepsilon'_a = \frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = \varepsilon - i \frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_0} = \varepsilon - i \frac{\sigma \lambda}{2\pi c \varepsilon_0} = \varepsilon - i \frac{\sigma \lambda \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^9} \\ = \varepsilon - i60\sigma\lambda;$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^8} = 0,25 \text{ м.}$$

Співвідношення між струмами зміщення та провідності визначається виразом

$$\left| \frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} \right| = \frac{\varepsilon}{60\sigma\lambda},$$

дорівнює

$$\left| \frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} \right| = \frac{60}{60 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25} = 200.$$

$$\text{Відповідь: } \left| \frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пр}}} \right| = 200.$$

5. Між обкладками плоского конденсатора с повітряним заповненням і площею однієї пластини $S = 120 \text{ см}^2$ зосереджено змінне за синусоїдальним законом електричне поле, амплітуда якого $E_m = 10^8 \text{ В / м}$. Якою буде амплітуда струму зміщення конденсатора при частотах поля $f_1 = 300 \text{ Гц}$, $f_2 = 3 \text{ МГц}$, $f_3 = 30 \text{ МГц}$ і $f_4 = 3 \text{ ГГц}$?

Розв'язок:

Вираз для миттєвого значення напруженості електричного поля записується наступним чином:

$$E = E_m \sin \omega t,$$

користуючись рівнянням

$$D = \varepsilon_a E,$$

знаходимо миттєве значення щільності струму зміщення:

$$j_{\text{зм}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_a \omega E_m \cos \omega t,$$

де $\omega = 2\pi f$ - кругова частота коливань.

Амплітуда струму зміщення розраховується за формулою:

$$I_{\text{зм}} = j_{\text{зм}} S = S \varepsilon_a \omega E_m \cos \omega t.$$

Для повітряного конденсатора абсолютне значення діелектричної проникності розраховується як:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Ф/м},$$

тоді амплітуда струму зміщення визначається виразом:

$$I_{m3M} = S\varepsilon_0\omega E_m = 2\pi f S\varepsilon_0 E_m,$$

і чисельно дорівнює:

- для частоти $f_1 = 300 \text{ Гц}$:

$$(I_{m3M})_1 = \frac{2\pi \cdot 300 \cdot 120 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9} \cdot 10^8}{36\pi} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ А};$$

- для частоти $f_2 = 3 \text{ МГц} = 3 \cdot 10^6 \text{ Гц}$:

$$(I_{m3M})_2 = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9} \cdot 10^8}{36\pi} = 2 \cdot 10^2 \text{ А};$$

- для частоти $f_3 = 30 \text{ МГц} = 3 \cdot 10^7 \text{ Гц}$

$$(I_{m3M})_3 = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 120 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9} \cdot 10^8}{36\pi} = 2 \cdot 10^3 \text{ А};$$

- для частоти $f_4 = 3 \text{ ГГц} = 3 \cdot 10^9 \text{ Гц}$

$$(I_{m3M})_4 = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 120 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9} \cdot 10^8}{36\pi} = 2 \cdot 10^5 \text{ А}.$$

Відповідь: $f_1 = 300 \text{ Гц}$, $(I_{m3M})_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ А}$; $f_2 = 3 \text{ МГц}$, $(I_{m3M})_2 = 2 \cdot 10^2 \text{ А}$; $f_3 = 30 \text{ МГц}$, $(I_{m3M})_3 = 2 \cdot 10^3 \text{ А}$; $f_4 = 3 \text{ ГГц}$, $(I_{m3M})_4 = 2 \cdot 10^5 \text{ А}$.

6. У послідовному коливальному контурі протікає синусоїдальний струм з амплітудою $I_m = 4 \text{ А}$ і частотою f . Визначити амплітуду напруженості поля між обкладками контурного конденсатора, що складається з двох плоских пластин площею $S = 200 \text{ см}^2$ кожна, розділених слюдою ($\varepsilon_a = 12\varepsilon_0$) на частотах $f_1 = 2 \text{ МГц}$, $f_2 = 3 \text{ ГГц}$, $f_3 = 2,5 \text{ ГГц}$ і $f_4 = 3,6 \text{ ГГц}$.

Розв'язок:

Запишемо вираз для миттєвого значення напруженості електричного поля між обкладками конденсатора у вигляді

$$E = E_m \cos \omega t.$$

де $\omega = 2\pi f$ - кругова частота коливань.

Щільність струму зміщення визначається таким чином:

$$j_{3M} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_a \omega E_m \sin \omega t,$$

тоді струм зміщення дорівнює:

$$I_{зм} = j_{зм}S = S\varepsilon_a\omega E_m \sin\omega t.$$

Струм зміщення, зосереджений головним чином всередині конденсатора, в кожен момент часу дорівнює по абсолютній величині і протилежний за напрямленням току провідності в ланцюзі, тобто

$$I_{пр} = -I_{зм} = \varepsilon_a\omega E_m S \sin\omega t.$$

Амплітуда струму провідності дорівнює:

$$I_{m пр} = I_m = \varepsilon_a\omega E_m S,$$

звідки

$$E_m = \frac{I_m}{\varepsilon_a\omega S}.$$

У цьому випадку амплітуда напруженості електричного поля дорівнює:

- для частоти $f_1 = 2 \text{ МГц} = 2 \cdot 10^6 \text{ Гц}$:

$$(E_m)_1 = \frac{4 \cdot 36\pi}{12 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ В/м};$$

- для частоти $f_2 = 3 \text{ ГГц} = 3 \cdot 10^9 \text{ Гц}$:

$$(E_m)_2 = \frac{4 \cdot 36\pi}{12 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 10^2 \text{ В/м};$$

- для частоти $f_3 = 2,5 \text{ ГГц} = 2,5 \cdot 10^9 \text{ Гц}$:

$$(E_m)_3 = \frac{4 \cdot 36\pi}{12 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 120 \text{ В/м};$$

- для частоти $f_4 = 3,6 \text{ ГГц} = 3,6 \cdot 10^9 \text{ Гц}$:

$$(E_m)_4 = \frac{4 \cdot 36\pi}{12 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 3,6 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 83,3 \text{ В/м}.$$

Відповідь: $f_1 = 2 \text{ МГц}$, $(E_m)_1 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ В/м}$; $f_2 = 3 \text{ ГГц}$, $(E_m)_2 = 10^2 \text{ В/м}$;
 $f_3 = 2,5 \text{ ГГц}$, $(E_m)_3 = 120 \text{ В/м}$; $f_4 = 3,6 \text{ ГГц}$, $(E_m)_4 = 83,3 \text{ В/м}$.

7. Через індуктивність послідовного коливального контуру, налаштованого в резонанс, проходить синусоїдальний струм з амплітудою $I_m = 2 \text{ А}$ і частотами $f_1 = 1 \text{ МГц}$ і $f_2 = 200 \text{ МГц}$. Визначити амплітуди напруженості поля між обкладками конденсатора з повітряним заповненням, що складається з шести плоских пластин ($N = 6$) площею $S_1 = 20 \text{ см}^2$ кожна.

Розв'язок:

Використовуємо алгоритм попередньої задачі. Запишемо вираз для миттєвого значення напруженості електричного поля між обкладками конденсатора у вигляді

$$E = E_m \cos \omega t,$$

де $\omega = 2\pi f$ - кругова частота коливань.

Щільність струму зміщення визначається як

$$j_{zm} = -\varepsilon_0 \omega E_m \sin \omega t,$$

тоді струм зміщення дорівнює

$$I_{zm} = j_{zm} S = -S \varepsilon_0 \omega E_m \sin \omega t.$$

Струм зміщення, зосереджений головним чином всередині конденсатора, в кожен момент часу дорівнює по абсолютній величині і протилежний за напрямленням току провідності в ланцюзі, тобто

$$I_{пр} = -I_{zm} = \varepsilon_0 \omega E_m S \sin \omega t.$$

Амплітуда струму провідності:

$$I_{m пр} = I_m = \varepsilon_0 \omega E_m S,$$

звідки

$$E_m = \frac{I_m}{\varepsilon_0 \omega S}.$$

Перша відмінність від попередньої задачі полягає в тому, що обкладки конденсатора розділяє не слюда, а повітря і $\varepsilon_0 = \varepsilon_a$. Друга відмінність полягає в тому, що в натуральному вираженні для амплітуди напруженості електричного поля площа пластин S визначається як:

$$S = (N - 1)S_1 = 6S_1,$$

тоді

$$E_m = \frac{I_m}{6\varepsilon_0 \omega S_1}.$$

Виходячи з цього амплітуда напруженості електричного поля дорівнює:

- для частоти $f_1 = 1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц}$:

$$(E_m)_1 = \frac{2 \cdot 36\pi}{6 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м};$$

- для частоти $f_2 = 200 \text{ МГц} = 2 \cdot 10^8 \text{ Гц}$

$$(E_m)_2 = \frac{2 \cdot 36\pi}{6 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 10^4 \text{ В/м.}$$

Відповідь: $f_1 = 1 \text{ МГц}$, $(E_m)_1 = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$; $f_2 = 200 \text{ МГц}$, $(E_m)_2 = 10^4 \text{ В/м}$.

Задачі для самостійного вирішення

1. Визначити величину напруженості магнітного поля на відстані $r = 0,02 \text{ м}$ від центра провідника, діаметром 6 см , по якому протікає постійний струму $I = 10 \text{ А}$.

2. Шматок скла, що має відносну діелектричну проникність $\varepsilon = 30$ і питому провідність $\sigma = 2 \cdot 10^{-11} \text{ См / м}$, мав початковий об'ємно розподілений заряд $\rho_0 = 1 \text{ Кл/м}^3$. Визначити момент часу t_0 , коли щільність заряду ρ зменшиться до $0,1 \text{ Кл/м}^3$.

3. Визначити відношення щільності струму зміщення до щільності струму провідності в ґрунті ($\sigma = 0,1 \text{ См / м}$, $\varepsilon = 200$, $\mu = 1$) для хвиль з частотами $f_1 = 0,1 \text{ КГц}$, $f_2 = 10 \text{ МГц}$, $f_3 = 1 \text{ ГГц}$.

4. Визначити на якій частоті f в середовищі, яке має відносну проникність $\varepsilon = 10$ і питому провідність $\sigma = 20 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}$, струми зміщення та провідності будуть однаковими.

5. Між обкладками плоского конденсатора с повітряним заповненням і площею однієї пластини $S = 100 \text{ см}^2$ зосереджено змінне за синусоїдальним законом електричне поле, амплітуда якого $E_m = 10^8 \text{ В / м}$. Якою буде амплітуда струму зміщення конденсатора при частотах поля $f_1 = 100 \text{ Гц}$, $f_2 = 1 \text{ МГц}$, $f_3 = 10 \text{ МГц}$ і $f_4 = 1 \text{ ГГц}$?

**РОЗДІЛ 3. Особливості розповсюдження і випромінювання
електромагнітних хвиль
Практичне заняття № 6
Плоскі електромагнітні хвилі**

У випадку розповсюдження плоскої електромагнітної хвилі вздовж осі z , її рівняння може описуватись двома системами:

Система А

$$\begin{cases} \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}. \end{cases}$$

Система Б

$$\begin{cases} \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}. \end{cases}$$

Для того, щоб рівняння системи А містило одну невідому, наприклад E_x , продиференціюємо перше рівняння системи по t і підставимо в праву частину значення з другого рівняння, після чого отримаємо

$$\varepsilon_a \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}. \quad (6.1)$$

Помноживши обидві частини рівняння (6.1) на μ_a і позначивши

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}},$$

отримаємо:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (6.2)$$

Рівняння (6.2) відоме за назвою **хвильове рівняння** і використовувалось для опису довгих ліній. Після позначення

$$\xi = \frac{z}{v},$$

отримаємо

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (6.3)$$

Рішенням цього рівняння є довільна функція $F_1(t - \xi)$ або $F_2(t + \xi)$, оскільки обидві вказані функції мають однакові другі похідні по змінним t і ξ . Таким чином

$$E_x = F_1(t - \xi) + F_2(t + \xi),$$

або, враховуючи, що $\xi = \frac{z}{v}$

$$E_x = F_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + F_2\left(t + \frac{z}{v}\right). \quad (6.4)$$

Кожне з двох часткових рішень, що входять до (6.4), є **хвильовою функцією** або хвилею. Справді, розглянемо перше часткове рішення $F_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$.

Візьмемо на вісі z дві довільні точки z_1 і z_2 , нехай $z_1 < z_2$. Значення функції $F_1(t - \frac{z}{v})$ в точках z_1 і z_2 в один и той же момент часу відрізняються, а саме: $F_1(t - \frac{z_1}{v})$ і $F_1(t - \frac{z_2}{v})$.

Однак якщо, якщо взяти значення функції $F_1(t - \frac{z}{v})$ в точці z_1 , в момент t_1 , а в точці z_2 в інший момент часу t_2 , то t_2 можна обрати таким чином, щоб значення функції в точці z_2 в момент t_2 дорівнювало значенню функції в точці z_1 , в момент t_1 . Для цього необхідно виконання рівності

$$t_2 - \frac{z_2}{v} = t_1 - \frac{z_1}{v},$$

або

$$t_2 - t_1 = \frac{z_2 - z_1}{v}. \quad (6.5)$$

З аналізу рівняння (6.5) можна зробити висновок, що якщо значення координати z_2 більше ніж z_1 , то відповідно $t_2 > t_1$. З отриманої рівності випливає, що значення, яке функція F_1 має в довільній точці z_1 у довільний момент часу t_1 повторюється у більш віддаленій точці z_2 пізніше через проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$, пропорційний відстані $\Delta z = z_2 - z_1$ між цими точками, тобто значення функції F_1 ніби рухаються в додатному напрямі осі z зі швидкістю

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (6.6)$$

Ця властивість функції є підставою для назви її хвильової функцією або хвилею. Поверхня, на якій хвильова функція в заданий момент часу має однакові значення, називається **хвильовою поверхнею**. Ясно, що ця поверхня збігається з поверхнею рівних значень аргументу, або фази хвильової функції. У нашому випадку рівняння хвильової поверхні має вигляд $t = \frac{z}{v} = const$, звідки можна зробити висновок, що ця поверхня є площиною $z = const$, яка рухається вздовж вісі z зі швидкістю v , тому така хвиля називається **плоскою**.

Аналізуючи друге часткове рішення рівняння (6.4) $F_2(t + \frac{z}{v})$, можна зробити висновок, що воно відрізняється від першого лише знаком доданку $\frac{z}{v}$, тому друге часткове рішення також є плоскою хвилею, яка рухається зі швидкістю v у від'ємному напрямі вісі z .

Для вирішення системи рівнянь А відносно H_y , продиференціюємо друге рівняння по змінній t . Підставивши значення $\frac{\partial E_x}{\partial t}$ з першого рівняння, отримаємо вираз для H_y аналогічно E_x :

$$H_y = \psi_1(t - \frac{z}{v}) + \psi_2(t + \frac{z}{v}), \quad (6.7)$$

де ψ_1 і ψ_2 — довільні функції.

Для знаходження зв'язку між функціями F і Ψ підставимо (6.4) і (6.7) в перше рівняння системи А, після чого отримаємо:

$$\varepsilon_a F_1'(t - \frac{z}{v}) + \varepsilon_a F_2'(t + \frac{z}{v}) = \frac{1}{v} \Psi_1'(t - \frac{z}{v}) - \frac{1}{v} \Psi_2'(t + \frac{z}{v}).$$

Так як це рівність має виконуватися при будь-яких значеннях t і z , очевидно, можна вважати, що:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a F_1'(t - \frac{z}{v}) &= \frac{1}{v} \Psi_1'(t - \frac{z}{v}); \\ \varepsilon_a F_2'(t + \frac{z}{v}) &= -\frac{1}{v} \Psi_2'(t + \frac{z}{v}). \end{aligned}$$

Звідки

$$\Psi_1(t - \frac{z}{v}) = v \varepsilon_a F_1(t - \frac{z}{v}) = \frac{1}{Z_{xв}} F_1(t - \frac{z}{v}),$$

де $Z_{xв} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ - хвильовий опір середовища.

Аналогічно

$$\Psi_2(t + \frac{z}{v}) = -\frac{1}{Z_{xв}} F_2(t + \frac{z}{v}).$$

Отже, загальні вирази для проєкцій векторів електричного і магнітного полів мають вид:

$$E_x = F_1(t - \frac{z}{v}) + F_2(t + \frac{z}{v}); \quad (6.8)$$

$$H_y = \frac{1}{Z_{xв}} F_1(t - \frac{z}{v}) - \frac{1}{Z_{xв}} F_2(t + \frac{z}{v}). \quad (6.9)$$

Таким чином, рішення рівнянь Максвелла для випадку, коли \vec{E} і \vec{H} залежать лише від однієї декартової координати z , є накладанням двох плоских хвиль, що рухаються в протилежних напрямках осі z зі швидкістю v . У вакуумі

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м}$, $\mu_a = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Гн/м}$. Тому швидкість розповсюдження хвиль дорівнює $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Для середовища швидкість розповсюдження хвиль дорівнює:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Кожна з розглянутих хвиль є хвилею поперечного типу, так як її електричний і магнітний вектори лежать в площинах, перпендикулярних осі поширення z . Складові E_z і H_z вздовж розповсюдження дорівнюють нулю.

Перші доданки у виразах (6.8), (6.9) описують електромагнітну хвилю, що рухається в додатному напрямку, або так звану пряму хвилю. Другі доданки –

електромагнітну хвилю, що рухається у від'ємному напрямку, або зворотну хвилю. З аналізу цих формул можна зробити висновок, що складові електричного і магнітного полів прямої і зворотної хвиль пропорційні один одному і пов'язані співвідношенням

$$\frac{E_{\text{прямої хвилі}}}{H_{\text{прямої хвилі}}} = -\frac{E_{\text{зворотної хвилі}}}{H_{\text{зворотної хвилі}}} = Z_{\text{хв}}. \quad (6.10)$$

З рівняння (6.10) випливає, що як для прямої, так і для зворотної хвилі кількість енергії електричного та магнітного полів є однаковою. Дійсно,

$$\mu_a \frac{H^2}{2} = \mu_a \frac{E^2}{2Z_{\text{хв}}^2} = \varepsilon_a \frac{E^2}{2}. \quad (6.11)$$

На рис. 6.1 а і 6.1 б показана орієнтація векторів \vec{E} і \vec{H} , а також вектора Пойнтінга для прямої і зворотної хвиль. Знак мінус перед співвідношенням E/H в (6.10) для зворотної хвилі свідчить про те, що вектор Пойнтінга направлено в сторону, протилежну осі z .

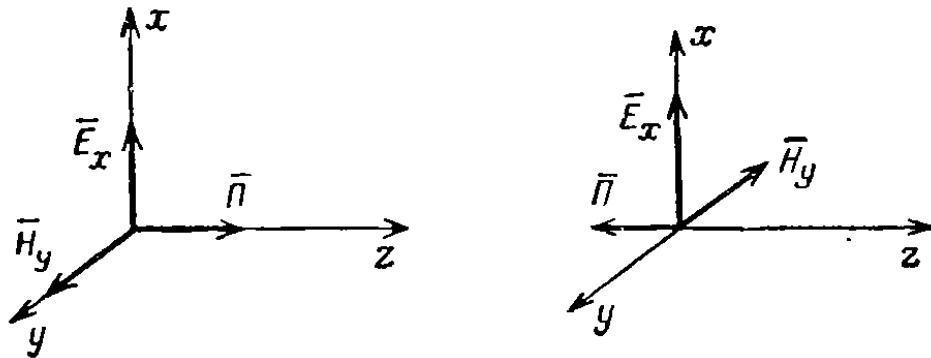


Рис. 6.1. Орієнтація векторів для плоскої хвилі:
а – пряма хвиля; б – зворотна хвиля

Покажемо, що швидкість руху енергії v_e співпадає зі швидкістю хвилевої поверхні v .

Якщо пряма хвиля поширюється в напрямку осі z , то за проміжок часу dt через ділянку S площини, перпендикулярної осі z , пройде кількість енергії dW , яка дорівнює її значенню, укладеної в паралелепіпеді довжиною $v_e \cdot dt$ і перерізом S , тобто

$$dW = \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) v_e dt S,$$

або враховуючи (6.11):

$$dW = \varepsilon_a E^2 v_e dt S. \quad (6.12)$$

З іншого боку, цю величину можна обчислити за допомогою вектора Пойнтінга:

$$dW = \Pi S dt = EHS dt = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} S dt. \quad (6.13)$$

Прирівнявши вирази (6.12) і (6.13), отримаємо

$$v_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = v.$$

Хоча загальне рішення системи рівнянь А представляється у вигляді накладання двох хвиль – прямої і зворотної, у багатьох випадках має місце тільки одна пряма хвиля, що рухається від джерела випромінювання. Зворотна хвиля може існувати, наприклад, тоді, коли середовище, в якому знаходиться джерело поля, обмежене. Поява зворотної хвилі в цьому випадку викликана її відбиттям від межі розділу середовищ. Слід зауважити, що замість термінів «пряма» і «зворотна» хвилі часто застосовують терміни «падаюча» і «відображена» хвилі. Розглянемо окремий випадок прямої (падаючої) хвилі, коли електромагнітне поле в точці $z = 0$ змінюється в часі по гармонічному закону, який в комплексній формі запису має вид $e^{i\omega t}$.

Тоді згідно з формулою (6.9) в довільній точці z поле описується такими формулами:

$$E = E_{nad.m} \cos \omega \left(t - \frac{z}{g} \right) = E_{nad.m} \cos(\omega t - kz);$$

$$H = \frac{E_{nad.m}}{Z_{xg}} \cos \omega \left(t - \frac{z}{g} \right) = \frac{E_{nad.m}}{Z_{xg}} \cos(\omega t - kz),$$

або в комплексній формі

$$E_{\kappa} = E_{nad.m} e^{-ikz} e^{i\omega t}; \quad (6.14)$$

$$H_{\kappa} = \frac{E_{nad.m}}{Z_{xg}} e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad (6.15)$$

де $k = \frac{\omega}{g} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$.

З аналізу формул (6.14), (6.15) можна зробити висновок, що в будь-якій фіксованій точці z складові поля мають незалежні від z амплітуди $E_{nad.m}$ і $H_{nad} = \frac{E_{nad}}{Z_{xg}}$ і різні фази. Зі збільшенням z спостерігається відставання фази на значення kz . Тому коефіцієнт k називають фазовим множником або коефіцієнтом фази. Оскільки цей параметр дорівнює $k = \frac{\omega}{g} = \frac{2\pi}{\lambda}$, де λ - довжина хвилі, що визначається як відстань, на якій фаза змінюється на 2π , цей параметр також називають хвилевим числом.

Приклади вирішення типових задач

1. Плоска хвиля TEM поширюється в однорідному діелектрику параметрами $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. Амплітуда напруженості електричного поля $E_m = 10$ мВ / м, а частота хвилі $f = 300$ МГц. Скласти рівняння напруженостей електричного і магнітного полів в комплексній формі і їх миттєвих значень.

