

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ПОЛЯ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка»,
спеціалізацією «Електронні компоненти та системи»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2017

Теорія поля: Навчально-методичний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізації «Електронні компоненти та системи» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Є. В. Вербицький. – Електронні текстові данні (1 файл: 3,07 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 262 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 23.11.2017 р.) за поданням Вченої ради інституту/факультету (протокол № 10/2017 від 30.10.2017 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Укладач: *Вербицький Євген Володимирович*, канд. техн. наук

Відповідальний редактор: *Ромашко В.Я.*, проф. кафедри промислової електроніки, д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: *Кисельова А.Г.*, доц. кафедри системного проектування, канд. техн. наук
Безносик О.Ю., доц. кафедри системного проектування, канд. техн. наук

Зміст

Вступ.....	5
Розділ 1. Довгі лінії	6
Лекція № 1. Лінії з розподіленими параметрами. Основні параметри.....	6
Лекція № 2. Режими роботи однорідної довгої лінії.....	16
Лекція № 3. Довга однорідна лінія без втрат.....	25
Лекція № 4. Використання довгих ліній як елементів електричного ланцюга. Перехідні процеси у довгих лініях.....	35
Розділ 2. Основні рівняння електромагнітного поля.....	49
Лекція № 5. Основні поняття векторного аналізу.....	49
Лекція № 6. Основні рівняння електромагнітного поля. Основні електричні та магнітні характеристики середовища.....	59
Лекція № 7. Рівняння електромагнітного поля.....	65
Лекція № 8. Особливості використання рівнянь Максвела.....	74
Лекція № 9. Окремі види електромагнітного поля.....	82
Лекція № 10. Основні співвідношення і закони стаціонарного поля.....	90
Розділ 3. Особливості розповсюдження і випромінювання електромагнітних хвиль.....	104
Лекція № 11. Основні співвідношення для плоскої електромагнітної хвилі в діелектрику.....	104
Лекція № 12. Основні співвідношення для плоских хвиль в однорідному середовищі з кінцевою провідністю.....	111
Лекція № 13. Поляризація і відбивання плоских хвиль від межі розділу середовищ.....	119
Лекція № 14. Відбивання плоских хвиль, що рухаються у довільному напрямку, від межі розділу середовищ.....	127
Лекція № 15. Розповсюдження електромагнітних хвиль у провіднику....	138
Лекція № 16. Особливості розповсюдження електромагнітного поля в анізотропних середовищах.....	146
Лекція № 17. Основні принципи випромінювання електромагнітних хвиль.....	155
Лекція № 18. Аналіз властивостей електромагнітного поля, створюваного диполем Герца.....	162
Лекція № 19. Рамкова антена.....	172

Розділ 4. Спеціалізовані радіопристрої	185
Лекція № 20. Принцип роботи електромагнітних екранів.....	185
Лекція № 21. Екранування електричного диполю	200
Лекція № 22. Резонатор Фабрі-Перо.....	215
Лекція № 23. Електромагнітні хвилі в напрямних системах.....	227
Лекція № 24. Електромагнітні хвилі в напрямних системах (продовження).....	239
Лекція № 25. Розповсюдження електромагнітних хвиль в хвилеводах....	247

Вступ

У конспекті лекцій розглядаються основні положення теорії поля. Основна увага приділена аналізу довгих ліній, розповсюдженню електромагнітних хвиль у вакуумі та ізотропних середовищах. Також розглядаються питання випромінення електромагнітних хвиль, резонансних та напрямних систем, електромагнітних екранів.

Послідовність викладення теоретичного матеріалу спрямована на системне вивчення теорії електромагнітного поля, починаючи від елементарних законів Ома, Кулона, Фарадея, закінчуючи теорією розповсюдження хвиль в хвилеводах і резонаторах.

Лекційний курс розділено на 4 розділи. В першому розділі проаналізовано особливості розповсюдження електричних струмів і напруг вздовж довгих ліній – електричних ланцюгів, довжина яких порівняна з довжиною хвилі електричного струму, який по ній протікає. У другому розділі базові поняття та основні співвідношення для розрахунку параметрів електромагнітних хвиль, зокрема рівняння Максвелла, теореми Умова Пойнтінга та Остроградського Гауса і проаналізовано рівняння окремих типів електромагнітних полів. У третьому розділі розглянуто окремі випадки випромінення і розповсюдження хвиль у середовищі, явища відбивання та накладання електромагнітних хвиль. У останньому розділі описано окремі пристрої для зміни параметрів хвиль – хвилеводи (пристрої для транспортування енергії електромагнітних хвиль з однієї точки простору в іншу з мінімальними втратами), резонатори (пристрої для виділення і підсилення електромагнітних хвиль із заданою частотою), екрани (пристрої для придушення електромагнітних хвиль).

Курс призначений для вивчення студентами 3 курсу спеціалізації «Електронні компоненти і системи».

РОЗДІЛ 1. ДОВГІ ЛІНІЇ

Лекція № 1. Лінії з розподіленими параметрами. Основні параметри

Первинні параметри однорідної лінії

Електричними лініями з розподіленими параметрами називають такі лінії, в яких струм та напруга безперервно змінюються при переході від однієї до іншої точки (перетину).

Ефект безперервної зміни струму та напруги вздовж лінії має місце внаслідок того, що лінії мають розподілені поздовжні та поперечні опори. В електричних лініях з розподіленими параметрами подовжні опори утворені активними опорами проводів лінії та індуктивностями двох протилежних одна до одної ділянок лінії довжиною dx . Поперечні опори складаються з опору витоку, що з'являється внаслідок недосконалості ізоляції між проводами лінії, та ємностей, утворених протилежними один до одного елементами (ділянками) лінії.

На схемі (рис.1.1) зображена ділянка лінії з розподіленими параметрами, параметром dx позначено нескінченно малий елемент довжини лінії. Опори Z_1, Z_2, Z_3, \dots називають поздовжніми опорами, до них додано опори прямого і зворотного провідників; опори Z_4, Z_5, Z_6, \dots називають поперечними опорами.

У результаті витоку струму через опір Z_4 струм i_2 не рівний струму $i_1, i_2 \neq i_1$. Аналогічно, струм i_5 , не рівний струму $i_4, i_5 \neq i_4$ і т.д. Напруга між точками a і b не рівна напрузі між точками c і $d, u_{ab} \neq u_{cd}$.

Лінію з розподіленими параметрами називають **однорідною**, якщо всі поздовжні опори ділянок лінії однакової довжини дорівнюють один одному та якщо всі поперечні опори ділянок лінії однакової довжини дорівнюють один одному. Так, ділянка лінії, зображена на рис.1.1 є однорідною, якщо $Z_1=Z_2=Z_3$ і $Z_4=Z_5=Z_6$.

Лінію з розподіленими параметрами називають **неоднорідною**, якщо поздовжні опори в неї різні чи якщо поперечні опори неоднакові.

Крім того, лінії з розподіленими параметрами можна розділити на дві великі групи: нелінійні та лінійні. У нелінійних лініях з розподіленими параметрами поздовжні та (чи) поперечні опори є функціями струмів, що протікають через них, у лінійних лініях такої функціональної залежності не спостерігається.

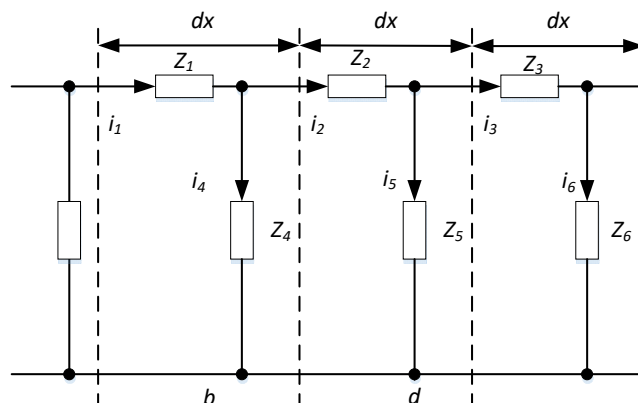
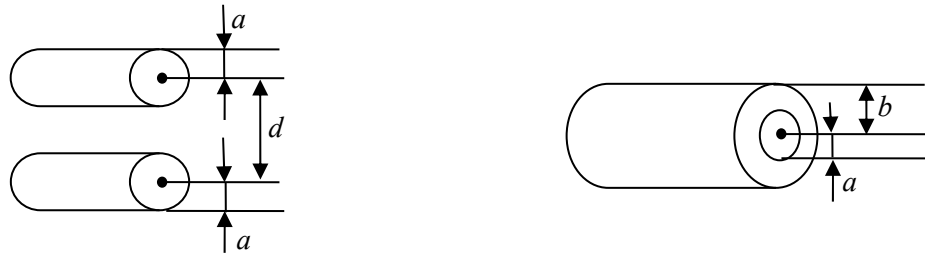


Рис. 1.1. Схема ділянки лінії з розподіленими параметрами

Як приклад ланцюга з розподіленими параметрами нижче розглядається однорідна двопровідна лінія, тобто така лінія, індуктивність, ємність, активний опір та провідність якої рівномірно розподілені вздовж усієї довжини лінії. Ці електричні параметри, для лінії одиничної довжини, називаються **первинними параметрами** лінії і позначаються через L_0 , C_0 , r_0 та g_0 .

Однорідна двопровідна лінія є розповсюдженим типом лінії; вона використовується в електропровідному зв'язку і у радіотехніці та складена з двох паралельних провідників (рис. 1.2, а) чи коаксіального кабелю (рис. 1.2, б).



а) повітряна;

б) коаксіальний кабель

Рис. 1.2. Модифікації двопровідної лінії

Первинні параметри лінії залежать від її конструкції та від частоти. Обчислення первинних параметрів лінії належить до задач теорії електромагнітного поля. У діапазоні радіочастот первинні параметри однорідної двопровідної лінії з мідними провідниками обчислюються за наступними формулами.

$$L_0 \approx \frac{\mu\mu_0}{\pi} \cdot \lg \frac{d}{a} \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \quad (1.1)$$

$$C_0 \approx \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\lg \frac{d}{a}} \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad (1.2)$$

де μ , ϵ – відносні магнітна і електрична проникності, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – магнітна і електрична константи відповідно.

Повітряна лінія (паралельні провідники) (рис. 1.2, а):

$$r_0 \approx \frac{8,33\sqrt{f}}{a} \cdot 10^{-8} \text{ Ом/м}. \quad (1.3)$$

Коаксіальний кабель (рис. 1.2, б):

$$r_0 \approx 4,16 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{f} \cdot 10^{-8} \text{ Ом/м}; \quad (1.4)$$

$$g_0 = \omega C_0 \text{tg} \delta, \text{ сим/м}, \quad (1.5)$$

де δ - кут діелектричних втрат.

Активна провідність g_0 між паралельними провідниками, яка залежить від метеорологічних умов, стану ізоляторів, до яких підвішені провідники та інших факторів, визначається експериментально. У багатьох випадках можна вважати, що $g_0 \approx 0$. На високих частотах, зважаючи на значно більше значення індуктивного опору провідника у порівнянні з активним опором, останнім у багатьох випадках можна також знехтувати.

Варто зазначити, що на низьких частотах та при малій довжині лінії, коли значення ємнісної і активної провідностей незначні, струми на початку та кінці лінії практично однакові і у цьому випадку лінія з достатньою точністю може розглядатися як ланцюг із зосередженими параметрами. Розподіл понять «коротка» та «довга» лінія пов'язаний з частотою, на якій працює розглядувана лінія.

Диференціальні рівняння однорідної довгої лінії

Напруга і струм в лінії є функціями двох незалежних змінних: просторової координати x , що визначає місце спостереження, та часу t , який визначає момент спостереження. Знаходження просторово-тимчасового розподілу величини струму у лінії $i(x, t)$ та напруги між провідниками $u(x, t)$ є основною задачею розрахунку довгих ліній. Для вирішення цієї задачі складають диференціальні рівняння, яким задовольняють напруга і струм у будь-якому перетині двопровідної лінії.

Для однозначності верхній провідник, рис. 1.3 двопровідної лінії буде називатись прямим, а нижній – зворотним. Позитивні напрями струму та напруги оберемо, як показано на рисунку.

Нехай відомі первинні параметри однорідної лінії: r_0 - опір прямого та зворотного провідників, L_0 - індуктивність контуру, що утворюється прямим та зворотним провідниками, g_0 - провідність витоку між провідниками, C_0 - ємність між провідниками.

Довгу лінію можна описати як множину сполучених у ланцюжок нескінченно малих елементів довжиною dx , кожний з яких має опір $r_0 dx$ та індуктивність $L_0 dx$, провідність $g_0 dx$ і ємність $C_0 dx$, рис. 1.3. Опір $r_0 dx$ та індуктивність $L_0 dx$ вважаються під'єднаними до одного з провідників.

Позначимо через x відстань від початку лінії до поточного елемента її довжини. Миттєві значення напруги та струму на початку обраного елемента лінії dx позначимо через u та i , а на початку наступного - через $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ та

$$i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

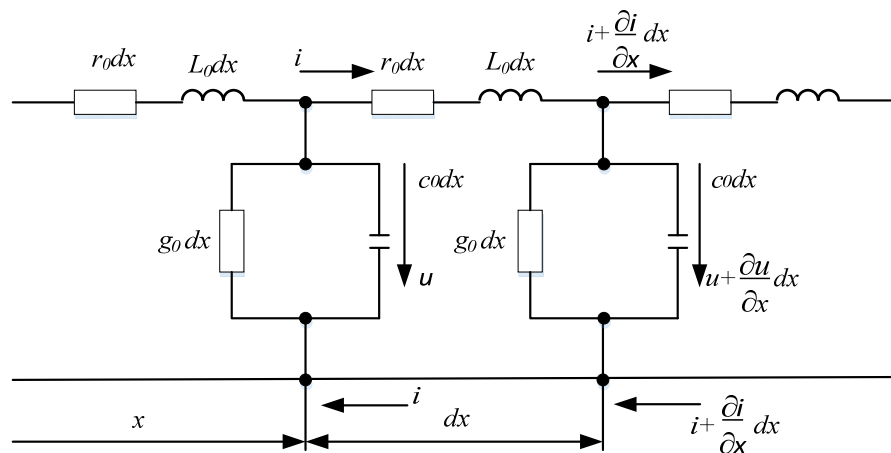


Рис. 1.3. Схема заміщення ділянки довгої лінії

Для елемента лінії довжиною dx на підставі законів Кірхгофа можливо скласти такі рівняння:

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = r_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (1.6)$$

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) g_0 dx + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right). \quad (1.7)$$

Привівши подібні члени і знехтувавши величинами другого порядку малості, одержано диференціальні рівняння:

$$-\partial u / \partial x = r_0 i + L_0 \partial i / \partial t; \quad (1.8)$$

$$-\partial i / \partial x = g_0 u + C_0 \partial u / \partial t. \quad (1.9)$$

Рівняння (1.8) і (1.9) називають **телеграфними рівняннями**. Вони можуть бути вирішені однозначно при використанні початкових й граничних умов. **Початковими** умовами є значення напруги та струму на початку або в кінці лінії в момент часу $t = 0$. **Граничні** умови визначаються зв'язками між напругою та струмом на початку або в кінці лінії, які залежать від заданого режиму роботи лінії. Розв'язання зазначених вище рівнянь дає функціональні залежності напруги та струму у лінії від змінних x та t .

Періодичний режим в довгій однорідній лінії

Розглянемо періодичний режим в довгій лінії за синусоїдальної напруги джерела живлення. Позначимо комплексні діючі значення напруги та струму на відстані x від початку лінії через $\dot{U} = \dot{U}(x)$ та $\dot{I} = \dot{I}(x)$.

Застосовуючи комплексну форму запису, одержуємо на підставі телеграфічних рівнянь (1.8) і (1.9) таку лінійну рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = (r_0 + j\omega L_0)\dot{I} = Z_0 \dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = (g_0 + j\omega C_0)\dot{U} = Y_0 \dot{U}, \end{cases} \quad (1.10)$$

де $Z_0 = r_0 + jL_0\omega$ - комплексний опір,

$Y_0 = g_0 + jC_0\omega$ - комплексна провідність лінії одиничної довжини.

Зважаючи на те, що комплексні значення \dot{U} та \dot{I} не залежать від часу t і є лише функціями координати x , при переході від рівнянь (1.8)-(1.9) до системи (1.10) часткові похідні по x замінені звичайними.

Після диференціювання системи (1.10), отриману таку систему:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 \frac{d\dot{I}}{dx}; \\ -\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Y_0 \frac{d\dot{U}}{dx}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Після заміни $d\dot{I}/dx$ та $d\dot{U}/dx$ згідно (1.10) система (1.11) перетвориться до виду:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}; \\ -\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{I}, \end{cases} \quad (1.12)$$

де $Z_0 Y_0 = (r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)$.

Позначимо квадратний корінь з комплексного множника при \dot{U} та \dot{I} через параметр γ

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta, \quad (1.13)$$

який називається **коефіцієнтом розповсюдження**. Після застосування заміни (1.13), система (1.11) записується у виді:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U}; \\ \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{I}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Система (1.14) складається з двох однорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, рішення яких має такий вид:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x} = \dot{A}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \dot{A}_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad (1.15)$$

де \dot{A}_1, \dot{A}_2 - комплексні сталі інтегрування.

Струм \dot{I} знаходиться підстановкою (1.15) у перше рівняння системи (1.10):

$$\dot{I} = \frac{1}{r_0 + j\omega L_0} (\dot{A}_1 \gamma e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 \gamma e^{\gamma x}) = \sqrt{\frac{g_0 + j\omega C_0}{r_0 + j\omega L_0}} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}),$$

або

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_{x\phi}} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}), \quad (1.16)$$

де параметр

$$Z_{x\phi} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}. \quad (1.17)$$

називається **хвильовим опором** лінії.

Хвильовий опір $Z_{x\phi}$ і коефіцієнт розповсюдження γ є **вторинними параметрами** однорідної лінії.

Миттєве значення напруги у точці x дорівнює явній частині виразу $\sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}$.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \text{Im} \left[\sqrt{2} \dot{A}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\omega t} + \sqrt{2} \dot{A}_2 e^{-\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\omega t} \right] = \\ &= \sqrt{2} |\dot{A}_1| e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \sqrt{2} |\dot{A}_2| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x), \end{aligned} \quad (1.18)$$

де ψ_1 та ψ_2 - аргументи сталих інтегрування \dot{A}_1 та \dot{A}_2 .

Аналогічно миттєве значення струму має вид

$$i(x,t) = \sqrt{2} \left| \frac{A_1}{Z_{x\theta}} \right| e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x - \theta) + \sqrt{2} \left| \frac{A_2}{Z_{x\theta}} \right| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x - \theta), \quad (1.19)$$

$$\text{де } \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(g_0 L_0 - r_0 C_0)}{r_0 g_0 + \omega^2 L_0 C_0}.$$

Проаналізуємо рівняння напруги і струму (1.18) і (1.19) відповідно. Параметр α , який входить до рівнянь, характеризує зміну амплітуди хвилі на одиницю довжини лінії і називається **коефіцієнтом затухання**.

Параметр β , що характеризує зміну фази на одиницю довжини лінії, називається **коефіцієнтом фази**.

Згасання амплітуди хвилі вздовж лінії обумовлюється втратами енергії протягом її руху вздовж лінії, а зміна фази кінцевою швидкістю розповсюдження електромагнітних коливань.

Коефіцієнти α та β є складовими коефіцієнта розповсюдження γ , $\gamma = \alpha + j\beta$, який характеризує розповсюдження хвилі напруги та струму вздовж лінії.

Миттєві значення напруги і струму у будь-якій точці лінії, які описуються рівняннями (1.18) і (1.19), є сумою двох функцій, кожна з яких є біжучою хвилею, яка рухається в напрямку зростання (пряма хвиля) чи зменшення координати x (зворотна хвиля). Біжуча хвиля у будь-якій фіксованій точці $x = x_1$ є гармонічною функцією з постійною амплітудою. Якщо ж вважати момент часу t фіксованим і розглядати зміну миттєвої напруги вздовж лінії як функцію координати x , отримаємо згасаючу гармонічну хвилю напруги (струму), амплітуда якої $\sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x}$ зменшується із зростанням координати x , тобто зі збільшенням відстані від початку лінії. Основними характеристиками біжучої хвилі є фазова швидкість та довжина хвилі.

Аргументи гармонічної функції $\sin(\omega t + \psi_1 - \beta x)$ або $\sin(\omega t + \psi_1 + \beta x)$ характеризують швидкість переміщення фази коливання, що впродовж часу t та зі збільшенням відстані x , подоланою хвилею, має постійне значення, $\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const}$ – для прямої хвилі і $\omega t + \beta x + \psi_1 = \text{const}$ – для зворотної хвилі. Цей параметр називають **фазовою швидкістю** v_ϕ хвилі. З умови постійності фазової швидкості випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\omega t - \beta x + \psi_1) &= 0; \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= v_\phi = \omega / \beta. \end{aligned}$$

Довжиною хвилі λ називається відстань між двома точками, фази коливання у яких розрізняються на 2π . Отже, для першого додатку формули (1.18) отримаємо

$$\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1 = \omega t - \beta x + \psi_1 = 2\pi,$$

звідки

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\pi / \beta; \\ v_\phi &= \omega / \beta = 2\pi f / \beta = f \lambda = \lambda / T, \end{aligned}$$

тобто за час, який дорівнює періоду, хвиля проходить відстань, рівну довжині хвилі. Одержана формула виражає залежність між довжиною хвилі і коефіцієнтом фази лінії.

Хвилю, яка рухається від початку лінії, називають *прямою*, а яка рухається від кінця лінії - *зворотною*.

Згасаюча пряма хвиля показана на рис. 1.4. Для її зображення будують огинаючі $\pm\sqrt{2}A_1e^{-\alpha x}$ і вписують хвилю в область, обмежену ними.

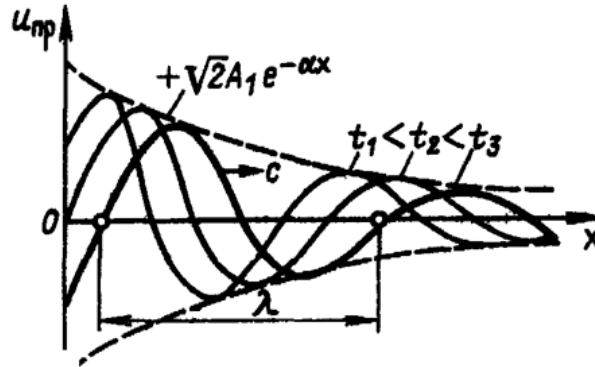


Рис. 1.4. Епюр прямої хвилі напруги

Оберемо додатні напрями напруг та струмів окремих хвиль. Так як обидва доданки в правій частині рівняння (1.15) входять із додатними знаками, додатними напрями напруг прямої і зворотної хвиль є напрями, які співпадають із додатним напрямом напруги \dot{U} , тобто від прямого провідника лінії до зворотного.

Для струму існують дві можливості. Можна залишити обидва доданки в правій частині рівняння (1.16) із різними знаками або ж поставити між доданками знак плюс, а мінус віднести до другого доданка. Будемо визначати струм \dot{I} , як різницю струмів прямої та зворотної хвиль, тобто додатний напрямок струму прямої хвилі співпадає із додатним напрямком струму \dot{I} , а додатний напрямок струму зворотної хвилі має протилежний напрям.

Відповідно до викладених міркувань можливо записати:

$$\dot{U} = \dot{U}_n + \dot{U}_{зв}; \quad (1.20)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_n}{Z_{xв}} - \frac{\dot{U}_{зв}}{Z_{xв}} = \dot{I}_n + \dot{I}_{зв}, \quad (1.21)$$

де $\dot{U}_n = \dot{A}_1 e^{-\gamma x}$; $\dot{U}_{зв} = \dot{A}_2 e^{\gamma x}$.

Напруга та струм прямої і зворотної хвиль пов'язані законом Ома:

$$\frac{\dot{U}_n}{\dot{I}_n} = \frac{\dot{U}_{зв}}{\dot{I}_{зв}} = Z_{xв}. \quad (1.22)$$

Співвідношення (1.22) пояснює зміст назви $Z_{xв}$ - хвильовий опір.

Використані поняття про пряму та зворотну хвилі у лініях для усталеного режиму з синусоїдальною зовнішньою дією полегшують аналіз процесів у довгій лінії. Фізично у лінії існують тільки результуючі струм \dot{I} та напруга \dot{U} , і розкладання їх на пряму та зворотну хвилі слід розглядати як математичну

абстракцію, яку використовують для полегшення аналізу процесів у довгій лінії.

Криві розподілу миттєвих значень напруг та струмів також мають хвилеподібний характер, рис. 1.5. Вони показують, що в кожний момент часу результуючі струми та напруги, а також струми та напруги прямої та зворотної хвиль, у різних точках лінії можуть розрізнятися не тільки за значенням, але й за знаком.

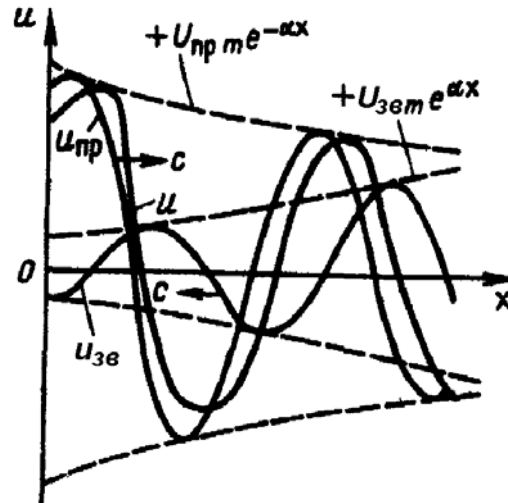


Рис. 1.5. Ілюстрація розподілу миттєвих значень напруг та струмів вздовж лінії

Сталі інтегрування \dot{A}_1 та \dot{A}_2 знаходяться у прямій залежності від напруги та струму на початку лінії (граничні умови), якщо вони задані у точці $x=0$

$$\dot{U}(0) = \dot{U}_1 = \dot{A}_1 + \dot{A}_2;$$

$$Z_{x_0} \dot{I}(0) = Z_{x_0} \dot{I}_1 = \dot{A}_1 - \dot{A}_2,$$

звідки $\dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_1 + Z_{x_0} \dot{I}_1}{2}$; $\dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_1 - Z_{x_0} \dot{I}_1}{2}$.

Введемо поняття **коефіцієнту відбивання** хвилі на початку лінії:

$$n_1 = \frac{\dot{U}_{зв}(0)}{\dot{U}_n(0)} = \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} = \frac{\dot{U}_1 - Z_{x_0} \dot{I}_1}{\dot{U}_1 + Z_{x_0} \dot{I}_1} = \frac{Z_1 - Z_{x_0}}{Z_1 + Z_{x_0}}, \quad (1.23)$$

де $Z_1 = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ - вхідний опір лінії.

Після підстановки виразів \dot{A}_1 та \dot{A}_2 до формул (1.15) та (1.16) з урахуванням (1.23), отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{\dot{U}_1 + Z_{x_0} \dot{I}_1}{2} (e^{-\gamma x} + n_1 e^{\gamma x}); \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_1 + Z_{x_0} \dot{I}_1}{2Z_{x_0}} (e^{-\gamma x} - n_1 e^{\gamma x}). \end{cases} \quad (1.24)$$

Якщо задані граничні умови на кінці лінії, то краще відраховувати відстань від кінця, прийнявши координату x' .

Замінюючи у рівняннях (1.15) та (1.16) x на $(l - x)'$ і використовуючи задані граничні умови $\dot{U}(l) = \dot{U}_2$; $\dot{I}(l) = \dot{I}_2$, одержуємо для \dot{A}_1 та \dot{A}_2 , наступні вирази:

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_2 + Z_{x6} \dot{I}_2}{2} e^{\gamma l}; \dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_2 - Z_{x6} \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma l}. \quad (1.25)$$

Підставка виразів (1.25) до формул (1.15) та (1.16) дає можливість отримати такі співвідношення для \dot{U} та \dot{I} :

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{\dot{U}_2 + Z_{x6} \dot{I}_2}{2} (e^{\gamma x'} + n_2 e^{-\gamma x'}); \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2 + Z_{x6} \dot{I}_2}{2Z_{x6}} (e^{\gamma x'} - n_2 e^{-\gamma x'}), \end{cases} \quad (1.26)$$

де n_2 - коефіцієнт відбивання від кінця лінії:

$$n_2 = \frac{\dot{U}_{z6}(l)}{\dot{U}_n(l)} = \frac{\dot{A}_2 e^{\gamma l}}{\dot{A}_1 e^{-\gamma l}} = \frac{\dot{U}_2 - Z_{x6} \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + Z_{x6} \dot{I}_2} = \frac{Z_2 - Z_{x6}}{Z_2 + Z_{x6}}, \quad (1.27)$$

де $Z_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ - вихідний опір лінії.

Система рівнянь (1.26) може бути переписана у наступному виді.

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \frac{e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}}{2} + Z_{x6} \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}}{2}; \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{x6}} \frac{e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}}{2} + \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}}{2}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Рівняння (1.26) та (1.28) є рівняннями лінії у **показниковій** або хвильовій формі при відліку відстані від кінця лінії. Компактна форма запису рівнянь (1.28) можлива за умови використання гіперболічних функцій:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 ch \gamma x' + Z_{x6} \dot{I}_2 sh \gamma x'; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 ch \gamma x' + \frac{\dot{U}_2}{Z_{x6}} sh \gamma x'. \end{cases} \quad (1.29)$$

Поклавши у цих рівняннях $x' = l$, отримаємо рівняння лінії у гіперболічній формі, що виражають напругу та струм на початку через напругу та струм у кінці лінії:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 ch \gamma l + Z_{x6} \dot{I}_2 sh \gamma l; \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 ch \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_{x6}} sh \gamma l. \end{cases} \quad (1.30)$$

Показникова і гіперболічна форми запису рівнянні лінії (1.26) та (1.29) взаємно доповнюють одна одну і застосовуються залежно від умов задачі.

Холостий хід, коротке замикання лінії

Розглянемо холостий хід лінії. Після відключення навантаження ($\dot{I}_2 = 0$) напруга на кінці її при незмінній напрузі \dot{U}_1 на початку лінії зміниться. Змінивши напругу на початку лінії так, щоб напруга у кінці лінії залишилася рівною \dot{U}_2 , з (1.30) при холостому ході отримаємо

$$\begin{cases} \dot{U}_{xx} = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l; \\ \dot{I}_{xx} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{xg}} \operatorname{sh}\gamma l. \end{cases} \quad (1.31)$$

Якщо тепер, не змінюючи напруги на початку лінії, замкнути її на кінці, струм на кінці уже не дорівнюватиме \dot{I}_2 і у ряді випадків зросте. Змінивши напругу на початку лінії так, щоб струм в кінці замкненої лінії дорівнював \dot{I}_2 , з (1.30) отримаємо

$$\begin{cases} \dot{U}_{kz} = Z_{xg} \dot{I}_2 \operatorname{sh}\gamma l; \\ \dot{I}_{kz} = \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l. \end{cases} \quad (1.32)$$

На підставі співвідношень (1.31) і (1.32) можна написати

$$\dot{U} = \dot{U}_{xx} + \dot{U}_{kz}; \dot{I} = \dot{I}_{xx} + \dot{I}_{kz}.$$

Отримані формули показують, що струм та напруга у будь-якій точці лінії можуть бути розкладені на складові холостого ходу та короткого замикання, чим інколи зручно користуватися при розрахунках. Наприклад, при розрахунку розподілу струму та напруги вздовж навантаженої лінії можна спочатку знайти складові напруги та струму на холостому ході й короткому замиканні окремо, а після цього, склавши їх, отримати реальні струми та напруги довгої лінії.

Запитання

1. Назвіть причину безперервної зміни струмів і напруг вздовж лінії з розподіленими параметрами.
2. Назвіть ознаку однорідної лінії, якою вона відрізняється від лінії з розподіленими параметрами.
3. Вкажіть випадок, коли довга лінія може розглядатись як ланцюг із зосередженими параметрами.
4. Перелічіть вторинні параметри довгої лінії.
5. Назвіть процеси у довгій лінії, які описують телеграфні рівняння.
6. Назвіть параметр, який характеризує коефіцієнт затухання.
7. Дайте визначення параметру «довжина хвилі».
8. Наведіть відмінність рішення рівняння Даламбера для напруги і струму довгої лінії.
9. Назвіть дві форми запису рівнянь довгої лінії.
10. Наведіть формули для опису процесів у лінії через режими короткого замикання і холостого ходу.

Лекція № 2. Режими роботи однорідної довгої лінії

Вторинні параметри однорідної лінії

Вторинними або характеристичними параметрами лінії є коефіцієнт затухання α , коефіцієнт фази β і хвильовий опір $Z_{x\phi}$, які в свою чергу виражаються через первинні параметри лінії та частоту f .

З виразу

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{r_0 g_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(L_0 g_0 + C_0 r_0)} = \alpha + j\beta; \quad (2.1)$$

$$\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = r_0 g_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(L_0 g_0 + C_0 r_0); \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = r_0 g_0 - \omega^2 L_0 C_0; \\ 2\alpha\beta = \omega(L_0 g_0 + C_0 r_0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Розв'язок системи (2.3) є таким:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[r_0 g_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(r_0^2 + \omega^2 L_0^2)(g_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]}. \quad (2.4)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\omega^2 L_0 C_0 - r_0 g_0 + \sqrt{(r_0^2 + \omega^2 L_0^2)(g_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]}. \quad (2.5)$$

Одержані вирази показують, що параметри α та β у загальному випадку залежать від частоти f . Проте, на відміну від коефіцієнта затухання α , що змінюється в обмеженому діапазоні, значення коефіцієнта фази β необмежено росте з частотою.

Формула (2.5) дозволяє виразити фазову швидкість хвилі v_ϕ через первинні параметри лінії та частоту.

Нижче буде показано, що для ліній без спотворень ($r_0/g_0=L_0/C_0$) і для ліній без втрат ($r_0=0; g_0=0$), фазова швидкість не залежить від частоти

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{c}{\sqrt{\xi \mu}}, \quad (2.6)$$

де c - швидкість світла у вакуумі,

ξ і μ - відносні діелектрична та магнітна проникливості діелектрика, оточуючого провід.

У повітряних лініях $\xi \approx 1$ і $\mu \approx 1$ і за відсутності втрат фазова швидкість хвиль v_ϕ практично рівна швидкості світла c . У кабелях $\xi \approx 4-5$, тому фазова швидкість v_ϕ хвиль у 2-2,5 разів менше швидкості світла c . У повітряних лініях із втратами фазова швидкість v_ϕ менше швидкості світла c .

На рис. 2.1 показано характер зміни параметрів α та β залежно від частоти f . Коефіцієнт β із зростанням частоти асимптотично наближається до прямої, яка утворює з віссю ω кут $\arctg \sqrt{L_0 C_0} m$, де m – масштабний коефіцієнт.

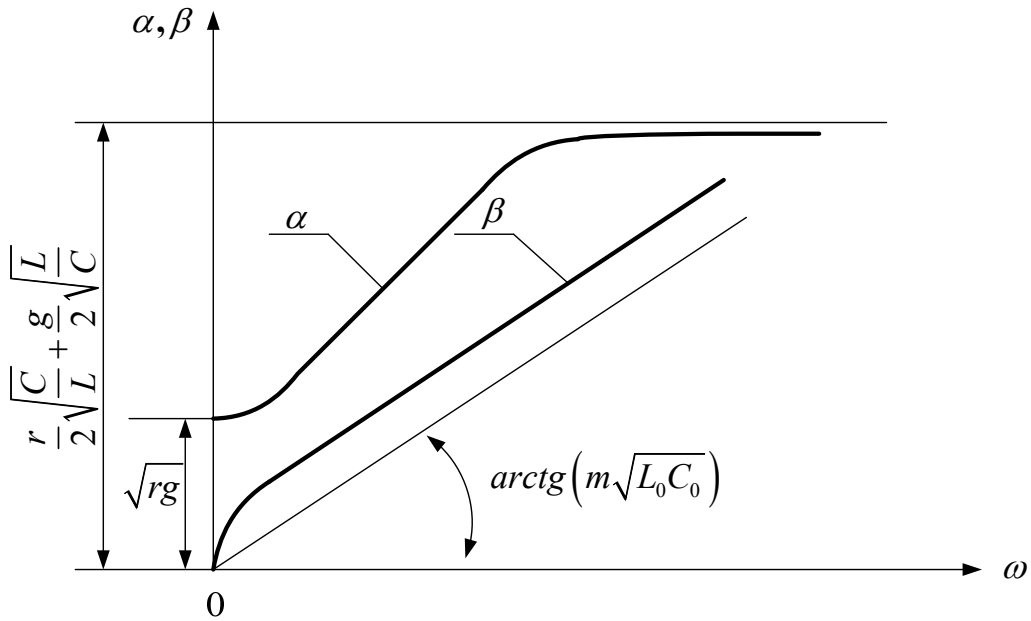


Рис 2.1. Частотні характеристики α та β

Хвильовий опір лінії

$$Z_{x\delta} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{r_0}{g_0} \frac{1 + j\omega \frac{L_0}{r_0}}{1 + j\omega \frac{C_0}{g_0}}}, \quad (2.7)$$

на постійному струмі ($\omega = 0$) і при нескінченно великій частоті ($\omega = \infty$) має відповідно дійсні значення:

$$Z_{x\delta} = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}}, \omega = 0;$$

$$Z_{x\delta} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \omega = \infty;$$

За скінченних значень кутової частоти ω хвильовий опір $Z_{x\delta}$ має ємнісний характер, бо зазвичай $\frac{C_0}{g_0} > \frac{L_0}{r_0}$.

На рис. 2.2 показано криві зміни модуля і кута φ хвильового опору $Z_{x\delta}$ лінії залежно від частоти ω .

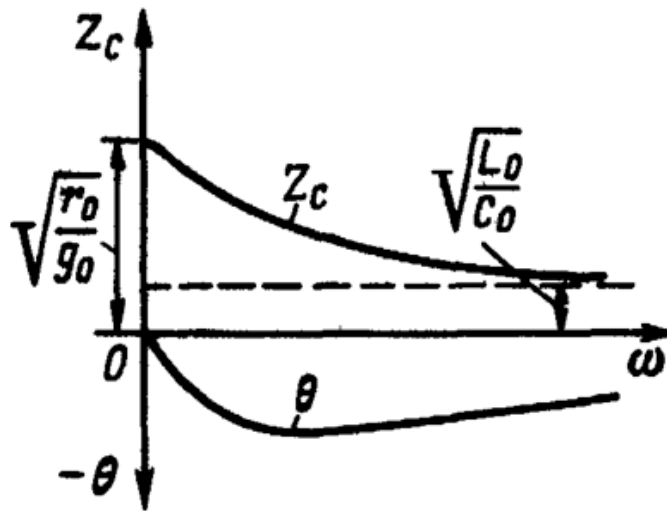


Рис. 2.2. Залежність модуля та кута хвильового опору лінії від частоти

Середнє значення модуля $Z_{x\phi}$ для повітряних ліній складає 300-400 Ом, а для кабелів – 60-80 Ом. У кабелів ємність C_0 значно більше, а індуктивність L_0 менше, ніж у повітряних ліній, бо провідники кабелю розміщені ближче один до одного, а відносна діелектрична проникливість ізоляції складає $\epsilon = 4-5$. Тому значення хвильового опору кабелів $Z_{x\phi}$ у 6-8 разів менше ніж у повітряних ліній.

Вхідний опір лінії

При дослідженні процесів в лінії часто важливо знати вхідний опір лінії. Вхідним опором лінії Z_{ex} є опір двополюсника, яким можна замінити лінію разом з навантаженням на її кінці за умови розрахунку режиму на початку лінії. Вхідний опір лінії, виміряний у довільній точці на відстані x' від кінця, визначається відношенням $Z = \dot{U} / \dot{I}$ і може бути представлений в комплексній або гіперболічній формі. Будемо вважати, що лінія навантажена на кінці деяким опором Z_2 .

Комплексна форма виразу для вхідного опору лінії одержується на підставі формули (1.24):

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_{x\phi} \frac{e^{\gamma x'} + n_2 e^{-\gamma x'}}{e^{\gamma x'} - n_2 e^{-\gamma x'}}.$$

або

$$Z = Z_{x\phi} \frac{1 + n_2 e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}}{1 - n_2 e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}}. \quad (2.8)$$

З аналізу виразу (2.8) можна зробити висновок, що зі зміною координати x' модуль вхідного опору лінії коливається між деякими граничними значеннями.

Припустимо, що модуль Z досягає деякого максимуму у точці x'_{ext} . Тоді максимумами будуть також у точках, зміщених за значенням аргументу $2x\beta$ на кут $2k\pi$.

$$2\beta'_{ext} + 2k\pi = 2\beta (x'_{ext} + k\pi/\beta) = 2\beta (x'_{ext} + k\lambda/2).$$

Отже, максимуми чергуються через кожні півхвилі. Мінімуми знаходяться посередині між максимумами і також чергуються через кожну півхвилю. Хвилеподібний характер кривої Z підлягає у загальному випадку закону зміни модуля гіперболічного тангенса з комплексним аргументом. Вказане твердження можливо отримати з аналізу формули (1.29)

$$Z = \frac{\dot{U}_2 c h \gamma x' + Z_{x6} \dot{I}_2 s h \gamma x'}{\dot{I}_2 c h \gamma x' + \frac{\dot{U}_2}{Z_{x6}} s h \gamma x'} = \frac{Z_2 + Z_{x6} t h \gamma x'}{1 + \frac{Z_2}{Z_{x6}} t h \gamma x'}. \quad (2.9)$$

При холостому ході ($Z_2 = \infty$) вхідний опір лінії згідно (2.9):

$$Z_{xx} = Z_{x6} c t h \gamma x'. \quad (2.10)$$

А при короткому замиканні ($Z_2 = 0$)

$$Z_{k3} = Z_{x6} t h \gamma x'. \quad (2.11)$$

З урахуванням (2.10) і (2.11) вхідний опір Z виражається через Z_{xx} та Z_{k3} :

$$Z = Z_{xx} \frac{Z_2 + Z_{k3}}{Z_2 + Z_{xx}}. \quad (2.12)$$

Формулою (2.12) користуються у тому випадку, коли з дослідів холостого ходу та короткого замикання відомі значення Z_{xx} та Z_{k3} . Дані дослідів холостого ходу та короткого замикання використовуються також для обчислення характеристичних параметрів лінії.

На підставі (2.10) та (2.11) можливо записати:

$$Z_{x6} = \sqrt{Z_{xx} Z_{k3}}; t h \gamma x' = \sqrt{\frac{Z_{k3}}{Z_{xx}}}. \quad (2.13)$$

Зважаючи на те, що коефіцієнт фази β визначається з формули (2.13) неоднозначно, при обчисленні виконується перевірка на підставі виразу для v_ϕ , причому спочатку фазова швидкість v_ϕ обирається орієнтовно.

На рис. 2.3 показано криві зміни модулів Z_{xx} та Z_{k3} залежно від координати x' . Аналіз показує, що Z_{xx} та Z_{k3} змінюються хвилеподібно як при зміні довжини лінії l , так і при зміні частоти f .

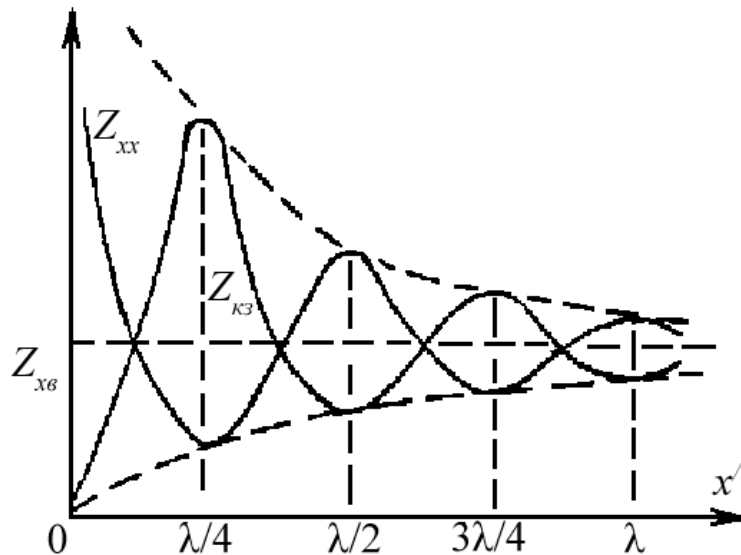


Рис. 2.3. криві зміни модулів Z_{xx} та Z_{kz}

При $x' \rightarrow \infty$ максимуми та мінімуми кривої рис. 2.3 прагнуть до значення хвильового опору $Z_{xв}$.

Узгоджене навантаження лінії

Якщо в кінці лінії ввімкнено навантаження Z_n , значення якого дорівнює хвильовому опору $Z_n = Z_{xв}$, то коефіцієнт відбивання від кінця лінії дорівнює нулю, $n_2 = 0$. При цьому в лінії існує тільки одна пряма хвиля, зворотна хвиля не виникає. Таке навантаження називають *узгодженим* або *навантаженням без відбивання*.

Ця важлива властивість довгої лінії реалізується в лініях зв'язку, відбивання у яких небажані з ряду причин. По-перше, якщо затухання в лінії невелике, то відбита хвиля створює ефект луни на початку лінії. По-друге, відбивання пов'язані з втратою енергії. Частина енергії, досягнувши прийомного кінця, не надходить у приймач, а повертається по лінії у вигляді енергії відбитої хвилі. При цьому виникають додаткові втрати енергії в опорі r_0 та провідності g_0 лінії. Якщо опір джерела, яке живить лінію, не рівний хвильовому опору лінії, то відбита хвиля, досягнувши початку лінії, зазнає повторного відбивання і т.д. Те, що внаслідок цього відбувається втрата енергії у лінії знижує загальний ККД передачі. По-третє, у випадку відбивання може мати місце небажане збільшення напруги або струму в лінії. Внаслідок означених причин на практиці прагнуть узгодити опір приймача з хвильовим опором лінії. При цьому напруга і струм в лінії описують простішими у порівнянні з виразом (1.24) виразами:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x'}; \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x'}. \quad (2.14)$$

Співвідношення (2.14) свідчать про те, що при переміщенні точки спостереження вздовж узгодженої лінії в напрямку від кінця до початку лінії, модуль напруги зростає у $e^{\alpha x'}$ раз, а фаза - на $\beta x'$ рад, також при узгодженому навантаженні геометричним місцем кінця вектора напруги \dot{U} є логарифмічна

спіраль. На рис. 2.4, що ілюструє сказане, прийнято $\dot{U}_2 = U_2$ (вектор \dot{U}_2 направлений по дійсній осі).

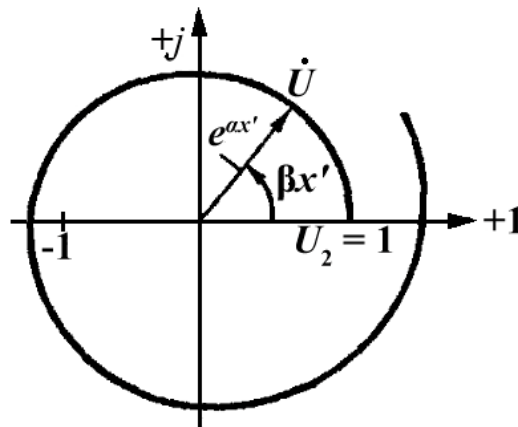


Рис. 2.4. Геометричне місце кінця вектору напруги при узгодженому навантаженні

Вважаючи початкову фазу напруги в кінці лінії рівною нулю, запишемо на підставі (2.14) миттєві значення напруги та струму у будь-якій точці лінії:

$$\begin{cases} u(x,t) = U_{2m} e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x); \\ i(x,t) = \frac{U_{2m}}{Z_{xв}} e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x - \theta). \end{cases} \quad (2.15)$$

Отримані співвідношення зображені на рис. 2.5. Точки перетину осі абсцис з кривими напруги та струму зсунуті на відстань β/θ , причому $\theta < 0$. Тому, можна сказати, що струм випереджає по фазі напругу на кут $|\theta|$.

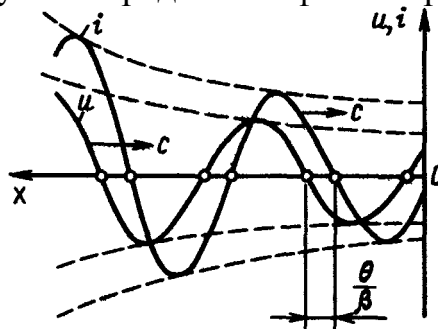


Рис. 2.5. Епюри миттєвих значень напруги і струму узгодженої лінії

Напруга та струм в різних точках лінії відрізняються не тільки амплітудою, але й фазою.

Потужність у будь-якому перетині лінії дорівнює:

$$P = UI \cos \theta = \frac{U_2^2}{Z_{xв}} e^{2\alpha x} \cos \theta. \quad (2.16)$$

Ця потужність зменшується з віддаленням від початку лінії, бо на кожному елементі довжини лінії потужність втрат дорівнює сумі втрат в опорі провідників та в провідності ізоляції на елементі довжини dx .

$$dP = 2\alpha \frac{U_2^2}{Z_{x\theta}} \cos \theta dx = (r_0 I^2 + g_0 U^2) dx. \quad (2.17)$$

Потужність, що передається по узгодженій лінії, називається природною або натуральною. ККД передавання енергії узгодженою лінією розраховується з врахуванням вхідної потужності $P_1 = U_1 I_1 \cos \theta$ та вихідної потужності $P_2 = U_2 I_2 \cos \theta$.

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \theta = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \theta = P_2 e^{2\alpha l};$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (2.18)$$

Все сказане про узгоджену лінію є справедливим і для нескінченної довгої лінії, бо в останній не може виникнути відбита хвиля.

Лінія без спотворень

Сигнали, які передаються по лінії зв'язку є сукупністю множини різних частот: дискретних – у випадку періодичних несинусоїдальних сигналів і безперервний спектр – у випадку неперіодичних сигналів. Передавання сигналу **без спотворень** забезпечується за умови, коли форма сигналу на початку і кінці лінії однакова. Таке явище має місце в тому випадку, коли коефіцієнт затухання лінії і фазова швидкість на всіх частотах однакові. Неоднакове затухання на різних частотах створює так звані **амплітудні спотворення**, а неоднакова швидкість хвиль на різних частотах – **фазові спотворення**.

Для передавання без спотворень вимагається, щоб коефіцієнт затухання α не залежав від частоти, а коефіцієнт фази β був прямопропорційним частоті. В останньому випадку фазова швидкість $v_\phi = \omega / \beta$ не залежить від частоти.

Вказані умови виконуються, якщо:

$$\frac{L_0}{r_0} = \frac{C_0}{g_0}. \quad (2.19)$$

У цьому випадку коефіцієнт розповсюдження γ дорівнює:

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{r_0 g_0 \left(1 + j\omega \frac{L_0}{r_0}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_0}{g_0}\right)},$$

або

$$\gamma = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{r_0 g_0} \frac{L_0}{r_0};$$

$$\gamma = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (2.20)$$

Якщо врахувати, що первинні параметри лінії не залежать від частоти, то коефіцієнт затухання в даному випадку має постійне значення:

$$\alpha = \sqrt{r_0 g_0}, \quad (2.21)$$

а коефіцієнт фази – значення прямопропорційне частоті:

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (2.22)$$

Лінія, параметри якої задовольняють умові (2.19), називається *лінією без спотворень*: будь-які сигнали розповсюджуються по ній зі збереженням їхньої форми. Лінія без спотворень є водночас і лінією з мінімальним затуханням, яке тільки і можливе при заданих параметрах r_0 та g_0 .

Хвильовий опір $Z_{xв}$ лінії без спотворень є активним і не залежить від частоти:

$$Z_{xв} = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (2.23)$$

Фазова швидкість v_ϕ у лінії без спотворень постійна і співпадає з виразом для граничної швидкості розповсюдження хвилі вздовж лінії при нескінченно високій частоті:

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (2.25)$$

Для усунення спотворень, що викликаються неузгодженістю опору приймача з опором лінії, тобто для запобігання виникнення відбиття на прийомному кінці, опір приймача повинен бути рівний хвильовому опору $Z_{xв}$. Коефіцієнт корисної дії лінії має в цьому випадку має найбільше можливе значення, рівне $\eta = e^{-2l\alpha}$, як у лінії з узгодженим навантаженням.

Зважаючи на те, що хвильовий опір лінії без спотворень є активним, при узгодженому навантаженні напруга та струм в будь-якій точці лінії співпадають по фазі. Відношення миттєвих значень напруги та струму в будь-якій точці такої лінії дорівнює:

$$\frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad (2.26)$$

звідки

$$\frac{L_0 i^2}{2} = \frac{C_0 u^2}{2}. \quad (2.27)$$

Отже, на будь-якому відрізку лінії без спотворень, навантаженої узгоджено, енергія магнітного поля в кожний момент часу дорівнює енергії електричного поля.

Слід зазначити, що на практиці умова (2.19), як правило, не виконується; відношення L_0/r_0 звичайно значно менше ніж C_0/g_0 . Внаслідок цього затухання лінії завжди перевищує мінімальне. Найменше відповідають умові (2.19) кабельні лінії.

Щоб лінія більш відповідала умові узгодженості, слід змінити будь-який первинний параметр, наприклад зменшити r_0 чи C_0 або збільшити g_0 чи L_0 .

Зменшення активного опору r_0 можливе за рахунок використання провідників більшого діаметру, що збільшує вартість лінії. Збільшення провідності ізоляції g_0 не вигідно, бо при цьому зросло би затухання лінії.

Найкращим засобом для наближення первинних електричних параметрів до узгодженого режиму є штучне збільшення індуктивності увімкненням у

лінію через певну відстань індуктивних котушок чи застосування кабелю, жили якого обмотані тонкою стрічкою з матеріалу з високою магнітною проникністю.

Запитання

1. Назвіть компоненту коефіцієнта розповсюдження, значення якої зростає пропорційно частоті.
2. Наведіть причину зменшення фазової швидкості у кабельних лініях.
3. Вкажіть умову узгодженості навантаження і довгої лінії.
4. Поясніть причини через які необхідно узгоджувати опори джерела і навантаження.
5. Вкажіть геометричне місце точок кінця вектору напруги при узгодженому навантаженні у лінії з втратами.
6. Наведіть умови передавання сигналу без спотворень.
7. Вкажіть характер хвильового опору лінії без спотворень.
8. Вкажіть умову, яка виконується на будь-якому відрізку лінії без спотворень, навантаженої узгоджено.
9. Наведіть засіб для досягнення режиму без спотворень в довгих лініях.

Лекція № 3. Довга однорідна лінія без втрат

Якщо опір провідників лінії r_0 та провідність витoku g_0 дорівнюють нулю, $r_0 = g_0 = 0$, довга лінія є **лінією без втрат**.

Для високочастотних ліній з відносно невеликою протяжністю, які використовуються радіотехніці, часто виконуються умови $r_0 \ll \omega L_0$ та $g_0 \ll \omega C_0$, що дає підставу розглядати їх як лінії без втрат. У цьому випадку вторинні параметри лінії розраховуються за формулами:

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_0C_0}; \alpha = 0; \beta = \omega\sqrt{L_0C_0}; Z_{xв} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (3.1)$$

Отже, в лінії без втрат затухання відсутнє. Зважаючи на постійність фазової швидкості

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}},$$

будуть відсутні також і фазові спотворення.

Вирази для коефіцієнту фази β , фазової швидкості v_ϕ та хвильового опору $Z_{xв}$ лінії без втрат співпадають з виразами, отриманими для лінії без спотворень.

Зважаючи на те, що гіперболічні функції з уявним аргументом перетворюються в тригонометричні функції, гіперболічні рівняння лінії (1.29) стають тригонометричними:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x' + jZ_{xв} \dot{I}_2 \sin \beta x'; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta x' + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{xв}} \sin \beta x'. \end{cases} \quad (3.2)$$

Переходячи у системі (3.2) до миттєвих значень при $\dot{U}_2 = U_2; \dot{I}_2 = I_2 e^{-j2\phi}$, одержуємо

$$\begin{cases} u(x,t) = U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t + I_{2m} Z_{xв} \sin \beta x \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_2 \right); \\ i(x,t) = \frac{U_{2m}}{Z_{xв}} \sin \beta x \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + I_{2m} \cos \beta x \sin (\omega t - \phi_2). \end{cases} \quad (3.3)$$

Розглянемо властивості ліній без втрат довжиною в чверть та в половину хвилі. При $l = \lambda/4$ та $\beta l = (2\pi/\lambda)\lambda/4 = \pi/2$ з рівнянь (3.2) отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = jZ_{xв} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = j \frac{\dot{U}_2}{Z_{xв}}. \end{cases} \quad (3.4)$$

У цьому випадку напруга (струм) на початку лінії пропорційна струму (напрузі) в кінці та випереджає його по фазі на 90° . Для підтримання постійної напруги в кінці лінії U_2 , що може змінюватися внаслідок зміни навантаження на кінці лінії, необхідно на початку лінії підтримувати постійним не напругу U_1 , а струм I_1 .

Для лінії довжиною в половину хвилі $l = \lambda/2$ та $\beta l = \pi$ з (3.2) маємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 = -\dot{I}_2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Тобто напруга та струм на початку лінії дорівнюють по абсолютному значенню та протилежні по фазі напрузі та струму в кінці лінії. Якщо не враховувати зміни фази на 180° , живлення приймача від джерела енергії відбувається таким чином, немов самої лінії передачі немає.

Вхідний опір лінії без втрат згідно з (2.9) дорівнює:

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{хв}} \frac{Z_2 + jZ_{\text{хв}} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_2 j \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l + Z_{\text{хв}}}. \quad (3.6)$$

Коли до кінця лінії без втрат приєднано навантаження, опір якого дорівнює хвильовому, на будь-якому відрізку лінії виконується умова (2.27), одержана для лінії без спотворень. При цьому вся енергія, що передається прямою хвилею споживається опором навантаження. Якщо опір навантаження відмінний від хвильового, то в місці приєднання навантаження енергія перерозподіляється між полями, в результаті чого виникає зворотна хвиля.

У граничному випадку, коли лінія на кінці розімкнена, пряма хвиля зустрічає нескінченно великий опір, струм в кінці лінії перетворюється в нуль і відповідно енергія магнітного поля переходить в енергію електричного поля. Напруга на розімкненому кінці лінії подвоюється, і виникає відбита хвиля того ж знаку, що і що пряма ($n_2 = 1$).

У другому граничному випадку, коли лінія на кінці замкнута накоротко, падаюча хвиля зустрічає опір, рівний нулю, напруга та кінці лінії перетворюються в нуль і відповідно енергія електричного поля переходить в енергію магнітного поля. Струм на короткозамкненому кінці лінії подвоюється, і виникає відбита хвиля, знак якої протилежний знаку прямої хвилі ($n_2 = -1$).

При $R_2 > Z_{\text{хв}}$ коефіцієнт відбивання $n_2 > 0$; при $R_2 < Z_{\text{хв}}$, $n_2 < 0$. Тому в першому випадку зростає напруга і зменшується струм, а в другому випадку, навпаки у порівнянні з режимом погодження навантаження ($n_2 = 0$).

Режими роботи лінії без втрат. Стоячі хвилі

Дослідимо закон розподілу діючих значень напруги та струму вздовж лінії без втрат. З цією метою скористуємось рівняннями лінії (1.24) та (3.2) у комплексній та гіперболічній формах.

Підставивши в (1.24) уявний коефіцієнт розповсюдження $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$, отримаємо таку систему рівнянь для будь-якої точки лінії на відстані x' від кінця:

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2} \dot{U}_2 \left(1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right) \left(e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x} + n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} \right); \\ \dot{I} = \frac{1}{2Z_{x\delta}} \dot{U}_2 \left(e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x} - n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} \right). \end{cases} \quad (3.7)$$

Коефіцієнт відбивання n_2 рівняння (3.7) є комплексним параметром:

$$n_2 = (Z_2 - Z_{x\delta}) / (Z_2 + Z_{x\delta}). \quad (3.8)$$

З аналізу системи (3.7) можна зробити висновок про те, що комплексна напруга в будь-якій точці x' складається з прямої та зворотної хвиль напруги, амплітуди яких знаходяться в співвідношенні $1:|n_2|$; в свою чергу комплексний струм рівний різниці прямої та зворотної хвиль струму з тим же співвідношенням амплітуд.

Точкам $x' = k\lambda/2$ (k – ціле число), що задовольняють умові

$$\left| e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x'} + n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x'} \right| = 1 + |n_2|, \quad (3.9)$$

відповідає максимальне діюче значення U , бо при цьому фази прямої та зворотної хвиль напруги співпадають.

На відстані $\lambda/4$ від цих точок пряма та зворотна хвилі знаходяться у протифазі і діюче значення напруги має мінімум. При цьому задовольняється умова

$$\left| e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x'} - n_2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x'} \right| = 1 - |n_2|. \quad (3.10)$$

Координати максимумів та мінімумів напруги, що є функціями двох змінних n_2 і λ , і не залежать від часу. Координати максимумів і мінімумів є постійними. Мінімум напруги розташується посередині між двома сусідніми максимумами напруги, причому відстань між найближчими максимумами (або мінімумами) складає $\lambda/2$.

Таким чином, крива діючих значень напруги вздовж лінії без втрат має хвилеподібну форму, максимуми та мінімуми якої чергуються, що зображено на рис. 3.1.

Крива діючих значень струму вздовж лінії без втрат також має хвилеподібну форму, зміщену відносно кривої діючих значень напруги на чверть довжини хвилі. Місце максимумів напруги співпадають з місцем мінімумів струму, і навпаки – мінімуми напруги співпадають з максимумами струму. За відсутності відбитої хвилі ($n_2=0$) діючі значення напруги та струму вздовж лінії без втрат не змінюються.

Чим більше наближається модуль коефіцієнта відбивання n_2 до одиниці, тим більше відрізняються між собою максимуми і мінімуми напруги та струму.

При $|n_2|=1$, тобто при рівності амплітуд прямої та зворотної хвиль, в лінії встановлюються *стоячі хвилі* напруги та струму. Криві діючих значень напруги і струму вздовж лінії подають мають форму «випрямлених» синусоїд.

Вздовж лінії утворюються *вузли*, тобто точки, в яких напруга та струм дорівнюють нулю, і *пучності* – точки, в яких напруга або струм мають максимальні значення. Вузли напруги співпадають з пучностями струму і навпаки – вузли струму співпадають з пучностями напруги. Відповідно вузли (або пучності) напруги та струму зсунуті на чверть довжини вільні відносно один одного.

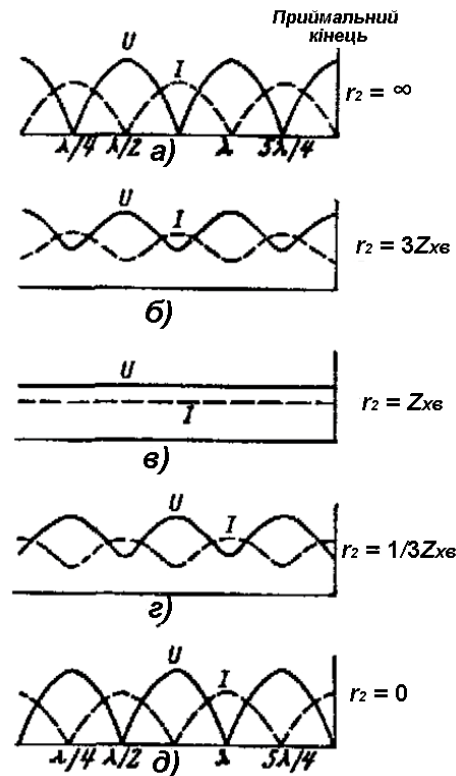


Рис. 3.1. Діючі значення напруги та струму вздовж лінії без втрат

Умови, за якої модуль коефіцієнта відбивання дорівнює одиниці, $|n_2| = 1$ є такими: $Z_2 = \infty$ (холостий хід), $Z_2 = 0$ (коротке замикання) і $Z_2 = jx$ (реактивне навантаження). Цим умовам відповідає режим роботи зі стоячими хвилями в лінії без втрат.

Розподіл діючих значень напруги та струму вздовж лінії для холостого ходу і короткого замикання ілюструється на рис. 3.1. а і д.

При активному навантаженні $Z_2 = r_2 = 3Z_{xв}$, $n_2 = 0.5$, рис. 3.1 б максимуми і мінімуми напруги та струму співпадають за своїми координатами з аналогічними значеннями для режиму холостого ходу, при активному навантаженні $Z_2 = r_2 = Z_{xв}/3$, $n_2 = -0.5$, рис. 3.1 г, максимуми і мінімуми розміщені аналогічно режиму короткого замикання; при узгодженому навантаженні $Z_2 = r_2 = Z_{xв}$, $n_2 = 0.5$, рис. 3.1 в, криві напруги та струму зображаються прямими, паралельними осі абсцис. Аналіз режиму роботи зі стоячими хвилями доцільно проводити на основі рівнянь

Стоячі хвилі легко досліджуються з допомогою рівнянь (3.2) ліній без втрат.

У режимі холостого ходу ($I_2=0$):

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_{x_0}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{cases} \quad (3.11)$$

Вузли напруги знаходяться в точках, для яких $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = 0$ або

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ звідки } x'_0 = \frac{2k+1}{4} \lambda.$$

Пучності напруги знаходяться в точках, для яких $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = \pm 1$ або

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = k\pi \text{ звідки } x'_n = \frac{k}{2} \lambda.$$

Розімкнений кінець лінії співпадає з вузлом струму та пучністю напруги, рис 3.1, а.

Як видно з формули (3.11), струм випереджає по фазі напругу на 90° , коли $\sin(2x'\pi/\lambda)$ і $\cos(2x'\pi/\lambda)$ мають однаковий знак ($0 \leq x' \leq \lambda/4$; $\lambda/2 \leq x' \leq 3\lambda/4$ і т. д.), і відстає на 90° від напруги, коли знаки $\sin(2x'\pi/\lambda)$ і $\cos(2x'\pi/\lambda)$ різні ($\lambda/4 \leq x' \leq \lambda/2$; $3\lambda/4 \leq x' \leq \lambda$).

Вхідний опір розімкненої лінії без втрат:

$$Z_{\text{вх}} = -jZ_{x_0} \operatorname{ctg} \beta x = -jZ_{x_0} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad (3.12)$$

З аналізу формули (3.12), видно, що вхідний опір має реактивний характер. Тип реактивного навантаження (ємнісне або індуктивне) визначається довжиною лінії та частотою (або довжиною хвилі). Зміну абсолютного значення і характеру вхідного опору в залежності від довжини лінії показано на рис. 3.2.

Від $x = 0$ до $x = \lambda/4$, від $x = \lambda/2$ до $x = 3\lambda/4$ і т.д. лінія має ємнісний опір, а від $x = \lambda/4$ до $x = \lambda/2$, від $x = 3\lambda/4$ до $x = \lambda$ і т.д. – індуктивний опір. При $x = 0$, $\lambda/2$, λ і т.д. лінія може бути представлена паралельним резонансним контуром, а при $x = \lambda/4$, $3\lambda/4$, $5\lambda/4$ і т.д. – послідовним резонансним контуром.

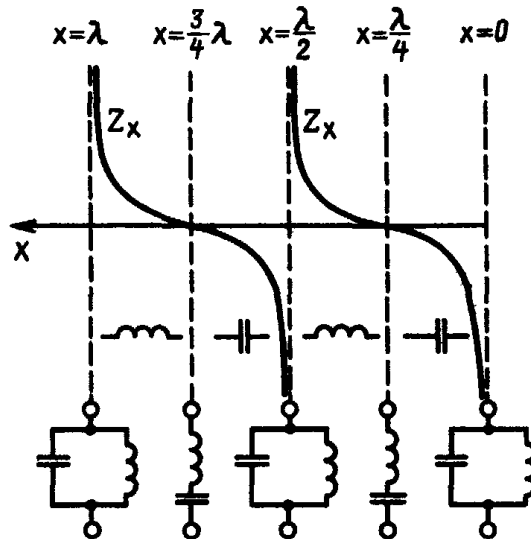


Рис. 3.2. Схеми заміщення розімкненої довгої лінії залежно від її довжини

При короткому замиканні, підставляючи в (3.3) $\dot{U}_2 = 0$, отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{U} = jZ_{x0} \dot{I}_2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{cases} \quad (3.13)$$

На замкненому кінці лінії $x'=0$ і в точках, віддалених від нього на ціле число півхвиль $x' = k\lambda/2$, знаходяться вузли напруги і пучності струму, а в точках, віддалених від кінця на непарне число чвертей хвиль $x' = (2k+1)\lambda/2$ знаходяться пучності напруги та вузли струму, рис.3.1, д.