Розв'язок:

Визначимо параметри хвильового процесу:

- коефіцієнт фази

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon a \mu a} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2\pi \frac{f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = k = 2\pi \text{ рад / м};$$

- хвильовий опір

$$Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{\mu a}{\epsilon a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi = W_0 \text{ Ом};$$

- кутова частота

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 = 6\pi \cdot 10^8 \text{ рад / с.}$$

Хвиля TEM поляризована лінійно, оскільки містить тільки один вектор електричного поля E з незмінною орієнтацією. Направимо цей вектор уздовж осі x декартової системи координат. Тоді орт \vec{x}° буде визначати напрямок вектора E . Вектор магнітного поля хвилі TEM сінфазен з вектором E і перпендикулярний йому, тому він спрямований вздовж орта \vec{y}° осі y . Тоді рівняння напруженості електричного поля мають такий вигляд:

- в комплексній формі:

$$\vec{E} = \vec{x}^\circ E_m e^{i(\omega t - kz)} = \vec{x}^\circ 10^{-2} \exp[i(6\pi \cdot 10^8 t - 2\pi z)] \text{ В/м.}$$

- миттєве значення:

$$\vec{E} = \vec{x}^\circ 10^{-2} \cos[2\pi(3 \cdot 10^8 t - z)] \text{ В/м.}$$

Амплітуди напруженостей електромагнітного поля для хвилі TEM пов'язані між собою співвідношенням:

$$\frac{E_m}{H_m} = Z_{\text{хв}} \Rightarrow H_m = E_m / Z_{\text{хв}},$$

звідки

$$H_m = \frac{10^{-2}}{120\pi} = 2.65 \cdot 10^{-5} \text{ А / м.}$$

Рівняння напруженості магнітного поля запишемо так:

- в комплексній формі:

$$\vec{H} = \vec{y}^\circ 2.65 \cdot 10^{-5} \exp[i2\pi(3 \cdot 10^8 t - z)] \text{ А / м.}$$

- миттєве значення:

$$\vec{H} = \vec{y}^\circ 2.65 \cdot 10^{-5} \cos \exp[2\pi(3 \cdot 10^8 t - z)] \text{ А / м.}$$

Відповідь: рівняння напруженості електричного поля:

$$\vec{E} = \vec{x}^\circ E_m e^{i(\omega t - kz)} = \vec{x}^\circ 10^{-2} \exp[i(6\pi \cdot 10^8 t - 2\pi z)] \text{ В/м.}$$

$$\vec{E} = \vec{x}^\circ 10^{-2} \cos[2\pi(3 \cdot 10^8 - z)] \text{ В/м.}$$

Рівняння напруженості магнітного поля:

$$H_m = \frac{10^{-2}}{120\pi} = 2.65 \cdot 10^{-5} \text{ А/м.}$$

$$\vec{H} = \vec{y}^\circ 2.65 \cdot 10^{-5} \exp[i2\pi(3 \cdot 10^8 t - z)] \text{ А/м.}$$

2. Написати рівняння в комплексній формі для миттєвих значень магнітного полів плоскої хвилі ТЕМ, що розповсюджується в необмеженому середовищі з параметрами $\epsilon_a = 3\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$ і $\sigma = 0$. Амплітуда напруженості магнітного поля $H_m = 10^{-6}$ А/м, а частота коливань $f_1 = 200$ МГц, $f_2 = 2$ ГГц.

Розв'язок:

Обчислимо параметри хвильового процесу:

- кутова частота для $f_1 = 200$ МГц = $2 \cdot 10^8$ Гц:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 = 12,57 \cdot 10^8 \text{ рад/с};$$

- кутова частота для $f_2 = 2$ ГГц = $2 \cdot 10^9$ Гц:

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 = 125,7 \cdot 10^8 \text{ рад/с};$$

- фазовий коефіцієнт для частоти $f_1 = 200$ МГц = $2 \cdot 10^8$ Гц

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{v_\phi} = \omega_1 \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \omega_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega_1 \sqrt{3}}{c} = \frac{12,56 \cdot 10^8 \cdot 1,73}{3 \cdot 10^8} = 7,25 \text{ рад/м};$$

- фазовий коефіцієнт для частоти $f_2 = 2$ ГГц = $2 \cdot 10^9$ Гц

$$\beta_2 = \frac{2\pi f_2 \sqrt{3}}{c} = \frac{\omega_2 \sqrt{3}}{c} = \frac{125,7 \cdot 10^8 \cdot 1,73}{3 \cdot 10^8} = 72,5 \text{ рад/м};$$

- хвильовий опір:

$$Z_{xv} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{3\epsilon_0}} = \frac{1}{1,73} Z_{xv} = \frac{377}{1,73} = 218 \text{ Ом};$$

Вектори E і H хвилі ТЕМ синфазні, взаємно перпендикулярні і лежать в площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі (вектора Пойнтінга).

Тоді рівняння напруженості магнітного поля запишемо так:

- в комплексній формі для частоти f_1 :

$$\vec{H}_1 = \vec{y}^\circ H_m e^{i(\omega_1 t - \beta_1 z)} = \vec{y}^\circ 10^{-6} \exp[i(12,57 \cdot 10^8 t - 7,25z)] \text{ А/м};$$

- миттєве значення для частоти f_1 :

$$\vec{H}_1 = \vec{y}^\circ 10^{-6} \cos(12.57 \cdot 10^8 t - 7.25z) \text{ A/m};$$

- в комплексній формі для частоти f_2 :

$$\vec{H}_2 = \vec{y}^\circ H_m e^{i(\omega_2 t - \beta_2 z)} = \vec{y}^\circ \exp[i(125,7 \cdot 10^8 t - 72,5z)] \text{ A/m};$$

- миттєве значення для частоти f_2 :

$$\vec{H}_2 = \vec{y}^\circ 10^{-6} \cos(125,7 \cdot 10^8 t - 72,5z) \text{ A/m}.$$

Відповідь: - в комплексній формі для частоти f_1 :

$$\vec{H}_1 = \vec{y}^\circ H_m e^{i(\omega_1 t - \beta_1 z)} = \vec{y}^\circ 10^{-6} \exp[i(12.57 \cdot 10^8 t - 7.25z)] \text{ A/m};$$

- миттєве значення для частоти f_1 :

$$\vec{H}_1 = \vec{y}^\circ 10^{-6} \cos(12.57 \cdot 10^8 t - 7.25z) \text{ A/m};$$

- в комплексній формі для частоти f_2 :

$$\vec{H}_2 = \vec{y}^\circ H_m e^{i(\omega_2 t - \beta_2 z)} = \vec{y}^\circ \exp[i(125,7 \cdot 10^8 t - 72,5z)] \text{ A/m};$$

- миттєве значення для частоти f_2 :

$$\vec{H}_2 = \vec{y}^\circ 10^{-6} \cos(125,7 \cdot 10^8 t - 72,5z) \text{ A/m}.$$

3. Електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі в напрямку осі z .

Визначити:

- різницю фаз між двома точками з координатами $z_1 = 5$ см і $z_2 = 5,7$ см для хвилі з частотою $f_1 = 10$ ГГц.

- різницю фаз між двома точками з координатами $z_1 = 5,2$ см і $z_2 = 5,8$ см для хвилі з частотою $f_2 = 1,8$ ГГц.

Розв'язок:

Фазова швидкість в діелектричному середовищі визначається як

$$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}},$$

і для вакууму ($\epsilon_a = \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ Ф/м, $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м) дорівнює швидкості світла:

$$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\frac{10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{36\pi}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

1. Фазовий коефіцієнт β отримуємо з виразу:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = k,$$

звідки для частоти $f = f_1 = 10 \text{ ГГц} = 10^{10} \text{ Гц}$ знаходимо

$$k = \frac{2\pi \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10}} = \frac{200\pi}{3} \text{ рад / м}$$

Фазу хвилі на відстані z обчислюємо за формулою

$$\psi = kz,$$

тоді для точки $z_1 = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

$$\psi_1 = kz_1 = \frac{2\pi z_1}{\lambda} = \frac{200\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{3} = \frac{10\pi}{3} \text{ рад},$$

а для точки $z_2 = 5,7 \text{ см} = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

$$\psi_2 = kz_2 = \frac{2\pi z_2}{\lambda} = \frac{200\pi \cdot 5,7 \cdot 10^{-2}}{3} = \frac{11,4\pi}{3} \text{ рад}.$$

Отже, різниця фаз

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 \approx 0,46667\pi \text{ рад} = 84^\circ.$$

2. Фазова постійна (хвильове число) для частоти $f_2 = 1,8 \text{ ГГц} = 1,8 \cdot 10^9 \text{ Гц}$

$$k = \frac{2\pi f_2}{3 \cdot 10^{10}} = 36\pi \text{ рад/м}.$$

Тоді фазу хвилі на відстані $z_1 = 5,2 \text{ см} = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

$$\psi_1 = kz_1 = 36\pi \cdot 5,2 \cdot 10^{-2} = 1,872\pi \text{ рад},$$

а на відстані $z_2 = 5,8 \text{ см} = 5,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

$$\psi_2 = kz_2 = 36\pi \cdot 5,8 \cdot 10^{-2} = 2,088\pi \text{ рад}.$$

Отже, різниця фаз між цими точками становить

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = 2,088\pi - 1,872\pi = 0,216\pi \text{ рад} = 0,216 \cdot 3,14 \cdot 57,3^\circ = 38,9^\circ.$$

Цю задачу можна вирішити іншим методом. Спочатку знайти різницю відстаней, прохідних хвилею (різниця ходу),

$$z = z_2 - z_1,$$

а різницю фаз визначити як $\psi = kz$.

Тоді в першому випадку знаходимо

$$\Delta z = 5,7 - 5,0 = 0,7 \text{ см} = 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

визначаємо різницю фаз (фазовий зсув)

$$\Delta\psi = \frac{200\pi}{3} * 0,7 * 10^{-2} = 1,466\text{рад} = 84^\circ.$$

У другому випадку для різниці ходу

$$\Delta z = z_2 - z_1 = 0.6 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

а для фазового зсуву

$$\psi = 36\pi \cdot 0.6 \cdot 10^{-2} = 0,6786 \text{ рад} = 0,6786 \cdot 57,3^\circ = 38,9^\circ.$$

Відповідь: для частоти $f_1 = 10 \text{ ГГц}$ - $\Delta\psi = 84^\circ$; для частоти $f_2 = 1,8 \text{ ГГц}$ - $\Delta\psi = 38,9^\circ$.

4. Визначити діюче значення напруженості магнітного поля H і щільність потоку потужності хвилі TEM, що має в середовищі з параметрами $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$ амплітуду напруженості електричного поля $E_m = 100 \text{ мкВ/м}$.

Розв'язок:

Знайдемо хвильовий опір середовища:

$$Z_{\text{ХВ}} = \sqrt{\frac{\mu a}{\varepsilon a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} \frac{W_0}{2} = 60\pi = 188.5 \text{ Ом.}$$

Оскільки хвильовий опір визначається як відношення амплітуд напруженостей електричного і магнітного полів в хвилі TEM:

$$W = E_m / H_m ,$$

то для амплітуди напруженості магнітного поля:

$$H_m = \frac{E_m}{W} = 100/188.5 = 0.53 \text{ мкА/м.}$$

Діючі значення напруженостей поля E і H пов'язані з їх амплітудними значеннями співвідношеннями

$$E = \frac{\sqrt{2}}{2} E_m , \quad H = \frac{\sqrt{2}}{2} H_m ,$$

звідки знаходимо

$$E = \frac{100\sqrt{2}}{2} = 70.5 \text{ мкВ/м,}$$

$$H = \frac{0.53\sqrt{2}}{2} = \frac{0.375 \text{ мкА}}{\text{м}}.$$

Значення щільності потоку потужності хвилі TEM запишемо так:

$$P = EH = 70,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,375 \cdot 10^{-6} = 26,4 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2 = 0,264 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/м}^2 .$$

Відповідь: $P = 0,264 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/м}^2$.

5. Хвиля TEM в діелектрику з параметрами $\varepsilon = 9$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ має діюче значення щільності потоку потужності $\Pi = 2$ мкВт/м². Визначити діючі і амплітудні значення напруженостей електричного і магнітного полів хвилі.

Розв'язок:

Знайдемо хвильовий опір середовища

$$W = \sqrt{\frac{\mu a}{\varepsilon a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{9\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{3} = 40\pi = 125.7 \text{ Ом.}$$

Для хвилі TEM вектор Пойнтінга - величина речова і

$$\Pi = EH = \frac{E^2}{W},$$

звідки діюче значення напруженості електричного поля:

$$E = \sqrt{\Pi W} = \sqrt{2 \cdot 10^{-6} \cdot 125.7} = 15.9 \text{ мВ/м.}$$

Амплітудне значення напруженості електричного поля:

$$E_m = E\sqrt{2} = 22,4 \text{ мВ / м.}$$

Значення напруженості магнітного поля отримуємо, використовуючи вираз для хвильового опору хвилі TEM:

$$W = \frac{E}{H}$$

звідки

$$H = \frac{E}{W} = \frac{15.9 \cdot 10^{-3}}{125.7} = 126 \text{ мкА/м.}$$

Тоді амплітудне значення напруженості магнітного поля:

$$H_m = H\sqrt{2} = 126 \cdot 1.41 = 177.7 \text{ мкА / м.}$$

Відповідь: $E = 15.9$ мВ/м; $E_m = 22,4$ мВ / м; $H = 126$ мкА/м; $H_m = 177.7$ мкА / м.

6. Плоска монохроматична лінійно поляризована хвиля поширюється в безмежному просторі з параметрами $\varepsilon_a = 4\varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. Амплітуда напруженості електричного поля $E_m = 50$ мВ / м, кутова частота $\omega = 10^8$ рад / с. Визначити параметри хвильового процесу, напрямок вектора напруженості електричного поля \vec{E} , а також величину і напрямок векторів напруженості магнітного поля \vec{H} , вектора Пойнтінга $\vec{\Pi}$ і об'ємної щільності струму зміщення.

Розв'язок:

Знайдемо параметри хвильового процесу:

- швидкість поширення електромагнітної хвилі в вакуумі:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{36\pi}}} = \sqrt{\frac{36\pi}{10^{-16} \cdot 4\pi}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

- коефіцієнт фази:

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \omega \sqrt{4\varepsilon_0 \mu_0} = 2\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\omega}{c} = \frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \text{ рад/м};$$

- хвильовий опір вакууму:

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^{-9}}} = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом};$$

- хвильовий опір середовища:

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{2} = 60\pi \text{ Ом};$$

- фазова швидкість:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{3 \cdot 10^8}{2} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

- довжина хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = 9,42 \text{ м}.$$

Для знаходження векторів поля введемо декартову систему координат і направимо вектор \vec{E} паралельно осі x . Тоді орт \vec{x}° визначає напрямок вектора \vec{E} . Будемо вважати, що хвиля поширюється уздовж осі z . Тоді орт \vec{z}° встановлює напрямок вектора Пойнтінга. Оскільки хвиля плоска і вектори \vec{E} і \vec{H} взаємно перпендикулярні і лежать в одній площині, то вектор \vec{H} направлений уздовж осі y , а напрямок цього вектора визначається ортом \vec{y}° . Запишемо вираз для вектора \vec{E} в комплексній формі:

$$\vec{E} = \vec{x}^\circ E_m e^{i(\omega(-\beta z))} = \vec{x}^\circ 5 \cdot 10^{-2} \exp \left[i \left(10^8 t - \frac{2}{3} z \right) \right] \text{ В/м}.$$

Миттєве значення вектора \vec{E} виражається дійсною частиною

$$\vec{E} = \vec{x}^\circ E_m \cos(\omega t - \beta z) = \vec{x}^\circ 5 \cdot 10^{-2} \cos\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right) \text{ В/м.}$$

Амплітуду вектора \vec{H} знайдемо із співвідношення

$$H_m = \frac{E_m}{W} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{60\pi} = 2,65 \cdot 10^{-4} \text{ А/м,}$$

тоді вектор \vec{H} в комплексній формі запишемо як

$$\vec{H} = \vec{y}^\circ 2,65 \cdot 10^{-4} \exp\left[i\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right] \text{ А/м,}$$

а його миттєве значення

$$\vec{H} = \vec{y}^\circ 2,65 \cdot 10^{-4} \cos\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right) \text{ А/м.}$$

Запишемо вектор Пойнтінга в комплексній формі

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}] &= \vec{z}^\circ \left\{5 \cdot 10^{-2} \exp\left[i\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right]\right\} \left\{2,65 \cdot 10^{-4} \exp\left[i\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right]\right\} \times \\ &\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{z}^\circ 13,25 \cdot 10^{-6} \exp\left[2i\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right] \text{ Вт/м}^2, \end{aligned}$$

його миттєве значення з урахуванням:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}] &= \vec{z}^\circ \left\{5 \cdot 10^{-2} \cos\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right\} \left\{2,65 \cdot 10^{-4} \cos\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right\} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \vec{z}^\circ 13,25 \cdot 10^{-6} \cos^2\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right) = \\ &= \vec{z}^\circ 6,625 \cdot 10^{-6} \left\{1 + \cos\left[2\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right]\right\} \text{ Вт/м}^2, \end{aligned}$$

а середнє значення

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}\vec{H}^*] = \vec{z}^\circ \frac{1}{2} \left\{5 \cdot 10^{-2} \exp\left[i\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right]\right\} \times \\ &\times 2,65 \cdot 10^{-4} \exp\left[-i\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right] \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{z}^\circ 6,625 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2. \end{aligned}$$

Визначимо вектор об'ємної щільності струмів зміщення $\vec{j}_{\text{см}}$:

- в комплексній формі:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{см}} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = i \vec{x}^\circ \frac{10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{36\pi} \exp\left[i\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right] = \\ &= i \vec{x}^\circ 176,8 \cdot 10^{-6} \exp\left[i\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right)\right] \text{ А/м,} \end{aligned}$$

- миттєве значення:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \text{Re } \vec{j}_{\text{см}} = \vec{x}^\circ 176,8 \cdot 10^{-6} \cos\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right) \text{ А/м.}$$

Відповідь: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \quad \beta = \frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \text{ рад/м}; \quad W_0 = 377 \text{ Ом}; W = 60\pi \text{ Ом};$
 $v_\phi = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \lambda = 9,42 \text{ м}; \vec{E} = \vec{x}^\circ 5 \cdot 10^{-2} \cos\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right) \text{ В/м};$
 $\vec{H} = \vec{y}^\circ 2,65 \cdot 10^{-4} \cos\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right) \text{ А/м}; \quad \vec{\Pi} = \vec{z}^\circ 6,625 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2;$
 $\vec{j}_{\text{см}} = \vec{x}^\circ 176,8 \cdot 10^{-6} \cos\left(10^8 t - \frac{2}{3} z\right) \text{ А/м.}$

Задачі для самостійного вирішення

1. Плоска хвиля TEM поширюється в однорідному діелектрику параметрами $\epsilon_a = 5\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 5 \text{ Сим/м}$. Амплітуда напруженості електричного поля $E_m = 20 \text{ В/м}$, а частота хвилі $f = 10 \text{ МГц}$. Скласти рівняння напруженостей електричного і магнітного полів в комплексній формі і їх миттєвих значень.

2. Електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі в напрямку осі z . Визначити різницю фаз між двома точками з координатами $z_1 = 3 \text{ см}$ і $z_2 = 4 \text{ см}$ для хвилі з частотою $f_1 = 2 \text{ ГГц}$.

3. Визначити діюче значення напруженості магнітного поля H і щільність потоку потужності хвилі TEM, що має в середовищі з параметрами $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = 3\mu_0$, $\sigma = 10^{-2} \text{ Сим/м}$ амплітуду напруженості електричного поля $E_m = 100 \text{ мВ/м}$.

4. Хвиля TEM в діелектрику з параметрами $\epsilon = 3$, $\mu = 4$, $\sigma = 0$ має діюче значення щільності потоку потужності $\Pi = 20 \text{ мкВт/м}^2$. Визначити діючі і амплітудні значення напруженостей електричного і магнітного полів хвилі.

5. Плоска монохроматична лінійно поляризована хвиля поширюється в безмежному просторі з параметрами $\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = 3\mu_0$, $\sigma = 0$. Амплітуда напруженості електричного поля $E_m = 100 \text{ мВ/м}$, кутова частота $\omega = 10^8 \text{ рад/с}$. Визначити вектора Пойнтінга $\vec{\Pi}$ і об'ємної щільності струму зміщення.

Практичне заняття № 7

Відбивання і заломлення плоских електромагнітних хвиль

Основні теоретичні відомості

При поширенні плоскої електромагнітної хвилі в просторі, що представляє собою області з різним значенням параметрів ϵ_a , μ_a , σ і межами розподілу у вигляді площин, виникають відбивання і заломлення хвиль. Комплексні амплітуди цих хвиль пов'язані з комплексною амплітудою падаючої хвилі коефіцієнтом відбивання:

$$\dot{R}_E = \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}; \dot{R}_H = \frac{\dot{H}_{\text{від}}}{\dot{H}_{\text{пад}}},$$

та коефіцієнтом заломлення:

$$\dot{T}_E = \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}; \dot{T}_H = \frac{\dot{H}_{\text{зал}}}{\dot{H}_{\text{пад}}}.$$

Ці коефіцієнти в кожному конкретному випадку можуть бути знайдені на підставі граничних умов на площинах, які поділяють середовища з різними значеннями електродинамічних параметрів. Також можуть використовуватись коефіцієнти відбивання і заломлення для середнього значення щільності потоку потужності:

$$R_{\Pi} = \frac{\Pi_{\text{від}}}{\Pi_{\text{пад}}}; T_{\Pi} = \Pi_{\text{пад}}.$$

Якщо вектор Пойнтінга падаючої хвилі перпендикулярний межі розподілу, то

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}; \quad (7.1)$$

$$\dot{T}_E = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad (7.2)$$

де Z_{c1} - характеристичний опір середовища, в якому розповсюджується падаюча хвиля.

Вираз (7.1) аналогічно формулі для коефіцієнта відбивання за напругою в лінії передачі з хвильовим опором Z_{c1} , навантаженої на опір Z_{c2} . Ця аналогія корисна при визначенні коефіцієнтів R і T для багат шарових середовищ. При падінні плоскої електромагнітної хвилі на межу розподілу не під прямим кутом задача про знаходження коефіцієнтів відбивання і заломлення має просте рішення тільки для середовищ без втрат. Тому наведені співвідношення можна застосовувати тільки тоді, коли втрати в реальних середовищах малі.

При падінні хвиль відносно до межі розподілу не під прямим кутом, напрям розповсюдження задається кутом, вимірюваними відносно нормалі до межі розподілу. Площина, що містить вектор Пойнтінга падаючої хвилі і нормаль до межі розділу, називають площиною падіння. З аналізу граничних умов можна зробити висновок, що кути падіння φ , відбивання φ_0 і заломлення $\varphi_{\text{зал}}$ пов'язані законом дзеркального відображення

$$\varphi = \varphi_0,$$

і законом Снелля

$$\sin(\varphi)/\sin(\varphi_{\text{зал}}) = \beta_2/\beta_1, \quad (7.3)$$

де індекс 1 відноситься до середовища, що містить падаючу хвилю, 2 – заломлену. З урахуванням виразу для коефіцієнта фази β (7.3) можна представити у вигляді:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{\text{зал}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}.$$

Коефіцієнти відбивання R і заломлення T для заданого значення кута падіння залежать від орієнтації векторів електромагнітного поля по відношенню до площини падіння. Якщо вектор E лежить в цій площині, то

$$R_E^{\parallel} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi_{\text{зал}} - Z_{c1} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi_{\text{зал}} + Z_{c1} \cos \varphi}; \quad (7.4)$$

$$T_E^{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi_{\text{зал}} + Z_{c1} \cos \varphi}. \quad (7.5)$$

Якщо вектор E перпендикулярний площині падіння, то коефіцієнти відображення і заломлення виражаються співвідношеннями

$$R_{\bar{E}} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi - Z_{c1} \cos \varphi_{\text{зал}}}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \varphi_{\text{зал}}}; \quad (7.6)$$

$$T_{\bar{E}} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \varphi_{\text{зал}}}. \quad (7.7)$$

Вирази (7.4)-(7.7) при прямуванні φ до нуля переходять в (7.1) і (7.2) незалежно від орієнтації вектора E відносно до площини падіння. Це пов'язано з тим, що при $\varphi = 0$ поняття площини падіння втрачає сенс. Для діелектричних середовищ, у яких $\mu = 1$, коефіцієнти R і T зручно представити в більш компактній формі:

$$R_{\bar{E}} = -\frac{\sin(\varphi - \varphi_{\text{зал}})}{\sin(\varphi + \varphi_{\text{зал}})}; \quad (7.8)$$

$$R_E^{\parallel} = -\frac{\tan(\varphi - \varphi_{\text{зал}})}{\tan(\varphi + \varphi_{\text{зал}})}; \quad (7.9)$$

$$T_{\bar{E}} = \frac{2 \sin \varphi_{\text{зал}} \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_{\text{зал}})}; \quad (7.10)$$

$$T_E^{\parallel} = \frac{2 \sin \varphi_{\text{зал}} \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_{\text{зал}}) \cos(\varphi - \varphi_{\text{зал}})}. \quad (7.11)$$

У всіх наведених раніше формулах при необхідності можна виключити кут заломлення $\varphi_{\text{зал}}$, використовуючи закон (7.3). З формули (7.9) випливає, що при $\varphi + \varphi_{\text{зал}} = \pi/2$ коефіцієнт відбивання для плоских електромагнітних хвиль, вектор E яких лежить в площині падіння, дорівнює нулю, і відбита хвиля на межі розділу двох немагнітних середовищ не виникає. Кут падіння, при якому спостерігається таке явище, називають кутом Брюстера. Значення кута Брюстера для немагнітних середовищ знаходять із співвідношення:

$$\tan \varphi_B = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}.$$

Відповідно до рівності (7.3) при $\varepsilon_2 \mu_2 < \varepsilon_1 \mu_1$ кут заломлення більше кута падіння, тому якщо

$$\varphi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}},$$

то заломлена хвиля буде розповсюджуватись уздовж межі розділу і відповідно до виразів (7.4), (7.6) коефіцієнти відбивання по модулю стають рівними одиниці. З подальшим збільшенням кута падіння модуль коефіцієнтів відбивання залишається рівним одиниці; буде змінюватися тільки фаза коефіцієнтів R^{\parallel} , R^- .