Як видно з (3.13), струм відстає по фазі від напруги на 90° , коли $\sin(2x'\pi/\lambda)$ і $\cos(2x'\pi/\lambda)$ мають однакові знаки ($0 \leq x' \leq \lambda/4$; $\lambda/2 \leq x' \leq 3\lambda/4$ і т.д.), і випереджає на 90° напругу, коли знаки $\sin(2x'\pi/\lambda)$ і $\cos(2x'\pi/\lambda)$ різні ($\lambda/4 \leq x' \leq \lambda/2$, $3\lambda/4 \leq x' \leq \lambda$ і т.д.).

Вхідний опір короткозамкненої лінії без втрат

$$Z_1 = -jZ_{x0} \operatorname{tg} \beta x = -jZ_{x0} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad (3.14)$$

також є реактивним і залежно від довжини лінії і частоти може бути індуктивним або ємнісним, рис. 3.3.

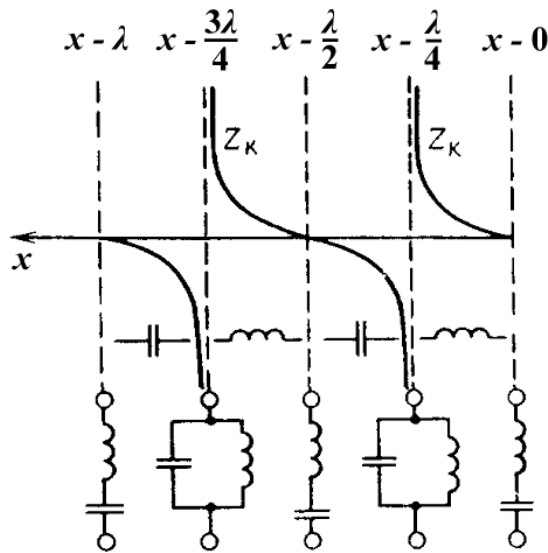


Рис. 3.3. Схеми заміщення замкненої довгої лінії залежно від її довжини

З аналізу рис. 3.3 можна зробити висновок, що від $x = 0$ до $x = \lambda/4$, від $x = \lambda/2$ до $x = 3\lambda/4$ і т.д. лінія має індуктивний опір, а від $x = \lambda/4$ до $x = \lambda/2$, від $x = 3\lambda/4$ до $x = \lambda$ і т.д. – ємнісний опір. При $x = 0, \lambda/2; \lambda$ і т.д. лінія може бути замінена послідовним резонансним контуром, а при $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4$ і т.д. – паралельним резонансним контуром.

Для узгодження лінії з навантаженням необхідно вмикати індуктивні або ємнісні елементи паралельно і послідовно приймачу, для чого на високих частотах може використовуватись короткозамкнена або розімкнена лінія без втрат.

Довжину розімкненої лінії без втрат x можна визначити при заданому ємнісному опорі X_c з формули:

$$\frac{1}{\omega C} = X_c = Z_{x_0} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

Цю ж довжину x можна знайти з кривої вхідної опору Z_1 розімкненої лінії, наведеної на рис. 3.2. Довжину короткозамкненої лінії без втрат x можна визначити при заданому індуктивному опорі X_L з формули:

$$\omega L = X_L = Z_{x_0} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

Довжину x можна також знайти з кривої вхідної опору Z_1 замкненої лінії, наведеної на рис. 3.3. При чисто реактивному опорі навантаження $Z_n = jx_n$ в лінії також будуть стоячі хвилі. Дійсно, ємнісний та індуктивний елементи можуть бути замінені відрізками розімкненої чи короткозамкненої лінії. Отже, лінія з реактивним опором навантаження не відрізняється від розімкненої чи короткозамкненої лінії більшої довжини. Тільки в кінці лінії з реактивним опором навантаження не буде ні пучності, ні вузла струму чи напруги, рис. 3.4.

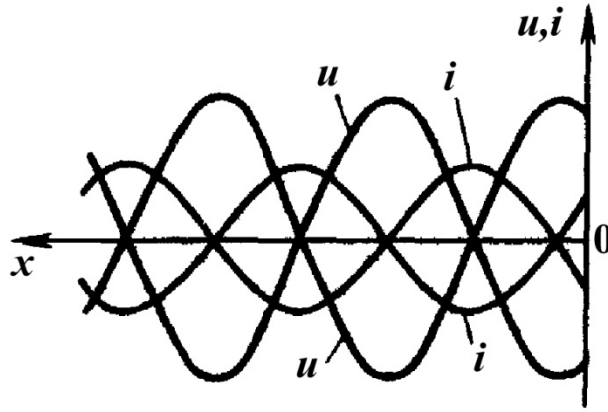


Рис. 3.4. Розподіл струмів і напруг у лінії без втрат з реактивним навантаженням

Припустимо тепер, що у лінії без втрат активний опір навантаження $Z_n = r_n$. Позначивши $Z_{x\phi}/r_n = K$ і підставивши це значення у вираз (3.2), після простих перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 [Ke^{j\beta x} + (1-K)\cos\beta x]; \\ \dot{i} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{x\phi}} [Ke^{j\beta x} + j(1-K)\sin\beta x], \end{cases} \quad (3.15)$$

і при $\dot{U}_2 = U_2$

$$\begin{cases} u(x,t) = U_{2m} K \sin(\omega t + \beta x) + U_{2m} (1-K) \cos\beta x \sin\omega t; \\ i(x,t) = \frac{U_{2m}}{Z_{x\phi}} K \sin(\omega t + \beta x) + \frac{U_{2m}(1-K)}{Z_{x\phi}} \sin\beta x \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (3.16)$$

У системі рівнянь (3.16) напруга та струм представлені сумами двох доданків. Перший – біжуча хвиля, а другий – стояча хвиля. Таким чином, якщо лінія не узгоджена з навантаженням ($K \neq 1$), то напруга і струм в лінії можна представити сумою біжучих та стоячих хвиль. Чим більше значення K відрізняється від одиниці в ту чи іншу сторону, тим більшими будуть амплітуди стоячих хвиль. При $K = 0$ (холостий хід) і $K = \infty$ (коротке замикання) в лінії спостерігаються тільки стоячі хвилі. Чим ближче K до одиниці, тим більшими будуть амплітуди біжучих хвиль. Стоячі хвилі будуть відсутні при $K = 1$ чи $r_n = Z_{x\phi}$, тобто при узгодженому навантаженні.

Необхідно зазначити, що наявність хоч би найменших втрат в лініях приводить до того, що діючі значення напруги та струму не знижуються до нуля, а мають деякі мінімальні значення у точках вузлів.

Для кількісної оцінки ступеню узгодження лінії з навантаженням використовується **коефіцієнт біжучої хвилі**, який є відношенням мінімуму в кривій розподілу напруги чи струму до максимуму тієї ж величини:

$$K_\phi = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}};$$

$$K_{\delta} = \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|};$$

$$|n_2| = \frac{1 - K_{\delta}}{1 + K_{\delta}} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}.$$

У реальних умовах коефіцієнт біжучої хвилі звичайно не нижче 0.5-0.6.

Криву розподілу діючих значень напруги вздовж лінії використовують на практиці для виміру довжини хвилі чи частоти. Довжина хвилі визначається подвійною відстанню між сусідніми максимумами або мінімумами кривої розподілу, а частота обчислюється по довжині хвилі.

Потужність у лінії без втрат

За наявності стоячих хвиль з вузлами, коли амплітуди прямої та зворотної хвиль однакові, а саме при холостому ході, короткому замиканні або чисто реактивному навантаженні, потужність у вузлах напруги та струму дорівнює нулю. В інших точках лінії потужність реактивна, бо напруга і струм зсунуті по фазі на 90° .

У цьому випадку енергія не передається вздовж лінії, а відбувається лише обмін енергією між електричним і магнітним полями на ділянках ліній, обмежених вузлами напруги і струму.

Якщо в лінії є втрати або приймач споживає активну потужність, то вузли зникають, амплітуда прямої хвилі перевищує амплітуду зворотної хвилі і через різницю амплітуд відбувається процес передачі енергії вздовж лінії.

Максимум діючого значення напруги спостерігається при співпадінні фаз прямої і зворотної хвиль напруги, а мінімум - при фазовому зміщенні 180° ; у відповідності з (3.7)

$$U_{\max} = \frac{1}{2}U \left| 1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right| (1 + |n_2|);$$

$$U_{\min} = \frac{1}{2}U \left| 1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right| (1 - |n_2|).$$
(3.17)

Максимум струму спостерігається за умови, коли пряма і зворотна хвилі струму знаходяться в протифазі, а мінімум – за умови збігу їх фаз:

$$I_{\max} = \frac{1}{2Z_{x\delta}}U \left| 1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right| (1 + |n_2|);$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2Z_{x\delta}}U \left| 1 + \frac{Z_{x\delta}}{Z_2} \right| (1 - |n_2|).$$
(3.18)

На підставі (3.17) і (3.18) можна записати

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{U_{\min}}{I_{\min}} = Z_{x\delta}; \quad \frac{U_{\max}}{I_{\min}} = Z_{x\delta} \frac{1 + |n_2|}{1 - |n_2|} = r_{\max}; \quad \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = Z_{x\delta} \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|} = r_{\min}.$$
(3.19)

Якщо втрати в лінії будуть відсутні, то вся активна потужність надходить у навантаження:

$$P = r_{\min} I_{\max}^2 = r_{\max} I_{\min}^2; \quad (3.20)$$

$$P^2 = r_{\max} r_{\min} I_{\max}^2 I_{\min}^2.$$

Використовуючи формулу (3.2) можна довести, що

$$P = Z_{x\delta} I_{\max} I_{\min} = U_{\max} U_{\min} / Z_{x\delta}. \quad (3.21)$$

З допомогою виразу (3.21) обчислюється активна потужність в лінії без втрат. Разом з тим вказане співвідношення доводить, що при гранично допустимій (з точки зору діелектричної міцності ізоляції) напрузі U_{\max} активна потужність, що передається, тим більше, чим вище коефіцієнт біжучої хвилі, тобто чим менше коефіцієнт відбивання від кінця лінії n_2 . Максимум потужності, що передається, настає при узгодженому навантаженні ($Z_2 = Z_{x\delta}$), коли $U_{\max} = U_{\min}$ чи $K_{\delta} = 1$.

При неузгодженому навантаженні в лінії частина енергії витрачається на відбивання. Оскільки діючі значення напруг прямої і зворотної хвиль U_n та $U_{3\delta}$ для всіх точок лінії без втрат незмінні, то, очевидно,

$$U_{\max} = U_n + U_{3\delta};$$

$$U_{\min} = U_n - U_{3\delta};$$

$$K_{\delta} = U_{\min} / U_{\max} = (U_n - U_{3\delta}) / (U_n + U_{3\delta}); \quad (3.22)$$

$$P = \frac{1}{Z_{x\delta}} (U_n - U_{3\delta})(U_n + U_{3\delta}) = \frac{1}{Z_{x\delta}} (U_n^2 - U_{3\delta}^2).$$

З аналізу формул (3.22) можна зробити висновок, що потужність прямої хвилі ($P_n = U_n^2 / Z_{x\delta}$) складається з корисної потужності, що споживається приймачем (P), і потужності відбитої хвилі ($P_{3\delta} = U_{3\delta}^2 / Z_{x\delta}$).

Відношення корисної потужності до потужності падаючої хвилі дорівнює

$$\frac{P}{P_n} = \frac{P_n - P_{3\delta}}{P_n} = \frac{U_n^2 - U_{3\delta}^2}{U_n^2} = 1 - |n_2|^2 = 1 - \left(\frac{1 - K_{\delta}}{1 + K_{\delta}} \right)^2 = \frac{4K_{\delta}}{(1 + K_{\delta})^2}. \quad (3.23)$$

Запитання

1. Назвіть умови, за яких довга лінія є лінією без втрат.
2. Опишіть співвідношення струмів і напруг у довгій лінії довжиною чверть хвилі.
3. Опишіть співвідношення струмів і напруг у довгій лінії довжиною половину хвилі.
4. Дайте характеристику лінії без втрат, якщо до її кінця приєднано навантаження, опір якого дорівнює хвильовому.
5. Дайте визначення терміна «пучність» струму (напруги).
6. Назвіть умову, за якої у лінії встановлюються лише стоячі хвилі.
7. Охарактеризуйте режим передавання енергії вздовж лінії за умови наявності лише стоячих хвиль.
8. Опишіть співвідношення між коефіцієнтом біжучої хвилі і обсягом енергії, який може передаватись довгою лінією.

Лекція № 4. Використання довгих ліній як елементів електричного ланцюга. Перехідні процеси у довгих лініях

Довга лінія як узгоджувальний трансформатор

Трансформатор з коефіцієнтом трансформації $n=w_1/w_2$, навантажений опором Z_n , має вхідний опір $Z_{ex}=n^2Z_n$. Тому він може використовуватися як узгоджувальний пристрій. Таку же роль може виконувати лінія без втрат, що має довжину $\lambda/8$ чи $\lambda/4$.

Лінія без втрат, навантажена опором Z_2 , при $x=\lambda/8$ має вхідний опір

$$Z = Z_{x8} \frac{Z_2 + jZ_{x8} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{Z_{x8} + jZ_2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = Z_{x8} \frac{Z_2 + jZ_{x8}}{Z_{x8} + jZ_2}. \quad (4.1)$$

У випадку активного навантаження ($Z_2=r_2$) модулі чисельника і знаменника у формулі (4.1) дорівнюють один одному, і тому модуль вхідного опору лінії дорівнює хвильовому опору $|Z|=Z_{x8}$. Таким чином, за допомогою лінії довжиною $\lambda/8$ можна узгодити по модулю довільне активне навантаження з джерелом, що має внутрішній опір Z_{x8} .

При $x=\lambda/4$ вхідний опір лінії без втрат, навантаженої опором Z_2 дорівнює:

$$Z = Z_{x8} \frac{\frac{Z_2}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}} + jZ_{x8}}{\frac{Z_{x8}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}} + jZ_2} = \frac{Z_{x8}^2}{Z_2}. \quad (4.2)$$

Якщо опір Z_2 активний, то вхідний опір лінії також активний. Отже, чвертьхвильова лінія відіграє роль трансформатора, що узгоджує, при чому хвильовий опір лінії обирається рівним середньому геометричному двох узгоджувальних опорів – приймача Z_2 і джерела Z :

$$Z_{x8} = \sqrt{ZZ_2}. \quad (4.3)$$

Як видно з формули (4.2) чвертьхвильова лінія здатна трансформувати великий опір в малий і навпаки. Граничними випадками для Z_2 є коротке замикання і холостий хід, при яких вхідний опір чвертьхвильової лінії без втрат буде прямувати в нескінченність (при $Z_2=0$) і в нуль (при $Z_2=\infty$).

Практичне застосування чвертьхвильова лінія знаходить, наприклад, як пристрій, що узгоджує антену і високочастотний фідер. У цьому випадку хвильовий опір Z_2 чвертьхвильової лінії вибирається відповідно до формули (4.3), в якій Z_2 є активним опором антени, а Z – хвильовим опором високочастотного фідера.

Граничне співвідношення між узгодженими опорами, яке допускає застосування чвертьхвильової лінії як узгоджувального пристрою, орієнтовно дорівнює десяти.

Вхідний опір півхвильової лінії без втрат ($x=\lambda/2$) дорівнює опору навантаження

$$Z = Z_{x\delta} \frac{Z_2 + jZ_{x\delta} \operatorname{tg} \pi}{Z_{x\delta} + jZ_2 \operatorname{tg} \pi} = Z_2. \quad (4.4)$$

Тому така лінія рівнозначна ідеальному трансформатору з коефіцієнтом трансформації $n = 1$. Каскадне під'єднання півхвильової і чвертьхвильової ліній ($x=\lambda/2+\lambda/4=3\lambda/4$) не змінює властивостей останньої. Тому сказане вище у відношенні чвертьхвильової лінії зберігає силу для лінії, що мають довжину, кратну непарному числу $\lambda/4$.

Лінія як елемент резонансного ланцюга

Чвертьхвильова лінія з малими втратами, розімкнена на кінці, має властивості резонансного ланцюга, який складається з послідовно з'єднаних елементів r , L і C . На частоті, при якій довжина лінії складає чверть хвилі, вхідний опір лінії буде активним і при цьому мінімальним, що відповідає резонансу.

При малому відхиленні частоти від резонансної модуль вхідного опору лінії різко зростає; вхідний опір набуває ємнісного характеру при зниженні частоти і індуктивний характер при підвищенні.

Вхідний опір лінії з малими втратами, розімкнений на кінці, можна отримати з формули (1.29), якщо розкласти $shx'\gamma$ та $chx'\gamma$ у ряд Тейлора і, зважаючи на умову $\alpha \rightarrow 0$, вважати $ch\alpha x' \approx 1$, а $sh\alpha x' \approx \alpha x'$.

$$Z_{ex} \approx Z_{x\delta} \frac{\cos \beta x' + j\alpha x' \sin \beta x'}{\alpha x' \cos \beta x' + j \sin \beta x'}. \quad (4.5)$$

Поблизу резонансної частоти $\beta x' \approx \pi/2$ і $\sin \beta x' \approx 1$, а $\cos \beta x' \ll 1$. Тому

$$Z_{ex} \approx Z_{x\delta} (\alpha x' - j \cos \beta x') = Z_{x\delta} \alpha x' \left(1 - j \frac{\cos \beta x'}{\alpha x'} \right). \quad (4.6)$$

Якщо через β_0 позначити коефіцієнт фази при резонансній частоті, тобто прийняти $\beta_0 x' = \pi/2$ і врахувати співвідношення $v_\phi = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{\omega_0}{\beta_0}$, то вираз для

$\cos \beta_0 x'$ можна перетворити до виду:

$$\cos \beta x' \approx \cos \beta_0 \frac{\omega}{\omega_0} x' = \cos(\beta x' + \beta x' \delta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta x' \delta\right) = -\sin \beta_0 x' \delta \approx -\beta_0 x' \delta,$$

де $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ - відносне відхилення частоти ω відносно резонансної ω_0 .

Отже

$$Z_{ex} \approx Z_{x\delta} \alpha x' \left(1 + j \frac{\beta \delta}{\alpha} \right). \quad (4.7)$$

При частоті, близькій до резонансної, коли значення δ значно менше одиниці, комплексний опір резонансного ланцюга приблизно дорівнює:

$$Z \approx r(1 + j2Q\delta). \quad (4.8)$$

Розглядаючи чвертьхвильову лінію як резонансний ланцюг, можна вважати, що добротність лінії дорівнює:

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha}. \quad (4.9)$$

Відповідно, смуга пропускання, значення якої оберненопропорційне добротності, дорівнює:

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\beta}. \quad (4.10)$$

Тут під смугою пропускання мається на увазі віднесена до резонансної частоти ширину резонансної кривої між точками, що відповідають половині максимальної потужності. При малих значеннях коефіцієнту δ добротність Q має великі значення, приблизно $Q = 1000 \dots 4000$, що значно перевищує добротність rLC - контурів.

Перехідні процеси у довгих лініях

Перехідні процеси в довгих лініях виникають при комутаціях, передаванні неперіодичних сигналів або під впливом зовнішнього електромагнітного поля (наприклад, при грозових розрядах). Для дослідження перехідних процесів в однорідних ланцюгах з розподіленими параметрами користуються диференціальними рівняннями (1.1) в часткових похідних.

$$\begin{cases} -\partial u / \partial x = r_0 i + L_0 \partial i / \partial t; \\ -\partial i / \partial x = g_0 u + C_0 \partial u / \partial t. \end{cases}$$

У загальному виді рішення цих диференціальних рівнянь достатньо складне. Воно спрощується, якщо знехтувати втратами, тобто вважати, що питомий опір лінії r_0 та питома провідність g_0 дорівнюють нулю, $r_0 = g_0 = 0$.

$$\begin{cases} -\partial u / \partial x = L_0 \partial i / \partial t; \\ -\partial i / \partial x = C_0 \partial u / \partial t. \end{cases} \quad (4.11)$$

Якщо диференціювати перше рівняння системи (4.11) по x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) = -L_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right),$$

і підставити друге рівняння, одержимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.12)$$

Диференціальне рівняння (4.12) відоме в математичній фізиці під назвою рівняння коливань струни. Його рішення запропоноване Даламбером має вигляд:

$$u = f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \quad (4.13)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ - фазова швидкість хвилі.

Перший доданок рівняння (4.13) є одиничною прямою хвилею напруги, що без затухання рухається в напрямку збільшення координати x , тобто від

початку до кінця ланцюга зі швидкістю $v = dx/dt$. Другий доданок є зворотною хвилею напруги, що рухається в протилежному напрямі.

Для струму справедливий вираз

$$i = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]. \quad (4.14)$$

Вирази (4.13) і (4.14) записуються скорочено

$$u = u_n + u_{зв};$$

$$i = \frac{1}{Z_{хв}} (u_n - u_{зв}) = i_n - i_{зв}, \quad (4.15)$$

де i_n і $i_{зв}$ – пряма і зворотна хвилі струму; $Z_{хв} = \sqrt{L_0 / C_0}$ – хвильовий опір.

Отже, напруга і струм прямої і зворотної хвиль зв'язані законом Ома:

$$\frac{u_n}{i_n} = \frac{u_{зв}}{i_{зв}} = Z_{хв}. \quad (4.16)$$

Отже, за відсутності втрат в однорідному ланцюзі з розподіленими параметрами напруга і струм можуть бути представлені як сума і як різниця двох хвиль, які рухаються з однаковою швидкістю $v = 1 / \sqrt{L_0 C_0}$ у протилежних напрямках, без зміни їхньої форми. При цьому в будь-якій точці однорідного ланцюга відношення напруги і струму для прямої і зворотної хвиль дорівнює хвильовому опору $Z_{хв}$.

Якщо на шляху розповсюдження хвилі зустрічається неоднорідність, наприклад повітряна лінія переходить у кабельну або хвиля досягає кінця лінії (розімкнутого, замкнутого на опір, коротко замкненого), відбувається відбивання хвилі. Залежно від характеру неоднорідності відбивання може бути частковим або повним. У першому випадку одночасно з відбитою хвилею виникає хвиля, що розповсюджується у початковому напрямку; у другому випадку виникає тільки відбита хвиля. Позначимо:

u_1, i_1 – напруга і струм у місці відбивання;

u_{1n}, i_{1n} – напруга і струм прямої хвилі;

u_{1o}, i_{1o} – напруга і струм зворотної хвилі;

u_2, i_2 – напруга і струм заломленої прямої хвилі;

Z_1, Z_2 – хвильові опори для прямої і зворотної хвиль Z_1 і заломленої хвилі Z_2 .

У місці неоднорідності виконується умова рівності напруг і струмів:

$$u_1 = u_2; i_1 = i_2. \quad (4.17)$$

Отже,

$$u_{1n} + u_{1зв} = u_2;$$

$$i_{1n} - i_{1зв} = i_2. \quad (4.18)$$

Підставимо значення формул (4.16) і (4.17) у формулу (4.18):

$$i_{1n} = \frac{u_{1n}}{Z_1}; i_{13e} = \frac{u_{13e}}{Z_1}; i_2 = \frac{u_2}{Z_2}.$$

$$\frac{u_{1n} - u_{13e}}{Z_1} = \frac{u_2}{Z_2}.$$

У результаті спільного рішення цих рівнянь знаходяться зворотна u_{13e} і заломлена u_2 хвилі:

$$u_{13e} = nu_{1n};$$

$$u_2 = (1+n)u_{1n},$$
(4.19)

де $n = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$ - коефіцієнт відбивання.

Відповідно струм відбитої хвилі

$$i_{13e} = \frac{u_{13e}}{Z_1} = n \frac{u_{1n}}{Z_1}.$$
(4.20)

А струм заломленої хвилі

$$i_2 = \frac{u_2}{Z_2} = \frac{(1+n)u_{1n}}{Z_2} = \frac{2u_{1n}}{Z_1 + Z_2}.$$
(4.21)

Вираз (4.21) свідчить, що струм в кінці лінії після відбивання можна знайти як струм в еквівалентному ланцюзі, до якого під'єднується джерело напруги, що дорівнює подвійній напрузі прямої хвилі, і який складається з хвильового опору першої лінії Z_1 і послідовно з'єданого з ним опору навантаження (в який входить друга лінія своїм хвильовим опором Z_2).

Дослідження перехідних процесів у лініях з розподіленими параметрами за допомогою перетворення Лапласа

Диференційні рівняння однорідної двопровідної лінії, зважаючи на наявність двох незалежних змінних t і x записуються в часткових похідних:

$$\begin{cases} -\partial u / \partial x = r_0 i + L_0 \partial i / \partial t; \\ -\partial i / \partial x = g_0 u + C_0 \partial u / \partial t. \end{cases}$$

Формула диференціювання по параметру дозволяє застосувати перетворення Лапласа до цих рівнянь, в яких x є параметром. Якщо зображення цих функцій позначити через

$$u(x,t) \Leftrightarrow U(x,p) = U;$$

$$i(x,t) \Leftrightarrow I(x,p) = I,$$
(4.22)

то системі диференційних рівнянь в часткових похідних буде відповідати система рівнянь

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = (r_0 + pL_0)I - L_0 i(x,0); \\ -\frac{dI}{dx} = (g_0 + pC_0)U - C_0 u(x,0), \end{cases}$$
(4.23)

де $i(x, 0)$ і $u(x, 0)$ – початкові (за часом) значення струму і напруги в точці x .

Зважаючи на те, що параметр p не залежить від x і похідні по p будуть відсутні, часткові похідні по x замінені звичайними.

Виключаючи з системи (4.23) I , одержуємо рівняння відносно U

$$\frac{d^2U}{dx^2} = (r_0 + pL_0)(g_0 + pC_0)U + L_0 \frac{di(x,0)}{dx} - C_0(r_0 + pL_0)u(x,0). \quad (4.24)$$

Аналогічно, виключаючи з (4.23) U , одержуємо рівняння відносно I

$$\frac{d^2I}{dx^2} = (r_0 + pL_0)(g_0 + pC_0)I + C_0 \frac{du(x,0)}{dx} - L_0(g_0 + pC_0)i(x,0). \quad (4.25)$$

Ці рівняння вирішуються як звичайні диференціальні рівняння другого порядку. Позначимо

$$\gamma(p) = \sqrt{(r_0 + pL_0)(g_0 + pC_0)}, \quad (4.26)$$

і назвемо цей вираз операторним коефіцієнтом розповсюдження, а

$$Z(p) = \sqrt{\frac{r_0 + pL_0}{g_0 + pC_0}}, \quad (4.27)$$

операторним хвильовим опором лінії.

При нульових початкових значеннях напруги і струму рівнянь (4.24) і (4.25), вони спрощуються

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \gamma^2 U; \quad \frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I.$$

У загальному випадку перехід від зображень $U(x,p)$ і $I(x,p)$, що є трансцендентними функціями від p , до оригіналів $u(x,t)$ і $i(x,t)$ не можна здійснити аналітично.

Виникнення хвиль з прямокутним фронтом

Для з'ясування фізичних основ виникнення і руху хвилі з прямокутним фронтом розглянемо лінію, що в момент часу $t = 0$ під'єднується до джерела постійної напруги U_0 (внутрішній опір джерела рівний нулю). Для повітряної лінії напруги промислової частоти ($\lambda \approx 6000$ км) за час проходження хвилею відстані в межах декількох десятків кілометрів напругу у певній точці лінії можна вважати постійною. Після під'єднання джерела до лінії виникає хвиля з напругою $u_n = U_0$, де U_0 миттєве значення напруги джерела у момент під'єднання до лінії. Утворена хвиля заряджає послідовно один елемент лінії за іншим до напруги U_0 .

Припустимо, що в момент t хвиля досягла перетину mn , рис. 4.1. У цей момент в усіх точках x лівіше перетину напруга між провідниками дорівнює U_0 , а правіше цього перетину напруга дорівнює нулю.

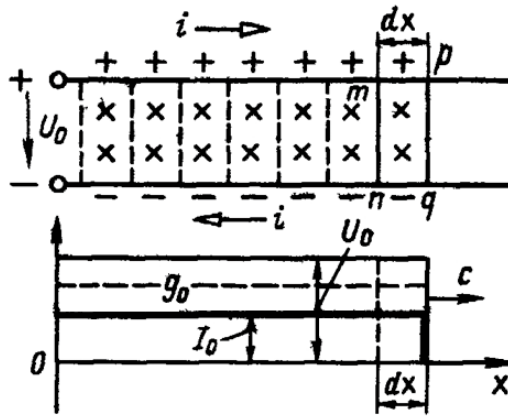


Рис. 4.1. Процес утворення хвилі з прямокутним фронтом при під'єднанні джерела

На поверхні верхнього провідника лівіше перетину mn відбувається накопичення позитивного заряду $q_0 = C_0 U_0$, правіше цього перетину заряд дорівнює нулю. За час dt хвиля переміщується правіше перетину mn на відстань $dx = c dt$. При цьому елемент лінії dx отримає заряд $dq = q_0 dx = C_0 U_0 dx$, що повинен пройти по верхньому провіднику через перетин mn і через будь-який перетин верхнього провідника лівіше mn . Розповсюдження заряду створює вздовж верхнього провідника від джерела до перетину mn струм

$$i = dq/dt = q_0 dx/dt = C_0 U_0 c = I_0. \quad (4.28)$$

Водночас з накопиченням позитивного заряду на поверхні верхнього провідника лінії відбувається накопичення негативного заряду на поверхні нижнього провідника. Розповсюдження негативного заряду вздовж нижнього провідника з ліва направо пов'язане з електричним струмом у нижньому провіднику, який направлений у протилежну сторону, тобто з права наліво.

Процес розповсюдження зарядів можна уявити собі таким чином, що з переміщенням хвилі з ліва направо елементи верхнього провідника один за одним накопичують певний позитивний заряд і такий же позитивний заряд віднімається від елементів нижнього провідника. Протилежні заряди утворюють електричне поле між провідниками по всій довжині лінії, яку пройшла хвиля. При виникненні електричного поля у фронті хвилі між елементами провідників, які заряджаються (mp і nq на рис. 4.1), протікає струм зміщення. Одержується замкнений ланцюг струму. Від позитивного полюса джерела струм іде по верхньому провіднику, замикається у фронті хвилі струмом зміщення між провідниками і після цього іде по нижньому провіднику до негативного полюса джерела. Одночасно з рухом хвилі ланцюг подовжується, але струм в ланцюзі залишається незмінним: $I_0 = C_0 U_0 c$.

У контурі що утвориться цим ланцюгом виникає магнітний потік, лінії якого лежать в площинах, перпендикулярних осям провідників. При переміщенні хвилі на відстань $dx = c dt$ магнітний потік збільшується на значення $d\Phi = L_0 I_0 dx = L_0 I_0 c dt$. При виникненні потоку $d\Phi$ в контурі $mpqn$ наводиться ЕРС самоіндукції

$$d\Phi / dt = L_0 I_0 dx / dt = L_0 I_0 c, \quad (4.29)$$

що діє проти годинникової стрілки. Таким чином, ЕРС самоіндукції у фронті хвилі, скерована по лінії qp , дорівнює:

$$U_0 = L_0 c I_0. \quad (4.30)$$

Звідки

$$U_0 / I_0 = L_0 c = L_0 / \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{L_0 / C_0} = Z_{xв}. \quad (4.31)$$

Енергія, що віддається в одиницю часу джерелом, дорівнює $U_0 I_0$. В одиницю часу хвиля переміщується на відстань, рівну c . На кожному одиничному відрізку лінії, пройдену хвилею, запасається енергія $C_0 U_0^2 / 2$ в електричному полі та $L_0 I_0^2 / 2$ в магнітному полі. На підставі закону збереження енергії

$$U_0 I_0 = c (C_0 U_0^2 / 2 + L_0 I_0^2 / 2). \quad (4.32)$$

Підставивши в ліву частину рівняння (4.32) $I_0 = C_0 U_0 c$, отримаємо співвідношення

$$C_0 U_0^2 / 2 = L_0 I_0^2 / 2. \quad (4.33)$$

Тобто для хвилі значення енергії електричного і магнітного полів на ділянці лінії, пройденій хвилею, рівні між собою.

Розглянута хвиля має прямокутну форму

$$u_n(t - x/c) = U_0, \text{ при } t < x/c$$

$$u_n(t - x/c) = 0, \text{ при } t > x/c,$$

і називається **хвилею з прямокутним фронтом**.

Якщо до лінії підключається джерело з внутрішнім опором $r_{вн}$, струм і напруга хвилі стають меншими. У цьому випадку

$$u_n = U_0 - r_{вн} i_n;$$

$$i_n = u_n / Z_{xв}. \quad (4.34)$$

Звідки

$$u_n = U_0 Z_{xв} / (Z_{xв} + r_{вн});$$

$$i_n = U_0 / (Z_{xв} + r_{вн}). \quad (4.35)$$

При під'єднанні генератора з індуктивним внутрішнім опором фронт хвилі змінюється і хвиля перестає бути прямокутною.

Під'єднання навантаження

Хвилі прямокутної форми виникають і при під'єднанні до зарядженої лінії навантаження з активним опором. Розглянемо лінію з хвильовим опором $Z_{xв}$, заряджену до напруги U_0 . Якщо в момент часу $t = 0$ до кінця лінії під'єднується навантаження з опором r_n , рис. 4.2, у кінці лінії виникає зворотна хвиля, яка рухається від кінця лінії до її початку.

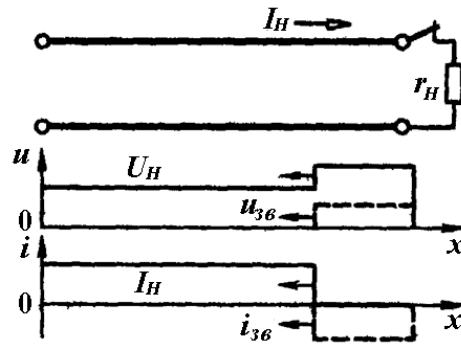


Рис. 4.2. Епюр виникнення зворотної хвилі

Напруга і струм цієї хвилі можуть бути легко розраховані за допомогою рівнянь, складених за законом Ома для хвилі і для опору навантаження:

$$\begin{aligned} u_{36} &= Z_{x6} i_{36}; \\ u_n &= U_0 + u_{36} = r_n (i_n - i_{36}) = -r_n i_{36}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Звідки

$$\begin{aligned} u_{36} &= -U_0 Z_{x6} / (Z_{x6} + r_n); \\ i_{36} &= -U_0 / (Z_{x6} + r_n). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Від'єднання джерела

При від'єднанні лінії від джерела живлення в ній також виникають хвилі. Нехай в лінії з опором навантаження r_n встановився струм $I_n = U_0/r_n = U_n/r_n$. Якщо в момент $t = 0$ від'єднати джерело енергії рис. 4.3, струм на початку лінії миттєво спаде до нуля і виникне хвиля з напругою і струмом

$$u_n = -Z_{x6} I_n; i_n = -I_n. \quad (4.38)$$

У результаті накладання цієї хвилі на напругу та струм, що є в лінії $i = I_n + i_n = 0$, а напруга $u = U_n + u_n = U_n - Z_{x6} I_n$.

Якщо струм навантаження I_n менший зарядного струму I_0 при від'єднанні лінії від джерела постійної напруги $U_0 = U_n$, виконується умова $I_n < U_n/Z_{x6}$, тоді напруга лінії $u = U_n - Z_{x6} I_n > 0$, що свідчить про те, що після від'єднання джерела на пройденій хвилею ділянці збережеться деяка частка напруги того ж знаку. Якщо ж $I_n > U_n/Z_{x6}$, то напруга на ділянці, яку пройшла хвиля, матиме інший знак.

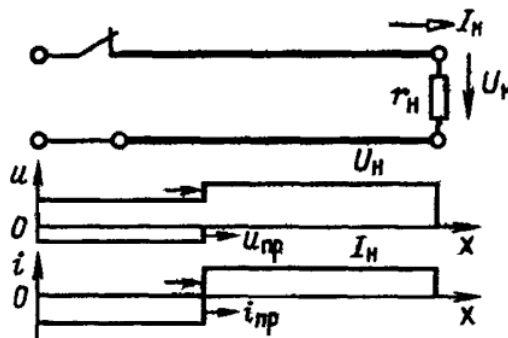


Рис. 4.3. Епюри виникнення хвиль струму і напруги для випадку від'єднання джерела

Від'єднання навантаження

Після від'єднання навантаження у лінії виникає така ж хвиля, як і при від'єднанні джерела. Різниця полягає тільки в тому, що ця хвиля має протилежний знак і розповсюджується в зворотному напрямі.

У результаті накладення цієї хвилі на значення струму, який протікав по лінії $I_n + i_0 = 0$, та на значення напруги $u = U_n + u_0 = U_n + Z_{xв} I_n$ у лінії виникнуть хвилі з прямокутним фронтом епюри яких показано на рис. 4.4.

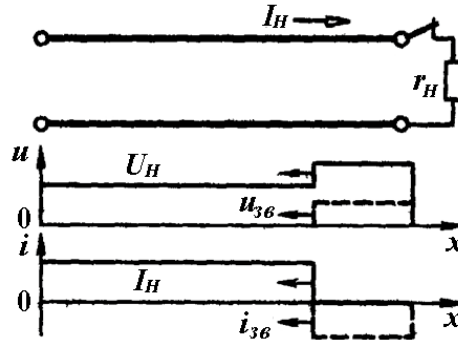


Рис. 4.4. Епюри виникнення хвиль струму і напруги для випадку від'єднання навантаження

При від'єднанні навантаження зворотна хвиля викликає підвищення напруги лінії, яка збільшується пропорційно хвильовому опорі лінії. За допомогою аналогічних міркувань можуть бути знайдені хвилі, що виникають у складніших випадках.

Відбивання хвилі з прямокутним фронтом від кінця лінії

Розглянемо хвилю з прямокутним фронтом

$$u_n = U_0; i_n = I_0 = U_0/Z_{xв},$$

яка рухається по однорідній лінії і досягає навантаження з резистивним опором $Z_2 = r_n$, рис. 4.5, а і б. Коли хвиля дійде до кінця лінії, рис. 4.5 в, вона частково відіб'ється.

Для визначення умов відбивання хвилі знайдемо струм через опір r_n . Напруга у кінці лінії $u_2 = u_n + u_{3в}$, а струм $i_2 = i_n - i_{3в}$. Тому струм зворотної хвилі дорівнює

$$i_{3в} = i_n - i_2 = I_0 - i_2, \quad (4.38)$$

і напруга

$$u_2 = Z_{xв} i_2 = Z_{xв} (I_0 - i_2) = U_0 - Z_{xв} i_2. \quad (4.39)$$

Виразивши з формул (4.38) і (4.39) струм i_2 і напругу u_2 на кінці лінії, отримаємо

$$\begin{aligned} i_2 &= 2U_0 / (r_n + Z_{xв}); \\ u_2 &= 2U_0 r_n / (r_n + Z_{xв}). \end{aligned} \quad (4.40)$$

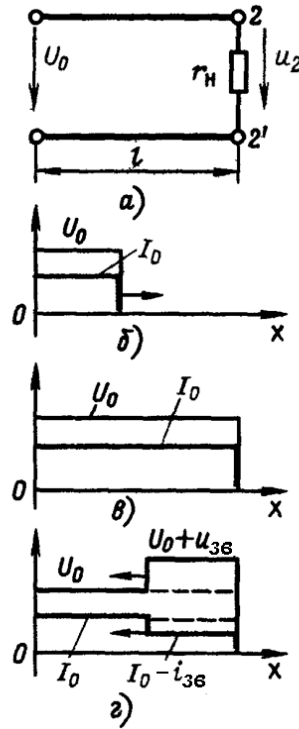


Рис. 4.5. Епюри відбивання хвилі від кінця лінії

З аналізу формули (4.40) можна зробити висновок, що струм через опір r_n дорівнює струму, який можна отримати у схемі з джерелом напруги $2U_0$ і опорами r_n і $Z_{xв}$ з'єднаними послідовно.

Напруга в кінці лінії u_2 залежить від значення і знаку зворотної хвилі, рис. 4.4 г. З формул (4.38) і (4.39) знаходимо

$$u_{3в} = U_0 - Z_{xв} i_2 = nU_0; \quad (4.41)$$

$$i_{3в} = \frac{u_{3в}}{Z_{xв}} = nI_0,$$

де $n = (r_n - Z_{xв}) / (r_n + Z_{xв})$ - коефіцієнт відбивання.

Отже,

$$u_2 = U_0 + u_{3в} = (1+n)U_0; \quad (4.42)$$

$$i_2 = I_0 - i_{3в} = (1-n)I_0.$$

Якщо лінія на кінці розімкнена ($r_n = \infty$), то $n = 1$ і $u_{3в} = U_0$, $i_{3в} = I_0$, хвиля відбивається повністю без зміни знаку. Напруга на кінці подвоюється: $u_2 = 2U_0$, а струм $i_2 = 0$.

Якщо лінія на кінці коротко замкнена ($r_n = 0$), то $n = -1$ і $u_{3в} = -U_0$, $i_{3в} = -I_0$, хвиля відбивається повністю зі зміною знаку. Напруга в кінці лінії $u_2 = 0$, а струм $i_2 = 2I_0$.

Якщо опір навантаження більше хвильового опору лінії $r_n > Z_{xв}$, тобто $n > 0$, то пряма хвиля зустрічає в кінці лінії більший опір і напруга в кінці лінії зростає, $u_2 = (1+n)U_0 > U_0$. Зворотна хвиля має той же знак, що і пряма. Якщо $r_n < Z_{xв}$, то це приводить до зниження напруги в лінії. Відбита хвиля має протилежний знак і в кінці лінії значення напруги зменшується.

Якщо $r_2 = Z_{x\theta}$, тобто $n = 0$, то $u_{3\theta} = 0$, $i_{3\theta} = 0$ і зворотна хвиля не утворюється. Як тільки хвиля дійде до кінця, в ланцюзі відразу встановиться незмінний струм, і вся енергія, що передається прямою хвилею поглинається опором r_n (узгоджене навантаження).

При досягненні зворотною хвилею початку лінії вона розглядається як пряма хвиля, яка рухається в зворотному напрямі.

Загальний метод визначення відбитих хвиль

На практиці часто однорідність лінії порушується: до лінії під'єднуються елементи з зосередженими параметрами, інші лінії з різними хвильовими опорами, вузли паралельного під'єднання декількох ліній. Для визначення перехідних режимів при падінні хвилі на вузол, аналогічно комутаціям, розроблений загальний метод, що застосовується при будь-якій схемі з'єднання ліній і ланцюгів з зосередженими параметрами.

Нехай вздовж лінії з хвильовим опором $Z_{x\theta 1}$ рухається хвиля довільної форми з параметрами u_n і i_n , причому $u_n = Z_{x\theta 1} i_n$. Хвиля досягає точки перерізу неоднорідності 2-2', рис 4.6.

В усіх випадках частину ланцюга, приєднану до лінії праворуч перерізу 2-2', можна розглядати як пасивний двополюсник (рис. 4.6, а), напруга u_2 і струм i_2 якого є деякими функціями часу.

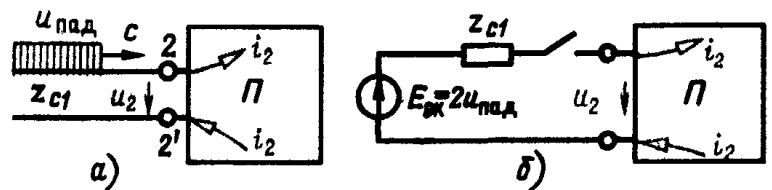


Рис. 4.6. Довга лінія (а) і її схема заміщення (б)

Виводи двополюсника 2-2' відносяться до лінії з хвильовим опором $Z_{x\theta 1}$, напруга на цих виводах дорівнює сумі напруг прямої та зворотної хвиль, а струм – різниці струмів хвиль:

$$\begin{cases} u_2 = u_n + u_{3\theta}; \\ i_2 = i_n - i_{3\theta} = u_n / Z_{x\theta 1} - u_{3\theta} / Z_{x\theta 1}. \end{cases} \quad (4.43)$$

Вирішивши систему (4.43), отримаємо

$$2u_n = u_2 + Z_{x\theta 1} i_2. \quad (4.44)$$

Рівняння (4.44) є основним розрахунковим рівнянням для визначення напруги і струму в місці відбивання хвилі. З аналізу цього рівняння можна зробити висновок, що струм і напруга лінії в місці відбивання хвилі такі ж, як і при заміні лінії, по якій рухається хвиля, еквівалентною схемою з зосередженими параметрами, що складається з послідовно під'єданого джерела з ЕРС $2u_n$ і хвильового опору $Z_{x\theta 1}$, рис. 4.6, б.

Таким чином, вирішення задачі про перехідний режим у довгій лінії при падінні хвилі на вузол розгалуження може бути зведене до розрахунку перехідного процесу в схемі заміщення із зосередженими параметрами.

На підставі сказаного можна сформулювати наступне правило. **При падінні на вузол хвилі з напругою u_n , яка рухається по лінії з хвильовим опором $Z_{xв}$, напруга і струм в цьому вузлі будуть такими ж, як і при під'єднанні джерела з ЕРС з напругою $2u_n$, і внутрішнім опором $Z_{xв}$ безпосередньо до даного вузла.**

Знаючи напругу u_2 і струм i_2 , легко визначити значення зворотної хвилі.

$$u_{зв} = u_2 - u_n; i_{зв} = i_n - i_2. \quad (4.45)$$

За відомими значеннями напруг і струмів прямої і зворотної хвиль можна знайти розподіл напруги і струму вздовж лінії в будь-який момент часу.

При вирішенні задачі операторним методом залежність між $U_2(p)$ і $I_2(p)$ записується у виді

$$U_2(p) = Z_H(p)I_2(p), \quad (4.46)$$

де $Z_H(p)$ – вхідний опір пасивного двополюсника в схемі заміщення рис. 4.6 б.

Рівняння (4.44) і формули (4.45), (4.46) зводяться до виду

$$2U_n(p) = U_2(p) + Z_{xв1}I_2(p) = U_2(p)[1 + Z_{xв1}/Z_H(p)]; \quad (4.47)$$

$$U_{зв}(p) = U_2(p) - U_n(p).$$

Виключаючи $U_2(p)$ з рівнянь (4.47), одержуємо

$$U_{зв}(p) = \frac{Z_H(p) - Z_{xв1}}{Z_H(p) + Z_{xв1}} U_n(p) = n(p)U_n(p);$$

$$I_{зв}(p) = \frac{Z_H(p) - Z_{xв1}}{Z_H(p) + Z_{xв1}} I_n(p) = n(p)I_n(p),$$

де $n(p)$ – коефіцієнт відбивання в операторній формі:

$$n(p) = \frac{Z_H(p) - Z_{xв1}}{Z_H(p) + Z_{xв1}}.$$

Багаторазові відбивання хвиль з прямокутним фронтом від активного навантаження

Під'єднання джерела

Для дослідження багаторазових відбивань хвиль за наявності поглинення енергії на кінцях лінії розглянемо лінію з навантаженням $r_n = r_2$. Джерело живлення постійної ЕРС E_0 має резистивний внутрішній опір $r_в = r_1$. У загальному випадку $r_2 \neq Z_{xв}$ і $r_1 \neq Z_{xв}$.

Обчислимо коефіцієнти відбивання n_1 і n_2 на початку і кінці лінії:

$$n_1 = (r_1 - Z_{xв}) / (r_1 + Z_{xв}); n_2 = (r_2 - Z_{xв}) / (r_2 + Z_{xв}).$$

Перша пряма хвиля має напругу $u_{n1} = E_0 Z_{xв} / (r_1 + Z_{xв})$, а перша відбита зворотна хвиля - $u_{зв1} = n_2 u_{n1}$. Аналогічно визначаються відбиті хвилі: $u_{n2} = n_1 u_{зв1}$, $u_{зв2} = n_2 u_{n1}$, $u_{n3} = n_1 u_{зв2}$ і т. д.

Таким чином, для k -ої хвилі $u_{звk} = (n_1 n_2)^{k-1} n_2 u_{n1}$, а для $k+1$ відповідно $u_{n(k+1)} = (n_1 n_2)^k u_{n1}$.

Накладання цих хвиль дасть значення напруг (струмів) у будь-який момент часу.

Від'єднання навантаження

Якщо лінія, заряджена до напруги U_0 , розряджається з одного з кінців через резистивний елемент з опором r , то зміна напруги і струму в лінії може бути визначена аналогічно попередньому випадку.

$$i_{n1} = -U_0 / (r + Z_{xв}) = -I;$$

$$u_{n1} = -U_0 Z_{xв} / (r + Z_{xв}) = -Z_{xв} I.$$

Знаходимо коефіцієнти відбивання для початку і кінця лінії: $n_1 = (r - Z_{xв}) / (r + Z_{xв})$, $n_2 = 1$. Струми хвиль

$$i_{зв1} = i_{n1} = -I; \quad i_{n2} = n_1 i_{зв1} = -n_1 I;$$

$$i_{зв2} = i_{n2} = -n_1 I; \quad i_{n3} = n_1 i_{зв1} = -n_1^2 I.$$

$$i_{nk} = -n_1^{k-1} I; \quad i_{звk} = i_{nk}.$$

Враховуючи рівність $i_{звk} = i_{nk}$ можна помітити, що кожна наступна зворотна хвиля струму компенсує попередню пряму хвилю і струм на початку лінії завжди рівний струму останньої прямої хвилі. Струм в опорі r по абсолютному значенню такий же і протилежний за знаком.

Запитання

1. Вкажіть тип навантаження за якого доцільно використовувати довгу лінію довжиною $\lambda/8$ для узгодження опорів джерела і навантаження.
2. Вкажіть чому дорівнює вхідний опір півхвильової лінії без втрат.
3. Охарактеризуйте опір чвертьхвильової лінії з малими втратами, яка розімкнена на кінці.
4. Наведіть переваги довгих ліній за умови їх використання як резонансних контурів.
5. Наведіть назву і параметри хвилі напруги, яка виникає одразу після від'єднання навантаження до довгої лінії.
6. Наведіть назву і параметри хвилі струму, яка виникає одразу після від'єднання джерела від довгої лінії.
7. Визначте значення напруги на початку лінії одразу після від'єднання джерела, якщо струм навантаження I_n менший зарядного струму I_0 .
8. Наведіть характер зміни напруги в кінці лінії після відбивання, якщо опір навантаження більше хвильового опору лінії $r_n > Z_{xв}$.
9. Наведіть умову за яких не виникає відбита хвиля.
10. Опишіть схему заміщення лінії, яку використовують для розрахунку струму і напруги в ній при перехідних процесах.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Лекція № 5. Основні поняття векторного аналізу

Скалярне поле – область простору, кожна точка якого характеризується деяким значенням скалярної функції. У декартовій системі координат скалярна функція є функцією координат $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Прикладом скалярного поля є поле температур. Якщо поле залежить від часу $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ воно називається нестационарним.

Точки поля $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ з однаковими значеннями, утворюють поверхню, що називається поверхнею рівня або екіпотенціальною поверхнею:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const} = c. \quad (5.1)$$

Надаючи параметру c різні значення, одержимо сімейство поверхонь рівня, розподіл яких у просторі характеризує поле. У випадку поля температур, створеного у ізотропному середовищі точковим джерелом тепла, поверхні рівня є сферами, центром яких є джерело тепла. У випадку нитки нескінченної довжини поверхнями рівня є циліндри, вісь яких співпадає з положенням нитки.

Швидкість зміни скалярного поля характеризується його похідною за певним напрямком. Приріст поля у точці M_0 у напрямку точки M визначається через різницю значень поля у цих точках $\Delta\varphi = \varphi(M_0) - \varphi(M)$ і довжину вектора $\Delta l = M_0M$. Відношення $\Delta\varphi/\Delta l$ визначає середню швидкість зміни скалярного поля на одиницю довжини у заданому напрямку. Границя виразу $\Delta\varphi/\Delta l$ при $\Delta l \rightarrow 0$ називається **похідною скалярної функції** за напрямком. У декартовій системі координат похідна за напрямком розраховується за формулою:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right|_{M_0} \cos(\alpha) + \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right|_{M_0} \cos(\beta) + \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \right|_{M_0} \cos(\gamma), \quad (5.2)$$

де $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ – напрямні косинуси вектора $l = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, які розраховуються за формулами:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{|l|}; \cos(\beta) = \frac{a_2}{|l|}; \cos(\gamma) = \frac{a_3}{|l|}; |l| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (5.3)$$

Приклад 1

Розрахувати похідну скалярного поля $\varphi = x \cdot y \cdot z$ у точці $M_0(1; -1; 1)$ у напрямку до точки $M(2; 3; 1)$.

Рішення

Вектор M_0M має такі координати $(1; 4; 0)$. Довжина вектора $|l| = \sqrt{17}$. Направні косинуси вектора M_0M мають такі значення:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{17}}; \cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}; \cos(\gamma) = 0.$$

Значення часткових похідних у точці M_0 дорівнюють:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{M_0} = yz \Big|_{M_0} = -1; \left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_{M_0} = xz \Big|_{M_0} = 1; \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{M_0} = xy \Big|_{M_0} = -1.$$

$$\text{Отже } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{M_0} = \frac{-1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Вектор, чисельно рівний $d\varphi/dn$ і направлений по нормалі до еквіпотенціальної поверхні убік зростання скаляра φ , називається **градієнтом скаляра**, тобто

$$\text{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n}_0 = \frac{d\varphi}{dx_1} \vec{e}_1 + \frac{d\varphi}{dx_2} \vec{e}_2 + \frac{d\varphi}{dx_3} \vec{e}_3, \quad (5.4)$$

де \vec{n}_0 - орт зовнішньої нормалі,

e_1, e_2, e_3 – одиничні вектори за напрямками осей координат x_1, x_2, x_3 відповідно.

Властивості градієнта:

1. Градієнт направлений по нормалі до поверхні рівня.
2. Градієнт направлений в сторону зростання функції скалярного поля $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.
3. Модуль градієнта дорівнює найбільшій похідній за напрямком в даній точці.

$$\max \frac{\partial \varphi}{\partial l} = |\text{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2}. \quad (5.5)$$

Швидкість зміни скаляра в будь-якому іншому напрямку \vec{l} дорівнює проекції градієнта на цей напрямок

$$\frac{d\varphi}{dl} = \text{grad}\varphi \vec{l} = \text{grad}_l \varphi. \quad (5.6)$$

У напрямках дотичних до поверхні рівня значення φ зовсім не змінюється, тобто $d\varphi/d\tau = 0$.

Приклад 2

Розрахувати градієнт скалярного поля $\varphi = x - 2y + 3z$.

Рішення

Похідна скалярної функції φ за змінними координат є такою:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1; \frac{d\varphi}{dy} = -2; \frac{d\varphi}{dz} = 3.$$

Отже градієнт функції описується вектором $\{1; -2; 3\}$.

Введемо оператор Гамільтона («набла»). Оператором називається символічне зображення сукупності математичних операцій, виконаних над функцією.

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{d}{dx_1} + \vec{e}_2 \frac{d}{dx_2} + \vec{e}_3 \frac{d}{dx_3}, \quad (5.7)$$

тоді

$$\text{grad}\varphi = \nabla \varphi, \text{grad}_i \varphi = \nabla_i \varphi = \frac{d\varphi}{dx_i}, \quad (5.8)$$

де ∇_i - складова векторного оператора ∇ , тобто

$$\nabla_i = \frac{d}{dx_i}.$$

Вираз (5.8) є диференціальною характеристикою скалярного поля.

Векторне поле – область простору, кожна точка якого характеризується деяким значенням вектора. Якщо використовується декартова система координат, векторне поле задається трьома скалярними функціями:

$$\vec{A} = A_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + A_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + A_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3. \quad (5.9)$$

Якщо векторне поле не залежить від часу воно є стаціонарним, у інакшому випадку – нестаціонарним. Прикладами векторних полів є магнітне, електричне і гравітаційне. Поле градієнта скалярного поля також є векторним. Векторне поле графічно можна характеризувати векторними або силовими лініями. **Векторною або силовою лінією** називається крива, дотична до якої в кожній точці збігається з напрямком векторного поля, рис. 5.1.

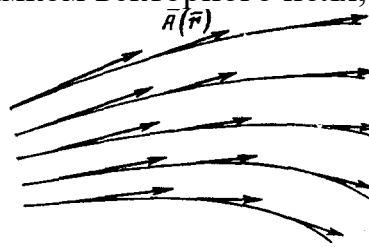


Рис. 5.1. Графічне зображення векторного поля за допомогою силових ліній

Векторні лінії характеризують напрямок поля в точках, через які вони проведені. Проте за допомогою цих ліній можна характеризувати і модуль вектора, проводячи векторні лінії густіше там, де абсолютна величина вектора більше.

Потік векторного поля Π є однією з характеристик векторного поля. Потік поля через гладку поверхню S розраховується за формулою:

$$\Pi = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma. \quad (5.10)$$

Нормаль \vec{n} до поверхні S береться зовнішня.

Приклад 3

Розрахувати потік векторного поля радіус-вектора $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ через прямий циліндр радіуса R з центром в початку координат, який має висоту H , рис. 5.2.

Рішення

Згідно з умовою задачі поверхня S через яку проходить потік векторного поля складається з бічної поверхні і двох основ циліндра. Тому потік вектора можливо виразити через суму трьох інтегралів:

$$\Pi = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{S_6} r_n d\sigma + \iint_{S_{01}} r_n d\sigma + \iint_{S_{02}} r_n d\sigma.$$

На бічній поверхні S_6 зовнішня нормаль \vec{n}_{10} паралельна площині xOy , проекція r_n на площину xOy дорівнює радіусу циліндра, $r_n = R$. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює

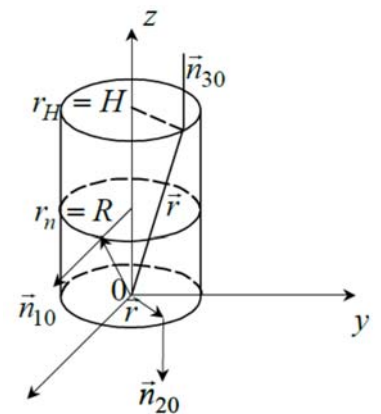


Рис. 5.2. Ілюстрація до задачі

$$\oiint_{S\bar{0}} r_n d\sigma = 2\pi RH.$$

Тому

$$\oiint_{S\bar{0}} r_n d\sigma = R \oiint_{S\bar{0}} d\sigma = 2\pi R^2 H.$$

Зовнішню нормаль до нижньої основи циліндра позначено n_{20} . Проекція радіус-вектора на основу циліндра дорівнює нулю $r_n = 0$. Тому $\oiint_{S_{01}} r_n d\sigma = 0$. На

верхній основі нормаль n_{30} направлено вгору відносно осі Oz , $r_n = H$. Площа основи $\oiint_{S_{02}} d\sigma = \pi R^2$. Тому $\oiint_{S_{02}} r_n d\sigma = \pi R^2 H$.

Отже

$$\Pi = \oiint_S (\vec{A}, n) d\sigma = \oiint_{S\bar{0}} r_n d\sigma + \oiint_{S_{01}} r_n d\sigma + \oiint_{S_{02}} r_n d\sigma = 3\pi R^2 H.$$

Більш зручна форма розрахунку потоку векторного поля, виводиться з **теорему Остроградського-Гауса**. Для її запису використовують поняття **дивергенції** векторного поля, яка є однією з диференціальних характеристик векторного поля

$$\operatorname{div} \vec{A} = (\nabla \vec{A}). \quad (5.11)$$

або з урахуванням (5.7) у декартовій системі координат

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla_i A_i = \frac{dA_i}{dx_i}. \quad (5.12)$$

Отже, за теоремою **Остроградського-Гауса** потік вектора \vec{A} через замкнуту поверхню S дорівнює інтегралу від його дивергенції $\operatorname{div} \vec{A}$, узятому по об'єму V , обмеженому цією поверхнею, тобто

$$\Pi = \oiint_S \vec{A} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dV. \quad (5.13)$$

або

$$\oiint_S A_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad (5.14)$$

де A_n - проекція вектора \vec{A} на напрямок нормалі \vec{n}_0 до поверхні S .

Якщо поверхня S настільки мала, що у всіх точках, що знаходяться в її середині, дивергенцію можна вважати постійною, то

$$\oiint_S A_n dS \approx \operatorname{div} \vec{A} \Delta V,$$

або в граничному випадку нескінченно малої поверхні

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{A}_n dS}{\Delta V}. \quad (5.15)$$

Отже, **дивергенція** вектора \vec{A} в даній точці дорівнює межі відношення потоку вектора \vec{A} через замкнуту поверхню S , що містить цю точку, до об'єму ΔV , який обмежений поверхнею S .

Дивергенція є скалярною величиною, що характеризує інтенсивність джерел або стоків поля. Точки поля, де $div < 0$, називаються стоками поля; векторні лінії сходяться до цих точок; точки, де $div > 0$, називаються джерелами поля, векторні лінії розходяться з цих точок. Якщо $div = 0$, то поле не має ні джерел, ні стоків.

Приклад 4

Розрахувати дивергенцію векторного поля

$$\vec{A} = 2xy\vec{e}_1 + (x - y)\vec{e}_2 + xz^3\vec{e}_3,$$

у точці $M(1;1;1)$.

Рішення

Розраховуємо часткові похідні векторного поля:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial 2xy}{\partial x} = 2y; \frac{\partial A_2}{\partial y} = \frac{\partial (x - y)}{\partial y} = -1; \frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{\partial (xz^3)}{\partial z} = 3xz^2.$$

Отже,

$$div \vec{A} = 2 - 1 + 3 = 4.$$

Циркуляція векторного поля

Циркуляцією Z векторного поля \vec{A} називається лінійний інтеграл, який взято вздовж замкненої орієнтованої кривої L .

$$Z = \oint_L \vec{A} dr. \quad (5.16)$$

Якщо векторне поле задано в декартовій системі координат, циркуляція векторного поля дорівнює:

$$Z = \oint_L (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3). \quad (5.17)$$

Приклад 5

Розрахувати циркуляцію векторного поля $\vec{A} = -y^3\vec{e}_1 + x^3\vec{e}_2$ вздовж еліпса L :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Підставивши вираз поля \vec{A} у формулу (5.17), отримаємо:

$$Z = \oint_L (-y^3 dx + x^3 dy).$$

Запишемо рівняння еліпса у параметричних координатах:

$$\begin{cases} x = a \cos(t); \\ y = b \sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Звідки $dx = -a \sin(t) dt$; $dy = b \cos(t) dt$.

Підставимо отримані вирази у формулу для розрахунку циркуляції Z :

$$Z = ab \int_0^{2\pi} (b^2 \sin(t)^4 dt + a^2 \cos(t)^4 dt) = \frac{3}{4} \pi ab (a^2 + b^2).$$

Диференційною характеристикою циркуляції векторного поля є **ротор** або **вихор** векторного поля \vec{A} . Звичайна форма запису:

$$\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3. \quad (5.18)$$

Операторна форма запису:

$$\text{rot} \vec{A} = [\nabla \vec{A}]. \quad (5.19)$$

Матрична форма запису:

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_3 \\ d & d & d \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ A_1 & \cdots & A_2 & \cdots & A_3 \end{vmatrix}. \quad (5.20)$$

Приклад 6

Розрахувати ротор векторного поля

$$\vec{A} = (x+z) \vec{e}_1 + (y+z) \vec{e}_2 + (x^2+z) \vec{e}_3.$$

Використовуючи формулу (5.20), отримаємо:

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ d & d & d \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ (x+z)(y+z)(x^2+z) \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 - (2x-1)\vec{e}_2.$$

Теорема Стокса. Циркуляція вектора \vec{A} по замкнутому контуру L дорівнює потокові $\text{rot} \vec{A}$ через поверхню S , що опирається на цей контур, тобто

$$\oint_L \vec{A} dl = \iint_S \text{rot} \vec{A} dS, \quad (5.21)$$

або

$$\oint_L \vec{A} dl = \iint_S \text{rot}_n \vec{A} dS, \quad (5.22)$$

де rot_n - проекція ротора на напрямок нормалі \vec{n}_0 до поверхні S .

Якщо поверхня ΔS настільки мала, що у всіх її точках значення $\text{rot}_n \vec{A}$ можна вважати постійним, то

$$\oint_L \vec{A} dl \approx \text{rot}_n \vec{A} \Delta S. \quad (5.23)$$

Формула (5.23) справедлива в граничному випадку нескінченно малої поверхні ΔS , тобто

$$\text{rot}_n \vec{A} \approx \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} dl}{\Delta S}. \quad (5.24)$$

Проекція rot_n буде найбільшою, коли вектор нормалі збігається по напрямку з ротором. Очевидно, напрямок вектора ротора збігається з напрямком нормалі до площини, у якій циркуляція вектора \vec{A} найбільша. Модуль ротора вектора \vec{A} в даній точці поля дорівнює межі відношення циркуляції вектора \vec{A} , що проходить через цю точку і збігається з площиною, де циркуляція максимальна, до розміру площадки, коли вона стягається в цю точку. Величина ротора характеризує обертальну здатність поля.

Приклад 7

Розрахувати циркуляцію векторного поля $\vec{A} = 2y\vec{e}_1 - 3x\vec{e}_2 + 3x\vec{e}_3$, вздовж контура $L: \{x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 3\}$.

Рішення

Контур L , по якому розраховується інтеграл є множиною точок перетину циліндра і площини, рис. 5.3.

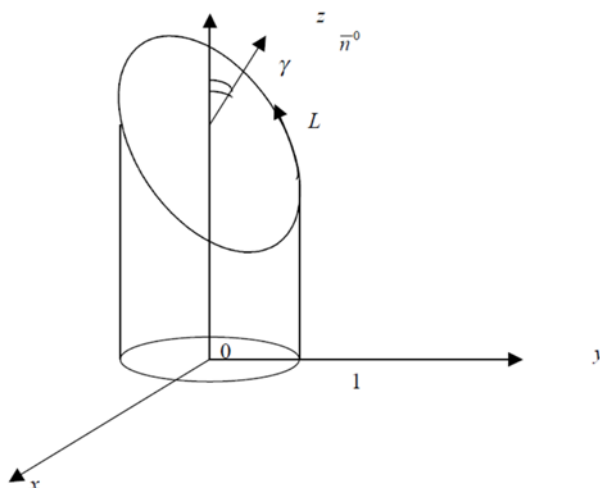


Рис. 5.3. Контур L , утворений в результаті перетину циліндра і площини

Знаходимо ротор поля:

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 2y & -3x & 3x \end{vmatrix} = 0\vec{e}_1 - (3+0)\vec{e}_2 + (-3-2)\vec{e}_3 = -3\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3.$$

Як поверхню S розглядаємо площину $F = x + y + z - 3$.

Нормаль до поверхні S розраховується через градієнт:

$$n = \frac{grad(F)}{|grad(F)|} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{3}}.$$

Використовуючи теорему Стокса, отримуємо:

$$\oint_L \vec{A} dl = \iint_S rot_n \vec{A} dS = \iint_S \frac{-3-5}{\sqrt{3}} dS = \frac{-8}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{-8}{\sqrt{3}} \iint_S \frac{dxdy}{\cos(\gamma)} = -8 \iint_S dxdy = -8\pi.$$

Класифікація векторних полів

Потенційне поле

Якщо $rot\vec{E} = 0$, то поле вектора \vec{E} називається безвихровим. Якщо розглянута область є однозв'язною, то поле, що задовольняє цій умові, називається потенційним і може бути подане у виді

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad (5.25)$$

тому що $rotgrad\varphi = 0$. Функція φ називається потенційною функцією або потенціалом поля. Очевидно, що потенціал визначається неоднозначно, тому що $grad\varphi = grad(\varphi + c)$, де c – константа, що не залежить від координат простору.

Знак мінус у виразі (5.25) обраний із тих міркувань, що векторні лінії поля \vec{E} направлені убік убуття потенціалу.

У потенційному полі $div\vec{E} \neq 0$ тобто існують джерела і стоки поля, а лінії поля не замкнуті.

З умови (5.25) відповідно до рівності (5.21) можна зробити висновок, що $\oint_L \vec{E}dl = 0$, тобто циркуляція вектора \vec{E} уздовж будь-якої замкнутої кривої L дорівнює нулю. Фізично це означає, що в потенційному полі робота уздовж замкнутого контуру дорівнює нулю.

Відповідно до теореми Остроградського-Гауса (5.14)

$$\oint_S \vec{E}dS = \int_V div\vec{E}dV \neq 0,$$

тобто потік вектора \vec{E} через замкнуту поверхню не дорівнює нулю.

Соленоїдальне поле

Поле вектора \vec{B} називається соленоїдальним, якщо в ньому немає джерел і стоків, тобто в будь-якій точці $div\vec{B} = 0$. Для соленоїдального поля $\vec{B} = rot\vec{A}$, так як $divrot\vec{A} = 0$. Функція \vec{A} називається векторним потенціалом.