Таке явище називають повним внутрішнім відбиванням. Виключаючи з виразів (7.4), (7.6) кут заломлення, можна знайти, що при $\varphi \geq \varphi_{\text{п}} = \sin^{-1} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 / \varepsilon_1 \mu_1}$ коефіцієнти відбивання дорівнюють:

$$\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \tan^{-1} \left[\frac{\varepsilon_2 \sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\varepsilon_1 \cos \varphi} \right] \right\}; \quad (7.13)$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = -\exp \left\{ 2j \tan^{-1} \left[\frac{\mu_2 \sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\mu_1 \cos \varphi} \right] \right\}. \quad (7.14)$$

Коефіцієнти заломлення T_E^{\perp} і T_E^{\parallel} при повному внутрішньому відбиванні не рівні нулю. Поле в другому середовищі є неоднорідною плоскою хвилею і з урахуванням закону (7.3) її можна представити у вигляді

$$\dot{E}_{\text{зал}} = \dot{T} \dot{E}_{\text{пад}} \exp \{ \beta_1 [z \sqrt{\sin^2 \varphi - (\varepsilon_2 \mu_2 / \varepsilon_1 \mu_1)} - jx \sin \varphi] \}, \quad (7.15)$$

де \dot{T} -коефіцієнт заломлення, рівний

$$\dot{T}_E^{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - j \sqrt{\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}} \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (7.16)$$

якщо вектор E перпендикулярний площині падіння, і

$$\dot{T}_E^{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - j \sqrt{\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}, \quad (7.17)$$

якщо вектор E паралельний площині падіння.

Якщо плоска електромагнітна хвиля падає під довільним кутом на межу розподілу двох середовищ з втратами, то відбиту і заломлену хвилі слід вважати неоднорідними, оскільки площина рівних амплітуд повинна збігатися з межею розподілу. Для реальних металів кут між фазовим фронтом і площиною рівних амплітуд малий, тому можна вважати, що кут заломлення дорівнює нулю. Це дозволяє ввести наближену граничну умову для реальних металів (гранична умова Леонтовича):

$$\dot{E}_r = Z_{\text{смп}} [\dot{H} l_n] \text{ або } |\dot{E}_r| = |Z_{\text{см}} \dot{H}_t|, \quad (7.18)$$

де l_n -одичинний вектор нормалі до поверхні металу, спрямований всередину; $Z_{\text{см}} = \sqrt{j \mu_a \omega / \sigma}$ - характеристичний опір металу; \dot{H}_t - дотична до поверхні металу складова вектора напруженості магнітного поля.

У виразі (7.18) дотичну складову вектора напруженості магнітного поля можна вважати наближено рівною \dot{H}_t , обчислену для ідеального металу. Помилка при цьому буде незначною, так як модуль коефіцієнта відбивання близький до одиниці.

Приклади вирішення типових задач

1. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально з вакууму на межу розділу з середовищем, що має параметри $\varepsilon = 81$, $\mu = 1$, $\sigma = 0,1 \text{ См / м}$. Визначити комплексні коефіцієнти відбиття \dot{R}_E заломлення \dot{T}_E на частоті 100 МГц. Вважаючи, що амплітуда напруженості електричного поля падаючої хвилі в

площині $z = 0$, що збігається з межею поділу, дорівнює 1 В / м , записати вираз для миттєвого значення напруженості електричного поля відбитої хвилі.

Розв'язок:

З огляду на те, що $\tilde{\epsilon} = \epsilon\epsilon_0(1 - j \operatorname{tg}\delta)^{1/2}$, з виразу (10.1) отримуємо

$$\dot{R}_E = \frac{1 - \sqrt{\epsilon}(1 - j \operatorname{tg}\delta)^{1/2}}{1 + \sqrt{\epsilon}(1 - j \operatorname{tg}\delta)^{1/2}}.$$

Обчислення зручніше провести, використовуючи наближене вираження для кореня квадратного

$$\sqrt{(1 - j \operatorname{tg}\delta)} \approx 1 - 0.5 \operatorname{tg}\delta,$$

так як

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon\epsilon_0} = \frac{2}{9} < 1.$$

При цьому коефіцієнт відбивання дорівнює:

$$\dot{R}_E = \frac{8 + j}{10 - j} = -0.8 \exp(-j0.0025),$$

а коефіцієнт заломлення

$$\dot{T}_E = 1 + \dot{R}_E = \frac{2}{10 - j} = 0.2 \exp(-j0.1).$$

З урахуванням отриманого виразу для \dot{R}_E комплексна амплітуда напруженості електричного поля відбитої хвилі

$$\dot{E}_{\text{від}} = \dot{R}_E \dot{E}_{\text{пад}} = -0.8 \exp(-0.025) \exp(j\beta_0 z).$$

Переходячи від комплексних амплітуд до миттєвих значень, знайдемо

$$E_{\text{від}} = -0.8 \cos(2\pi 10^8 t - 0.025 + \beta_0 z).$$

Відповідь: $\dot{R}_E = -0.8 \exp(-j0.0025)$, $\dot{T}_E = 0.2 \exp(-j0.1)$.

2. Під час вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття \dot{R}_E від діелектрика з невідомими параметрами ϵ і μ на частоті 1 ГГц отримано значення $\dot{R}_E = -0.5 e^{-j0.09}$. Визначити параметри діелектрика ϵ , $\operatorname{tg} \delta$, σ , якщо відомо, що $\mu = 1$. Падіння хвилі вважати нормальним.

Розв'язок:

Комплексний коефіцієнт відбивання від межі розподілу між вакуумом і діелектриком з параметрами $\mu=1$ $\tilde{\epsilon} = \epsilon\epsilon_0(1 - j \operatorname{tg}\delta)^{1/2}$

$$\dot{R}_E = \frac{1 - \sqrt{\epsilon}(1 - j \operatorname{tg}\delta)^{1/2}}{1 + \sqrt{\epsilon}(1 - j \operatorname{tg}\delta)^{1/2}},$$

Звідки отримаємо:

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\epsilon} \sqrt{1 - j \operatorname{tg}\delta} e^{-j\pi/2}.$$

Підставляючи у вираз $\dot{R}_E = -|\dot{R}_E|e^{-j\psi}$ і прирівнюючи фази і модулі обох частин, отримаємо:

$$\frac{\delta_3}{2} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{|\dot{R}| \sin\psi}{1 + |\dot{R}| \cos\psi}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{|\dot{R}| \sin\psi}{1 - |\dot{R}| \cos\psi}\right),$$

$$\epsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta} = \frac{1 + |\dot{R}|^2 + 2|\dot{R}| \cos\psi}{1 + |\dot{R}|^2 - 2|\dot{R}| \cos\psi}.$$

Підставивши відомі значення у формули, отримаємо результат:

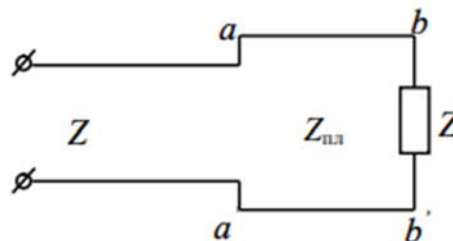
$$\operatorname{tg}\delta = 0.12, \epsilon = 9.0, \sigma = 0.06 \text{ См / м.}$$

Відповідь: $\operatorname{tg}\delta = 0.12, \epsilon = 9.0, \sigma = 0.06 \text{ См / м.}$

3. Плоска електромагнітна хвиля падає по нормалі з вакууму на пластину діелектрика без втрат товщиною d . Визначити умови, при яких пластина стає прозорою для падаючої хвилі. Показник заломлення n вважати відомим.

Розв'язок:

Формула для розрахунку коефіцієнта відбивання (10.1) аналогічна виразу для коефіцієнта відбивання в теорії довгих ліній. Тому задачі відповідає схема заміщення, зображена на рис.



Відбивання від перетину aa' в схемі не буде, якщо вхідний опір лінії в цьому перерізі дорівнює Z_0 , тобто коли електрична довжина відрізка лінії ab кратна половині довжини хвилі. Таким чином, відбивання не буде, якщо

$$d = \frac{\lambda_0}{2n} p = \frac{c}{2nf} p,$$

або

$$f = \frac{c}{2nf} p, p = 1, 2, \dots k.$$

Відповідь: відбивання не буде на частотах $f = \frac{c}{2nf} p, p = 1, 2, \dots k.$

4. Плоска електромагнітна хвиля падає під кутом φ на поверхню металу з електричну провідність σ . Вивести формулу для питомої потужності втрат $P_{\text{пит}}$ на площі в 1 м^2 .

Розв'язок:

Для визначення питомої потужності втрат необхідно вирахувати середнє значення вектора Пойнтінга, спрямованого всередину металу. Якщо поля на поверхні металу відомі, то

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{E}_\tau \dot{H}_\tau].$$

Скористаємося граничною умовою Леонтовича (10.18), згідно з яким

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ Z_M \left[[\dot{H} l_n] \dot{H}_\tau \right] \right\} = \frac{|\dot{H}_\tau|^2}{2} \text{Re}(Z_M) l_n.$$

Оскільки

$$\text{Re}(Z_M) = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}},$$

отримаємо такий вираз для питомої потужності втрат:

$$P_{\text{пит}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} |\dot{H}_\tau|^2,$$

Якщо для визначення \dot{H}_τ використовувати рішення, отримане для ідеального металу, то

$$P_{\text{пит}} = 2 \sqrt{\frac{\mu'_a \omega}{2\sigma}} |\dot{H}_{\text{пад}}|^2,$$

коли вектор напруженості магнітного поля падаючої хвилі перпендикулярний площині падіння, і

$$P_{\text{пит}} = 2 \sqrt{\frac{\mu'_a \omega}{2\sigma}} \cos^2 \varphi |\dot{H}_{\text{пад}}|^2,$$

коли вектор $H_{\text{пад}}$ лежить в площині падіння.

Задачі для самостійного вирішення

1. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на межу розподілу між вакуумом і ідеальним металом. Амплітуда напруженості електричного поля падаючої хвилі $0,1 \text{ В / м}$. Визначити комплексні амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів в вакуумі на межі розподілу, якщо вектор напруженості електричного поля падаючої хвилі спрямований по осі x декартової системи координат з віссю z , спрямованої перпендикулярно межі розділу в глиб металу. Записати вирази для миттєвих значень напруженості електричного і магнітного полів у вакуумі.

2. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на межу розподілу між вакуумом і металом з питомою електричною провідністю $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ См / м}$. Визначити коефіцієнт відображення по електричному полю на частоті 10 ГГц , якщо $\mu_a = \mu_0$.

3. Плоска електромагнітна хвиля з частотою 10 МГц і середнім значенням щільності потоку потужності 1 Вт / м падає нормально, з вакууму на поверхню металу з питомою електричною провідністю $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ См / м}$. Визначити напруженість електричного поля і середнє значення щільності потоку потужності в металі безпосередньо біля межі розподілу.

4. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на межу розподілу між вакуумом і діелектриком з параметрами $\epsilon = 4$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$. Визначити середнє значення щільності потоку потужності в діелектрику, якщо середнє значення потоку потужності падаючої хвилі 1 Вт / м .

5. Використовуючи еквівалентну схему у вигляді відрізків довгих ліній, вивести формулу для коефіцієнта відбивання електричного поля від діелектричної пластини товщиною d і діелектричної проникністю $\epsilon_{\text{пл}}$ при нормальному падінні плоскої електромагнітної хвилі з заданою частотою.

Втратами в пластині знехтувати. Обчислити коефіцієнт відбивання при $\epsilon_{\text{пл}} = 2,4$ на довжинах хвиль $\lambda_{01} = 3,1$ см і $\lambda_{02} = 6,2$ см, $d = 0,5$ см.

Вказівка: скористатися формулою для вхідного опору відрізка лінії довжиною d , навантаженого на опір Z .

6. Використовуючи кругову діаграму, побудувати розподіл амплітуди електричного і магнітного полів уздовж осі, перпендикулярної пластині, для умов задачі 5, вважаючи, що амплітуда напруженості електричного поля падаючої хвилі дорівнює 1 В / м.

7. Визначити діелектричну проникність і товщину покриття на поверхні плавленого кварцу для випромінювання з довжиною хвилі $0,63$ мкм (випромінювання квантового генератора на суміші неону і гелію), що забезпечує рівність нулю коефіцієнта відбивання при нормальному падінні.

Вказівка: аналогом є завдання про узгодження навантаження з лінією передачі через чвертьхвильовий трансформатор.

8. Вивести формулу для коефіцієнта заломлення плоскої електромагнітної хвилі, падаючої нормально з вакууму на пластину завтовшки d , вважаючи відомими коефіцієнт розповсюдження і характеристичний опір Z_c хвиль в пластині.

Вказівка: скористатися граничними умовами на площинах $z = 0$ і $z = d$ для двох хвиль зліва від пластини і всередині неї і однієї хвилі справа.

9. Використовуючи результат задачі 8, обчислити коефіцієнт заломлення поля пластини кераміки титанат барію (Ba Ti O_3) на частоті 10 ГГц, якщо $\epsilon = 144$, $\mu = 1$, $\text{tg} \delta = 0,6$, $d = 0,1$ мм.

10. Плоска електромагнітна хвиля, що розповсюджується в вакуумі, падає нормально на пластину діелектрика товщиною d з від'ємним значенням відносної діелектричної проникності $\epsilon_{\text{пл}}$. Використовуючи результат задачі 8, вивести формулу для коефіцієнта заломлення T_E . Обчислити T_E для $\epsilon_{\text{пл}} = -1$, $d = 1$ см на частоті 10 ГГц.

11. В оптичному діапазоні довжин хвиль коефіцієнт відбивання від металу не перевищує 95% , тому для створення високоякісних дзеркал використовують багат шарові діелектричні покриття. Знайти при $\varphi = 0$ вираз для коефіцієнта

відбивання по потужності від структури, що складається з N шарів, що чергуються, ідеальних діелектриків товщиною $\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})$ з відносними діелектричною проникністю ε_1 і ε_2 , нанесених на підкладку з відносної діелектричної проникністю ε_3 . Обчислити коефіцієнт відбивання для дзеркала, якщо $\varepsilon_1 = 2,5$, $\varepsilon_2 = 6,25$, $\varepsilon_3 = 3,8$, $N = 11$.

Вказівка: при вирішенні використовувати вираз для вхідного опору відрізка лінії передачі довжиною $\lambda/4$.

Практичне заняття № 8

Найпростіші випромінювачі електромагнітних хвиль

Диполь Герца

Одним з найпростіших випромінювачів електромагнітних хвиль є *диполь Герца* – малий відрізок лінійного провідника l , через який протікає струм I , що не змінюється вздовж його довжини. Такий струм, як впливає із закону збереження кількості електроенергії, може протікати в тому випадку, якщо на кінцях провідника знаходяться змінні в часі точкові заряди q і $-q$ рис. 8.1, пов'язані з струмом співвідношенням

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

Визначимо поле, що створюється таким випромінювачем. У точці на відстані r від середньої точки відрізка l , за умови малості лінійних розмірів елемента l у порівнянні з відстанню, $r \gg l$, закон для опису векторного потенціалу \vec{A} має вид

$$\vec{A} = \mu \frac{I(t - r/v) \vec{l}}{4\pi r}.$$

Скалярний потенціал φ визначиться як алгебраїчна сума потенціалів зарядів q і $-q$:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q(t - r_1/v)}{r_1} - \frac{q(t - r_2/v)}{r_2} \right].$$

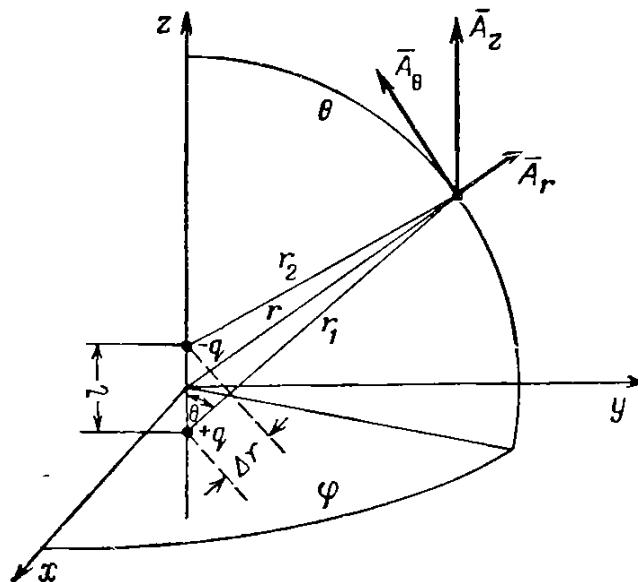


Рис. 8.1. Ілюстрація до розрахунку поля, створюваного диполем Герца

Вираз, що стоїть в дужках, легко перетворити за допомогою формули

$$f(t, r + \Delta r) - f(t, r) = \frac{\partial f(t, r)}{\partial r} \Delta r.$$

Тому

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q(t-r/v)}{r} \right] \Delta r = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{q'(t-r/v)}{vr} - \frac{1}{r^2} q(t-r/v) \right] \Delta r,$$

де $q'(t-r/v)$ є похідною по аргументу $t-r/v$, а відрізок Δr , згідно з рис. 11.1, дорівнює

$$\Delta r = l \cos \theta.$$

Припустимо, що напрямок струму в елементі l співпадає з позитивним напрямком осі z , і вектор-потенціал має лише одну проекцію A_z , що дорівнює

$$A_z = A = \mu \frac{I(t-r/v)}{4\pi r} l.$$

У сферичній системі координат проекції векторного потенціалу \vec{A} визначаються виразами:

$$\begin{aligned} A_z &= A_z \cos \theta = \mu \frac{I(t-r/v)}{4\pi r} l \cos \theta. \\ A_\theta &= -A_z \sin \theta = -\mu \frac{I(t-r/v)}{4\pi r} l \sin \theta. \\ A_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Напруженість магнітного поля \vec{H} знаходиться по формулі (8.1). Користуючись виразом для ротора в сферичній системі координат, отримаємо

$$\begin{aligned} H_r &= H_\theta = 0. \\ H_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{vr} I'(t-r/v) + \frac{I(t-r/v)}{r^2} \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Напруженість компонент електричного поля розраховується за формулами:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{I(t-r/v)}{vr^2} - \frac{q(t-r/v)}{r^3} \right] \cos \theta; \quad (8.2)$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{I'(t-r/v)}{v^2 r} + \frac{I(t-r/v)}{vr^2} - \frac{q(t-r/v)}{r^3} \right] \sin \theta. \quad (8.3)$$

Розглядаючи вирази, отримані для складових електричного і магнітного полів, ми бачимо, що окремі доданки в них пропорційні $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ і $\frac{1}{r^3}$. Це дозволяє написати більш прості, але наближені формули для так званих *ближньої* і *дальньої* зон.

Ближня зона або **зона індукції** – це область, в якій члени, пропорційні $\frac{1}{r^3}$ і $\frac{1}{r^2}$, у виразах для E та H переважають над іншими членами.

Дальня зона або **зона випромінення** – це область, в якій переважаючими членами в виразах для E та H є складові, пропорційні $\frac{1}{r}$. Границі ближньої і дальньої зон визначаються відношенням між величинами доданків, що входять у вирази (8.1), (8.2), (8.3). Легко помітити, що ці відношення залежать від швидкості зміни струмів та зарядів у часі. Для конкретності розглянемо найбільш важливий для практики випадок, коли струм в антені змінюється за гармонічним законом $Ie^{i\omega t}$, так що

$$I_K(t - \frac{r}{v}) = Ie^{i\omega(t - \frac{r}{v})} = Ie^{-i\frac{\omega}{v}r} e^{i\omega t}.$$

Оскільки

$$I = -\frac{dq}{dt},$$

то

$$q_K(t - \frac{r}{v}) = -\frac{1}{i\omega} Ie^{-i\frac{\omega}{v}r} e^{i\omega t}.$$

Підставляючи значення заряду та струму, а також його похідних у вирази (8.1), (8.2), (8.3) для проекцій H_φ та E , і опускаючи загальний множник $e^{i\omega t}$, отримаємо

$$H_\varphi = \frac{Il}{4\pi} \left[i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta e^{-ikr}; \quad (8.4)$$

$$E_r = \frac{k}{\omega\varepsilon} \frac{Il}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} - i\frac{1}{kr^3} \right] \cos \theta e^{-ikr}; \quad (8.5)$$

$$E_\theta = \frac{k}{\omega\varepsilon} \frac{Il}{\omega\varepsilon} \left[i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} - i\frac{1}{kr^3} \right] \sin \theta e^{-ikr}, \quad (8.6)$$

де $k = \frac{\omega}{v} = 2\pi/\lambda$.

З аналізу розрахованих виразів неважко помітити, що границя ближньої і дальньої зон для гармонічного процесу визначається кутовою частотою поля ω або довжиною хвилі λ . Якщо $r \ll \lambda$ (ближня зона), переважаючим у виразі для H буде член, пропорційний $\frac{1}{r^2}$, а у виразі для E — член, пропорційний $\frac{1}{r^3}$. У

дальній зоні ($r \gg \lambda$) переважаючими будуть члени, пропорційні $\frac{1}{r}$.

Рамкова антена

Розглянемо поле, створене **рамковою антенною** – круглим плоским витком радіуса a , рис. 8.2. Припустимо, що по рамці тече синусоїдальний струм $Ie^{i\omega t}$, однаковий в усіх точках рамки. Це буде мати місце у випадках, коли периметр рамки малий у порівнянні з довжиною хвилі струму. Внаслідок симетрії,

векторний потенціал поля, створюваний рамковою антеною, має лише одну складову A_φ .

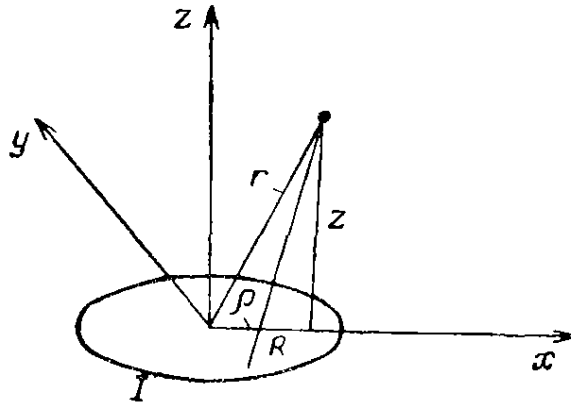


Рис. 8.2. До розрахунку поля рамкової антени

Позначаючи через R відстань від довільної точки на колі рамки до точки спостереження, отримаємо

$$A_\kappa = A_{\varphi\kappa} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{\dot{I} e^{i(\omega t - \omega \frac{R}{v})}}{R} dl_1,$$

де $dl_1 = dl \cos \varphi = a \cos \varphi d\varphi$.

Підставляючи значення dl_1 і опускаючи тимчасовий множник $e^{i\omega t}$, знаходимо:

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} \dot{I} \int_0^\pi \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \varphi d\varphi, \quad (8.7)$$

де $k = \omega / v = 2\pi / \lambda$,

так як

$$R^2 = a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi, \quad \rho^2 + z^2 = r^2, \quad \rho = r \sin \theta,$$

то

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi.$$

Безпосереднє обчислення інтеграла (8.7) є трудомісткою операцією. Тому нижче наведено спрощені процедури його розрахунку для наступних двох випадків.

Зона рамки. Це область, де $R \ll a$. Так як $a \ll \lambda$, то для цієї зони $kR = \frac{2\pi}{\lambda} R \ll 1$ і $e^{-ikR} \approx 1 - ikR$.

Підставляючи останній вираз в (19.1), отримаємо:

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} \dot{I} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{R} - ik \frac{\mu a \dot{I}}{2\pi} \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi. \quad (8.8)$$

Другий інтеграл у формулі (8.8) дорівнює нулю. Що стосується першого інтеграла, то він в точності збігається зі значенням векторного потенціалу для поля постійного струму в круглому витку з тією лише різницею, що замість

постійного струму сюди входить змінний струм. Таким чином, значення поля в зоні рамки визначається тими ж формулами, що і поле постійного струму.

Зона, віддалена від рамки. Для цього випадку виконується умова $R \gg a$, тому

$$R = r \sqrt{1 - \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{r^2}} \approx r - a \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r - a \sin \theta \cos \varphi} \approx \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \sin \theta \cos \varphi,$$

і

$$e^{-ikR} \approx e^{-ikr} (1 + ika \sin \theta \cos \varphi).$$

Вирази для розрахунку компонент електромагнітного поля описуються наступними виразами:

$$\dot{H}_r = i \frac{\dot{I}_e}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} - i \frac{1}{kr^3} \right] \cos \theta e^{-ikr}; \quad (8.9)$$

$$\dot{H}_\theta = i \frac{\dot{I}_e}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} - i \frac{1}{kr^3} \right] \sin \theta e^{-ikr}. \quad (8.10)$$

З першого рівняння Максвелла випливає, що вектор \vec{E} в поле рамки має тільки одну проекцію E_φ , комплексна амплітуда якої дорівнює

$$\dot{E}_\varphi = -i \frac{\omega \mu}{k} \frac{\dot{I}_e}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} \right] \sin \theta e^{-ikr}. \quad (8.11)$$

Порівнюючи формули (8.9) і (8.10) з аналогічними формулами для проекцій електричного поля диполя Герца (8.5) і (8.6), можна зробити висновок, що магнітне поле горизонтальної рамки ідентичне електричному полю вертикального диполя Герца. Аналогічні висновки можна зробити і для проекцій полів.

Отже, горизонтальна рамка створює таке ж поле, як і вертикальний електричний диполь, різниця між їх полями полягає лише в тому, що вектори \vec{E} і \vec{H} міняються в просторі місцями. А це значить, що горизонтальну рамкову антену можна трактувати як фіктивний вертикальний магнітний диполь, рис. 8.3.

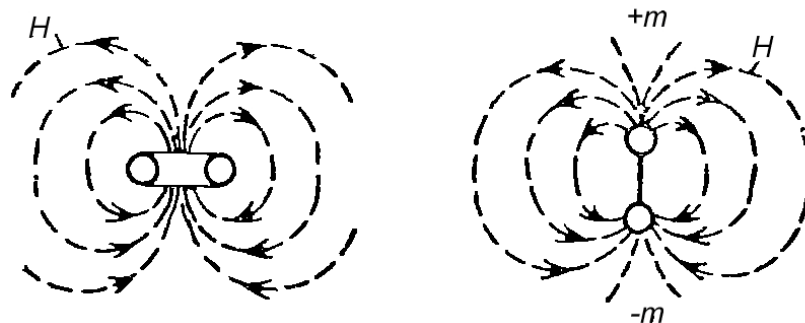


Рис. 8.3. Аналогія між диполем Герца і рамковою антеною

Визначимо умови, при яких рамка буде еквівалентна магнітному диполю. Для розрахунку поля магнітного диполя доцільно використовувати властивість дуальності рівнянь Максвелла. Дійсно, якщо в формулах, що описують диполь

Герца, провести перестановки, то можливо отримати вирази, що характеризують поле магнітного джерела:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{\dot{I}_M l}{4\pi} \left(i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta e^{-ikr};$$

$$\dot{H}_r = \frac{k}{\omega\mu} \frac{\dot{I}_M l}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - i \frac{1}{kr^3} \right) \cos \theta e^{-ikr};$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{k}{\omega\mu} \frac{\dot{I}_M l}{4\pi} \left(i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} - i \frac{1}{kr^3} \right) \sin \theta e^{-ikr},$$

де \dot{I}_M - комплексна амплітуда фіктивного магнітного струму.

Слід мати на увазі, що ці вирази описують диполь, у якого позитивна маса знаходиться в точці $z = -l/2$, а від'ємна - в точці $z = l/2$. Щоб поле магнітного диполя було повністю ідентично розглянутому вище полю рамки, необхідно знаки в правих частинах останніх рівностей замінити на зворотні. Отримані таким чином вирази будуть збігатися з формулами (8.9)-(8.11), якщо

$$-\frac{k}{\omega\mu} \dot{I}_M l = i \dot{I} l_e = i k S,$$

або

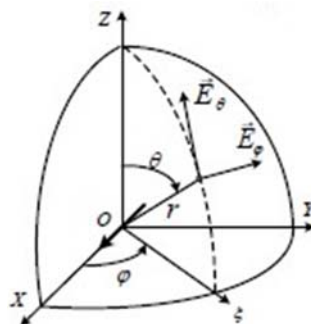
$$\frac{i}{\omega} \dot{I}_M l = \mu \dot{I} S.$$

Але величина $\frac{i}{\omega} \dot{I}_M l$ є комплексною амплітудою моменту магнітного диполя $\dot{M} = \dot{q}_M l$, де $\dot{q}_M = -\int \dot{I}_M dt$ - комплексна амплітуда магнітної маси. Значить, горизонтальна рамкова антена еквівалентна вертикальному магнітному диполі з моментом $\dot{M} = \mu \dot{I} S$.

Приклади вирішення типових задач

1. Знайти модулі векторів електричного та магнітного полів елементарного електричного випромінювача в точці простору з координатами $r = 1000$ м, $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$. Випромінювач орієнтований вздовж осі X . Амплітуда струму, збуджуваного випромінювачем, дорівнює 1 А, частота 300 МГц, довжина випромінювача 10 см.

Розв'язок:



Вектори складових напруженості електричного поля показані на рисунку. Модуль вектора напруженості електричного поля знаходяться за формулою:

$$|\dot{E}_m| = \sqrt{|\dot{E}_{\theta m}|^2 + |\dot{E}_{\varphi m}|^2},$$

Модулі складових під знаком кореня знаходяться наступним чином:

$$|\dot{E}_{\theta m}| = A |\cos\theta \cos\varphi|;$$

$$|\dot{E}_{\varphi m}| = A |\sin\varphi|,$$

де $A = \frac{W_0 I_E l}{2r\lambda}$ - коефіцієнт, котрий не залежить від кутових координат та виражається через наступні фізичні величини:

I_E – амплітуда струму у випромінювачі (А);

l – довжина випромінювача (м);

r – відстань від випромінювача до точки спостереження (м);

λ – довжина хвилі (м);

$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377 \text{ Ом}$ – характеристичний опір простору.

Використання останніх формул, дозволяє отримати вираз:

$|\dot{E}_m| = \sqrt{|\cos\theta \cos\varphi|^2 + |\sin\varphi|^2}$, котрий після кількох простих перетворень зводиться до вигляду

$$|\dot{E}_m| = A \sqrt{1 - (\cos\varphi)^2 (\sin\theta)^2}.$$

Згідно до умови задачі маємо: $I_E = 1 \text{ А}$, $l = 0,1 \text{ м}$, $r = 1000 \text{ м}$, $\lambda = \frac{c}{f} =$

1 м , $W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом}$, $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$.

Підставимо вихідні дані у формулу для визначення модуля напруженості електричного поля та виконаємо розрахунок:

$$|\dot{E}_m| = \frac{W_0 I_E l}{2r\lambda} * \sqrt{1 - (\cos\varphi)^2 (\sin\theta)^2} = \frac{377 * 1 * 0,1}{2 * 10001} \sqrt{1 - (\cos 45)^2 (\sin 60)^2} = 0,018 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Розрахунок модуля вектора напруженості магнітного поля базується на співвідношенні:

$$W_0 = \frac{|\dot{E}_m|}{|\hat{H}_m|},$$

або

$$|\hat{H}_m| = \frac{|\dot{E}_m|}{W_0}.$$

В результаті маємо

$$|\hat{H}_m| = \frac{0,018}{377} = 1,768 * 10^{-5} \frac{A}{M}.$$

$$\text{Відповідь: } |\dot{E}_m| = 0,018 \frac{B}{M}, |\hat{H}_m| = 1,768 * 10^{-5} \frac{A}{M}.$$

2. Побудувати нормовану амплітудну діаграму напряму повного вектора напруженості електричного поля елементарного електричного випромінювача в площині $XO\xi$ при $r = 1000$ м, $\varphi = 45^\circ$. Випромінювач орієнтований уздовж осі X (рис.). Амплітуда струму, що збуджує випромінювач, дорівнює 1 А, частота 300 МГц, довжина випромінювача 10 см.

Розв'язок:

Модуль комплексної амплітуди повного вектора напруженості електричного поля елементарного електричного випромінювача визначається рівнянням:

$$|\dot{E}_m| = A \sqrt{1 - (\cos\varphi)^2 (\sin\varphi)^2}.$$

Коефіцієнт A не залежить від координат, тому ненормована амплітудна характеристика спрямованості в площині $XO\xi$ при $\varphi = 45^\circ$ описується виразом $f(\theta, \varphi = 45^\circ) = |\sqrt{1 - (\cos\varphi)^2 (\sin\varphi)^2}|$.

На рисунку наведено рішення поставленої задачі з використанням системи *Mathcad*.

Якщо у вихідних даних замість кута $\varphi = 45^\circ$ задати кут $\varphi = 0^\circ$, то площина $XO\xi$ співпадає з площиною XOZ , яка є однією з головних площин випромінювача - E - площиною.

При переході до кута $\varphi = 90^\circ$, площину $XO\xi$ співпадає з площиною YOZ , яка є однією з головних площин випромінювача - H - площиною

1. Азимутальний кут φ (радіан) $\varphi := 45 \text{deg}$.

2. Межі виміру кута θ (радіан) $N := 360$ $i := 1, 2, \dots, 360$ $\theta_i := \frac{2\pi}{N} i$.

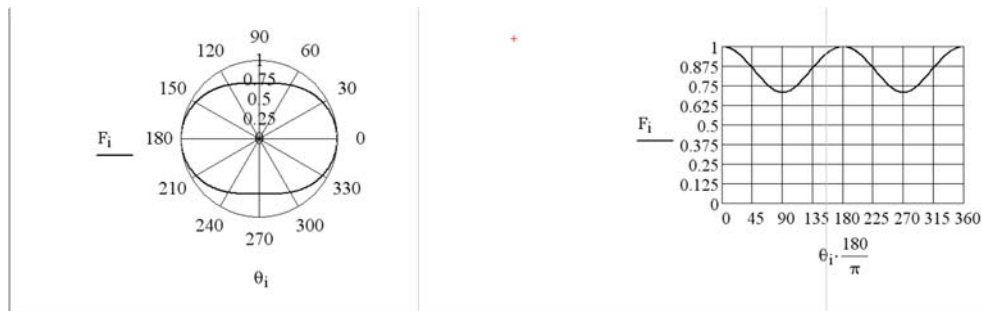
3. Ненормована амплітудна характеристика напрямлення $f(\theta, \varphi)$ $f_i := |\sqrt{1 - (\cos\varphi)^2 (\sin\varphi)^2}|$.

4. Визначення значення максимуму характеристики спрямованості $Max := \max(f)$.

5. Нормована амплітудна характеристика спрямованості $F(\theta, \varphi)$ $F_i := \frac{f_i}{Max}$.

6. Нормована амплітудна характеристика спрямованості $F(\theta, \varphi = 45)$ в полярній системі координат.

7. Нормована амплітудна характеристика спрямованості $F(\theta, \varphi = 45)$ в прямокутній системі координат.



3. На відстані $x = 10$ км максимальна амплітуда напруженості електричного поля диполя Герца дорівнює $E_m = 1$ мВ/м. Визначити потужність, випромінювану диполем, якщо його довжина l становить 10 % від довжини випромінюваної хвилі λ , $l = 0.1 \cdot \lambda$.

Розв'язок:

Потужність, що випромінюється диполем, P_D :

$$P_D = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{I_D^2}{2}. \quad (11.12)$$

Відстань $x = 10$ км відповідає дальній зоні, для якої напруженість електричного поля визначається лише через компоненту E_θ :

$$E_\theta = \frac{I_D l}{2\lambda \cdot x} Z_C \sin \theta,$$

звідки можна отримати:

$$\frac{I_D l}{\lambda} = \frac{2E_\theta x}{Z_C \sin \theta}. \quad (11.13)$$

Максимальна напруженість поля досягається при $\theta = \pi/2$. Вважаючи, що електромагнітна хвиля розповсюджується у вакуумі, тобто $Z_C = 120 \pi$ і підставивши вираз (11.13) в формулу (11.12), отримаємо:

$$P_D = 40\pi^2 \left(\frac{2E_{\theta x}}{Z_C \sin \theta} \right)^2 = 1.11 \text{ Вт.}$$

Відповідь: $P_D = 1.11 \text{ Вт.}$

4. Квадратна рамка з довжиною сторони $l = 10$ см створює максимальну амплітуду напруженості електричного поля $E_m = 0.5$ мВ/м на відстані $x = 5$ км. Визначити струм в рамці, якщо довжина хвилі λ , випромінюваної рамкою, становить $\lambda = 4$ м.

Розв'язок:

Оскільки $\lambda \ll x$, використовуємо рівняння для дальньої зони.

Визначимо амплітуду струму рамки I_{Pm} наступним чином:

$$I_{Pm} = \frac{E_{\varphi} \lambda^2 x}{\pi S Z_C \sin \theta'}$$

де S – площа контура рамки.

Максимальна напруженість поля E_m досягається при куті $\theta = \pi/2$. Тоді хвильовий опір Z_C можна вважати рівним хвильовому опорі вакууму, $Z_C = Z_0 = 120 \pi$. Після підстановки числових значень параметрів у формулу, отримаємо:

$$I_{Pm} = \frac{E_{\varphi} \lambda^2 x}{\pi S Z_0} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 10^3}{120\pi \cdot 0.1^2 \cdot \pi} = 3.381 \text{ А.}$$

Відповідь: $I_{Pm} = 3.381 \text{ А.}$

Задачі для самостійного вирішення

1. Розрахувати струм в елементарному електричному випромінювачі довжиною $l = 2$ см, якщо в точці на відстані $x = 15$ км, $\theta = \pi/2$ напруженість електричного поля $E_{\theta} = 2$ мВ/м на частоті $f = 300$ МГц.

2. Знайти складові поля елементарного електричного випромінювача довжиною $l = 3$ см в екваторіальній площині на відстані $x = 3$ км на частоті $f = 400$ МГц. Амплітуда струму в випромінювачі $I_m = 5$ А.

3. Визначити опір випромінення Z_C на довжині хвилі $\lambda = 4$ м елементарного електричного випромінювача довжиною $l = 5$ см. Визначити потужність випромінення P , якщо амплітуда струму в випромінювачі $I_m = 2$ А.

4. Визначити потужність P , випромінювану елементарним електричним випромінювачем у сферичний сектор, обмежений кутами $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 80^\circ$. Довжина випромінювача складає $l = 3$ см, амплітуда струму $I_m = 5$ А, довжина хвилі $\lambda = 2$ м.

5. Визначити потужність випромінювання рамкової антени, якщо на відстані 100 м в екваторіальній площині створюється електрично поле з амплітудним значенням напруженості $E_m = 5$ мВ/м.

6. Визначити струм і опір випромінювання антени радіостанції з вишкою висотою $h = 100$ м, що працює на довжині хвилі $\lambda = 1000$ м та має потужність $P = 10$ кВт.

7. Знайти амплітуду векторів напруженості електричного і магнітного полів, що створюються квадратною рамкою, на відстані $x = 10$ км при $\theta = \pi/2$. Амплітуда струму рамки $I_m = 5$ А. Рамка розміщена в екваторіальній площині і має довжину сторони, що складає 10 % від довжини хвилі, $l = 0.1 \lambda$.

8. В електричному ланцюгу протікає синусоїдальний струм з амплітудою $I_m = 10$ А та частотою $f = 50$ Гц. Площа утворена електричним ланцюгом $S = 2$ м². Яка потужність P_B втрачається ланцюгом через випромінення ?

РОЗДІЛ 4. Спеціалізовані радіопристрої

Практичне заняття № 9

Електромагнітні хвилі в напрямних системах і хвилеводах

Пристрої в яких розповсюджуються хвилі лише у певному напрямку отримали назву *направних пристроїв* або *направних систем*. У більшості випадків вони утворені поверхнями провідників, але при деяких умовах напрямні властивості мають також поверхні діелектриків. Тому електромагнітні хвилі в напрямних системах рухаються вздовж граничних поверхонь, що виконують функції своєрідних «електромагнітних рейок».

Направні пристрої мають найрізноманітніші застосування в сучасній радіотехніці. Найбільш широко вони використовуються як лінії передачі або фідери, що призначені для передавання електромагнітної енергії із одної точки простору в іншу (наприклад, від передавача до антени або від антени до приймача і т. д.) з високим коефіцієнтом корисної дії.

Деякі типи напрямних пристроїв використовуються як уповільнюючі системи. Їх використовують для отримання хвиль, що розповсюджуються зі швидкістю, що є меншою швидкості світла c . Такі хвилі, виявляється, дуже ефективно взаємодіють з потоками заряджених елементарних частинок. Тому уповільнюючі системи знаходять широке застосування в електронних пристроях надвисоких частот і прискорювачах заряджених частинок. Іноді вони використовуються також в антенних і вимірювальних пристроях тощо.

Ознайомимося коротко з основними типами напрямних систем.

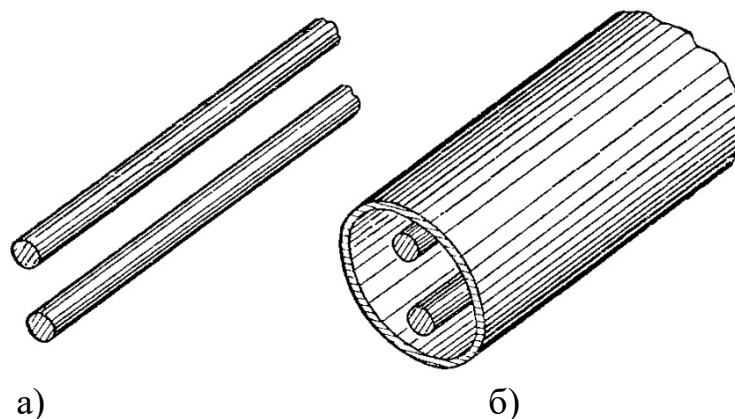


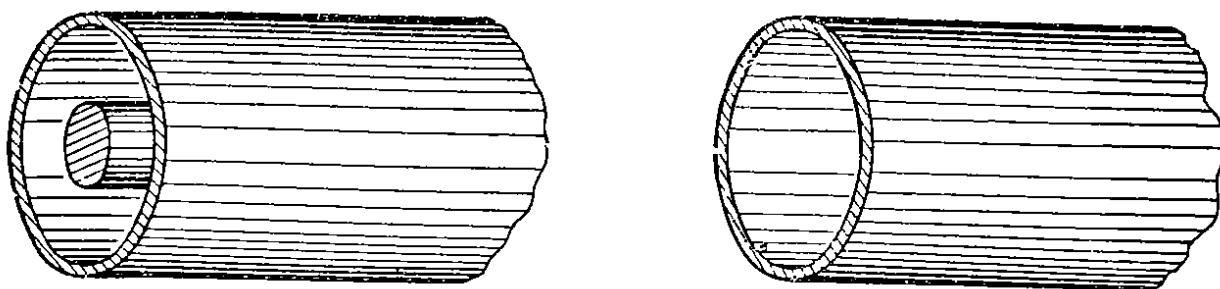
Рис. 9.1. Відкрита а) і екранована б) двопровідні лінії

Найбільш простою лінією передачі є відкрита двопровідна лінія, рис. 9.1, а. Спрямована такою системою електромагнітна хвиля поширюється, як видно з рисунка 9.1, в просторі, що оточує провід. Відповідно, передавання електромагнітної енергії вздовж цієї лінії практично завжди супроводжується втратами на випромінювання і втратами в оточуючих предметах. Крім того частина енергії поля втрачається на нагрівання дротів.

По мірі скорочення довжини хвилі загальний рівень втрат енергії в лінії зростає. У зв'язку з цим відкрита двопровідна лінія може працювати цілком задовільно лише в діапазоні порівняно довгих хвиль (зазвичай на хвилях, що довші 1 м).

Із теорії поверхневого ефекту відомо, що електромагнітне поле дуже швидко затухає при поширенні у добре провідних середовищах. Це означає, що якщо поле оточити провідною металічною поверхнею – екраном, то інтенсивність його в зовнішньому просторі буде нескінченно мала. Звідси випливає, що двопровідна екранована лінія, рис. 9.1, б на високих частотах повинна мати більш високий коефіцієнт корисної дії, ніж відкрита лінія.

На рис. 9.2 а зображена коаксіальна лінія. Електромагнітна хвиля тут поширюється в просторі між поверхнями зовнішнього і внутрішнього провідників. Тому коаксіальна лінія має всі переваги екранованої лінії і разом з тим має більш просту конструкцію.



а) коаксіальна лінія;

б) хвилевод

Рис 9.2. Конструкції напрямних систем

Електромагнітні хвилі також можуть поширюватися за певних умов вздовж лінії, навіть якщо в просторі, що обмежений металічним екраном без внутрішніх дроти. Напрявні пристрої такого типу носять назву хвилеводів, рис 9.2 б. Очевидно, що поширення електромагнітної хвилі у хвилеводі нагадує поширення звукової хвилі вздовж пустої труби з жорсткими стінками.

Типовим прикладом уповільнюючої системи є спіральна лінія. Вона утворена дротом, що згорнутий у циліндричну спіраль, рис. 9.3. При спрощеному розгляді процесів в такій системі можна припускати, що хвиля, яка спрямовується поверхнею дроту, буде рухатися зі швидкістю c вздовж гвинтової лінії. Внаслідок цього швидкість її поширення в осьовому напрямку стає менше швидкості c .

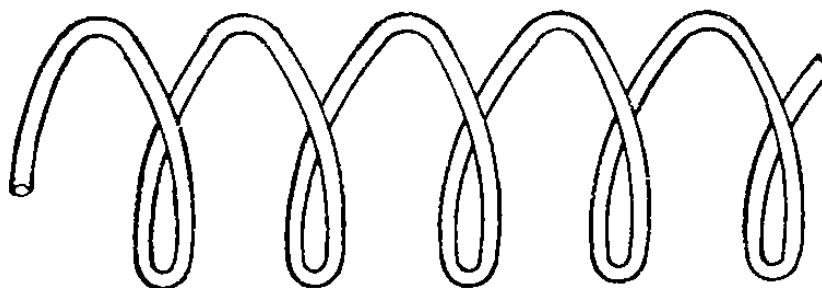


Рис. 9.3. Спіральна лінія

На рис. 9.4 зображена уповільнююча система, що називається ребристою структурою.

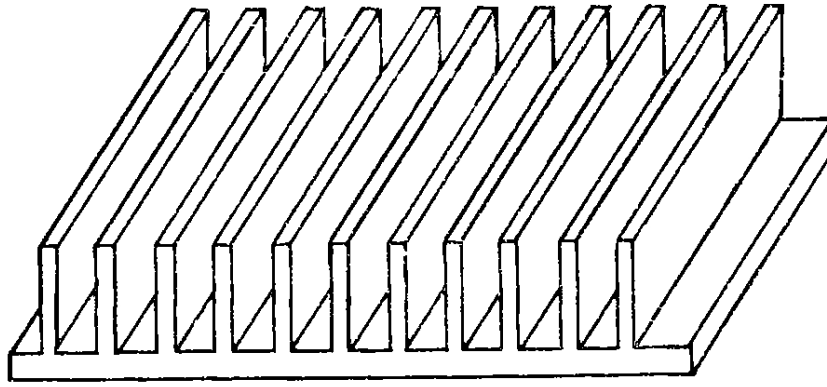


Рис. 9.4. Ребриста структура

Сповільнення електромагнітних хвиль можна також здійснити, якщо як напрямну систему використовувати діелектричне середовище, тому що швидкість поширення хвилі в діелектрику менша швидкості її у вільному просторі. Прикладом такої системи є діелектричний хвилевод, рис. 9.5.

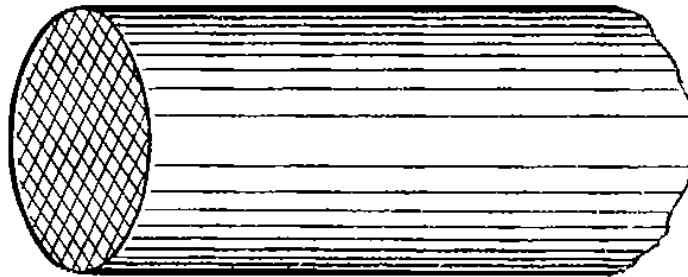


Рис. 9.5. Діелектричний хвилевод

Нижче розглянуто основні властивості найбільш поширених напрямних систем. Перш за все необхідно визначити типи хвиль, які можуть поширюватися в напрямній системі, та встановити способи їх збудження. Разом з цим необхідно розрахувати втрати електромагнітної енергії при поширенні хвилі вздовж системи.