Відповідно до виразу (5.21) при $rot\vec{A} \neq 0$ циркуляція вектора \vec{A} для соленоїдального поля не дорівнює нулю

$$\oint_L \vec{A}dl \neq 0.$$

Отже, робота вектора \vec{A} поля уздовж замкнутого контуру також не дорівнює нулю. Цим соленоїдальне поле відрізняється від потенційного.

Відповідно до теореми Остроградського-Гауса (5.14) і визначенню соленоїдального поля маємо:

$$\oint_S \vec{B}dS = \int_V div\vec{B}dV,$$

тобто потік вектора

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}e_\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial z}e_z = 0,$$

через замкнуту поверхню дорівнює нулю. Якщо виділити в полі векторну трубку, рис. 5.4, то з умови $\oint_S \vec{B}dS = 0$ можна зробити висновок, що в соленоїдальному полі векторні лінії є замкнутими або ідуть у нескінченність.

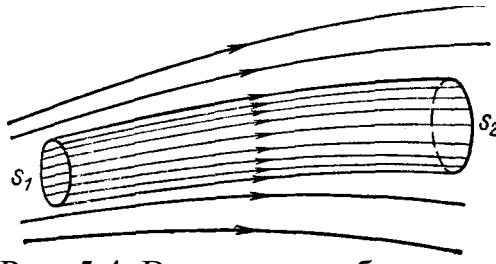


Рис. 5.4. Векторна трубка

Лапласове поле

За умови $rot\vec{C}=0$ і $div\vec{C}=0$ поле вектора \vec{C} є безвихровим, не має джерел і стоків. Таке поле називається **лапласовим**, характеризується воно одночасно векторним і скалярним потенціалами $\vec{C} = -grad\phi = rot\vec{A}$, які за умови $div\vec{A}=0$ задовольняють рівнянням Лапласа

$$\Delta\phi=0, \Delta\vec{A}=0.$$

Функції, що задовольняють рівнянню Лапласа, називаються гармонійними.

Циліндрична система координат (рис. 5.5). Координатними поверхнями є: площини $z = const$, циліндри $r = const$ і півплощини $\alpha = const$, що проходять через вісь z під кутом α до фіксованої півплощини. Координатними лініями є: прямі $r = const$, $\alpha = const$ і $\alpha = const$, $z = const$ і кола $r = const$, $z = const$. Напрямок координатних осей визначається ортами e_r, e_α, e_z . У цій системі $q_1 = r, q_2 = \alpha, q_3 = z$.

Циліндричні координати зв'язані з декартовими наступними співвідношеннями: $x_1 = r \cos \alpha, x_2 = r \sin \alpha, x_3 = z$. Коефіцієнти Ламе:

$$grad\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}e_\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial z}e_z.$$

Основні формули векторного аналізу в циліндричних координатах:

$$grad\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}e_\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial z}e_z; div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$rot\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial z}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{e}_\alpha + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\alpha}\right]\vec{e}_z.$$

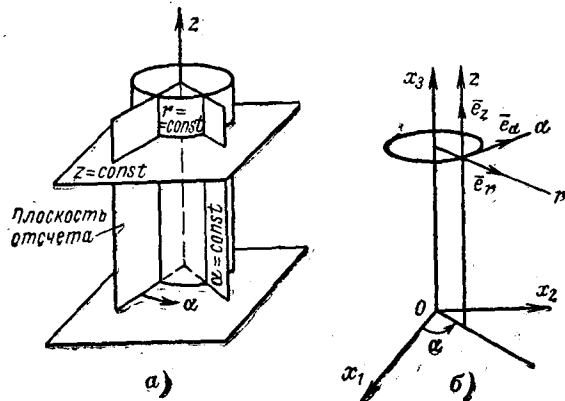


Рис.5.5. Циліндрична система координат.

а—координатні поверхні; б—координатні лінії, осі я їхні орти.

Сферична система координат (рис. 5.6). Координатними поверхнями є сфери радіус r , конуси з кутом 2ϑ і півплощини, що проходять через вісь z під кутом α до фіксованої півплощини. Координатними лініями є: кола $r = const, \alpha = const$ і $r = const, \vartheta = const$ і прямі $\alpha = const, \vartheta = const$. Напрямок координатних осей визначається ортами $e_r, e_\vartheta, e_\alpha$. У цій системі $q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \alpha$.

Сферичні координати, зв'язані з декартовими співвідношеннями:

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \alpha, x_2 = r \sin \vartheta \sin \alpha, x_3 = r \cos \vartheta.$$

Основні формули векторного аналізу в сферичних координатах:

$$\text{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \bar{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \bar{e}_\alpha;$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha};$$

$$\text{rot} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \bar{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} \right] \bar{e}_\vartheta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \bar{e}_\alpha.$$

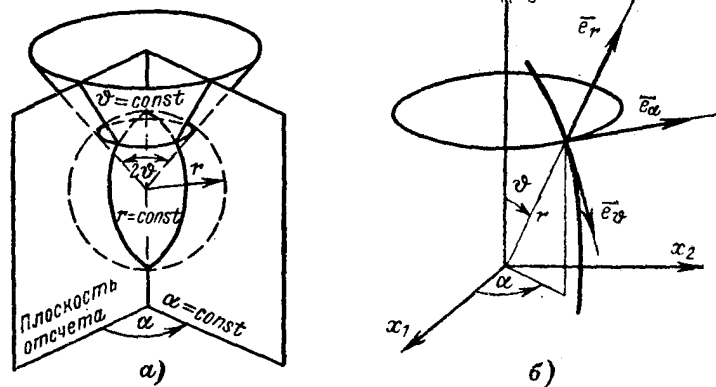


Рис. 5.6. Сферична система координат.

а - координатні поверхні; б - координатні лінії, осі і їхні орти

Запитання

1. Дайте визначення терміну «скалярне поле».
2. Дайте визначення терміну «градієнт».
3. Назвіть напрям, у якому значення скалярної функції не змінюється.
4. Дайте визначення терміну «векторне поле».
5. Назвіть приклади векторних полів.
6. Наведіть властивості векторного поля, які характеризують векторні лінії.
7. Наведіть формулювання теореми Остроградського-Гауса.
8. Наведіть визначення терміна «дивергенція».
9. Назвіть параметр, який є диференційною характеристикою циркуляції векторного поля.
10. Наведіть властивість векторного поля, яку характеризує ротор.
11. Назвіть умову, за якої поле є безвихровим.

Лекція № 6. Основні рівняння електромагнітного поля Основні електричні та магнітні характеристики середовища

Під дією електромагнітного поля, що характеризується векторами електричного \vec{E} і магнітного \vec{B} полів, в середовищі виникає рух вільних зарядів, зміщення зарядів зв'язаних молекулярною структурою речовини і зміна орієнтації осі обертання елементарних зарядів.

Кількісно ці явища визначаються виразами:

$$\begin{aligned} \vec{\delta} &= \sigma \vec{E}; \\ \vec{D} &= (1 + \chi_e) \xi_0 \vec{E}; \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{(1 + \chi_m) \mu_0}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

де $\vec{\delta}$ - щільність струму провідності [A/m^2]; \vec{D} - електрична індукція [K/m^2]; \vec{H} - напруженість магнітного поля [A/m]; σ - питома провідність середовища [$Cим/m$], $1/\sigma$ - питомий опір середовища [Om/m]; $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9}$ - електрична константа [Φ/m]; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ - магнітна константа [$Гн/m$]; χ_e - електрична сприйнятливості речовини; χ_m - магнітна сприйнятливості речовини.

За наявності сторонніх джерел вираз (6.1) записується у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{\delta} &= \sigma (\vec{E} + \vec{E}^{cm}); \\ \vec{E} &= \frac{1}{\sigma} (\vec{\delta} - \vec{\delta}^{cm}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

де \vec{E}^{cm} і $\vec{\delta}^{cm}$ - відповідно поле і щільність струму сторонніх джерел.

Сторонні джерела можуть бути як електричного походження (інше електромагнітне поле), так і неелектричного (перетворювачі неелектричної енергії в електричну). Прикладами останніх є: гальванічний елемент, у якому хімічна енергія перетворюється в електричну, мотор-генератор, який перетворює механічну енергію в електричну та ін.

Рівняння (6.2) виражає узагальнений закон Ома в диференціальній формі. Параметри σ , χ_e і χ_m є характеристиками середовища. Для вакууму всі вони дорівнюють нулю.

Параметри абсолютно електричної проникності ξ_a і абсолютно магнітної проникності μ_a середовища розраховуються з використанням вже відомих параметрів:

$$\xi_a = (1 + \chi_e) \xi_0 = \xi \xi_0; \quad \mu_a = (1 + \chi_m) \mu_0 = \mu \mu_0,$$

де ξ і μ – відносні діелектрична і магнітна проникність середовища.

Середовище називається **однорідним**, якщо його параметри не залежать від координат, **лінійним**, якщо параметри не залежать від значення напруженостей електричного і магнітного полів, **ізотропним**, якщо його параметри не залежать від напрямку векторів \vec{E} і \vec{H} . Параметри ізотропної

середовища σ , χ_e і χ_m , є скалярними. Якщо параметри середовища залежать від координат, то таке середовище називається неоднорідним.

Якщо параметри середовища не залежать від координат простору і значень напруженостей електричного і магнітного полів, але при цьому принаймні один з параметрів залежить від напрямку останніх, таке середовище називається **однорідним, лінійним і анізотропним**.

Анізотропія спостерігається у більшості кристалів. Прикладом такого середовища є кварц, провідність якого в напрямі головної осі кристалу в 300 раз більше, ніж в перпендикулярному. У деяких речовинах анізотропія виникає під впливом зовнішніх сил. Наприклад, анізотропія провідності виникає в металах при нерівномірному нагріванні (термоелектричний ефект) або під дією магнітного поля (ефект Хола).

Якщо зовнішні сили, що змінюють параметри середовища, є функціями часу, то і його параметри стають функціями часу, наприклад:

$$\chi(t) = \chi_0(1 + m \cdot \sin \Omega t).$$

У цьому випадку середовище називається **параметричним**. Явища, що відбуваються в таких середовищах, описуються лінійними диференціальними рівняннями із змінними коефіцієнтами і супроводжуються зміною складу спектру частот.

Електромагнітні параметри в загальному випадку мають дисперсію, тобто залежать від частоти поля. Наприклад, при частоті $\omega \rightarrow \infty$ значення ξ і μ прямують до одиниці, оскільки рухливість елементарних зарядів при цьому відносно мала і різниці між значеннями векторів \vec{D} і $\xi_0 \vec{E}$, \vec{B} і $\mu_0 \vec{H}$ немає.

Якщо провідність $\sigma > 10^4$ ссм/м, то середовище є провідником. Якщо $10^{-10} < \sigma < 10^4$ ссм/м середовище є напівпровідником, середовище з $\sigma < 10^{-10}$ ссм/м є ізолятором.

Речовина, у якої $\chi_e \neq 0$ називається діелектриком. За значенням провідності діелектрик відноситься до ізоляторів, у «ідеального» діелектрика (ізолятора), як і у вакуумі, $\sigma = 0$.

Речовина, у якої $\chi_m \neq 0$, називається магнетиком. За значенням провідності магнетика в більшості випадків відносяться до провідників, рідше – до напівпровідників та ізоляторів.

Речовина з малою провідністю ($\sigma < 10^{-5}$ ссм/м), у якої $\chi_e > 0$ і $\chi_m > 0$, називається магнітодіелектриком.

Повний електричний струм

Електричний струм в середовищі, що проводить, був визначений, як упорядкований рух електричних зарядів під дією сили поля.

Такий струм називають **струмом провідності**. Щільність струму провідності $\vec{\delta}$ пропорційна напруженості електричного поля \vec{E} і залежить від провідності середовища σ :

$$\vec{\delta} = \sigma \vec{E}.$$

Якщо заряджені тіла або частки рухаються в непровідному середовищі або у вакуумі зі швидкістю \vec{v} , вони утворюють струм, що називається **струмом**

перенесення. Щільність струму перенесення $\vec{\delta}_{пер}$ пропорційна об'ємній щільності заряду ρ і залежить від швидкості руху \vec{v}

$$\vec{\delta}_{пер} = \rho \vec{v}.$$

У молекулах діелектрика, що вноситься в зовнішнє електричне поле, під дією електричного поля зв'язані заряди будуть переміщуватися і утворять **струм поляризації.** Щільність струму поляризації $\vec{\delta}_{поляр}$ пропорційна швидкості зміни вектору поляризації \vec{P} .

$$\vec{\delta}_{поляр} = \partial \vec{P} / \partial t.$$

Для середовищ, в яких поляризація пропорційна напруженості поля $\vec{P} = \xi_0 \chi \vec{E}$, щільність струму поляризації дорівнює:

$$\vec{\delta}_{поляр} = \xi_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Всі три перераховані форми струму є характеристиками переміщення електричних зарядів. Кожний з цих струмів супроводжується магнітним полем.

Максвел запропонував називати також електричним струмом зміну в часі електричного поля у вакуумі, бо при цьому також утвориться магнітне поле. Цей струм називають **струмом зміщення у вакуумі.** Щільність його $\vec{\delta}_{0зм}$ пропорційна швидкості зміни напруженості електричного поля

$$\vec{\delta}_{0зм} = \xi_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Відмінність струму зміщення у вакуумі від інших видів струму полягає в тому, що він не викликає теплових втрат.

Струм провідності і струм перенесення можуть мати місце і в постійних і в змінних у часі електричних полях.

Струм поляризації і струм зміщення в вакуумі можуть мати місце тільки в змінних в часі електричних полях.

Таким чином, електричним струмом називають два фізичних різнорідних явища – рух електричних зарядів і зміна електричного поля в часі. Основною якістю будь-якого струму є його спроможність збуджувати магнітне поле.

Повним електричним струмом називається сукупність всіх явищ, при яких утвориться магнітне поле.

У загальному випадку щільність повного струму дорівнює сумі щільностей струму провідності, перенесення, поляризації та зміщення у вакуумі

$$\vec{\delta}_n = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{пер} + \vec{\delta}_{поляр} + \vec{\delta}_{0зм}.$$

Суму струмів поляризації та струму зміщення в вакуумі називають **струмом зміщення в діелектрику** або просто **струмом зміщення.**

Щільність струму зміщення в діелектрику дорівнює:

$$\vec{\delta}_{зм} = \vec{\delta}_{0зм} + \vec{\delta}_{поляр} = \xi_0 (1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \xi_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Струму зміщення притаманна властивість розповсюджуватися в діелектрику, аналогічно струму провідності розповсюджуватися в провіднику.

У подальшому ми не будемо розглядати струмів перенесення. Тому під повним струмом мається на увазі сума струмів провідності та зміщення.

Щільність повного струму в цьому випадку дорівнює.

$$\vec{\delta}_n = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{zm} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.3)$$

Повний струм може виникнути як в середовищі, що проводить, так і в середовищі, що не проводить.

У середовищі, що добре проводить, струми провідності набагато більше струмів зміщення, тому останніми можна знехтувати.

У діелектрику з малими втратами, навпаки, струми зміщення значно більше струмів провідності і тому струми провідності можна не враховувати.

У напівпровіднику струми провідності і струми зміщення співвимірні, тому обидві складові повного струму повинні бути враховані.

Припущення Максвелла про те, що в діелектрику збуджуються струми зміщення подібно до того, як в провіднику струми провідності, пояснює той факт, що електричні прилади можуть випромінювати в навколишній простір енергію, що розповсюджується в діелектрику разом з електромагнітними хвилями.

Дивергенція щільності струму провідності (рівняння безперервності)

Постійні струми можуть протікати тільки в замкнених ланцюгах. Лінії вектору щільності постійного струму безперервні і $div \vec{\delta} = 0$.

Постійний струм через довільну замкнуту поверхню повинен дорівнювати нулю. Заряд в об'ємі, обмеженому такою поверхнею, залишається незмінним у часі.

Змінні струми можуть мати місце і в незамкнених ланцюгах (наприклад, ланцюг з конденсатором). Отже, в змінних полях ланцюги з струмами провідності можуть бути незамкненими. Там, де закінчуються лінії вектора щільності струму провідності $\vec{\delta}$, можуть нагромаджуватися заряди; потік вектора щільності струму провідності через замкнуту поверхню може не дорівнювати нулю.

Нехай в об'ємі V , обмеженому поверхнею S , є заряд Q , об'ємна щільність якого дорівнює ρ . Якщо крізь поверхню S витікає струм провідності, то заряд Q зменшується і струм буде рівний

$$i = -\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Виразивши цей струм через щільність струму провідності $\vec{\delta}$, отримаємо інтегральну форму рівняння безперервності

$$\oint_S \vec{\delta} dS = -\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Це рівняння можна записати в диференціальній формі, виразивши заряд Q через об'ємну щільність заряду

$$Q = \int_V \rho dV,$$

і перетворивши потік вектору $\vec{\delta}$ по теоремі Остроградського

$$\oint_S \vec{\delta} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{\delta} dV.$$

$$-\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{\delta} dV.$$

Так як поверхня S , а отже, і обмежений нею обсяг V були обрані довільно, то написана рівність не залежить від меж. Тому вирази під інтегралами повинні дорівнювати один одному

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Отримана залежність є диференційною формою рівняння безперервності.

Дивергенція щільності струму провідності дорівнює швидкості зменшення щільності об'ємних зарядів.

Щільність струму провідності може мати джерела і стоки у вигляді об'ємних зарядів, що змінюються в часі.

Безперервність повного струму

Покажемо, що повний струм безперервний, тобто **дивергенція щільності повного струму завжди дорівнює нулю**. Щільність повного струму дорівнює сумі щільності струму провідності та щільності струму зміщення

$$\vec{\delta}_n = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{zm} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

тому

$$\operatorname{div} \vec{\delta}_n = \operatorname{div} \vec{\delta} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Так як просторові координати від часу не залежать, то можна змінити порядок диференціювання

$$\operatorname{div} \vec{\delta}_n = \operatorname{div} \vec{\delta} + \frac{\partial (\operatorname{div} \vec{D})}{\partial t}.$$

За теоремою Гауса в диференційній формі $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$. Згідно з рівнянням безперервності (6.4)

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Тому

$$\operatorname{div} \vec{\delta}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (6.5)$$

що і вимагалось довести.

Щільність повного струму є соленоїдальним вектором, який не має джерел і стоків.

Основні характеристики поля

Електромагнітне поле створюється електричними зарядами, незалежно від того, рухаються вони або знаходяться в спокої і може бути досліджене за допомогою «пробного» заряду, малого за розмірами і за значенням, який практично не змінює поле, що досліджується.

У загальному випадку електромагнітне поле характеризується діючою на пробний електричний заряд Q силою:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q[\vec{v}\vec{B}].$$

На підставі цього електромагнітне поле можна характеризувати виразом

$$\frac{\vec{F}}{Q} = \vec{E} + [\vec{v}\vec{B}], \quad (6.6)$$

де \vec{E} - напруженість електричного поля [$B/м$], що може бути визначена як сила, діюча на одиничний нерухомий заряд (при $E=1$ в/м сила, діюча на заряд в 1 К, чисельно рівна 1 Н=0.102 кГ);

\vec{v} - швидкість пробного заряду, що рухається [$м/сек$];

\vec{B} - магнітна індукція [$Вб/м^2$], що визначає силу, діючу на заряд, який рухається (або на провід довжиною l з струмом i силу, чисельно рівну 1 Н при $B = 1$ Вб/м², якщо $l \cdot i = 1$ м·А).

Лінії, в будь-якій точці яких напрям вектору \vec{E} співпадає з дотичною, називаються **електричними силовими лініями**. Лінії, в будь-якій точці яких напрям вектору \vec{B} співпадає з дотичною, називаються **силовими лініями магнітної індукції**.

Електромагнітне поле характеризується двома векторними параметрами електричного \vec{E} і магнітного \vec{B} полів або шістьма скалярними їх проекціями на осі координат E_i і B_i . Для визначення цих значень необхідно мати шість скалярних рівнянь. Однак число їх можна зменшити, характеризуючи поле векторним потенціалом \vec{A} і скалярним потенціалом φ , що зв'язані з \vec{E} і \vec{B} наступними виразами:

$$\vec{E} = -grad\varphi - \partial\vec{A}/\partial t; \quad (6.7)$$

$$\vec{B} = rot\vec{A}. \quad (6.8)$$

Для знаходження \vec{A} і φ необхідно тільки чотири скалярних рівняння.

Кількісна характеристика електромагнітного поля, окрім виразу (6.6), з використанням (6.7) і (6.8) може бути представлена виразом

$$\frac{\vec{F}}{Q} = -grad\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + [\vec{v} \times rot\vec{A}]. \quad (6.9)$$

Скалярний φ [В] і векторний \vec{A} [Вб/м] потенціали характеризують енергію електромагнітного поля.

Запитання

1. Охарактеризуйте властивості однорідного середовища.
2. Охарактеризуйте властивості ізотропного середовища.
3. Перелічіть властивості магнітодіелектрика.
4. Назвіть складові повного струму.
5. Сформулюйте рівняння безперервності струму.
6. Назвіть експериментальний метод дослідження електричного поля.
7. Назвіть основні характеристики електромагнітного поля.
8. Наведіть метод зменшення рівнянь для опису електромагнітного поля.

Лекція № 7. Рівняння електромагнітного поля

Форми запису рівнянь Максвелла

Рівняння Максвелла є фундаментальними рівняннями електромагнітного поля. Ці рівняння можуть бути записані в інтегральній, диференційній і комплексній формі. **Інтегральна форма** запису рівнянь встановлює зв'язок між значеннями характеристик електромагнітного поля в різних точках поля або на різних відрізках або поверхнях. **Диференційна форма** описує співвідношення між значеннями поблизу однієї і тієї же точки поля в певний момент часу. Цю форму запису застосовують при дослідженні поля, що змінюються від точки до точки. Гармонічні електромагнітні поля, що змінюються (проекції вектору на координатні осі є гармонічними функціями часу) зручно характеризувати рівняннями Максвелла у комплексній формі.

Інтегральні рівняння електромагнітного поля

Експериментально встановлені наступні закони.

Закон Ампера про збудження магнітного поля струмами (закон повного струму):

$$\oint_l \vec{H} dl = \sum i. \quad (7.1)$$

Циркуляція напруженості магнітного поля \vec{H} по контуру дорівнює сумі струмів, що охоплюються цим контуром, рис. 7.1. Це означає, що **причиною магнітного поля є струм**.

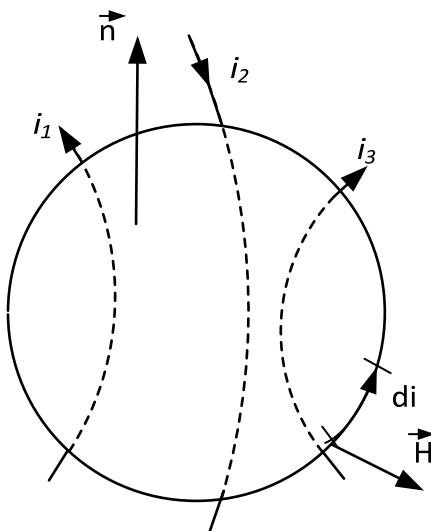


Рис.7.1. Ілюстрація до закону повного струму

Закон електромагнітної індукції (Фарадея):

$$\oint_l \vec{E} dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Циркуляція напруженості електричного поля \vec{E} по контуру дорівнює зміні потоку індукції Φ [Вб] через площу, обмежену цим контуром, рис. 7.2. Це означає, що **причиною вихрового електричного поля є зміна магнітного потоку**.

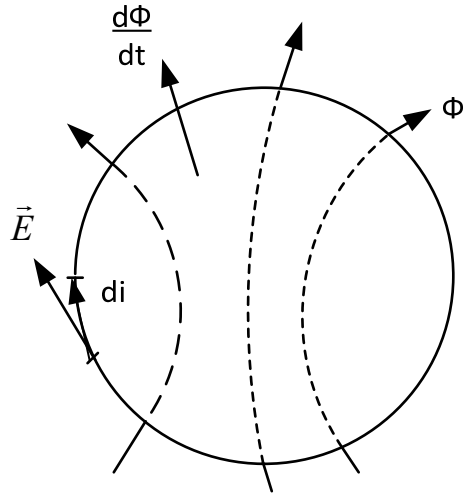


Рис. 7.2. Ілюстрація до закону електромагнітної індукції

Закон взаємодії електричних зарядів (Кулона):

$$\vec{F} = \vec{e} \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (7.3)$$

Сила взаємодії зарядів обернено пропорційна квадрату відстані між ними. В правій частини рівнянні (7.2) і (7.3) можуть бути зроблені підстановки:

$$i = \int_S \vec{\delta} dS;$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} dS,$$

що визначають електричний струм i і потік магнітної індукції Φ через дану поверхню S .

У загальному випадку праву частину рівняння (7.1) можна записати в вигляді

$$\sum i = \int_S (\vec{\delta} + \vec{\delta}_{zm}) dS.$$

Підставляючи цей вираз у (7.1), одержуємо перше інтегральне рівняння електромагнітного поля:

$$\oint_L \vec{H} dl = \int_S \left(\vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS. \quad (7.4)$$

Друге інтегральне рівняння електромагнітного поля має вид:

$$\oint_L \vec{E} dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} dS. \quad (7.5)$$

Вважаючи в виразі (7.3), що $Q' \ll Q$, і розглядаючи Q' як пробний заряд, можна визначити напруженість електричного поля \vec{E} , через заряд Q в точці розміщення, що створюється пробним зарядом в вигляді

$$\vec{E} = \vec{e} \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (7.6)$$

На підставі виразу (7.6), визначаючи потік електричної індукції через поверхню сфери радіусу r , можна написати рівняння

$$Q = \oint_S \vec{D} dS, \quad (7.7)$$

що виражає теорему Гауса: **потік електричної індукції через замкнуту поверхню S дорівнює електричному заряду, розташованому в об'ємі, обмеженому цією поверхнею.** У загальному випадку заряд можна представити у вигляді

$$Q = \int_V \rho dV,$$

де ρ [к/м^3] – об'ємна щільність заряду.

Підставляючи останній вираз до (7.7), одержуємо третє інтегральне рівняння

$$\oint_S \vec{D} dS = \int_V \rho dV, \quad (7.8)$$

що є узагальненням емпіричного факту про переривчастість електричних силових ліній на поверхні зарядів.

Використовуючи вираз $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, можемо написати $\text{div}\vec{B} = 0$, бо $\text{divrot} = 0$. Отже,

$$\int_V \text{div}\vec{B} dV = 0. \quad (7.9)$$

На основі формули (7.9), застосовуючи теорему Остроградського-Гауса, одержуємо четверте інтегральне рівняння, що виражає безперервність ліній магнітної індукції:

$$\oint_S \vec{B} dS = 0. \quad (7.10)$$

Електричний струм визначається величиною заряду, крізь дану поверхню S в одиницю часу

$$i = -\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (7.11)$$

Звідси можна написати інтегральне рівняння безперервності струму, що підтверджує закон збереження заряду:

$$\oint_S \vec{\delta} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (7.12)$$

Диференційні рівняння електромагнітного поля

Перше рівняння Максвелла є диференційною формою закону повного струму:

$$\oint_L \vec{H} dl = i_n = \int_S \vec{\delta}_n dS. \quad (7.13)$$

Перетворивши згідно з теоремою Стокса циркуляцію вектора \vec{H} у формулі (7.13), отримаємо

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} dS.$$

Тоді можна записати рівняння

$$\int_S \text{rot} \vec{H} dS = \int_S \vec{\delta}_n dS. \quad (7.14)$$

Якщо рівняння (7.14) справедливе для всіх значень межі інтегрування S , то функції під інтегралами рівні і

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}_n. \quad (7.15)$$

Рівняння (7.15) називається першим рівнянням Максвелла.

Якщо щільність повного струму дорівнює сумі щільності струму провідності $\vec{\delta} = \sigma \vec{E}$ і щільності струму зміщення $\vec{\delta}_{zm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, то перше рівняння Максвелла прийме вигляд:

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Для середовища з постійною діелектричною проникністю $\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0 = \text{const}$

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7.16)$$

Рівняння (7.16) підтверджує факт, що **вихрове магнітне поле збуджується як струмами провідності, так і електричним полем, що змінюється в часі.**

Для ідеальних діелектриків з провідністю $\sigma = 0$ одержимо:

$$\text{rot} \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Перше рівняння Максвелла встановлює залежність між зміною в часі напруженості електричного поля і зміною в просторі напруженості магнітного поля і вказує на те, що електромагнітне поле завжди знаходиться в русі.

Відомо, що дивергенція ротора дорівнює нулю $\text{div} \text{rot} \vec{H} = 0$, тому і $\text{div} \vec{\delta}_n = 0$. Як було показано вище, ця умова завжди виконується.

Друге рівняння Максвелла є диференційною формою закону електромагнітної індукції, згідно з яким у витку при зміні зчепленого з ним магнітного потоку Φ наводиться ЕРС, яка дорівнює

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Максвелл узагальнив цей закон, вказавши, що магнітний потік, який змінюється в часі, збуджує електричне поле і за відсутності витка.

У полі з індукцією B магнітний потік скрізь довільну поверхню S , обмежену контуром L , дорівнює:

$$\Phi = \int_S \vec{B} dS.$$

Для напруженості електричного поля \vec{E} , то наведена в контурі ЕРС дорівнює

$$e = \oint_L \vec{E} dl.$$

Вважатимемо, що поверхня S і контур L нерухомі і не деформуються, тоді

$$\oint_L \vec{E} dl = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS.$$

Позитивний напрям обходу контуру L і позитивний напрям нормалі до поверхні S обираються так, щоб вони утворили правошвинтову систему.

Часткові похідні використовуються тому, що ЕРС може з'являтися не тільки завдяки зміні магнітного потоку в часі, але і бути зумовленою рухом або деформацією контуру.

З теореми Стокса можна перетворити циркуляцію до виду

$$\oint_L \vec{E} dl = \int_S \text{rot} \vec{E} dS.$$

Отже,

$$\int_S \text{rot} \vec{E} dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS. \quad (7.17)$$

Рівність інтегралів у формулі (7.17) справедлива для будь-якої поверхні S , тому вирази під інтегралами дорівнюють один одному

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Одержаний вираз називається **другим рівнянням Максвелла**. Фізичний зміст його полягає у підтвердженні факту, що **магнітне поле, яке змінюється в часі, збуджує вихрове електричне поле**.

Якщо $\text{rot} \vec{E} \neq 0$, то лінії вектора \vec{E} можуть бути замкнутими, причому вони повинні охоплювати лінії вектора \vec{B} . Напрямки ліній векторів \vec{B} і \vec{E} вказані на рис.7.3 для випадку $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} > 0$.

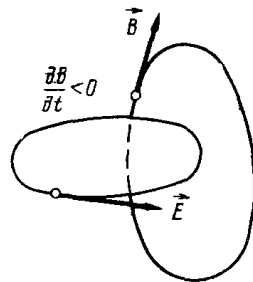


Рис.7.3. Напрямки векторів \vec{B} і \vec{E} для випадку $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} > 0$

Нагадаємо, що в електричному безвихровому полі $\text{rot}\vec{E} = 0$. Лінії вектора \vec{E} завжди розімкнені; вони розпочинаються з позитивних зарядів і закінчуються негативними.

Для середовища з постійною магнітною проникністю друге рівняння Максвелла має вид:

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Друге рівняння Максвелла встановлює залежність між зміною в часі напруженості магнітного поля і зміною в просторі напруженості електричного поля і також вказує на те, що електромагнітне поле завжди знаходиться в русі.

Третє рівняння Максвелла узагальнює закон про переривчастість ліній електричної індукції і одержується з інтегрального рівняння (7.8) з використанням теореми Остроградського-Гауса:

$$\text{div}\vec{D} = \rho.$$

Четверте рівняння Максвелла узагальнює закон про безперервність ліній магнітної індукції, одержується аналогічним образом – з інтегрального рівняння (7.10) з використанням тієї же теореми:

$$\text{div}\vec{B} = 0.$$

П'яте диференційне рівняння узагальнює закон збереження заряду, одержується аналогічно – з інтегрального рівняння (7.12) з використанням теореми Остроградського - Гауса:

$$\text{div}\vec{\delta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (7.18)$$

Для середовища, що проводить рівняння (7.18) має вигляд

$$\text{div}\vec{\delta} = 0. \quad (7.19)$$

Це означає, що поле вектора $\vec{\delta}$ соленоїдальне, тобто лінії струму замкнуті. Дійсно, замінюючи ліву частину рівності (7.19) з використанням виразів

$$\begin{aligned} \vec{\delta} &= \sigma \vec{E}; \\ \vec{D} &= (1 + \chi_e) \xi_0 \vec{E}; \\ \text{div}\vec{D} &= \rho, \end{aligned}$$

знаходимо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \rho = 0. \quad (7.20)$$

Рішенням рівняння (7.20) є вираз

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_a} t},$$

який свідчить про те, що в середовищі, яке проводить, заряд зменшується по експоненті і не залежить від прикладеного поля \vec{E} . Час, протягом якого щільність заряду зменшується в e разів, називається часом релаксації. Для

металів час релаксації має порядок 10^{-17} сек. Тому можна вважати $\rho=0$ і рівняння (7.19) справедливе при змінному полі з частотою $f \leq 10^{15}$ гц.

Рівняння Максвелла в комплексній формі запису

Якщо проєкції векторів поля \vec{B} і \vec{E} змінюються в часі по синусоїдальному закону, при чому фази всіх трьох прямокутних проєкцій однакові, тобто хвиля лінійно поляризована, то рівняння Максвелла можна записати в комплексній формі. Нехай вектор напруженості електричного поля має проєкції:

$$E_x = E_{xm} \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}\{E_{xm} e^{j\varphi} e^{j\omega t}\};$$

$$E_y = E_{ym} \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}\{E_{ym} e^{j\varphi} e^{j\omega t}\};$$

$$E_z = E_{zm} \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}\{E_{zm} e^{j\varphi} e^{j\omega t}\}.$$

Комплексною амплітудою вектору \vec{E} назвемо вектор

$$\dot{\vec{E}}_m = (iE_{xm} + jE_{ym} + kE_{zm})e^{j\varphi} = \vec{E}_m e^{j\varphi}.$$

Миттєве значення вектора $\vec{E} = \text{Im}\{E_m e^{j\omega t}\}$.

Аналогічно можна записати комплексну амплітуду напруженості магнітного поля

$$\dot{\vec{H}}_m = (iH_{xm} + jH_{ym} + kH_{zm})e^{j\varphi} = \vec{H}_m e^{j\varphi},$$

і його миттєве значення

$$\vec{H} = \text{Im}\{\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}\}.$$

Якщо в рівняння Максвелла підставити замість \vec{B} і \vec{E} значення $\vec{E}_m e^{j\omega t}$ і $\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}$, то отримане рішення буде більш загальним, бо воно буде справедливе не тільки для введених в рівняння фіктивних величин, але і для дійсних. При цьому запис рівнянь значно спроститься, бо $e^{j\omega t}$ скоротиться.

Розглянемо перше рівняння Максвелла

$$\text{rot}\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Підставивши замість \vec{H} значення $\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}$ (фіктивна частина якої рівна \vec{H}), а замість \vec{E} значення $\vec{E}_m e^{j\omega t}$, отримаємо

$$e^{j\omega t} \text{rot}\dot{\vec{H}}_m = e^{j\omega t} \sigma\vec{E}_m + \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m j\omega e^{j\omega t}.$$

Після скорочення на $e^{j\omega t}$ ми отримаємо перше рівняння Максвелла в комплексній формі запису

$$\text{rot}\dot{\vec{H}}_m = (\sigma + j\omega\varepsilon_a)\dot{\vec{E}}_m.$$

Аналогічно можна отримати і інші рівняння електромагнітного поля в комплексній формі запису.

Друге рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_m.$$

А також

$$\operatorname{div}(\mu_a \dot{\vec{H}}_m) = 0;$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m) = \dot{\rho}.$$

Вирішивши ці рівняння і визначивши комплексні амплітуди $\dot{\vec{E}}_m$ і $\dot{\vec{H}}_m$, легко знайти миттєві значення векторів поля з співвідношень:

$$\vec{E} = \operatorname{Im}\{\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}\}; \vec{H} = \operatorname{Im}\{\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}\}.$$

Якщо вектори поля міняються в часі по косинусоїдальному закону, то в цьому випадку

$$\vec{E} = \operatorname{Re}\{\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}\}; \vec{H} = \operatorname{Re}\{\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}\}.$$

Перевага комплексної форми запису основних рівнянь поля полягає в тому, що час t виключається з цих рівнянь.

Повна система рівнянь електромагнітного поля

Отже, ми маємо наступну систему диференціальних рівнянь електромагнітного поля, що дадуть просторово-часовий опис електромагнітних процесів:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{\delta} + \partial \vec{D} / \partial t; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{\delta} &= -\partial \rho / \partial t. \end{aligned} \right\}$$

Електромагнітне поле визначається чотирма векторами: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$.

Для середовищ з постійною проникністю ці вектори зв'язані співвідношеннями:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}; \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}.$$

Тому при розрахунку достатньо визначити тільки два вектори. Звичайно визначають вектори \vec{E} і \vec{H} з рівнянь Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Однак для однозначності визначення \vec{E} і \vec{H} цих рівнянь недостатньо, вектор по заданому ротору однозначно не визначається, тому слід задати ще і дивергенцію векторів \vec{E} і \vec{H} . З теореми Гауса в диференціальній формі

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

При постійному значенні $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Основна властивість магнітного поля – його соленоїдальність ($\operatorname{div} \vec{B} = 0$) дозволить визначити дивергенцію вектора \vec{H} . При постійному значенні μ

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Отже, повна система рівнянь електромагнітного поля для середовищ з постійними параметрами

$$\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \text{const}; \mu_a = \mu_r \mu_0 = \text{const}; \sigma = \text{const},$$

запишеться наступним чином:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{H} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Ці рівняння є основними рівняннями електромагнітного поля для нерухомих середовищ.

При вирішенні прикладних задач повинні бути враховані початкові і граничні умови. Наприклад, в момент $t = 0$ повинні бути задані значення векторів \vec{E} і \vec{H} в усіх точках об'єму V , в якому досліджується поле; крім того, повинні бути відомі значення цих векторів на граничній поверхні S протягом усього проміжку часу від 0 до t .

Фізичний зміст рівнянь електромагнітного поля полягає в тому, що **магнітне поле завжди вихрове і збуджується воно як зарядами, що рухаються, так і електричним полем, що змінюється в часі**. Електричне поле може бути **вихровим**, в цьому випадку воно збуджується магнітним полем, що змінюється в часі і **безвихровим**, якщо воно збуджується постійними в часі електричними зарядами.

Електричне і магнітне поле взаємозв'язані та є різними проявами єдиного електромагнітного поля, що знаходиться в русі і несе з собою запас енергії:

$$W_{em} = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV.$$

Запитання

1. Наведіть можливі форми запису рівнянь Максвелла.
2. Сформулюйте закон Ампера.
3. Сформулюйте закон Фарадея.
4. Назвіть тип поля вектора струму провідності.
5. Наведіть умови, які необхідні для представлення рівнянь Максвелла у комплексній формі.
6. Вкажіть перевагу запису рівнянь Максвелла у комплексній формі.
7. Назвіть вектори, через які виражаються рівняння Максвелла.
8. Наведіть додаткові умови при вирішенні прикладних задач для повного опису векторів електромагнітного поля.

Лекція № 8. Особливості використання рівнянь Максвелла

Граничні умови

Рівняння Максвелла дозволяють розраховувати параметри поля в будь-який момент часу, як всередині області V , обмеженою поверхнею S («внутрішня» задача електродинаміки), так і для будь-якої точки поза цією областю («зовнішня» задача електродинаміки). Однак для рішення цих рівнянь необхідні додаткові умови, що дозволять визначити постійні інтегрування. До таких умов відносяться умови на межах різнорідних середовищ – граничні умови.

Гранична умова для нормальних складових вектора магнітної індукції \vec{B} визначається інтегральним рівнянням:

$$\oint_S \vec{B} dS = 0.$$

Розглянемо циліндр, що перетинає поверхню розділу двох середовищ, рис. 8.1, висота h якого прямує нуля, $h \rightarrow 0$. $\mu_2 \neq \mu_1$

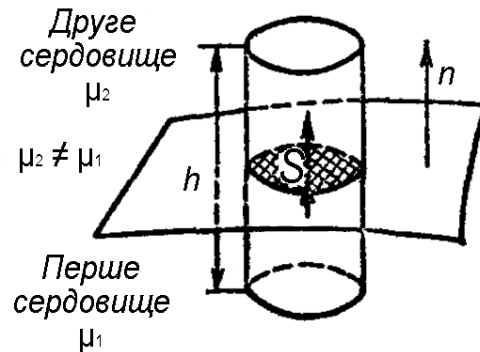


Рис. 8.1. Ілюстрація до розрахунку нормальних складових вектора магнітної індукції \vec{B}

Магнітні поля на верхній і нижній основах циліндра, зважаючи на те, що їх висота відносно межі розділу прямує до нуля, вважаються однорідними, а потік крізь бічну поверхню циліндра – рівним нулю. Тоді потік, який перетинає поверхню S , розташовану на поверхні розділу з боку першого середовища, повинен дорівнювати потоку, що виходить з неї зі сторони другого середовища. При цьому виконуються умови

$$\begin{aligned} B_{n(2)} &= B_{n(1)}; \\ H_{n(2)} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n(1)}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Отже, нормальні складові вектору магнітної індукції B_n на межі двох середовищ безперервні, а нормальні складові вектора напруженості магнітного поля H_n зазнають стрибка.

Гранична умова для нормальних складових вектора електричної індукції \vec{D} визначається аналогічно формулі (8.1) за допомогою рівняння:

$$\oint_S \vec{D} dS = Q. \quad (8.2)$$

Якщо висота циліндра прямує до нуля $h \rightarrow 0$ згідно з рівнянням (8.2) різниця між потоком, що виходить з одного середовища, і потоком, який виходить з іншого середовища, дорівнює розподіленому на площині S заряду $Q = S\chi$, де χ - поверхнева щільність заряду [$\text{Кл}/\text{м}^2$], тому:

$$D_{n(2)} - D_{n(1)} = \chi. \quad (8.3)$$

Тобто за наявності поверхневих зарядів нормальні складові вектора електричної індукції D на межі двох серед зазнають розриву.

Якщо ж поверхневі заряди будуть відсутні, то

$$D_{n(2)} = D_{n(1)};$$

$$E_{n(2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{n(1)}.$$

Тобто нормальні складові вектора електричної індукції D безперервні, а нормальні складові вектора напруженості електричного поля E зазнають стрибка.

Граничні умови для тангенціальних складових вектора \vec{E} розраховуються з рівняння

$$\oint_l \vec{E} dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} dS.$$

Розглянемо контур, частково розташований в одному середовищі, частково – в іншому, рис. 8.2.

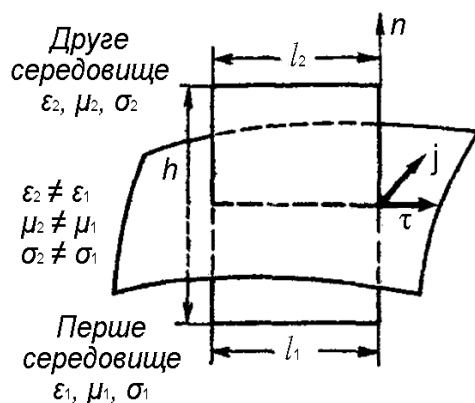


Рис. 8.2. Ілюстрація до розрахунку граничних умов для тангенціальних складових вектора \vec{E}

Якщо вважати довжину контуру відносно малою, тоді електричне поле на окремих його ділянках є однорідним. При $h \rightarrow 0$ і $l_1 \rightarrow l_2$ права частина рівняння дорівнює нулю. У результаті цього $E_{\tau(2)}l_2 - E_{\tau(1)}l_1 = 0$. Отже,

$$E_{\tau(2)} = E_{\tau(1)}.$$

При цьому

$$D_{\tau(2)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{\tau(1)}.$$

Тобто на межі розділу двох середовищ тангенціальні складові вектора напруженості електричного поля \vec{E} безперервні, а тангенціальні складові вектора електричної індукції \vec{D} зазнають стрибка.

Гранична умова для тангенціальних складових напруженості магнітного поля \vec{H} визначається рівнянням

$$\oint_l \vec{H} dl = \int_S \left(\vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS.$$

Аналогічно попередньому випадку, в межі при $h \rightarrow 0$

$$H_{\tau(2)} - H_{\tau(1)} = \lim_{h \rightarrow 0} (\vec{\delta} h) = \delta_{нов},$$

де $\delta_{нов}$ - поверхнева щільність струму [А/м], яка дорівнює значенню струму, який протікає в нескінченно тонкому шарі через одиницю довжини лінії, перпендикулярній напрямку струму.

Таким чином, тангенціальні складові вектору напруженості магнітного поля H на межі двох середовищ зазнають розриву, значення якого дорівнює поверхневій щільності струму в тонкому шарі. Хоч такий струм є абстракцією (може мати місце лише на поверхні ідеального провідника), однак введення його набуває фізичного змісту за умови аналізу високочастотного поля. При цьому в провіднику струм протікає тільки в дуже тонкому поверхневому шарі, в межах якого відбувається стрибок вектору \vec{H} , і за яким поле практично відсутнє.

Якщо поверхневий струм відсутній, то

$$H_{\tau(2)} = H_{\tau(1)};$$

$$B_{\tau(2)} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{\tau(1)}.$$

Тобто за відсутності струму на поверхні розділу двох середовищ тангенціальні складові напруженості магнітного поля H безперервні, а тангенціальні складові вектору магнітної індукції B зазнають стрибка.

Граничні умови для вектора щільності струму $\vec{\delta}$ отримуються з умови безперервності тангенціальних складових напруженості електричного поля \vec{E} .

$$\frac{\delta_{\tau(1)}}{\delta_{\tau(2)}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Умова для нормальних складових знаходиться з виразу $div \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, враховуючи, що $\rho = div \vec{D}$. Аналогічно знаходженню граничних умов для нормальних складових \vec{B} і \vec{D} , отримаємо:

$$\delta_{n(1)} + \frac{\partial D_{n(1)}}{\partial t} = \delta_{n(2)} + \frac{\partial D_{n(2)}}{\partial t}.$$

З урахуванням виразу (8.3)

$$\delta_{n(1)} = \delta_{n(2)} + \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

При $\chi = 0$ або в випадку стаціонарного поля

$$\delta_{n(1)} = \delta_{n(2)}.$$

Таким чином, тангенціальні складові струму на поверхні розділу середовищ зазнають стрибка, а його нормальні складові за відсутності поверхневих зарядів або в випадку стаціонарного поля безперервні.

Теорема Умова-Пойнтінга

Крім рівнянь Максвелла, велике значення в теорії електромагнітного поля має теорема Умова-Пойнтінга. Вона описує енергетичні співвідношення в електромагнітному полі і має дві форми запису: перша – для миттєвих значень, друга, комплексна форма, - для діючих значень гармонічних полів.

Теорема Умова-Пойнтінга виражає закон збереження енергії в електромагнітному полі. Вона зв'язує зміну енергії в будь-якому об'ємі з потоком її через поверхню, що обмежує цей об'єм. Енергія електромагнітного поля в об'ємі V дорівнює:

$$W_{em} = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV,$$

і безперервно змінюється в часі.

Зміна (збільшення) енергії в зазначеному об'ємі

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \int_V \varepsilon_a E \frac{\partial E}{\partial t} dV + \int_V \mu_a H \frac{\partial H}{\partial t} dV.$$

Запишемо рівняння Максвелла для середовища з $\varepsilon_a = const, \mu_a = const, \sigma = const$:

$$rot \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (8.4)$$

$$rot \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (8.5)$$

З рівнянь (8.4) і (8.5) виразимо похідні

$$\varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = rot \vec{H} - \sigma \vec{E};$$

$$\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -rot \vec{E}.$$

Тоді зміна енергії електромагнітного поля може бути виражена наступним чином:

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \int_V E rot \vec{H} dV - \int_V \sigma E^2 dV - \int_V H rot \vec{E} dV.$$

З векторного аналізу відомо, що

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{E} \times \vec{H}.$$

Отже,

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = - \int_V \operatorname{div} \vec{E} \times \vec{H} dV - \int_V \sigma E^2 dV. \quad (8.6)$$

Позначимо векторний добуток у формулі (8.6)

$$\vec{E} \times \vec{H} = \vec{\Pi}. \quad (8.7)$$

Вектор Π називають вектором Пойнтінга, його розмірність – Ватт на квадратний метр $[Вт/м^2]$.

По теоремі Остроградського

$$\int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dV = \oint_S \vec{\Pi} dS.$$

Отже,

$$-\oint_S \vec{\Pi} dS = \int_V \sigma E^2 dV + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}. \quad (8.8)$$

Одержаний вираз (8.8) є записом теореми Умова-Пойнтінга: *потік вектора Пойнтінга, який входить в замкнуту поверхню S , дорівнює сумі двох потужностей, одна з яких $\int_V \sigma E^2 dV = p_{тепл}$, є потужністю теплових*

втрат всередині об'єму V , обмеженого поверхню S , друга $\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = p_{ем}$ відповідає зміні енергії електромагнітного поля в тому ж об'ємі.

Потужність теплових втрат $p_{тепл}$ завжди позитивна. Потужність $p_{ем}$ відповідає зміні енергії електромагнітного поля і може бути, як позитивною, так і негативною.

Якщо потужність $p_{ем}$ позитивна, то електромагнітна енергія всередині об'єму V збільшується. У цьому випадку потік вектора $\vec{\Pi}$, входить всередину поверхні S і має позитивне значення, рис 8.3.

Позитивна нормаль до замкнутої поверхні $\vec{\Pi}$ направлена в зовнішню сторону, отже, так само направлені і вектор dS . Тому для того, щоб потік вектору $\vec{\Pi}$, який направлено всередину поверхні S , був позитивним, вектор $\vec{\Pi}$ повинен бути направлений всередину об'єму V (кут між $\vec{\Pi}$ і dS повинен бути тупим).

Вектор Пойнтінга можна визначити як величину, яка дорівнює енергії, що проходить в 1 сек крізь поверхню, рівну $1 м^2$ і перпендикулярну напрямку $\vec{\Pi}$.

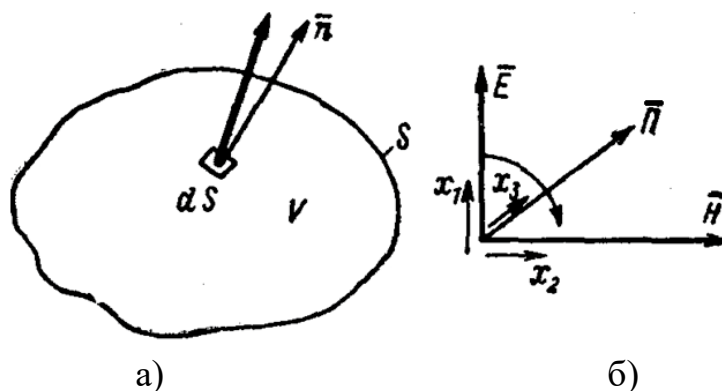


Рис. 8.3. Ілюстрація до визначення напрямку вектора Пойнтінга

Теорема Умова-Пойнтінга є рівнянням енергетичного балансу; ліва частина рівняння (8.8) є потужністю або енергією в одиницю часу у формі потоку вектора Пойнтінга всередину деякого об'єму; права частина є енергією, що витрачається в одиницю часу всередині об'єму.

Якщо поле не змінюється в часі то $\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = 0$ і

$$-\oint_S \vec{\Pi} dS = \int_V \sigma E^2 dV.$$

При виведенні теореми Умова-Пойнтінга припускалося, що в об'ємі, обмеженому замкнутою поверхнею S немає джерел енергії. Якщо в об'ємі V такі джерела є, причому миттєва потужність джерел дорівнює $p_{дж}$, то теорему слід записати наступним чином:

$$p_{дж} = \oint_S \vec{\Pi} dS + \int_V \sigma E^2 dV + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}.$$

Потужність джерел в об'ємі V дорівнює сумі потужностей: потужності теплових втрат, потужності зміни енергії електромагнітного поля в об'ємі V і потужності енергії, що проходить крізь граничну поверхню S розглянутого об'єму.

Теорема Умова-Пойнтінга в комплексній формі

Подібно до того як в ланцюзі змінного струму для обчислення повної потужності слід домножити комплекс напруги \dot{U} на сполучений комплекс струму \dot{I}^* , вводиться комплексний вектор Пойнтінга

$$\vec{\Pi} = \dot{E} \times \dot{H}^*.$$

Замість $-\oint_S \vec{\Pi} dS$ тепер буде

$$-\oint_S \vec{\Pi} dS = \int_V \text{div} \vec{\Pi} dV = \int_V \left(\dot{E} \text{rot} \dot{H}^* - \dot{H} \text{rot} \dot{E} \right) dV.$$

Відповідно до

$$\text{rot} \dot{H} = \sigma \dot{E} + j\omega \epsilon_a \dot{E}.$$

$$\operatorname{rot} \dot{E} = -j\omega\mu_a \dot{H}.$$

Отже, $\operatorname{rot} H = \sigma E - j\omega\varepsilon_a E$ і

$$\dot{E} \operatorname{rot} H - H \operatorname{rot} \dot{E} = \sigma \dot{E} E - j\omega\varepsilon_a \dot{E} E + j\omega\mu_a \dot{H} H = \sigma E^2 + 2j\omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right).$$

Тому

$$-\oint_S \vec{\Pi} dS = \int_V \sigma E^2 dV + \int_V 2j\omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (8.9)$$

Перший доданок правої частини виразу (8.9) є активною потужністю, другий – реактивною потужністю. Таким чином теорема Умова-Пойнтінга може бути записана наступним чином

$$-\oint_S \vec{\Pi} dS = P + jQ.$$

Теорема про єдине рішення рівнянь Максвелла

Покажемо, що якщо при вирішенні рівнянь Максвелла для певних початкових і граничних умов одержані значення векторів поля \vec{E} і \vec{H} , то це рішення єдине.

Припустимо, що електромагнітне поле досліджується в певній області простору V , що обмежена замкнутою поверхнею S . Параметри ε_a, μ_a постійні.

Початкові і граничні умови задані наступним чином. В момент $t=0$ вектори \vec{E} і \vec{H} задані в усіх точках області V . На поверхні S відомі дотичні складові одного з векторів поля (припустимо \vec{E}) для всіх моментів часу від 0 до t .

Тоді рівняння Максвелла однозначно визначають вектори \vec{E} і \vec{H} в будь-якій точці області V і в будь-який момент t .

Припустимо протилежне, тобто, що існує друге рішення рівнянь Максвелла, причому вектори поля \vec{E} і \vec{H} задовольняють перерахованим вище початковим і граничним умовам

Розглянемо два нових вектори

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1; \vec{H}_2 = \vec{H} - \vec{H}_1.$$

Очевидно, що \vec{E}_2 і \vec{H}_2 також є рішенням рівнянь Максвелла, але початкові і граничні умови для них будуть дещо іншими. При $t=0$ в усіх точках області V вектори \vec{E}_2 і \vec{H}_2 повинні дорівнювати нулю, бо в цей момент $\vec{E} = \vec{E}_1$ і $\vec{H} = \vec{H}_1$. На поверхні S у всі моменти часу від 0 до t дотична складова вектора \vec{E}_2 також повинна бути рівною нулю. Отже, вектор \vec{E}_2 може мати на поверхні S тільки нормальну складову.

Застосуємо до поля векторів \vec{E}_2 і \vec{H}_2 теорему Умова-Пойнтінга

$$-\oint_S \vec{E}_2 \times \vec{H}_2 dS = \int_V \sigma E_2^2 dV + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}.$$

На поверхні S добуток

$$\vec{E}_2 \times \vec{H}_2 dS = 0,$$

бо в будь-якій точці граничної поверхні S напрям \vec{E}_2 співпадає з нормаллю.

Теорема Умова-Пойнтінга прийме вигляд

$$\int_V \sigma E_2^2 dV + \frac{\partial W_{em}}{\partial t} = 0.$$

Перший доданок цього виразу дорівнює потужності теплових втрат і може мати невід'ємне значення.

Тоді значення похідної $\frac{\partial W_{em}}{\partial t}$ повинне бути від'ємним (якщо W_{em} зменшується), або дорівнювати нулю (якщо $W_{em} = const$).

Згідно з початковими умовами в момент $t=0$ в усіх точках області вектори поля дорівнюють нулю: $\vec{E}_2 = 0, \vec{H}_2 = 0$.

Отже

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \frac{\epsilon_a E_2^2}{2} + \frac{\mu_a H_2^2}{2} = 0.$$

Енергія негативних значень приймати не може, тому вона повинна постійно дорівнювати нулю. Отже, вектори $\vec{E}_2 = 0, \vec{H}_2 = 0$ в будь-який момент t і в будь-якій точці області V . Це означає, що $\vec{E} - \vec{E}_1 = 0; \vec{H} - \vec{H}_1 = 0$ або $\vec{E} = \vec{E}_1; \vec{H} = \vec{H}_1$. Тобто друге рішення співпадає з першим.

Запитання

1. Назвіть причину, для якої при розв'язку рівнянь Максвелла необхідно враховувати граничні умови.
2. Сформулюйте співвідношення для нормальних складових векторів магнітного поля на межі розділу двох середовищ.
3. Сформулюйте співвідношення для нормальних складових векторів електричного поля на межі розділу двох середовищ.
4. Сформулюйте співвідношення для тангенціальних складових векторів магнітного поля на межі розділу двох середовищ.
5. Сформулюйте співвідношення для тангенціальних складових векторів електричного поля на межі розділу двох середовищ.
6. Сформулюйте співвідношення для тангенціальної і нормальної складових вектора повного струму на межі розділу двох середовищ.
7. Наведіть формулювання теореми Умова-Пойнтінга.
8. Наведіть формулювання теореми про єдине рішення рівнянь Максвелла.

Лекція № 9. Окремі види електромагнітного поля

Узагальнені електродинамічні потенціали

Для визначення векторів \vec{E} і \vec{H} по заданим зарядам і струмам необхідно вирішити повну систему рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \operatorname{div}(\mu_a \vec{H}) = 0; \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Вважається, що параметри середовища $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ є постійними і задані, також задані параметри $\vec{\delta}$ і ρ , які залежать від трьох просторових координат і часу.

Безпосереднє вирішення рівнянь Максвелла є складною задачею. Для спрощення розрахунків використовують допоміжні функції φ і \vec{A} просторових координат і часу, які називають узагальненими електродинамічними потенціалами. Визначивши їх, можна знайти вектори поля \vec{E} і \vec{H} .

Вектор \vec{A} називається узагальненим векторним потенціалом. Виразимо напруженість магнітного поля H через векторний потенціал

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Підставимо значення \vec{H} в третє рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \left(\frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot}\vec{A} \right)}{\partial t}.$$

Замінивши послідовність диференціювання і скоротивши на μ_a , отримаємо

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

або

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Якщо ротор вектору $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ дорівнює нулю, то він – потенційний вектор і можна знайти таку скалярну функцію φ , для якої цей вектор є градієнтом:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Параметр φ називається узагальненим скалярним потенціалом.

Рівняннями

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \vec{A};$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi.$$

пов'язані вектори поля \vec{E} і \vec{H} з узагальненими потенціалами φ і \vec{A} .

Для визначення φ і \vec{A} використаємо інші рівняння електромагнітного поля.

Перше рівняння Максвелла можна записати наступним чином:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_a} \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \right)}{\partial t},$$

або

$$\text{rot rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Позначимо $\varepsilon_a \mu_a = \frac{1}{c^2}$ і розгорнемо вираз ротора від ротора:

$$\text{rot rot} \vec{A} = \text{grad div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right),$$

або

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Можна вибрати $\text{div} \vec{A}$ так, щоб рівняння спростилося. Вважатимемо:

$$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Тоді векторний потенціал визначиться з рівняння

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta}.$$

Якщо записати це векторне рівняння в прямокутній декартовій системі координат, то вважаючи, що

$$\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z;$$

$$\vec{\delta} = \vec{i} \delta_x + \vec{j} \delta_y + \vec{k} \delta_z.$$

одержуємо три рівняння Даламбера для проєкцій векторного потенціалу:

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_x; \quad \nabla^2 A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_y; \quad \nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_z.$$

Якщо в рівняння $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$ підставити \vec{E} , то отримаємо:

$$\operatorname{div}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_a}; \quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi; \quad \nabla^2\varphi + \frac{\partial(\operatorname{div}\vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Підставивши вираз $\operatorname{div}\vec{A}$, отримаємо:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Для визначення скалярного потенціалу, також слід вирішити рівняння Даламбера.

Ввівши узагальнені потенціали φ і \vec{A} , ми звели рівняння Максвела до чотирьох однакових рівнянь Даламбера і цим значно спростили розрахунок електромагнітного поля. Отримавши узагальнені електродинамічні потенціали φ і \vec{A} , можна легко визначити вектори поля \vec{E} і \vec{H} .

Рішення рівнянь Даламбера можна записати в вигляді інтегралів

$$\varphi_t = \int_V \frac{\rho_{t-R/c}}{4\pi\varepsilon_a R} dV; \quad \vec{A}_t = \int_V \frac{\mu_a \vec{\delta}_{t-R/c}}{4\pi R} dV.$$

Щоб знайти скалярний потенціал в точці N в момент t , треба розбити об'єм V на елементи dV , підрахувати заряд цих елементарних об'ємів

$$dq = \rho_{t-R/c} dV.$$

В момент $t - R/c$ (де R – відстань від елемента об'єму dV до точки N , а $c = 1/\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ – швидкість розповсюдження електромагнітної енергії в діелектрику з проникностями ε_a, μ_a).

Поділивши цей заряд на $4\pi\varepsilon_a R$ і взявши інтеграл по всім елементарним об'ємам dV , в яких є заряд з щільністю ρ , ми отримаємо скалярний потенціал в даній точці в момент часу t .

Аналогічно визначаються і проекції векторного потенціалу. Важливо відзначити, що *зміна вільних об'ємних зарядів і струмів провідності в різноманітних точках поля відбувається не миттєво, а через деякий час R/c , необхідний для того, щоб електромагнітна хвиля пройшла відстань R* . Тому потенціали \vec{A} і φ також називаються запізнюючими.

У тих областях поля, в яких немає об'ємних зарядів і струмів провідності рівняння, що визначають узагальнені потенціали мають вид:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0; \quad (9.1)$$

$$\nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0. \quad (9.2)$$

Співвідношення (9.1), (9.2) називаються хвильовими рівняннями.

Окремі види електромагнітного поля

Рівняння Максвела описують змінне електромагнітне поле як єдиний процес взаємозв'язку зміни електричного $\partial\vec{D}/\partial t$ і магнітного $\partial\vec{B}/\partial t$ полів.

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta} + \partial\vec{D}/\partial t;$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{\delta} &= -\partial \rho / \partial t. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Для опису електромагнітних процесів у лінійних ізотропних і однорідних середовищах використовують рівняння:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \partial \vec{E} / \partial t; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \partial \vec{H} / \partial t; \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho / \varepsilon_a; \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned}$$

Залежно від швидкості зміни $\partial \vec{D} / \partial t$ і $\partial \vec{B} / \partial t$ розрізняють швидкозмінне (нестационарне), квазістационарне, стационарне, квазістатичне і статичні поля.

Швидкозмінне поле – поле, що швидко змінюється в часі; створюється змінним струмом великої частоти. Таке поле описується всією системою рівнянь Максвелла (9.3).

Квазістационарне поле – змінне електромагнітне поле, яке із часом змінюється так повільно, що можна знехтувати струмом зміщення в порівнянні з струмом провідності і ефектом запізнювання (ефектом випромінювання)

$$\varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \sigma \vec{E}.$$

Внаслідок цього перше рівняння системи (9.3) можна переписати у вигляді

$$\operatorname{rot} \vec{H} \approx \sigma \vec{E}.$$

Більшість електромагнітних полів, досліджуваних в електротехніці, можуть розглядатися як квазістационарні.

Стационарне поле – поле, створюване зарядами, що рівномірно рухаються, тобто постійним струмом. Вважаючи в рівняннях системи (9.3), що $\partial / \partial t = 0$, а $\vec{\delta} \neq 0$ диференціальні рівняння стационарного поля мають вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma \vec{E}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{\delta} &= -\partial \rho / \partial t; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho. \end{aligned}$$

Окремими видами стационарного поля є електричне поле постійного струму і магнітне поле постійного потоку.

Квазістатичне поле – змінне електромагнітне поле, у якому можна вважати $\partial \vec{B} / \partial t = 0$ і яке є потенційним, тому що $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$. У ньому відсутній взаємний вплив електричного і магнітного полів. Диференціальні рівняння поля мають вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \partial \vec{D} / \partial t; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0; \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\partial \rho / \partial t;$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Статичне поле – поле в просторі без струмів, незмінне у часі. Електричне поле, утворюване нерухомими зарядами, називається **електростатичним**. Магнітне поле, створюване зарядами, що рівномірно рухаються, але траєкторії яких не входять в область поля, називається **магнітостатичним**.

Вважаючи в рівняннях $\partial / \partial t = 0$ і $\vec{\delta} = 0$, одержимо дві незалежних системи рівнянь: електростатики

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

і магнітостатики

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0; \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Визначення потенційних полів

Для потенційних (безвихрових) полів лінійний інтеграл по будь-якому замкнутому контуру від вектора напруженості електричного поля, а також від вектора напруженості магнітного поля в області, не зайнятій струмом, дорівнює нулю. Тому потенційні поля характеризуються скалярними функціями: електричним потенціалом φ електричного поля і магнітним потенціалом φ_m - магнітного поля постійного потоку.

Потенційними полями є електростатичне, електричне постійного струму (поза джерелами), магнітне постійного потоку (поза області з струмом) і квазістатичне поля.

Квазістаціонарне поле не є потенційним, оскільки, згідно з другим рівнянням Максвелла, $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$ і електричне і магнітне поля взаємозалежні.

Потенційні поля графічно представляють у вигляді картини поля – ліній вектора поля і екіпотенціальних поверхонь (ліній).

Електростатичне поле

Електростатичне поле, створюється нерухомими зарядами. Нерухомі заряди, звичайно зосереджені на провідниках і на діелектриках. Це можуть бути: а) заряди надлишкові, тобто додані даному тілу ззовні; при цьому створюється заряджений провідник або заряджений діелектрик, що несе заряд $|q| > 0$; б) заряди, індуковані зовнішнім полем, у яке внесене дане тіло; у цьому випадку створюється відповідно поляризований провідник або поляризований діелектрик, причому його заряд $|q| = 0$.

Так як в провідниках завжди є вільні електрони, то в процесі утворення статичних зарядів у провідному тілі виникає струм. Протікає він доти, поки напруженість електричного поля усередині провідника не стане рівною нулю, а заряди розподіляться по поверхні провідника, створюючи навколо нього в просторі електростатичне поле. Умова $\vec{E} = 0$ всередині провідника відповідає відсутності руху зарядів, тобто умові електростатичного поля. На відміну від провідника, всередині діелектрика $\vec{E} \neq 0$.

Електростатичне поле описується рівняннями

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0; \operatorname{div}\vec{D} = \rho; \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi; \vec{D} = \varepsilon_a\vec{E}, \quad (9.4)$$

і задовольняє граничним умовам

$$\begin{aligned} D_{n(2)} - D_{n(1)} &= \chi; \\ E_{\tau(2)} &= E_{\tau(1)}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Рівняння (9.4) і (9.5) підтверджують, що в електростатичному полі електричні силові лінії не замкнуті і починаються та закінчуються на зарядах.

Так як \vec{E} - сила, що діє на одиничний заряд, що знаходиться у даному полі, то при переміщенні його уздовж шляху dl робота сил поля дорівнює:

$$dU = (\vec{E}dl) = E_i dx_i.$$

При переміщенні одиничного заряду з точки поля M в точку поля M' повна робота

$$U = \int_M^{M'} E_i dx_i.$$

Так як $E_i dx_i = -\operatorname{grad}\varphi dx_i = -d\varphi$ то

$$U = -\int_M^{M'} d\varphi = \varphi - \varphi',$$

де φ' - потенціал поля в точці M' , φ - у точці M , U - різниця потенціалів цих точок, яка називається електричною напругою.

У багатьох задачах, пов'язаних з електростатичним полем зарядів, розташованих у кінцевій області простору, потенціал нескінченно віддаленої точки зручно приймати рівним нулю. Тоді електростатичний потенціал точки M

$$\varphi = U = \int_M^{\infty} E dl,$$

визначається роботою на переміщення одиничного заряду з даної точки в нескінченність.