Відповідь на всі ці питання дає рішення рівнянь Максвелла для тих чи інших областей з урахуванням відповідних граничних умов.

При визначенні структури можливих типів хвиль та способів їх збудження для спрощення досліджень можна припустити, що провідники напрямної системи мають нескінченно велику провідність, а діелектрики – провідність, що дорівнює нулю. Іншими словами, реальну систему можна замінити ідеалізованою системою без втрат.

У реальних пристроях провідники мають скінченну, але все-таки достатньо велику провідність, а діелектрики – провідність, що наближається до нуля. Внаслідок цього результати, що отримані для ідеалізованих систем, виявляються близькими до істинних. Однак при розрахунку втрат у напрямному пристрої такі припущення, звісно, вже втрачають сенс.

Задачі поширення хвиль у напрямних системах стали актуальними одразу після створення теорії електромагнітного поля. Так, перші дослідження, що відносяться до хвиль в пустих трубах (хвилеводах), були проведені англійським фізиком Релеєм ще в 1897 році.

Електромагнітні хвилі між паралельними ідеально провідними пластинами

Найпростішою напрямною системою є сукупність двох паралельних провідних нескінченних площин, простір між якими заповнений діелектриком, рис. 9.6. Звісно, напрямна система такого типу є теоретичною абстракцією. Тим не менше аналіз електромагнітного поля в ній дозволяє з'ясувати основні особливості поширення електромагнітних хвиль в реальних напрямних пристроях.

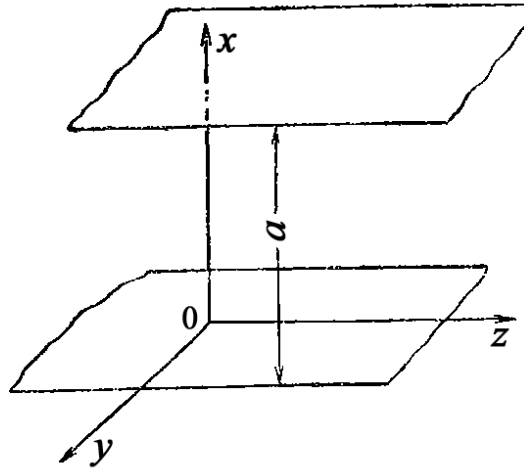


Рис. 9.6. Напрямна система двох паралельних провідних нескінченних площин

Для того, щоб знайти поля, які можуть існувати в просторі між провідними площинами, необхідно вирішити рівняння Максвелла в заданій області при відповідних граничних умовах.

Керуючись наведеними вище міркуваннями, припустимо, що напрямні площини мають нескінченно велику провідність. Тоді дотична складова вектора \vec{E} на цих площинах повинна обертатись в нуль

$$\vec{E}_{tg} = 0. \quad (9.1)$$

Для вирішення рівнянь Максвелла використаємо прямокутну систему координат, рис. 9.6. У цій системі рівняння напрямних поверхонь запишуться найпростішим способом: $x=0$ та $x=a$.

Припустимо, що джерела поля знаходяться поза границями області, що нас цікавить, та хвилі розповсюджуються вздовж осі z . Будемо також вважати, що вектори \vec{E} та \vec{H} шуканого поля не залежать від координати y (двовірна задача).

При таких умовах рівняння для проекцій векторів поля в усталеному режимі мають вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = i\omega\mu\dot{H}_x; & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} = -i\omega\mu\dot{H}_z; \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon\dot{E}_y; \end{cases} \quad (9.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon \dot{E}_x; & \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = i\omega\varepsilon \dot{E}_z; \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = i\omega\mu \dot{H}_y, \end{cases} \quad (9.3)$$

де ε і μ – параметри середовища в просторі між площинами (провідність середовища σ дорівнює нулю).

Отримані рівняння розкладаються на дві незалежні системи, тому що в рівнянні (9.2) входять невідомі $\dot{E}_y, \dot{H}_x, \dot{H}_z$, а в рівнянні (9.3) – невідомі $\dot{E}_x, \dot{E}_z, \dot{H}_y$. Оскільки за умовою задачі електромагнітні хвилі розповсюджуються вздовж осі z , то система (9.2) визначає поля поперечно-електричні (H -хвилі), а система (9.3) – поля поперечно-магнітні (E -хвилі). Дійсно в полі (9.2) проекція вектора \vec{H} на напрямок поширення не дорівнює нулю (проекція H_z), а вектор \vec{E} лежить в площині, перпендикулярній осі z . Аналогічно в полі (9.3) проекція вектора \vec{E} на напрямок поширення не дорівнює нулю, а в площині, що перпендикулярна осі z , лежить вектор \vec{H} .

Розглянемо кожен тип полів окремо.

Поперечно-магнітні поля

Виразимо проекції \dot{E}_x та \dot{E}_z із першого та другого рівняння системи (9.3) через \dot{H}_y :

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}; \quad \dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \quad (9.4)$$

Підставивши їхні значення в останнє рівняння системи, отримаємо диференціальне рівняння для складових \dot{H}_y :

$$\dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y = 0, \quad (9.5)$$

де $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$.

Відповідно, розрахунок поперечно-магнітного поля в напрямній системі зводиться до рішення рівняння (9.5) при граничних умовах (9.1). Останні в розглянутому випадку мають вид

$$\dot{E}_{tg} = \dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad x = a \quad (9.6)$$

або просто $\partial \dot{H}_y / \partial x = 0$ при $x = 0; \quad x = a$.

Рішення рівняння (9.5) будемо шукати методом розділення змінних, припускаючи, що

$$\dot{H}_y = X(x)Z(z). \quad (9.7)$$

Тоді рівняння (9.5) можливо привести до виду

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0. \quad (9.8)$$

Останнє рівняння еквівалентне двом наступним рівнянням:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - k_c^2 X = 0; \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - \gamma^2 Z = 0, \end{cases} \quad (9.9)$$

де k_c^2 – невідома постійна розділення, а

$$\gamma^2 = k_c^2 - k^2. \quad (9.10)$$

Розв'язок першого рівняння (9.9) доцільно записати таким чином:

$$X(x) = A_1 \sin k_c x + B_1 \cos k_c x.$$

Для другого рівняння (9.9) розв'язок зручно представити у вигляді лінійної комбінації показникових функцій:

$$Z(z) = Ce^{-\gamma z} + De^{\gamma z}.$$

Відповідно,

$$\dot{H}_y = (A_1 \sin k_c x + B_1 \cos k_c x)(Ce^{-\gamma z} + De^{\gamma z}). \quad (9.11)$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти, що входять в (9.11), і постійну розділення k_c , використаємо граничні умови (9.6). Підставивши туди значення \dot{H}_y , отримаємо

$$k_c (A_1 \cos k_c x - B_1 \sin k_c x) = 0, \quad (9.12)$$

при $x = 0$; $x = a$.

Умови (9.12) очевидно можуть виконуватися, якщо прийняти $k_c = 0$. В цьому випадку проекція \dot{E}_z , як видно із (9.4), перетворюється в нуль не тільки на провідних площинах, але й у всіх точках простору між ними. Тоді із (9.10) випливає, що $\gamma = ik$.

Підставляючи наведені значення k_c та γ у вирази (9.11) і (9.4), отримаємо

$$\begin{cases} \dot{E}_z \equiv 0; \\ \begin{cases} \dot{E}_x = \frac{k}{\omega \varepsilon} [\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}] = Z_0 [\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}]; \\ \dot{H}_y = \dot{A}e^{-ikz} + \dot{B}e^{ikz}; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \end{cases} \end{cases} \quad (9.13)$$

Тут ми вважали, що $B_1 C = A$ і $B_1 D = B$.

Таким чином, розв'язок системи рівнянь (9.13) при $k_c = 0$ визначає електромагнітне поле як суму двох біжучих хвиль, що розповсюджуються по осі z в протилежних напрямках.

Якщо припустити, що джерело електромагнітної енергії знаходиться в нескінченності, $z \rightarrow -\infty$, то в лінії, природно, буде існувати лише одна хвиля, що поширюється в напрямку від $z \rightarrow -\infty$ до $z \rightarrow \infty$. У такому випадку вирази для компонентів електромагнітного поля мають вид:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = \dot{A}_0 e^{-ikz}; \quad \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_y = \frac{\dot{A}_0}{Z_0} e^{-ikz}. \end{cases} \quad (9.14)$$

Із рівнянь (9.14) випливає, що вектори електромагнітного поля отриманої хвилі не мають складових на напрямок поширення. Відповідно, електромагнітне поле, що визначається рівняннями (9.4), (9.5), при $k_c = 0$ вироджується в хвилю поперечно-електромагнітного типу.

Фазова швидкість хвилі (9.14) співпадає зі швидкістю поширення плоскої хвилі у вільному просторі з параметрами середовища ε, μ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Для характеристики напрямної системи доцільно ввести величину, що називається характеристичним опором. Остання визначається як відношення поперечної проекції вектора \dot{E} до перпендикулярної їй поперечної проекції вектора \dot{H} . У нашому випадку характеристичний опір Z_c буде дорівнювати

$$Z_c = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

тобто він співпадає з хвильовим опором середовища для плоскої хвилі. Таке співпадіння не можна вважати випадковим, тому що хвиля ТЕМ в розглянутій системі аналогічна по своїй структурі плоскій хвилі в необмеженому просторі. Дійсно, якщо в поле плоскої хвилі, що поширюється в необмеженому просторі, внести дві нескінченно тонкі провідні площини, що перпендикулярні вектору \bar{E} , то граничні умови (9.1) автоматично виконуються.

Електромагнітне поле (9.14) в просторі між провідними площинами має хвильовий характер при будь-якому значенні частоти коливань. Іншими словами, поперечна хвиля в напрямній системі може існувати при будь-якій частоті коливань поля, причому поширення цієї хвилі відбуваються зі швидкістю, що залежить лише від параметрів середовища.

Отриманий вище розв'язок рівнянь (9.3) виявляється не єдиним можливим. Насправді, умови (9.6), (9.12) можна також задовольнити, якщо $k_c \neq 0$, але

$$A_1 \cos k_c x - B_1 \sin k_c x = 0 \text{ при } x = 0; \text{ і } x = a.$$

Легко переконатися, що ліва частина останньої рівності буде обертатися в нуль при $x = 0$; і $x = a$, якщо

$$A_1 = 0; \sin k_c a = 0,$$

звідки випливає, що

$$k_c = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Коефіцієнт розповсюдження γ , який надалі позначається γ_m , відповідно до (9.11) буде дорівнювати

$$\gamma = \gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k_c^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.15)$$

Підставивши знайдене значення γ_m у вираз (9.12) та враховуючи, що $A_1 = 0$, отримаємо

$$\dot{H}_y = \left(\dot{A}e^{-\gamma_m z} + \dot{B}e^{-\gamma_m z} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x.$$

Аналогічно раніше досліджуваному випадку поперечної хвилі ми можемо прирівняти параметр до нуля, $\dot{B} \equiv 0$. Тоді відповідно до (9.5), вирази для проєкцій векторів поля будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{H}_y = \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \cos \frac{m\pi}{a} x; \\ \dot{E}_x = \frac{\gamma_m}{i\omega\epsilon} \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \cos \frac{m\pi}{a} x; \\ \dot{E}_z = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \sin \frac{m\pi}{a} x; \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9.16)$$

Тут коефіцієнт \dot{A} ми замінили на \dot{A}_m .

Оскільки m за визначенням – будь-яке ціле число, то в просторі між паралельними провідними площинами, крім раніше знайденої хвилі ТЕМ, може існувати нескінченна множина полів поперечно-магнітного типу, що характеризується різними значеннями m (поля ТМ m).

Із виразів (9.16) можна зробити висновок, що поширення поля вздовж осі x має форму стоячої хвилі. Характер зміни поля на інтервалі $0 \leq x \leq a$ визначається індексом m . Відповідно до (9.16) при різних m на проміжку між площинами буде укладатись різне число «півхвиль» поля, при чому це число дорівнює m . На рис. 9.7 зображені криві зміни E_z вздовж осі x , що відповідають різним m . (Максимальне значення E_z для різних «гармонік» тут вибрані довільно. Початкові фази взяті або однаковими або такими, що відрізняються одна від іншої на π).

Неважко переконатися, що компоненти електромагнітного поля (9.16) при $m=0$ співпадають з компонентами поля (9.14), оскільки $m=0$ відповідає $k_c=0$. Відповідно, поперечно-електромагнітна хвиля в просторі між паралельними провідними пластинами можна розглядатися як вироджений випадок поля поперечно-магнітного типу.

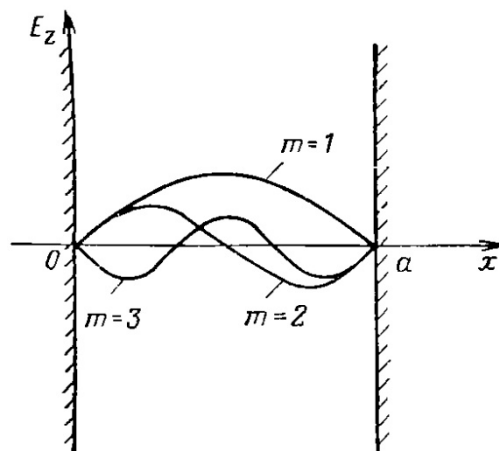


Рис. 9.7. Принцип формування стоячих хвиль

Розглянемо тепер формулу (9.15), що визначає коефіцієнт розповсюдження γ_m .

Легко помітити, що при $k_c > m\pi/a$, $m = 0, 1, 2, \dots$, коефіцієнт розповсюдження є чисто уявною величиною:

$$\gamma_m = i\beta_m,$$

де

$$\beta_m = \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

У такому випадку поперечно-магнітне поле (9.16) буде мати хвильовий характер, тому що вирази (9.16) при $\gamma_m = i\beta_m$, описують хвилі, що розповсюджуються з визначеною швидкістю вздовж осі z .

Припустимо, що при даних значеннях частоти f , відстані a та заданому типі поля, що характеризується величиною m , виконується відношення

$$k_c = 2\pi f \sqrt{\varepsilon\mu} < \frac{m\pi}{a}.$$

У такому випадку електромагнітне поле (9.16) вже не буде мати вигляд хвильового характеру, оскільки зараз γ_m має дійсне значення, і множник $e^{-\gamma_m z}$ визначає лише експоненційний характер зменшення амплітуди коливань поля в різних точках осі z . Електромагнітні поля такого типу зазвичай називають затухаючими полями.

Для будь-якого значення m і a можна, очевидно, знайти таку частоту коливань, при якій коефіцієнт розповсюдження перетворюється в нуль. Із виразів (9.15) слідує, що $\gamma_m = 0$, якщо

$$k = k_c = \frac{m\pi}{a} = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Частота коливань електромагнітного поля, що визначена із останнього рівняння, має назву критичної частоти і позначається $f_{кр}$. Не важко помітити, що

$$f_{кр} = \frac{1}{2\pi} k_c \nu = \frac{m}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{m\nu}{2a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.17)$$

Для кожної критичної частоти можна розрахувати відповідну їй критичну довжину хвилі:

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} = \frac{2\pi c}{k_c \nu} = \frac{2a}{m} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.18)$$

якщо $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\mu = \mu_0$, то $\lambda_{кр} = 2a/m$.

Використовуючи вирази (9.15), (9.17) та (9.18), отримаємо

$$\begin{cases} \gamma_m = ik \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = ik \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = i\beta_m; \\ \beta_m = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \end{cases} \quad (9.19)$$

Відповідно при даних a , m та f поперечно-магнітне поле ТМ m буде мати форму біжучої хвилі в тому випадку, коли частота коливань поля більше критичної частоти (9.17), тобто коли довжина хвилі λ коротша критичної довжини хвилі $\lambda_{кр}$. Наприклад, поле ТМ $_1$ в лінії з $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\mu = \mu_0$ буде мати хвильовий характер, якщо частота $f > \frac{c}{2a} = \frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, або відповідна довжина хвилі $\lambda < 2a$. Якщо ж частота коливань менше критичної частоти, поле стає затухаючим.

Аналізуючи вирази (9.16) можна показати, що перенесення електромагнітної енергії вздовж напрямної системи здійснюється тільки біжучими хвилями. Насправді, середнє значення проекції вектора Пойтінга на вісь z в розглянутому випадку, як витікає з формули (9.16), має вид

$$(\Pi_z)_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] \bar{i}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma_m}{i\omega\varepsilon} \dot{A}_m \dot{A}_m^* e^{-z(\gamma_m + \gamma_m^*)} \cos^2 \frac{m\pi}{a} x \right].$$

Якщо коефіцієнт розповсюдження γ_m має уявне значення, то

$$(\Pi_z)_{cp} = \frac{1}{2} \frac{\beta_m}{\omega\varepsilon} |A_m|^2 \cos^2 \frac{m\pi}{a} x.$$

При дійсному γ_m (затухаюче поле)

$$(\Pi_z)_{cp} = 0.$$

Відповідно, потужність, що знаходиться в затухаючому електромагнітному полі, є чисто коливальною. Останній висновок стає очевидним, якщо врахувати, що проекція E_x у випадку дійсного γ_m зсунута по фазі відносно проекції H_y на кут $-\pi/2$.

Знайдемо фазову швидкість хвилі ТМ m . Оскільки за визначенням $v_\phi = v/\beta_m$, то, враховуючи (9.17)–(9.18), отримаємо

$$v_\phi = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}}, \quad (9.20)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Звідси випливає, що фазова швидкість хвилі ТМ m при $f > f_{кр}$ ($\lambda < \lambda_{кр}$), більша швидкості v . При $f \rightarrow f_{кр}$ величина v_ϕ стає нескінченно великою.

Характеристичний опір

$$(Z_c)_{\text{ТМ}} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\beta_m}{\omega \epsilon} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}, \quad (9.21)$$

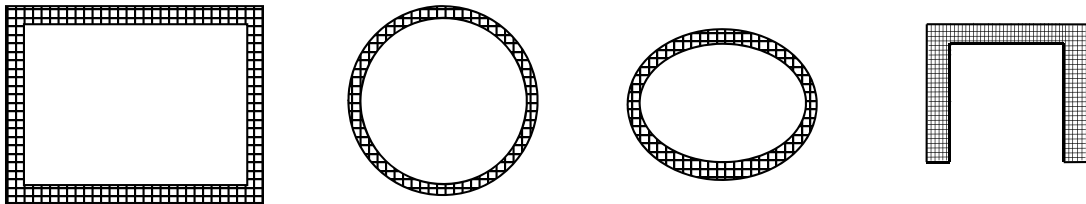
у випадку поперечно-магнітних хвиль виявляється менше характеристичного опору Z_0 .

Таким чином, величини, що характеризують хвилі ТМ в розглянутій системі, залежать і від частоти коливань f і від відстані a між напрямними площинами. Що ж стосується хвилі ТЕМ, то її характеристики не залежать ні від f , ні від a . Виходить, що напрямна система не здійснює впливу на розповсюдження цієї хвилі.

Хвилеводи

Хвилевід – структура, призначена для передавання енергії електромагнітних хвиль, в яких вони обмежені в одному або двох вимірах явищем повного відбивання на його межі. Внутрішній простір хвилеводу, який обмежений провідною поверхнею, заповнений діелектриком. У більшості випадків таким діелектриком є повітря. Стінки хвилеводу, які виготовляються з металу з великою електропровідністю, наприклад з міді або латуні, для уникнення корозії часто вкриваються тонким шаром срібла.

Існують різні типи хвилеводів, які відрізняються один від одного формою утворюючих їх металевих поверхонь та формою поперечних перерізів. Деякі з них показані на рис. 9.8: хвилевод *a* на цьому рисунку має прямокутний поперечний переріз та називається прямокутним, *б* – круглим циліндричним, *в* – еліптичним і, нарешті, *г* – П-подібним.



а) прямокутний; б) круглий; в) еліптичний; г) П-подібний

Рис. 9.8. Структури хвилеводів

Нижче буде показано, що хвиля у хвилеводі може розповсюджуватися, якщо його розміри поперечного перерізу при заданій частоті коливань вибрані більшими за деякі граничні допустимі значення. Проте у діапазоні надвисоких частот хвилеводи мають суттєво менший рівень втрат енергії, ніж коаксіальні та двопровідні лінії. Тому на хвилях дециметрового, сантиметрового та частково міліметрового діапазону для передавання електромагнітної енергії застосовуються саме хвилеводи. розглянемо властивості найпростішого і найрозповсюдженішого хвилевода – прямокутного.

Прямокутний хвилевід

Щоб знайти поля, які можуть існувати в прямокутному хвилеводі без втрат, необхідно розв'язати рівняння Максвела для області, яка обмежена ідеально провідними стінками, при нульових граничних умовах.

Будемо вважати, що хвилевод має нескінченно велику протяжність і не містить джерел електромагнітного поля.

Увівши прямокутну систему координат, рис. 9.9, запишемо граничні умови на стінках хвилеводу у виді:

$$\overline{E}_{tg} = 0 \text{ при } x = 0, x = a, y = 0, y = b. \quad (9.22)$$

Нас будуть цікавити умови, при яких розв'язок рівнянь поля має форму біжучої хвилі, що розповсюджується вздовж осі хвилеводу (осі z). Тому природно вважати, що залежність складових векторів \vec{E} та \vec{H} від координати z представляється функцією

$$f(z) = e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (9.23)$$

де γ – коефіцієнт розповсюдження.

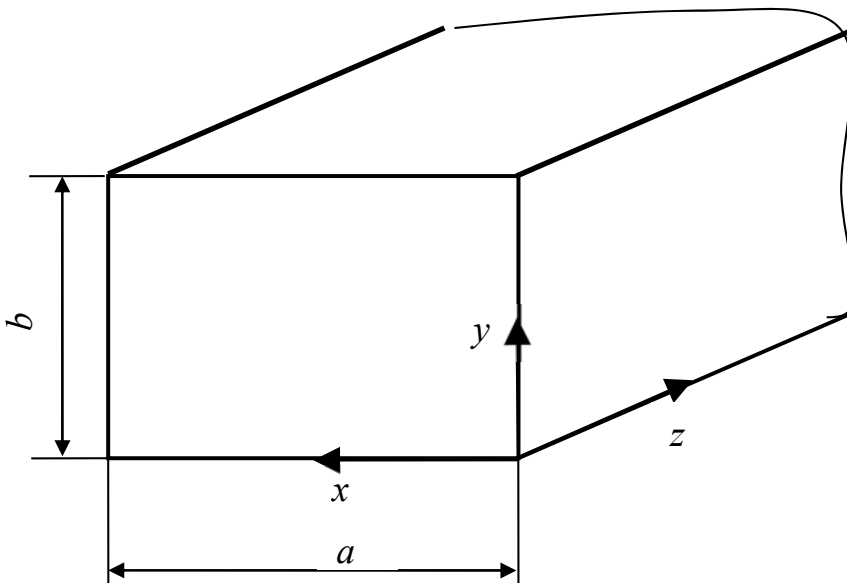


Рис. 9.9. Топологія прямокутного хвилевода

Але відповідно до формули (9.23) диференціювання будь-якої з проєкцій вектора \vec{E} або вектора \vec{H} за змінною z еквівалентна множенню її на параметр $-\gamma$. Наприклад,

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} [\dot{E}_{x0}(x, y) e^{-\gamma z}] = -\gamma \dot{E}_x.$$

На підставі цього, для внутрішнього простору хвилеводу при $\vec{j} = 0$ та $\rho = 0$ будемо мати:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \gamma \dot{H}_y = i\omega \varepsilon \dot{E}_x, \\ -\gamma \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega \varepsilon \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = i\omega \varepsilon \dot{E}_z, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + \gamma \dot{E}_y = -i\omega \mu \dot{H}_x; \\ -\gamma \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega \mu \dot{H}_y; \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -i\omega \mu \dot{H}_z, \end{array} \right. \quad (9.24)$$

де ε і μ – електрична та магнітна проникності середовища, яке заповнює хвилевод.

Якщо в рівняння (1) і (2) системи (9.24) підставити значення \dot{H}_x і \dot{H}_y з рівнянь (4) та (5), а потім у рівняння (4), (5) – значення \dot{E}_x і \dot{E}_y з рівнянь (1) і (2), то невідомі \dot{E}_x , \dot{E}_y , \dot{H}_x , \dot{H}_y будуть виражені через проєкції \dot{E}_z і \dot{H}_z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + i\omega \mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right); \\ \dot{E}_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + i\omega \mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right); \\ \dot{H}_x = \frac{1}{k_c^2} \left(i\omega \varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right); \\ \dot{H}_y = -\frac{1}{k_c^2} \left(i\omega \varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right), \end{array} \right. \quad (9.25)$$

де $k_c^2 = \gamma^2 + k^2$.

Для хвилі, яка розповсюджується у протилежному напрямку, перед параметром γ у виразах (9.24) та (9.25) потрібно поставити протилежний знак. Таким чином, усі поперечні проєкції векторів \bar{E} і \bar{H} виражаються через повздовжні проєкції \dot{E}_z і \dot{H}_z . Підставляючи \dot{E}_x і \dot{E}_y з (9.25) у рівняння (6) системи (9.24), а \dot{H}_x , \dot{H}_y – у рівняння (3), отримаємо рівняння для проєкцій \dot{H}_z і \dot{E}_z :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{H}_z = 0; \quad (9.26)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{E}_z = 0. \quad (9.27)$$

З виразів (9.25) можна зробити висновок, що електромагнітне поле у хвилеводі у загальному випадку представляє собою суму двох незалежних полів:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}; & \dot{E}_y = \frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}; & \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}; & \dot{H}_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}; & \dot{H}_z \neq 0; \end{cases} \quad (9.28)$$

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}; & \dot{E}_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}; & \dot{E}_z \neq 0; \\ \dot{H}_x = \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}; & \dot{H}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}; & \dot{H}_z = 0. \end{cases} \quad (9.29)$$

Легко помітити, що поле (9.28) є поперечно-електричним полем ($E_z = 0$), а поле (9.29) – поперечно-магнітним ($H_z = 0$).

Перейдемо до вивчення цих полів окремо.

Поперечно-електричні поля

Згідно з формулою (9.28) поле ТЕ у хвилеводі визначається повздовжньою складовою \dot{H}_z , яка задовольняє рівнянню (9.26).

Граничні умови для функції \dot{H}_z можна знайти із загальних граничних умов (9.22). Останні умови, які застосовуються до поля ТЕ, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = b; \\ \dot{E}_y &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Звідси, враховуючи (9.28) будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a; \\ \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = b. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Розв'язок рівняння (9.28) представимо у вигляді:

$$\dot{H}_z = X(x)Y(y)e^{-\gamma z}, \quad (9.32)$$

де $X(x)$ і $Y(y)$ – функції, які залежать відповідно тільки від x і y . Підставляючи останній вираз у рівняння (9.32) та проводячи нескладні перетворення, отримаємо

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_c^2 = 0,$$

звідки можна отримати, що

$$X'' + p^2 X = 0, \quad Y'' + q^2 Y = 0 \quad \text{і} \quad p^2 + q^2 = k_c^2,$$

де p^2 і q^2 – довільні коефіцієнти.

Загальний розв'язок цих диференціальних рівнянь можна зобразити у наступному вигляді:

$$X = (\dot{A}_1 \cos px + \dot{B}_1 \sin px);$$

$$Y = (\dot{A}_2 \cos qy + \dot{B}_2 \sin qy).$$

Отже, згідно з формулою (9.32) проекція \dot{H}_z буде дорівнювати

$$\dot{H}_z = (A_1 \cos px + B_1 \sin px)(A_2 \cos qy + B_2 \sin qy)e^{-\gamma z}, \quad (9.33)$$

причому коефіцієнт розповсюдження виражається з формули $\gamma^2 = p^2 + q^2 - k^2$.

Щоб знайти невідомі параметри, скористаємося граничними умовами (9.31). З першої умови випливає, що

$$B_2 = 0; \quad \sin qb = 0 \quad i \quad q = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

З другої умови отримаємо:

$$B_1 = 0; \quad \sin pa = 0 \quad i \quad p = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Отже,

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2;$$

$$\gamma = \gamma_{mn} = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2};$$

$$\dot{H}_z = \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z},$$

за умови, що $A_1 A_2 = \dot{A}_{mn}$.

Підставляючи тепер значення \dot{H}_z у рівняння (9.28), знайдемо остаточні вирази для проекцій векторів поперечно-електричного поля у прямокутному хвилеводі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = \frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_y = -\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_y = \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_z = \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}. \end{array} \right. \quad (9.34)$$

Як видно із отриманих рівностей, при $m = n = 0$ всі компоненти векторів, за виключенням \dot{H}_z , перетворюються в нуль. Звідси можна зробити висновок,

що числа m і n - можуть мати будь-які цілі значення, але вони не повинні одночасно дорівнювати нулю.

Таким чином, у прямокутному хвилеводі існує нескінченна множина типів поперечно-електричних полів, які характеризуються різними значеннями m і n (поля TE_{mn} і H_{mn}). Згідно (9.34), вздовж сторін a і b розподіл поля має форму стоячої хвилі, причому значення m визначає число напівхвиль, які вкладаються на інтервалі $0 \leq x \leq a$, а n – число напівхвиль на інтервалі $0 \leq y \leq b$.

Поле (9.34), очевидно, буде розповсюджуватися по осі z у вигляді біжучої хвилі, якщо коефіцієнт розповсюдження γ_{mn} має чисто уявне значення

$$\gamma_{mn} = i\beta_{mn} = i\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (9.35)$$

де β_{mn} – коефіцієнт фази (хвильове число). Для цього необхідно, щоб при заданих параметрах f , m , n , a і b виконувалася нерівність

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Якщо $k^2 < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, то поле є згасаючим.

Отже, у хвилеводі, так як і у просторі між провідними площинами, поле TE_{mn} буде хвильовим, якщо частота коливань f більша деякої критичної частоти $f_{кр}$, яка визначається з умови γ_{mn} .

Враховуючи (9.35), після неважких перетворень для $f_{кр}$ отримаємо

$$f_{кр} = \frac{1}{2\pi} k_c \nu = \frac{\nu}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.36)$$

де $\nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$. Критична довжина хвилі $\lambda_{кр}$, яка відповідає знайденій критичній частоті, розраховується за формулою

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} = \frac{2\pi c}{k_c \nu} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (9.37)$$

Звідси слідує, що умова розповсюдження хвилі по хвилеводу має вигляд

$$f > f_{кр} \quad \text{або} \quad \lambda < \lambda_{кр}. \quad (9.38)$$

Неважко розрахувати фазову швидкість та довжину хвилі TE_{mn} у хвилеводі. Фазова швидкість ν_ϕ дорівнює

$$\nu_\phi = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}, \quad (9.39)$$

а довжина хвилі

$$\lambda_{xв} = \frac{v_{\phi}}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \frac{v}{c}. \quad (9.40)$$

Отже, величина $\lambda_{xв}$ відрізняється від довжини хвилі, яка визначена для вільного простору з $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\mu = \mu_0$.

Групова швидкість $v_{гр}$ розраховується за формулою:

$$v_{кр} = \frac{d\omega}{d\beta_{mn}} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}. \quad (9.41)$$

З формул (9.39) і (9.41) для фазової та групової швидкостей випливає, що прямокутний хвилевод є дисперсійним середовищем.

Характеристичний опір хвилевода у випадку поперечно-електричних хвиль дорівнює

$$(Z_c)_{TE} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}. \quad (9.42)$$

При незмінних розмірах поперечного перерізу хвилевода, критична частота росте із збільшенням m і n , тобто хвилі з великими значеннями m і n мають більш високі критичні частоти. Отже, для передавання електромагнітної енергії на заданій частоті коливань по хвилеводу з найменшими поперечними розмірами необхідно використовувати хвилю з малими значеннями параметрів m і n .

Поперечно-магнітні поля

Поперечно-магнітні поля у хвилеводі визначаються проекцією \dot{E}_z , яка задовольняє диференціальне рівняння (9.27) та граничним умовам:

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=a; \\ \dot{E}_z &= 0 \quad \text{при } y=0, \quad y=b. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Так як рівняння (9.26) та (9.27) аналогічні, то розв'язок останнього буде мати такий же вигляд, як і (9.33), тобто

$$\dot{E}_z = (\dot{A}_1 \cos px + \dot{B}_1 \sin px)(\dot{A}_2 \cos qy + \dot{B}_2 \sin qy)e^{-\gamma z}, \quad (9.44)$$

причому знову

$$p^2 + q^2 = k_c^2 \quad \text{и} \quad \gamma^2 = p^2 + q^2 - k^2. \quad (9.45)$$

Задовольнивши граничні умови (9.43), отримаємо

$$\begin{cases} A_1 = 0; \quad \sin pa = 0; \quad p = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ A_2 = 0; \quad \sin qb = 0; \quad q = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9.46)$$

З урахуванням цього вираз (9.44) перетвориться до виду

$$\dot{E}_z = \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z},$$

де $\dot{B}_{mn} = B_1 B_2$.

Підставляючи розраховане значення \dot{E}_z у формулу (9.29), отримаємо остаточний вираз для складових векторів поперечно-магнітних полів у прямокутному хвилеводі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_y = -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{b} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_z = \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_x = \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_z = 0, \end{array} \right. \quad (9.47)$$

причому згідно з (9.44) та (9.45)

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2; \quad \gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2}.$$

Таким чином, у прямокутному хвилеводі може існувати нескінченна множина типів поперечно-магнітних полів, які характеризуються різними числами m і n (поля TM_{mn} і E_{mn}). Ці числа мають той же фізичний зміст, що і у випадку полів ТЕ.

Легко помітити, що при m або n , рівному нулю, вектори поля всюди перетворюються в нуль. Отже, у розглянутому хвилеводі полів TM_{00} , TM_{m0} або TM_{0n} , не існує, а параметри m і n можуть змінюватись в діапазоні $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$.

Аналогічно до попередніх міркувань виводяться формули для критичних частот, критичних хвиль та інших характеристик поперечно-магнітних хвиль різних типів. Їх загальний вид співпадає з формулами, які відносяться до поперечно-електричних хвиль, окрім формули для характеристичного опору хвилеводу, яка у випадку поперечно-магнітних хвиль має інший вигляд:

$$(Z_c)_{TM} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\varepsilon} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2}. \quad (9.48)$$

Отже, всі можливі типи розв'язків у прямокутному хвилеводі вичерпуються полями (9.44) і (9.47) при $m, n = 0, 1, 2$. Ці поля носять назву власних полів або власних хвиль прямокутного хвилеводу. Очевидно, що будь-

яке інше поле з більш складною конфігурацією у точках, де немає джерел, може бути представлено у вигляді сукупності власних полів.

Хвиля TE_{10} у прямокутному хвилеводі

Найпростішими хвилями у прямокутному хвилеводі є поперечно-електричні хвилі TE_{10} і TE_{01} . Обидві вони мають ідентичні властивості, тому ми обмежимося тим, що розглянемо тільки хвилі TE_{10} .

Задавши у виразах (9.34) $m = 1$ і $n = 0$, для проєкцій векторів \vec{E} і \vec{H} цієї хвилі отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -i\omega\mu \frac{a}{\pi} \dot{A}_{10} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}; \\ \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = i\beta_{10} \frac{a}{\pi} \dot{A}_{10} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}; \\ \dot{H}_y = 0; \\ \dot{H}_z = \dot{A}_{10} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}, \end{cases} \quad (9.49)$$

$$\text{де } \beta_{10} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}.$$

Згідно з формулою (9.36) критична частота поля TE_{10} дорівнює

$$(f_{кр})_{TE_{10}} = \frac{\nu}{2a} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{2a},$$

і, відповідно, критична довжина хвилі

$$(\lambda_{кр})_{TE_{10}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} 2a.$$

Якщо хвилевод заповнений повітрям, тобто $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\mu = \mu_0$, то

$$(f_{кр})_{TE_{10}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{2a}; \quad (\lambda_{кр})_{TE_{10}} = 2a.$$

З останніх можна зробити висновок, що параметри $f_{кр}$ і $\lambda_{кр}$ у даному випадку не залежать від розміру b поперечного перерізу хвилеводу. Крім того, $\lambda_{кр}$ у поля TE_{10} маж більше значення ніж критичних хвиль всіх інших типів, включаючи і поле TE_{01} при умові, що $a > b$ (для поля TE_{01} критична довжина хвилі дорівнює $\sqrt{\varepsilon\mu / \varepsilon_0\mu_0} 2b$). Внаслідок цього допустимі поперечні розміри хвилеводу для заданої частоти коливань виходять найменшими, якщо в ньому збуджується хвиля TE_{10} . Дана причина, на ряду з простотою конфігурації поля, призвела до того, що на практиці у прямокутних хвилеводах, як правило, застосовується хвиля типу TE_{10} .

Згідно з формулою (9.49) силові лінії електричного поля паралельні осі y . Магнітні силові лінії замкнуті. Вони лежать в площині, яка перпендикулярна

електричним силовим лініям, та оточують вертикально направленні струми зсуву.

При розповсюдженні хвилі вздовж хвилевода на його стінках з'являється поверхневий електричний струм. Вектор щільності струму пов'язаний з вектором напруженості магнітного поля співвідношенням

$$\vec{j}_S = \vec{H} \times \vec{n}.$$

З цього рівняння випливає, що складовою напруженості магнітного поля H_x у хвилеводі відповідає повздовжній струм j_{S_z} , причому при $y = 0$

$$j_{S_z} = H_x,$$

а при $y = b$

$$j_{S_z} = -H_x.$$

Розподіл щільності повздовжнього струму j_{S_z} у площині $y = b$, $0 \leq x \leq a$ для будь-якого фіксованого моменту часу зображено на рис. 9.10. Так як H_x перетворюється в нуль при $x = 0$ та $x = a$, то повздовжній струм на бічних стінках хвилевода також дорівнює нулю.

Складові поля H_z відповідають поперечні електричні струми, які протікають по стінках хвилевода у напрямках, перпендикулярних осі z . На бічних стінках протікає струм з щільністю $j_{S_y} = -H_z$. На верхній стінці хвилевода – струм $j_{S_x} = -H_z$, на нижній – струм $j_{S_x} = H_z$.

Розподіл поперечних струмів у хвилеводі показано на рис. 9.11.

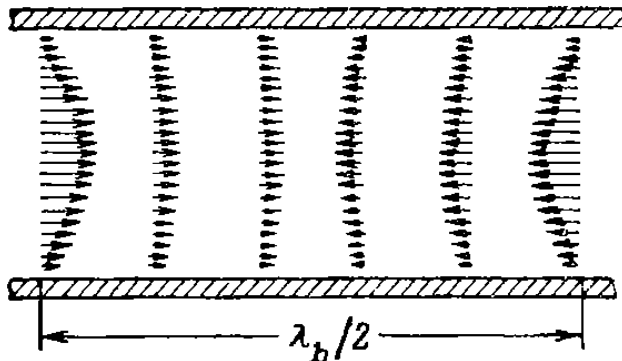


Рис. 9.10. Силові лінії поздовжнього струму хвилі TE_{10} на стінці $y = b$ хвилевода

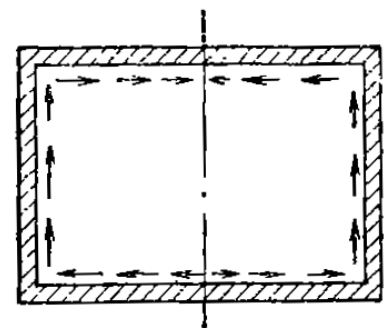


Рис. 9.11. Силові лінії поперечного струму хвилі TE_{10} на стінці $y = b$ хвилевода

Загальний вид силових ліній струму для фіксованого моменту часу представлено на рис. 9.12. У точках, позначених цифрами 1, 2, ..., струми провідності переходять у струми зсуву.

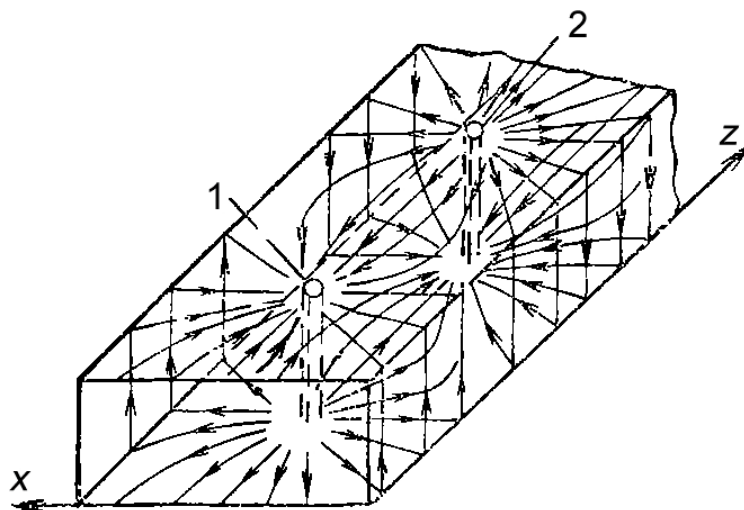


Рис. 9.12. Епюри силових ліній струму TE_{10} на стінках хвилевода

Визначимо величину потужності, яка проходить через поперечний переріз S_0 хвилевода.

$$P = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_0} \dot{E}_y \dot{H}_x^* dS = \frac{1}{4} \omega \mu A_{10}^2 \beta_{10} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 ab. \quad (9.50)$$

За допомогою цього виразу можна обчислити параметр $A_{10} = |\dot{A}_{10}|$ як функцію переданої потужності.

Розрахуємо середню енергію поля на одиницю довжини хвилеводу. Дана величина дорівнює

$$W_0 = W_{0e} + W_{0m} = \int_{S_0} (w_e)_{cp} dS + \int_{S_0} (w_m)_{cp} dS,$$

де W_{0e} і W_{0m} – середні енергії електричного та магнітного полів на одиницю довжини хвилеводу. $(w_e)_{cp}$ і $(w_m)_{cp}$ – середні щільності енергії електричного та магнітного полів, які розраховуються за формулами:

$$(w_e)_{cp} = \frac{\varepsilon}{4} \omega^2 \mu^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 A_{10}^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x;$$

$$(w_m)_{cp} = \frac{\mu}{4} (|\dot{H}_x|^2 + |\dot{H}_z|^2) = \frac{\mu}{4} A_{10}^2 \left[\beta_{10}^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x + \cos^2 \frac{\pi}{a} x \right],$$

звідки

$$W_{0e} = \frac{\varepsilon}{4} \omega^2 \mu^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 A_{10}^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi}{a} x dx dy = \frac{\varepsilon}{8} \omega^2 \mu^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 A_{10}^2 ab;$$

$$W_{0m} = \frac{\mu}{4} A_{10}^2 \int_0^a \int_0^b \left[\left(k^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right) \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \times \sin^2 \frac{\pi}{a} x + \cos^2 \frac{\pi}{a} x \right] dx dy = \frac{\varepsilon}{8} \omega^2 \mu^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 A_{10}^2 ab;$$

$$W_0 = \frac{\varepsilon}{4} \omega^2 \mu^2 A_{10}^2 ab. \quad (9.51)$$

Згідно з наведеними формулами енергії, збережені у електричному та магнітному полях хвилевода, рівні між собою. Проте така рівність має місце тільки в тому випадку, коли поле є хвильовим, тобто коли частота коливань $f > f_{кр}$. Розрахунок показує, що при $f < f_{кр}$ середня енергія електричного поля вже не дорівнює середній енергії магнітного поля.

Відношення P/W_0 , як відомо, є швидкістю передавання енергії в напрямній системі. Розрахувавши це відношення, отримаємо

$$\frac{P}{W_0} = \frac{\beta_{10}}{\omega \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = v_{zp}.$$

Окрім того, поле хвилі TE_{10} у прямокутному хвилеводі може бути представлено як сукупність полів двох плоских хвиль. Для цього вираз (13.28) запишемо інакше:

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -\omega \mu \frac{a}{2\pi} \left[e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} \right] \dot{A}_{10}; \\ \dot{H}_x = \beta_{10} \frac{a}{2\pi} \left[e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} \right] \dot{A}_{10}; \\ \dot{H}_z = \frac{1}{2} \left[e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} \right] \dot{A}_{10}, \end{cases} \quad (9.52)$$

звідки

$$\dot{E}_y = \dot{E}_y^{(1)} + \dot{E}_y^{(2)};$$

$$\dot{H}_x = \dot{H}_x^{(1)} + \dot{H}_x^{(2)};$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_z^{(1)} + \dot{H}_z^{(2)}.$$

Позначивши $\beta_{10} / k = \sin \varphi$ і $\pi / ak = \cos \varphi$, із (9.52) отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{E}_y^{(1)} = -\frac{\omega \mu a}{2\pi} \dot{A}_{10} e^{-ik(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \\ \dot{H}_x^{(1)} = \frac{\beta_{10} a}{2\pi} \dot{A}_{10} e^{-ik(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \\ \dot{H}_z^{(1)} = \frac{1}{2} \dot{A}_{10} e^{-ik(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \end{cases} \quad (9.53)$$

$$\begin{cases} \dot{E}_y^{(2)} = \frac{\omega \mu a}{2\pi} \dot{A}_{10} e^{-ik(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \\ \dot{H}_x^{(2)} = -\frac{\beta_{10} a}{2\pi} \dot{A}_{10} e^{-ik(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \\ \dot{H}_z^{(2)} = \frac{1}{2} \dot{A}_{10} e^{-ik(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}. \end{cases} \quad (9.54)$$

Множник $e^{-ik(-x\cos\varphi+z\sin\varphi)}$ у виразах (9.53), (9.54) відповідає плоскій хвилі, яка розповсюджується у напрямку орта \vec{r}_1 , який утворює з осями x, y, z кути $\pi - \varphi, \pi/2, \pi/2 - \varphi$. Вектор $\vec{E}^{(1)}$ у полі, що описується формулою (9.53) перпендикулярний напрямку \vec{r}_1 . В цьому легко переконатися, якщо обчислити скалярний добуток $(\vec{E}^{(1)}, \vec{r}_1)$, який буде дорівнювати нулю. Вектор $\vec{H}^{(1)}$ лежить у площині xOz і також є перпендикулярним до орта \vec{r}_1 .

Модуль вектора $\vec{H}^{(1)}$ має вигляд

$$|\vec{H}^{(1)}| = \sqrt{|\dot{H}_x^{(1)}|^2 + |\dot{H}_z^{(1)}|^2} = A_{10} \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} \beta_{10}^2 a^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2\pi} ka A_{10}.$$

Тоді, відношення

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{H}_1} = -\frac{\dot{E}_y^{(1)}}{\dot{H}^{(1)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0.$$

Таким чином, поле (9.53) є полем лінійно-поляризованої плоскої хвилі, яка рухається у напрямку \vec{r}_1 .

Аналогічно можна показати, що вирази (9.54) визначають поле іншої плоскої хвилі, яка розповсюджується у напрямку \vec{r}_2 . Зрозуміло, що ці хвилі існують не у всьому просторі, а тільки там, де зосереджена хвиля TE_{10} , тобто в області, обмеженій стінками хвилевода.

Сукупність двох таких плоских хвиль можна розглядати як результат багаторазового відбивання однієї плоскої хвилі при позмінному її падінні на ідеально провідні площини $x=0$ і $x=a$.

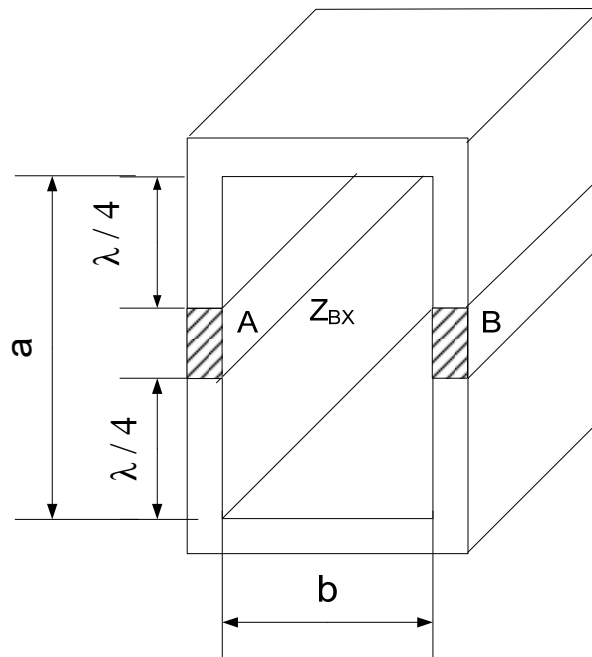
Кут падіння хвилі на відбиваючу поверхню визначається виразом

$$\varphi = \arccos \pi / ak = \arccos \lambda / 2a \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 / \varepsilon \mu} = \arccos(\lambda / \lambda_{кр}).$$

Звідки випливає, що при $\lambda = \lambda_{кр}$ плоска хвиля розповсюджується у напрямках, перпендикулярних поздовжній осі хвилеводу (кут $\varphi = 0$). У цьому випадку, перенесення енергії електромагнітного поля вздовж хвилеводу відсутнє. З останнього виразу випливає, що $\lambda > \lambda_{кр}$ розповсюдження хвилі TE_{10} у хвилеводі стає неможливим, тому що $\cos\varphi$ повинен бути більше одиниці.