У області, де існують заряди, потенціал φ визначається рівнянням Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

рішення якого має вигляд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{\rho}{r} dV.$$

В області, де заряди відсутні, потенціал визначається рівнянням Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

При вирішенні рівнянь Пуассона і Лапласа постійні інтегрування знаходять із забезпечення граничних умов, що утворюються з умов

$$\begin{aligned} D_{n(2)} - D_{n(1)} &= \chi; \\ E_{\tau(2)} &= E_{\tau(1)}, \end{aligned}$$

і зводяться до наступного:

а) при переході через поверхню розділу двох середовищ потенціал залишається незмінним, тобто

$$\varphi_{(2)} = \varphi_{(1)}.$$

у іншому випадку напруженість поля, яка визначається похідною потенціалу по напрямку, оберталася б у нескінченність, що фізично неможливо;

б) на межі двох діелектриків

$$-\varepsilon_{a(2)} \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial n} + \varepsilon_{a(1)} \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial n} = \chi; \quad \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \tau}.$$

в) на межі провідник-діелектрик

$$\varepsilon_{a(2)} \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial n} = -\chi; \quad \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \tau} = 0.$$

У середовищі, що не містить зарядів електростатичне поле описується системою рівнянь

$$\text{rot} \vec{E} = 0; \quad \text{div} \vec{D} = 0; \quad \vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}.$$

Енергія електростатичного поля, утворюваного системою з n заряджених провідників і об'ємним зарядом, розподіленим в оточуючому їх діелектрику, визначається наступним виразом:

$$W_e = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV = -\frac{1}{2} \int_V \vec{D} \text{grad} \varphi dV.$$

Відповідно до рівняння

$$\vec{D} \text{grad} \varphi = \text{div}(\varphi \vec{D}) - \varphi \text{div} \vec{D}.$$

і теореми Остроградського-Гауса

$$\int_V \text{div}(\varphi \vec{D}) dV = \oint_S \varphi \vec{D} dS = \oint_{S_0} \varphi \vec{D} dS + \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \varphi \vec{D} dS,$$

де S_0 – поверхня, що обмежує всю систему; S_i – поверхня i -го провідника.

З огляду на попередні рівняння і рівняння $\text{div} \vec{D} = \rho$ одержимо:

$$W_e = -\frac{1}{2} \int_{S_0} \varphi \vec{D} dS - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \varphi \vec{D}_n dS + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (9.6)$$

Якщо заряд зосереджений тільки в цій області (відокремлений заряд), то перший член правої частини рівняння (9.6) дорівнює нулю, тому що в цьому випадку інтегрування можна поширити на безмежний простір і заряд цей можна розглядати як точковий. Дійсно, підставляючи під знак інтегралу вирази для φ і \vec{D} точкового заряду й інтегруючи по поверхні сфери, одержимо:

$$\oint_{S_0} \varphi \vec{D} dS = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{q}{4\varepsilon_a r} \frac{q}{4\pi \varepsilon_a r^2} \rightarrow 0.$$

Тому що на поверхні будь-якого i -го провідника $D_n = -\chi_i$ (нормаль спрямована усередину провідника) і потенціал кожного провідника постійний на всій його поверхні

$$\oint_{S_i} \varphi D_n dS = \varphi_i \oint_{S_i} \chi_i dS = \varphi_i q_i,$$

Де q_i і φ_i - відповідно заряд і потенціал i -го провідника.

Остаточний вигляд для енергії поля

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i. \quad (9.7)$$

Якщо відстані між зарядами q_i достатньо великі, то їх можна розглядати як точкові. Енергія зосереджена не в самих зарядах, а в їхньому електричному полі і розподілена в навколишньому просторі. Перший доданок у правій частині виразу (9.7) є енергією поля заряду, розподіленого в діелектричному середовищі

$$W_p = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV,$$

а другий - енергію поля зарядів, розподілених на провідниках

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i.$$

Магнітостатичне поле

Магнітостатичне поле описується наступними рівняннями:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0; \operatorname{div} \vec{B} = 0; \vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m.$$

Це поле існує в просторі біля постійного магніту, соленоїда з витками, коли електричне поле просторі практично відсутнє, і біля соленоїда, в надпровідному стані.

Оскільки структура рівнянь магнітостатичного поля однакова зі структурою рівнянь електростатики для області, що не містить вільних зарядів, то при розв'язанні рівнянь магнітостатики можна користуватися рішеннями рівнянь електростатики з заміною в них \vec{E} на \vec{H} і ε_a на μ_a .

Енергія статичного магнітного поля

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV,$$

а її густина $w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} = \frac{\mu_a H^2}{2}$. Отже, енергія в магнетику в μ разів більше, ніж у вакуумі при цій же напруженості поля.

Запитання

1. Наведіть причину використання узагальнених електродинамічних потенціалів.
2. Наведіть визначення швидкозмінного поля.
3. Наведіть визначення квазістаціонарного поля.
4. Наведіть визначення стаціонарного поля.
5. Поясніть чим створюється електростатичне поле.
6. Вкажіть положення точки, яку вважають нульовим потенціалом у потенційних полях.
7. Наведіть приклади магнітостатичних полів.

Лекція № 10. Основні співвідношення і закони стаціонарного поля

Стаціонарне поле

Стаціонарне поле створюється зарядами, які рівномірно рухаються, тобто постійним струмом. Таке поле описується рівняннями:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}; \operatorname{div}\vec{H} = 0; \operatorname{rot}\vec{E} = 0; \operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_a; \operatorname{div}\vec{\delta} = 0.$$

Останнє з цих рівнянь вказує на те, що поле вектора $\vec{\delta}$ соленоїдальне, тобто лінії струму замкнуті.

Хвильові рівняння при стаціонарному полі переходять в рівняння Пуассона

$$\Delta\vec{A} = -\mu_a\vec{\delta}; \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Напруженості поля зв'язані з електромагнітними потенціалами співвідношеннями

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\vec{A}; \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \quad (10.1)$$

У області, що не містить сторонніх джерел, як і у випадку статичних полів, рівняння Пуассона переходять у рівняння Лапласа

$$\Delta\vec{A} = 0; \Delta\varphi = 0.$$

Сталі інтегрування при вирішенні рівнянь Пуассона і Лапласа знаходять із забезпечення граничних умов, які можна звести до наступних:

а) на межі будь-яких середовищ потенціал незмінний, тобто $\varphi_{(1)} = \varphi_{(2)}$;

б) на межі провідник - провідник

$$\sigma_2 \frac{\partial\varphi_{(2)}}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial\varphi_{(1)}}{\partial n};$$

в) на межі діелектрик - провідник

$$-\frac{\partial\varphi_{(1)}}{\partial\tau} = -\frac{\partial\varphi_{(2)}}{\partial\tau} = E_{\tau(2)} = \frac{\delta}{\sigma_2};$$

$$-\frac{\partial\varphi_{(1)}}{\partial n} = E_{n(1)} = -\frac{\chi}{\varepsilon_{a1}}.$$

Стаціонарне поле в діелектричному середовищі, що не містить зарядів, і провідника з постійним струмом

$$I = \int_S \vec{\delta} dS,$$

описується наступними рівняннями:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0; \operatorname{div}\vec{E} = 0; \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi; \Delta\varphi = 0. \quad (10.2)$$

Рівняння (10.2) збігаються з рівняннями електростатичного поля. Проте граничні умови стаціонарного поля відрізняються від граничних умов для електростатичного поля. У випадку електростатичного поля поверхня

провідника еквіпотенціальна, тобто $E_\tau = 0$. У стаціонарному ж полі дотична складова вектора \vec{E} має ненульове значення в напрямку ліній струму, тобто $E_\tau = \delta / \sigma \neq 0$, і електричні силові лінії відходять від поверхні провідника не по нормалям, як це має місце в електростатичному полі. У силу цього електричне поле постійного струму поза провідником характеризується складовими

$$E_n \neq 0; E_\tau \neq 0.$$

У більшості практичних випадків $E_n \gg E_\tau$ і тому зазвичай наявність поздовжнього поля в навколишньому просторі при розрахунках нехтують. При такому допущенні граничні умови для стаціонарного поля збігаються з умовами для електростатичного поля. Тому при розгляді електричного поля в просторі між провідниками з постійним струмом можна скористатися рішенням відповідних електростатичних задач.

Усередині провідника з постійним струмом напруженість електричного поля не дорівнює нулю; оскільки

$$\vec{E} = \frac{\vec{\delta}}{\sigma},$$

тоді як електростатичне поле в цьому випадку відсутнє ($\vec{E} = 0$).

Магнітне поле, утворюване провідником зі струмом, рис. 10.1, у точці $M(r)$ визначається на основі формули $\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta}$. Так як лінії струму безперервні ($\text{div}\vec{\delta} = 0$), то струм $\vec{\delta}$ постійний у будь-якому перетині провідника, векторний потенціал поля розраховується за формулою:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta}}{r} dV = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \int_L \frac{\vec{\delta}}{r} dS dl = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_L \frac{dl}{r}. \quad (10.3)$$

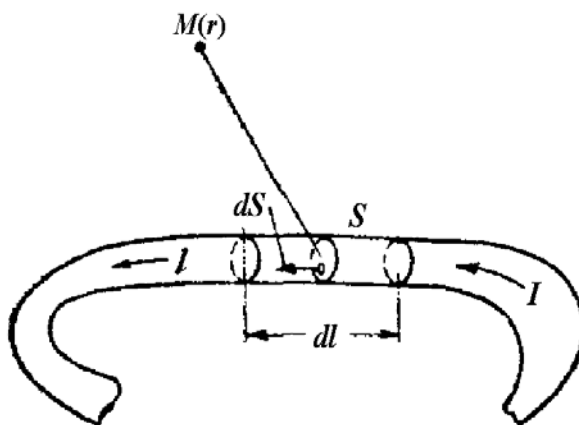


Рис.10.1. Ілюстрація до визначення поля провідника з постійним струмом

Формулу (10.3) використовують для визначення векторного потенціалу поля на великій відстані (у порівнянні з лінійними розмірами поперечного перетину провідника).

Використовуючи співвідношення (10.1), за допомогою формули (10.3) розраховують напруженість магнітного поля провідника з постійним струмом

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \operatorname{rot} \int_L \frac{dl}{r} = \frac{I}{4\pi} \int_L \operatorname{rot} \left(\frac{dl}{r} \right).$$

Інтегрування проводиться по контуру провідника, а диференціювання в тій точці, де визначається напруженість поля.

На підставі формули

$$\operatorname{rot} \left(\frac{dl}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{rot} dl + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{r} dl \right], \quad (10.4)$$

де $\operatorname{rot} dl = 0$, тому що dl не залежить від координат точки, у якій визначається \vec{H} , а

$$\left[\operatorname{grad} \frac{1}{r} dl \right] = -\frac{1}{r^2} [e_r dl] = \frac{1}{r^2} [dle_r], \quad (10.5)$$

де e_r - орт радіуса-вектора.

З урахуванням співвідношень (10.4), (10.5) знаходимо:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[dle_r]}{r^2}. \quad (10.6)$$

Формула (10.6) є інтегральною формою закону Біо-Савара. У диференціальній формі він має наступний вигляд:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2} [dle_r]. \quad (10.7)$$

З виразів (10.6), (10.7) можна зробити висновок, що напрямок вектора \vec{H} збігається з напрямком обертання правого гвинта, якщо його поступальний рух збігається з напрямком вектора dl (або напрямком струму), що ілюструється на рис. 10.2.

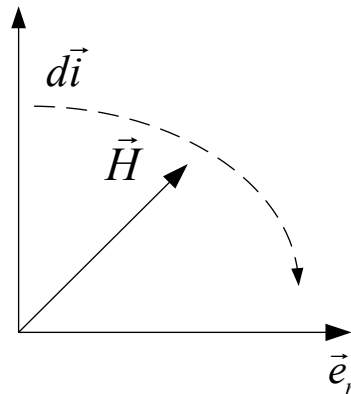


Рис. 10.2. Ілюстрація до визначення напрямку магнітного поля

Якщо густина струму однакова на всьому перетині провідника S , то магнітне поле \vec{H} усередині провідника на відстані r , рис. 10.3, створюється тільки частиною струму, обумовленою співвідношенням

$$I' = \frac{I}{S} \pi r^2.$$

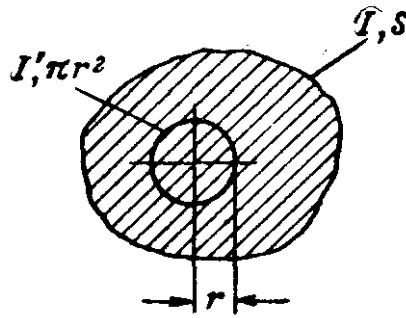


Рис.10.3. Ілюстрація до визначення магнітного поля усередині провідника

Підкреслимо, що магнітне поле усередині провідника має вихровий характер, тому що в цій області $rot\vec{H} = \vec{\delta}$, а поза провідником – потенційний, тому що тут $rot\vec{H} = 0$.

Енергія магнітного поля постійного струму. Власна і взаємна індуктивності.

Енергія магнітного поля в об'ємі V визначається виразом

$$W_m = \int_V \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} dV = \int_V \frac{\vec{H}rot\vec{A}}{2} dV.$$

Здійснюючи перетворення цього співвідношення відповідно до формули

$$div[\vec{A}\vec{H}] = \vec{H}rot\vec{A} - \vec{A}rot\vec{H},$$

отримаємо:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V div[\vec{A}\vec{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{A}rot\vec{H} dV. \quad (10.8)$$

Для окремого контуру з струмом перший доданок у правій частині формули (10.8) дорівнює нулю. Дійсно, відповідно до теореми

$$\int_V div[\vec{A}\vec{H}] dV = \oint_S [\vec{A}\vec{H}] dS,$$

справедливі формули

$$\vec{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint_L \frac{dl}{r};$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{[dle_r]}{r^2};$$

$$dS = e_r 8\pi r dr.$$

При цьому вираз під інтегралом $[\vec{A}\vec{H}] dS$ пропорційний $1/r^2$ і при інтегруванні по поверхні сфери з нескінченно великим радіусом обертається в нуль. Таким чином,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A}rot\vec{H} dV,$$

або, з огляду на рівняння $rot\vec{H} = \vec{\delta}$ і виразу

$$\vec{\delta} dV = \vec{\delta} dS dl,$$

де dS і dl – елементи нормального перетину і довжини контуру з струмом, остаточно одержуємо:

$$W_m = \frac{I}{2} \oint_L \vec{A} dl. \quad (10.9)$$

Використовуючи теорему Стокса, знаходимо, що

$$\oint_L \vec{A} dl = \int_S \text{rot} \vec{A} dS = \oint_S \vec{B} dS = \Phi, \quad (10.10)$$

де Φ – повний магнітний потік, утворюваний струмом, що тече у контурі і пронизує поверхню S , обмежену цим контуром.

Відповідно до формули (10.10) вираз (10.9) можна перетворити до виду:

$$W_m = \frac{I\Phi}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (10.11)$$

оскільки потік Φ пропорційний струму I , що його створює, тобто

$$\Phi = LI.$$

Коефіцієнт пропорційності L між пронизуючим контур магнітним потоком і струмом, що протікає по контуру і створює цей потік, називається коефіцієнтом самоіндукції (індуктивністю контуру).

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (10.12)$$

Вираз (10.12) можна переписати в наступному вигляді:

$$L = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \left\{ \int_L \frac{[dle_r]}{r^2} \right\} dS. \quad (10.13)$$

З виразу (10.13) можна зробити висновок, що індуктивність контуру визначається геометричною формою провідника і магнітною проникністю середовища.

При незмінному значенні сили струму, енергія зростає зі збільшенням індуктивності контуру, а при незмінному значенні магнітного потоку енергія зростає зі зменшенням індуктивності контуру.

Якщо система складається з n замкнутих контурів, рис. 10.4, то, крім власного потоку, через кожний із контурів будуть проходити потоки, утворювані струмами, що протікають в інших контурах.

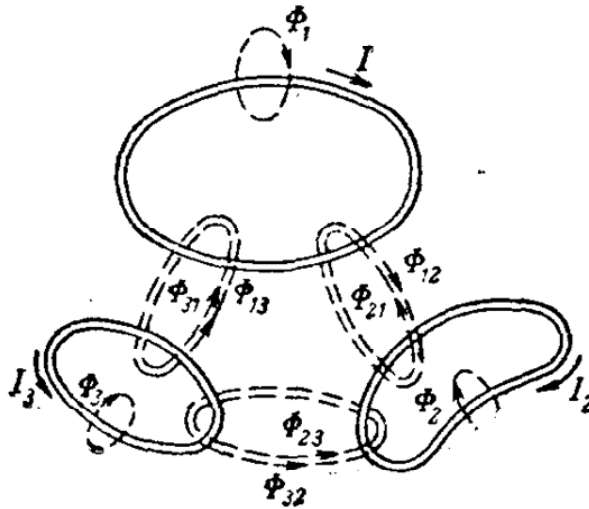


Рис.10.4. Взаємні і власні магнітні потоки контурів

На основі формул (10.9) і (10.11) енергія системи контурів дорівнює:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \oint_{L_i} \vec{A} dl_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i. \quad (10.14)$$

Потік Φ_i , який пронизує i -й контур, лінійно зв'язаний із струмами усіх контурів

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} I_k, \quad (10.15)$$

де $L_{ii} I_i = \Phi_{ii}$ - власний потік i -го контуру;

L_{ii} і I_i - його індуктивність і струм;

$L_{ik} I_k = \Phi_{ik}$ - потік, що пронизує i -й контур і створюваний струмом I_k , що протікає в k -му контурі.

Коефіцієнт пропорційності

$$L_{ik} = \frac{\Phi_{ik}}{I_k}, i \neq k,$$

називається **коефіцієнтом взаємної індукції** або **взаємною індуктивністю**.

Підставляючи вираз (10.15) у (10.14), одержуємо:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} I_k I_i. \quad (10.16)$$

Покажемо, що $L_{ik} = L_{ki}$, де $i \neq k$. Магнітний потік, що пронизує i -й контур і створюваний струмом, що протікає у k -му контурі,

$$\Phi_{ik} = L_{ik} I_k; (i \neq k). \quad (10.17)$$

Водночас

$$\Phi_{ik} = \int_{S_i} \vec{B}_k dS_i = \int_{S_i} \text{rot} A_k dS_i = \oint_{L_i} \vec{A}_k dl,$$

або

$$\Phi_{ik} = \frac{\mu_a I_k}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{dl_k dl_i}{r}, (i \neq k). \quad (10.18)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (10.17) і (10.18), і розв'язавши отримане рівняння відносно індуктивності L_{ik} , отримаємо:

$$L_{ik} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{dl_k dl_i}{r}, (i \neq k). \quad (10.19)$$

Оскільки вираз (10.19) симетричний щодо індексів i і k , то, очевидно,

$$L_{ik} = L_{ki}, (i \neq k);$$

$$\frac{\Phi_{ik}}{\Phi_{ki}} = \frac{I_k}{I_i},$$

що відповідає принципу взаємності. Позначимо коефіцієнт взаємної індукції системи з двох контурів

$$M = L_{12} = L_{21},$$

а коефіцієнт власної індуктивності кожного з цих контурів

$$L_{ii} = L_i, (i = 1, 2).$$

Коефіцієнти індуктивності L і взаємоіндукції M є інтегральними параметрами обмеженої області, у якій локалізоване магнітне поле, утворене струмом, що протікає по розташованому в цій області провіднику.

У окремому випадку відповідно до виразу (10.15) енергія поля двох контурів дорівнює

$$W_m = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} \pm M I_1 I_2. \quad (10.20)$$

Знак плюс перед третім членом правої частини формули (10.20) ставиться у тому випадку, коли магнітні потоки контурів складаються, а знак мінус, коли вони віднімаються (направлені назустріч один одному).

Для котушки з розташованими впритул витками, по яких протікає той самий струм в одному напрямку, вирази (10.12) і (10.16) мають вид:

$$W_m = \frac{w\Phi I}{2} = \frac{LI^2}{2};$$

$$L = \frac{w\Phi}{I} = \frac{\psi}{I},$$

де L - загальна (еквівалентна) індуктивність системи з w витків; Φ - потік, утворений струмом I і пронизуючий усі витки. Величина

$$\psi = w\Phi,$$

називається **потокозчепленням**.

Закон Джоуля-Ленца

Електричне стаціонарне поле всередині однорідного, ізотропного провідного середовища, що не містить сторонніх джерел струму, характеризується рівняннями:

$$\begin{aligned}\vec{\delta} &= \sigma \vec{E}; \\ \operatorname{div} \vec{\delta} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0.\end{aligned}\tag{10.21}$$

Рівняння (10.21) виражають у диференціальній формі відповідно закон Ома, перший і другий закони Кірхгофа.

Електричне поле \vec{E} , яке підтримує струм у провідному середовищі і переміщує об'ємний заряд, робить на ділянці dl роботу

$$\vec{F} dl = \vec{E} \rho dl,\tag{10.22}$$

яка перетворюється в тепло. На підставі формули (10.22) потужність втрат в одиниці об'єму провідного середовища дорівнює

$$p = \vec{E} \rho dl = \vec{E} \rho v - \vec{E} \vec{\delta} = \sigma E^2 = \delta^2 \frac{1}{\sigma},\tag{10.23}$$

де v - середня швидкість руху зарядів у провідному середовищі.

Формула (10.23) виражає в диференціальній формі закон Джоуля-Ленца.

Якщо рівняння (10.21) порівняти з рівняннями, що описують електричне поле в діелектрику, який не містить вільних зарядів: $\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \operatorname{div} \vec{D} = 0; \vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$, а також граничні умови для електростатичного поля з граничними умовами для стаціонарного поля, то можна зробити наступний висновок: рішення задач, пов'язаних з електричним стаціонарним полем в середовищі зі скінченим електричним опором відповідають рішенням задач, пов'язаних з електростатичним полем в діелектричному середовищі, при заміні в останніх \vec{D} на $\vec{\delta}$ і ε_a на σ . Очевидно, вірно й зворотнє, рішення задач, пов'язаних із стаціонарним полем, можна застосовувати до задач статичного поля при заміні $\vec{\delta}$ на \vec{D} і σ на ε_a .

Рішення задач, пов'язаних із магнітостатичним полем, що описується рівняннями $\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \vec{B} = \mu_a \vec{H}$, також можна використовувати для визначення електричного стаціонарного поля при заміні \vec{H} на \vec{E} , \vec{B} на $\vec{\delta}$ і μ_a на σ .

Відповідно до рівнянь (10.21) інтеграл, взятий по замкнутому контуру, що збігається з лінією струму, рис. 10.5 а) для однорідного середовища дорівнює

$$\oint_L \vec{\delta} dl = \sigma \oint_L \vec{E} dl = -\sigma \oint_L \operatorname{grad} \varphi dl.\tag{10.24}$$

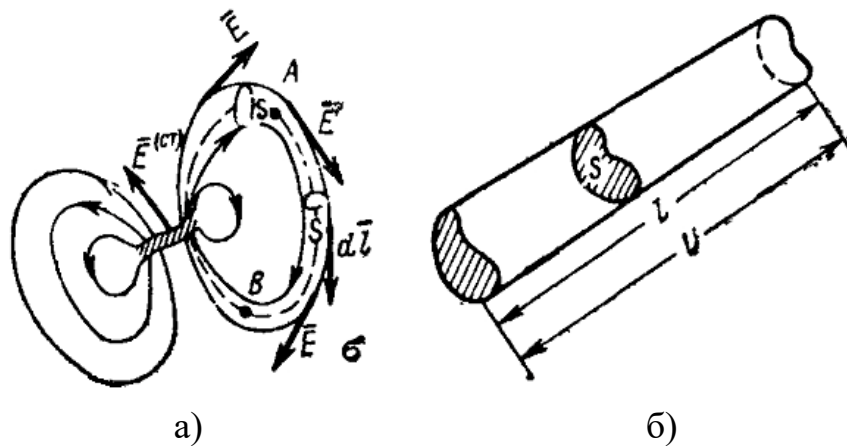


Рис. 10.5. До визначення опору в середовищі (а) і опори провідника скінчених розмірів (б)

Так як інтеграл $\oint_L \vec{E} dl$ по замкнутому контуру дорівнює нулю, із виразу (10.24) можна зробити висновок, що $\vec{\delta} = 0$, інакше кажучи, існування струму при наявності тільки потенційного поля \vec{E} неможливо. У цьому випадку струми можуть існувати тільки при наявності ще і стороннього поля з напруженістю \vec{E}^{cm} . При цьому інтеграл, узятий уздовж струмової трубки, можна представити у вигляді

$$\oint_L \vec{\delta} dl = \sigma \oint_L (\vec{E} + \vec{E}^{cm}) dl,$$

з огляду на те, що $\oint_L \vec{E} dl = 0$, одержуємо:

$$\oint_L \vec{\delta} \frac{dl}{\sigma} = \oint_L \vec{E}^{cm} dl = E, \quad (10.25)$$

де E – електрорушійна сила (ЕРС), яка обумовлена роботою з переміщення одиничного заряду по замкнутому контуру.

З огляду на те, що вектори $\vec{\delta}$ і dl збігаються за напрямком, ліву частину виразу (10.25) можна представити в наступному вигляді:

$$\oint_L \vec{\delta} \frac{dl}{\sigma} = \oint_L \frac{\delta dl}{\sigma} = \oint_L \delta S \frac{dl}{\sigma S} = I \oint_L \frac{dl}{\sigma S} = IR,$$

де S – площа поперечного перерізу достатньо тонкої струмової трубки,

I – струм, що протікає через її електричний опір $R = \int_L \frac{dl}{\sigma S}$.

Отже,

$$IR = E.$$

Якщо інтегрування провадиться не по замкнутому контуру, а на обмеженій ділянці AB , де стороннє поле відсутнє, то

$$\int_A^B \vec{\delta} dl = \int_A^B \sigma \vec{E} dl = -\sigma \int_A^B \text{grad} \varphi dl = \sigma U_{AB},$$

або

$$I = \frac{U_{AB}}{R} = U_{AB} g, \quad (10.26)$$

де $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ - напруга на ділянці AB ,

$$R = \int_A^B \frac{dl}{\sigma S} [Ом] \quad \text{і} \quad g = \frac{1}{R} [См] - \text{електричний опір і провідність ділянки } AB$$

відповідно.

Якщо середовище, яке проводить, є провідником з обмеженими розмірами, рис. 10.5 б), до кінців якого прикладена різниця потенціалів U_{AB} і який оточений діелектриком, то, вважаючи електричне поле однорідним на перерізі S , одержуємо вираз, аналогічний (10.26), де $R = \int_L \frac{dl}{\sigma S}$ - електричний

опір провідника.

Вираз (10.26) є **законом Ома в інтегральній формі**.

Потужність втрат у провіднику

$$P_0 = \int_V \frac{\delta^2}{\sigma} dV = \int_L \frac{\delta^2 S}{\sigma} dl = I^2 \int_L \frac{dl}{\sigma S} = I^2 R. \quad (10.27)$$

Вираз (10.27) є **законом Джоуля-Ленца** в інтегральній формі для провідника. У цьому виразі інтегрування провадиться відповідно по об'єму і довжині провідника. Якщо підставити в нього вираз (10.26), одержимо:

$$P_0 = \frac{U_{AB}^2}{R}.$$

Якщо порівняти вирази $q = CU$ і $I = gU$,

$$\text{де } q = \oint_S \vec{D} dS = - \oint_S \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad I = - \int_S \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

можна зробити висновок, що при заміні ε_a на σ формула ємності переходить у формулу провідності і навпаки.

Цей метод застосовується для визначення електричного опору деяких провідних тіл із скінченими розмірами.

Передавання енергії стаціонарним полем

З рівнянні Максвела для стаціонарного поля випливає, що його магнітне поле соленоїдальне (магнітні силові лінії замкнуті), а електричне – потенційне (електричні силові лінії спираються на заряди). Електромагнітне поле такої структури, що передає енергію у визначеному напрямку, може бути отримане за допомогою двох дротів, що йдуть у цьому напрямку, заряди по яких рухаються в протилежних напрямках. Електричні силові лінії спираються на ці заряди, рис. 10.6.

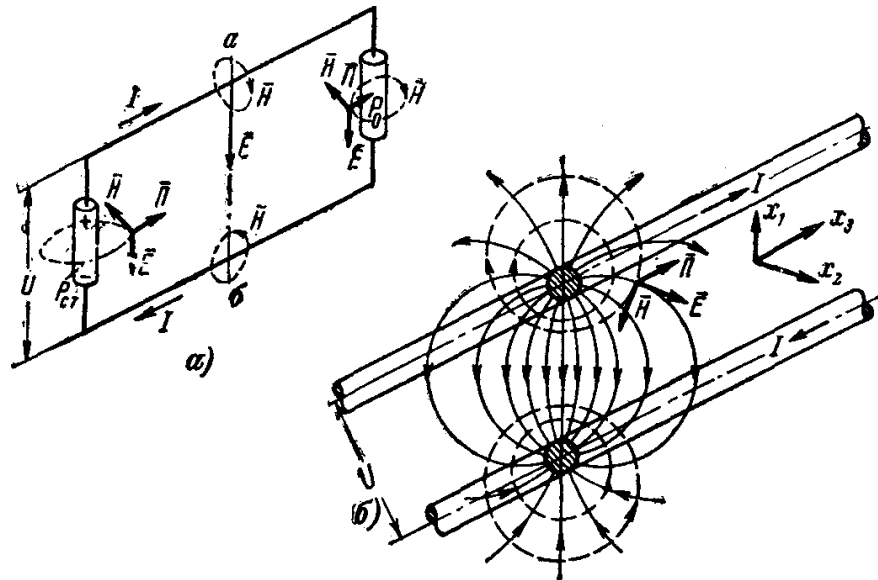


Рис. 10.6. Передача електромагнітної енергії постійним струмом.
а - схема; б - структура поля в перетині *аб*.

Теорема Умова-Пойтінга для стаціонарного поля, де $\partial W / \partial t = 0$, має наступний вигляд:

$$\oint_S [\vec{E}\vec{H}] dS = P^{cm} - \int_V \delta \vec{E} dV. \quad (10.28)$$

Ліва частина виразу (10.28) відповідно до рис. 10.5 може бути записана в наступному виді:

$$P_0 = \oint_S [\vec{E}\vec{H}] dS = UI. \quad (10.29)$$

З формули (10.29) можна зробити висновок, що передану стаціонарним полем потужність можна визначити як добуток різниці потенціалів між дротами на струм у дротах.

У цих розрахунках ми не враховували втрати енергії в дротах, припускаючи, що їхня провідність $\sigma \rightarrow \infty$ і тому на поверхні дротів $E_\tau = 0$. У дійсності ж на поверхні провідника вектор \vec{E} має нормальну і тангенціальну складові, внаслідок чого вектор Пойнтінга розраховується за формулою (див. рис. 10.7):

$$\vec{n} = [\vec{E}\vec{H}] = e_3 E_n H_\tau - e_1 E_\tau H_n. \quad (10.30)$$

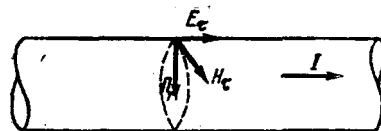


Рис. 10.7. Складові поля в поверхні прямолінійного круглого дроту з струмом

Перший доданок у правій частині формули (10.30) є вектором, направленим уздовж осі дротів, і визначає енергію, яка рухається уздовж провідника від джерела до навантаження. Другий доданок – вектор, направлений усередину провідника, і він визначає енергію, яка поглинається

провідником. Повна потужність, що поглинається кожним провідником на довжині l дорівнює:

$$P_0^1 = \int_S E_\tau H_\tau dS = \int_S \frac{\delta}{\sigma} H_\tau dS, \quad (10.31)$$

де S – площа поверхні провідника довжиною l .

У випадку провідників круглого перерізу і достатньо великій відстані між ними, напруженість магнітного поля поверхні дроту $H_{\tau 2} = I / 2\pi a$. Так як щільність струму $\delta = I / 2\pi a$, то потужність, яка поглинається обома дротами всієї лінії дорівнює

$$P_0^1 = 2 \frac{I^2 l}{\sigma \pi a^2} = I^2 R_n,$$

де R_n - опір обох дротів лінії довжиною l .

Вираз (10.31) є законом Джоуля-Ленца. Отже, виділення тепла струмом є результат проникнення в провідник електромагнітного поля з зовнішнього простору.

Вектори \vec{E} , \vec{H} і $\vec{\Pi}$ у будь-якій точці лінії передачі направлені так, що енергія поширюється уздовж дротів від джерела до навантаження; при цьому передача енергії здійснюється в просторі, який оточує провідники, а не всередині провідників. Проте щільність енергії – найбільша в безпосередній близькості до поверхні провідників, де напруженість електричного і магнітного полів найбільша. У навантаженні вектор Пойнтінга направлений усередину, тобто електромагнітна енергія входить у навантаження, перетворюючись в інший вид енергії. У джерела енергії вектор $\vec{\Pi}$ направлений у зовнішнє середовище. Внаслідок наявності опору провідників на їх поверхні з'являється тангенціальна складова E_τ , тому частина енергії проникає усередину дротів, перетворюючись у тепло.

Потужність, що віддається джерелом (з урахуванням втрат у дротах), відповідно до формули (10.29) дорівнює:

$$m_{01} = UI [Bm].$$

Напруга U вимірюється в джерелі енергії. Потужність, яка поглинається в дротах, визначається формулою (10.31), внаслідок цього корисна потужність у навантаженні дорівнює

$$m_{02} = UI - I^2 R,$$

а ККД лінії передачі постійного струму

$$\eta = \frac{m_{02}}{m_{01}} = 1 - \frac{IR_n}{U},$$

тобто він зростає при збільшенні напруги між провідниками.

Аналогія між полями

Аналогія між електричним полем постійного струму і електростатичним полем

Загальною властивістю електричного поля постійного струму і електростатичного поля є їхня потенційність: $\text{rot}\vec{E} = 0$. Для обох полів

справедливе рівняння Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$, якщо розглянута область електричного поля знаходиться поза джерелами енергії, а область електростатичного поля – поза об'ємним зарядом.

З подібності рівнянь, що описують ці поля, випливає формальна аналогія між відповідними величинами в цих рівняннях і тотожність граничних умов для них при однаковій формі граничних поверхонь. При цьому картини обох полів подібні, що дозволяє електростатичне поле в діелектрику моделювати електричним полем постійного струму в провідному середовищі, і навпаки.

Стаціонарне поле постійного струму	Електростатичне поле
$rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0; E_{1r} = E_{2r};$ $\vec{E} = -grad\varphi; \varphi_1 = \varphi_2;$ $\vec{\delta} = \sigma\vec{E};$ $div\vec{\delta} = \nabla\vec{\delta} = 0; \delta_{1n} = \delta_{2n};$ $\nabla^2\varphi = 0;$ $I;$ $\vec{\delta};$ $\sigma;$ $G.$	$rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0; E_{1r} = E_{2r};$ $\vec{E} = -grad\varphi; \varphi_1 = \varphi_2;$ $\vec{D} = \varepsilon_a\vec{E};$ $div\vec{D} = \nabla\vec{D} = 0; D_{1n} = D_{2n};$ $\nabla^2\varphi = 0;$ $Q;$ $\vec{D};$ $\varepsilon_a = \varepsilon_r\varepsilon_0;$ $C.$

Аналогія між магнітним полем постійного потоку і електростатичним полем

Диференційні рівняння магнітного поля постійного потоку, записані для простору поза струмом, і диференціальні рівняння електростатичного поля у відсутності об'ємних зарядів аналогічні. У цьому випадку застосуємо принцип дуальності. Розрахунок магнітного поля аналогічний розрахунку електростатичного поля, при цьому в рішенні заміняють $\varepsilon\varepsilon_0$ на $\mu\mu_0$, φ на φ_m , \vec{E} на \vec{H} , \vec{D} на \vec{B} .

Магнітне поле постійного потоку	Електростатичне поле
$rot\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = 0; H_{1r} = H_{2r};$ $\vec{H} = -grad\varphi_M; \varphi_{1M} = \varphi_{2M};$ $\vec{B} = \mu_a \vec{H};$ $div\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0;$ $\nabla^2 \vec{A} = \Delta \vec{A} = 0;$ $\vec{H};$ $\vec{B};$ $\varphi_M;$ $\mu_a.$	$rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0; E_{1r} = E_{2r};$ $\vec{E} = -grad\varphi; \varphi_1 = \varphi_2;$ $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E};$ $div\vec{D} = 0(\rho = 0);$ $\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0;$ $\vec{E};$ $\vec{D};$ $\varphi;$ $\epsilon_a.$

Запитання

1. Поясніть чим створюється стаціонарне поле.
2. Визначте основну відмінність у граничних умовах між статичним і стаціонарним полями.
3. Назвіть закон, на основі якого визначається напруженість магнітного поля, створюваного провідником зі струмом.
4. Визначте назву коефіцієнта пропорційності між пронизуючим контур магнітним потоком і струмом, що протікає по контуру і створює цей потік.
5. Охарактеризуйте фізичний зміст параметра взаємної індуктивності.
6. Назвіть структуру електричного і магнітного полів стаціонарного електромагнітного поля.
7. Опишіть структуру пристрою, для передавання електромагнітної енергії на відстань стаціонарним полем.
8. Назвіть умову передавання електромагнітної енергії на відстань без втрат.

Лекція № 11. Основні співвідношення для плоскої електромагнітної хвилі в діелектрику

Рівняння Максвелла для однорідного діелектричного середовища, вільного від сторонніх струмів і зарядів, мають вид:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \quad (11.1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \quad (11.2)$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0; \quad (11.3)$$

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0. \quad (11.4)$$

Припустимо, що вектори \bar{E} і \bar{H} є функціями тільки часу і однієї з декартових координат, наприклад координати z .

Тоді, використовуючи прямокутну систему координат і враховуючи, що $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, отримаємо проєкції векторів \bar{E} і \bar{H} з рівнянь (11.1) і (11.2):

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (11.8)$$

$$\varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0; \quad (11.9)$$

$$\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad (11.10)$$

а з рівнянь (11.3) і (11.4):

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0; \quad (11.11)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (11.12)$$

З рівнянь (11.9) і (11.11) випливає, що E_z не залежить ні від часу, ні від просторових координат. Природно, що таке поле не існує. Тому $E_z = 0$. Аналогічно з рівнянь (11.10) і (11.12) випливає, що $H_z = 0$. Таким чином, електромагнітне поле має лише складові, перпендикулярні осі z .

Розглянемо рівняння (11.5) і (11.7) і відповідно (11.6) і (11.8) для вказаних складових. Для них система рівнянь Максвелла розпадається на дві незалежні системи А і Б, а саме:

Система А

$$\begin{cases} \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}. \end{cases}$$

Система Б

$$\begin{cases} \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}. \end{cases}$$

Рівняння системи А пов'язують складові E_x і H_y , тоді як рівняння системи Б пов'язують складові E_y і H_x електромагнітного поля. Таким чином, ми можемо стверджувати, що взаємозалежними є лише взаємно перпендикулярні складові E і H . Іншими словами, системи А і Б описують два незалежних один від одного поля, в кожному з яких електричний \vec{E} і магнітний \vec{H} вектори взаємно перпендикулярні.

Для подальшого аналізу візьмемо систему А:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial H_y}{\partial z}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Для того, щоб рівняння містило одну невідому, наприклад E_x , продиференціюємо перше рівняння системи по t і підставимо в праву частину значення з другого рівняння, після чого отримаємо

$$\varepsilon_a \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}. \quad (11.13)$$

Помноживши обидві частини рівняння (11.13) на μ_a і позначивши

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}},$$

отримаємо:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (11.14)$$

Рівняння (11.14) відоме за назвою **хвильове рівняння** і використовувалось для опису довгих ліній. Після позначення

$$\xi = \frac{z}{v},$$

отримаємо

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (11.15)$$

Рішенням цього рівняння є довільна функція $F_1(t - \xi)$ або $F_2(t + \xi)$, оскільки обидві вказані функції мають однакові другі похідні по змінним t і ξ . Таким чином

$$E_x = F_1(t - \xi) + F_2(t + \xi),$$

або, враховуючи, що $\xi = \frac{z}{v}$

$$E_x = F_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + F_2\left(t + \frac{z}{v}\right). \quad (11.16)$$

Кожне з двох часткових рішень, що входять до (11.16), є **хвильовою функцією** або хвилею. Справді, розглянемо перше часткове рішення $F_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$.

Візьмемо на вісі z дві довільні точки z_1 і z_2 , нехай $z_1 < z_2$. Значення функції $F_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$ в точках z_1 і z_2 в один и той же момент часу відрізняються, а саме: $F_1\left(t - \frac{z_1}{v}\right)$ і $F_1\left(t - \frac{z_2}{v}\right)$.

Однак якщо, якщо взяти значення функції $F_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$ в точці z_1 , в момент t_1 , а в точці z_2 в інший момент часу t_2 , то t_2 можна обрати таким чином, щоб значення функції в точці z_2 в момент t_2 дорівнювало значенню функції в точці z_1 , в момент t_1 . Для цього необхідно виконання рівності

$$t_2 - \frac{z_2}{v} = t_1 - \frac{z_1}{v},$$

або

$$t_2 - t_1 = \frac{z_2 - z_1}{v}. \quad (11.17)$$

З аналізу рівняння (11.17) можна зробити висновок, що якщо значення координати z_2 більше ніж z_1 , то відповідно $t_2 > t_1$. З отриманої рівності випливає, що значення, яке функція F_1 має в довільній точці z_1 у довільний момент часу t_1 повторюється у більш віддаленій точці z_2 пізніше через проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$, пропорційний відстані $\Delta z = z_2 - z_1$ між цими точками, тобто значення функції F_1 ніби рухаються в додатному напрямі осі z зі швидкістю

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (11.18)$$

Ця властивість функції є підставою для назви її хвильової функцією або хвилею. Поверхня, на якій хвильова функція в заданий момент часу має однакові значення, називається **хвильовою поверхнею**. Ясно, що ця поверхня збігається з поверхнею рівних значень аргументу, або фази хвильової функції. У нашому випадку рівняння хвильової поверхні має вигляд $t = \frac{z}{v} = \text{const}$, звідки можна зробити висновок, що ця поверхня є площиною $z = \text{const}$, яка рухається вздовж вісі z зі швидкістю v , тому така хвиля називається **плоскою**.

Аналізуючи друге часткове рішення рівняння (11.16) $F_2(t + \frac{z}{v})$, можна зробити висновок, що воно відрізняється від першого лише знаком доданку $\frac{z}{v}$, тому друге часткове рішення також є плоскою хвилею, яка рухається зі швидкістю v у від'ємному напрямі вісі z .

Для вирішення системи рівнянь А відносно H_y , продиференціюємо друге рівняння по змінній t . Підставивши значення $\frac{\partial E_x}{\partial t}$ з першого рівняння, отримаємо вираз для H_y аналогічно E_x :

$$H_y = \psi_1(t - \frac{z}{v}) + \psi_2(t + \frac{z}{v}), \quad (11.19)$$

де ψ_1 і ψ_2 — довільні функції.

Для знаходження зв'язку між функціями F і Ψ підставимо (11.16) і (11.19) в перше рівняння системи А, після чого отримаємо:

$$\varepsilon_a F_1'(t - \frac{z}{v}) + \varepsilon_a F_2'(t + \frac{z}{v}) = \frac{1}{v} \Psi_1'(t - \frac{z}{v}) - \frac{1}{v} \Psi_2'(t + \frac{z}{v}).$$

Так як це рівність має виконуватися при будь-яких значеннях t і z , очевидно, можна вважати, що:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a F_1'(t - \frac{z}{v}) &= \frac{1}{v} \Psi_1'(t - \frac{z}{v}); \\ \varepsilon_a F_2'(t + \frac{z}{v}) &= -\frac{1}{v} \Psi_2'(t + \frac{z}{v}). \end{aligned}$$

Звідки

$$\Psi_1(t - \frac{z}{v}) = v \varepsilon_a F_1(t - \frac{z}{v}) = \frac{1}{Z_{xв}} F_1(t - \frac{z}{v}),$$

де $Z_{xв} = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ - хвильовий опір середовища.

Аналогічно

$$\Psi_2(t + \frac{z}{v}) = -\frac{1}{Z_{xв}} F_2(t + \frac{z}{v}).$$

Отже, загальні вирази для проєкцій векторів електричного і магнітного полів мають вид:

$$E_x = F_1(t - \frac{z}{v}) + F_2(t + \frac{z}{v}); \quad (11.20)$$

$$H_y = \frac{1}{Z_{xв}} F_1(t - \frac{z}{v}) - \frac{1}{Z_{xв}} F_2(t + \frac{z}{v}). \quad (11.21)$$

Таким чином, рішення рівнянь Максвелла для випадку, коли \vec{E} і \vec{H} залежать лише від однієї декартової координати z , є накладанням двох плоских хвиль, що рухаються в протилежних напрямках осі z зі швидкістю v . У вакуумі

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \Phi / \text{м}, \mu_a = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{Гн} / \text{м}$. Тому швидкість розповсюдження хвиль дорівнює $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{м} / \text{с}$.

Для середовища швидкість розповсюдження хвиль дорівнює:

$$v = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = c / \sqrt{\varepsilon \mu}.$$

Кожна з розглянутих хвиль є хвилею поперечного типу, так як її електричний і магнітний вектори лежать в площинах, перпендикулярних осі поширення z . Складові E_z і H_z вздовж розповсюдження дорівнюють нулю.

Перші доданки у виразах (11.20), (11.21) описують електромагнітну хвилю, що рухається в додатному напрямку, або так звану пряму хвилю. Другі доданки – електромагнітну хвилю, що рухається у від'ємному напрямку, або зворотну хвилю. З аналізу цих формул можна зробити висновок, що складові електричного і магнітного полів прямої і зворотної хвиль пропорційні один одному і пов'язані співвідношенням

$$\frac{E_{\text{прямої хвилі}}}{H_{\text{прямої хвилі}}} = - \frac{E_{\text{зворотної хвилі}}}{H_{\text{зворотної хвилі}}} = Z_{\text{хв}}. \quad (11.22)$$

З рівняння (11.22) випливає, що як для прямої, так і для зворотної хвилі кількість енергії електричного та магнітного полів є однаковою. Дійсно,

$$\mu_a \frac{H^2}{2} = \mu_a \frac{E^2}{2Z_{\text{хв}}^2} = \varepsilon_a \frac{E^2}{2}. \quad (11.23)$$

На рис. 11.1 а і 11.1 б показана орієнтація векторів \vec{E} і \vec{H} , а також вектора Пойнтінга для прямої і зворотної хвиль. Знак мінус перед співвідношенням E/H в (11.22) для зворотної хвилі свідчить про те, що вектор Пойнтінга направлено в сторону, протилежну осі z .

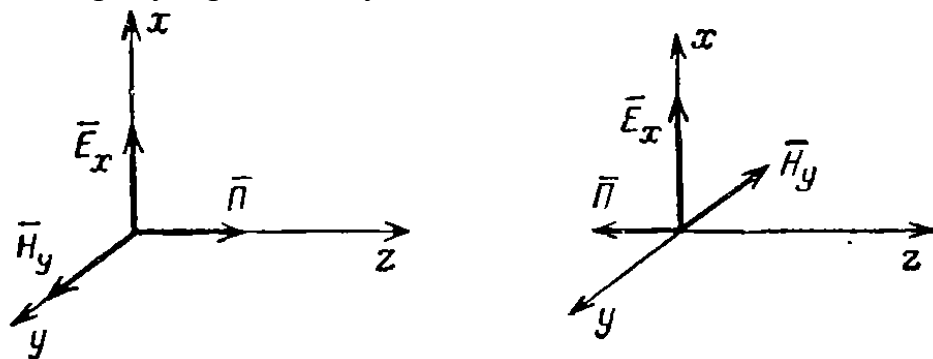


Рис. 11.1. Орієнтація векторів для плоскої хвилі:
а – пряма хвиля; б – зворотна хвиля

Покажемо, що швидкість руху енергії v_e співпадає зі швидкістю хвилевої поверхні v .

Якщо пряма хвиля поширюється в напрямку осі z , то за проміжок часу dt через ділянку S площини, перпендикулярної осі z , пройде кількість енергії dW , яка дорівнює її значенню, укладеної в паралелепіпеді довжиною $v_e \cdot dt$ і перерізом S , тобто

$$dW = \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) v_e dt S,$$

або враховуючи (11.23):

$$dW = \varepsilon_a E^2 v_e dt S. \quad (11.24)$$

З іншого боку, цю величину можна обчислити за допомогою вектора Пойнтінга:

$$dW = I S dt = E H S dt = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} S dt. \quad (11.25)$$

Прирівнявши вирази (11.24) і (11.25), отримаємо

$$v_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = v.$$

Хоча загальне рішення системи рівнянь А представляється у вигляді накладання двох хвиль – прямої і зворотної, у багатьох випадках має місце тільки одна пряма хвиля, що рухається від джерела випромінювання. Зворотна хвиля може існувати, наприклад, тоді, коли середовище, в якому знаходиться джерело поля, обмежене. Поява зворотної хвилі в цьому випадку викликана її відбиттям від межі розділу середовищ. Слід зауважити, що замість термінів «пряма» і «зворотна» хвилі часто застосовують терміни «падаюча» і «відображена» хвилі. Розглянемо окремих випадок прямої (падаючої) хвилі, коли електромагнітне поле в точці $z = 0$ змінюється в часі по гармонічному закону, який в комплексній формі запису має вид $e^{i\omega t}$.

Тоді згідно з формулою (11.21) в довільній точці z поле описується такими формулами:

$$E = E_{nao.m} \cos \omega \left(t - \frac{z}{g} \right) = E_{nao.m} \cos(\omega t - kz);$$

$$H = \frac{E_{nao.m}}{Z_{xg}} \cos \omega \left(t - \frac{z}{g} \right) = \frac{E_{nao.m}}{Z_{xg}} \cos(\omega t - kz),$$

або в комплексній формі

$$E_{\kappa} = E_{nao.m} e^{-ikz} e^{i\omega t}; \quad (11.26)$$

$$H_{\kappa} = \frac{E_{nao.m}}{Z_{xg}} e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad (11.27)$$

де $k = \frac{\omega}{g} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$.

З аналізу формул (11.26), (11.27) можна зробити висновок, що в будь-якій фіксованій точці z складові поля мають незалежні від z амплітуди $E_{nao.m}$ і $H_{nao} = \frac{E_{nao}}{Z_{xg}}$ і різні фази. Зі збільшенням z спостерігається відставання фази на значення kz . Тому коефіцієнт k називають фазовим множником або коефіцієнтом фази. Оскільки цей параметр дорівнює $k = \omega/g = 2\pi/\lambda$, де λ - довжина хвилі, що визначається як відстань, на якій фаза змінюється на 2π , цей параметр також називають хвилевим числом.

На рис. 11.2 показано залежність векторів напруженості електричного E і магнітного H полів від часу у фіксованій точці z , на рис. 11.3 – залежність векторів E і H від координати z у фіксований момент часу. У наступні моменти часу розподіл уздовж осі z буде змінюватися так, ніби криві на рис. 11.3 переміщуються вздовж додатного напрямку осі z зі швидкістю v .

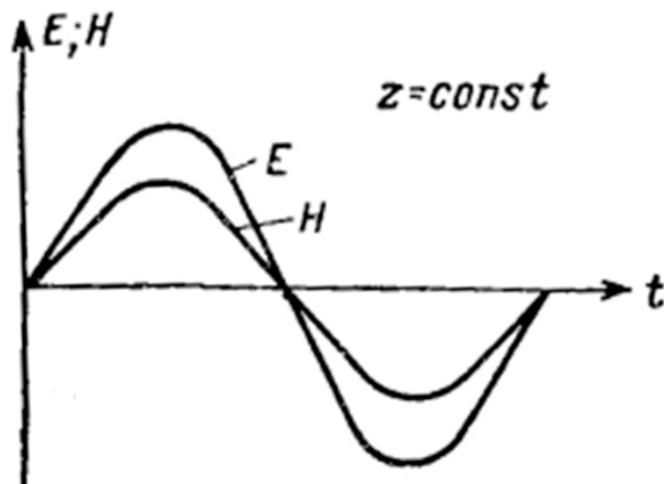


Рис. 11.1. Залежність від часу складових E і H електромагнітного поля у фіксованій точці z

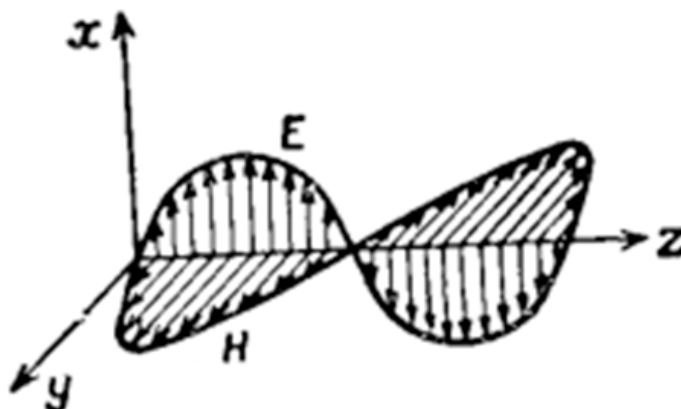


Рис. 11.2. Зміна складових E і H електромагнітного поля уздовж осі z у фіксований момент часу

Електромагнітна хвиля, яка описується виразами (11.26), (11.27), як відомо, називається біжучою хвилею.

Запитання

1. Наведіть значення проєкцій векторів електричної і магнітної індукції на напрям розповсюдження електромагнітної хвилі.
2. Наведіть складові векторів електричної і магнітної індукції, які пов'язані між собою, якщо поле розповсюджується вздовж осі z .
3. Опишіть з яких складових складається рівняння руху плоскої електромагнітної хвилі.
4. Наведіть визначення терміна хвильова поверхня.
5. Наведіть рівняння хвильової поверхні для плоскої хвилі.
6. Поясніть за яких причин виникає зворотна електромагнітна хвиля.

Лекція № 12. Основні співвідношення для плоских хвиль в однорідному середовищі з кінцевою провідністю

Комплексна діелектрична проникність середовища

Оскільки в природі ідеальних діелектриків не існує, будь-яке середовище має деяку провідність. Для провідників, напівпровідників та діелектриків існують певні співвідношення між значеннями струму провідності $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ і струму зміщення $\vec{j}_{зм} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}$. Якщо струм провідності значно перевищує струм зміщення, тобто

$$|\sigma E| \gg \left| \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} \right|,$$

то таке середовище вважається провідником. Навпаки, якщо струм зміщення значно більший струму провідності, тобто

$$\left| \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} \right| \gg |\sigma E|,$$

таке середовище є діелектриком.

У проміжних випадках, коли струми провідності і зміщення мають значення одного порядку, ми будемо називати середовище напівпровідником.

Співвідношення між значеннями струму провідності і струму зміщення визначається не тільки параметрами середовища σ і ε_a , але істотно залежить від того, наскільки швидко електричне поле змінюється в часі.

Розглянемо випадок, коли електромагнітне поле змінюється в часі за гармонічним законом. З цією метою напишемо перше рівняння Максвелла для комплексних амплітуд векторів \vec{E} і \vec{H} в точках, де немає сторонніх джерел:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = (\sigma + j\omega \varepsilon_a) \dot{\vec{E}}. \quad (12.1)$$

Перепишемо далі (12.1) так:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = i\omega \left(\varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\vec{E}},$$

і введемо позначення

$$\varepsilon_k = \varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (12.2)$$

Тоді замість (12.1) будемо мати

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = i\omega \varepsilon_k \dot{\vec{E}}. \quad (12.3)$$

Отримане рівняння дозволяє розглядати будь-яке середовище як діелектрик з комплексною діелектричною проникністю ε_k . Співвідношення між значеннями дійсної частини ε_a і уявної частини σ/ω комплексної діелектричної проникності ε_k даного середовища дозволяє визначити, чи є це середовище провідником, діелектриком або напівпровідником.

Середовище може вважатися провідником, якщо $\sigma \gg \varepsilon_a \omega$, і діелектриком, якщо $\sigma \ll \varepsilon_a \omega$.

Для кожного середовища можливо визначити значення граничної частоти ω_{ep} , при якій амплітуди струмів провідності і зміщення рівні між собою

$$\omega_{ep} = \frac{\sigma}{\varepsilon_a}.$$

На високих частотах ($\omega \gg \omega_{ep}$) в середовищі переважну роль грають струми зміщення. У цьому випадку середовище можна розглядати як діелектрик. Для низьких частот ($\omega \ll \omega_{ep}$) в середовищі переважають струми провідності, тепер уже середовище можна розглядати як провідник. Обчислимо значення ω_{ep} для деяких випадків.

Метал. Розглянемо як приклад мідь. Провідність міді $\sigma = 57 \cdot 10^6 \text{ Сум/м}$. Діелектричну проникність металів виміряти дуже важко і точних даних для неї немає. Однак можна стверджувати, що вона того ж порядку, що і діелектрична проникність повітря. Ми можемо вважати, що $\varepsilon_{a.midi} = (1 \div 10)\varepsilon_0$.

Тоді навіть при $\varepsilon_{midi} = 10$, $\varepsilon_0 = \frac{10}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м}$ отримаємо

$$f_{ep} = \frac{\omega_{ep}}{2\pi} = \frac{57 \cdot 10^6}{\frac{10}{36\pi} 10^{-9}} \approx 10^{17} \text{ Гц},$$

що відповідає довжині хвилі в повітрі $\lambda_0 = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{17}} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$.

У даний час найвищі з використовуваних в радіотехніці частот досягають значень 10^{14} Гц (світлові коливання). Таким чином, для радіотехнічного спектра частот в металах струми провідності у тисячу і більше разів перевищують струми зміщення. Однак для діапазону ультрафіолетових хвиль струмами зміщення в металах знехтувати вже не можна.

Ґрунт. Провідність сухого ґрунту має значення в межах

$$\sigma = 10^{-4} \div 10^{-5} \text{ Сум/м},$$

а діелектрична проникність

$$\varepsilon_a = (2 \div 5)\varepsilon_0.$$

Приймаючи середнє значення

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Сум/м та } \varepsilon_a = 3\varepsilon_0 = \frac{1}{12\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м},$$

отримаємо для сухого ґрунту

$$f_{ep} = \frac{\omega_{ep}}{2\pi} = 3 \cdot 10^5 \text{ Гц},$$

що відповідає

$$\lambda_0 = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 1000 \text{ м}.$$

Для вологого ґрунту можна вважати

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Сум/м} \text{ та } \varepsilon_a = 10\varepsilon_0 \text{ Ф/м.}$$

В цьому випадку отримаємо $f_{ep} \approx 10^7 \text{ Гц}$, що відповідає $\lambda_0 = 30 \text{ м}$.

Вода. Для прісної води можна вважати

$$\sigma = 10^{-3} \text{ Сум/м} \text{ і } \varepsilon_a = 80\varepsilon_0 \text{ Ф/м.}$$

Тоді $f_{ep} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ або $\lambda_0 = 300 \text{ м}$.

Для морської води

$$\sigma = 4 \text{ Сум/м} \text{ і } \varepsilon_a = 80\varepsilon_0 \text{ Ф/м,}$$

відповідно,

$$f_{ep} \approx 9 \cdot 10^8 \text{ Гц} \text{ та } \lambda_0 = 33 \text{ м.}$$

Для узагальнення отриманих співвідношень наведемо систему рівнянь Максвелла для комплексних амплітуд $\dot{\vec{E}}$ і $\dot{\vec{H}}$ електромагнітного поля в точках, де немає сторонніх струмів і зарядів:

$$\begin{cases} \text{rot} \dot{\vec{H}} = (\sigma + j\omega\varepsilon) \dot{\vec{E}} = i\omega\varepsilon_{\kappa} \dot{\vec{E}}; \\ \text{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega\mu \dot{\vec{H}}; \\ \text{div} \dot{\vec{E}} = 0; \\ \text{div} \dot{\vec{H}} = 0. \end{cases} \quad (12.4)$$

Останні два рівняння в системі (12.4) виводяться з першого і другого рівнянь, тому їх можна не розглядати.

Зауважимо, що для полів, які гармонічно змінюються в часі, магнітна проникність середовища за наявності так званих «магнітних» втрат теж може бути описана комплексним значенням. У цьому випадку у другому рівнянні системи (12.4) слід замінити на $\mu_{\kappa} = \mu' - i\mu''$, де μ' і μ'' - дійсна і уявна складові магнітної проникності.

Плоскі хвилі в однорідному середовищі з кінцевою провідністю

З рівнянь Максвелла (12.4) безпосередньо випливає, що гармонічні електромагнітні процеси в будь-якому середовищі умовно можна розглядати як процеси в діелектрику з комплексною діелектричною проникністю (12.2). Тому можна встановити закони поширення плоских хвиль в середовищі з кінцевою провідністю, використовуючи результати, отримані для хвилі в ідеальному діелектрику, замінивши дійсну діелектричну проникність ε_a на комплексну діелектричну проникність ε_{κ} .

Нижче наводяться основні співвідношення для плоскої хвилі у ідеальному діелектрику і у середовищі з кінцевим значенням провідності.

Хвиля в ідеальному діелектрику

Для гармонічної хвилі, яка розповсюджується в додатному напрямку осі z :

$$E_{\kappa} = \dot{E}_{nad} e^{-ikz} e^{i\omega t};$$

$$H_{\kappa} = \frac{\dot{E}_{nad}}{Z_{x\delta}} e^{-ikz} e^{i\omega t},$$

де

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a},$$

$$Z_{x\delta} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}.$$

Хвиля в середовищі з кінцевою провідністю

Для гармонічної хвилі, яка розповсюджується в додатному напрямку осі z :

$$E_{\kappa} = \dot{E}_{nad} e^{-ik'z} e^{i\omega t}; \quad (12.5)$$

$$H_{\kappa} = \frac{\dot{E}_{nad}}{Z'_{x\delta}} e^{-ik'z} e^{i\omega t}, \quad (12.6)$$

де

$$k' = \frac{\omega}{v'} = \omega \sqrt{\epsilon_{\kappa} \mu_a},$$

$$Z'_{x\delta} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_{\kappa}}}.$$

Штрихи над параметрами k , v і $Z_{x\delta}$ означають, що ці параметри є комплексними. З'ясуємо, який фізичний зміст має комплексний параметр до k' . Для цього представимо k' у вигляді

$$k' = \beta - i\alpha, \quad (12.7)$$

де α і β - дійсні числа.

Після підстановки в (12.5) отримаємо

$$E_{\kappa} = \dot{E}_{nad} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}. \quad (12.8)$$

Вираз (12.8) описує гармонічну хвилі, що має амплітуду $\dot{E}_{nad} e^{-\alpha z}$ і фазовий множник β .

У звичайному формі хвиля (12.8) має вид:

$$E = E_{nadm} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).$$

Таким чином, комплексний характер параметра k' означає, що електромагнітна хвиля, рухаючись уздовж осі z , не залишається постійною по амплітуді. Амплітуда хвилі зменшується вздовж напрямку поширення за експоненційним законом. Цей результат є природним, оскільки наявність провідності в середовищі означає, що електромагнітна енергія, яка переноситься хвилею, частково розсіюється у вигляді тепла.

Комплексний фазовий множник (12.7) повністю характеризує рух хвилі. Дійсна частина β в (12.7) має той же зміст, що й фазовий множник k при русі хвилі в діелектрику: вона визначає собою швидкість руху хвильової поверхні

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (12.9)$$

Ця швидкість отримала найменування **фазової швидкості**. Уявна частина α комплексного фазового множника визначає собою затухання амплітуди хвилі і носить назву **коефіцієнта затухання**.

Комплексне хвильовий опір $Z'_{x\delta}$, що зв'язує амплітуди напруженості електричного і магнітного полів, може бути представлено у вигляді

$$Z'_{x\delta} = Z_{x\delta} e^{i\varphi}, \quad (12.10)$$

де $Z_{x\delta}$ - модуль, а φ - аргумент комплексного хвильового опору.

Підставляючи значення (12.10) і (12.7) в (12.6), отримаємо

$$H_{\kappa} = \frac{\dot{E}_{nad}}{Z_{x\delta}} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{i(\omega t - \varphi)},$$

або для миттєвих значень

$$H = \frac{E_{nadm}}{Z_{x\delta}} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi). \quad (12.11)$$

З аналізу формули (12.11) можна зробити висновок, що амплітуда напруженості магнітного поля пропорційна амплітуді напруженості електричного поля

$$\frac{E_{nadm}}{H_{nadm}} = \frac{E_{nadm} e^{-\alpha z}}{\frac{E_{nadm}}{Z_{x\delta}} e^{-\alpha z}} = Z_{x\delta}.$$

У часі напруженості електричного і магнітного полів зміщені по фазі на кут, який дорівнює аргументу комплексного хвильового опору.

Знайдемо тепер значення коефіцієнта загасання α , фазового множника β , фазової швидкості v_{ϕ} , а також значення модуля й аргументу комплексного хвильового опору $Z'_{x\delta}$.

Для визначення β та α маємо

$$\omega \sqrt{\varepsilon_{\kappa} \mu_a} = \beta - i\alpha = \omega \sqrt{(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}) \mu_a}. \quad (12.12)$$

Підводячи обидві сторони рівняння (12.12) в квадрат і прирівнюючи дійсні та уявні частини, отримаємо:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a; \quad (12.13)$$

$$2\beta\alpha = \omega\sigma\mu_a. \quad (12.14)$$

З іншого боку, прирівнюючи квадрати модулів того ж рівняння, матимемо

$$\beta^2 + \alpha^2 = \omega^2 \mu_a \sqrt{\varepsilon_a^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}. \quad (12.15)$$

Складаючи і віднімаючи вирази (12.13) і (12.15), знаходимо, що

$$\beta^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_a^2 \omega^2}} \right]; \quad (12.16)$$

$$\alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_a^2 \omega^2}} \right]. \quad (12.17)$$

Для фазової швидкості v_ϕ з виразу (12.14) маємо

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\alpha}{\mu_a \sigma}. \quad (12.18)$$

Далі, хвильовий опір середовища дорівнює

$$Z'_{xв} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \frac{\mu_a \omega}{k'} = \frac{\mu_a \omega}{\beta - i\alpha}.$$

Представляючи $Z'_{xв} = Z_{xв} e^{j\varphi}$ на основі (12.15)-(12.17) маємо:

$$Z_{xв} = \frac{\mu_a \omega}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \sqrt{\frac{\mu_a^2}{\epsilon_a^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}}; \quad (12.19)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \text{arctg} \left[\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_a^2 \omega^2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_a^2 \omega^2}}} \right]. \quad (12.20)$$

Розглянемо два окремих випадки.

1. Нехай середовище є неідеальним діелектриком, тобто $\frac{\sigma}{\epsilon_a \omega} \ll 1$.

Тоді з формул (12.16)-(12.20) отримаємо

$$\alpha^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_a^2 \omega^2} \right) \right] \approx \frac{\sigma^2 \mu_a}{4\epsilon_a}. \quad (12.21)$$

або

$$\begin{aligned} \beta &\approx \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}; \\ \alpha &\approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}; \end{aligned} \quad (12.22)$$

$$v_\phi = \frac{2\alpha}{\mu \sigma} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = v. \quad (12.23)$$

Хвильовий опір

$$Z_{xв} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}; \quad (12.24)$$

$$\varphi \approx 0. \quad (12.25)$$

Таким чином, в середовищі з малою провідністю наближений розрахунок хвильового опору, фазового множника і фазової швидкості дає ті ж результати, що і для діелектрика без втрат. Затухання α не залежить від частоти і пропорційне як провідності середовища σ , так і хвильовому опору $Z_{xв}$.

2. Середовище є провідником, тобто $\frac{\sigma}{\varepsilon_a \omega} \gg 1$.

У цьому випадку із формул (12.16)-(12.20), отримаємо:

$$\beta \approx \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_a}{2}}; \quad (12.26)$$

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_a}{2}}; \quad (12.27)$$

$$v_\phi = \frac{2\alpha}{\mu_a \sigma} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}}; \quad (12.28)$$

$$Z_{x\phi} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}}; \quad (12.29)$$

$$\varphi \approx \arctg 1 = \frac{\pi}{4}. \quad (12.30)$$

У добре провідному середовищі фазовий множник і коефіцієнт затухання чисельно дорівнюють один одному.

Як видно з отриманих формул, загасання хвилі в цьому випадку відносно велике, особливо на високих частотах. Фазова швидкість дуже мала. Відповідно малим виходить і значення довжини хвилі

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f}.$$

Для провідного середовища також характерне мале значення хвильового опору. Це вказує на те, що в провіднику переважне значення має магнітне поле.

Так як між напруженістю електричного і магнітного полів існує зсув фаз, рівний $\pi/4$, то середнє за період значення вектора Пойнтінга дорівнює

$$P_{cp} = \frac{1}{2} E_m H_m \cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}} E_m H_m,$$

з врахуванням

$$E_m = H_m Z_{x\phi} = H_m \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}},$$

отримаємо

$$P_{cp} = \frac{H_m^2}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}}.$$

Проілюструємо отримані співвідношення на прикладі. Розглянемо поширення хвилі в міді при частоті $f = 10^8 \text{ Гц}$ (довжина хвилі у вакуумі $\lambda = 3 \text{ м}$).