Приклади вирішення типових задач

1. Розмір a поперечного перерізу прямокутного хвилеводу більше, ніж $\lambda / 2$.
2. Показати, що такий хвилевід можна представити у вигляді двопровідної лінії АВ, до якої примикають з обох сторін коротко замкнені перемички довжиною $\ell = \lambda / 4$. Чи будуть ці перемички перешкодою для передачі хвиль напруги і струму в поздовжньому напрямку (по лінії АВ)?



Розв'язок:

Скористаємося формулою, яка в разі коротко замкнутих перемичок ($Z_H = 0$) має вид:

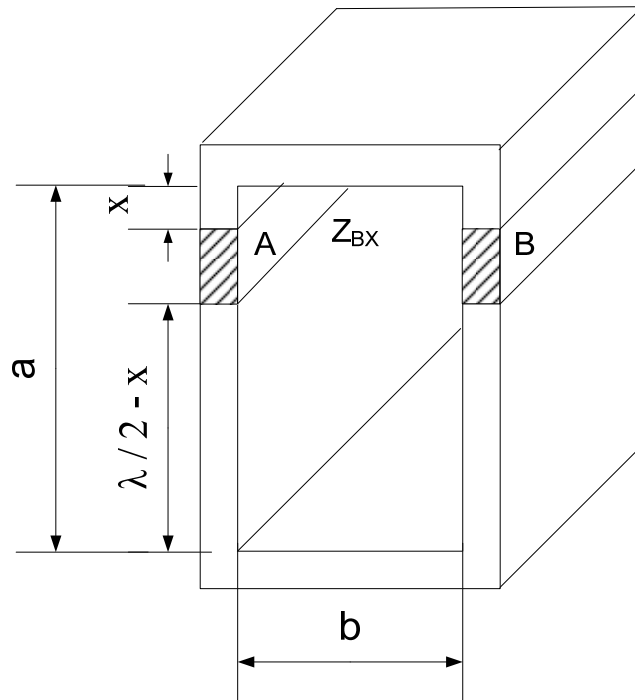
$$Z_{BX} = iW \operatorname{tg}(k\ell).$$

Так як довжина перемичок $\lambda / 4$, то

$$k\ell = \frac{2\pi\ell}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}(k\ell) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty \Rightarrow Z_{BX} = \infty.$$

Таким чином, вхідний опір перемичок дорівнює нескінченності і вони не впливають на довгу лінію АВ. Ця властивість широко використовується на практиці, наприклад, при створенні "металевих ізоляторів", призначених для закріплення одного провідника по відношенню до іншого без допомоги діелектричних ізоляторів.

2. Нехай розмір a прямокутного хвилеводу більше, ніж $\lambda / 2$, але лінія АВ знаходиться на довільній відстані x від верхньої коротко замкнутої перемички. Чи будуть в цьому випадку перемички бути перешкодою для передачі хвиль по лінії АВ?



Розв'язок:

У формулі для верхньої перемички між іншим $\ell = x$, а для нижньої - $\ell = \lambda / 2 - x$. Оскільки вони обидві короткозамкнені, то:

- для верхньої перемички

$$Z_{\text{BX}}' = iW \operatorname{tg}(kx) = iW \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right),$$

- для нижньої перемички

$$Z_{\text{BX}}'' = iW \operatorname{tg}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right].$$

Оскільки ці перемички включені паралельно, то їх загальний опір

$$Z_{\text{BX}} = \frac{Z_{\text{BX}}' Z_{\text{BX}}''}{Z_{\text{BX}}' + Z_{\text{BX}}''},$$

А так як

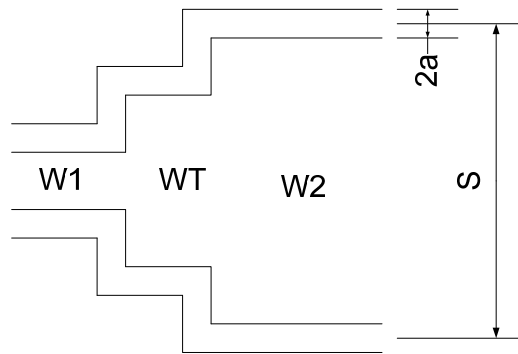
$$Z_{\text{BX}}'' = iW \operatorname{tg}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = -iW \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right),$$

то

$$Z_{\text{BX}} = \frac{iW \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \left[-iW \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)\right]}{iW \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + \left[-iW \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)\right]} = \infty$$

Таким чином, як і в попередньому випадку, передачі хвиль уздовж АВ перемички перешкоджати не будуть.

3. Визначити хвильовий опір чвертьхвильового трансформатора W_T ,



що узгоджує відрізки двопровідних ліній з хвильовими опорами $W_1 = 200$ Ом і $W_2 = 450$ Ом, а також знайти відношення відстані між дротами S до радіусу дротів a , S/a .

Розв'язок:

Скористаємося формулою для визначення опору узгоджувального чвертьхвильового трансформатора, задавши довжину лінії $x = \lambda / 4$. Оскільки $\beta_{\text{к}}x = kx = 2\pi x/\lambda = \pi/2$, отримаємо

$$W = \sqrt{Z_{\text{вх}} Z_{\text{н}}}$$

Так як хвильові опори ліній залежать від їх поперечних розмірів, то лінії з неоднаковими хвильовими опорами будуть мати різні поперечні перерізи. Тому такі пристрої називають ступінчастими трансформаторами. Для узгоджувальної ділянки

$$W_T = \sqrt{200 \cdot 450} = 300 \text{ Ом.}$$

Хвильовий опір двопровідної лінії визначається як

$$W = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \frac{s}{a},$$

де a - радіус проводів лінії; s - відстань між центрами проводів; ε - відносна діелектрична проникність ізоляції. Для повітряної двопровідної лінії

$$W = 276 \lg \frac{s}{a}.$$

З виразу випливає, що

$$W = 276 \lg \frac{s}{a} \Rightarrow \lg \frac{s}{a} = \frac{300}{276} = 1,08 \Rightarrow \frac{s}{a} = 10^{1,08} = 12,02.$$

Тому

$$\frac{s}{a} = 12,02 .$$

Знайдемо також відношення s / a для узгоджуваних ліній:

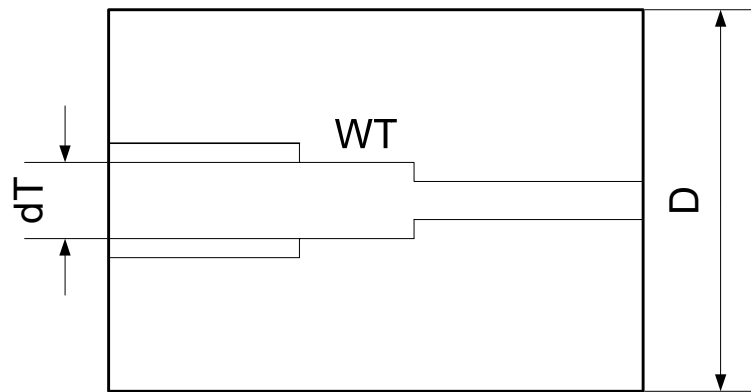
- для лінії з $W = 200 \text{ Ом}$

$$200 \lg \frac{s}{a} \Rightarrow \lg \frac{s}{a} = \frac{200}{276} = 0,724 \Rightarrow \frac{s}{a} = 10^{0,724} = 5,29 ,$$

- для лінії з $W = 450 \text{ Ом}$

$$450 \lg \frac{s}{a} \Rightarrow \lg \frac{s}{a} = \frac{450}{276} = 1,63 \Rightarrow \frac{s}{a} = 10^{1,63} = 42,65 .$$

4. Визначити хвильовий опір і поперечні розміри коаксіального переходу від кабелю РК-80 до кабелю РК-60, де числа в маркуванні – хвильові опори кабелів, див рис.



Розв'язок:

Хвильовий опір коаксіальної лінії:

$$W = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \frac{D}{d} ,$$

де D - внутрішній діаметр зовнішньої оболонки кабелю (визначається по ізоляції), d - діаметр центрального провідника.

Для повітряної коаксіальної лінії:

$$W = 138 \lg \frac{D}{d} .$$

За допомогою формули знаходимо:

$$W_T = \sqrt{60 \cdot 80} = 69,28 \text{ Ом.}$$

$$69,28 \lg \frac{D}{d} \Rightarrow \lg \frac{D}{d} = \frac{69,28}{138} = 0,502 \Rightarrow \frac{D}{d} = 10^{0,502} = 3,17 ,$$

У позначеннях стандартних кабелів після хвильового опору через дефіс слідує цифра, яка вказує на діаметр оболонки по обмотці. Наприклад, з позначення РК-50-11 видно, що $D = 11$ мм. прийнявши цей діаметр за загальний, отримуємо діаметр центрального дроту перехідника

$$d_{\text{т}} = \frac{D}{3,17} = \frac{11}{3,17} = 3,47 \text{ мм.}$$

Примітка. Виходячи з максимальної потужності і мінімальних втрат при заданому діаметрі зовнішнього провідника (оболонки) в якості компромісного стандарту прийняті повітряна коаксіальна лінія з хвильовим опором 60 Ом і співвідношенням між діаметрами $D/d = 2,3$ і лінія з $W = 80$ Ом і співвідношенням $D/d = 3,6$.

5. Розрахувати експоненційний фідерний трансформатор, призначений для узгодження антени з активним вхідним опором $R_A = 600$ Ом і фідера з хвильовим опором $W = 300$ Ом. Фідер виконаний з двох мідних проводів діаметром $d = 2a = 3$ мм. Допустимий КСВ = 1,1 при максимальній робочій довжині хвилі $\lambda_{\text{max}} = 80$ м.

Розв'язок:

Хвильовий опір експоненційного трансформатора на відстані x від його кінця

$$W_{\text{в1}} = W_{\text{в2}} e^{-bx},$$

де $W_{\text{в2}}$ хвильовий опір трансформатора на його кінці;

b - параметр, який обирають виходячи з допустимого коефіцієнта стоячої хвилі КСВ в лінії і максимальної довжини хвилі діапазону λ_{max} :

$$|b| = \frac{8\pi}{\lambda_{\text{max}}} \text{КСВ.}$$

Довжина експоненційного трансформатора

$$\ell = \frac{2,3}{b} \lg \frac{W_{\text{в2}}}{W_{\text{в1}}}.$$

Визначаємо коефіцієнт b , що характеризує ступінь зміни параметрів трансформатора, згідно з формулою

$$|b| = \frac{8\pi}{b} \text{КСВ} = \frac{8\pi}{80} 1,1 = 0,345 \frac{1}{\text{м}}$$

Прирівнявши $R_A = W_{B2}$, а $W = W_{B1}$, знаходимо відповідно довжину трансформатора

$$\ell = \frac{2,3}{b} \lg \frac{W_{B2}}{W_{B1}} = \frac{2,3}{0,345} \lg \frac{600}{300} = 2 \text{ м.}$$

Обчислюємо хвильові опори Z_{XB} і відстані між проводами s_x в різних перетинах трансформатора ($x = 0, 2, 4, \dots, 20$ м), враховуючи, що крайні значення хвильових опорів рівні 600 і 300 Ом і для повітряної лінії, яка є до того ж експоненціальним трансформатором, справедливі рівності

$$R_A = 276 \lg \frac{s_x}{a}, R_A = W_{B2} e^{-bx}.$$

Результати розрахунку зводимо в табл.

Таблиця. Профіль експоненційного трансформатора

$x, \text{м}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
bx	0	0,07	0,14	0,21	0,28	0,35	0,41	0,48	0,55	0,66	0,70
e^{-bx}	1	0,93	0,87	0,81	0,76	0,71	0,66	0,62	0,58	0,52	0,50
R_A	600	560	523	488	455	425	397	370	346	310	300
$\lg \frac{s_x}{a}$	2,17	2,03	1,89	1,77	1,65	1,54	1,44	1,34	1,25	1,12	1,09
$\frac{s_x}{a}$	148	107	77,7	58,9	44,7	34,7	27,7	21,9	17,8	13,2	12,3
s_x	222	161	117	87,4	67,1	52,1	41,6	32,9	26,7	19,8	18,5

6. Визначити типи поперечно-магнітних хвиль, які можуть поширюватися в плоскопаралельному хвилеводі на частоті $f = 60$ МГц, відстань між ідеально провідними площинами $a = 6$ см. Знайти основні параметри цих хвиль: хвильовий опір, критичну довжину хвилі, фазову швидкість, довжину хвилі між пластинами.

Розв'язок:

Визначимо довжину хвилі і фазову постійну в вільному просторі:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^7} = \frac{30}{6} = 5 \text{ м;}$$

$$\beta = k = \frac{2\pi}{\lambda} = 125,6 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Критичну довжину хвилі для плоскопаралельного хвилеводу знаходимо за формулою:

$$\lambda_{кр} = \frac{2a}{m},$$

де m - кількість півхвиль, які можуть укластися між пластинами. Звідси випливає, що умовою кр $\lambda < \lambda_{кр}$ відповідають характеристичні числа:

а) $m = 0$ - плоска електромагнітна хвиля TEM;

б) $m = 1$ - поперечно-магнітна хвиля TM_1 (E_1);

в) $m = 2$ - поперечно-магнітна хвиля TM_2 (E_2).

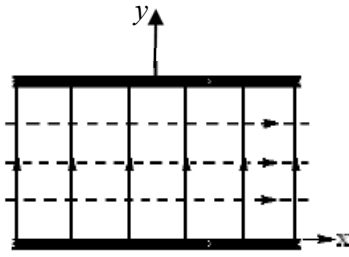
Перший тип. Плоска електромагнітна хвиля (TEM) може поширюватися як у вільному просторі, так і між ідеально провідними площинами. При цьому $n=0$; $\lambda_{кр} = \infty$; $W_{TEM} = W_0 = 355 \text{ Ом}$; $v_{гр} = v_{ф}$; $\lambda_{в} = \lambda$. Якщо вісь z прямокутної системи координат направити в сторону поширення хвилі, вісь y - перпендикулярно площинам, а вісь x - паралельно їм, то рівняння для електричної та магнітної складових поля хвилі TEM запишемо в такій формі:

$$\begin{aligned} E_z &= 0; \\ E_y &= E_0 e^{i(\omega t - \beta z)}; \\ H_x &= \frac{E_0}{W_0} e^{i(\omega t - \beta z)}. \end{aligned}$$

Електричні силові лінії нормальні до обмежуючих поверхонь, магнітні силові лінії їм паралельні. вектори \vec{E} і \vec{H} поперечні, тобто лежать в площині, перпендикулярній напрямку поширення хвилі z . Значення модулів E і H залишаються незмінними в межах цієї площини, тобто не залежить від координат y і x . Обидві складові поля збігаються по фазі, див. рис. Щільність струму зміщення

$$j_{см} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = i \omega \epsilon \epsilon_0 E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} = \omega \epsilon \epsilon_0 E_0 e^{i(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2})}$$

Напрями векторів \vec{j} і \vec{E} збігаються, але $j_{см}$ випереджає E на чверть періоду. У напрямку поширення z складові поля змінюються по закону біжучої хвилі, а на відстані, рівному половині довжини хвилі, їх знак змінюється на протилежний.



Другий тип ($n = 1$) - хвиля TM_1 (або E_1), в якій електричне поле має крім поперечної складової ще й складову в напрямку поширення. В цьому випадку $\lambda_{кр1} = 2a = 12\text{см}$, тобто подвоєній відстані між поверхнями, а параметри хвильового процесу рівні:

$$v_{\phi 1} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,906} = 3,32 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}};$$

$$\lambda_{в1} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{5}{0,906} = 5,51 \frac{\text{М}}{\text{с}};$$

$$v_{гр1} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,906 = 2,72 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}};$$

$$W_E = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = 355 \cdot 0,906 = 321 \text{ Ом.}$$

Електромагнітне поле має подовжню і поперечну складові E_z і E_y , а також магнітну складову H_x , визначаються такими виразами:

$$E_y = E_0 \frac{\lambda}{\lambda_{в1}} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z};$$

$$E_z = iE_0 \frac{\lambda}{\lambda_{кр1}} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z};$$

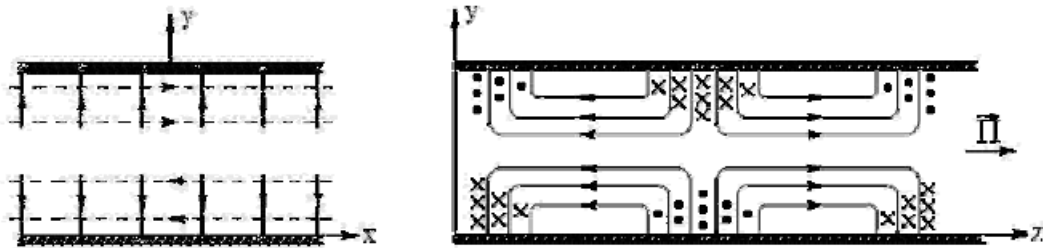
$$H_x = -\frac{E_0}{W_0} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z},$$

де $\beta_1 = 2\pi / \lambda_{в1}$ - фазова постійна в плоскопаралельному волноводі.

На обмежуючих поверхнях ($y = 0$ або $y = a / 2$) $E_z = 0$, отже, електричні силові лінії виходять з поверхонь по нормалям, на середині відстані між поверхнями ($y = a / 2$)

$$\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \Big|_{y=a/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

тому $E_y = 0$, тобто залишається лише поздовжня складова E_z . Таким чином, при $y = a / 2$ електричні силові лінії паралельні обмежувачим поверхням. При переміщенні від однієї поверхні до іншої на ділянці від $y = 0$ до $y = a / 2$ відбувається поступове збільшення E_z за законом $\sin(\pi y / a)$ і поступове зменшення E_y за законом $\cos(\pi y / a)$. Електричні силові лінії все більш і більш відхиляються від нормалей до поверхонь. На ділянці від $y = a / 2$ до $y = a$ відбувається зменшення E_z і збільшення E_y , електричні силові лінії наближаються до нормалей, див. рис.



Напруженість магнітного поля H_x матиме один знак при $0 < y < a / 2$ і іншої - при $a / 2 < y < a$. При $y = a / 2$ складова $H_x = 0$. Густота магнітних силових ліній буде зменшуватися в міру віддалення від поверхонь до середини відстані між ними. Складова H_x знаходиться в фазі з складовою E_y .

Третій тип ($n = 2$) відповідає хвилі TM_2 (або E_2). В цьому випадку

$$\lambda_{кр2} = \frac{2a}{2} = a = 6\text{см};$$

$$v_{гр2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр2}}\right)^2} = 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 1,66 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_{ф2} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}} = 5,43 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$W_E = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2} = 355 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 196 \text{ Ом};$$

$$\lambda_{в1} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}} = 9\text{см}.$$

Вирази для існуючих складових поля хвилі TM_1 (E_1). мають такий вигляд:

$$E_y = E_0 \frac{\lambda}{\lambda_{B2}} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z};$$

$$E_z = iE_0 \frac{\lambda}{\lambda_{кр2}} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z};$$

$$H_x = -\frac{E_0}{W_0} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z},$$

де β_2 - фазова постійна хвилі TM_2 (E_2)

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_B} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 0,22\pi \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

7. Визначити потужність, передану по плоско паралельного хвилеводу, що складається з двох мідних смуг, розділених діелектриком з відносними значеннями проникності: діелектричної $\epsilon = 2,25$ і магнітної $\mu = 1$; товщина діелектрика $a = 2$ мм; ширина смуг $b = 20$ мм; амплітуда напруженості електричного поля $E_0 = 4000$ В / м, частота $f = 40$ ГГц. Визначити втрати потужності в мідних смугах на 1 м довжини лінії. Розрахунок виконати для всіх типів хвиль ТМ, які можуть передаватися по цій лінії. Впливом країв смуг можна знехтувати. Втрати потужності в діелектрику вважати рівними нулю.

Розв'язок:

Знайдемо деякі параметри хвильового процесу:

- швидкість поширення в діелектрику:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,25}} = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

- фазовий коефіцієнт:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8} = 400\pi \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

- довжину хвилі в діелектрику:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \cdot 10^8}{40 \cdot 10^9} = 5 \text{ мм}.$$

В цій лінії можуть поширюватися такі типи поперечно магнітних хвиль: хвиля ТЕМ (TM_0) з критичною довжиною $\lambda_{кр} = \infty$ і хвиля TM_1 (або E_1), для якої

$$\lambda_{кр} = 2a = 6 \text{ мм}.$$

Зауважимо, що тут використана система координат, обрана в попередній задачі. Вирази для складових поля хвилі типу TM_1 залишаються такими ж, як у попередній задачі. У разі поширення хвилі TEM хвильовий опір лінії:

$$W_0' = \frac{\sqrt{\mu\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{377}{\sqrt{2,25}} = 251 \text{ Ом},$$

тоді амплітуда напруженості магнітного поля

$$H_0 = \frac{E_0}{W_0'} = \frac{4000}{251} = 15,93 \text{ А/м}.$$

Діелектрик не має втрат, отже, E_y і H_x збігаються по фазі і середнє значення поздовжньої складової вектора Пойнтінга, визначається як векторний добуток векторів \vec{E} та \vec{H} , Дорівнюватиме їх похідній:

$$P_{cp} = \frac{1}{2} E_y H_x^* = \frac{1}{2} E_y H_x = 0,5 \cdot 4000 \cdot 15,93 = 31860 \text{ Вт/м}^2.$$

Множником $\frac{1}{2}$ в виразі для P_{cp} враховується, що E_0 і H_0 є амплітудними значеннями. Отримане значення P_{cp} постійне по всьому перетину лінії в площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі. Тоді передана лінією потужність дорівнює

$$P = P_{cp} ab = 31860 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 1,91 \text{ Вт}.$$

Амплітудне значення поверхневої густини струму в мідних смугах:

$$j_{\text{макс}} = H_0 = 15,93 \text{ А/м}.$$

Діюче значення струму в смугах:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} j_{\text{макс}} b = \frac{\sqrt{2} \cdot 15,93 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,225 \text{ А},$$

питомий поверхневий опір міді

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 40 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5,6 \cdot 10^7}} = 5,26 \cdot 10^{-2} \text{ Ом};$$

поверхневий опір двох смуг на 1 м довжини лінії

$$R = 2R_s \frac{1}{b} = \frac{2 \cdot 5,26 \cdot 10^{-2}}{20 \cdot 10^{-3}} = 5,2 \text{ Ом};$$

втрати потужності в мідних смугах на 1 м довжини лінії

$$P_1 = I^2 R = 0,225^2 \cdot 5,2 = 0,26 \text{ Вт}.$$

У разі поширення хвилі ТМ1 (E1) довжина її між пластинами дорівнює

$$\lambda_B = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}} = 9 \text{ мм},$$

а хвильовий опір лінії

$$W_E = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2} = 251 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 139 \text{ Ом}.$$

Втрати в мідних смугах, що обмежують поле, будуть мати таку ж величину, як і в випадку хвилі ТЕМ. Це можна пояснити тим, що складова напруженості магнітного поля, що визначається як

$$H_x = \frac{E_y}{W_E},$$

має вигляд

$$H_x = \frac{E_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_B}\right)}{W_E} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z},$$

звідки амплітуда напруженості магнітного поля

$$H_0 = \frac{E_0}{W_E} \left(\frac{\lambda}{\lambda_B}\right) = \frac{E_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_B}\right)^2}}{W_0' \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_B}\right)^2}} = \frac{E_0}{W_0'} = 15,93 \text{ А/м},$$

тобто така ж, як і для хвилі ТЕМ. Отже, такий же буде і поверхнева щільність провідності, а значить, і втрати в смугах. Передану потужність визначають так:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^b \int_0^a \Pi_{cp} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a E_y H_x^* dx dy = \\ &= \frac{b}{2} \int_0^a E_0 \frac{\lambda}{\lambda_B} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z} \frac{E_0}{W_0'} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i\beta_1 z} dy = \\ &= \frac{b}{2} \frac{E_0^2}{W_0'} \frac{\lambda}{\lambda_B} \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) dy = \frac{ab E_0^2 \lambda}{4 W_0' \lambda_B}; \end{aligned}$$

i

$$P = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 4000^2 \cdot 5}{4 \cdot 251 \cdot 9} = 13,2 \text{ Вт.}$$

8. Визначити, які типи хвиль можуть поширюватися в заповненому повітрям прямокутному хвилеводі перетином $a \times b = 4 \times 2$ см при частоті $f = 6$ ГГц. Знайти значення критичної довжини хвилі і довжини хвилі в хвилеводі в кожному випадку.