Беручи значення провідності $\sigma = 57 \cdot 10^6 \text{ Сум/м}$ і $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$, отримаємо

$$\alpha = \sqrt{57 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 10^8} \approx 15 \cdot 10^4 \text{ Нн/м}.$$

або

$$\alpha \approx 130 \cdot 10^4 \text{ Дб/м.}$$

Модуль хвильового опору

$$Z_{xв} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{57 \cdot 10^6}} \approx 0,0037 \text{ Ом},$$

замість 377 Ом для вакууму (чи повітря).

Відношення між максимальними щільностями енергії магнітного та електричного полів дорівнює

$$\frac{w_M}{w_E} = \frac{\mu H_m^2}{\varepsilon E_m^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{1}{Z_{xв}^2}.$$

Так як для міді

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \leq (120\pi)^2 (\text{Ом})^2,$$

то в розглянутому прикладі

$$\frac{w_M}{w_E} \approx 33 \cdot 10^6,$$

тобто практично вся енергія зосереджена в магнітному полі.

Фазова швидкість

$$v_\phi = \frac{2\alpha}{\mu_a \sigma} = \frac{2 \cdot 14,5 \cdot 10^3}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 57 \cdot 10^6} \approx 400 \text{ м/сек},$$

що відповідає довжині хвилі в металі 0.04 см.

У загальному випадку напівпровідного середовища для розрахунку фазової швидкості, коефіцієнта загасання і хвильового опору слід користуватися загальними формулами (12.16)-(12.20).

1. Опишіть складові комплексної діелектричної проникності.
2. Вкажіть властивості середовища на частотах, значно менших граничної частоти.
3. Вкажіть рівняння якого середовища використовуються для опису процесів з комплексною діелектричною проникністю.
4. Поясніть зміни з параметрами хвилі відбулись при заміні звичайної діелектричної проникності на комплексну.
5. Вкажіть на які формули подібні наближені розрахунки хвильового опору, фазового множника і фазової швидкості.
6. Вкажіть тип поля, у яком зосереджена більша частина енергії у середовищі з провідними властивостями.

Лекція № 13. Поляризація і відбивання плоских хвиль від межі розділу середовищ

Поляризація плоских хвиль

Електромагнітне поле з векторами \vec{E} і \vec{H} , напрям яких може бути визначено в будь-який момент часу, називається *поляризованим*. Якщо ж напрям вектора \vec{E} , і відповідно вектора \vec{H} , змінюється в просторі довільно, поле є *неполяризованим*.

Найпростішим прикладом поляризованого електромагнітного поля є поле плоскої хвилі. Площина, яка проходить через напрям поширення цієї хвилі і вектор \vec{E} , називається *площиною поляризації* (слід зауважити, що поле плоскої хвилі не завжди є поляризованим). Якщо положення площини поляризації щодо деякої нерухомої системи координат залишається незмінним, плоска хвиля має *лінійну поляризацію*. У цьому випадку вектор \vec{E} завжди паралельний до деякої фіксованої осі, наприклад осі x прямокутної системи координат. Однак лінійна поляризація не є єдиним типом поляризації плоскої хвилі в режимі гармонічних коливань.

Нехай вздовж осі z поширюються дві плоскі хвилі з векторами електричного поля:

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_1 \cos(\omega t - \beta z) \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_y E_2 \cos(\omega t - \beta z - \varphi), \quad (13.1)$$

де φ - кут фазового зсуву між ними.

Сукупність цих хвиль можна розглядати як одну плоску хвилю з більш складною поляризаційною структурою. Вектор напруженості електричного поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ сумарної хвилі має дві проекції E_x і E_y , причому в площині $z = 0$,
рис. 13.1

$$E_x = E_1 \cos \omega t; \quad E_y = E_2 \cos(\omega t - \varphi). \quad (13.2)$$

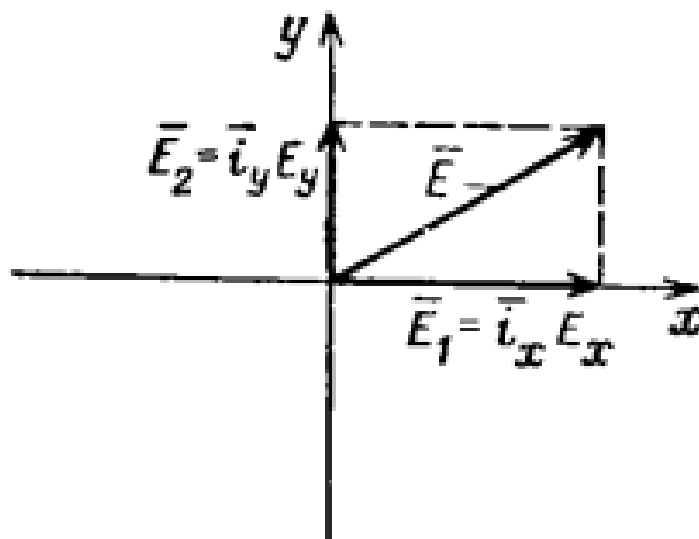


Рис.13.1. Вектор напруженості електричного поля сумарної хвилі в площині $z=0$

З'ясуємо поведінку вектора \vec{E} в часі. Враховуючи, що $\frac{E_x}{E_1} = \cos \omega t$ і

$\frac{E_y}{E_2} = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$, матимемо:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (13.3)$$

Рівняння (13.3) є рівнянням еліпса, повернутого відносно координат x і y на певний кут, рис. 13.2. Цей еліпс є геометричним місцем точок, в яких знаходиться кінець вектора \vec{E} в різні моменти часу, тобто еліпс (13.3) є годографом вектора \vec{E} в площині $z = 0$ або будь-якій іншій площині $z = \text{const}$.

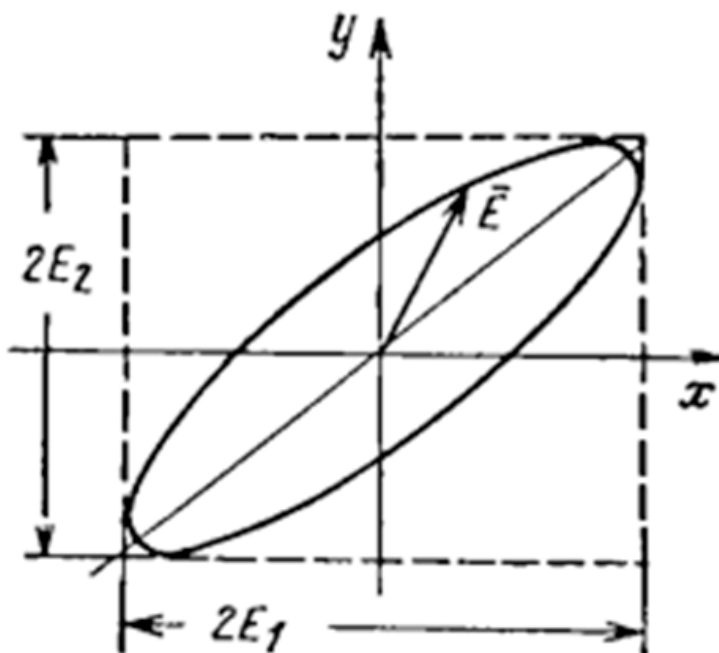


Рис. 13.2. Ілюстрація до визначення хвилі з еліптичною поляризацією

Таким чином, вектор \vec{E} обертається в площині $z = \text{const}$, здійснюючи один оберт за час $T = 2\pi/\omega$, протягом якого його значення весь час змінюється. Аналогічний висновок стосується вектора \vec{H} , оскільки в будь-який момент часу він перпендикулярний вектору \vec{E} .

Електромагнітна хвиля подібного типу називається хвилею з **еліптичною поляризацією** або еліптично поляризованою хвилею, а еліпс, описуваний кінцем вектора \vec{E} , називається еліпсом поляризації. Площина поляризації такої хвилі безперервно обертається в просторі, причому напрямок обертання залежить від знаку кута φ .

Розрізняють хвилі з правим і лівим напрямками обертання. У першому випадку площину поляризації та вектори поля щодо спостерігача, який дивиться у напрямку розповсюдження хвилі, обертаються за годинниковою стрілкою, а в другому – у зворотному напрямку.

Розглянемо можливі окремі випадки поляризації плоскої хвилі, що визначаються з рівняння (13.3).

Нехай фазовий зсув дорівнює нулю, $\varphi = 0$. У цьому випадку рівняння (13.3) має такий вид:

$$\frac{E_x}{E_1} - \frac{E_y}{E_2} = 0,$$

звідки випливає, що

$$E_y = \frac{E_2}{E_1} E_x; -E_1 \leq E_x \leq E_1. \quad (13.4)$$

Останній вираз є рівнянням відрізка прямої (рис. 13.3, а), тому при $\varphi = 0$ еліптично поляризована хвиля перетворюється в хвилю лінійно-поляризовану. Кут нахилу площини поляризації такої хвилі до площини $y = 0$, як випливає з (13.4), дорівнює $\psi = \arctg\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$.

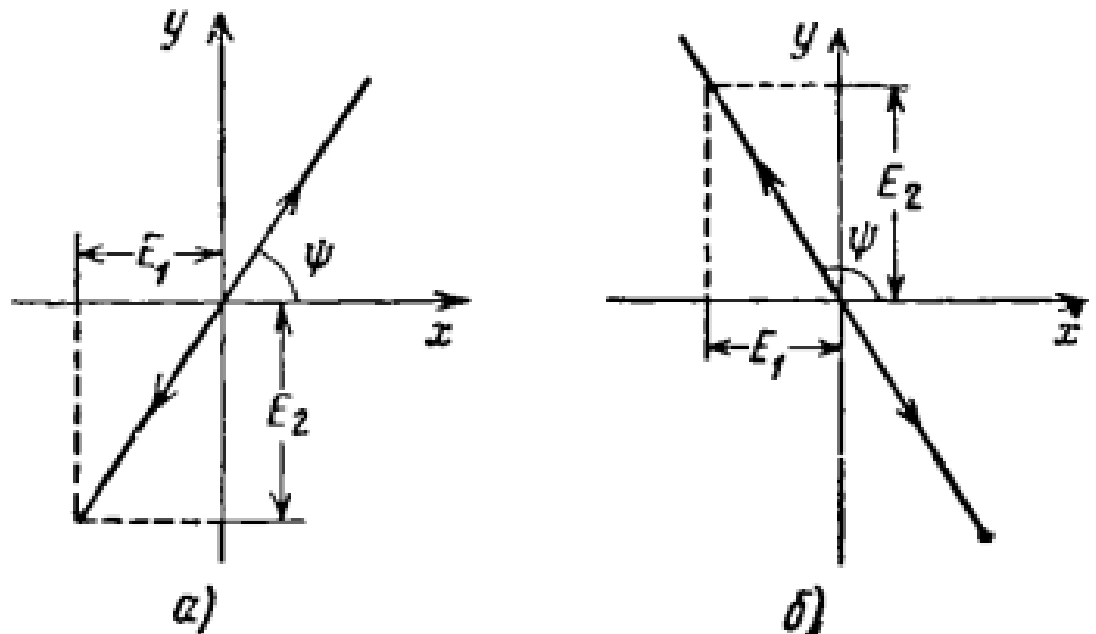


Рис. 13.3. Ілюстрація до визначення лінійно-поляризованої хвилі

Якщо фазовий зсув дорівнює $\varphi = \pm\pi$, то хвиля також матиме лінійну поляризацію:

$$E_y = -\frac{E_2}{E_1} E_x; -E_1 \leq E_x \leq E_1. \quad (13.5)$$

Однак в даному випадку площина поляризації має інший кут нахилу, що показано на рис. 13.3, б:

$$\psi = -\arctg\left(\frac{E_2}{E_1}\right).$$

Зрозуміло, що хвиля з лінійною поляризацією є граничним випадком еліптично поляризованої хвилі, коли довжина меншої півосі еліпса дорівнює нулю.

Якщо вважати, що $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ а $E_1 = E_2 = E$, рівняння (13.3) перетворюється в рівняння кола

$$E_x^2 + E_y^2 = E^2, \quad (13.6)$$

тому годографом вектора E в площині $z = 0$ є коло.

На рис. 13.4, *a* і *б* зображені графіки рівняння (13.6) і вказані напрямки обертання вектора \vec{E} при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ відповідно.

Електромагнітна хвиля, яка характеризується рівнянням (13.6), називається хвилею з **круговою поляризацією**. При русі цієї хвилі уздовж осі z кінці векторів \vec{E} і \vec{H} описують в просторі гвинтові лінії.

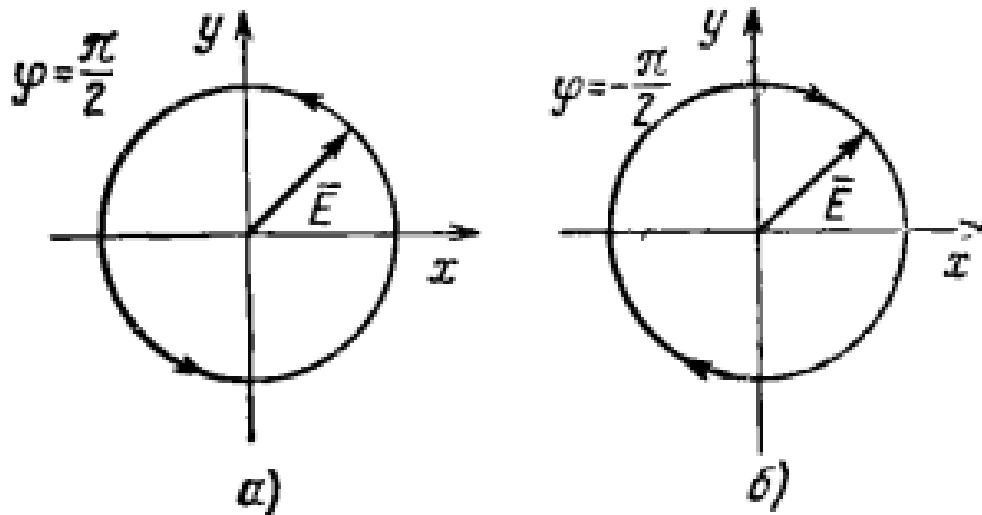


Рис. 13.4. Ілюстрація до визначення кругової поляризації

Якщо фазовий кут φ , як і в попередньому випадку дорівнює $\pm \frac{\pi}{2}$, однак $E_1 \neq E_2$, рівняння (13.3) має вид

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1.$$

Таким чином, знову утворюється еліпс. Його осі збігаються з осями прямокутної системи координат.

Відбивання плоских хвиль при нормальному падінні

Розглянемо плоску хвилю, що рухається в від'ємному напрямку осі y , яка перпендикулярна до площини, що розділяє два середовища з різними фізичними параметрами, рис. 13.5.

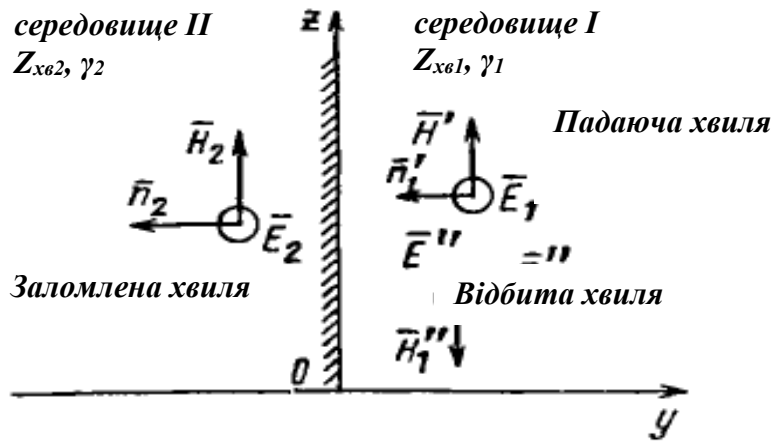


Рис. 13.5. Орієнтація векторів падаючої, відбитої і переломленої хвиль при нормальному падінні

Якщо обидва середовища мають однакові параметри, існує тільки падаюча плоска хвиля. Комплексну амплітуду вектора \vec{E} цієї хвилі представимо у вигляді

$$\dot{E} = \dot{E}_{nad} e^{\gamma_1 y},$$

де $\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ - коефіцієнт розповсюдження хвилі.

Аналогічно

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_{nad}}{Z'_{x\epsilon 1}} e^{\gamma_1 y}.$$

Так як параметри другого середовища відмінні від параметрів першого, то в площині $y = 0$ відбувається відбивання, і в першому середовищі виникає відбита хвиля, яка рухається уздовж осі y . Результуюче поле в першому середовищі має вид:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{nad} e^{\gamma_1 y} + \dot{E}_{vidb} e^{-\gamma_1 y}; \quad (13.7)$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_{nad}}{Z'_{x\epsilon 1}} e^{\gamma_1 y} - \frac{\dot{E}_{vidb}}{Z'_{x\epsilon 1}} e^{-\gamma_1 y}. \quad (13.8)$$

З аналізу формул (13.7) і (13.8) можна зробити висновок, що значення E_{nad} і E_{vidb} є амплітудами падаючої та відбитої хвиль у площині розділу двох середовищ.

У іншому середовищі є тільки одна заломлена (біжуча) хвиля, що рухається у від'ємному напрямку осі y :

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_{np} e^{\gamma_2 y} = \dot{E}_0 e^{\gamma_2 y}; \quad (13.9)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\dot{E}_{np}}{Z'_{x\epsilon 2}} e^{\gamma_2 y} = \frac{\dot{E}_0}{Z'_{x\epsilon 2}} e^{\gamma_2 y} = \dot{H}_0 e^{\gamma_2 y}, \quad (13.10)$$

де \dot{E}_0 і \dot{H}_0 - комплексні амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів на межі розділу середовищ.

Так як в розглянутому випадку вектори \vec{E} і \vec{H} паралельні площині розділу, то в силу граничних умов для тангенціальних складових векторів напруженості електричного і магнітного полів маємо:

$$\begin{cases} \dot{E}_1|_{y=0} = \dot{E}_2|_{y=0}; \\ \dot{H}_1|_{y=0} = \dot{H}_2|_{y=0}. \end{cases} \quad (13.11)$$

або, як наслідок,

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{H}_1}|_{y=0} = \frac{\dot{E}_2}{\dot{H}_2}|_{y=0} = Z_{x\delta 2}. \quad (13.12)$$

Рівняння (13.11) і (13.12) абсолютно аналогічні рівнянням для хвиль струму і напруги в довгих лініях. Дійсно, напруга і струм в точках першої ділянки довгої лінії, показаної на рис. 13.6, визначаються виразами:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{nad} e^{\gamma_{л1} y} + \dot{U}_{відб} e^{-\gamma_{л1} y}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_{nad}}{Z_{л1}} e^{\gamma_{л1} y} - \frac{\dot{U}_{відб}}{Z_{л1}} e^{-\gamma_{л1} y}, \end{aligned}$$

де $Z_{л1}$ - хвильовий опір першої лінії,

$\gamma_{л1}$ - коефіцієнт розповсюдження.

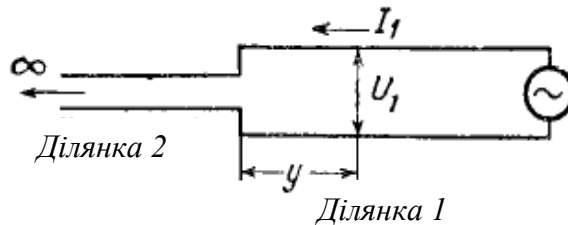


Рис. 13.6. З'єднання довгих ліній, еквівалентне випадку, зображеному на рис. 13.5

Точно так само для напруги і струму в точках другої ділянки лінії нескінченної довжини маємо

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_0 e^{\gamma_2 y}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}_0}{Z_{x\delta 2}} e^{\gamma_2 y}, \end{aligned}$$

де $Z_{x\delta 2}$ - хвильовий опір;

γ_2 - коефіцієнт розповсюдження другої лінії.

Таким чином, площина розділу двох середовищ аналогічна місцю з'єднання двох довгих ліній. Щоб знайти амплітуди полів в першому і другому середовищах, використовуємо граничні умови. З (13.11) маємо:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{nad} + \dot{E}_{відб} &= \dot{E}_0; \\ \frac{1}{Z'_{x\delta 1}} (\dot{E}_{nad} - \dot{E}_{відб}) &= \frac{\dot{E}_0}{Z'_{x\delta 2}}, \end{aligned}$$

звідки

$$\dot{E}_{nad} = \frac{\dot{E}_0}{2} \left(1 + \frac{Z'_{x\delta 1}}{Z'_{x\delta 2}} \right); \quad (13.13)$$

$$\dot{E}_{\text{відб}} = \frac{\dot{E}_0}{2} \left(1 - \frac{Z'_{x\epsilon 1}}{Z'_{x\epsilon 2}} \right). \quad (13.14)$$

Підставляючи значення $\dot{E}_{\text{над}}$ і $\dot{E}_{\text{відб}}$ в (13.7) і (13.8), отримаємо:

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{E}_0}{2} \left(1 + \frac{Z'_{x\epsilon 1}}{Z'_{x\epsilon 2}} \right) e^{\gamma_1 y} + \frac{\dot{E}_0}{2} \left(1 - \frac{Z'_{x\epsilon 1}}{Z'_{x\epsilon 2}} \right) e^{-\gamma_1 y}; \quad (13.15)$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_0}{2Z'_{x\epsilon 1}} \left(1 + \frac{Z'_{x\epsilon 1}}{Z'_{x\epsilon 2}} \right) e^{\gamma_1 y} - \frac{\dot{E}_0}{2Z'_{x\epsilon 1}} \left(1 - \frac{Z'_{x\epsilon 1}}{Z'_{x\epsilon 2}} \right) e^{-\gamma_1 y}. \quad (13.16)$$

Рівняння (13.9), (13.10), (13.15) і (13.16) дають можливість обчислити поле в будь-якій точці простору, якщо відомі значення E_0 або H_0 електричного або магнітного полів на межі розділу середовищ.

Рівнянням (13.15) і (13.16) можна надати форму, звичайну для рівнянь довгої лінії, зробивши такі заміни

$$e^{\gamma_1 y} = ch\gamma_1 y + sh\gamma_1 y; \quad e^{-\gamma_1 y} = ch\gamma_1 y - sh\gamma_1 y,$$

і групуючи члени при $ch\gamma_1 y$ і $sh\gamma_1 y$, отримаємо:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_0 \left(ch\gamma_1 y + \frac{Z'_{x\epsilon 1}}{Z'_{x\epsilon 2}} sh\gamma_1 y \right); \quad (13.17)$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_0}{Z'_{x\epsilon 1}} \left(ch\gamma_1 y - \frac{Z'_{x\epsilon 2}}{Z'_{x\epsilon 1}} sh\gamma_1 y \right). \quad (13.18)$$

Введемо тепер поняття про коефіцієнт відбивання $n_{\text{відб}}$ і про коефіцієнт проходження або заломлення $n_{\text{зал}}$.

Коефіцієнтом відбивання $n_{\text{відб}}$ є відношення комплексної амплітуди електричного поля відбитої хвилі до комплексної амплітуди електричного поля падаючої хвилі на поверхні розділу середовищ:

$$n_{\text{відб}} = \frac{\dot{E}_{\text{відб}}}{\dot{E}_{\text{над}}},$$

або, на основі (13.13) і (13.14),

$$n_{\text{відб}} = \frac{Z'_{x\epsilon 2} - Z'_{x\epsilon 1}}{Z'_{x\epsilon 2} + Z'_{x\epsilon 1}}, \quad (13.19)$$

Коефіцієнтом проходження або заломлення назвемо відношення комплексної амплітуди електричного поля хвилі, що пройшла в інше середовище, до комплексної амплітуди поля падаючої хвилі на межі розділу двох середовищ:

$$n_{\text{зал}} = \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{\dot{E}_{\text{над}}} = \frac{\dot{E}_0}{\dot{E}_{\text{над}}},$$

або із (13.13)

$$n_{\text{зал}} = \frac{2Z'_{x\epsilon 2}}{Z'_{x\epsilon 2} + Z'_{x\epsilon 1}}. \quad (13.20)$$

Вирази (13.15) і (13.16) для складових електричного і магнітного полів в першому середовищі через коефіцієнт відбивання можна представити у виді:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{nad} e^{\gamma_1 y} (1 + n_{відб} e^{-2\gamma_1 y}); \quad (13.21)$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_{nad}}{Z'_{xв1}} e^{\gamma_1 y} (1 - n_{відб} e^{-2\gamma_1 y}). \quad (13.22)$$

Якщо хвильовий опір іншого середовища дорівнює хвильовому опору першого середовища ($Z'_{xв2} = Z'_{xв1}$), то

$$n_{відб} = 0 \text{ і } n_{зал} = 1.$$

Відбита хвиля в цьому випадку відсутня, і весь потік енергії переходить з першого середовища в друге. У першому середовищі згідно з (13.21) і (13.22) існує тільки пряма, падаюча хвиля, безперервно переходить у друге середовище. Таким чином, чисто падаюча хвиля може існувати не тільки в однорідному середовищі, але і в різних середовищах, що мають однакові хвильові опори. У подібних випадках кажуть, що обидва середовища узгоджені одне з одним.

Запитання

1. Дайте визначення поляризованого електромагнітного поля.
2. Наведіть відомі Вам типи поляризації.
3. Дайте визначення терміну «площина поляризації».
4. Визначте положення вектора напруженості електричного поля при лінійній поляризації.
5. Опишіть відмінність між круговим і еліптичним типами поляризації.
6. Наведіть параметр електромагнітної хвилі, який визначає тип її поляризації.
7. Поясніть механізм утворення поляризованого електромагнітного випромінювання.
8. Наведіть аналогію, якою можна користуватись при визначенні параметрів відбитих і заломлених електромагнітних хвиль на межі розділу двох середовищ.

Лекція № 14. Відбивання плоских хвиль, що рухаються у довільному напрямку, від межі розділу середовищ

В попередній лекції, при визначенні параметрів відбитої і заломленої хвиль, напрям руху хвилі співпадав з однією віссю координат. Розглянемо випадок розповсюдження хвилі в довільному напрямку. На рис. 14.1 плоска хвиля рухається у напрямку, який утворює з осями координат кути, косинуси яких дорівнюють l , m і n . Позначаючи через \vec{n}_0 орт нормалі до хвильової поверхні, отримаємо:

$$l = \cos(\vec{n}_0, x); m = \cos(\vec{n}_0, y) \text{ і } n = \cos(\vec{n}_0, z).$$

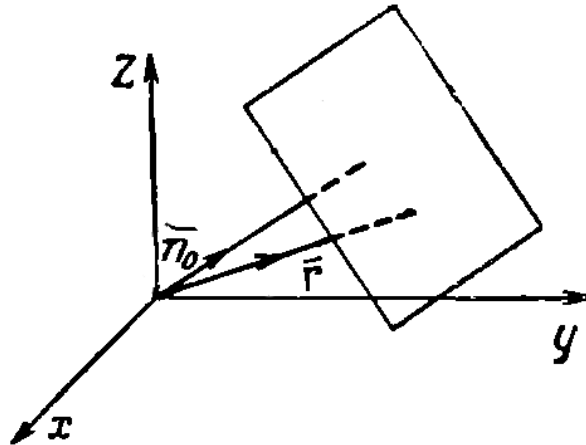


Рис. 14.1. Ілюстрація до розрахунку параметрів рівняння хвилі, яка рухається в довільному напрямку

Будь-яка складова вектора напруженості поля плоскої хвилі, яка рухається в напрямку \vec{n}_0 , описується таким рівнянням

$$A = A_0 e^{-\gamma r}.$$

де γ – коефіцієнт розповсюдження,

r – відстань від початку координат до хвильової поверхні.

Розглянемо радіус-вектор, початок якого збігається з початком системи координат, а кінець – з довільною точкою на хвильовій поверхні:

$$r = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z.$$

Проектуючи цей вектор на напрям нормалі \vec{n}_0 , отримаємо:

$$r = \vec{r} \vec{n}_0 = x \cos(\vec{n}_0, x) + y \cos(\vec{n}_0, y) + z \cos(\vec{n}_0, z),$$

або

$$r = lx + my + nz.$$

Тому довільна складова плоскої хвилі може бути записана у вигляді:

$$A = A_0 e^{-\gamma r} = A_0 e^{-\gamma(lx + my + nz)}. \quad (14.1)$$

Якщо хвиля розповсюджується в середовищі без втрат, то коефіцієнт розповсюдження дорівнює $\gamma = i\beta = ik$. В цьому випадку замість (14.1) матимемо:

$$A = A_0 e^{-ikr \vec{n}_0} = A_0 e^{-ik\vec{r}}, \quad (14.2)$$

де $\bar{k} = k\bar{n}_0$ - хвильовий вектор.

Відбивання плоских хвиль від межі розділу середовищ при падінні під довільним кутом

Розглянемо випадок плоскої хвилі з лінійною поляризацією. Хвиля проходить через площину падіння – площину, що проходить через напрям поширення хвилі і нормаль до площини розділу середовищ.

Аналіз будемо проводити для двох окремих випадків:

1. Хвиля поляризована нормально до площини падіння, тобто площина поляризації хвилі і площина падіння взаємно перпендикулярні.
2. Хвиля поляризована в площині падіння, тобто площина поляризації і площина падіння збігаються.

Загальний випадок довільної орієнтації вектора E можна розглядати як суперпозицію цих випадків.

Випадок нормальної поляризації хвилі

На рис. 14.2 показано напрямки осей координат і векторів \bar{E} і \bar{H} падаючої, відбитої і заломленої хвиль. Вектори електричної напруженості \bar{E} усіх хвиль спрямовані перпендикулярно до площини падіння і паралельні осі x . Магнітні вектори мають складові H_y і H_z , і їх позитивні напрямки вибрані так, щоб в напрямку осі y вектор Пойнтінга відбитої хвилі був би протилежний вектору Пойнтінга падаючої і заломленої хвиль.

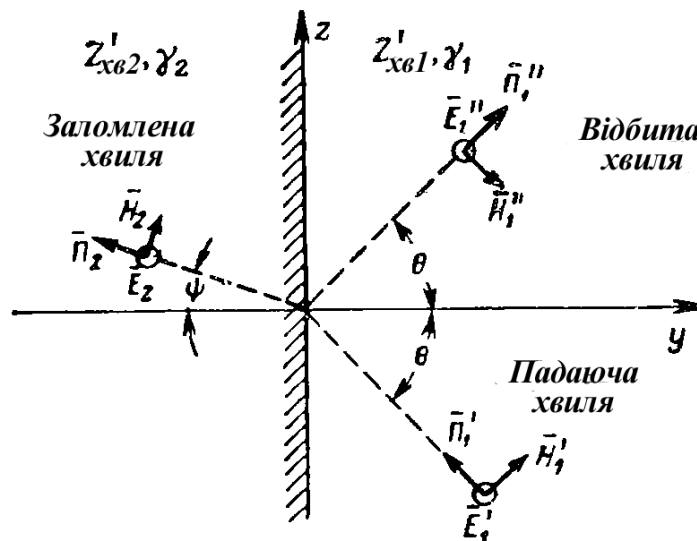


Рис. 14.2. Ілюстрація до вибору осей координат і напрямків векторів \bar{E} і \bar{H} падаючої, відбитої і заломленої хвиль при падінні під кутом.

Випадок поляризації, нормальної до площини падіння

Якщо нормаль до фронту падаючої хвилі лежить у площині yz і утворює кут θ з перпендикуляром до площини розділу середовищ, то напрямні косинуси

$$l_1' = 0; m_1' = -\cos\theta; n_1' = \sin\theta.$$

Тому для падаючої хвилі маємо відповідно до (14.1)

$$\dot{E}'_1 = \dot{E}'_{1x} = \dot{E}'_{nad} e^{-\gamma_1(-y \cos \theta + z \sin \theta)}; \quad (14.3)$$

$$\dot{H}'_1 = \frac{\dot{E}'_{nad}}{Z'_{x\delta 1}} e^{-\gamma_1(-y \cos \theta + z \sin \theta)}. \quad (14.4)$$

Для відбитої хвилі, що розповсюджується в першому середовищі під кутом θ' , отримаємо:

$$l''_1 = 0; \quad m''_1 = \cos \theta'; \quad n''_1 = \sin \theta'.$$

Комплексні амплітуди складових відбитої хвилі дорівнюють:

$$\dot{E}''_1 = \dot{E}''_{1x} = \dot{E}'_{eid\delta} e^{-\gamma_1(y \cos \theta' + z \sin \theta')}; \quad (14.5)$$

$$\dot{H}''_1 = \frac{\dot{E}'_{eid\delta}}{Z'_{x\delta 1}} e^{-\gamma_1(y \cos \theta' + z \sin \theta')}. \quad (14.6)$$

Результуюче поле в першому середовищі є сумою полів падаючої та відбитої хвиль. У другому середовищі є лише заломлена хвиля, нормаль до якої утворює кут ψ з перпендикуляром до площини падіння.

Для заломленої хвилі справедливі такі значення напрямних косинусів

$$l_2 = 0; \quad m_2 = -\cos \psi; \quad n_2 = \sin \psi.$$

Тому компоненти поля мають такий вид:

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_{2x} = \dot{E}'_{зал} e^{-\gamma_2(-y \cos \psi + z \sin \psi)}; \quad (14.7)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\dot{E}'_{зал}}{Z'_{x\delta 2}} e^{-\gamma_2(-y \cos \psi + z \sin \psi)}. \quad (14.8)$$

На межі двох середовищ тангенціальні складові векторів E_{tg} і H_{tg} в першому і другому середовищах дорівнюють одна одній.

Так як електричні вектори паралельні площині розділу, то, вважаючи $y=0$, отримаємо на підставі (14.5)-(14.7)

$$\dot{E}'_{nad} e^{-\gamma_1 z \sin \theta} + \dot{E}'_{eid\delta} e^{-\gamma_1 z \sin \theta} = \dot{E}'_{зал} e^{-\gamma_2 z \sin \psi}. \quad (14.9)$$

Рівняння (14.9) повинно бути справедливе при будь-якому z . Це можливо, якщо

$$\gamma_1 \sin \theta = \gamma_1 \sin \theta' = \gamma_2 \sin \psi.$$

Звідки безпосередньо випливає, що

$$\sin \theta = \sin \theta' \text{ та } \sin \psi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin \theta. \quad (14.10)$$

Отже, відбита хвиля поширюється під кутом, рівним куту падіння ($\theta = \theta'$).

Для випадку, коли обидва середовища є діелектриками

$$\gamma_1 = i\beta_1 = i\omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu}; \quad \gamma_2 = i\beta_2 = i\omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu}; \quad \sin \psi = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \theta. \quad (14.11)$$

З рівняння (14.9) з урахуванням попередніх співвідношень випливає, що

$$\dot{E}_{nad} + \dot{E}_{vidb} = \dot{E}_{zal}. \quad (14.12)$$

Рівняння (14.12) пов'язує комплексні амплітуди падаючої, відбитої і заломленої хвиль на поверхні розділу двох середовищ. Це рівняння необхідно доповнити іншим рівнянням, що визначає безперервність тангенціальних складових магнітного вектора на межі двох середовищ. Проектуючи вектори \vec{H}_1 і \vec{H}_2 на вісь z і вважаючи $y = 0$, отримаємо

$$\cos\theta \left(\frac{\dot{E}_{nad}}{Z'_{x\epsilon 1}} - \frac{\dot{E}_{vidb}}{Z'_{x\epsilon 1}} \right) = \frac{\dot{E}_{zal}}{Z'_{x\epsilon 2}} \cos\psi. \quad (14.13)$$

З рівнянь (14.12) і (14.13) можна визначити значення \dot{E}_{vidb} і \dot{E}_{zal} через комплексну амплітуду падаючої хвилі \dot{E}_{nad} на поверхні розділу. Для цього використовуємо приведені хвильові опори Z_{n1} і Z_{n2} обох середовищ, визначивши їх як

$$Z_{n1} = \frac{Z'_{x\epsilon 1}}{\cos\theta}; \quad Z_{n2} = \frac{Z'_{x\epsilon 2}}{\cos\psi}. \quad (14.14)$$

Тоді граничні умови (14.12) і (14.13) запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{nad} + \dot{E}_{vidb} &= \dot{E}_{zal}; \\ \dot{E}_{nad} - \dot{E}_{vidb} &= \dot{E}_{zal} \frac{Z_{n1}}{Z_{n2}}, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} \dot{E}_{zal} &= \frac{2Z_{n2}}{Z_{n2} + Z_{n1}} \dot{E}_{nad}; \\ \dot{E}_{vidb} &= \frac{Z_{n2} - Z_{n1}}{Z_{n2} + Z_{n1}} \dot{E}_{nad}. \end{aligned}$$

Відповідно для коефіцієнтів відбивання і заломлення отримаємо:

$$n_{vidb} = \frac{\dot{E}_{vidb}}{\dot{E}_{nad}} = \frac{Z_{n2} - Z_{n1}}{Z_{n2} + Z_{n1}}; \quad (14.15)$$

$$n_{zal} = \frac{\dot{E}_{zal}}{\dot{E}_{nad}} = \frac{2Z_{n2}}{Z_{n2} + Z_{n1}}. \quad (14.16)$$

Формули (14.15) і (14.16) мають вигляд, аналогічний формулами для випадку нормального падіння. Відмінність полягає лише в заміні хвильових опорів $Z'_{x\epsilon 1}$ і $Z'_{x\epsilon 2}$ на приведені хвильові опори Z_{n1} і Z_{n2} .

Результуюче поле в першому середовищі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = \dot{E}_{x1} = \left(\dot{E}_{nad} e^{\gamma_1 y \cos \theta} + \dot{E}_{eid\delta} e^{-\gamma_1 y \cos \theta} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}; \\ \dot{H}_{y1} = \frac{\sin \theta}{Z'_{x\delta 1}} = \left(\dot{E}_{nad} e^{\gamma_1 y \cos \theta} + \dot{E}_{eid\delta} e^{-\gamma_1 y \cos \theta} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}; \\ \dot{H}_{z1} = \frac{\cos \theta}{Z'_{x\delta 1}} = \left(\dot{E}_{nad} e^{\gamma_1 y \cos \theta} - \dot{E}_{eid\delta} e^{-\gamma_1 y \cos \theta} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}. \end{cases} \quad (14.17)$$

Або, вважаючи $\gamma_1 \cos \theta = \gamma_{n1}$,

$$\dot{E}_{x1} = \left(\dot{E}_{nad} e^{\gamma_{n1} y} + \dot{E}_{eid\delta} e^{-\gamma_{n1} y} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}; \quad (14.18)$$

$$\begin{cases} \dot{H}_{y1} = \frac{\sin \theta}{Z'_{x\delta 1}} = \left(\dot{E}_{nad} e^{\gamma_{n1} y} + \dot{E}_{eid\delta} e^{-\gamma_{n1} y} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}; \\ \dot{H}_{z1} = \frac{\cos \theta}{Z'_{x\delta 1}} = \left(\dot{E}_{nad} e^{\gamma_{n1} y} - \dot{E}_{eid\delta} e^{-\gamma_{n1} y} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}. \end{cases} \quad (14.19)$$

Рівняння для складових \dot{E} та \dot{H} показують, що вздовж площини розділу рухається хвиля з коефіцієнтом розповсюдження $\gamma = \gamma_1 \sin \theta$.

Випадок поляризації хвилі в площині падіння

Напрямок електричних і магнітних векторів для цього випадку показано на рис. 14.3. Аналіз цього випадку відрізняється від попереднього лише тим, що електричний і магнітний вектори міняються місцями.

Тепер магнітний вектор має лише одну складову H_x , паралельну площині розділу, а електричний вектор – дві складові E_y і E_z .

Для складових поля в першому середовищі отримаємо:

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_{x1} = - \left(\dot{H}_{nad} e^{\gamma_1 y \cos \theta} - \dot{H}_{eid\delta} e^{-\gamma_1 y \cos \theta} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}; \quad (14.20)$$

$$\dot{E}_{y1} = Z'_{x\delta 1} \sin \theta = \left(\dot{H}_{nad} e^{\gamma_1 y \cos \theta} - \dot{H}_{eid\delta} e^{-\gamma_1 y \cos \theta} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}; \quad (14.21)$$

$$\dot{E}_{z1} = Z'_{x\delta 1} \cos \theta = \left(\dot{H}_{nad} e^{\gamma_1 y \cos \theta} + \dot{H}_{eid\delta} e^{-\gamma_1 y \cos \theta} \right) e^{-\gamma_1 z \sin \theta}. \quad (14.22)$$

Для складових поля в другому середовищі

$$\dot{H}_2 = \dot{H}_{x2} = -\dot{H}_0 e^{\gamma_2 y \cos \psi} e^{-\gamma_2 z \sin \psi}; \quad (14.23)$$

$$\dot{E}_2 = Z_{n1} \dot{H}_0 e^{\gamma_2 y \cos \psi} e^{-\gamma_2 z \sin \psi}. \quad (14.24)$$

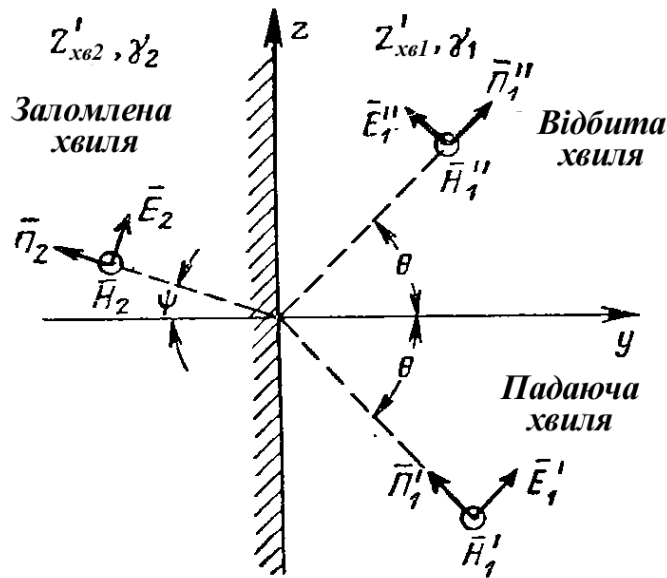


Рис. 14.3. Ілюстрація до вибору осей координат і напрямків векторів \vec{E} і \vec{H} падаючої, відбитої і заломленої хвиль при падінні під кутом.
Випадок поляризації в площини падіння

Приведені значення коефіцієнта розповсюдження і хвильових опорів тепер дорівнюють

$$\begin{cases} \gamma_{n1} = \gamma_1 \cos \theta; \\ Z_{n1} = Z'_{x\delta 1} \cos \theta; \\ Z_{n2} = Z'_{x\delta 2} \cos \psi. \end{cases} \quad (14.25)$$

Коефіцієнти відбивання і заломлення визначаються формулами (14.15) і (14.16). Але тепер їх значення характеризує відношення відповідних комплексних амплітуд напруженостей магнітного поля.

Падіння плоскої хвилі під кутом на межу двох діелектриків

У випадку двох ідеальних діелектриків кут заломлення ψ , як було показано вище, визначається

$$\sin \psi = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta. \quad (14.26)$$

Формула (14.26) відома в оптиці, де вона записується у виді:

$$\sin \psi = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta.$$

де n_1, n_2 – коефіцієнти заломлення першого і другого середовищ відповідно.

З формули (14.26) можна зробити висновок, що заломлена хвиля тим більше відхиляється від нормалі до межі розділу, чим більше відношення показників заломлення першого і другого середовищ.

Якщо $n_1 > n_2$, при певному значенні кута $\theta = \theta_0$ синус кута $\sin \psi$ дорівнює одиниці. У цьому випадку вектор Пойнтінга в другому середовищі спрямований вздовж межі розділу. Значення кута θ_0 , визначається з виразу

$$\sin \theta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}.$$

При кутах, більших θ_0 , відбувається повне внутрішнє відбивання. У цьому випадку значення $\sin \psi$ повинне бути більше одиниці, що для дійсних значень неможливо.

З'ясуємо, який характер має поле в другому середовищі, якщо $\theta > \theta_0$. Для цього використаємо вирази (14.7) і (14.8), які описують хвилю, поляризовану нормально до площини падіння.

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= i\beta_2 = i\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu}; \\ \cos \psi &= \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0}} = i\xi, \end{aligned}$$

бо $\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} > 1$.

Підставляючи значення $\cos \psi$ в (14.7) і (14.8), отримаємо:

$$\begin{aligned} E_{2x} &= E_{np} e^{\beta_2 \xi y} e^{-i\beta_2 z \sin \psi}; \\ H_2 &= \frac{E_{np}}{Z_{x\beta 2}} e^{\beta_2 \xi y} e^{-i\beta_2 z \sin \psi}; \\ H_{2z} &= H_2 \cos \psi = i \frac{E_{np}}{Z_{x\beta 2}} e^{\beta_2 \xi y} e^{-i\beta_2 z \sin \psi}, \end{aligned}$$

де $\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 + \xi^2} > 1$.

З аналізу наведених формул можна зробити висновок, що поле в другому середовищі має форму хвилі, яка розповсюджується вздовж площини розділу середовищ. Фазовий множник такої хвилі дорівнює $\beta \sin \psi$.

Вздовж нормалі до поверхні розділу, тобто у від'ємному напрямку осі y , амплітуди поля зменшуються по експоненційному закону. При цьому проекція H_{2z} зсунута по фазі відносно проекції E_{2x} на $\pi/2$, тобто енергія поля в напрямку другого середовища не передається. Аналогічні результати можна отримати для хвилі, поляризованої у площині падіння.

Коефіцієнти відбивання і заломлення хвиль при будь-яких кутах падіння виражаються формулами (14.15) і (14.16). Підставляючи в ці формули значення

Z_{n1} і Z_{n2} з формули (14.14) і врахуючи формулу (14.26), для хвилі, поляризованої нормально до площини падіння, отримаємо:

$$n_{\text{відб}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos \theta} - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos \theta} + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta}}; \quad (14.27)$$

$$n_{\text{пр}} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos \theta}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos \theta} + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta}}. \quad (14.28)$$

Для хвилі, поляризованої в площині падіння, приведені хвильові опори визначаються з формули (14.25). У цьому випадку

$$n_{\text{відб}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos \theta}}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos \theta}}; \quad (14.29)$$

$$n_{\text{пр}} = \frac{2\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos \theta}}. \quad (14.30)$$

З аналізу формул (14.29), (14.30) можна зробити висновок, що при певному куті падіння $\theta = \theta_c$ коефіцієнт відбивання хвилі, поляризованої в площині падіння є рівним нулю. Значення кута поляризації θ_c визначається з рівняння

$$1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta_c = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos^2 \theta_c,$$

звідки $\text{tg} \theta_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Для хвилі, поляризованої нормально до площини падіння, коефіцієнт відбивання, як видно з формули (14.27), не дорівнює нулю ні при якому куті падіння.

Похиłe падіння плоскої хвилі на межу розділу діелектрик-провідник

Розглянемо особливості поширення плоскої електромагнітної хвилі, яка поширюється зі сторони ідеального діелектрика в середовище з кінцевою провідністю, рис. 14.4.

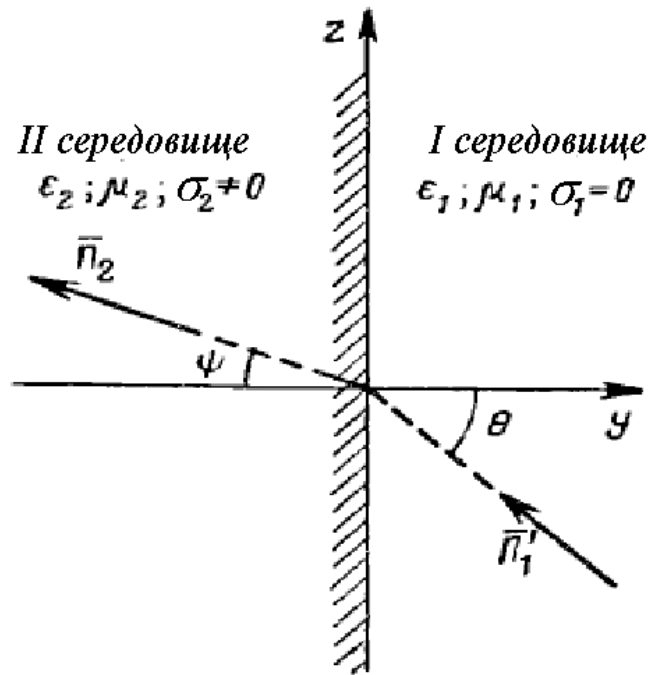


Рис. 14.4. Похиłe падіння плоскої хвилі на межу діелектрик-провідник

При будь-якій поляризації падаючої хвилі довільну складову поля в другому середовищі можна представити узагальненим рівнянням

$$\dot{A}_2 = \dot{A}_{np} e^{\gamma_2(y \cos \psi - z \sin \psi)}. \quad (14.31)$$

При цьому кут заломлення ψ зв'язаний з кутом падіння θ законом (14.26):

$$\sin \psi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin \theta.$$

Так як кут падіння за змістом може приймати тільки дійсні значення, а коефіцієнти розповсюдження середовищ γ_1 і γ_2 відповідно дорівнюють

$$\gamma_1 = ik_1; \quad \gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2,$$

то кут заломлення є величиною комплексною. Вважаючи на цій підставі

$$\cos \psi = u + iv,$$

і виражаючи $\sin \psi$ з формули (14.26), запишемо рівняння (14.31) у виді

$$\dot{A}_2 = \dot{A}_{np} e^{[\alpha_2 u - \beta_2 v + i(\alpha_2 v + \beta_2 u)]y} e^{-ik_1 z \sin \theta}.$$

Позначивши

$$\alpha_2 u - \beta_2 v = a; \quad \alpha_2 v + \beta_2 u = b; \quad k_1 \sin \theta = c,$$

де a, b, c – дійсні числа і $a > 0$, маємо

$$\dot{A}_2 = \dot{A}_{np} e^{ay} e^{i(by - cz)}. \quad (14.32)$$

З аналізу формули (14.32) можна зробити висновок, що загасання хвилі в другому середовищі визначається експоненціальним множником $e^{\alpha y}$. Тому незалежно від кута падіння заломлена хвиля загасає строго в напрямку нормалі до межі розділу (в негативному напрямку осі y). Таким чином, поверхнями рівних амплітуд тут є площині $y = const$. Фаза заломленої хвилі визначається множником $e^{i(by-cz)}$ тому для площин рівних фаз маємо інше рівняння:

$$by - cz = const.$$

Хвилі, у яких поверхні однакових амплітуд не збігаються з поверхнями однакових фаз, отримали найменування **неоднорідних хвиль**. Фізичний сенс цієї назви полягає в тому, що амплітуда хвилі в площині з однаковою фазою не залишається постійною, а змінюється за певним законом.

Особливо цікавий випадок, коли коефіцієнт розповсюдження другого середовища по модулю значно перевершує коефіцієнт розповсюдження першого середовища:

$$|\gamma_2| \gg |\gamma_1|. \quad (14.33)$$

Тоді, як це впливає з (14.26), при будь-яких значеннях кута падіння модуль комплексного кута заломлення $|\psi| \rightarrow 0$. Вважаючи в силу цього в рівнянні (14.31)

$$\cos \psi \approx 0; \quad \sin \psi = 1,$$

отримуємо для довільної складової поля в другому середовищі

$$\dot{A}_2 \approx \dot{A}_{np} e^{\gamma_2 y} = \dot{A}_{np} e^{\alpha_2 y} e^{i\beta_2 y}. \quad (14.34)$$

Рівняння (14.34) свідчить, що при будь-яких кутах падіння поширення електромагнітної хвилі в другому середовищі практично відбувається по напрямку нормалі до поверхні розділу. Більше того, хвилю можна вважати однорідною, так як площини рівних фаз збігаються з площинами рівних амплітуд.

На підставі викладеного можна стверджувати, що хвиля, що пройшла з діелектрика в середовище з параметрами, що задовольняють нерівності (14.33), як однорідна плоска хвиля, матиме тільки поперечні складові E_{x2} і E_{z2} , H_{x2} і H_{z2} . Ці складові пов'язані між собою рівностями:

$$\begin{cases} \dot{E}_{x2} = Z'_{02} \dot{H}_{z2}; \\ \dot{E}_{z2} = -Z'_{02} \dot{H}_{x2}. \end{cases} \quad (14.35)$$

Оскільки на межі розділу середовищ (в площині $y = 0$) дотичні складові векторів поля неперервні, отримуємо наступні важливі співвідношення:

$$\begin{cases} \dot{E}_{x1} = Z'_{02} \dot{H}_{z1}; \\ \dot{E}_{z1} = -Z'_{02} \dot{H}_{x1}. \end{cases} \quad \text{при } y = 0. \quad (14.36)$$

Ці співвідношення встановлюють залежність дотичних складових векторів поля на поверхні розділу в першому середовищі від параметрів другого середовища.

Для довільної складової поля в першому середовищі можна записати узагальнене рівняння

$$\dot{A}_1 = \left(\dot{A}_{nad} e^{\gamma_1 y \cos \theta} + \dot{A}_{vidb} e^{-\gamma_1 y \cos \theta} \right) e^{-\gamma_1 y \sin \theta}.$$

Через A_{nad} і A_{vidb} позначені амплітудні значення проєкцій векторів \vec{E} і \vec{H} падаючої та відбитої хвиль на координатні осі x , y , z . Вони пов'язані між собою співвідношенням

$$\dot{A}_{vidb} = \pm n \dot{A}_{nad}.$$

Хвильовий опір іншого середовища, а отже, і коефіцієнт відбивання n є комплексними величинами. Звідси фаза відбитої хвилі в загальному випадку може приймати будь-яке значення від $-\pi$ до π .

При виконанні нерівності. (14.33) хвильовий опір іншого середовища по модулю багато більше хвильового опору першого середовища і $|n| \approx 1$. Це означає, що амплітуди падаючої та відбитої хвиль рівні. Легко переконатися, що в цьому випадку уздовж осі y утворюються стоячі хвилі. Відстань між сусідніми вузлами (або пучностями) дорівнюватиме $\lambda_1 / 2 \cos \theta$, де λ_1 - довжина хвилі у першому середовищі.

Уздовж поверхні розділу $z = const$ поширюється хвиля, що розповсюджується з коефіцієнтом розповсюдження $\gamma = \gamma_1 \sin \theta$.

Запитання

1. Наведіть закони оптики, аналогічні законам розповсюдження електромагнітних хвиль.
2. Наведіть умову, за якої відбувається повне відбивання електромагнітної хвилі.
3. Поясніть характер розповсюдження електромагнітної хвилі за умови повного відбивання у другому середовищі.
4. Опишіть умову, коли два середовища є узгодженими, тобто відбита хвиля не виникає.
5. Опишіть умови розповсюдження електромагнітної хвилі на основі яких були отримані розрахункові співвідношення в лекції.
6. Вкажіть від чого залежить глибина проникнення електромагнітної хвилі в провідник.
7. Дайте визначення терміна «неоднорідна хвиля».
8. Охарактеризуйте розподіл електромагнітного поля на межі розділу діелектрик-провідник.

Лекція № 15. Розповсюдження електромагнітних хвиль у провіднику

Поверхневий ефект у провідниках

При аналізі поведінки електромагнітного поля на межі провідник-діелектрик будемо вважати, що одна частина простору заповнена діелектриком, I область на рис. 15.1, а друга частина – провідником, II область на рис. 15.1. При цьому координатна вісь y спрямована всередину другого середовища, а вектор напруженості електричного поля в області I паралельний площині yOz .

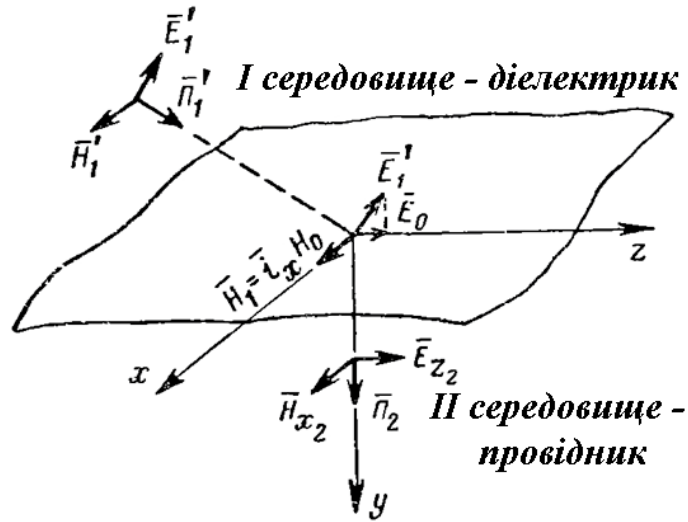


Рис. 15.1. Ілюстрація до визначення поля в провіднику

Як було з'ясовано в попередній лекції на межі діелектрик-провідник створюються плоскі хвилі, які розповсюджуються в середину провідника по нормалі до поверхні розділу, тобто в напрямку вісі y . Тому вирази для комплексних амплітуд векторів поля в провіднику мають вид

$$E_{z2} = E_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y};$$

$$H_{x2} = H_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y}, \quad (15.1)$$

де E_0 і H_0 - тангенціальні складові на поверхні розділу, $y=0$, які мають такий зв'язок:

$$E_0 = Z_{02} H_0 = \frac{(1+i)\alpha}{\sigma} H_0. \quad (15.2)$$

З аналізу виразу (15.1) можна зробити висновок, що з розповсюдженням хвилі у середину провідника її амплітуда зменшується по експоненційному закону. Швидкість зменшення амплітуди визначається значенням коефіцієнта затухання α .

Для матеріалів з високою провідністю, наприклад металів, поле в них затухає дуже швидко і зосереджено у тонкому поверхневому шарі, товщина

якого оцінюється відстанню на якій амплітуда поля зменшується в $e = 2,718$ разів у порівнянні з полем на поверхні провідника.

Глибина проникнення поля визначається з рівняння (15.1)

$$\delta = \frac{1}{\alpha},$$

або

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}. \quad (15.3)$$

З формули (15.3) можна зробити висновок, що глибина проникнення зменшується зі збільшенням частоти ω , провідності σ і магнітної проникності μ провідника.

На високих частотах глибина проникнення дуже мала. Так при $\omega = 2\pi \cdot 10^6$ 1/сек глибина проникнення для срібла становить $\delta = 6.4 \cdot 10^{-2}$ мм. Зі збільшенням частоти до $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ 1/сек значення δ зменшується на два порядки $\delta = 6.4 \cdot 10^{-4}$ мм.

Очевидно, що на глибині декілька δ існуванням поля в провіднику можна знехтувати.

Визначимо щільність струму в провіднику. За законом Ома щільність струму дорівнює $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Для нашого випадку згідно з (15.1)

$$j_z = \sigma E_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y} = j_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y}, \quad (15.4)$$

де $j_0 = \sigma E_0$ - щільність струму на поверхні провідника.

З віддаленням від поверхні провідника щільність струму $|j_z| = |j_0| e^{-\alpha y}$ зменшується по тому ж закону, що і амплітуда напруженості поля. Тому на радіочастотах відбувається нерівномірний розподіл струму по площі перерізу провідника.

Описане явище називається **поверхневим ефектом**. Оскільки розміри провідника в площині xOz необмежені, візьмемо до уваги значення струму I_S , що протікає через поперечний переріз S провідника на одиницю його ширини (заштрихована ділянка на рис. 15.2). Зрозуміло, що

$$I_S = \int_{y=0}^{y \rightarrow \infty} j_z dy = \int_{y=0}^{y \rightarrow \infty} \sigma E_0 e^{-\alpha y} e^{-i\beta y} dy = \sigma E_0 \frac{1}{\alpha + i\beta}.$$

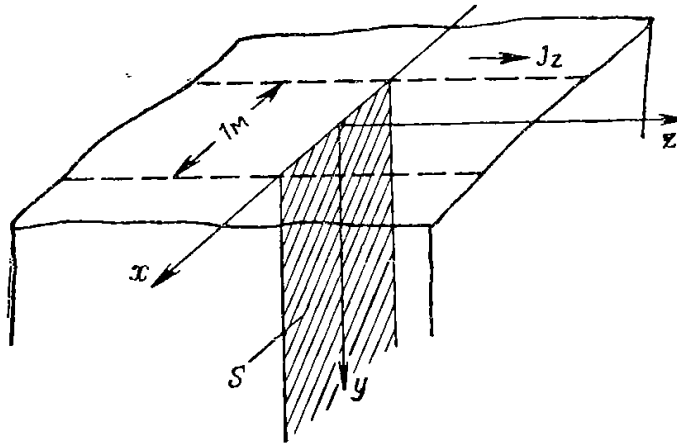


Рис. 15.2. Ілюстрація до розрахунку струму, який протікає через поперечний переріз провідника на одиницю ширини

Враховуючи, що для провідників $\alpha \approx \beta$, маємо

$$I_s = \frac{\sigma E_0}{\alpha(1+i)}. \quad (15.5)$$

Параметр

$$Z_s = \frac{E_0}{I_s} = \frac{\alpha(1+i)}{\sigma}. \quad (15.6)$$

називається **поверхневим опором провідника**, який є співвідношенням комплексної амплітуди напруги на одиницю довжини провідника E_0 до комплексної амплітуди струму, розрахованого на одиницю його ширини I_s .

З порівняння формул (15.6) і (15.2) можна зробити висновок, що поверхневий опір співпадає з хвильовим опором провідника Z_{02} .

Опір Z_s характеризує опір ділянки провідника з одиничною площею зовнішньої поверхні ($x = z = 1$) і необмеженим розміром вздовж вісі y (заштрихована ділянка на рис. 15.3) при $I_s(z) = const$.

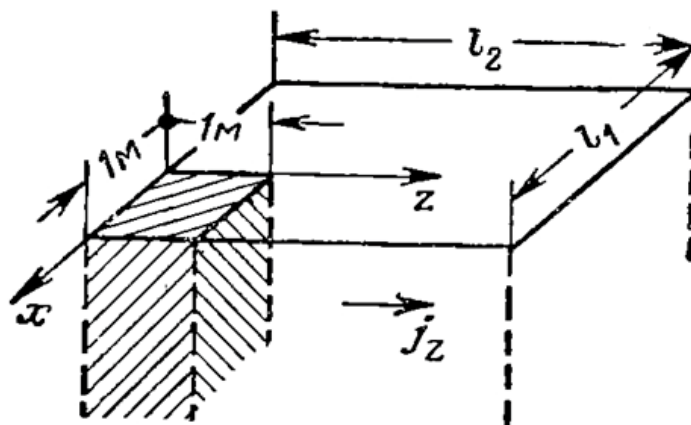


Рис. 15.3. Ілюстрація до розрахунку поверхневого опору провідника

Якщо ділянка провідника має ширину, тобто розмір по осі x , що дорівнює l_1 і довжину l_2 , що дорівнює одиниці, $l_2 = 1$, його повний опір розраховується за формулою

$$Z_f = \frac{Z_s}{l_1}. \quad (15.7)$$

Поверхневий опір згідно з формулою (15.6) має комплексний характер. Запишемо його у виді

$$Z_s = R_s + jX_s. \quad (15.8)$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини (15.6) і (15.8), визначимо активну і реактивну складові Z_s

$$R_s = X_s = \frac{\alpha}{\sigma} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}. \quad (15.9)$$

Активна складова R_s визначає потужність втрат у провіднику. Реактивна складова X_s має індуктивний характер і враховує частину індуктивності провідника, обумовлену внутрішнім магнітним полем.

Співставлення формул (15.3) і (15.9) дає можливість зрозуміти, що активну складову поверхневого опору можна представити у виді

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta}. \quad (15.10)$$

Цей результат свідчить, що активна складова поверхневого опору має те ж значення, яку при рівномірному розподілі струму (постійний струм) має плоский провідник товщиною δ .

Отримані результати стосуються плоскої межі розділу середовищ. Однак вони можуть застосовуватись і до провідників довільної форми, для якої справедливі нерівності

$$l_0 \gg \delta, r_0 \gg \delta. \quad (15.11)$$

де l_0 і r_0 - найменший лінійний розмір перерізу провідника і мінімальний радіус кривизни його поверхні.

Умова (15.11) відповідає наближенню поля будь-якої форми до поля плоскої хвилі. Якщо розміри перерізу провідника і радіуси кривизни його поверхні значно перевищують глибину проникнення, то будь-яка мала ділянка поверхні може розглядатись як частина дотичної площини до провідника. У межах такої ділянки внутрішнє поле аналогічне полю плоскої хвилі, що розповсюджується в напівнескінченний провідник через плоску межу розділу по нормалі до його поверхні. Застосуємо отримані формули для розрахунку опору циліндричного провідника з радіусом ρ_0 .

На основі попередніх міркувань для струму, який протікає по провіднику можна записати

$$I = I_s l_1 = j_s 2\pi\rho_0. \quad (15.12)$$

За законом Ома в диференційній формі падіння напруги на одиницю довжини провідника $U = E_0$. Звідки з врахуванням формули (15.5) комплексний опір циліндричного провідника одиничної довжини

$$Z_f = \frac{U}{I} = \frac{E_0}{I_s 2\pi\rho_0} = \frac{1}{2\pi\rho_0} \frac{\alpha(1+i)}{\sigma}. \quad (15.13)$$

Розділивши у формулі (15.12) дійсну і уявну частини, знайдемо активний і реактивний опори циліндричного провідника одиничної довжини

$$R_f = X_f = \frac{1}{2\pi\rho_0} \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{2\pi\rho_0} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}. \quad (15.14)$$

Співвідношення опору R_f з опором того ж провідника на постійному струму $R_0 = \frac{1}{\sigma\pi\rho_0^2}$ дорівнює

$$\frac{R_f}{R_0} = \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\pi f \mu \sigma}. \quad (15.15)$$

Звідки видно, що активний опір провідника збільшується з частотою струму, який по ньому протікає.

При цьому параметр

$$\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}, \quad (15.16)$$

визначає глибину на якій струм провідника зменшується в e разів.

Наприклад для провідника радіусом $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м, з провідністю $\sigma = 6 \cdot 10^7$ Сум/м (срібло) на частоті $f = 3 \cdot 10^8$ Гц матимемо

$$\frac{R_f}{R_0} = 10^{-3} \sqrt{\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^7} \approx 250.$$

Вплив поверхневого ефекту яскраво виражений в провідниках з великою площею перерізу. Для зменшення опору провідника на змінному струмі, доцільно використовувати замість одного декілька провідників, з такою ж сумарною площею перерізу, які ізольовані один від одного.

Наближені граничні умови Леонтовича

У провіднику, розміри і радіуси кривизни якого значно перевищують глибину проникнення електромагнітного поля, компоненти поля пов'язані наближеними співвідношеннями

$$\begin{cases} \dot{E}_{x2} \approx -Z'_{02} \dot{H}_{z2}; \\ \dot{E}_{z2} \approx Z'_{02} \dot{H}_{x2}, \end{cases} \quad (15.17)$$

де $E_{x2}, E_{z2}, H_{x2}, H_{z2}$ – проекції векторів поля на систему координат, у якої площина xOz є дотичною площиною до поверхні провідника в даній точці, а вісь y співпадає з нормаллю n , рис. 15.4.

I середовище - діелектрик

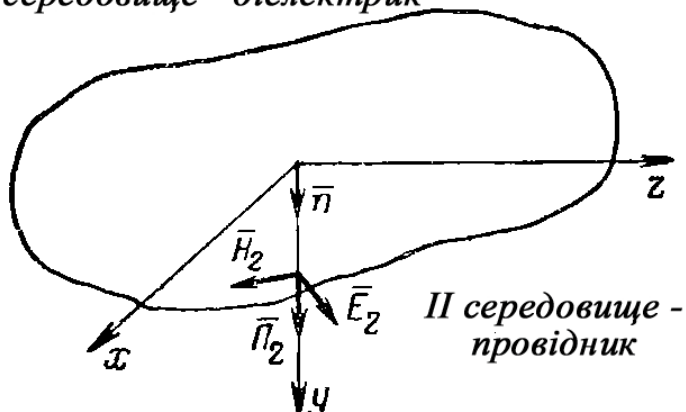


Рис. 15.4. Ілюстрація до визначення поля в провіднику довільної форми

Прирівнюючи дотичні складові векторів поля на межі розділу середовищ, $y = 0$, отримуємо рівняння:

$$\begin{cases} \dot{E}_{x1} \approx -Z'_{02} \dot{H}_{z1}; \\ \dot{E}_{z1} \approx Z'_{02} \dot{H}_{x1}. \end{cases} \quad (15.18)$$

Граничні умови (15.18) отримані Леонтовичем і носять його назву. Вони пов'язують дотичні складові векторів поля біля поверхні розділу в першому середовищі з параметрами другого середовища. Це дає можливість без визначення поля всередині провідника, приблизно врахувати його вплив за допомогою рівнянь (15.18). Точність наближених умов Леонтовича зростає зі збільшенням значення коефіцієнта розповсюдження γ_2 у другому середовищі. Для тіла обмеженого довільною поверхнею векторний запис умови (15.19) є таким:

$$\dot{E}_{tg} = Z'_{02} [\dot{H}_{tg} \bar{n}], \quad (15.19)$$

де n – нормаль до поверхні, направлена всередину тіла. Для тангенціальної складової напруженості магнітного поля H_{tg} справедливе співвідношення

$$\dot{H}_{tg} = \dot{H}_0 = \dot{I}_S,$$

де I_S – струм, який протікає через поперечний переріз провідника на одиницю його ширини.