Розв'язок:

Довжина хвилі у вільному просторі:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^9} = 5 \text{ см.}$$

Критична довжина хвилі визначається виразом:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{a}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{4}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2}}$$

a довжина хвилі в хвилеводі

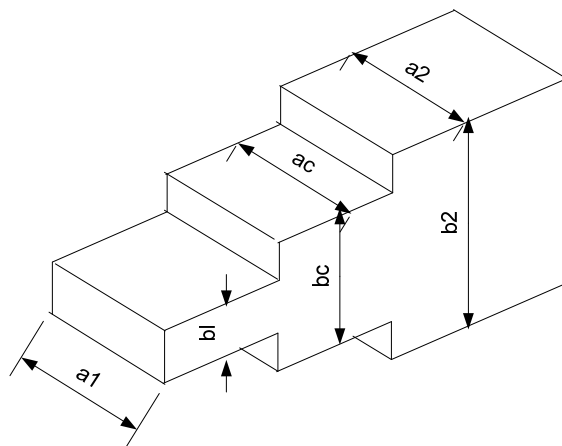
$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}$$

Умовою $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ задовольняють типи хвиль (див. табл.).

Таблиця. Типи хвиль в прямокутнім хвилеводі

Можливі типи Хвиль	Характеристичні числа		Критична довжина Хвилі, см	Довжина хвилі в хвилеводі, см
	<i>M</i>	<i>n</i>		
TE ₁₀ (H ₁₀)	1	0	10	4,36
TE ₂₀ (H ₂₀)	2	0	5	6,66
TE ₀₁ (H ₀₁)	0	1	5	6,66
TE ₁₁ (H ₁₁) і TM ₁₁ (E ₁₁)	1	1	4,47	8,95

9. Визначити розміри поперечного перерізу a_c , b_c і довжину чверть хвильового трансформатора ℓ_c , узгоджувального два відрізки прямокутного хвилеводу, з яких один відрізок має розміри $a_1 = 19,05$ мм, $b_1 = 9,53$ мм, а інший - $a_2 = a_1 = 17,25$ мм, $b_2 = 10,2$ мм (рис. 2.8). У хвилеводі поширюється хвиля типу H₁₀ з частотою $f = 15$ ГГц.



Розв'язок:

Знайдемо довжину хвилі у вільному просторі:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{14 \cdot 10^9} = 2 \text{ см.}$$

Хвильовий опір хвилеводу з хвилею H_{10} по потужності і напрузі визначається як:

$$W_{P,U} = W = \frac{2b}{a} W_H,$$

де - W_H питомий хвильовий опір

$$W_H = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

Оскільки розмір широкої стінки не змінюється,

$$W_{H1} = W_{H2} = W_H,$$

хвильовий опір сходінки

$$W_c = \sqrt{W_1 W_2},$$

де

$$W_1 = \frac{2b_1}{a_1} W_H,$$

$$W_2 = \frac{2b_2}{a_2},$$

$$W_c = \frac{2b_c}{a_c}.$$

Так як

$$a_1 = a_2 = a_c = 19,05 \text{ мм,}$$

то

$$b_c = \sqrt{b_1 b_2} \text{ або } b_c = \sqrt{8,5 \cdot 9,2} = 8,84 \text{ мм.}$$

Довжина сходинок:

$$\ell_c = \frac{\lambda_B}{4},$$

де

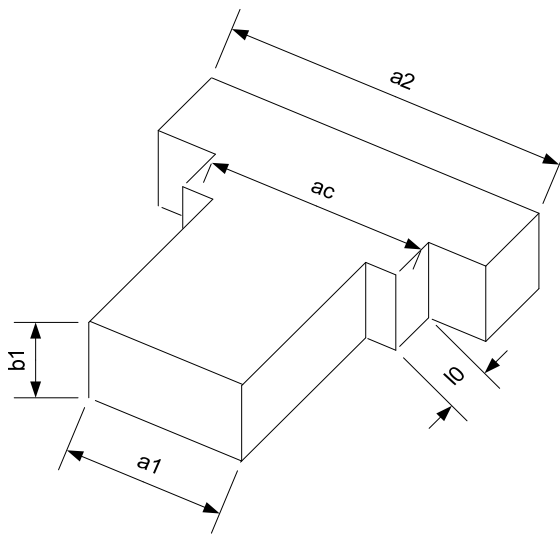
$$\lambda_B = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{2 \cdot 1,725}\right)^2}} = 8,1 \text{ см.}$$

Тоді

$$\ell_c = \frac{8,1}{4} = 2,02 \text{ см.}$$

Відповідь: $a_c = 19,05 \text{ мм}$, $b_c = 8,84 \text{ мм}$, $\ell_c = 2,02 \text{ см}$.

10. Визначити розміри поперечного перерізу a_c , b_c і довжину ступеневого трансформатора ℓ_c , який узгоджує два відрізки прямокутного хвилевода,



один з яких має розміри $a_1 = 15,8 \text{ мм}$, $b_1 = 7,9 \text{ мм}$ (МЕК-140), а інший - $a_2 = 19,05 \text{ мм}$, $b_2 = b_1 = 7,9 \text{ мм}$. По першому хвилеводу проходить хвиля типу H_{10} з частотою $f = 14 \text{ ГГц}$.

Розв'язок:

Знайдемо довжину хвилі у вільному просторі для першого хвилевода. Так як середня частота для хвилевода МЕК-140 відповідає середній частоті $f_1 = 14 \text{ ГГц}$, то

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{14 \cdot 10^9} = 2,14 \text{ см.}$$

Довжина хвилі у вільному просторі для другого хвилеводу MEK-120:

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^9} = 2,5 \text{ см.}$$

Довжина хвилі у вільному просторі для узгоджувальної сходинки:

$$\lambda_{\text{cp}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{2,14 + 2,5}{2} = 2,32 \text{ см.}$$

Хвильовий опір узгоджувальних хвилеводів визначають так:

- для першого хвилеводу:

$$W_1 = \frac{2b}{a_1} \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{2a_1}\right)^2}} = \frac{2 \cdot 0,79}{1,58} \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,14}{2 \cdot 1,58}\right)^2}} = 512,6 \text{ Ом;}$$

- для другого хвилеводу:

$$W_2 = \frac{2b}{a_2} \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_2}{2a_2}\right)^2}} = \frac{2 \cdot 0,79}{1,905} \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,5}{2 \cdot 1,905}\right)^2}} = 414,4 \text{ Ом.}$$

Хвильовий опір сходинки:

$$W_c = \sqrt{W_1 W_2} = \sqrt{512,6 \cdot 414,4} = 461 \text{ Ом.}$$

Тоді розмір a_c сходинки знаходиться з виразу:

$$W_c = \frac{2b}{a_c} \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{\text{cp}}}{2a_c}\right)^2}},$$

Звідки

$$\begin{aligned} a_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{\text{cp}}}{2a_c}\right)^2} &= \frac{2bW_0}{W_c} \Rightarrow a_c^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda_{\text{cp}}}{2a_c}\right)^2\right] = 1,67 \Rightarrow a_c^2 = 1,67 + \frac{\lambda_{\text{cp}}^2}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_c^2 = 1,67 + \frac{2,32^2}{4} \Rightarrow a_c = 1,74 \text{ см} \end{aligned}$$

Довжина хвилі в сходинці

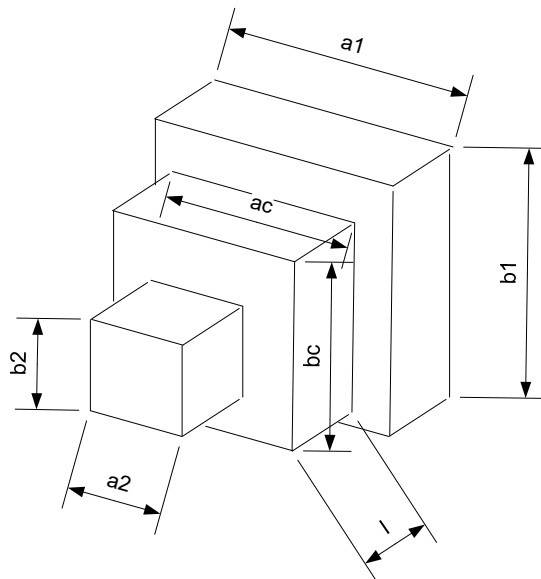
$$\lambda_c = \frac{\lambda_{cp}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cp}}{2 a_c}\right)^2}} = \frac{\lambda_{cp}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cp}}{2 a_c}\right)^2}} = \frac{2,32}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,32}{2 \cdot 1,74}\right)^2}} = 3,1 \text{ см},$$

a довжина сходинки

$$\ell_c = \frac{3,1}{4} = 0,775 \text{ см}.$$

Відповідь: $a_c = 1,74$ см, $b_c = 7,9$ см, $\ell_c = 0,775$ см.

11. Визначити розміри поперечного перерізу a_c , b_c і довжину ступеневого трансформатора ℓ_c , що узгоджує відрізки двох стандартних хвилеводів MEK-220 з розмірами $a_1 \times b_1 = 10,67 \times 5,32$ мм і MEK-180 з розмірами $a_2 \times b_2 = 12,96 \times 6,48$ мм. По першому хвилеводу проходить хвиля типу H_{10} з частотою $f_1 = 22$ ГГц.



Розв'язок:

Знайдемо спочатку довжини хвиль у вільному просторі:

- для першого хвилеводу:

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{22 \cdot 10^9} = 1,36 \text{ см}.$$

Довжина хвилі у вільному просторі для другого хвилеводу MEK-120:

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{18 \cdot 10^9} = 1,67 \text{ см}.$$

Довжина хвилі у вільному просторі для узгоджувальної сходинки:

$$\lambda_{cp} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{1,36 + 1,67}{2} = 1,52 \text{ см.}$$

Хвильові опори розраховуються за формулами:

- для першого хвилеводу

$$W_1 = \frac{2b_1}{a_1} \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{2a_1}\right)^2}} = \frac{2 \cdot 0,532}{1,067} \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{1,36}{2 \cdot 1,067}\right)^2}} = 487,6 \text{ Ом,}$$

- для другого хвилеводу

$$W_2 = \frac{2b_2}{a_2} \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_2}{2a_2}\right)^2}} = \frac{2 \cdot 0,648}{1,296} \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{1,67}{2 \cdot 1,296}\right)^2}} = 493 \text{ Ом.}$$

Хвильовий опір сходинок:

$$W_c = \sqrt{W_1 W_2} = \sqrt{487,6 \cdot 493} = 490,3 \text{ Ом.}$$

$$W_c = \frac{2b_c}{a_c} \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cp}}{2a_c}\right)^2}},$$

Звідки $a_c = 2b_c$.

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cp}}{2a_c}\right)^2} = \frac{W_0}{W_c} = \frac{377}{490,3} = 0,769 \Rightarrow 1 - \left(\frac{\lambda_{cp}}{2a_c}\right)^2 = 0,591 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda_{cp}}{2a_c}\right)^2 = 0,409 \Rightarrow \frac{\lambda_{cp}}{2a_c} = 0,64 \Rightarrow a_c = \frac{\lambda_{cp}}{2 \cdot 0,64} = \frac{1,52}{1,28} = 1,19 \text{ см;}$$

$$b_c = \frac{a_c}{2} = \frac{1,19}{2} = 0,595 \text{ см.}$$

Довжина хвилі в сходинок

$$\lambda_c = \frac{\lambda_{cp}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cp}}{2a_c}\right)^2}} = \frac{\lambda_{cp}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cp}}{2a_c}\right)^2}} = \frac{1,52}{\sqrt{1 - \left(\frac{1,52}{2 \cdot 1,19}\right)^2}} = 1,977 \text{ см,}$$

а довжина сходинок

$$\ell_c = \frac{1,977}{4} = 0,49 \text{ см.}$$

Відповідь: $a_c = 1,19 \text{ см; } b_c = 0,595 \text{ см; } \ell_c = 0,49 \text{ см.}$

12. Визначити критичну довжину хвилі в круглому хвилеводі, в якому поширюється хвиля H_{11} з частотою $f = 10$ ГГц при довжині хвилі в хвилеводі $\lambda_B = 4,5$ см. Знайти діаметр хвилеводу.

Розв'язок:

Знайдемо довжину хвилі у вільному просторі:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^9} = 2 \text{ см.}$$

Довжину хвилі в хвилеводі обчислюють за формулою

$$\lambda_B = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \lambda_B^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 \right] &= \lambda^2 \Rightarrow \lambda_B^2 - \frac{\lambda_B^2 \lambda^2}{\lambda_{кр}^2} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda_B^2 - \lambda^2 = \frac{\lambda_B^2 \lambda^2}{\lambda_{кр}^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{кр}^2 &= \frac{\lambda_B^2 \lambda^2}{\lambda_B^2 - \lambda^2} \Rightarrow \lambda_{кр} = \sqrt{\frac{\lambda_B^2 \lambda^2}{\lambda_B^2 - \lambda^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_B}\right)^2}} \end{aligned}$$

Тоді

$$\lambda_{кр} = \frac{3}{\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4,5}\right)^2}} = 4,03 \text{ см.}$$

Критичну довжину хвиль типу $TE (H)$ в круглих хвилеводах визначають з граничної умови

$$E_T|_{\rho=a} = E_\varphi|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow J'_m(k_{кр}\rho)|_{\rho=a} = J'_m(v_{mn}) = 0,$$

де a - радіус хвилеводу, v_{mn} - корені першої похідної по аргументу від функції Бесселя m -го порядку, тобто числа, які визначають структуру поля в площині поперечного перерізу хвилеводу: m характеризує зміну поля по колу хвилевода, а n - зміну вздовж радіуса. Значення декількох перших коренів v_{mn} при $m = 0, 1, 2$ наведені в таблиці.

Таблиця. Корені похідних функцій Бесселя

Номер кореня	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$n=1$	3,832	1,840	3,054
$n=2$	7,016	5,335	6,705
$n=3$	10,174	8,536	9,965

$$k_{\text{кр}} a = v_{mn},$$

де $k_{\text{кр}} = 2\pi/\lambda_{\text{кр}}$ - критичне хвильове число. Тоді критичну довжину хвилі для пустотілого круглого хвилеводу з хвилями типу H (TE) будемо визначати за формулою

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{v_{mn}},$$

а для хвилеводу з хвилею H_{11}

$$(\lambda_{\text{кр}})_{11} = \frac{2\pi a}{1,84};$$

$$D = 2a = \frac{1,84(\lambda_{\text{кр}})_{11}}{\pi} = \frac{1,84 \cdot 4,03}{\pi} = 2,36 \text{ см.}$$

$$\text{Відповідь: } (\lambda_{\text{кр}})_{11} = \frac{2\pi a}{1,84}; D = 2,36 \text{ см.}$$

13. Визначити довжину хвилі, хвильовий опір і коефіцієнт загасання в мідному ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ См / м}$) круглому хвилеводі з внутрішнім діаметром $D = 25,4 \text{ мм}$ при поширенні в ньому хвилі типу E_{01} з довжиною хвилі у вільному просторі $\lambda = 3 \text{ см}$.

Розв'язок:

Критичну довжину хвиль типу TM (E) в круглих хвилеводах знаходять з граничної умови

$$E_T|_{\rho=a} = E_z|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow J_m(k_{\text{кр}}a)|_{\rho=a} = J_m(\alpha_{mn}) = 0,$$

де α_{mn} - корені функцій Бесселя m -го порядку, тобто числа, які визначають структуру поля в площині поперечного перерізу хвилеводу: m характеризує зміну поля по колу хвилевода, а n - по радіусу. Значення перших коренів при $m = 0, 1, 2$ наведені в таблиці.

Таблиця. Корені функцій Бесселя

Номер кореня	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$n=1$	2,405	3,832	5,135
$n=2$	5,520	7,016	8,417
$n=3$	8,654	10,174	11,620

$$k_{\text{кр}} a = \alpha_{mn},$$

звідки для пустотілого круглого хвилеводу

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{\alpha_{mn}} = \frac{\pi D}{\alpha_{mn}}.$$

Тоді довжину хвилі в хвилеводі визначається за формулою:

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \alpha_{mn}}{\pi D}\right)^2}}$$

Для хвилі E_{01}

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \alpha_{01}}{\pi D}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 2,405}{\pi \cdot 2,54}\right)^2}} = 7,02 \text{ см.}$$

Хвильовий опір хвилеводу з хвилею E_{01}

$$W_{\text{хв}} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \alpha_{01}}{\pi D}\right)^2} = 377 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 2,405}{\pi \cdot 2,54}\right)^2} = 161 \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт загасання в хвилеводі з хвилею E_{01} знаходимо так:

$$\alpha = \frac{1,586}{D \sqrt{\sigma \lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \alpha_{01}}{\pi D}\right)^2}} \frac{\text{дБ}}{\text{м}},$$

і він дорівнює

$$\alpha = \frac{1,586}{0,0254 \sqrt{5,8 \cdot 10^7 \cdot 0,03} \sqrt{1 - \left(\frac{0,03 \cdot 2,405}{3,14 \cdot 0,0254}\right)^2}} = 0,11 \frac{\text{дБ}}{\text{м}}.$$

Відповідь: $\lambda_{\text{в}} = 7,02 \text{ см}$; $W_{\text{хв}} = 161 \text{ Ом}$; $\alpha = 0,11 \frac{\text{дБ}}{\text{м}}$.

Задачі для самостійного вирішення

1. Розрахувати експоненційний трансформатор, призначений для узгодження антени з активним вхідним опором $R_A=100$ Ом і фідера з хвильовим опором $W = 50$ Ом. Фідер виконаний з двох мідних проводів діаметром $2r = 1,5$ мм. Допустимий КСВ $k_{св}=1,05$ на хвилі $\lambda_{max} = 12$ м.

2. Визначити потужність, передану по плоскопаралельному хвилеводу, що складається з двох мідних паралельних смуг шириною $b = 6$ см, розділених діелектриком з відносними значеннями проникностей $\epsilon = 4$, $\mu = 1$. Товщина діелектрика $a = 9$ мм. Амплітуда напруженості електричного поля $E_0 = 10^5$ В/м, частота $f = 20,5$ ГГц. Впливом країв смужок і втратами потужності в діелектрику знехтувати. Знайти втрати потужності в мідних смугах на 1 м довжини лінії. Розрахунок виконати для всіх типів хвиль TE(H), які можуть поширюватися в лінії в напрямку осі z.

3. Знайти розміри поперечного перерізу a_c , b_c і довжину ℓ_c ступеневої трансформатора, що з'єднує два відрізки прямокутного хвилеводу, один з яких має розміри $a_1 = 5,785$ мм, $b_1=2,900$ мм (МЕК-400), а інший - $a_2 = 5,812$ мм, $b_2 = 3,511$ мм. По першому хвилеводу проходить хвиля типу H_{10} з частотою $f = 30$ ГГц.

4. Знайти розміри поперечного перерізу a_c , b_c і довжину ℓ_c ступеневого трансформатора, що з'єднує відрізки двох стандартних волноводов: МЕК-58 з розмірами $a_1 = 30,39$ мм $b_1=24,19$ мм і МЕК-48 з розмірами $a_2 = 39,55$ мм $b_2 = 25,15$ мм. По першому хвилеводу проходить хвиля типу H_{10} з частотою $f = 7,8$ ГГц.

5. Встановити розміри поперечних перерізів a_{c1} , b_{c1} і a_{c2} , b_{c2} , а також довжини ℓ_{c1} , ℓ_{c2} сходинок широкосмугового двоступеневого трансформатора, що з'єднує два відрізки прямокутного хвилеводу, один з яких має розміри $a_1 = 15,67$ мм $b_1=9,32$ мм (МЕК-220), а інший $a_2 = 17,8$ мм, $b_2 = 8,892$ мм. По першому хвилеводу проходить хвиля типу H_{10} з частотою $f=22$ ГГц.

6. Визначити розміри поперечних перерізів a_{c1} , b_{c1} і a_{c2} , b_{c2} , а також довжини ℓ_{c1} , ℓ_{c2} сходинок четвертьволнового широкосмугового трансформатора, що з'єднує відрізки хвилеводів МЕК-260 з розмірами

$a_1 = 9,64 \text{ мм}$ $b_1 = 5,32 \text{ мм}$ і МЕК-180 з розмірами $a_2 = 14,95 \text{ мм}$, $b_2 = 7,48 \text{ мм}$. По першому хвилеводу проходить хвиля типу H_{10} з частотою $f = 20 \text{ ГГц}$.

7. Зміна фази хвилі типу H_{10} в прямокутному хвилеводі перетином $a \times b = 28,5 \times 12,6 \text{ мм}$ на відстані $\ell = 5 \text{ см}$ становить $\Delta\psi = 105^\circ$. Визначити частоту хвилі.

8. У прямокутному хвилеводі перетином $a \times b = 40 \times 15 \text{ мм}$ поширюються хвилі H_{10} і H_{20} однаковою частоти $f = 8365 \text{ МГц}$. Знайти відстань, на якому фазовий зсув між цими хвилями зміниться на величину $\Delta\psi = \pi / 2$.

9. Довжина хвилі H_{10} в прямокутному хвилеводі перетином $a_1 \times b_1 = 72 \times 34 \text{ мм}$ вдвічі коротше, ніж в волноводі перетином $a_2 \times b_2 = 78 \times 35 \text{ мм}$. Визначити частоту генератора.

10. Хвильовий опір прямокутного хвилеводу з повітряним заповненням для хвилі H_{11} на деякій частоті $W_H = 400 \text{ Ом}$.

Визначити хвильовий опір цього хвилеводу на тій же частоті для хвилі E_{11} .

11. Довжина хвилі типу H_{10} в прямокутному хвилеводі при роботі збуджуючого генератора на хвилі $\lambda = 12 \text{ см}$ вчетверо коротше, ніж при роботі генератора на хвилі $\lambda = 015 \text{ см}$. Знайти ширину хвилеводу.

12. Прямокутний хвилевід перетином $a \times b = 37,5 \times 18,6 \text{ мм}$ повністю заповнений полістиролом ($\epsilon = 2,5$, $\sigma_d = 10^4 \text{ См / м}$). Частота генератора $f = 4,75 \text{ ГГц}$. Амплітуда напруженості електричного поля в середині широкої стінки хвилеводу на вході $E_0 = 12 \text{ КВ / м}$. Визначити постійну загасання лінії, середню потужність передачі на вході і середню потужність втрат лінії довжиною $\ell = 0,5 \text{ м}$.

13. Квадратний хвилевід перетином $5 \times 5 \text{ см}$ працює на частоті $f = 6 \text{ Гц}$. Діелектрик - повітря. Порівняти між собою постійні загасання хвилеводу, якщо енергія передається на хвилях H_{10} і E_{11} .

14. Круглий хвилевід радіусом $a = 5,5 \text{ см}$ заповнений кварцом ($\epsilon = 3,8$, $\sigma = 0$). Визначити типи хвиль, які можуть поширюватися в хвилеводі, і хвильові опори хвилеводу в кожному випадку, якщо частота $f = 6 \text{ ГГц}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Г.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Советское радио, 1971, 664 с.
2. Шапиро Д.Н. Основы теории электромагнитного экранирования. Л.: Энергия, 1975, 112 с.
3. Шимони К. Теоретическая электротехника . – М.: Мир, 1964. – 773с.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. - М.: Высшая школа, 1986.
5. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. - М.: Энергия, 1969.
6. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учебное пособие/ Бессонов Л.А. и др. Под ред. Бессонова Л.А. – М.: Высшая школа, 1980.
7. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля: Справочное пособие для электротехнических спец. вузов. – М.: Высшая школа , 1989.-271с.
8. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964.
9. Кугушев А.М., Голубева Н.С. Основы радиоэлектроники. М.: Энергия, 1969. – 880с.
10. Непман Л.Р., Демирчан Н.С. Теоретические основы электротехники, т.2. Теория нелинейных электрических и магнитных цепей . Теория электромагнитного поля. – М.: Энергия. 1967.
11. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч.№. - М.: Высшая школа, 1974.
12. Х. Хаус. Волны и поля в оптоэлектронике. М.: Мир, 1988.
13. Н. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. Applied Optics, 5:1550 – 1567, 1966.
14. С. Солимено, Б. Крозиньяни, and П. Ди Порто. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. М.: Мир, 1989.