Розглянемо вектор \vec{I}_S , модуль якого дорівнює значенню струму, а напрям збігається з напрямком вектора щільності струму. Для вектора \vec{I}_S справедливе співвідношення

$$\dot{I}_S = [\dot{H}_{tg} \bar{n}]. \quad (15.20)$$

Підставляючи формулу (15.20) в (15.19) з урахуванням, що $Z'_{02} = Z_S$, отримаємо:

$$\dot{E}_{tg} = Z_S \dot{I}_S. \quad (15.21)$$

Рівняння (15.21) є однією з форм запису наближених граничних умов Леонтовича.

Граничні умови на поверхні ідеального провідника

Метали, які мають велику, але кінцеву провідність, у деяких випадках можливо розглядати як ідеальні провідники, $\sigma \rightarrow \infty$. У цьому випадку глибина проникнення електромагнітного поля в провідник прямує до нуля, $\Delta \rightarrow 0$, тому електромагнітне поле в провіднику відсутнє, тобто $E_2 = 0$, $H_2 = 0$. Зважаючи на це, граничні умови на межі розділу є такими.

$$\begin{cases} E_{\text{tg}} = H_n = 0; \\ \varepsilon E_n = -\chi; \\ H_{\text{tg}} = j_s, \end{cases} \quad (15.22)$$

де χ – поверхнева щільність заряду,
 j_s – поверхнева щільність струму.

З аналізу системи (15.22) можна зробити висновок, що вектор електричного поля має лише нормальну складову E_n , значення якої визначається поверхневою щільністю зарядів χ . Вектор магнітного поля направлено по дотичній до поверхні провідника, а його значення дорівнює поверхневій щільності струмів. Значення поверхневої щільності струмів j_s є межею, до якої прямує струм I_s , який протікає через поперечний переріз провідника на одиницю його ширини, коли його глибина проникнення прямує до нуля. Тому для цього випадку наближені умови Леонтовича стають точними, зокрема

$$\dot{j}_s = [\dot{H}_{\text{tg}} \bar{n}]. \quad (15.23)$$

Використання формул для ідеального провідника, спрощує аналіз для реальних провідників, оскільки дозволяє не аналізувати поле всередині нього, а враховувати його вплив на поле за граничними умовами (15.22). Як приклад розглянемо нормальне падіння плоскої хвилі на поверхню ідеального провідника, $\sigma_2 \rightarrow \infty$. У цьому випадку хвильовий опір ідеального провідника Z_{02} дорівнює нулю, $Z_{02} = 0$, коефіцієнт відбивання $n = -1$. Відповідно до граничних умов (15.22) напруженість електричного поля на поверхні провідника дорівнює нулю (вважаємо що $\chi = 0$). Напруженість магнітного поля H_0 на поверхні дорівнює поверхневій щільності струму j_s . Залежність векторів електромагнітного поля поза ідеальним провідником має такий вид:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{H}_0 \dot{Z}_{01} sh(\gamma_1 y); \\ \dot{H}_1 &= \dot{H}_0 ch(\gamma_1 y); \\ \dot{H}_0 &= 2\dot{H}_{np}. \end{aligned} \quad (15.24)$$

Розглянутий випадок відбивання хвилі від ідеального провідника аналогічний короткому замиканню довгої лінії. У точці короткого замикання напруга дорівнює нулю, а струм подвоює своє значення.

Якщо перше середовище є ідеальним діелектриком, то для нього справедливі вирази:

$$\alpha_1 = 0; \gamma_1 = j\beta_1; Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}. \quad (15.25)$$

Оскільки

$$sh(j\beta_1 y) = j \sin(\beta_1 y); ch(j\beta_1 y) = \cos(\beta_1 y), \quad (15.26)$$

то з урахуванням рівнянь (15.24), отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= j\dot{H}_0 \dot{Z}_{01} \sin(\gamma_1 y) = \dot{H}_0 \dot{Z}_{01} e^{j\pi/2} \sin(\gamma_1 y); \\ \dot{H}_1 &= \dot{H}_0 \cos(\gamma_1 y). \end{aligned} \quad (15.27)$$

Отже в просторі вздовж осі y поле має характер стоячої хвилі.

Запитання

1. Назвіть тип хвилі, яка зазвичай описує розповсюдження електромагнітної хвилі у провіднику.
2. Вкажіть залежність зменшення амплітуди електромагнітних хвиль від глибини їх проникнення у провідник.
3. Назвіть параметр, який визначає глибину проникнення електромагнітної хвилі у провідник.
4. Наведіть формулу для розрахунку поверхневого опору провідника.
5. Наведіть геометричні розміри провідника, які характеризують поверхневий опір провідника.
6. Назвіть параметр провідника, який характеризує уявну частину поверхневого опору провідника.
7. Наведіть залежність поверхневого ефекту від збільшення діаметра провідника.
8. Наведіть умови для провідника довільної форми, за яких до розрахунку поля у ньому можливо використовувати формули провідника плоскої форми.
9. Наведіть перевагу використання граничних умов Леонтовича у порівнянні з повним розрахунком поля у провіднику.
10. Вкажіть випадок, коли граничні умови Леонтовича з наближених стають точними.

Лекція № 16. Особливості розповсюдження електромагнітного поля в анізотропних середовищах

Анізотропні середовища

В *ізотропних* середовищах зв'язок між векторами електричного і магнітного полів має такий вид:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}; \vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (16.1)$$

Оскільки магнітна μ і електрична ε проникності мають скалярні значення то вектори B і H , D і E паралельні між собою. Кожне з векторних рівнянь (16.1) можна замінити трьома скалярними рівняннями:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu H_x; B_y = \mu H_y; B_z = \mu H_z; \\ D_x &= \varepsilon E_x; D_y = \varepsilon E_y; D_z = \varepsilon E_z. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Тому в ізотропних середовищах залежать одна від одної лише однакові проекції векторів поля. Властивості таких середовищ однакові у всіх напрямках. Натомість існують середовища, які в різних напрямках виявляють різні властивості. Вони називаються **анізотропними**.

У анізотропних середовищах кожна проекція векторів \vec{B} і \vec{D} у загальному випадку може залежати від трьох проекцій векторів \vec{H} або \vec{E} відповідно. Тому для анізотропного середовища рівняння (16.2) потрібно переписати у виді:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z; \\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z; \\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z; \\ D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z; \\ D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z; \\ D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Сукупність фізичних величин, на які згідно з формулою (16.3) необхідно помножити проекції векторів \vec{H} і \vec{E} записують у виді матриць

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}; \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (16.4)$$

Позначення наведені у формулі (16.4) називаються **тензорами** електричної і магнітної проникностей. Числа ε_{xx} , ε_{xy} , ..., і μ_{xx} , μ_{xy} , ..., називаються компонентами тензорів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\mu}$, які можуть мати, як дійсні, так і комплексні значення. Використання тензорів спрощує запис залежностей між векторами електричного і магнітного полів (16.3):

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon} \vec{E}; \vec{B} = \vec{\mu} \vec{H}. \quad (16.5)$$

У загальному випадку для визначення поля в анізотропному середовищі необхідно вирішувати рівняння Максвелла, до яких входять тензорні параметри електричної і магнітної проникностей (16.4), що ускладнює процес розв'язку. Однак у природі існують середовища, в яких лише один з вказаних параметрів описується тензором. Тому в подальшому доцільно розглядати речовини, які мають тензорну магнітну

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \vec{B} = \vec{\mu} \vec{H}, \quad (16.6)$$

або електричну

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon} \vec{E}; \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (16.7)$$

проникність окремо.

Варто зазначити, що провідність також може виражатись через тензор. Для середовища з тензорною провідністю закон Ома в диференціальній формі має вид:

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \vec{E}. \quad (16.8)$$

Енергія електромагнітного поля в анізотропному середовищі також має складнішу залежність:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV. \quad (16.9)$$

Типовим прикладом анізотропного середовища є феромагнітні матеріали.

Ферити

Феритами називають групу речовин, які мають магнітні властивості феромагнетиків і електричні властивості діелектриків, $\varepsilon = 5..20$. На відміну від феромагнітних матеріалів ферити мають малу питому провідність, $\sigma = 10^{-4}-10^{-6}$ Сим/м, тому електромагнітні хвилі в них розповсюджуються з малим затуханням.

У ненамагніченому стані ферит, як будь-який інший феромагнетик, складається з доменів, магнітні моменти яких орієнтовані в різних напрямках. Змінне електромагнітне поле у ненамагніченому фериті розповсюджується як і у будь-якому ізотропному середовищі.

Під дією змінного електромагнітного поля магнітні моменти доменів відхиляються від початкового стану у напрямку вектора H , у результаті чого з'являється сумарний магнітний момент одиниці об'єму – вектор магнітної поляризації, напрям якого співпадає з вектором напруженості зовнішнього поля.

Під дією постійного магнітного поля ферит набуває анізотропних властивостей. Його магнітна проникність для змінних електромагнітних полів стає тензорною величиною.

Дія на ферит постійного магнітного поля

Спочатку проаналізуємо процеси в ненамагніченому фериті. Як відомо електрони будь-якої речовини мають власні обертальні та спінові моменти, а феромагнітні властивості речовин пов'язані зі спіновим магнітним моментом. Тому спрощену модель атома з некомпенсованим спіном можна описати

моделлю «дзиги», яка має спіновий магнітний момент \vec{M}_S і механічним моментом кількості руху \vec{L}_S , поява якого пояснюється обертанням електрона навколо власної осі. Моменти \vec{M}_S і \vec{L}_S направлені протилежно, рис 16.1 а і пов'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{M}_S = -\mu_0 \frac{e_0}{m_0} \vec{L}_S = -\Psi \vec{L}_S, \quad (16.10)$$

де e_0, m_0 – заряд і маса електрона, $\Psi = 2\pi \cdot 3.5 \cdot 10^4$.

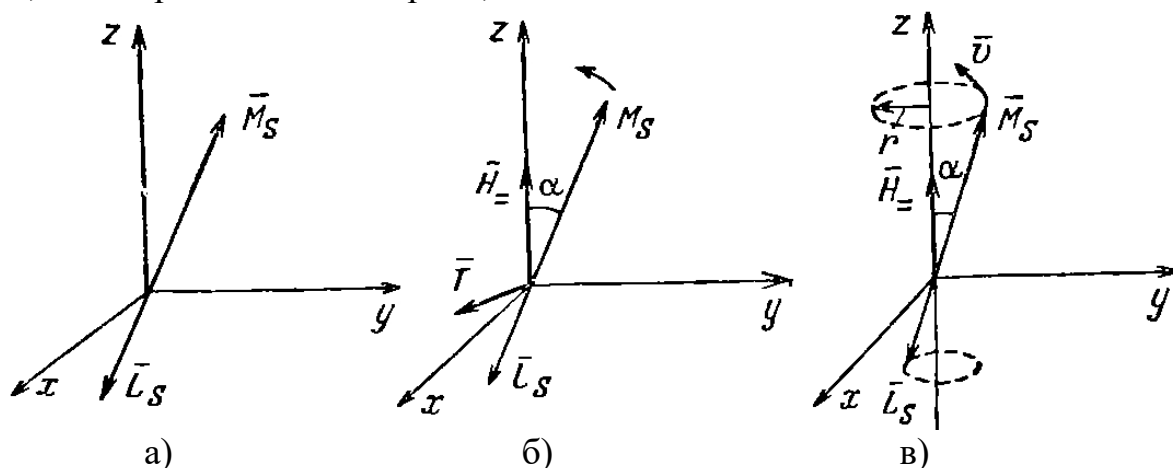


Рис. 16.1. Ілюстрація до визначення прецесії магнітного моменту атома фериту в постійному магнітному полі

Припустимо, що на даний атом діє постійне магнітне поле $\vec{H}_0 = \vec{i}_z H_0$. Тоді на атом починає діяти пара сил з моментом обертання, значення і напрям якого залежить від векторного добутку:

$$\vec{T} = [\vec{M}_S \times \vec{H}_0]. \quad (16.11)$$

Момент обертання намагається розвернути атом так, щоб магнітний момент \vec{M}_S співпадав з напрямом поля \vec{H}_0 , рис. 16.1 б.

Однак наявність механічного моменту \vec{L}_S робить атом подібним *гіроскопу* – пристрою, здатний реагувати на зміну орієнтації основи, на якій його встановлено, відносно навколишнього простору. Магнітна вісь атома, тобто момент \vec{M}_S починає *прецесувати* (повільно, у порівнянні з періодом обертання атома, зміщувати вісь свого обертання по конусу) навколо напрямку поля \vec{H}_0 , рис. 16.1 в, описуючи кінцем коло. Рух вектора \vec{M}_S описується рівнянням

$$\frac{d\vec{M}_S}{dt} = -\Psi [\vec{M}_S \times \vec{H}_0]. \quad (16.12)$$

Векторне рівняння (16.12) розкладається на три скалярних:

$$\frac{dM_{Sx}}{dt} = -\Psi M_{Sy} H_0;$$

$$\frac{dM_{Sy}}{dt} = \Psi M_{Sx} H_{\pm};$$

$$\frac{dM_{Sz}}{dt} = 0.$$

Спільний розв'язок двох перших рівнянь є таким:

$$M_{Sx} = M_{Sxy} \cos(\Psi H_{\pm} t); M_{Sy} = M_{Sxy} \sin(\Psi H_{\pm} t),$$

де $M_{Sxy} = \sqrt{M_{Sx}^2 + M_{Sy}^2}$ – проекція вектора \vec{M}_S на площину xOy .

Оскільки тангенс кута φ між віссю x і проекцією M_{Sxy} дорівнює

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{M_{Sy}}{M_{Sx}} = \frac{\sin(\Psi H_{\pm} t)}{\cos(\Psi H_{\pm} t)} = \operatorname{tg}(\Psi H_{\pm} t),$$

тому

$$\varphi = \Psi H_{\pm} t.$$

З цих міркувань випливає, що вектор \vec{M}_S обертається відносно вісі z , рис. 16.1 в з кутовою частотою

$$\omega_M = \Psi H_{\pm}. \quad (16.13)$$

З третього рівняння системи $M_{Sz} = M_S \cos(\alpha) = \text{const}$ можна зробити висновок, що кут α між віссю z і \vec{M}_S у процесі обертання залишається постійним. Таким чином магнітні моменти атомів, напрям яких відрізняється від напрямку поля \vec{H}_{\pm} , починають прецесувати навколо нього з кутовою частотою ω_M , яка називається частотою гіромагнітного резонансу. Якби не було затухання прецесія магнітного моменту тривала нескінченний час. Однак через втрати магнітний момент рухається по скрученій спіралі і через певний час встановлюється вздовж поля \vec{H}_{\pm} . Час затухання прецесії оцінюється значенням 10^{-8} с і визначає час намагнічування фериту.

Дія на ферит постійного і змінного магнітних полів, напрямки яких відрізняються

Нехай разом з постійним магнітним полем $\vec{H}_{\pm} = \vec{i}_z H_{\pm}$ на ферит діє змінне магнітне поле $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t)$. Для спрощення вважатимемо, що вектор \vec{H} направлено вздовж осі x , а кутова частота $\omega \approx \omega_M$. Момент обертання, створений змінним полем, дорівнює

$$\vec{\tau} = [\vec{M}_S \times \vec{H}]. \quad (16.14)$$

Нехай в початковий час вектор \vec{M}_S лежить у площині xOz , а вектор напруженості змінного магнітного поля \vec{H} направлено вздовж осі x , а його значення максимальне. Згідно з формулами (16.11), (16.14) і рис. 16.2 а, при $t = 0$ момент обертання $\vec{\tau}$ направлений протилежно моменту \vec{T} і намагається збільшити кут прецесії α .

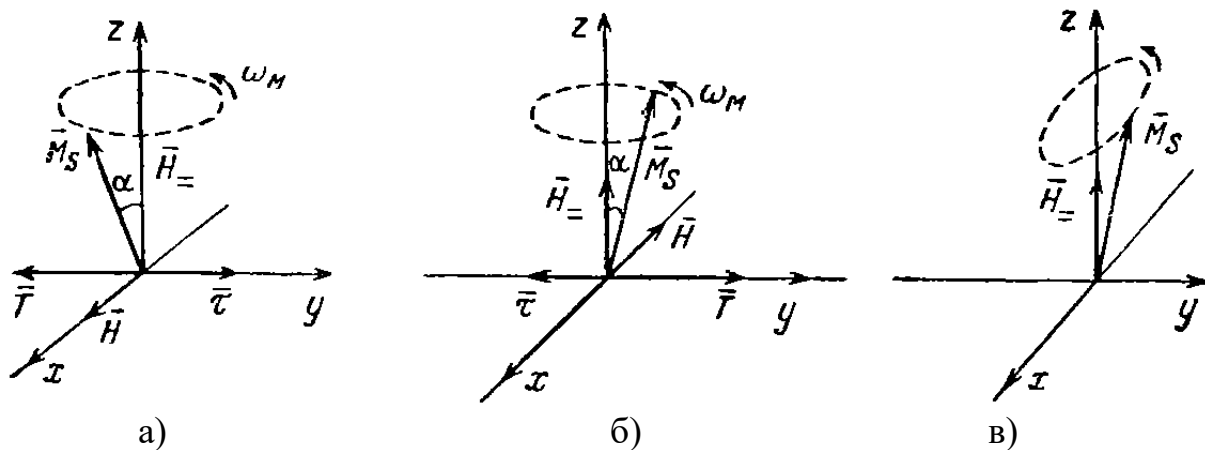


Рис. 16.2. Ілюстрація до визначення прецесії магнітного моменту атома фериту, при одночасній дії на нього постійного і змінного магнітних полів

Через половину періода $T_M = 2\pi / \omega_M$, магнітний момент повернеться на кут π , а вектор \vec{H} знову матиме максимальне значення, але протилежну орієнтацію. Згідно з рис. 16.2 б можна зробити висновок, що і у момент $t = T_M / 2$ вектор $\vec{\tau}$ намагається збільшити кут прецесії. У моменти часу $t = T_M / 4$ і $t = 3T_M / 4$, коли вектор \vec{M}_s лежить у площині yOz , напруженість змінного магнітного поля дорівнює нулю і не впливає на кут прецесії.

Таким чином, за одночасної дії постійного і змінного магнітних полів, напрямки яких відрізняються, магнітний момент атома фериту прецесує відносно напрямку поля \vec{H}_- по еліпсу, рис. 16.2 в. Вектор магнітної поляризації, тобто магнітний момент одиниці об'єму фериту, а також вектор магнітної індукції не будуть співпадати з напрямком вектора напруженості змінного магнітного поля. При цьому рівняння руху магнітного моменту атома має вид:

$$\frac{d\vec{M}_s}{dt} = -\Psi[\vec{M}_s \times \vec{H}_\Sigma], \quad (16.15)$$

де \vec{H}_Σ – сумарне поле $\vec{H}_\Sigma = \vec{H}_- + \vec{H}$.

Намагнічений феритовий матеріал є сукупністю магнітних моментів, які однаково обертаються. Тому, після множення правої і лівої частини рівняння (16.15) на кількість атомів у одиниці об'єму, буде отримано рівняння руху сумарного магнітного моменту одиниці об'єму:

$$\frac{d\vec{P}_\Sigma}{dt} = -\Psi[\vec{P}_\Sigma \times \vec{H}_\Sigma], \quad (16.16)$$

де \vec{P}_Σ – магнітний момент одиниці об'єму або вектор магнітної поляризації.

Якщо ж вектори напруженості постійного і змінного магнітних полів \vec{H}_- і \vec{H} паралельні один одному, змінне магнітне поле не впливає на орієнтацію магнітних моментів атомів. Вектори магнітної поляризації і магнітної індукції, на відміну від попереднього випадку, є паралельними вектору напруженості змінного магнітного поля. На основі цього можна зробити висновок, що

властивості намагніченого постійним магнітним полем феритового матеріалу є різними для змінних магнітних полів з різним напрямком.

Параметри намагніченого фериту

Для розрахунку параметрів намагніченого фериту необхідно визначити зв'язок між векторами магнітної індукції \vec{B} і напруженості магнітного поля фериту. Нехай на ферит одночасно з постійним магнітним полем $\vec{H}_\perp = \vec{i}_z H_\perp$ діє змінне магнітне поле з довільно орієнтованим вектором напруженості $\vec{H}_k = \dot{H}e^{i\omega t}$. Тоді сумарне магнітне поле є векторною сумою двох полів:

$$\dot{H}_\Sigma = \vec{i}_z H_\perp + \dot{H}e^{i\omega t}, \quad (16.17)$$

а рівняння для вектора поляризації

$$\frac{d\vec{P}_\Sigma}{dt} = -\Psi[\vec{P}_\Sigma \times (\vec{i}_z H_\perp + \dot{H}e^{i\omega t})]. \quad (16.18)$$

Припустимо, що ферит намагнічено постійним магнітним полем до насичення, тобто магнітні моменти всіх атомів паралельні між собою і направлені вздовж поля \vec{H}_\perp . Тоді, за відсутності змінного магнітного поля, вектор магнітної поляризації \vec{P}_\perp направлений так само як вектор \vec{H}_\perp .

$$\vec{P}_\perp = \vec{i}_z P_\perp. \quad (16.20)$$

Якщо тепер до намагніченого фериту прикласти слабе змінне поле з амплітудою:

$$|\dot{H}| \ll H_\perp, \quad (16.21)$$

воно викличе відхилення магнітних моментів атомів від стану рівноваги, що призведе до появи змінної складової вектора магнітної поляризації $\dot{P}e^{i\omega t}$, тому вираз сумарного вектора поляризації \vec{P}_Σ є таким

$$\dot{P}_\Sigma = \vec{i}_z P_\perp + \dot{P}e^{i\omega t}. \quad (16.22)$$

Для вектора поляризації також виконується умова (16.21)

$$|\dot{P}| \ll P_\perp. \quad (16.23)$$

Підставивши вираз (16.22) у формулу (16.18), отримаємо:

$$\frac{d(\vec{i}_z P_\perp + \dot{P}e^{i\omega t})}{dt} = -\Psi[(\vec{i}_z P_\perp + \dot{P}e^{i\omega t}) \times (\vec{i}_z H_\perp + \dot{H}e^{i\omega t})]. \quad (16.24)$$

Вирішуючи диференційне рівняння (16.24) відносно змінної складової вектора поляризації $\dot{P}e^{i\omega t}$, визначимо зв'язок між ним і вектором напруженості поля \vec{H} . Виконуючи в формулі (16.24) диференціювання і нехтуючи внаслідок її малості складовою $\dot{P}e^{i\omega t} \times \dot{H}e^{i\omega t}$, отримаємо

$$i\omega\dot{P} = -\Psi[\dot{P} \times \vec{i}_z H_\perp + \vec{i}_z P_\perp \times \dot{H}]. \quad (16.25)$$

Описавши вектори $\dot{\vec{P}}$ і \vec{H} через проекції та виразивши векторні добутки, отримуємо:

$$\begin{cases} i\omega\dot{P}_x = -\Psi(\dot{P}_y H_z - P_z \times \dot{H}_y); \\ i\omega\dot{P}_y = \Psi(\dot{P}_x H_z - P_z \times \dot{H}_x); \\ i\omega\dot{P}_z = 0. \end{cases} \quad (16.26)$$

Вирішивши систему (16.26) відносно проекцій \dot{P}_x і \dot{P}_y , отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -\frac{\mu_0\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \dot{H}_x - i\frac{\mu_0\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \dot{H}_y; \\ \dot{P}_y = i\frac{\mu_0\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \dot{H}_x - \frac{\mu_0\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \dot{H}_y, \end{cases} \quad (16.27)$$

де $\omega_M = \Psi H_z$; $\omega_0 = \Psi P_z / \mu_0 = \gamma P_z$.

Комплексна амплітуда змінної складової магнітної індукції розраховується за формулою

$$\dot{\vec{B}} = \dot{\vec{P}} + \mu_0 \dot{\vec{H}}, \quad (16.28)$$

або для кожної проекції:

$$\begin{cases} \dot{B}_x = \dot{P}_x + \mu_0 \dot{H}_x; \\ \dot{B}_y = \dot{P}_y + \mu_0 \dot{H}_y; \\ \dot{B}_z = \dot{P}_z + \mu_0 \dot{H}_z. \end{cases} \quad (16.29)$$

Підставляючи вирази (16.27) у формулу (16.29), отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{B}_x = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \right) \dot{H}_x - i\frac{\mu_0\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \dot{H}_y; \\ \dot{B}_y = i\frac{\mu_0\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \dot{H}_x + \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M\omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \right) \dot{H}_y; \\ \dot{B}_z = \mu_0 \dot{H}_z. \end{cases} \quad (16.30)$$

Аналізуючи формулу (16.30), можна зробити висновок, що магнітна проникність намагніченого фериту має тензорний характер. Співставляючи формули (16.3) і (16.30), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mu_{xx} &= \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M \omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \right); \mu_{yx} = -i \frac{\mu_0 \omega_M \omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2}; \mu_{zx} = 0; \\ \mu_{xy} &= i \frac{\mu_0 \omega_M \omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2}; \mu_{yy} = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M \omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \right); \mu_{zy} = 0; \\ \mu_{xz} &= 0; \mu_{yz} = 0; \mu_{zz} = \mu_0.\end{aligned}\quad (16.31)$$

Оскільки $\mu_{xx} = \mu_{yy}$ і $\mu_{xy} = -\mu_{yx}$, використаємо позначення

$$a = \mu_0 \frac{\omega_M \omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2}; \quad (16.32)$$

$$\mu_x = \mu_{xx} = \mu_{yy}.$$

З врахуванням позначень (16.32) формула (16.30) перетвориться до виду:

$$\begin{cases} \dot{\vec{B}}_x = \mu_x \dot{H}_x - ia \dot{H}_y; \\ \dot{\vec{B}}_y = ia \dot{H}_x + \mu_x \dot{H}_y; \\ \dot{\vec{B}}_z = \mu_0 \dot{H}_z, \end{cases} \quad (16.33)$$

або

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\mu} \dot{\vec{H}}, \quad (16.34)$$

де

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & -ia & 0 \\ ia & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix} - \quad (16.35)$$

тензор магнітної проникності.

Компоненти тензора (16.35) є функціями постійного магнітного поля $\vec{H}_=$. При цьому при зміні напрямку вектора $\vec{H}_=$ на протилежний змінює свій знак параметр a тензора. Оскільки діелектрична проникність намагніченого фериту є скалярним параметром, рівняння Максвелла для цього середовища (без джерел поля) є такими:

$$\begin{aligned}\text{rot} \dot{\vec{H}} &= i\omega \dot{\vec{D}}; \\ \text{rot} \vec{E} &= -i\omega \dot{\vec{B}}; \\ \dot{\vec{D}} &= \varepsilon \dot{\vec{E}}; \\ \dot{\vec{B}} &= \vec{\mu} \dot{\vec{H}}.\end{aligned}\quad (16.36)$$

В декартовій системі координат ці рівняння з урахуванням формул (16.33) мають вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon \dot{E}_x; \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon \dot{E}_y; \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon \dot{E}_z; \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -i\omega(\mu_x \dot{H}_x - ia \dot{H}_y); \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega(ia \dot{H}_x + \mu_x \dot{H}_y); \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0 \dot{H}_z. \end{array} \right. \quad (16.37)$$

Загальний вид системи (16.37) підтверджує значне ускладнення розрахунку електромагнітних полів у анізотропних середовищах.

Запитання

1. Наведіть особливості, які відрізняють анізотропні середовища від ізотропних.
2. Охарактеризуйте принцип опису властивостей анізотропних середовищ за допомогою тензорів.
3. Опишіть особливості структури та процес намагнічування феритів.
4. Назвіть фігуру, яку описує магнітна вісь атома навколо напрямку вектора напруженості постійного магнітного поля, якщо змінне магнітне поле співпадає з напрямком постійного поля і якщо не співпадає.
5. Наведіть причину затухання прецесії магнітного моменту атомів у постійному магнітному полі.
6. Наведіть причину ускладнення рівнянь Максвелла при описі анізотропних середовищ.

Лекція № 17. Основні принципи випромінювання електромагнітних хвиль

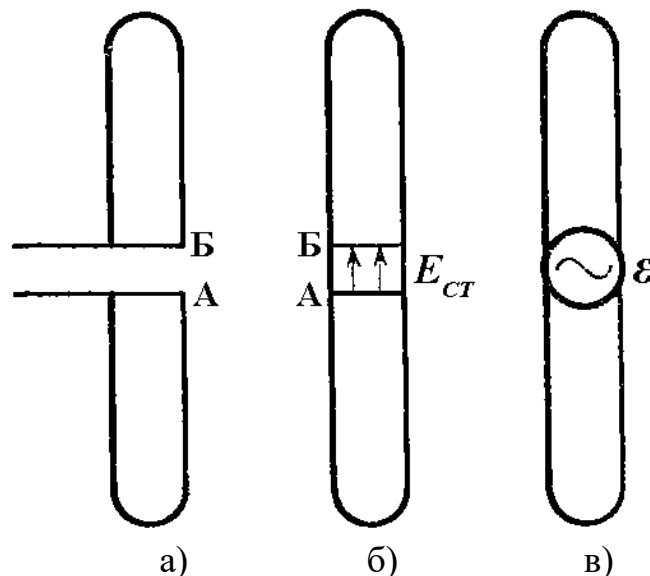
Особливості опису випромінювання електромагнітних хвиль

Процес передавання електромагнітного поля від джерела в оточуючий його простір називається **випромінюванням електромагнітних хвиль**.

Основна задача теорії випромінювання полягає у розрахунку електромагнітного поля, створюваного джерелами з відомими параметрами.

Як відомо електромагнітне поле створюється струмами і зарядами системи, призначеної для випромінювання, – **антени**, які виникають у ній під дією високочастотних електромагнітних коливань, що створюються спеціальним генератором, з'єднаним з антеною лінією зв'язку. Тому теоретично джерелом електромагнітного поля є всі струми і заряди системи генератор – лінія зв'язку – антена. Однак на практиці генератор і лінія зв'язку участі у генеруванні електромагнітних хвиль не беруть, оскільки вони екрануються і тому вплив струмів і зарядів на їх поверхні має незначний вплив на структуру і значення випромінюваного електромагнітного поля. Для спрощення аналізу вплив генератора і лінії зв'язку замінюють на певне стороннє поле, що взаємодіє з антеною.

Позначимо вектор стороннього поля $\vec{E}_{ст}$ і розглянемо антену типу вібратор, до якої підводять електромагнітні коливання від генератора, рис. 17.1 а.



а) вібратор з живлячою лінією; б) розподіл стороннього поля на поверхні вібратора; в) вібратор з джерелом сторонньої ЕРС

Рис. 17. 1. Ілюстрація до визначення джерел поля

Враховуючи вищенаведені спрощення, можна вважати, що вплив генератора і лінії зв'язку еквівалентний додаванню стороннього поля з напруженістю $E_{ст}$ в проміжку АБ, рис. 17.1 б. Під дією стороннього поля в антенні виникає сторонній струм, який разом із зарядами створює сторонній струм.

Якщо матеріал антени має нескінченно велику провідність, то тангенціальна складова електричного поля на її поверхні дорівнює нулю:

$$\vec{E}_{\text{tg}} + \vec{E}_{(cm)\text{tg}} = 0. \quad (17.1)$$

Тому розрахунок електромагнітного поля в усталеному режимі зводиться до зовнішньої задачі – розрахунку поля, створюваного зовнішніми джерелами енергії. Отриманий розв'язок згідно з теоремою про єдиний розв'язок є істинним. Також згідно з теоремою про єдиний розв'язок як граничні умови на поверхні можна використовувати для вектора \vec{H} :

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{j}_S = \vec{j}_{cm}, \quad (17.2)$$

де $\vec{j}_S = \vec{j}_{cm}$ - вектор поверхневої щільності стороннього струму антени, \vec{n} - орт нормалі до поверхні.

Для цього також на зовнішній стороні S необхідно додати спеціальне джерело, яке враховує існування стороннє поле \vec{E}_{cm} .

Як правило розподіл струму в антені є наперед відомим с достатньою точністю з фізичних або практичних міркувань. Наприклад в антені, яка складається з тонких провідників, розподіл струму є таким як у відрізьку довгої лінії. У такому випадку джерела поля доцільно представляти певним розподілом струмів, оскільки розрахунок електромагнітного поля за заданими струмами є простішим, ніж вирішення задачі на основі граничних умов (17.1). Якщо розподіл струмів невідомий, задають джерела стороннього поля.

Точний розподіл напруженості стороннього поля, як правило, теж невідомий. В описаному прикладі стороннє поле локалізовано у малому проміжку АБ, рис. 17.1 в. У цьому випадку розподіл поля можна охарактеризувати сторонньою ЕРС:

$$\xi = \int_A^B \vec{E}_{cm} d\vec{l}. \quad (17.3)$$

Розглянемо складнішу систему, яка складається з антени з відомим розподілом струму і екрану-провідника, розташованого поруч з антеною, розподілом струму в якому невідомий, рис. 17.2.

 Антена



Рис. 17.2. Антена над екраном-провідником

Електромагнітне поле для даної системи залежить від усіх струмів антени і екрану, однак з практичної точки зору доцільно враховувати лише струм

антени. Тому він вважається зовнішньо заданим стороннім струмом, а струм екрану – власним струмом середовища або наведеним струмом.

На поверхні екрану з ідеальною провідністю тангенціальна складова напруженості електричного поля дорівнює нулю, $E_\tau = 0$. Таким чином задача з розрахунку поля антени над екраном полягає у вирішенні рівнянь Максвела з відомим джерелом поля у вигляді стороннього струму за таких граничних умов на поверхні екрану:

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0,$$

де \vec{n} - орт нормалі до його поверхні.

Закони розповсюдження електромагнітних хвиль

Запишемо рівняння Максвела для однорідного середовища:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

$$\text{div}\vec{E} = \rho / \varepsilon_a.$$

$$\text{div}\vec{H} = 0.$$

Замінивши вектори напруженості електромагнітного поля \vec{E} і \vec{H} у рівняннях Максвела на узагальнені електродинамічні потенціали \vec{A} і φ

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot}\vec{A}; \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi, \quad (17.3a)$$

можливо отримати однотипні хвильові рівняння відносно узагальнених потенціалів:

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta}; \quad (17.4)$$

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (17.5)$$

Найпростіше рішення хвильового рівняння для однієї змінної розглядалося раніше і представляється сумою двох хвиль – прямої і зворотної.

Розглянемо тривимірний випадок задачі відносно деякої змінної ψ , коли джерела поля мають точковий характер. У цьому випадку електромагнітне поле і всі його параметри є функціями відстані r від точки, де знаходиться джерело поля, до точки спостереження і не залежать від кутових координат. Тому вказану задачу зручно вирішувати в сферичній системі координат, для якої

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (17.6)$$

З урахуванням (17.6) хвильове рівня має вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (17.7)$$

Використавши заміну $v = \psi \cdot r$, отримаємо:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r^3} v.$$

Підставивши у рівняння (17.7) розраховані співвідношення, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (17.8)$$

Рівняння (17.8) збігається з аналогічним рівнянням для одновимірного випадку. Використовуючи вже відоме рішення знаходимо, що $v = \psi_1(t - r/v) + \psi_2(t + r/v)$ і $\psi = v/r$, тому

$$\psi = \frac{\psi_1(t - r/v)}{r} + \frac{\psi_2(t + r/v)}{r}. \quad (17.9)$$

Розв'язок (17.9) також має хвильовий характер. Аргументи функцій ψ_1 і ψ_2 змінюються по змінній r зі швидкістю v і $-v$ та мають однакове значення у всіх точках простору з однаковим значенням параметра r , тобто на сфері. Тому розв'язок (17.9) описує **сферичні хвилі**, тобто хвилі у яких хвильові поверхні є сферами.

Перший частковий розв'язок $\psi_1(t - r/v)$ описує хвилю, яка розповсюджується зі швидкістю v від центра у нескінченність, другий – $\psi_2(t + r/v)$ – описує хвилю, яка розповсюджується з тією ж швидкістю v із нескінченності в центр. На відміну від випадку плоскої хвилі амплітуда сферичної хвилі зі збільшенням радіуса r зменшується.

Розглянемо перший частковий розв'язок $\psi_1(t - r/v)$, як той, що більше відповідає фізичній постановці задачі розповсюдження електромагнітних хвиль від джерела до навколишнього середовища. Згідно з цим рішенням можна стверджувати, що потенціал поля φ описується таким виразом:

$$\varphi = \frac{\psi(t - r/v)}{r}, \quad (17.10)$$

де ψ – поки що невідома функція.

Оскільки при $v \left(1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}\right) \rightarrow \infty$ рівняння (17.5) переходить у рівняння Пуассона для потенціалу електростатичного поля. Тому розв'язок (17.10) для випадку точкового джерела при $v \rightarrow \infty$ визначає потенціал точкового заряду q :

$$\varphi = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon r}. \quad (17.11)$$

Врахування кінцевої швидкості v розповсюдження хвилі дає наступний результат:

$$\varphi = \frac{q(t - r/v)}{4\pi\varepsilon_a r}. \quad (17.12)$$

Як видно з формули (17.12) розв'язок рівняння Даламбера відрізняється від розв'язку рівняння Пуассона тим, що значення функції φ в точці, яка знаходиться від джерела на відстані r , для моменту часу t визначається значенням заряду не в той же момент часу t , а в попередній момент $t' = t - r/v$, де r/v – час розповсюдження хвилі від джерела до точки спостереження. Тому значення функції φ запізнюється відносно поточного заряду q .

За допомогою відомого рішення для точкового джерела (17.12) можливо отримати рішення для загального випадку розподілу заряду в довільному об'ємі V . Розбиваючи об'єм V , заповнений зарядами з об'ємною щільністю $\rho(t)$, рис. 17.3, на елементарні об'єми з зарядом $\rho(t)dV$, отримуємо, що елементарний заряд створює у точці спостереження потенціал

$$d\varphi = \frac{\rho(t - R/v)}{4\pi\epsilon_a R} dV, \quad (17.13)$$

де R – відстань від елементарного об'єму dV до точки спостереження.

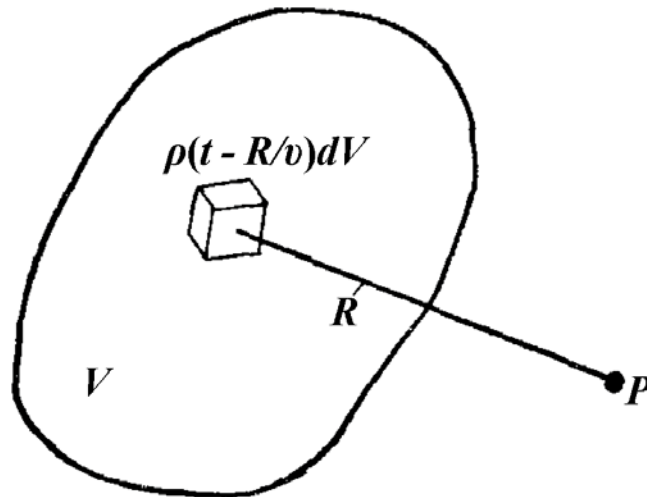


Рис. 17.3. Ілюстрація до розрахунку скалярного потенціалу φ

Потенціал, створений усіма зарядами, дорівнює:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho(t - R/v)}{R} dV. \quad (17.14)$$

Слід підкреслити, що при обчисленні потенціалу φ , значення об'ємної щільності заряду ρ згідно з формулою (17.14) беруться для різних моментів часу.

Враховуючи, що проекції векторного потенціалу \vec{A} також є рішенням рівняння Даламбера (17.4), аналогічно рішення для скалярного потенціалу (17.14), отримуємо:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{j(t - R/v)}{R} dV. \quad (17.15)$$

Як і у випадку розрахунку скалярного потенціалу φ , при розрахунку векторного потенціалу \vec{A} у момент часу t , значення щільності струму j елементарного об'єму dV береться у момент часу $t' = t - R/v$.

Часто для наближених розрахунків об'ємний розподіл струмів і зарядів замінюється їх лінійним розподілом по контуру провідника. У цьому випадку формули (17.14) і (17.15) мають вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\chi(t - R/v)}{R} dl; \quad (17.16)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_l \frac{I(t - R/v)}{R} dl, \quad (17.17)$$

де χ – лінійна щільність заряду,
 I – струм провідника.

Значення χ та I згідно з рівнянням неперервності пов'язані між собою співвідношенням:

$$\frac{\partial I}{\partial l} = -\frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (17.18)$$

Якщо струми і заряди змінюються за гармонічним законом

$$I = I_k e^{i\omega t}; \chi = \chi_k e^{i\omega t}, \quad (17.19)$$

I_k, χ_k – амплітудні значення.

Враховуючи, що

$$e^{i\omega(t-R/v)} = e^{-i\omega R/v} e^{i\omega t} = e^{-ikR} e^{i\omega t}, \quad (17.20)$$

ліві і праві частини вище записаних рівнянь можна скоротити на $e^{i\omega t}$ і отримати наступні вирази:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\chi e^{-ikR}}{R} dl; \quad (17.21)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_l \frac{I_k e^{-ikR}}{R} dl. \quad (17.22)$$

Аналогічно замість формули (17.18)

$$\frac{\partial I}{\partial l} = -i\chi_k \omega. \quad (17.23)$$

На відміну від формул (17.16) - (17.18) останні рівняння описують залежність не між миттєвими значеннями, а між комплексними амплітудами. Перехід до миттєвих комплексних значень здійснюється множенням цих виразів на $e^{i\omega t}$.

З наведеного вище можна зробити висновок, що за умови гармонічних процесів запізнювання на час R/v враховується множителем e^{-ikR} і виражає зсув фази $\omega R/v$.

Розглянемо розрахунок векторів напруженостей \vec{E} і \vec{H} електромагнітного поля. Використовуючи розраховані значення скалярного φ і векторного \vec{A} потенціалів, ми можемо розрахувати значення векторів \vec{E} і \vec{H} за формулами (17.3а). Однак для розрахунку скалярного потенціалу не обов'язково здійснювати процедуру інтегрування у формулі (17.14). Якщо векторний потенціал \vec{A} вже розраховано за формулою (17.15), то скалярний потенціал можна легко розрахувати, використовуючи рівняння

$$\text{div} \vec{A} = -\epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (17.24)$$

Також можливо взагалі не брати до уваги скалярний потенціал. Через векторний потенціал \vec{A} можливо визначити напруженість магнітного поля безпосередньо

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \vec{A}, \quad (17.25)$$

а потім, використавши перше рівняння Максвелла для середовища без струмів провідності,

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

розрахувати значення вектора напруженості електричного поля \vec{E} .

Запитання

1. Наведіть основну задачу теорії випромінювання.
2. Опишіть причину використання стороннього джерела поля при розрахунку поля, створюваного антеною.
3. Наведіть метод опису стороннього поля, якщо точний розподіл його напруженості є невідомим.
4. Поясніть причину, чому в системі антена-екран доцільно враховувати лише струми антени.
5. Назвіть тип хвилі, який створює точкове джерело.
6. Вкажіть фізичний смисл часткових розв'язків хвильового рівняння для точкового джерела.
7. Наведіть умову, за якої рівняння Пуассона переходить у хвильове рівняння Даламбера.
8. Опишіть методику отримання рішення для довільного розподілу струмів і зарядів на основі відомого рішення для точкового джерела.
9. Наведіть приклад, коли для рішення рівнянь Даламбера зручно об'ємну щільність струму (заряду) замінити на лінійну.
10. Опишіть методику розрахунку векторів напруженості електричного і магнітного полів, на основі узагальнених електродинамічних потенціалів.

Лекція № 18. Аналіз властивостей електромагнітного поля, створюваного диполем Герца

Одним з найпростіших випромінювачів електромагнітних хвиль є *диполь Герца* – малий відрізок лінійного провідника l , через який протікає струм I , що не змінюється вздовж його довжини. Такий струм, як випливає із закону збереження кількості електроенергії, може протікати в тому випадку, якщо на кінцях провідника знаходяться змінні в часі точкові заряди q і $-q$ рис. 18.1, пов'язані з струмом співвідношенням

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

Визначимо поле, що створюється таким випромінювачем. У точці на відстані r від середньої точки відрізка l , за умови малості лінійних розмірів елемента l у порівнянні з відстанню, $r \gg l$, закон для опису векторного потенціалу \vec{A} має вид

$$\vec{A} = \mu \frac{I(t - r/v) \vec{l}}{4\pi r}.$$

Скалярний потенціал φ визначиться як алгебраїчна сума потенціалів зарядів q і $-q$:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q(t - r_1/v)}{r_1} - \frac{q(t - r_2/v)}{r_2} \right].$$

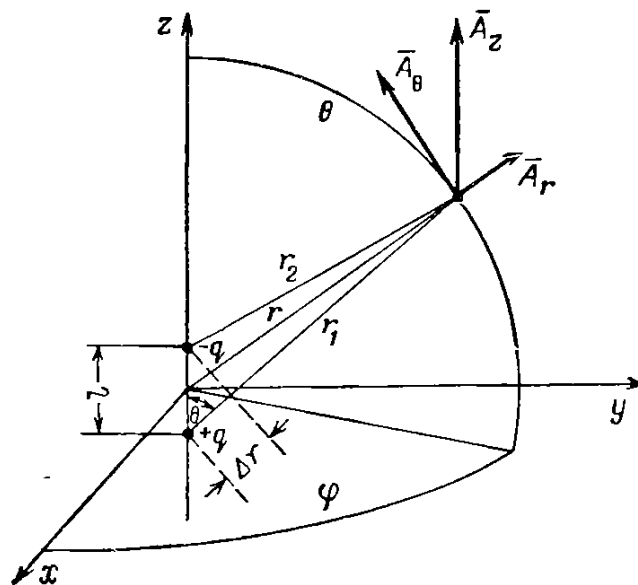


Рис. 18.1. Ілюстрація до розрахунку поля, створюваного диполем Герца

Вираз, що стоїть в дужках, легко перетворити за допомогою формули

$$f(t, r + \Delta r) - f(t, r) = \frac{\partial f(t, r)}{\partial r} \Delta r.$$

Тому

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q(t-r/v)}{r} \right] \Delta r = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{q'(t-r/v)}{vr} - \frac{1}{r^2} q(t-r/v) \right] \Delta r,$$

де $q'(t-r/v)$ є похідною по аргументу $t-r/v$, а відрізок Δr , згідно з рис. 18.1, дорівнює

$$\Delta r = l \cos \theta.$$

Припустимо, що напрямок струму в елементі l співпадає з позитивним напрямком осі z , і вектор-потенціал має лише одну проекцію A_z , що дорівнює

$$A_z = A = \mu \frac{I(t-r/v)}{4\pi r} l.$$

У сферичній системі координат проекції векторного потенціалу \vec{A} визначаються виразами:

$$\begin{aligned} A_z &= A_z \cos \theta = \mu \frac{I(t-r/v)}{4\pi r} l \cos \theta. \\ A_\theta &= -A_z \sin \theta = -\mu \frac{I(t-r/v)}{4\pi r} l \sin \theta. \\ A_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Напруженість магнітного поля \vec{H} знаходиться по формулі (18.1). Користуючись виразом для ротора в сферичній системі координат, отримаємо

$$\begin{aligned} H_r &= H_\theta = 0. \\ H_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{vr} I'(t-r/v) + \frac{I(t-r/v)}{r^2} \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Напруженість електричного поля розраховується підстановкою значень проекцій \vec{H} із (18.1) у рівняння

$$\text{rot} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (18.2)$$

Розраховуючи значення $\text{rot} \vec{H}$, у сферичній системі координат, отримаємо

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta H_\varphi) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{I'(t-r/v)}{vr^2} + \frac{I(t-r/v)}{r^3} \right] \cos \theta; \end{aligned} \quad (18.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_{\theta}}{\partial t} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta H_{\varphi}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{I''(t-\frac{r}{v})}{v^2 r} + \frac{I'(t-\frac{r}{v})}{vr^2} + \frac{I(t-\frac{r}{v})}{r^3} \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Проінтегрувавши вирази (18.3) і (18.4) по змінній часу, отримаємо:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{I(t-\frac{r}{v})}{vr^2} - \frac{q(t-\frac{r}{v})}{r^3} \right] \cos \theta; \quad (18.4)$$

$$E_{\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{I'(t-\frac{r}{v})}{v^2 r} + \frac{I(t-\frac{r}{v})}{vr^2} - \frac{q(t-\frac{r}{v})}{r^3} \right] \sin \theta. \quad (18.5)$$

Розглядаючи вирази, отримані для складових електричного і магнітного полів, ми бачимо, що окремі доданки в них пропорційні $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ і $\frac{1}{r^3}$. Це дозволяє написати більш прості, але наближені формули для так званих *ближньої* і *дальньої* зон.

Ближня зона або **зона індукції** – це область, в якій члени, пропорційні $\frac{1}{r^3}$ і $\frac{1}{r^2}$, у виразах для E та H переважають над іншими членами.

Дальня зона або **зона випромінення** – це область, в якій переважаючими членами в виразах для E та H є складові, пропорційні $\frac{1}{r}$. Границі ближньої і дальньої зон визначаються відношенням між величинами доданків, що входять у вирази (18.1), (18.4), (18.5). Легко помітити, що ці відношення залежать від швидкості зміни струмів та зарядів у часі. Для конкретності розглянемо найбільш важливий для практики випадок, коли струм в антені змінюється за гармонічним законом $Ie^{i\omega t}$, так що

$$I_{\kappa}(t-\frac{r}{v}) = Ie^{i\omega(t-\frac{r}{v})} = Ie^{-i\frac{\omega}{v}r} e^{i\omega t}.$$

Оскільки

$$I = -\frac{dq}{dt},$$

то

$$q_{\kappa}(t-\frac{r}{v}) = -\frac{1}{i\omega} Ie^{-i\frac{\omega}{v}r} e^{i\omega t}.$$

Підставляючи значення заряду та струму, а також його похідних у вирази (18.1), (18.4), (18.5) для проєкцій H та E , і опускаючи загальний множник $e^{i\omega t}$, отримаємо

$$H_\varphi = \frac{\Pi}{4\pi} \left[i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin\theta e^{-ikr}; \quad (18.6)$$

$$E_r = \frac{k}{\omega\varepsilon} \frac{\Pi}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} - i\frac{1}{kr^3} \right] \cos\theta e^{-ikr}; \quad (18.7)$$

$$E_\theta = \frac{k}{\omega\varepsilon} \frac{\Pi}{\omega\varepsilon} \left[i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} - i\frac{1}{kr^3} \right] \sin\theta e^{-ikr}, \quad (18.8)$$

де $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$.

З аналізу розрахованих виразів неважко помітити, що границя ближньої і дальньої зон для гармонічного процесу визначається кутовою частотою поля ω або довжиною хвилі λ . Якщо $r \ll \lambda$ (ближня зона), переважаючим у виразі для H буде член, пропорційний $\frac{1}{r^2}$, а у виразі для E — член, пропорційний $\frac{1}{r^3}$. У

дальній зоні ($r \gg \lambda$) переважаючими будуть члени, пропорційні $\frac{1}{r}$. Взаємна орієнтація векторів \vec{E} та \vec{H} в полі електричного диполя зображена на рис. 18.2.

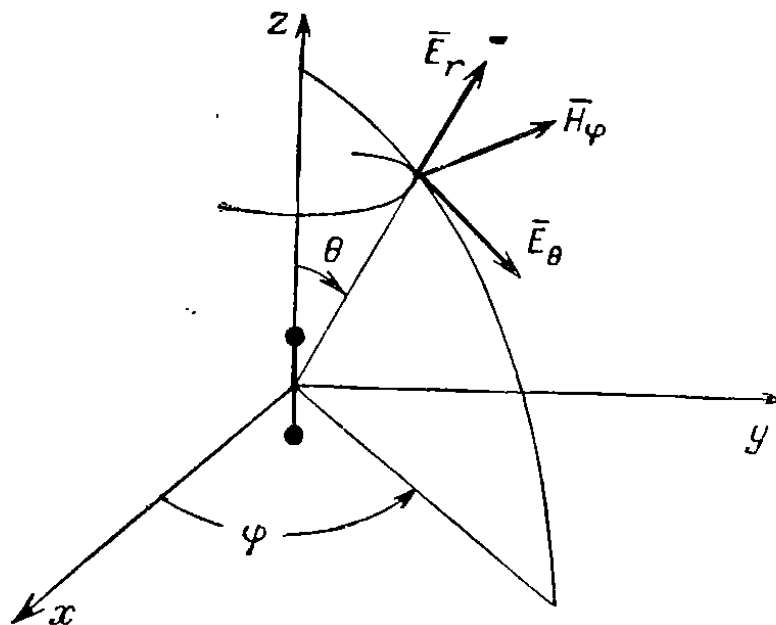


Рис. 18.2. Взаємна орієнтація векторів E та H у полі диполя Герца

Розглянемо детальніше поле в ближній та дальній зонах.

Ближня зона

Для цієї зони $r \ll \lambda$, отже, множник e^{-ikr} , що враховує запізнення, можна вважати рівним одиниці

$$e^{-ikr} = e^{-i\frac{2\pi r}{\lambda}} \approx 1.$$

Це означає, що при $r \ll \lambda$ запізненням можна знехтувати. Зберігаючи тільки найбільші члени, пропорційні $\frac{1}{r^3}$ у виразах (18.7) та (18.8), і пропорційні $\frac{1}{r^2}$ у виразі (18.6) отримаємо наближені значення для поля у ближній зоні у вигляді:

$$H_{\varphi} = \frac{\Pi}{4\pi r^2} \sin \theta. \quad (18.9)$$

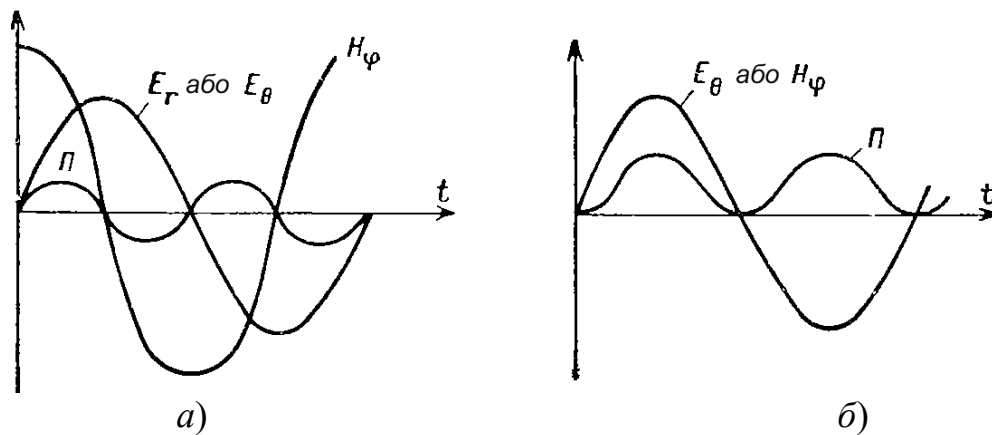
$$E_r = -\frac{ql}{2\pi\epsilon r^3} \cos \theta = -i \frac{\lambda Z_0 \Pi}{4\pi^2 r^3} \cos \theta. \quad (18.10)$$

$$E_{\theta} = -\frac{ql}{4\pi\epsilon r^3} \sin \theta = -i \frac{\lambda Z_0 \Pi}{8\pi^2 r^3} \sin \theta, \quad (18.11)$$

де $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Формули (18.9)-(18.11) тим точніші, чим r менше у порівнянні з λ .

У ближній зоні магнітне поле визначається струмом, а електричне — зарядами. Ці поля у випадку гармонічного процесу зсунуті у часі. Напруженість електричного поля відстає по фазі (множник $-i$) від напруженості магнітного поля на $\pi/2$.



а) ближня зона; б) дальня зона

Рис. 18.2. Часові залежності складових поля диполя Герца

На рис. 18.2, а показаний графік зміни складових електричного і магнітного полів у часі. Поле у ближній зоні має переважно реактивний характер, тобто вектори E і H зсунуті по фазі на 90° . Вектор Пойнтінга, що дорівнює добутку \vec{E} та \vec{H} , змінюється з подвійною частотою, маючи як позитивні, так і негативні значення. Його середнє значення за період дорівнює нулю. Характер руху головної частини енергії, що визначається виразами (18.9) – (18.11) – коливальний. Енергія чверть періоду рухається від джерела поля в навколишній простір і в наступну чверть періоду повертається назад.

Зауважимо, що вирази (18.9) – (18.11) відповідають значенням, які ми отримали б, якби для розрахунку поля змінних струмів і зарядів скористалися законами постійних полів. Дійсно, (18.9) є не що інше, як формула Біо-Савара для елемента постійного струму. Проекції E_r та E_θ в (18.10) і (18.11), збігаються з результатами розрахунку вектора \vec{E} за формулою електростатичного поля

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi,$$

де

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon r_2} \approx -\frac{ql \cos\theta}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Таким чином, нехтування запізненням, що допустимо за умови $r \ll \lambda$, призводить до опису диполя Герца полями за законами Кулона та Біо-Савара. Іншими словами, для миттєвих значень змінних полів можна застосувати закони постійних полів лише в тих випадках, коли можна знехтувати запізненням. Це буде справедливо в точках, тим більш віддалених від джерел поля, чим повільніше поле змінюється в часі. Так, для промислової електротехніки, де застосовуються повільно змінні струми з частотою $f = 50 \text{ Гц}$ або довжиною хвилі $\lambda = v/f = 6 \cdot 10^6 \text{ м}$, запізненням можна знехтувати практично на будь-яких відстанях від джерела, де поле ще має помітну величину. Навпаки, в радіотехніці, де застосовуються швидкозмінні поля з частотами, що перевищують величину $3 \cdot 10^{10} \text{ гц}$, тобто з λ , меншими 1 см , границі ближньої зони у багатьох випадках стають настільки малими, що весь простір навколо джерела повинен розглядатися як дальня зона.

Дальня зона або зона випромінення

Для цієї зони $r \gg \lambda$. Запізненням знехтувати не можна. Наближені значення для E та H в цій зоні отримаємо, зберігши в (18.6), (18.8) найбільші члени, пропорційні $1/r$. Відповідно отримаємо:

$$H_\varphi = \frac{l}{4\pi v r} I'(t - r/v) \sin\theta; \quad (18.12)$$

$$E_\theta = \frac{l}{4\pi\epsilon v^2 r} I'(t - r/v) \sin\theta. \quad (18.13)$$

Крім того, присутня ще незначна складова E_r , що наближено дорівнює

$$E_r \approx \frac{l}{2\pi\epsilon v r^2} I'(t - r/v) \cos\theta. \quad (18.14)$$

Для поля, яке змінюється за гармонічним законом, будемо мати:

$$H_\varphi = i \frac{k}{4\pi} I l \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta = \frac{I l}{2\lambda r} e^{-ikr} \sin\theta; \quad (18.15)$$

$$E_\theta = i \frac{\omega\mu}{4\pi} I l \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta = Z_0 \frac{I l}{2\lambda r} e^{-ikr} \sin\theta; \quad (18.16)$$

$$E_r = Z_0 \frac{I l}{2\pi r^2} e^{-ikr} \cos \theta, \quad (18.17)$$

де $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

Проекція E_r електричного поля в прийнятій нами степені наближення не повинна враховуватись, оскільки її величина обернено пропорційна r^2 . Дійсно, як видно із формул (18.16) та (18.17), відношення амплітуд

$$\frac{E_{rm} |_{\theta=0}}{E_{\theta m} |_{\theta=\pi/2}} = \frac{\lambda}{\pi r} \ll 1.$$

Тому в дальній зоні можна враховувати тільки одну складову E_θ електричного поля.

Розглядаючи вирази (18.12) і (8.13), ми бачимо, що як електричне, так і магнітне поля в дальній зоні пропорційні похідній струму в антені.

Напруженість електричного і магнітного полів збігається в часі по фазі. На рис. 18.2, б показані графіки зміни в часі E_θ та H_φ та значення вектора Пойнтінга, рівного добутку $E_\theta H_\varphi$. На відміну від ближньої зони вектор Пойнтінга тут не змінює знаку і енергія передається протягом усього періоду в одному напрямку – від антени в навколишній простір. На рис. 18.3 показано напрями векторів E_θ, H_φ і вектора \vec{P} , що є їх векторним добутком. Вектори E_θ та H_φ показано для моментів часу, коли $I'(t) < 0$. Коли $I'(t)$ змінить знак, вектори E_θ та H_φ будуть мати протилежні напрямки, але напрямок вектора \vec{P} збережеться без змін. Отже, головна частина енергії в дальній зоні випромінюється, рухаючись вздовж радіуса r зі швидкістю v .

Зауважимо, що при нехтуванні запізненням у виразах для \vec{E} і \vec{H} зникають складові, що відповідають полю випромінювання. Таким чином, випромінювання безпосередньо пов'язане з кінцевим значенням швидкості поширення.

Електромагнітне поле в дальній зоні є сферичною хвилею, в якій електричний і магнітний вектори перпендикулярні напрямку розповсюдження. Така хвиля, як відомо, є поперечною електромагнітною хвилею.

У сферичній хвилі, що випромінюється диполем Герца, електричний вектор направлений по дотичній до координатної лінії θ , а магнітний вектор – по дотичній до координатної лінії φ .

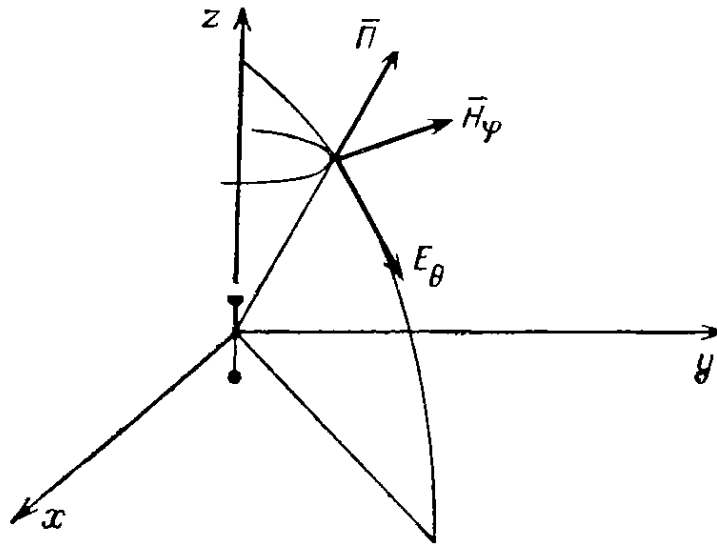


Рис. 18.3. Взаємна орієнтація векторів поля диполя Герца в дальній зоні

Обидва вектори \bar{E} та \bar{H} зменшуються обернено пропорційно першій степені відстані.

Як видно із виразів (18.15) і (18.16), E_θ та H_ϕ знаходяться у співвідношенні

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (18.18)$$

Напруженість випроміненого електромагнітного поля залежить від кута θ уздовж осі диполя. За умови $\theta=0$ випромінюване поле відсутнє. Поле максимальне при $\theta = \frac{\pi}{2}$ в площині, перпендикулярній осі диполя.

Позначаючи максимальні значення амплітуд E_m та H_m , що відповідають $\theta = \pi/2$, через E_m і H_m , отримаємо, що при $r = \text{const}$

$$E_m(\theta) = E_{\max} \sin \theta \quad \text{та} \quad H_m(\theta) = H_{\max} \sin \theta.$$

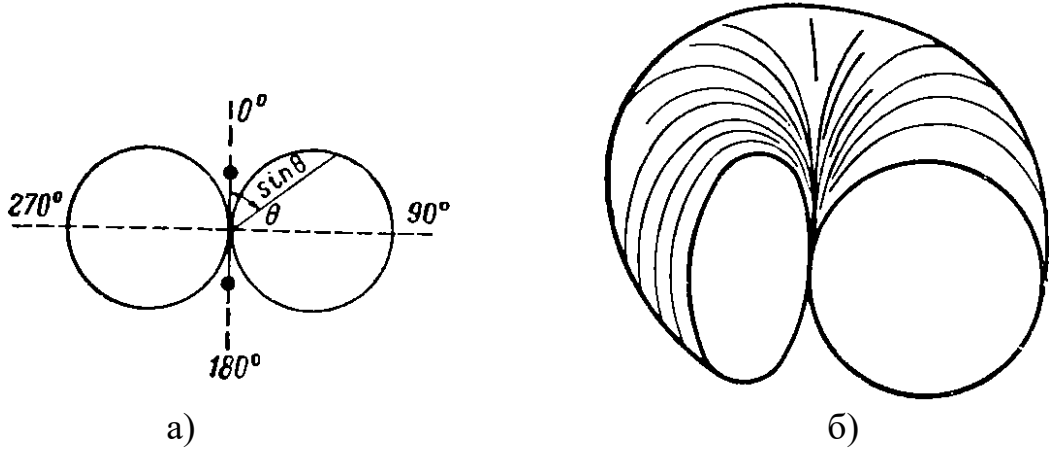
Залежності $E_m(\theta)$ та $H_m(\theta)$ або E_m/E_{\max} та H_m/H_{\max} в функції кута θ зазвичай зображуються у вигляді полярних діаграм направленості, в яких радіус-вектор, відкладений в напрямку θ , чисельно дорівнює $E_m(0)/E_{\max}$ або H_m/H_{\max} .

Така діаграма направленості для поля диполя Герца наведена на рис. 18.4, а. Рівняння кривої $\rho = \sin \theta$ в полярних координатах є рівнянням кола. Оскільки поле диполя Герца не залежить від кута φ , то просторова діаграма направленості зображується у вигляді тіла, утвореного обертанням фігури 18.4, а докола вертикальної осі, рис. 18.8, б. Повну потужність P_Σ , що була випромінена диполем, ми отримаємо, проінтегрувавши значення вектора Π_{cp} по сфері довільного радіуса r :

$$P_\Sigma = \int_S \Pi_{cp} dS,$$

де dS — елемент сферичної поверхні, що дорівнює

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$



а) в площині, що проходить через вісь диполя (полярні координати)
б) просторова діаграма направленості

Рис. 18.4. Діаграма спрямованості диполя Герца

Неважко показати, що

$$P_{cp} = Z_0 \frac{(I_m l)^2}{8r^2 \lambda^2} \sin^2 \theta,$$

де I_m — амплітуда струму.

Тоді

$$\begin{aligned} P_{\Sigma} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Z_0 \frac{(I_m l)^2}{8r^2 \lambda^2} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{\pi Z_0 (I_m l)^2}{8\lambda^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi Z_0}{3\lambda^2} (I_m l)^2. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Випромінена потужність не залежить від радіуса сфери. Цей результат є природним наслідком закону збереження енергії, оскільки ми розглядаємо простір, в якому відсутні струми провідності, а отже, відсутні втрати на джоулівське тепло. Випромінену потужність можна представити як

$$P_{\Sigma} = \frac{I_m^2 R_{\Sigma}}{2}. \quad (18.20)$$

де R_{Σ} — так званий опір випромінювання, що дорівнює

$$R_{\Sigma} = \frac{2P_{\Sigma}}{I_m^2} = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (18.21)$$

Для вакууму $Z_0 = 120\pi \text{ ом}$, і опір випромінювання дорівнює

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (18.22)$$

Епюри електричних силових ліній диполя, що коливається, для різних моментів часу були обчислені і побудовані Герцем, рис. 18.5.

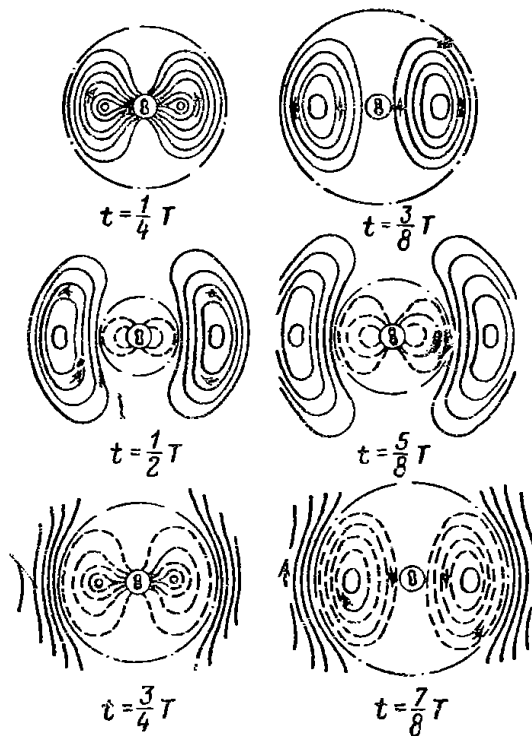


Рис. 18.5. Силові лінії електричного поля диполя Герца в різні моменти часу

Як видно з рис. 18.5, поблизу диполя електричні силові лінії опираються на заряди диполя. У дальній зоні електричні силові лінії вже не закінчуються на зарядах, а утворюють замкнуті криві, що лежать в меридіональних площинах. Магнітні силові лінії є колами з центром на осі диполя. Ці замкнуті електричні і магнітні силові лінії характеризують сферичну хвилю, яка поширюється радіально зі швидкістю світла.

Запитання

1. Опишіть структуру антени типу диполь Герца.
2. Назвіть критерії, за якими простір навколо диполя Герца поділяється на ближню і дальню зони.
3. Наведіть члени у виразах для напруженостей електричного і магнітного полів, які будуть переважати у ближній зоні.
4. Опишіть процес передавання енергії від диполя Герца у навколишнє середовище у ближній зоні.
5. Охарактеризуйте зсув фаз між векторами напруженості електричного і магнітного полів у дальній зоні.
6. Наведіть параметр до якого пропорційні електричне і магнітне поля в дальній зоні.
7. Назвіть тип хвилі, яка описує поле диполя Герца у дальній зоні.
8. Наведіть функціональну залежність, яку описує діаграма спрямованості.
9. Наведіть форму діаграми спрямованості диполя Герца.
10. Охарактеризуйте епюри силових ліній електричного поля диполя Герца.

Лекція № 19. Рамкова антена

Розглянемо поле, створене **рамковою антенною** – круглим плоским витком радіуса a , рис. 19.1. Припустимо, що по рамці тече синусоїдальний струм $Ie^{i\omega t}$, однаковий в усіх точках рамки. Це буде мати місце у випадках, коли периметр рамки малий у порівнянні з довжиною хвилі струму. Внаслідок симетрії, векторний потенціал поля, створюваний рамковою антенною, має лише одну складову A_φ .

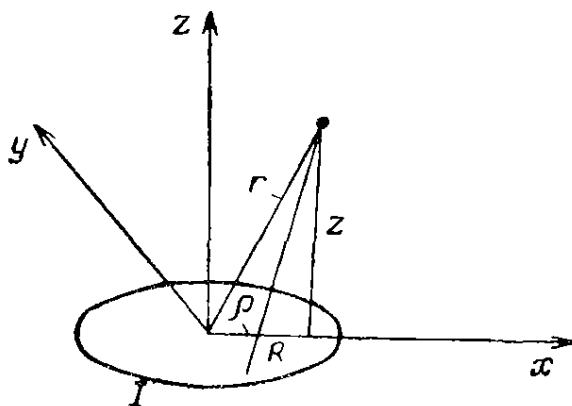


Рис. 19.1. До розрахунку поля рамкової антени

Позначаючи через R відстань від довільної точки на колі рамки до точки спостереження, отримаємо

$$A_\kappa = A_{\varphi\kappa} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{I e^{i\left(\omega t - \omega \frac{R}{v}\right)}}{R} dl_1,$$

де $dl_1 = dl \cos \varphi = a \cos \varphi d\varphi$.

Підставляючи значення dl_1 і опускаючи тимчасовий множник $e^{i\omega t}$, знаходимо:

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} I \int_0^\pi \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \varphi d\varphi, \quad (19.1)$$

де $k = \omega / v = 2\pi / \lambda$,

так як

$$R^2 = a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi, \quad \rho^2 + z^2 = r^2, \quad \rho = r \sin \theta,$$

то

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi.$$

Безпосереднє обчислення інтеграла (19.1) є трудомісткою операцією. Тому нижче наведено спрощені процедури його розрахунку для наступних двох випадків.

1. Зона рамки. Це область, де $R \ll a$. Так як $a \ll \lambda$, то для цієї зони $kR = \frac{2\pi}{\lambda} R \ll 1$ і $e^{-ikR} \approx 1 - ikR$.

Підставляючи останній вираз в (19.1), отримаємо:

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} \dot{I} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{R} - ik \frac{\mu a \dot{I}}{2\pi} \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi. \quad (19.2)$$

Другий інтеграл у формулі (19.2) дорівнює нулю. Що стосується першого інтеграла, то він в точності збігається зі значенням векторного потенціалу для поля постійного струму в круглому витку з тією лише різницею, що замість постійного струму сюди входить змінний струм. Таким чином, значення поля в зоні рамки визначається тими ж формулами, що і поле постійного струму.

2. Зона, віддалена від рамки.

Для цього випадку виконується умова $R \gg a$, тому

$$R = r \sqrt{1 - \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{r^2}} \approx r - a \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r - a \sin \theta \cos \varphi} \approx \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \sin \theta \cos \varphi,$$

і

$$e^{-ikR} \approx e^{-ikr} (1 + ika \sin \theta \cos \varphi).$$

Підставляючи наближене значення $1/R$ і e^{-ikR} в (19.1), отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} \dot{I} e^{-ikr} & \left(\left[\frac{1}{r} \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi + \frac{a}{r^2} \sin \theta \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \right] + \right. \\ & \left. ika \sin \theta \left[\frac{1}{r} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{a}{r^2} \sin \theta \int_0^\pi \cos^3 \varphi d\varphi \right] \right). \end{aligned}$$

Так як

$$\int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 0, \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}, \int_0^\pi \cos^3 \varphi d\varphi = 0,$$

то остаточно

$$\dot{A}_\varphi = \frac{\mu a}{2\pi} \dot{I} \left[\left(ik + \frac{1}{r} \right) \right] \sin \theta e^{-ikr}. \quad (19.3)$$

Тепер можна обчислити магнітне поле з співвідношення

$$\dot{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \dot{A}.$$

Використовуючи сферичну систему координат і враховуючи, що

$$A_r = A_\theta = 0,$$

отримаємо:

$$H_\varphi = 0;$$

$$\dot{H}_r = \frac{1}{\mu} \text{rot}_r \dot{A} = \frac{1}{\mu r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \dot{A}_\varphi) = i \frac{a^2}{2} \dot{I} \left(\frac{k}{r^2} - i \frac{1}{r^3} \right) \cos \theta e^{-ikr}; \quad (19.4)$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{1}{\mu r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \dot{A}_\varphi) = i \frac{a^2}{4} \dot{I} \left(i \frac{k^2}{r} + \frac{k}{r^2} - i \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta e^{-ikr}. \quad (19.5)$$

Якщо у виразах (19.4) і (19.5) зробити заміну

$$k\pi a^2 = l_e, \quad (19.6)$$

отримаємо

$$\dot{H}_r = i \frac{\dot{I}_e}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} - i \frac{1}{kr^3} \right] \cos \theta e^{-ikr}; \quad (19.7)$$

$$\dot{H}_\theta = i \frac{\dot{I}_e}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} - i \frac{1}{kr^3} \right] \sin \theta e^{-ikr}. \quad (19.8)$$

З першого рівняння Максвелла випливає, що вектор \vec{E} в поле рамки має тільки одну проекцію E_φ , комплексна амплітуда якої дорівнює

$$\dot{E}_\varphi = -i \frac{\omega\mu}{k} \frac{\dot{I}_e}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} \right] \sin \theta e^{-ikr}. \quad (19.9)$$

Порівнюючи формули (19.7) і (19.8) з аналогічними формулами для проєкцій електричного поля диполя Герца, можна зробити висновок, що магнітне поле горизонтальної рамки ідентичне електричному полю вертикального диполя Герца. Аналогічні висновки можна зробити і для проєкцій полів.

Отже, горизонтальна рамка створює таке ж поле, як і вертикальний електричний диполь, різниця між їх полями полягає лише в тому, що вектори \vec{E} і \vec{H} міняються в просторі місцями. А це значить, що горизонтальну рамкову антену можна трактувати як фіктивний вертикальний магнітний диполь, рис. 19.2.

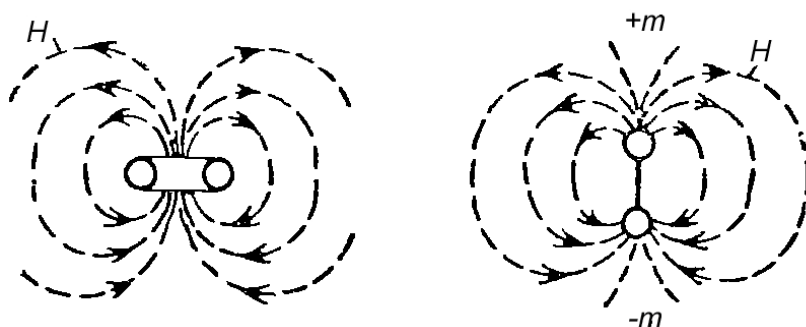


Рис. 19.2. Аналогія між диполем Герца і рамковою антеною

Визначимо умови, при яких рамка буде еквівалентна магнітному диполю. Для розрахунку поля магнітного диполя доцільно використовувати властивість дуальності рівнянь Максвелла. Дійсно, якщо в формулах, що описують диполь Герца, провести перестановки, то можливо отримати вирази, що характеризують поле магнітного джерела:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{\dot{I}_M l}{4\pi} \left(i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta e^{-ikr};$$

$$\dot{H}_r = \frac{k}{\omega\mu} \frac{\dot{I}_M l}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - i \frac{1}{kr^3} \right) \cos \theta e^{-ikr};$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{k}{\omega\mu} \frac{\dot{I}_M l}{4\pi} \left(i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} - i \frac{1}{kr^3} \right) \sin \theta e^{-ikr},$$

де \dot{I}_M - комплексна амплітуда фіктивного магнітного струму.

Слід мати на увазі, що ці вирази описують диполь, у якого позитивна маса знаходиться в точці $z = -l/2$, а від'ємна - в точці $z = l/2$. Щоб поле магнітного диполя було повністю ідентично розглянутому вище полю рамки, необхідно знаки в правих частинах останніх рівностей замінити на зворотні. Отримані таким чином вирази будуть збігатися з формулами (19.7)-(19.9), якщо

$$-\frac{k}{\omega\mu}\dot{I}_M l = i\dot{I}_e = i\dot{k}S,$$

або

$$\frac{i}{\omega}\dot{I}_M l = \mu\dot{I}S.$$

Але величина $\frac{i}{\omega}\dot{I}_M l$ є комплексною амплітудою моменту магнітного диполя $\dot{M} = \dot{q}_M l$, де $\dot{q}_M = -\int \dot{I}_M dt$ - комплексна амплітуда магнітної маси. Значить, горизонтальна рамкова антена еквівалентна вертикальному магнітному диполю з моментом $\dot{M} = \mu\dot{I}S$. Взаємна орієнтація векторів \vec{E} і \vec{H} в полі рамки зображена на рис. 19.3.

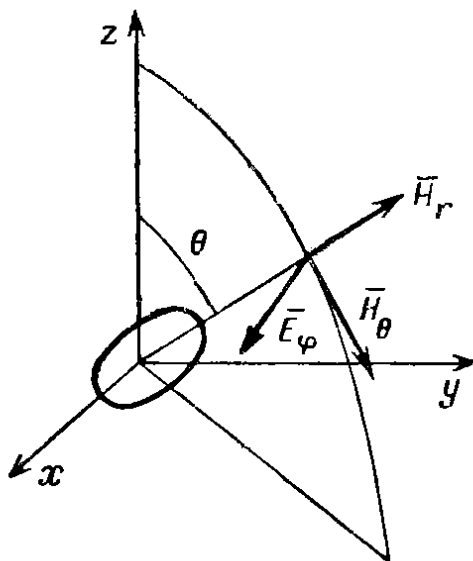


Рис. 19.3. Взаємна орієнтація векторів \vec{E} і \vec{H} в полі рамкової антени

Діаграма спрямованості горизонтальної рамки, очевидно, повинна збігатися з діаграмою спрямованості вертикального електричного диполя. Максимум випромінювання енергії в цьому випадку лежить в площині рамки (тобто в площині, перпендикулярній осі еквівалентного магнітного диполя).

Нарешті, на підставі розглянутої вище аналогії з диполем Герца можна визначити, що опір випромінювання рамкової антени в повітрі дорівнює

$$R_\Sigma = 80\pi^2 \left(\frac{l_e}{\lambda} \right)^2 = \frac{320\pi^4 S^2}{\lambda^4} \text{ Ом.} \quad (19.10)$$

Типи електромагнітних хвиль

Структура електромагнітного поля, що виникає в однорідному ізотропному середовищі, визначається видом джерела і його властивостями. Різні джерела, очевидно, будуть збуджувати в просторі різні електромагнітні поля. Проте, виявляється можливо провести класифікацію полів на основі деяких характерних ознак.

Раніше було розглянуто плоскі електромагнітні хвилі. Було встановлено, що поле плоскої хвилі є поперечним (поле ТЕМ), бо проекції векторів \vec{E} і \vec{H} у ньому на напрям руху хвилі дорівнюють нулю.

Аналітичні вирази поля поперечно-електромагнітного типу отримують в результаті рішення рівнянь Максвелла за умови, що вектори \vec{E} і \vec{H} залежать лише від однієї просторової координати і часу. У більш загальному випадку вектори \vec{E} і \vec{H} будуть залежати не від однієї, а від двох або трьох просторових координат. Зрозуміло, що таке поле повинно мати більш складну структуру, ніж поле плоскої хвилі.

У результаті рішення рівнянь Максвелла для елементарного електричного диполя було знайдено, що вектор напруженості \vec{E} такого диполя має в сферичній системі координат дві складові \vec{E}_θ і \vec{E}_r , а вектор напруженості \vec{H} - тільки одну складову \vec{H}_ϕ . Було також встановлено, що хвильові поверхні поля електричного диполя поширюються зі швидкістю v в радіальних напрямках. При цьому проекція вектора \vec{E} на напрям розповсюдження, тобто проекція \vec{E}_r , не дорівнює нулю, а вектор \vec{H} лежить в площині, перпендикулярній до напрямку поширення.

Електромагнітне поле такого типу носить назву поперечно-магнітного поля і позначається літерами ТМ. Іноді поперечно-магнітне поле з урахуванням того, що складова вектора \vec{E} на напрям поширення в ньому відмінна від нуля, називають полем «електричного» типу і позначають літерою Е (Е-поле).

Далі, при дослідженні випромінювання рамки з струмом ми встановили, що вектори \vec{E} і \vec{H} поля в сферичній системі координат характеризуються складовими \vec{E}_ϕ , \vec{H}_r і \vec{H}_θ .

Поле рамки хвильові поверхні також поширюються в радіальному напрямку. Однак в цьому випадку вектор \vec{H} має складову на напрямок поширення хвилі, відмінну від нуля, а в площині, перпендикулярній напрямку поширення, лежить вектор \vec{E} . Таке поле називається поперечно-електричним і позначається буквами ТЕ. Іноді його називають полем «магнітного» типу і позначають буквою Н (Н-поле).

Часто замість типів полів говорять про типи електромагнітних хвиль. Відповідно до викладеного розрізняють поперечні (ТЕМ), поперечно-електричні (ТЕ) і поперечно-магнітні (ТМ) хвилі.

Наведена вище класифікація полів справедлива не тільки для вільного простору. Перераховані типи полів існують також в областях, обмежених поверхнями які проводять і т. ін.

Електромагнітне поле електричних і магнітних струмів

У ряді випадків для розрахунку електромагнітного поля в рівняння Максвелла доцільно додати фіктивні магнітні заряди і фіктивні магнітні

струми. При цьому може виявитися, що рішення нової системи рівнянь Максвелла, що містить магнітні струми і заряди, буде простіше, ніж рішення вихідної системи рівнянь, що містить тільки електричні струми і заряди.

Рівняння Максвелла при наявності електричних і магнітних джерел можна написати у вигляді:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\bar{H} = \bar{j} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot}\bar{E} = -\bar{j}_m - \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div}\bar{D} = \rho, \operatorname{div}\bar{B} = \rho_m. \end{cases} \quad (19.11)$$

Отже, розрахунок електромагнітного поля, створюваного в просторі електричними і магнітними струмами, зводиться до інтегрування системи рівнянь (19.11). Так як ця система лінійна, можна вважати, що

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 \text{ та } \bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2, \quad (19.12)$$

де \bar{E}_1 , \bar{H}_1 і \bar{E}_2 , \bar{H}_2 - вектори напруженості електромагнітних полів електричних і магнітних джерел відповідно.

Використовуючи результати вирішення рівнянь Максвелла, для полів \bar{E}_1 , \bar{H}_1 можливо написати:

$$\bar{E}_1 = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}; \bar{H}_1 = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}\bar{A}, \quad (19.13)$$

де φ та \bar{A} - запізнюючі потенціали.

Що стосується векторів \bar{E}_2 , \bar{H}_2 , то вони виводяться з рівнянь:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\bar{H}_2 = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}_2}{\partial t}; \\ \operatorname{rot}\bar{E}_2 = -\bar{j}_m - \mu \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial t}; \\ \operatorname{div}\bar{D}_2 = 0; \\ \operatorname{div}\bar{B}_2 = \rho_m. \end{cases} \quad (19.16)$$

Для вирішення системи (19.16) необхідно, щоб $\bar{D}_2 = -\operatorname{rot}\bar{F}$, або

$$\bar{E}_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot}\bar{F}, \quad (19.17)$$

де \bar{F} - невідома векторна функція. Підставляючи значення \bar{E}_2 з (19.17) у перше рівняння системи (19.16), одержимо

$$\operatorname{rot}\left(\bar{H}_2 + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}\right) = 0. \quad (19.18)$$

Рівняння (19.18) перетвориться на тотожність, якщо вираз у ньому є градієнтом певної скалярної функції g :

$$\bar{H}_2 + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = -\text{grad}g. \quad (19.17)$$

З рівняння (19.17) виводиться вираз для вектора напруженості магнітного поля \bar{H}_2

$$\bar{H}_2 = -\text{grad}g - \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}. \quad (19.18)$$

Таким чином, вектори \bar{E}_2 і \bar{H}_2 поля магнітних джерел виражено через допоміжні функції g та \bar{F} подібно до того, як це раніше було зроблено для поля електричних зарядів і струмів.

За аналогією з потенціалами ϕ і \bar{A} функції g та \bar{F} , очевидно, слід називати запізнілими потенціалами поля магнітних джерел. Можливо показати, що функції g і \bar{F} задовольняють диференціальним рівнянням

$$\nabla^2 g - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\frac{\rho_m}{\mu}; \quad (19.19)$$

$$\nabla^2 \bar{F} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} = -\varepsilon j_m,$$

за умови, що рівність, що пов'язує g і \bar{F} , має вигляд

$$\text{div} \bar{F} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (19.20)$$

Нехай електричні і магнітні джерела поля розподілені в деякому об'ємі V , рис. 19.4.

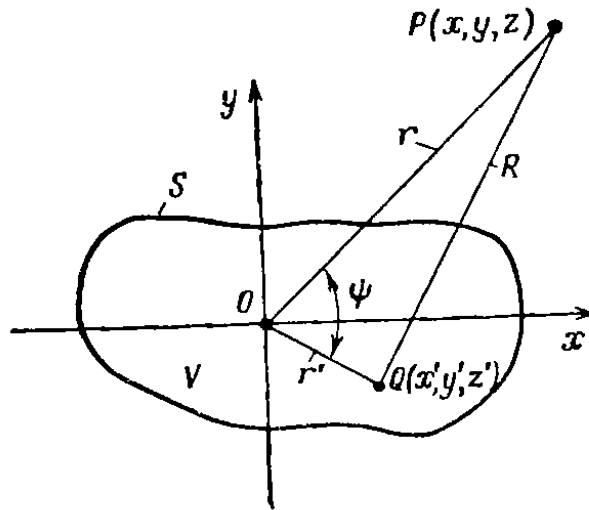


Рис. 19.4. Ілюстрація до розрахунку поля, створюваного електричними і магнітними струмами

В усталеному режимі вектор-потенціал \bar{A} поля електричних струмів визначається виразом

$$\dot{\bar{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \dot{j} \frac{e^{-ikR}}{R} dV, \quad (19.21)$$

де $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ - відстань від елемента струму в точці $Q(x', y', z')$ до точки спостереження $P(x, y, z)$, а інтегрування відбувається за координатами точок $Q(x', y', z')$.

Для обчислення скалярного потенціалу ϕ в усталеному режимі використаємо формулу

$$\dot{\phi} = \frac{i}{\omega \varepsilon \mu} \operatorname{div} \dot{A}. \quad (19.22)$$

На підставі аналогії для вектор-потенціалу \vec{F} маємо

$$\dot{\vec{F}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_V \dot{\vec{j}}_m \frac{e^{-ikR}}{R} dV. \quad (19.23)$$

За знайденою векторною функцією $\dot{\vec{F}}$ за допомогою рівності (19.20) визначимо комплексну амплітуду скалярного потенціалу g :

$$\dot{g} = \frac{i}{\omega \varepsilon \mu} \operatorname{div} \dot{\vec{F}}. \quad (19.24)$$

Отже остаточні вирази для комплексних амплітуд векторів \vec{E} та \vec{H} електромагнітного поля:

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = -\frac{i}{\omega \varepsilon \mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{A} - i\omega \dot{A} - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \dot{\vec{F}}; \\ \dot{\vec{H}} = -\frac{i}{\omega \varepsilon \mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{F}} - i\omega \dot{\vec{F}} - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \dot{A}. \end{cases} \quad (19.25)$$

Таким чином, сумарне поле електричних і магнітних джерел в усталеному режимі визначається двома вектор-потенціалами \vec{A} і \vec{F} . У разі об'ємного розподілу струмів ці вектори можуть бути обчислені за формулами (19.21) і (19.23).

Якщо ж джерелами поля є поверхневі електричний і магнітний струми, задані на поверхні S , то комплексні вектори \dot{A} та $\dot{\vec{F}}$ дорівнюють

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \dot{\vec{j}}_s \frac{e^{-ikR}}{R} dS; \\ \dot{\vec{F}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \dot{\vec{j}}_{ms} \frac{e^{-ikR}}{R} dS, \end{cases} \quad (19.26)$$

де $\dot{\vec{j}}_s$ і $\dot{\vec{j}}_{ms}$ - комплексні амплітуди щільності поверхневих струмів. Нарешті, у разі лінійного розподілу струмів вздовж контуру l .

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \dot{I} \frac{e^{-ikR}}{R} d\vec{l}; \\ \dot{\vec{F}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \dot{I}_m \frac{e^{-ikR}}{R} d\vec{l}, \end{cases} \quad (19.27)$$

де \dot{I} - комплексна амплітуда електричного струму; \dot{I}_m - комплексна амплітуда магнітного струму; $d\vec{l}$ - елемент довжини.

Якщо величини $\dot{j}dV$, $\dot{j}_S dS$, $i d\bar{l}$ умовно позначити $\bar{d}\dot{q}_E$, а величини $\dot{j}_M dV$, $\dot{j}_{MS} dS$, $i_M d\bar{l}$ - через $\bar{d}\dot{q}_M$, то вирази для векторів \vec{A} і \vec{F} при будь-якому розподілі джерел набувають однаковий вигляд :

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikR}}{R} d\dot{q}_E; \vec{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikR}}{R} d\dot{q}_M. \quad (19.28)$$

Причому інтегрування тут відбувається по всій системі струмів.

Електромагнітне поле джерел у дальній зоні. Діаграма спрямованості

Припустимо, що джерела електромагнітного поля розподілені в області V кінцевих розмірів. Очевидно, в поле цих джерел за аналогією з елементарними диполями можна виділити ближню і дальню зони. Проте, якщо у диполя далеку зону ми визначали нерівністю $r \gg \lambda$, де r – відстань від диполя до точки спостереження, а λ – довжина хвилі, то тепер до умови $r \gg \lambda$ слід ще додати нерівність $r \gg r_{\text{макс}}$. Тут $r_{\text{макс}}$ - відстань від початку координат до максимально віддаленої точки джерела.

При розрахунку електромагнітного поля в дальній зоні вирази (19.28), що описують вектор-потенціали \vec{A} і \vec{F} , можна спростити. Для цього доцільно перейти до сферичної системи координат і позначити координати точки спостереження буквами r, θ, φ , координати точок джерела – r', θ', φ' . Тоді з трикутника OPQ, рис. 19.4 будемо мати

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi},$$

де ψ – кут між напрямками OP і OQ.

Нехай \vec{p} - одиничний вектор, спрямований за напрямом сторони трикутника OP, а \vec{p}' - одиничний вектор, спрямований вздовж сторони OQ. Тоді $\cos \psi = \vec{p} \vec{p}'$. Так як за визначенням

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \bar{i}_x \sin \theta \cos \varphi + \bar{i}_y \sin \theta \sin \varphi + \bar{i}_z \cos \theta; \\ \vec{p}' &= \bar{i}_x \sin \theta' \cos \varphi' + \bar{i}_y \sin \theta' \sin \varphi' + \bar{i}_z \cos \theta', \end{aligned}$$

то

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (19.29)$$

Для точок спостереження, що знаходяться в дальній зоні, використовуючи правило наближеного розрахунку коренів, отримаємо $R \approx r - r' \cos \psi$. У цьому випадку функція $\frac{e^{-ikR}}{R}$, що входить у вираз (19.28) дорівнює $e^{-ikR + ikr' \cos \psi} / (r - r' \cos \psi)$. Так як $r \gg r'$ величина $1/(r - r' \cos \psi)$ майже не залежить від координат r', θ' та φ' , тому для наближених розрахунків можна вважати, що

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ikr' \cos \psi}.$$

Отже, в дальній зоні вирази (19.28) мають вигляд

$$\begin{cases} \dot{\vec{A}} \approx \mu \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int e^{-ikr \cos \psi} d\dot{\vec{q}}_e; \\ \dot{\vec{F}} \approx \varepsilon \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int e^{-ikr \cos \psi} d\dot{\vec{q}}_m. \end{cases} \quad (19.30)$$

Після використання позначень:

$$\dot{\vec{N}} = \int e^{-ikr \cos \psi} d\dot{\vec{q}}_e; \quad (19.31)$$

$$\dot{\vec{L}} = \int e^{-ikr \cos \psi} d\dot{\vec{q}}_m, \quad (19.32)$$

де $\dot{\vec{N}}$ і $\dot{\vec{L}}$ - комплексні вектори випромінювання.

Тоді вектор-потенціали електромагнітного поля в дальній зоні виражаються через вектори випромінювання:

$$\begin{cases} \dot{\vec{A}} \approx \mu \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \dot{\vec{N}}; \\ \dot{\vec{F}} \approx \varepsilon \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \dot{\vec{L}}, \end{cases} \quad (19.33)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{\vec{A}} \approx \mu \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} (\bar{i}_r \dot{N}_r + \bar{i}_\theta \dot{N}_\theta + \bar{i}_\varphi \dot{N}_\varphi); \\ \dot{\vec{F}} \approx \varepsilon \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} (\bar{i}_r \dot{L}_r + \bar{i}_\theta \dot{L}_\theta + \bar{i}_\varphi \dot{L}_\varphi). \end{cases}$$

Вивчимо більш докладно властивості електромагнітного поля джерел у дальній зоні. З рівнянь (19.25) і (19.28) видно, що досліджуване поле є суперпозицією полів елементарних електричних і магнітних диполів, розподілених в області V . Справді, вирази

$$\mu \frac{1}{4\pi R} \frac{e^{-ikR}}{R} d\dot{\vec{q}}_e \quad \text{та} \quad \varepsilon \frac{1}{4\pi R} \frac{e^{-ikR}}{R} d\dot{\vec{q}}_m,$$

які стоять під знаком інтегралів в (19.28), можна розглядати як комплексні амплітуди вектор-потенціалів елементарних електричних і магнітних диполів. Але раніше було встановлено, що поперечно-магнітне поле електричного диполя і поперечно-електричне поле магнітного диполя в дальній зоні вироджуються в поля поперечного типу. Отже, поле будь-якої обмеженої у просторі системи джерел на великих відстанях від неї стає поперечним. У сферичній системі координат таке поле матиме проєкції E_θ , E_φ , H_θ і H_φ .

Так як у полі поперечного типу відношення взаємно перпендикулярних компонент напруженостей електричного і магнітного полів дорівнює характеристичному (хвильовому) опору середовища, то

$$\dot{E}_\theta = \dot{H}_\varphi Z_0, \quad \dot{E}_\varphi = \dot{H}_\theta Z_0,$$

$$\text{де } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Так само як і у одиночного диполя, E_θ , E_ϕ , H_θ і H_ϕ при $r \rightarrow \infty$ повинні спадати, як $1/r$ (якщо провідність середовища $\sigma = 0$).

Щоб отримати остаточні формули, що визначають проекції векторів \vec{E} і \vec{H} поля в дальній зоні, розглянемо рівняння (19.25) і (19.33). Використовуючи вираз для дивергенції вектора в сферичній системі координат і враховуючи (19.33), можна показати, що функції \vec{E} і \vec{H} при $r \rightarrow \infty$ згасають не повільніше, ніж $1/r$. Що-ж стосується градієнтів цих функцій, то їх проекції на напрямки ортів \vec{i}_θ і \vec{i}_ϕ при $r \rightarrow \infty$ згасають, як $1/r^2$. Тому головні значення поперечних складових векторів \vec{E} і \vec{H} на великих відстанях будуть визначатися доданками

$$-i\omega\vec{A} - \frac{1}{\varepsilon} \text{rot}\vec{F} \quad \text{та} \quad -i\omega\vec{F} + \frac{1}{\mu} \text{rot}\vec{A}. \quad (19.34)$$

Знайдемо компоненти у виразах (19.34), які у напрямках \vec{i}_θ і \vec{i}_ϕ , згасають при $r \rightarrow \infty$, як $1/r$.

Розглядаючи формулу, що визначає $\text{rot}\vec{A}$ в сферичній системі координат, ми можемо переконатися, що до числа проекцій $\text{rot}\vec{A}$, які згасають на нескінченності не швидше, ніж $1/r$, відносяться лише

$$\begin{aligned} \text{rot}_\theta \dot{\vec{A}} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_\phi) = \mu \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{N}_\phi; \\ \text{rot}_\phi \dot{\vec{A}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_\theta) = -\mu \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{N}_\theta. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \text{rot}_\theta \dot{\vec{F}} &= \varepsilon \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{L}_\phi; \\ \text{rot}_\phi \dot{\vec{F}} &= -\varepsilon \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{L}_\theta. \end{aligned}$$

Отже, з виразів (19.25) з урахуванням останніх результатів отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= -i \left(\frac{\omega\mu}{4\pi} \dot{N}_\theta + \frac{k}{4\pi} \dot{L}_\phi \right) \frac{e^{-ikr}}{r}; \\ \dot{E}_\phi &= -i \left(\frac{\omega\mu}{4\pi} \dot{N}_\phi - \frac{k}{4\pi} \dot{L}_\theta \right) \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned}$$

Так як

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi/\lambda \quad \text{та} \quad \omega\mu = kZ_0,$$

то

$$\frac{\omega\mu}{4\pi} = \frac{1}{2\lambda} Z_0.$$

Тому остаточні вирази для комплексних амплітуд проекцій векторів поля в дальній зоні приймають вигляд:

$$\begin{cases} \dot{E}_\theta = -\frac{i}{2\lambda}(Z_0\dot{N}_\theta + \dot{L}_\varphi)\frac{e^{-ikr}}{r}; \\ \dot{E}_\varphi = \frac{i}{2\lambda}(-Z_0\dot{N}_\varphi + \dot{L}_\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}; \\ \dot{H}_\theta = -\frac{\dot{E}_\varphi}{Z_0}; \quad \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}. \end{cases} \quad (19.35)$$

З аналізу формули (19.35) можна зробити висновок, що електромагнітне поле довільної обмеженої у просторі системи джерел у дальній зоні має характер сферичної хвилі, що розповсюджується від джерел у радіальних напрямках.

У тому випадку, коли середовище має кінцеву провідність, множник $\frac{e^{-ikr}}{r}$ в (19.35) має вигляд $\frac{e^{-\alpha r}}{r}e^{-i\beta r}$. Отже, в провідному середовищі амплітуда хвилі, випромінюваної джерелом, згасає при $r \gg \lambda$ як $\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ (α – коефіцієнт загасання).

Якщо в (19.35) вважати $r = \text{const}$, то ми отримаємо формули, які встановлюють залежність значення напруженості поля джерела від напрямку, що характеризуються кутами θ і φ . Іншими словами, рівняння (19.35) при $r = \text{const}$ дозволяють визначити характеристику (діаграму) спрямованості напруженості поля випромінюючої системи – антени.

Поряд з такою характеристикою доцільно ввести в розгляд характеристику (діаграму) спрямованості антени по потужності. Нею називається функція $\Phi(\theta, \varphi)$, що визначає залежність потужності, випромінюваної антеною в одиничному тілесному куті, від напрямку (θ, φ) .

Для розрахунку діаграми спрямованості по потужності обчислимо потужність, що випромінюється антеною через поверхню сфери радіуса r .

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} \text{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\theta^*) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Так як $\sin \theta d\theta d\varphi = d\Omega$ ($d\Omega$ - елементарний тілесний кут), то

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} \text{Re} \int (\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\theta^*) r^2 d\Omega,$$

де інтегрування відбувається по повному тілесному куту. Але з наведеного вище визначення характеристики спрямованості випливає, що

$$P_\Sigma = \int \Phi(\theta, \varphi) d\Omega,$$

де інтегрування також проводиться по повному тілесному куту. Порівнюючи обидва вирази для потужності, випромінюваної антеною, отримаємо

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \text{Re} (\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_\theta^*) r^2.$$

Підставляючи в останній вираз значення E_θ , E_φ , H_θ^* і H_φ^* з (19.35), знаходимо остаточно

$$\Phi(\theta, \varphi) = \Phi_{11} + 2\Phi_{12} + \Phi_{22}, \quad (19.36)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{Z_0}{8\lambda^2} (\dot{N}_\theta \dot{N}_\theta^* + \dot{N}_\varphi \dot{N}_\varphi^*), \\ \Phi_{22} &= \frac{1}{8Z_0\lambda^2} (\dot{L}_\theta \dot{L}_\theta^* + \dot{L}_\varphi \dot{L}_\varphi^*), \\ \Phi_{12} &= \frac{1}{8\lambda^2} (\dot{N}_\theta \dot{L}_\varphi^* - \dot{N}_\varphi \dot{L}_\theta^*). \end{aligned} \right\} \quad (19.37)$$

Формули (19.36), (19.37) дозволяють розрахувати діаграму спрямованості потужності будь обмеженою у просторі системи джерел.

Встановимо зв'язок між функцією $\Phi(\theta, \varphi)$ і характеристикою спрямованості напруженості поля. Як відомо, в електромагнітному полі поперечного типу середнє значення вектора Пойнтінга дорівнює

$$\Pi_{\text{cp}} = \frac{|\dot{\vec{E}}|^2}{2Z_0},$$

де $|\dot{\vec{E}}|$ - Модуль вектора $\dot{\vec{E}}$. Але, з іншого боку, з визначення функції $\Phi(\theta, \varphi)$ і величини тілесного кута випливає, що

$$\Pi_{\text{cp}} = \frac{\Phi}{r^2},$$

отже,

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{r} \sqrt{2Z_0} \sqrt{\Phi(\theta, \varphi)}. \quad (19.38)$$

Запитання

1. Наведіть структуру рамкової антени.
2. Назвіть принцип, згідно з яким простір навколо рамки поділяється на зони.
3. Назвіть тип хвилі, який випромінює рамкова антена у дальній зоні.
4. Наведіть принцип, на основі якого поле створюване рамковою антеною можливо замінити полем диполя Герца.
5. Назвіть тип хвилі, до якого належить плоска хвиля.
6. Назвіть тип хвилі, яку створює рамкова антена.
7. Назвіть тип хвилі, яку створює диполь Герца.
8. Опишіть причину опису процесів на основі магнітних зарядів і струмів.

РОЗДІЛ 4. СПЕЦІАЛІЗОВАНІ РАДІОПРИСТРОЇ

Лекція № 20. Принцип роботи електромагнітних екранів

Основні положення

Електромагнітними екранами називають пристрої, призначені для ослаблення електромагнітних полів, створюваних будь-якими джерелами в деякій області простору, яка не містить цих джерел. У переважній більшості випадків електромагнітні екрани робляться з металу: міді, алюмінію, сталі. Однак для захисту від постійних і дуже низькочастотних магнітних полів в даний час іноді застосовують і ферити. Якщо металева конструкція не призначена спеціально для екранування, але разом з виконанням своїх основних функцій вирішує і цю задачу, то кажуть, що вона працює як екран, служить екраном.

На практиці часто протиставляють один одному поняття «електростатичний екран», «магнітостатичний екран» і «електромагнітний екран». Таке протиставлення навряд чи доречне: подібно до того як електростатичне і магнітостатичне поля є окремими видами електромагнітного поля, електростатичний і магнітостатичний екрани є окремими видами електромагнітного екрану.

Принцип дії електромагнітного екрана

На питання про принципи дії електромагнітного екрана можна дати два пояснення. Перше формулюється таким чином. Під дією первинного поля (поля джерел) на поверхні екрану індукуються заряди, а в його товщі струми і магнітна поляризація. Заряди, струми і поляризація створюють вторинне поле. Накладання вторинного поля з первинним створює результуюче поле, яке в області простору, обмеженою екраном, є слабкішим ніж первинне.

Друге пояснення є таким: принцип дії електромагнітного екрану полягає в тому, що, відбиваючи і направляючи потік електромагнітної енергії, створюваний джерелами поля, екран відводить його від області простору, обмеженої екраном,.

Перше пояснення дозволяє розглядати роботу екрану при будь-яких частотах, включаючи частоту, рівну нулю. Недолік цієї відповіді – деяка фізична небездоганність. Дійсно, в області простору, де напруженість поля відмінна від нуля, існує деякий запас енергії. Можна говорити про накладення і взаємну компенсацію полів, але не можна говорити про накладення і взаємну компенсацію запасів енергії.

Друга пояснення з вказаної точки зору є більш коректним, однак безпосереднє уявлення про відбивання і спрямування потоків електромагнітної енергії є менш наочним. Крім того, таке пояснення є некоректним для статичних випадків і вимагає аналізу перехідних режимів, які призводять до переходу від одного до іншого статичного режиму.

З обох пояснень стає зрозумілим, що механізм спрямування і відбивання потоків електромагнітної енергії нерозривно пов'язаний з виникненням на поверхні і в товщі екранів зарядів, струмів та магнітної поляризації.

Кількісна оцінка ефективності екрану

Кількісно ефективність електромагнітного екрану або екранування K_e можна характеризувати відношенням напруженостей електричного або магнітного полів в захищеній області простору при відсутності екрана E_0 або H_0 відповідно і за наявності його – E або H .

$$K_e = \frac{E_0}{E}; \quad K_e = \frac{H_0}{H}. \quad (20.1)$$

У загальному випадку екран не тільки послаблює, а й спотворює в більшій чи меншій мірі поле джерела в екранованій області простору. Тому його ефективність, визначена зазначеним вище способом, виявляється різною для електричної та магнітної складових поля і залежить від координат точки вимірювання. Ця обставина істотно ускладнює її кількісну оцінку.

Тільки в найпростіших випадках ефективність екрану визначається однозначно. До таких випадків відносяться: екранування півпростору від плоскої електромагнітної хвилі нескінченним плоским однорідним екраном; екранування однорідним кульовим екраном точкового джерела, розташованого в його центрі; екранування однорідним нескінченно протяжним циліндричним екраном лінійного джерела, що лежить на його осі. У теорії електромагнітного екранування розглядаються в першу чергу саме такі спрощені випадки, а реальні задачі зводяться до них шляхом ідеалізації. Природно, що при цьому погіршується точність оцінки ефективності екрану. Наприклад, визначати ефективність для екранованої області простору, що лежить на досить великій відстані від екрану, для точки цієї області з найгіршим екрануванням, для найгіршого з можливих розташувань джерела поля.

Залежність ефективності екрану від характеру джерела поля. Види екранів

Ефективність екрану істотно залежить від характеру джерела поля. Існуючі джерела поля можуть з необхідним ступенем точності описуватись як певна сукупність електричних диполів і витків (рамок) з струмом (магнітних диполів). Відмінність поведінки екрану відносно різних джерел пояснюється відмінністю його властивостей відносно електричного і магнітного диполя. У вільному просторі при:

$$r \gg \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (20.2)$$

де r – відстань від джерела,

λ – довжина хвилі,

різниця в структурах полів обох джерел стирається: в будь-якій точці простору вектори E і H практично синфазні, а їх відношення є майже таким же, як в плоскій хвилі, тобто

$$\frac{E}{H} = 120\pi \text{ Ом}. \quad (20.3)$$

Натомість при

$$r \ll \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (20.4)$$

вектори напруженості E і H зсунуті майже на дев'яносто градусів, а їхнє відношення залежить від положення точки спостереження. В екваторіальній площині (площині, що проходить через центр диполя перпендикулярно його осі) воно наближено визначається наступними формулами: для електричного диполя:

$$\frac{E}{H} = 120\pi \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad (20.5)$$

для магнітного диполя:

$$\frac{E}{H} = 120\pi \frac{2\pi r}{\lambda}. \quad (20.6)$$

Таким чином, зі зменшенням r або зі збільшенням λ (зі зменшенням частоти f) відношення E до H для електричного диполя зростає, і утворене поле можливо розглядати як квазіелектростатичне. Для магнітного диполя спостерігається зворотна залежність, тому поле має квазімагнітостатичний характер.

Якщо екран забезпечує необхідне ослаблення електростатичного (або квазіелектростатичного) поля, але практично не послаблює магнітостатичного (або квазімагнітостатичного) поля, то його називають *електростатичним*. Такі екрани використовуються, наприклад, коли необхідно усунути ємнісний зв'язок між двома котушками, зберігши між ними індуктивний зв'язок.

Якщо екран повинен істотно послаблювати магнітостатичне (або квазімагнітостатичне) поле, то його називають *магнітостатичним*. При цьому рідко цікавляться тим, чи здатний цей екран придушувати також і електростатичне поле. У дуже багатьох, якщо не в більшості випадків, ефективність такого екрану по відношенню до електростатичного поля значно вище, ніж по відношенню до магнітостатичного.

У тому випадку, коли опис поля як квазістатичного може призвести до грубих помилок в оцінці ефективності екранування, екран називають *електромагнітним*. Хороший електромагнітний екран може виявитися поганим магнітостатичним екраном, але відмінним електростатичним екраном. Інакше кажучи, при прямуванні частоти до нуля ефективність електромагнітного екрана по відношенню до поля магнітного диполя може прямувати до одиниці, а по відношенню до поля електричного диполя – безмежно зростати.

Резонансні явища при екрануванні

Будь-який електромагнітний екран – простий металевий лист, металева оболонка кабелю, металева коробка, що закриває джерело поля або область простору, або яка-небудь інша металева конструкція, може розглядатися як система з розподіленими параметрами, що має набір власних частот. Коли частота електромагнітного поля, яке необхідно придушити, наближається до

однієї з власних частот екрану і стає рівною їй, ефективність екранування різко зменшується. Не виключена можливість, що в результаті резонансних явищ невдалий за конструкцією екран не тільки не придушить, а навіть посилить поле в екранованій області простору.

Екранувальна оболонка кабелю може виявитися налаштованим відрізком довгої лінії. Екран-коробка може виявитися налаштованим об'ємним резонатором. Отвори і щілини в екрані можуть виявитися ефективними щілинними антенами. Про це треба пам'ятати при проектуванні і за умови виникнення небажаних резонансних явищ, застосовувати ефективні заходи боротьби з ними: стежити за тим, щоб розміри отворів і щілин були багато менше найменшої з довжин хвиль робочого діапазону; збільшувати, якщо потрібно, товщину стінок екрану; більш часто заземлювати екранувальні оболонки кабелів і т. д.

Оборотність екрану

Електромагнітний екран – лінійна система, тому для нього справедливий принцип взаємності. Сказане, зокрема, означає, що ефективність екрану не залежить від того, що знаходиться всередині нього, джерело поля або екранована область простору. Це положення має велике практичне значення, так як при вивченні ефективності екранування дозволяє обмежитися випадком розташування джерела поля всередині екрану.

Необхідно, однак, уникати неправильного тлумачення цього положення. Щоб стало ясно, про яку можливу помилку йде мова, звернемося до рис. 20.1.

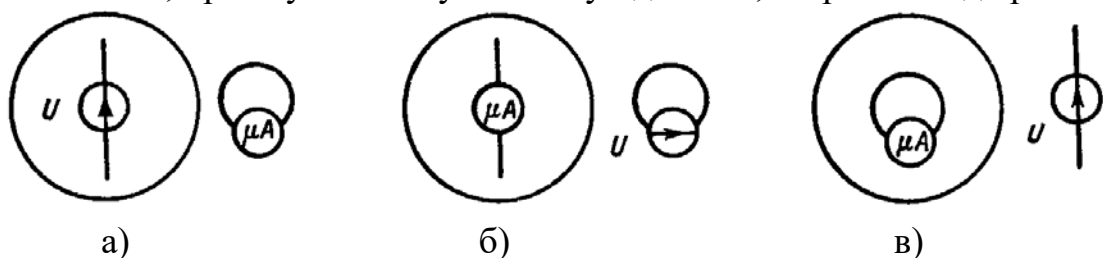


Рис. 20.1. Ілюстрація до теореми оборотності екрану

На рис. 20.1 а електричний диполь, розташований усередині кульового екрану, збуджується джерелом задавальної змінної напруги U , що має нульовий внутрішній опір. Індикатором поля служить виток (рамка) з включеним в нього мікроамперметром. Згідно з теоремою про взаємність переміщень покази мікроамперметра не зміняться, якщо поміняти його і джерело U місцями, як показано на рис. 20.1 б. Так як це твердження зберігає силу і при відсутності екрану, то можна зробити висновок, що ефективність екрану у випадку, показаному на рис. 20.1 а (джерело поля всередині екрану), і у випадку, показаному на рис. 20.1 б (джерело поля поза екраном), одна і та ж. Однак якщо винести з екрану не тільки джерело U , а й диполь, і внести в нього не тільки мікроамперметр, але й виток, як показано на рис. 20.1 в, то показання мікроамперметра зміняться. Отже, ефективність екрану у випадках, показаних на рис. 20.1 а і 20.1 в, різна.

Причина зазначеної відмінності не в тому, що в першому випадку джерело поля знаходиться всередині, а в другому випадку – поза екраном, а в тому, що в першому випадку всередині екрану розташований електричний диполь, а в другому – виток.

Реакція екрану на джерело електромагнітного поля і екранований об'єкт

Одночасно з виконанням своєї основної функції електромагнітний екран може створювати небажаний вплив на джерело поля і екранований об'єкт. Так, зокрема, екран-коробка, що закриває котушку коливального контуру (незалежно від того, чи є ця котушка джерелом поля або екранується), змінює індуктивність цієї котушки і зменшує її добротність.

Між ефективністю екрану і ступенем його небажаного впливу немає прямої залежності. Наприклад, якщо екранувати котушку з високочастотним струмом кульовим екраном, то зі збільшенням радіуса цього екрану ефективність екранування буде зростати, а втрати в екрані - зменшуватися, тобто буде зменшуватися вплив екрана на добротність котушки. Але якщо замінити латунний або алюмінієвий екран сталевим тієї ж товщини, то ефективність екранування теж зросте, але разом із втратами, тому добротність котушки зменшиться. Правильним вибором матеріалу, розмірів і конструкції екрану його небажані побічні дії можуть бути ослаблені до допустимих значень.

Відбивання плоскої електромагнітної хвилі від плоскої провідної поверхні

Вивчення роботи електромагнітних екранів зручно почати з гіпотетичного випадку екранування півпростору від плоскої електромагнітної хвилі нескінченним плоским однорідним екраном. При цьому легко розкривається фізична суть основних явищ, дуже просто виводяться деякі важливі формули, а ефективність такого екрану входить співмножником у вирази для ефективності кульових і циліндричних екранів.

Перш ніж досліджувати ефективність нескінченного плоского екрану, розглянемо, що відбувається при падінні плоскої електромагнітної хвилі під прямим кутом на плоску поверхню розділу двох середовищ – вільного простору і металу.

Рівняння плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі з частотою ω , що розповсюджується вздовж осі x в позитивному напрямку в однорідному середовищі з абсолютними магнітними і діелектричними проникностями μ_a , ϵ_a , і питомою провідністю σ , мають вид:

$$\frac{dE}{dx} = -j\omega\mu_a H; \frac{dH}{dx} = -j\omega\epsilon' E, \quad (20.7)$$

де

$$\epsilon' = \epsilon_a + \frac{\sigma}{j\omega}. \quad (20.8)$$

Відомо, що хвиля частково відбивається від межі розділу, а частково проникає в інше середовище. Розглянемо спочатку відбивання. Позначимо

амплітуди прямих хвиль векторів напруженості електричного і магнітного полів E_1^+ і H_1^+ , амплітуди векторів відбитої хвилі – E_1^- і H_1^- . Вказані амплітуди пов'язані такими співвідношеннями:

$$\dot{E}_1^- = n\dot{E}_1^+; \quad \dot{H}_1^- = n\dot{H}_1^+, \quad (20.9)$$

де n – коефіцієнт відбивання, який розраховується формулою:

$$n = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}. \quad (20.10)$$

На рис. 20.2 наведена ілюстрація процесу відбивання плоскої хвилі. Позначення P_1^+ , P_1^- , P_2^+ є векторами Умова-Пойнтінга падаючої, відбитої і заломленої хвиль відповідно. Вектори поля у другому середовищі (на поверхні розділу) розраховуються формулами:

$$\dot{E}_2^+ = (1+n)\dot{E}_1^+; \quad \dot{H}_2^+ = (1-n)\dot{H}_1^+. \quad (20.11)$$

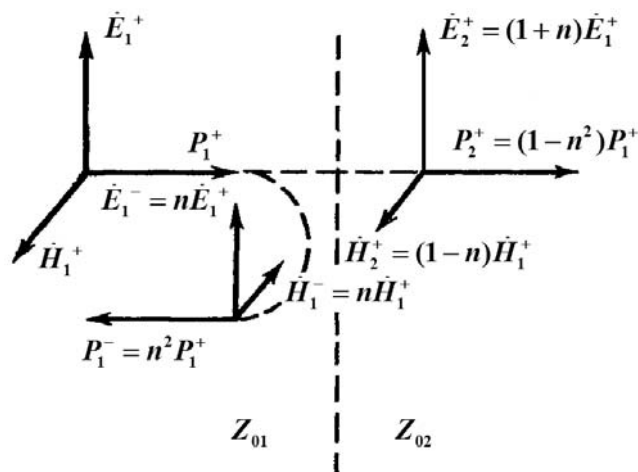


Рис. 20.2. Відбивання плоскої хвилі від межі розділу двох середовищ

На основі формул (20.9) та (20.11) легко отримати:

$$\frac{\dot{E}_2^+}{\dot{H}_2^+} = \frac{\dot{E}_1^+}{\dot{H}_1^+} \frac{Z_{02}}{Z_{01}}. \quad (20.12)$$

Також відомі такі тотожності для хвильових опорів середовищ

$$\frac{\dot{E}_1^+}{\dot{H}_1^+} = Z_{01}; \quad \frac{\dot{E}_2^+}{\dot{H}_2^+} = Z_{02}. \quad (20.13)$$

У випадку екрану одне з середовищ – вільний простір, інше – метал. Для металів, як і для вільного простору,

$$\varepsilon_a = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\Phi}{m}.$$

Значення питомої провідності σ , См/м, доцільно визначити для трьох найрозповсюдженіших металів, які використовуються для виготовлення екранів: мідь – $5.9 \cdot 10^7$ См/м, алюміній – $3.6 \cdot 10^7$ См/м, сталь – 10^7 См/м. Навіть для сталі, що має найменшу провідність на частоті 1000 ГГц, яка є верхньою межею для радіочастотного діапазону, маємо:

$$\frac{\sigma}{\omega} = \frac{10^{-5}}{2\pi}.$$

Це відношення більш ніж на п'ять порядків перевищує ϵ_a . Отже, з дуже великою точністю для металів на радіочастотах можна вважати:

$$\epsilon' = \frac{\sigma}{j\omega}. \quad (20.14)$$

Характеристичний опір металів при тих значеннях відносної магнітної проникності $\mu < 10^4$ і на частотах $f < 10^{12}$ набагато менший, ніж характеристичний опір вільного простору. Тому коефіцієнт відбивання від площини розділу вільного простору і металу близький до одиниці.

Проникнення плоскої електромагнітної хвилі в товщу провідника

Проаналізуємо розповсюдження електромагнітної хвилі у металі. Вважаючи, що на поверхні металу $x = 0$, можна розрахувати залежність векторів напруженості електричного і магнітного полів відносно координати x :

$$\dot{E}_{2x}^+ = \dot{E}_2^+ e^{-\gamma x}; \quad \dot{H}_{2x}^+ = \dot{H}_2^+ e^{-\gamma x}. \quad (20.15)$$

Для металу коефіцієнт розповсюдження γ розраховується за формулою:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_a\sigma} = \frac{1+j}{\delta}, \quad (20.16)$$

де $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \sigma}}$ - товщина поверхневого шару.

У реальному провіднику дистанція, на якій напруженість поля і відповідно щільність струму зменшуються в e разів, відрізняється від значення δ , визначеного за формулою (20.16). Так, у разі циліндричного дроту, відбувається концентрація енергії через зменшення радіуса. Внаслідок цієї концентрації, ослаблення поля в e разів відбувається на дистанції, що трохи перевищує δ . Втім, якщо радіус провідника набагато більше від значення δ , то відмінність є несуттєвою. Так як μ_a і σ залежать тільки від властивостей розглянутого провідного середовища, то формула (20.16) може бути записана у такому виді:

$$\delta = \frac{A}{\sqrt{f}}. \quad (20.17)$$

Значення параметра A , для міді, алюмінію і сталі наведені нижче (вважається, що відносна магнітна проникність сталі $\mu = 100$): мідь – $A = 6.6 \cdot 10^{-2}$, алюміній – $A = 8.4 \cdot 10^{-2}$, сталь – $A = 1.6 \cdot 10^{-2}$. Неважко помітити, що для сталі коефіцієнт A , а отже, і товщина поверхневого шару набагато менше, ніж у міді й алюмінію, що свідчить про кращі екранувальні властивості..

Ефективність нескінченного однорідного плоского екрана

На рис. 20.3 показано нескінченний однорідний плоский екран у розрізі з товщиною d .

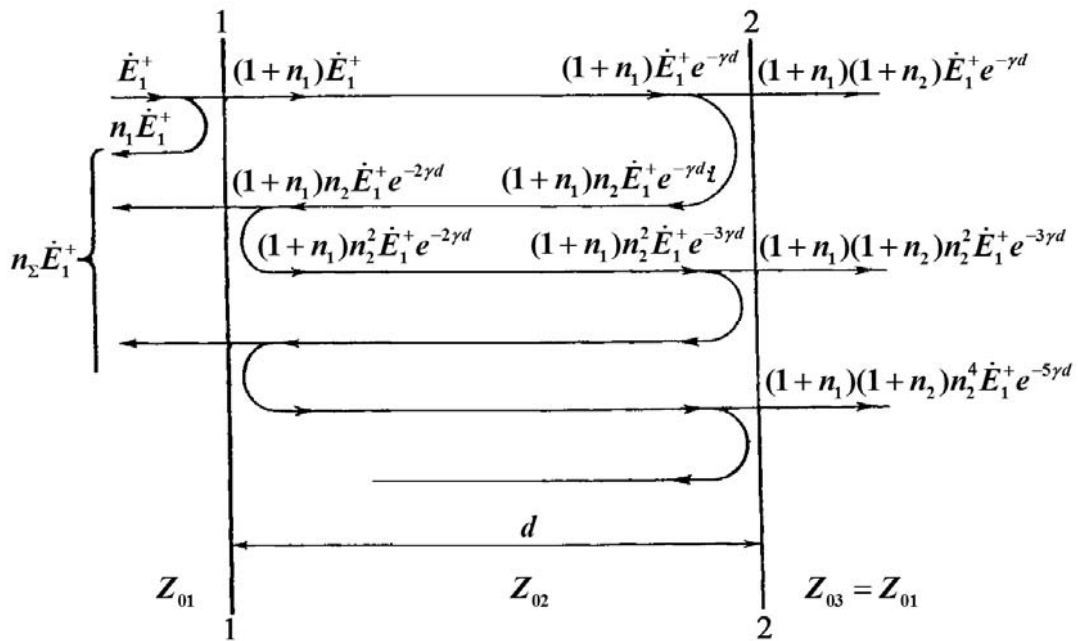


Рис. 20.3. Екранування напівпростору плоским екраном

З лівої сторони перпендикулярно до поверхні 1-1 на екран падає плоска електромагнітна хвиля. E_1^+ - електрична складова цієї хвилі на поверхні 1-1. Всі стрілки вказують напрямок руху потоків енергії. Основна маса енергії відбивається від поверхні 1-1, але деяка її частина проникає в товщу екрану. Електрична складова відбитого поля дорівнює $n_1 E_1^+$, а електрична складова поля, що пройшло через межу розділу, $(1+n_1)E_1^+$. У провіднику екрана плоска хвиля рухається від поверхні 1-1 до поверхні 2-2. Біля цієї поверхні її електрична складова має значення $(1+n_1)E_1^+ e^{-\gamma d}$. Хвиля, дійшовши до поверхні 2-2, знову відбивається. Коефіцієнт відбивання при цьому дорівнює n_2 . Так як за екраном починається вільний простір, то $n_2 = -n_1$. Електричні складові хвилі, відбитої від межі розділу 2-2, і хвилі, що проникла через неї за екран дорівнюють: $n_2(1+n_1)E_1^+ e^{-\gamma d}$ та $(1+n_2)(1+n_1)E_1^+ e^{-\gamma d}$ відповідно.

Відбита хвиля досягає поверхні 1-1, де її електрична складова дорівнює $n_2(1+n_1)E_1^+ e^{-2\gamma d}$. Тут вона знову відбивається, після чого знову рухається праворуч, причому коефіцієнт відбивання знову дорівнює n_2 . Невелика частина енергії повертається в простір зліва від екрану.

У результаті нескінченної послідовності відбивань і проникнень потоку енергії з товщі екрану в ліву і праву половину вільного простору утворюється безліч хвиль, суми яких утворюють результуючу хвилю, відбиту від екрану, і результуючу хвилю, що проникла крізь нього. Легко переконатися в тому, що електрична складова результуючої хвилі, що проникла крізь екран, біля поверхні 2-2 може бути записана у виді:

$$\dot{E}_{3\Sigma}^+ = (1+n_2)(1+n_1)\dot{E}_1^+ e^{-\gamma d} [1 + (n_2^2 e^{-2\gamma d} + (n_2^2 e^{-2\gamma d})^2 + (n_2^2 e^{-2\gamma d})^3 + \dots)]. \quad (20.18)$$

Так як дійсна складова параметра має додатне значення, тобто з проникненням у товщу екрану хвиля загасає, сума членів геометричної прогресії в правій частині (20.18) дорівнює:

$$\frac{1}{1 - n_2^2 e^{-2\gamma d}}.$$

Скориставшись цим результатом і врахувавши, що $n_2 = -n_1$ причому з дуже великим ступенем точності $n_2 = -n_1$, формулу (20.18) можна звести до виду:

$$\dot{E}_{3\Sigma}^+ = \dot{E}_1^+ \frac{1 - n_1^2}{2sh\gamma d}. \quad (20.19)$$

Оскільки:

$$1 - n_1^2 = \frac{4Z_{01}Z_{02}}{(Z_{01} + Z_{02})^2}. \quad (20.20)$$

Внаслідок того що $Z_{01} \gg Z_{02}$, з великим ступенем точності замість формули (20.20) можна використати

$$1 - n_1^2 = \frac{4Z_{02}}{Z_{01}}. \quad (20.21)$$

Оскільки перше середовище – вільний простір з хвильовим опором $Z_{01} = 120 \pi$ Ом, то виразивши опір Z_{02} через параметри середовища, можливо перетворити формулу (20.21) до виду:

$$1 - n_1^2 = \frac{1}{30\pi} \sqrt{\frac{j\omega\mu_{a2}}{\sigma_2}} = \frac{1 + j}{30\pi\sigma_2\delta_2}, \quad (20.22)$$

де δ_2 – товщина поверхневого шару матеріалу екрана.

Підставивши (20.22) в (20.19), врахувавши (20.16) і опустивши для спрощення запису індекси 2 при σ і δ , отримаємо:

$$\dot{E}_{3\Sigma}^+ = \dot{E}_1^+ \frac{(1 + j) \frac{d}{\delta}}{60\pi\sigma dsh\left[(1 + j) \frac{d}{\delta}\right]}. \quad (20.23)$$

З останнього виразу безпосередньо випливає, що ефективність розглянутого екрану визначається формулою:

$$K_{nl} = 60\pi\sigma d \frac{\left| sh\left[(1 + j) \frac{d}{\delta}\right] \right|}{\left| (1 + j) \frac{d}{\delta} \right|}. \quad (20.24)$$

Для практичних розрахунків зручно користуватися наступними наближеними виразами:

$$K_{nl} = 60\pi\sigma d \times \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ при } \frac{d}{\delta} < 0.1; \\ \frac{\delta}{2\sqrt{2d}} e^{\frac{d}{\delta}} \text{ при } \frac{d}{\delta} > 1. \end{array} \right\} \quad (20.25)$$

Відбивання електромагнітної хвилі від поверхні екрану і ослаблення її при проникненні крізь товщу стінки

Значення K_{nl} можна розглядати як добуток двох співмножників:

$$K_{нл} = K_{нл.відб} K_{нл.зат.} \quad (20.26)$$

Перший з цих співмножників характеризує ефективність відбивання первинної падаючої хвилі електричного поля від поверхні 1-1 екрана. чисельно він дорівнює модулю відношення E_1^+ до $E_{2\Sigma}$ – сумарній електричній складовій поля в товщі стінки екрану біля поверхні 1-1. Остання дорівнює сумі електричних складових усіх хвиль, що рухаються від 1-1 вправо і падаючих на цю поверхню праворуч.

Шляхом перетворень можна показати, що

$$K_{нл.відб.} = 60\pi\sigma d \left| \frac{th \left[(1+j) \frac{d}{\delta} \right]}{(1+j) \frac{d}{\delta}} \right|, \quad (20.27)$$

або наближено:

$$K_{нл.відб.} = 60\pi\sigma \times \begin{cases} d & \text{при } \frac{d}{\delta} < 0.1; \\ \delta & \text{при } \frac{d}{\delta} > 1. \end{cases} \quad (20.28)$$

З останніх формул можна зробити висновок, що зі збільшенням товщини екрану $K_{нл.відб.}$ спочатку зростає, а потім майже не змінюється. Це й зрозуміло, оскільки при $d > \delta$ явища на поверхні 1-1 практично перестають залежати від d .

Більш цікавою є частотна залежність. З підвищенням частоти ефективність відбивання спочатку зберігається незмінною, потім починає зменшуватися і при $d > \delta$ виявляється практично обернено пропорційною \sqrt{f} . Причина в тому, що через поверхневий ефект зростає поверхневий опір екрану.

Другий співмножник у правій частині (20.26) характеризує ступінь ослаблення електричної складової при проникненні поля крізь товщу стінки екрану. Чисельно він дорівнює модулю відношення $E_{2\Sigma}$ до $E_{3\Sigma}^+$. З формул (20.24) і (20.27) випливає, що:

$$K_{нл.зат.} = \left| ch \left[(1+j) \frac{d}{\delta} \right] \right|, \quad (20.29)$$

або наближено:

$$K_{нл.зат.} = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{d}{\delta} < 0.1; \\ \frac{1}{2} e^{\frac{d}{\delta}} & \text{при } \frac{d}{\delta} > 1. \end{cases} \quad (20.30)$$

Останній результат теж цілком зрозумілий. Дійсно, якщо товщина екрана багато менше товщини поверхневого шару, то практично ніякого ослаблення електричної складової при проникненні крізь товщу стінки не відбувається. Якщо ж товщина екрана досить велика, то це ослаблення стає суттєвим, але воно вдвічі менше, ніж $e^{d/\delta}$, оскільки при відбиванні від поверхні 2-2 електрична складова поля подвоюється внаслідок того, що $n_2 = 1$.

Формула (20.26) є доволі наочною. Однак звернемо увагу на умовність параметрів $K_{нл.відб.}$ і $K_{нл.зат.}$. Ці величини не описують енергетичні процеси екранування. Якщо визначити $K_{нл.відб.P}^2$ як відношення потужності первинної падаючої хвилі на одиницю поверхні до потужності результуючої хвилі, що проникає за поверхню 1-1 в товщу екрану, отримаємо:

$$K_{нл.відб.P}^2 = 30\pi\sigma \times \begin{cases} d & \text{при } \frac{d}{\delta} < 0.1; \\ \delta & \text{при } \frac{d}{\delta} > 1. \end{cases} \quad (20.31)$$

Відповідно, визначивши $K_{нл.зат.P}^2$ як відношення потужності результуючої хвилі, що проникає за поверхню 1-1, до потужності хвилі, що пройшла крізь екран, отримаємо:

$$K_{нл.зат.P}^2 = 120\pi\sigma \times \begin{cases} d & \text{при } \frac{d}{\delta} < 0.1; \\ \delta \frac{1}{8} e^{-\frac{2d}{\delta}} & \text{при } \frac{d}{\delta} > 1. \end{cases} \quad (20.32)$$

Таким чином виявляється, що при $d/\delta < 0.1$ хвиля, що пройшла крізь екран, виявляється ослабленою більшою мірою за рахунок втрат в екрані, ніж за рахунок відображення від екрану ($K_{нл.зат.P}^2 = 4K_{нл.відб.P}^2$), не дивлячись на те, що $K_{нл.зат.} = 1$, тобто ослаблення при проникненні крізь товщу екрану, яке визначається за формулою (20.30), відсутнє.

Як впливає з формул (20.28) і (20.31), сталевий екран на всіх частотах, а особливо на високих (при $d/\delta > 1$) відбиває гірше мідного і алюмінієвого (через менше значення питомої провідності). Проте на високих частотах в ньому значно більше ослаблення при проникненні (через багато меншу глибину проникнення).

Порівняння різних металів як матеріалів для екрану.

Формула (20.25) дозволяє порівняти між собою різні метали як матеріали для екрану. Дійсно, при $d/\delta < 0.1$ ефективність екрану пропорційна питомій провідності σ і не залежить від магнітної проникності матеріалу. Отже, при однакових товщинах мідний екран краще алюмінієвого і набагато краще сталевого.

Однак зі зростанням товщини стінки екрану d або частоти f істотну роль при визначенні ефективності екрану K має член $e^{d/\delta}$. Оскільки у сталі товщина поверхневого шару багато менше, ніж у міді й алюмінію, то сталевий екран виявляється більш ефективним.

Гранична частота $f_{гп}$ за якої ефективність нескінченного плоского сталевого і мідного екранів для плоскої електромагнітної хвилі, що падає на них перпендикулярно, залежить від параметра d і визначається формулою:

$$f_{гп} = \frac{0,48}{\mu d^2}, \quad (20.33)$$

де μ – відносна магнітна проникність сталі.

На рис. 20.4 наведено графічну залежність граничної частоти f_{gr} від параметра d для випадків $\mu = 100$ і $\mu = 500$. Нижче відповідних прямих знаходяться області значень f та d , при яких більш ефективний мідний екран, а вище – сталевий екран. Як бачимо, при $d \geq 0.2$ мм і $f \geq 100$ кГц сталевий екран ефективніше мідного.

Необхідно, однак, ще раз підкреслити, що поки що йдеться лише про нескінченний плоский екрані при перпендикулярному падінні на нього плоскої електромагнітної хвилі. Цей випадок найпростіший для аналізу і є практично цікавий тим, що отримане для нього значення $K_{пл}$ входить у всі формули для розрахунку ефективності замкнених (без отворів і щілин) екранів реальної форми при екрануванні зосереджених джерел поля.

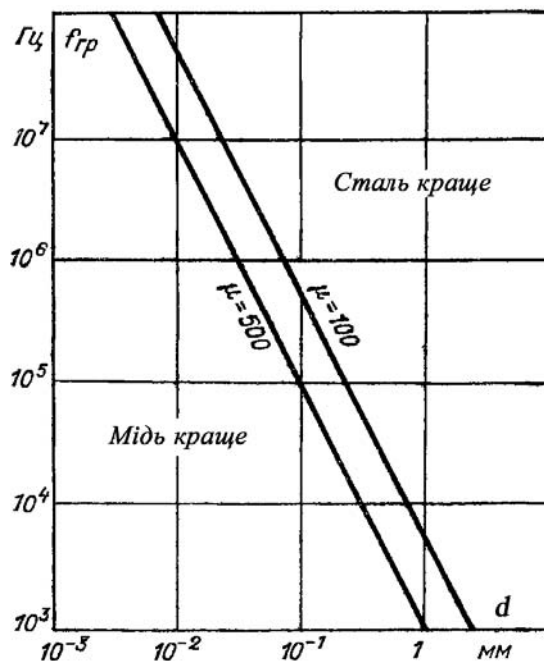


Рис. 20.4. Залежність граничної частоти від товщини екрану

Інші випадки екранування виявлятимуть інші властивості різних металів як матеріалів для екранів. Так, якщо джерелом поля є магнітний диполь (котушка зі струмом), то на дуже низьких частотах, як і на дуже високих, сталь екранує краще міді. Чим менше розміри екрана, товщі його стінки і більше магнітна проникність сталі, тим ширше область низьких частот, в якій сталь екранує краще. Верхня межа цієї області може виявитися вище частоти f_{gr} , визначеною за формулою (20.33). Тоді сталевий екран виявиться на всіх частотах ефективніше мідного.

Ефективність двостінного екрану. Рекомендації щодо застосування двостінного екрану

На рис. 20.5 схематично наведено принцип роботи нескінченного плоского двостінного екрану з паралельними стінками. Відстань між стінками складає d_{12} . У загальному випадку стінки можуть бути з різних матеріалів і неоднаковою товщини.

Неважко зрозуміти, що ефективність двостінного екрану не дорівнює добутку ефективностей двох одностінних екранів. Дійсно, потік електромагнітної енергії, що проникає крізь першу стінку, зазнає нескінченної

кількості відбивань у просторі між стінками. У результаті крізь другу стінку проникає значно більша частина цього потоку, ніж у тому випадку, коли після першого ж відбивання потік енергії більш не повертається до цієї стінки.

Під $E_{3\Sigma}^+$ на рис. 20.5 мається на увазі сума електричних складових усіх хвиль, що рухаються праворуч від першої стінки до другої (біля поверхні першої стінки), під $E_{3\Sigma}^-$ – сума складових всіх хвиль, падаючих праворуч на цю стінку (біля цієї ж стінки), нарешті, під $E_{5\Sigma}^+$ – сума складових усіх хвиль, що проникли крізь другу стінку.

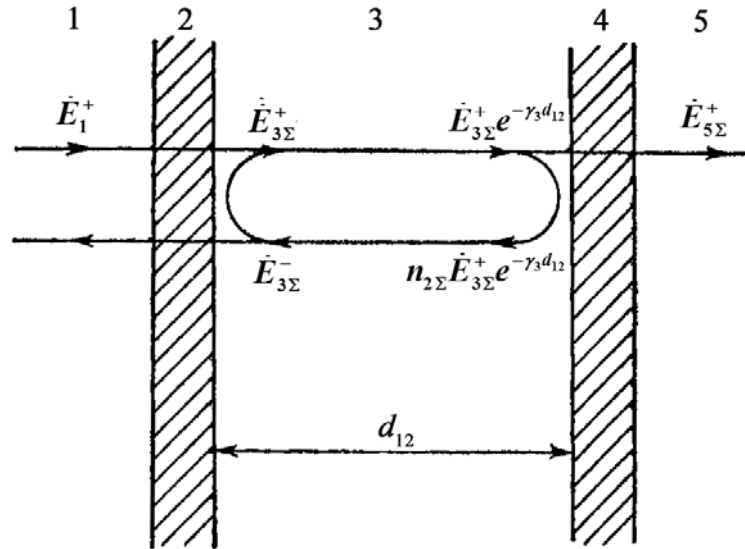


Рис. 20.5. Ілюстрація принципу роботи двостінного екрану

Між електричною складовою первинної хвилі, падаючої ліворуч на першу стінку (E_1^+), та параметрами $E_{3\Sigma}^+$, $E_{3\Sigma}^-$ і $E_{5\Sigma}^+$ існує наступний зв'язок:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{3\Sigma}^+ &= \frac{1}{K_1} \dot{E}_1^+ + n_{1\Sigma} \dot{E}_{3\Sigma}^-; \\ \dot{E}_{3\Sigma}^- &= \dot{E}_{3\Sigma}^+ n_{2\Sigma} e^{-2\gamma_3 d_{12}}; \end{aligned} \quad (20.34)$$

$$\dot{E}_{5\Sigma}^+ = \frac{1}{K_2} \dot{E}_{3\Sigma}^+ e^{-\gamma_3 d_{12}},$$

де K_1, K_2 - комплексні значення ефективностей екранування першої та другої стінки відповідно,

$n_{1\Sigma}, n_{2\Sigma}$ – коефіцієнти відбивання від цих стінок (з урахуванням їх товщини).

З формули (20.34) легко знайти:

$$\dot{E}_{5\Sigma}^+ = \frac{\dot{E}_1^+}{K_1 K_2 (e^{\gamma_3 d_{12}} - n_{1\Sigma} n_{2\Sigma} e^{-\gamma_3 d_{12}})}. \quad (20.35)$$

Так як між стінками є вільний простір, то $\gamma_3 = j2\pi/\lambda$. Щоб знайти $n_{1\Sigma}$ і $n_{2\Sigma}$ потрібно повернутися до рис.20. 3 і скласти електричні складові всіх хвиль, які рухаються від поверхні 1-1 ліворуч. Неважко показати, що

$$n_{\Sigma} = n_1 \frac{1 - e^{-2(1+j)\frac{d}{\delta}}}{1 - n_1^2 e^{-2(1+j)\frac{d}{\delta}}}. \quad (20.36)$$

На підставі формули (20.35) з урахуванням сказаного можна написати для двостінного екрану:

$$K_{12} = K_1 K_2 \left| 1 - n_{1\Sigma} n_{2\Sigma} e^{-j\frac{4\pi d_{12}}{\lambda}} \right|, \quad (20.37)$$

де $n_{1\Sigma}$ і $n_{2\Sigma}$ визначаються за формулою (20.36),
 n_1 – коефіцієнт відбивання від плоскої поверхні розділу вільного простору і металу, з якого виготовлена дана стінка,
 δ – товщина поверхневого шару для цього металу,
 d – товщина цієї стінки.

Якщо обидві стінки однакові, то формула (20.37) має вид:

$$K_{12} = K_1^2 \left| 1 - n_{\Sigma}^2 e^{-j\frac{4\pi d_{12}}{\lambda}} \right|. \quad (20.38)$$

Скориставшись формулою (20.38), можна відповісти на питання, який екран більш ефективний – двостінний або одностінний з подвоєною товщиною стінки. Аналіз показує, що при $d \ll \delta$ двостінний екран в $K_1 2\pi d_{12}/\lambda$ разів ефективніше одностінного подвоєної товщини. Отже, якщо $K_1 2\pi d_{12}/\lambda \gg 1$, двостінний екран ефективніший. Коли значення $K_1 2\pi d_{12}/\lambda$ наближається до одиниці, то перевага двостінного екрану втрачається і сама ця оцінка стає неточною.

При $d > \delta$ двостінний екран в $d_{12}/(7\mu\delta)$ разів ефективніше одностінного, причому з наближенням зазначеної величини до одиниці перевага двостінного екрану втрачається і самооцінка стає неточною. Розрахунки і практика показують, що за конструктивними і економічними міркуваннями не має сенсу робити екрани з листового матеріалу двостінними; краще домогтися потрібного збільшення ефективності шляхом відповідного потовщення стінки.

Ефективність біметалічного екрану

Якщо у формулі (20.35) вважати $d_{12} = 0$, отримаємо вираз для оцінки ефективності нескінченного плоского біметалічного екрану:

$$K_{12} = K_1 K_2 |1 - n_{1\Sigma} n_{2\Sigma}|. \quad (20.39)$$

Аналіз виразу (20.39) і фізичні міркування дозволяють зробити наступні висновки:

- якщо товщина кожного з шарів біметалічного екрану багато менше товщини поверхневого шару для даного металу, то при одній і тій же товщині однорідний екран з металу з більшою провідністю σ ефективніше біметалічного;

- якщо товщина кожного з шарів біметалічного екрану багато більше товщини поверхневого шару для даного металу, то при одній і тій же товщині однорідний екран з металу з меншою товщиною поверхневого шару вигідніше біметалічного;

- якщо товщина сталевго екрану набагато більше, ніж δ для сталі, то збільшення товщини цього екрану при збереженні його однорідності збільшить ефективність екранування сильніше, ніж таке ж збільшення товщини шляхом накладення шару міді.

Тобто біметалічні екрани у загальному випадку використовувати недоцільно. Однак якщо треба забезпечити високу ефективність екранування котушки зі струмом в широкому діапазоні частот, з низькими частотами включно, то доведеться використовувати товстостінний екран з феромагнітного матеріалу з великою магнітною проникністю. Але такий екран внесе в котушку великий активний опір і сильно зменшить її добротність. Щоб уникнути цього шкідливого ефекту, доцільно зробити внутрішній шар екрану з міді.

Запитання

1. Дайте визначення терміну «Електромагнітний екран».
2. Поясніть принцип оцінки ефективності електромагнітного екрану.
3. Наведіть приклади випадків однозначного визначення ефективності електромагнітного екрану.
4. Опишіть типи елементарних джерел поля, на основі яких описують усі інші типи джерел, що використовуються на практиці.
5. Наведіть визначення терміну «Електростатичний екран».
6. Наведіть причини виникнення резонансних явищ у електромагнітних екранах.
7. Сформулюйте принцип взаємності для електромагнітних екранів.
8. Опишіть можливий негативний вплив екрану на екранований об'єкт.
9. Поясніть чому сумарна потужність електромагнітного поля, що пройшла через стінку екрану, більше, ніж потужність першої заломленої хвилі.
10. Назвіть складові, через які виражається сумарна ефективність екрану.
11. Поясніть чому при збільшенні товщини екрану ефективність відбивання спочатку зростає, а потім майже не змінюється.
12. Наведіть причину переваги сталевго матеріалу екрану порівняно з мідним.
13. Охарактеризуйте практичну доцільність використання двостінного екрану.
14. Охарактеризуйте практичну доцільність використання біметалевого екрану.

Лекція 21. Екранування електричного диполію

Явища, що виникають при внесенні провідника в електростатичне поле

Якщо в електростатичне поле внести провідник, рис. 21.1, то на його поверхні з'являться індуковані заряди, а в просторі – створене ними вторинне поле.

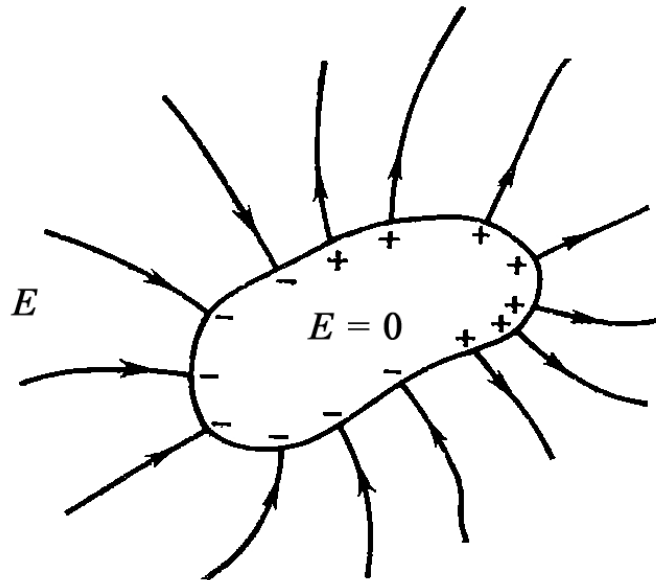


Рис. 21.1. Провідник в електростатичному полі

У зовнішньому просторі вторинне поле, складаючись з первинним, спотворює його, а в товщі провідника послаблює його. Через деякий відрізок часу заряди виявляються розподіленими по поверхні провідника так, що напруженість поля в будь-якій точці в товщі провідника дорівнює нулю, а в будь-якій точці його поверхні силові лінії перпендикулярні до неї.

З точки зору кінцевого ефекту можна було б припустити, що в перший момент первинне поле пронизує всю товщу провідника. У дійсності провідник, внесений в поле, витісняє поле з обсягу, який він займає. Поле прагне проникнути в провідник, але, відбиваючись від його шарів, проникає лише на невелику глибину. Вся енергія, що проникла в провідник, розсіюється (перетворюється в тепло).

Час, протягом якого відбувається встановлення остаточного стану, залежить від провідності і конфігурації провідника. Від них же залежить і хід процесу перерозподілу заряду. У спеціальних випадках час встановлення може бути вельми значним, а характер процесу складним. Так, наприклад, якщо в полі між пластинами 1 і 2, зображеними на рис. 21.2 а, внести провідник у формі двох пластин 3 і 4, з'єднаних один з одним дротом з опором R , рис. 21.2 б, то процес встановлення можна буде розглядати як заряд двох послідовно включених ємностей C . при великому R він буде аперіодичним з постійною часу $\tau = 0.5RC$, а при малому R – коливальним з частотою $\omega = (\omega_0^2 - \alpha^2)^{0.5}$ і постійною часу затухання $\tau = 1/\alpha$, де $\omega_0^2 = 2/LC$, $\alpha = R/2L$, L – повна індуктивність всього ланцюга.

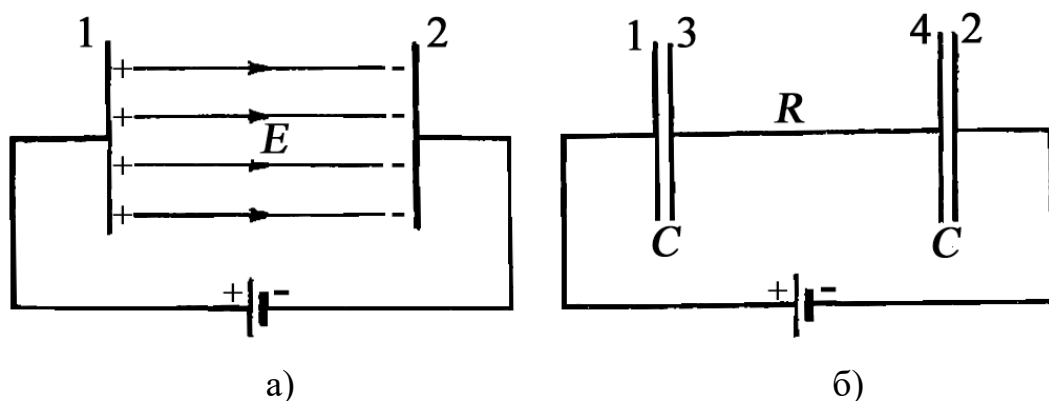


Рис. 21.2. Ілюстрація до встановлення поля за умови внесення в нього провідника складної форми

Якщо розглянутий провідник – це метал, то при миттєвому внесенні його в поле в ньому виникнуть затухаючі коливання, частота яких визначатиметься його розмірами і формою. Тривалість процесу встановлення практично не перевищує часток мікросекунди.

Екранування електричного диполя при частоті, рівній нулю

Розглянемо електричний диполь рис. 21.3, а. Навколо цього диполя існує електростатичне поле з напруженістю E_0 , залежить від точки вимірювання. Помістимо цей диполь в замкнуту без отворів і щілин металеву коробку-екран, рис. 21.3, б. На внутрішній поверхні цього екрану з'являться індуковані заряди, розташовані (після короткого процесу встановлення режиму) так, що напруженість поля в будь-якій точці в товщі стінок, а отже, і поза екраном дорівнює нулю. Ефективність екрану стає нескінченно великою, тобто екранування є ідеальним.

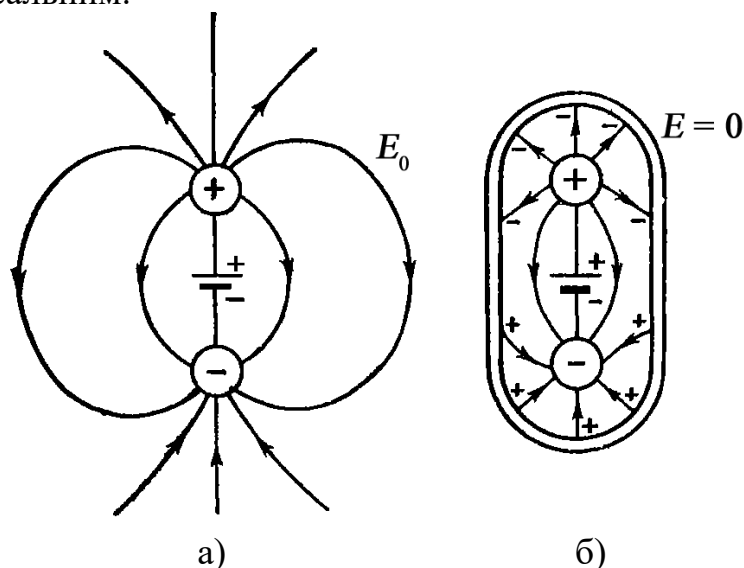


Рис. 21.3. Електричний диполь поза екраном а) і в екрані б)

До стану, показаному на рис. 21.3, б, можна прийти різними шляхами. Так, можна уявити, що екран складається з двох частин, які рухаються назустріч одна одній до утворення єдиного цілого, рис. 21.4, а. При цьому, поки дві частини не сполучаться, на їхніх зовнішніх поверхнях будуть існувати

індуковані заряди того ж знаку, що і заряди відповідних половин диполя, а поза екраном буде існувати поле, майже таке ж, як при відсутності екрану.

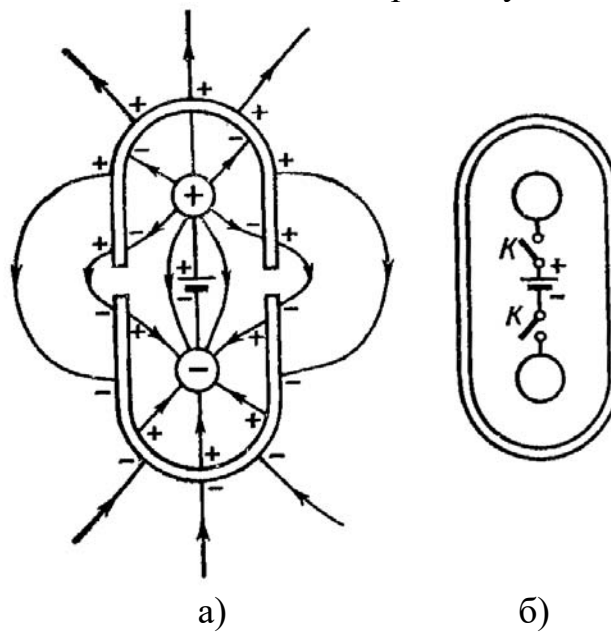


Рис. 21.4. Дві моделі переходу системи в усталений режим

При сполученні частин екрану на зовнішній поверхні екрану виникне затухаючий коливальний процес, в результаті якого енергія, накопичена в полі поза екраном, частково перейде в тепло, а частково буде випромінена.

Можна уявити собі, що диполь був поміщений всередину екрану до того, як був збуджений, рис. 21.4, б. Диполь разом з внутрішньою областю екрану утворює коливальну систему. При замиканні ключів K в цій системі виникне затухаючий коливальний процес. Під час цього процесу деяку кількість електромагнітної енергії перейде в тепло і дуже невелика порція енергії проникне крізь товщу стінок і буде випромінена.

Звернемо увагу на те, що ефективність екранування в розглянутому випадку є нескінченною незалежно ні від форми екрану, товщини його стінок, металу, з якого він виготовлений.

Екран і заземлення

Дуже важливо, що робота екрану у випадку, наведеному на рис. 21.3, б, ніяк не пов'язана із заземленням. Відсутність цього зв'язку характерна для всіх випадків, в яких сума всіх зарядів – джерел первинного поля, розташованих усередині екрану, дорівнює нулю.

Якщо сума цих зарядів не дорівнює нулю, то, щоб ліквідувати поле поза екраном, необхідно хоча б на деякий час з'єднати його з землею, точніше з системою провідників, на яких розташовується заряд, рівний за значенням і протилежний за знаком заряду екрану. Ілюстрація описаного явища наведена на рис. 21.5. Нехай на деякій висоті над поверхнею, що є провідником - «землею» - розташована позитивно заряджена куля. Негативний заряд, що дорівнює заряду кулі, розподілений по «землі». Будемо поступово зближувати дві порожніх металевих півкулі так, щоб після сполучення вони утворили замкнений екран, оточуючий заряджену кулю. Неважко зрозуміти, що на внутрішній поверхні

півкуль будуть індуковані негативні, а на зовнішній поверхні такі ж позитивні заряди, рис. 21.5, а. Коли півкулі сполучаться, то всі силові лінії поля, що починаються на екранованій кулі, будуть закінчуватися на внутрішній поверхні екрану. Поле в товщі стінок екрану буде дорівнює нулю.

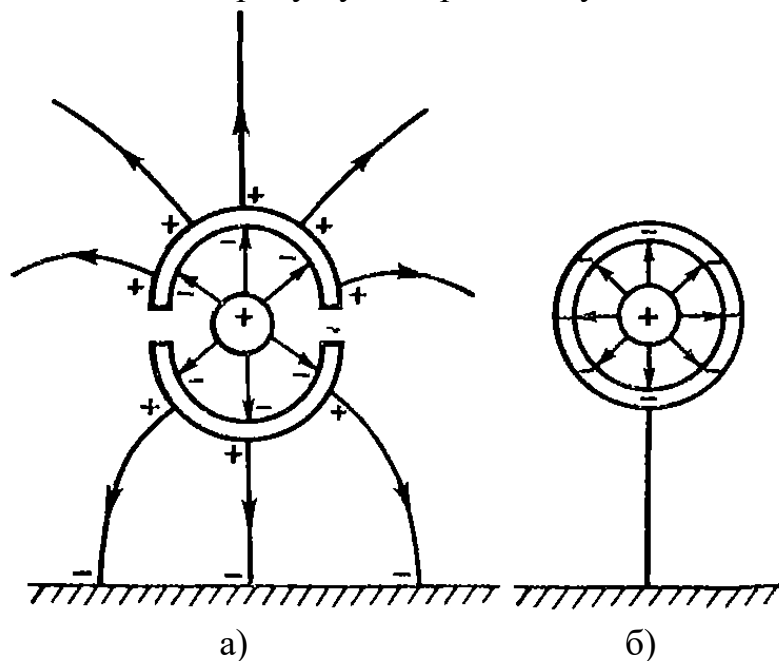


Рис. 21.5. Екранування зарядженої кулі

Однак на зовнішній поверхні екрану буде існувати позитивний заряд, в рівний заряду екранованої кулі, а отже, поза екраном буде існувати поле, майже таке ж, як при відсутності екрану. Але якщо з'єднати екран з «землею», то після дуже короткочасного затухаючого коливального процесу (або аперіодичного процесу, якщо опір з'єднувального провідника дуже великий) встановиться режим, показаний на рис. 21.5, б, тобто поле поза екраном зникне. Його енергія частково перейде в тепло, а частково випроміниться. Після встановлення режиму, показаного на рис. 21.5,б, провідник, що з'єднує екран з «землею», можна прибрати.

Залежність ефективності екранування електричного диполя від частоти

Перейдемо до випадку, коли диполь, розташований усередині екрану, збуджується джерелом змінної напруги, рис. 21.6. При цьому заряди, розташовані на кулях диполя, безперервно змінюються. Це призводить до зміни зарядів, індукованих на внутрішній поверхні екрану, в результаті чого по екрану тече струм, уздовж поверхні стінок екрану існує деяке падіння напруги, а отже, поза екраном існує залишкове поле, рис. 21.6, а.

Можна уявити собі механізм виникнення цього залишкового поля наступним чином. Внаслідок інерційності системи, зміна індукованих зарядів на внутрішній поверхні екрану дещо запізнюється у порівнянні зі зміною зарядів на кулях диполя і взаємна компенсація полів в товщі стінок і поза екраном виявляється неповною.

З підвищенням частоти вказане запізнювання виявляється сильнішим, залишкове поле поза екраном зростає, і ефективність екранування зменшується. Це зменшення можна пояснити й інакше. Дійсно, між кулями диполя і екраном існують ємності, рис. 21.6, а. Диполь, ці ємності і екран утворюють замкнений ланцюг. На низьких частотах опір цього ланцюга визначається практично тільки ємностями і з підвищенням частоти зменшується. В результаті при незмінній величині напруги струм, що протікає по екрану, зростає а внаслідок цього збільшується падіння напруги уздовж його стінок, тобто залишкове поле поза екраном.

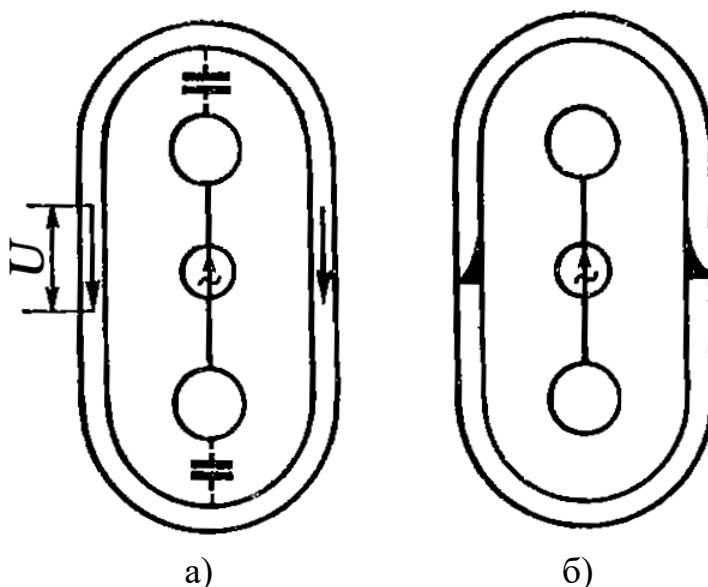


Рис. 21.6. Екранування диполя, що генерує змінне поле

Однак з подальшим підвищенням частоти починає проявлятися поверхневий ефект: розподіл струму по перетину стінки екрану стає істотно нерівномірним. Щільність струму на зовнішній поверхні екрану істотно зменшується, рис. 21.6, б. Це зменшення стає більш сильним, ніж збільшення повного струму, і тому залишкове поле поза екраном, пройшовши через максимум, починає спадати. Відповідно ефективність екрану, пройшовши через мінімум, починає швидко рости, рис. 21.7.

Зі сказаного можна зробити висновок, що в області частот, де поверхневий ефект ще практично не виражений, ефективність екрану повинна бути прямо пропорційна товщині стінок і питомій провідності матеріалу екрану. Магнітна проникність тут ролі не грає. В області частот, де поверхневий ефект сильно виражений, магнітна проникність відіграє важливу роль: при одній і тій же товщині стінок сталевий екран внаслідок великої магнітної проникності сталі може виявитися значно ефективніше мідного.

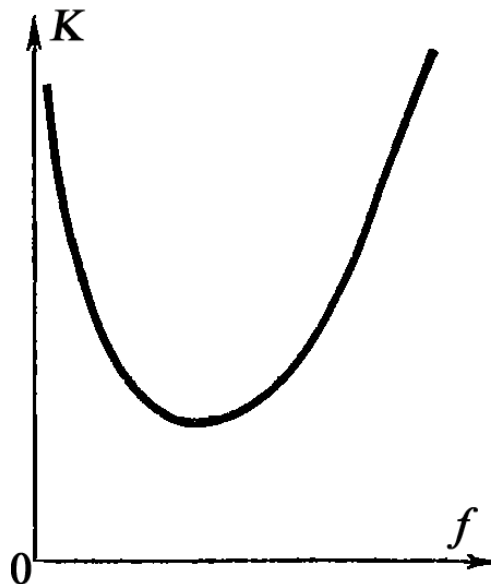


Рис. 21.7. Залежність ефективності екранування електричного диполя від частоти

Ефект компенсації первинного поля, створюваного зарядами куль диполя, полем зарядів, індукованих на внутрішній поверхні екрану, може розглядатися як ефект відбивання поля диполя від стінок екрана. Зі зростанням частоти відбивання погіршується, що призводить до падіння ефективності екрану, але потім стрімко зростає ослаблення при проникненні поля крізь товщу стінок, тому сумарна ефективність екрану швидко збільшується.

Ефективність екранування елементарного електричного диполя кульовим екраном. Розрахунок ефективності екранування відкритого випромінювача реальним екраном

При довільній формі екрану і кінцевих розмірах диполя кількісна оцінка ефективності екранування дуже сильно ускладнена. Тому для отримання кількісної оцінки звернемося до найпростішого випадку – елементарного електричного диполя в центрі кульового екрана. Ефективність кульового екрана з внутрішнім радіусом R і товщиною стінок d по відношенню до елементарного електричного диполя, розташованому в його центрі, при $d \ll R \ll \lambda/2\pi$ визначається за формулою:

$$K = 0,21 \frac{\lambda}{R} K_{nl}, \quad (21.1)$$

де K_{nl} – ефективність екранування нескінченним екраном плоскої хвилі.

Електромагнітна хвиля елементарного диполя не плоска, а сферична; однак при $d \ll R$ можна вважати поле в товщі стінок екрану плоским і скористатися для оцінки ослаблення його при проникненні крізь товщу стінок вже відомим виразом. Якщо так, то для ефективності відбивання поля від екрану можна написати:

$$K_{\text{відб}} = 0,21 \frac{\lambda}{R} 60\pi\sigma d \left| \frac{\text{th} \left[(1+j) \frac{d}{\delta} \right]}{(1+j) \frac{d}{\delta}} \right|, \quad (21.2)$$

або наближено

$$K_{\text{відб}} = 0,21 \frac{\lambda}{R} 60\pi\sigma \times \begin{cases} d & \text{при } \frac{d}{\delta} < 0.1; \\ \delta & \text{при } \frac{d}{\delta} > 1. \end{cases} \quad (21.3)$$

З формули (21.3) можна зробити висновок, що з підвищенням частоти (зменшенні довжини хвилі) ефективність відбивання зменшується при чому, якщо $d/\delta > 1$, то це зменшення посилюється внаслідок зменшення δ . Навпаки, зі зменшенням частоти $K_{\text{відб}}$ необмежено зростає, тобто при $f \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) $K_{\text{відб}} \rightarrow \infty$.

Якщо радіус екрану R співвимірний з $\lambda/2\pi$, формула (21.1) стає наближеною. Залежно від співвідношення λ/R дійсна ефективність екрану виявляється більшою або меншою у порівнянні зі значенням, розрахованим за цією формулою.

Особливо цікавими є випадки, коли на радіусі екрану укладається приблизно ціле число півхвиль. Тоді внаслідок входження в резонанс порожнини екрану виникає ефект, еквівалентний повному зникненню відбиття від стінок. У цьому випадку ефективність екранування визначається тільки ослабленням електромагнітної хвилі в товщі стінок. З підвищенням частоти вказане явище настає перший раз при $\lambda = 2,28 R$.

Коли на радіусі екрану укладається приблизно непарна кількість чвертей хвилі, ефективність екранування виявляється близькою до $2K_{nl}$.

Механізм описаних резонансних явищ можна зрозуміти, розглянувши довгу лінію з джерелом задавальної напруги U_1 з нульовим внутрішнім опором, рис. 21.8. Перший відрізок є лінією без втрат довжиною l з хвильовим опором Z_{01} . До нього під'єднана лінія з втратами з хвильовим опором Z_{02} , для простоти вона вважається нескінченно довгою.

Джерело створює першу падаючу хвилю з напругою U_1^+ на початку лінії. На межі ліній напруга цієї хвилі дорівнює $U_1^+ e^{-\gamma_1 l}$, де γ_1 – коефіцієнт розповсюдження першої лінії. Для відбитої хвилі маємо $U_1^- = n U_1^+ e^{-\gamma_1 l}$, а для хвилі, що пройшла у другу лінію $U_1^+ = (1+n) U_1^+ e^{-\gamma_1 l}$. Простежимо за нескінченною послідовністю відбивань, врахувавши, що коефіцієнт відбивання від сторони, де розташоване джерело, дорівнює -1, оскільки лінія тут має нульовий опір; складемо напруги всіх хвиль, що проникли в другу лінію, тоді отримаємо:

$$\dot{U}_{22}^+ = (1+n) \dot{U}_1^+ e^{-\gamma_1 l} \left[1 - n e^{-2\gamma_1 l} + (n e^{-2\gamma_1 l})^2 + \dots \right]. \quad (21.4)$$

Оскільки $n < 1$, то формулу (21.4) можна записати як

$$\dot{U}_{2\Sigma}^+ = \dot{U}_1^+ e^{-\gamma l} \frac{1+n}{1+ne^{-2\gamma l}}. \quad (21.5)$$

У лінії без втрат $\gamma = j2\pi/\lambda$ тому остаточно:

$$\dot{U}_{2\Sigma}^+ = \dot{U}_1^+ e^{-\gamma l} \frac{1+n}{1+ne^{-2\pi \frac{2l}{\lambda}}}. \quad (21.6)$$

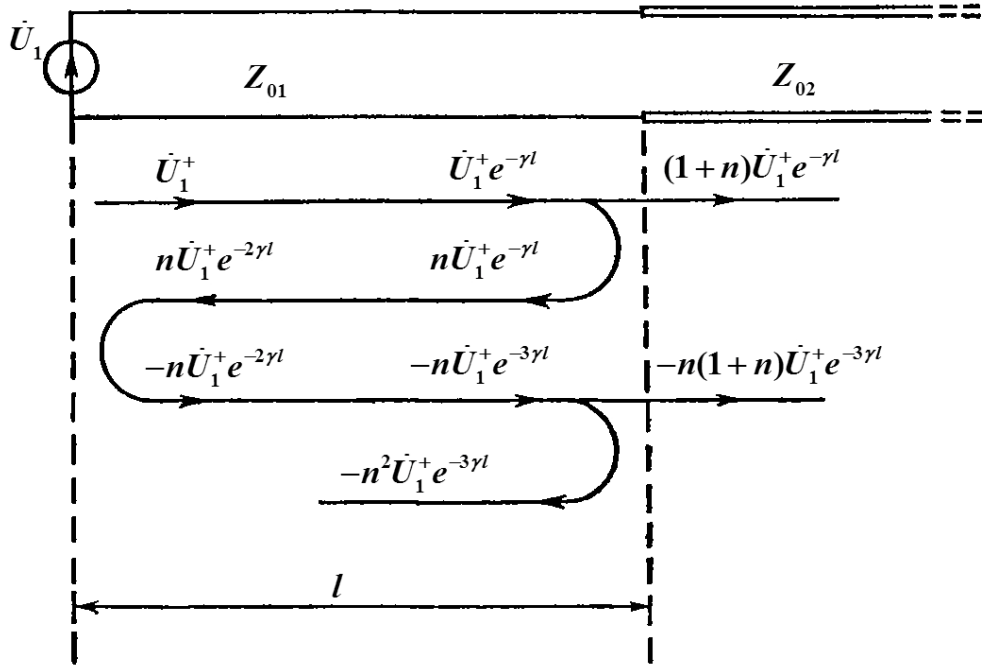


Рис. 21.8. Ілюстрація до виникнення резонансних явищ

Якщо $l = k\lambda/2$ то $U_{2\Sigma}^+ = U_1^+ e^{-\gamma l}$, тобто відбивання відсутнє і хвиля безперешкодно проникає в другу лінію. У випадку $l = (2k+1)\lambda/4$, формула (21.6) перетворюється до виду:

$$\dot{U}_{2\Sigma}^+ = \dot{U}_1^+ e^{-\gamma l} \frac{1+n}{1-n}. \quad (21.7)$$

Якщо $|Z_{02}| \ll |Z_{01}|$, то $n \approx -1$. Тому хвиля, що проникла в другу лінію, виявляється приблизно вдвічі слабкіше тієї, яку ми отримали б в ній, не враховуючи резонансних явищ (за умови, що відбивання від лівого кінця відсутнє). У разі відсутності в екрані отворів і щілин зазначені резонансні явища практично не грають ролі, так як при скільки-небудь значній товщині стінок, затухання в товщі стінок на тих частотах, на яких ці явища спостерігаються, - дуже велике.

Ефективність реального екрану довільної форми відносно кульового можна наближено оцінити за формулою (21.1), замінивши цей екран кульовим з приблизно таким же об'ємом.

Екранування витка зі струмом. Випадок статичного поля

Навколо витка з постійним струмом існує постійне магнітне поле з напруженістю H_0 , значення якого залежить від точки вимірювання. Так як будь-

який реальний електричний контур має кінцевий опір, то для підтримки в ньому струму необхідне джерело задавальної напруги, рис. 21.9, а в просторі навколо витка крім постійного магнітного поля існує ще й постійне електричне поле. Однак внаслідок того, що екранування джерела постійного електричного поля вже проаналізовано, далі розглядається тільки магнітне поле.

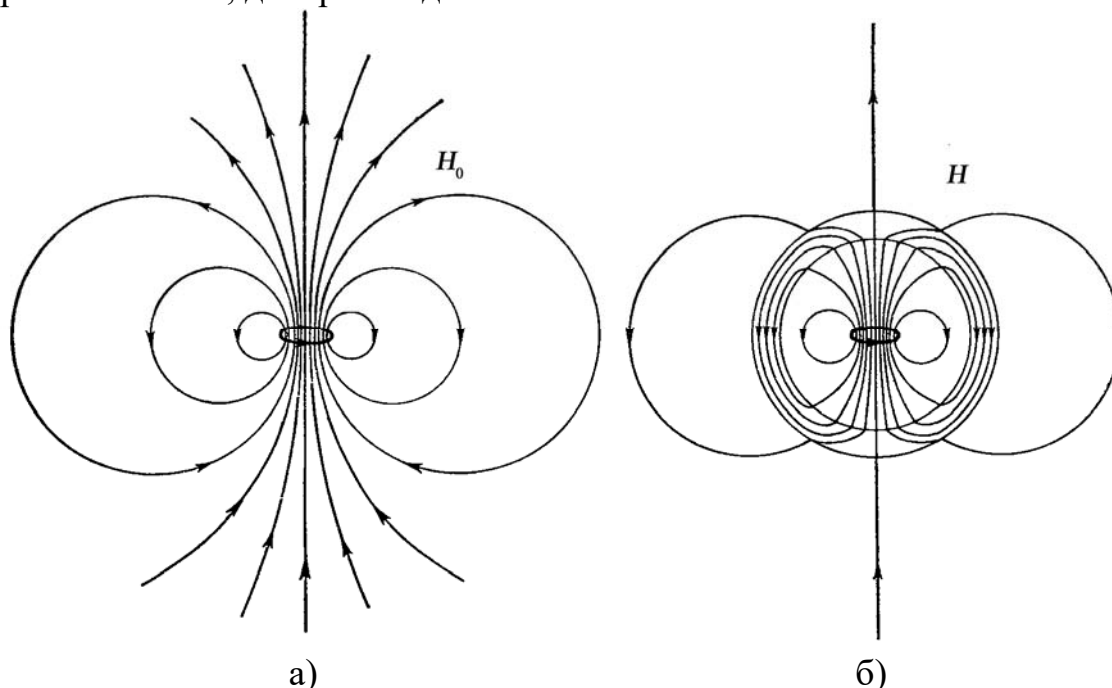


Рис. 21.9. Екранування витка зі струмом при $\mu = 1$ а) і $\mu > 1$ б)

Оточимо виток замкнутим екраном. Якщо екран виготовлений з немагнітного матеріалу, тобто з матеріалу з відносною магнітною проникністю $\mu = 1$ (мідь, алюміній), то він не впливатиме на магнітне поле, рис. 21.9, а, тобто ефективність екранування буде дорівнює одиниці. Звичайно, це твердження справедливе лише в усталеному режимі. Перехідний процес може протікати по-різному. Так, якщо екран складається з двох половин, що змикаються навколо витка, у якому вже існує струм, то при русі цих половин в магнітному полі, в них індукуюється ЕРС і виникають струми, поля яких, будуть накладатися на первинне поле і спотворювати його. Якщо струм створюється у витку, вже вміщеному в екран, то утворене поле теж буде індукувати ЕРС у екрані і поле струмів, що виникли в екрані, на деякий час затримає проникнення поля витка назовні екрана. Однак ці процеси мають лише вузько спеціальний інтерес; тому надалі ми будемо розглядати тільки сталий режим.

Якщо екран виготовлений з матеріалу з $\mu > 1$, то він намагнітиться і створене ним вторинну поле, склавшись з первинним, призведе до ослаблення поля поза екраном, рис. 21.9, б. Сказане, можна описати й інакше: силові лінії поля витка, зустрічаючи екран, що має менший магнітний опір, ніж вільний простір, прагнуть пройти по стінках екрану і в меншій кількості проникають у простір поза екраном.

Якщо виток нескінченно малий (елементарний магнітний диполь) і розташований у центрі кульового екрану з внутрішнім радіусом R і товщиною стінок d , ефективність екранування розраховується за формулою:

$$K_0 = \frac{(1 + 2\mu)(2 + \mu) - 2(\mu - 1)^2 \left(\frac{R}{R + d}\right)^3}{9\mu}. \quad (21.8)$$

При $\mu \gg 1$ і $R \gg d$ замість (21.8) можна користуватися спрощеною формулою:

$$K_0 = 1 + \frac{0,66\mu d}{R}. \quad (21.9)$$

Неважко бачити, що для збільшення ефективності необхідно збільшувати ширину стінок екрана і використовувати матеріал з великою магнітною проникністю. Якщо, наприклад, $R = 100$ мм, $d = 1$ мм, $\mu = 100$, то $K_0 = 1,66$, тобто екран є малоефективним. Але якщо $d = 10$ мм і $\mu = 1000$, то $K_0 = 67$, що свідчить про значне ослаблення поля. Для наближеної оцінки ефективності екранування можна користуватися формулами (21.8) і (21.9) також у разі витка або котушки кінцевих розмірів і екрану, що має форму, відмінну від кулі, замінивши його кулею рівного об'єму.

Залежність ефективності екранування витка зі струмом від частоти

Повернемося до екрану з немагнітного матеріалу і припустимо, що по витку протікає змінний струм. Змінне магнітне поле цього струму, пронизуючи екран, індукуює в ньому, як у короткозамкненим витку, ЕРС і примушує протікати струм, що створює вторинне магнітне поле. Поза екраном сумарне поле виявляється слабкіше первинного, тобто ефективність екрану виявляється більше одиниці. Щоб оцінити порядок цієї ефективності і її залежність від частоти звернемося до наступного міркування.

Припустимо, що екран – це простий короткозамкнений виток, що має індуктивність L_e і активний опір R_e , а взаємна індуктивність між ним екранованим витком дорівнює M . Якщо, для струму I в екранованому витку і струму I_e в екрані однакові позитивні напрямки, можна написати для струму в екрані:

$$I_e = -j \frac{M}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{1}{jQ_e}}, \quad (21.10)$$

де $Q_e = \omega L_e / R_e$ – добротність екрану на даній частоті.

Якщо $Q_e \ll 1$, формулу (21.10) можливо спростити:

$$I_e \approx -jI \frac{M}{L_e} Q_e, \quad (21.11)$$

тобто струм I_e зсунутий по фазі майже на 90° відносно струму I . Звичайно при цьому ні про яку взаємну компенсацію магнітних полів цих струмів не може бути мови. Ефективність екрану близька до одиниці. З підвищенням частоти добротність Q_e зростає. При $Q_e \gg 1$ можна вважати:

$$I_e \approx -j \frac{M}{L_e}, \quad (21.12)$$

тобто струми виявляються майже протифазі і може мати місце взаємна компенсація їх магнітних полів. Вона є повною за умови $Q_e \rightarrow \infty$, коли формула (21.12) з наближеної стає точною. Це означає, що поле струму I , екранованого витка поза екраном таке ж, як поле струму $I \cdot M/L_e$, що протікає по екрану. Звідси, у свою чергу можна зробити висновок, що коли Q_e має кінцеве значення і по екрану тече струм, що визначається формулою (21.10), поле поза екраном буде таким, як при відсутності екранованого витка, але при протіканні по екрану струму:

$$I_\Sigma \approx j \frac{M}{L_e} - j \frac{M}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{1}{jQ_e}}. \quad (21.13)$$

Тому ефективність екрану

$$K = \left| \frac{j \frac{M}{L_e}}{j \frac{M}{L_e} - j \frac{M}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{1}{jQ_e}}} \right| = |1 + jQ_e|. \quad (21.14)$$

При $Q_e \ll 1$ маємо $K \approx 1$, а при $Q_e \gg 1$ $K \approx Q_e$, тобто ефективність екрану виявляється ідентичною добротності його як короткозамкнутого витка.

З підвищенням частоти ефективність зростає спочатку повільно (при $Q_e \ll 1$), а потім практично пропорційно частоті. Далі, однак, починає відігравати суттєву роль поверхневий ефект. Струм починає все більш зосереджуватися біля внутрішньої поверхні екрана. Це призводить до зростання R_e і до уповільнення зростання Q_e . Але щільність струму зовнішньої поверхні екрану швидко зменшується, а з нею зменшується і залишкове поле поза екраном. Цей ефект виявляється сильнішим ефекту збільшення R_e , так що в результаті з подальшим підвищенням частоти ефективність екрану росте набагато швидше, ніж за законом прямої пропорційності.

У разі екрану з матеріалу з $\mu \gg 1$ сказане зберігає силу з тією лише різницею, що при прямуванні частоти до нуля ефективність K прагне не до 1, а до K_0 , що визначається формулою (21.8). Таким чином, у загальному випадку залежність ефективності K від частоти при екрануванні витка зі струмом має характер, представлений на рис. 21.10.

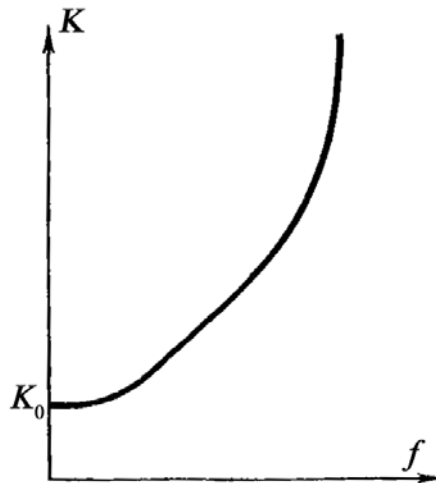


Рис. 21.10. Залежність ефективності екранування витка зі струмом від частоти

Ефект компенсації первинного поля, створюваного екранованим витком, полем струмів, індукованих в екрані, і полем, що виникає внаслідок намагнічування екрана (при $\mu > 1$), можна розглядати як ефект відбивання поля витка від стінок екрана, а поверхневий ефект (як і у випадку екранування півпростору від плоскої хвилі або екранування електричного диполя) – це ефект ослаблення залишкового поля при проникненні крізь товщу стінок екрана. На відміну від випадку екранування електричного диполя, при екранування витка зі струмом з підвищенням частоти відбивання поліпшується.

Ефективність екранування елементарного магнітного диполя кульовим екраном. Розрахунок ефективності екранування замкнутого випромінювача реальним екраном

При довільній формі екрану і кінцевих розмірах витка зі струмом кількісна оцінка ефективності екранування ускладнена тією ж мірою, як і при екрануванні електричного диполя. Тому для отримання кількісної оцінки звернемося знову до найпростішого випадку – елементарного (нескінченно малого) витка, в центрі кульового екрана.

Ефективність кульового екрану з внутрішнім радіусом R і товщиною стінок d відносно елементарного магнітного диполя, розташованому в його центрі, при $d \ll R \ll \lambda/2\pi$ можна з достатньою точністю визначити за формулою:

$$K = K_0 + 4,2 \frac{R}{\lambda} K_{пл}, \quad (21.15)$$

де K_0 визначається формулою (21.8), а $K_{пл}$ – ефективність плоского екрана, розрахована в попередній лекції.

В області високих частот, як правило, $K \gg K_0$, тому без великої помилки можна вважати:

$$K = 4,2 \frac{R}{\lambda} K_{пл}. \quad (21.16)$$

Вважаючи, що при $d \ll R$ хвиля в товщі стінок екрану плоска, можна написати для ефективності відбивання поля магнітного диполя від кульового екрану на високих частотах:

$$K_{\text{відб}} = 4,2 \frac{R}{\lambda} 60\pi\sigma d \left| \frac{th(1+j)\frac{d}{\delta}}{(1+j)\frac{d}{\delta}} \right|, \quad (21.17)$$

або наближено

$$K_{\text{відб}} = 4,2 \frac{R}{\lambda} 60\pi\sigma \times \begin{cases} d & \text{при } \frac{d}{\delta} < 0.1; \\ \delta & \text{при } \frac{d}{\delta} > 1. \end{cases} \quad (21.18)$$

Як бачимо, з підвищенням частоти ефективність відбивання безперервно зростає. При $d/\delta < 0.1$ зростання відбувається пропорційно частоті, а при $d/\delta > 1$ сповільнюється і стає пропорційно кореню квадратному з частоти (внаслідок зміни δ оберненопропорційно кореню квадратному з частоти).

Коли радіус екрана стає порівняним з $\lambda/2\pi$, виникають резонансні явища, як при екрануванні електричного диполя. Природу цих явищ також можна зрозуміти за допомогою рис. 21.8 з тією різницею, що задавальне джерело напруги U_1 слід замінити задавальним джерелом струму I_1 і відповідно з цим вважати коефіцієнт відбивання від лівого кінця першого відрізка лінії рівним не -1 , а 1 . В результаті ефект відбивання ніби зникає при радіусі екрану, приблизно рівному непарному числу чвертей хвилі, а ефект подвоєння ефективності екранування має місце при радіусі екрану, приблизно кратному половині довжини хвилі.

Порівняння ефективності екранування елементарних електричного і магнітного диполів

Проаналізуємо ефективність одного і того ж екрану при екрануванні ним електричного і магнітного диполів. У табл. 21.1 наведені результати розрахунку по наближених формулах для нескінченного плоского і для кульового екранів з міді, алюмінію і сталі ($\mu = 100$) з товщиною стінок $0,1$ мм. Радіус кульового екрану прийнятий рівним 100 мм. Для випадків d/δ (мідь) $0,34$ (алюміній) і $0,63$ (сталь) розрахунок не проводився, оскільки наближені формули для цих випадків непридатні. Неважко помітити, що, побудувавши графік залежності ефективності екранування від частоти в подвійному логарифмічному масштабі, можна шляхом інтерполяції отримати з достатньою для практики точністю значення ефективності і в тих областях, де $0.1 < d/\delta < 1$. З таблиці видно, що на частотах нижче 100 кГц плоский сталевий екран менш ефективний, ніж мідний і навіть алюмінієвий, але на частотах вище 1 МГц сталевий екран виявляється найефективнішим, а на частоті 10 МГц його ефективність вже на п'ять порядків вище ефективності плоского мідного екрану. Ці співвідношення зберігаються і для кульових екранів при екранування диполів обох типів.

Таблиця 21.1. Ефективність екранування

f , МГц	$\frac{d}{\delta}$	$60\pi\sigma d$	$K_{пл.відб}$	$K_{пл.зат}$	$K_{пл.}$	Електричний диполь			Магнітний диполь		
						$0,21\frac{\lambda}{R}$	$K_{відб}$	K	$4,2\frac{R}{\lambda}$	$K_{відб}$	K
Мідь											
0,01	0,15		$1,1 \cdot 10^6$	1,0	$1,1 \cdot 10^6$	$6,3 \cdot 10^4$	$7,0 \cdot 10^{10}$	$7,0 \cdot 10^{10}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10$	$1,5 \cdot 10$
0,1	0,48		–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1,5	$1,1 \cdot 10^6$	$5,2 \cdot 10^5$	2,24	$1,2 \cdot 10^6$	$6,3 \cdot 10^2$	$3,4 \cdot 10^8$	$7,4 \cdot 10^8$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^3$	$2,4 \cdot 10^3$
10	4,8		$1,6 \cdot 10^5$	6,1·10	$9,9 \cdot 10^6$	6,3·10	$1,0 \cdot 10^7$	$6,2 \cdot 10^8$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^5$
100	15		$5,2 \cdot 10^4$	$1,6 \cdot 10^6$	$8,5 \cdot 10^{10}$	6,3	$3,3 \cdot 10^5$	$5,3 \cdot 10^{11}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$7,5 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^{10}$
Алюміній											
0,01	0,12		$6,4 \cdot 10^6$	1,0	$6,4 \cdot 10^5$	$6,3 \cdot 10^4$	$4,0 \cdot 10^{10}$	$4,0 \cdot 10^{10}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	9,0	9,0
0,1	0,34		–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1,2	$6,4 \cdot 10^5$	$3,8 \cdot 10^5$	1,7	$6,4 \cdot 10^5$	$6,3 \cdot 10^2$	$2,4 \cdot 10^8$	$4,0 \cdot 10^8$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^2$	$9,0 \cdot 10^2$
10	3,8		$1,2 \cdot 10^5$	2,2·10	$2,6 \cdot 10^6$	6,3·10	$7,3 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^8$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^3$	$3,6 \cdot 10^4$
100	12		$3,8 \cdot 10^4$	$7,4 \cdot 10^4$	$2,8 \cdot 10^9$	6,3	$2,4 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^{10}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$5,3 \cdot 10^3$	$3,9 \cdot 10^8$
Сталь ($\mu = 100$)											
0,01	0,63		–	–	–	–	–	–	–	–	–
0,1	2,0		$7,9 \cdot 10^4$	3,6	$2,6 \cdot 10^5$	$6,3 \cdot 10^3$	$4,4 \cdot 10^8$	$1,6 \cdot 10^9$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	1,0·10	3,6·10
1	6,3	$2,2 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^4$	$2,6 \cdot 10^2$	$6,5 \cdot 10^6$	$6,3 \cdot 10^2$	$1,6 \cdot 10^7$	$4,1 \cdot 10^9$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$9,1 \cdot 10^3$
10	20		$7,9 \cdot 10^3$	$1,8 \cdot 10^8$	$1,4 \cdot 10^{12}$	6,3·10	$4,9 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^{13}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^2$	$2,0 \cdot 10^{10}$
100	63		$2,5 \cdot 10^3$	$4,0 \cdot 10^{25}$	$1,0 \cdot 10^{29}$	6,3	$1,6 \cdot 10^4$	$6,2 \cdot 10^{29}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^{28}$

Ефективність мідного і алюмінієвого кульових екранів при екрануванні електричного диполя має при даних розмірах і товщині стінок мінімальне значення при частоті близько 10 МГц, ефективність же сталевих екранів має мінімум на частотах нижче 100 кГц. Ефективність одного і того ж кульового екрану відносно магнітного диполя значно менше, ніж відносно електричного диполя. Ця різниця особливо помітна на відносно низьких частотах і зменшується з підвищенням частоти. Коли розміри екрана стають порівнянними з довжиною хвилі, то ефективність його відносно джерел обох типів починає змінюватися в межах $K_{пл.зат} - 2K_{пл.}$.

Загальні висновки про ефективність екранування джерел електромагнітних полів замкнутими екранами. Розрахунок ефективності реальних замкнутих екранів

Міркування, викладені в попередніх параграфах, дозволяють зробити такі загальні висновки:

- ефективність екранування замкнутими екранами джерел типу електричного диполя дуже велика. Навіть при товщині стінок 0,1 мм вона на всіх частотах при всіх практично цікавих розмірах і для всіх трьох розглянутих матеріалів перевищує 10^6 (120 дБ);

- при екрануванні джерел типу магнітного диполя (катушок зі струмом) на частотах порядку 10 кГц і нижче для отримання дуже великої ефективності екран повинен бути товстостінним. Так, на частоті 10 кГц при $R = 100$ мм ефективність екранів різної товщини має значення, наведені в табл. 21.2.

Таблиця 21.2. Ефективність екранів різної товщини

d , мм	K		
	Мідь	Алюміній	Сталь ($\mu = 100$)
0,1	15	9,0	–
1,0	160	87	940
2,0	730	290	$5,1 \cdot 10^5$
4,0	$1,5 \cdot 10^4$	$3,2 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^{11}$

Матеріал екрану грає при цьому істотну роль: перевагу слід віддати сталі.

- для отримання високої ефективності екранування на низьких звукових частотах необхідно застосування товстостінних екранів з матеріалу з великою магнітною проникністю. На частотах порядку 100 кГц і вище при $d > 1$ мм може бути отримана дуже висока ефективність екранування також і для джерел типу магнітного диполя. Так, сталевий екран ($\mu = 100$), $R = 100$ мм, $d = 1$ мм забезпечує на частоті 100 кГц ефективність $K = 2,3 \cdot 10^8$.

Отже, незалежно від типу джерела поля на частотах вище 100 кГц за допомогою замкнутого екрана з товщиною стінок 1 мм можна забезпечити ефективність екранування не менше ніж $K = 10^6$ (120 дБ).

Запитання

1. Опишіть розподіл поля по об'єму провідника у початковий момент часу.
2. Наведіть ефективність екранування електричного диполя для статичного випадку.
3. Опишіть випадки, коли доцільно заземлювати екран.
4. Опишіть залежність ефективності екранування електричного диполя від частоти.
5. Наведіть умову, за якої в кульовому екрані виникають резонансні явища.
6. Наведіть значення магнітної проникності, за якої ефективність екранування магнітного диполя дорівнює одиниці.
7. Опишіть залежність ефективності екранування магнітного диполя від частоти.
8. Порівняйте ефективності екранування електричного і магнітного диполів екранами з типових металів.
9. Наведіть типові значення частот, за яких ефективність екранування тонкостінними екранами магнітного диполя є достатньою.
10. Наведіть матеріал, який доцільно використовувати для екранування джерел, що описуються магнітними диполями.

Лекція № 22. Резонатор Фабрі-Перо

Історична довідка

У 1899 році французи Шарль Фабрі і Альфред Перо описали багатопроменевий інтерферометр, що складається з двох плоскопаралельних частково посріблених скляних пластин, який дозволив істотно підвищити ефективність спектральних вимірювань. Однак тріумфальна хода цього пристрою, вже як резонатора Фабрі-Перо (РФП), здатного запасати оптичну енергію, починається після того, як майже одночасно в 1958 році Прохоров та Шавлов з Таунсом запропонували його використовувати для створення лазера. Сучасні патентні позови, що тривали до 1987 року, свідчать, правда, що пріоритет слід віддати Гордону Гоулду, який запропонував схему з відкритим резонатором на рік раніше (Гоулд також першим запропонував слово "лазер"). Нарешті, 16 травня 1960 року Теодор Мейман запустив перший в світі лазер на основі рубінового стрижня, що освітлюється лампою-спалахом, резонатором Фабрі-Перо в якому служив сам стрижень з посрібленими торцями. Пізніше, в тому ж 1960 році заробив перший гелій-неоновий лазер в лабораторії імені Белла, в якому вже використовувався метровий резонатор Фабрі-Перо з плоскими регульованими дзеркалами з відбиваючим багат шаровим діелектричним покриттям.

Математична модель резонатора

Для опису поведінки хвилі при падінні на межу розділу двох середовищ зручно користуватися формалізмом матриці розсіювання S . Якщо на оптичну систему падають хвилі з амплітудами a_i , то в лінійній системі вони будуть пов'язані з вихідними із системи в результаті заломлення та відбивання хвилями b_i співвідношенням

$$b = Sa. \quad (22.1)$$

Для опису заломлення і відбивання достатньо взяти матрицю 2×2 (рис. 22.1):

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2, \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2. \end{aligned} \quad (22.2)$$

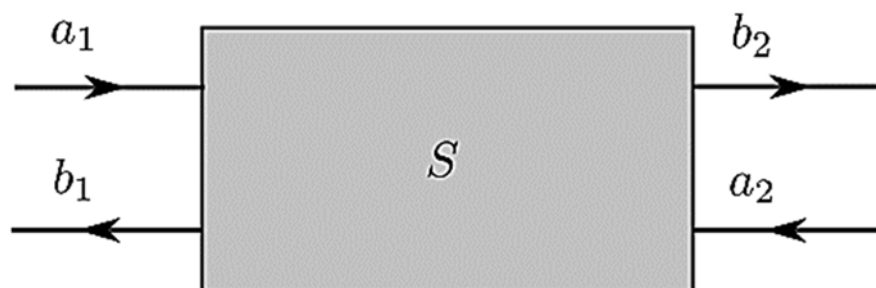


Рис. 22.1. Схема оптичного елемента, що описується матрицею розсіювання

Якщо в оптичному елементі, що описується матрицею розсіювання, немає втрат, то повинна виконуватися умова збереження енергії:

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2, \quad (22.3)$$

або в матричній формі:

$$a^+ a = b^+ b = a^+ S^+ S a. \quad (22.4)$$

Верхній індекс '+' означає транспоновану комплексно-спряжену матрицю

$$S^+ = S^{*T}. \quad (22.5)$$

Відповідно,

$$a^+ (I - S^+ S) a = 0, \quad (22.6)$$

де I – одинична матриця, і значить матриця S має бути унітарною:

$$\begin{aligned} S^+ S &= I \\ S^+ &= S^{-1}. \end{aligned} \quad (22.7)$$

Покомпонентно розписуючи умову (7):

$$\begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.8)$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 &= |S_{22}|^2 + |S_{21}|^2 = 1, \\ S_{21} S_{11}^* + S_{22} S_{12}^* &= 0. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Якщо на рис. 22.1 всі хвилі a і b пустити в протилежних напрямках, то вхідними сигналами стануть хвилі b , а вихідними – a . Таке обернення часу еквівалентне заміні $a \rightarrow b^*$ і $b \rightarrow a^*$. При цьому матриця розсіювання не зміниться ($a^* \rightarrow S b^*$) або

$$a \rightarrow S^* b. \quad (22.10)$$

Помноживши зліва обидві частини рівності на зворотну матрицю, отримуємо:

$$b = [S^*]^{-1} a. \quad (22.11)$$

Порівнюючи останній результат з (7) і (1) отримуємо, що

$$S^* = S^+, \quad (22.12)$$

що означає вимогу симетричності матриці S , та означає $S_{12} = S_{21}$. Разом з цією новою умовою в результаті формулюємо такі вимоги на компоненти S :

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_{21}, \\ |S_{11}|^2 &= |S_{22}|^2, \\ |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 &= 1, \\ S_{12} S_{11}^* + S_{22} S_{12}^* &= 0. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Ці рівняння пов'язують 4 комплексних або 8 дійсних значень, що визначають матрицю розсіювання. При цьому перше рівняння є комплексним, друге і третє – дійсним, а останнє, хоча і є комплексним, але, з огляду на перші два, накладає обмеження лише на фази комплексних коефіцієнтів. У підсумку отримуємо п'ять незалежних дійсних рівнянь, а значить в системі без втрат матриця розсіювання повністю описується трьома дійсними параметрами. Вводячи амплітуди і фази компонентів S , легко показати, що така матриця має вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} |S_{11}| e^{i\psi_r} & \sqrt{1 - |S_{11}|^2} e^{i\psi_i} \\ \sqrt{1 - |S_{11}|^2} e^{i\psi_i} & |S_{11}| e^{i(2\psi_i - \pi - \psi_r)} \end{pmatrix}. \quad (22.14)$$

З коефіцієнтами матриці розсіювання пов'язані енергетичні коефіцієнти відбиваючої \mathcal{R} та пропускну здатності \mathcal{T} .

$$\mathcal{R} = |S_{11}|^2 = |S_{22}|^2, \quad \mathcal{T} = |S_{12}|^2. \quad (22.15)$$

При цьому

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1. \quad (22.16)$$

У багатьох випадках, коли цікавить лише поведінка хвилі далеко від розсіювача, зручно вибрати вхідні і вихідні поверхні, що в загальному випадку не збігаються з межами розділу, так, щоб фазові кути $\psi_r = \pi$ та $\psi_t = \pi/2$. В цьому випадку матриця розсіювання набуває простого вигляду:

$$S = \begin{pmatrix} -R & iT \\ iT & -R \end{pmatrix}, \quad R^2 + T^2 = 1. \quad (22.17)$$

При цьому коефіцієнти R і T мають сенс амплітудних коефіцієнтів відбивання і пропускання $R^2 = \mathcal{R}$, $T^2 = \mathcal{T}$. Знак мінус перед R обраний так, щоб відповідати повному відбиванню електромагнітної хвилі від металевої поверхні – при цьому сумарне електричне поле падаючої і відбитої хвилі на границі має перетворюватись в нуль і відповідати вузлу стоячої хвилі. Такий вигляд має, зокрема, матриця розсіювання для хвилі, що проходить через границю розділу діелектриків при переході з оптично менш щільного в оптично більш щільне середовище. При переході в зворотному напрямку амплітудний коефіцієнт відображення позитивний.

Одномірний резонатор Фабрі-Перо

Розглянемо, як запропонована матриця розсіювання може бути використана для знаходження характеристик інтерферометра Фабрі-Перо, утвореного двома дзеркалами з коефіцієнтами відбивання R_1 і R_2 та, відповідно, пропускання T_1 і T_2 , розташованими на відстані d , заповнений середовищем з показником заломлення n (рис. 22.2).

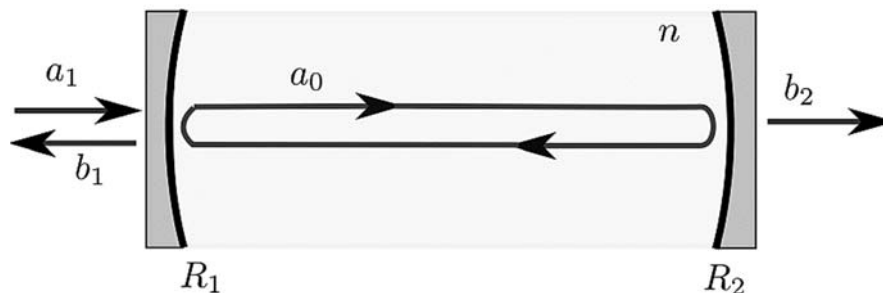


Рис. 22.2. Схема оптичного резонатора Фабрі-Перо

Якщо втрат в дзеркалах немає, то

$$T_1 = \sqrt{1 - R_1^2}, \quad T_2 = \sqrt{1 - R_2^2}, \quad (22.18)$$

в іншому випадку

$$R_i^2 + T_i^2 = \mathcal{R}_i + \mathcal{T}_i = 1 - \mathcal{L}_i, \quad (22.19)$$

де \mathcal{L}_1 – втрати на дзеркалі. Позначимо амплітуду хвилі, падаючої на перше вхідне дзеркало через a_1 , а відображеної через b_1 . Відповідно, амплітуда хвилі, яка виходить з другого дзеркала b_2 . За один прохід всередині резонатора хвиля набуває фазовий зсув

$$\Delta\phi = 2nk_0d. \quad (22.20)$$

Тут $k_0 = 2\pi/\lambda$ – постійна поширення хвилі в вакуумі (λ – довжина хвилі у вакуумі).

Зазвичай для знаходження поля всередині резонатора a_0 використовується геометрична прогресія. Хвиля знаходиться як сума хвилі, що пройшла через вхідне дзеркало $a_T = iT_1a_1$ та часткових багаторазово відбитих від обох дзеркал хвиль:

$$a_0 = iT_1a_1 \sum_{j=0}^{\infty} (R_1R_2e^{i\Delta\phi})^j = \frac{iT_1}{1-R_1R_2e^{i\Delta\phi}} a_1, \quad (22.21)$$

Але можна ту саму відповідь, і навіть в ще більш цікавій і більш загальній диференціальній формі, отримати відразу розглянувши умови на вхідному дзеркалі, на яке зліва падає вхідна хвиля, а праворуч – внутрішня хвиля, але та, яка відійшла від вхідного дзеркала деякий час назад $t = 2nd/c$, який потрібен хвилі, щоб пройти шлях $2d$, відбитися від другого дзеркала і отримати за цей час набіг фаз:

$$a_0(t) = iT_1a_1 + R_1R_2a_0(t-\Delta t)e^{i\Delta\phi}. \quad (22.22)$$

У стаціонарному режимі, коли $a_0(t) = a_0(t-\Delta t)$ виходить, така ж відповідь, що і раніше. Розглянемо спочатку саме цей режим. Аналогічно попередньому, записуючи умову для відбитої хвилі:

$$\begin{aligned} b_1 &= -R_1a_1 - iT_1R_2e^{i\Delta\phi}a_0 = -\frac{R_1 - R_2(R_1^2 + T_1^2)e^{i\Delta\phi}}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}} a_1 = \\ &= -\frac{R_1 - R_2(1 - \mathcal{L}_1)e^{i\Delta\phi}}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}} a_1, \end{aligned} \quad (22.23)$$

а для хвилі, що пройшла через резонатор:

$$b_2 = iT_2e^{i\Delta\phi/2}a_0 = -\frac{T_1T_2e^{i\Delta\phi/2}}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}} a_1. \quad (22.24)$$

У підсумку ми можемо записати всі коефіцієнти матриці розсіювання резонатора ФП:

$$S = -\frac{1}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}} \begin{pmatrix} R_2e^{i\Delta\phi}(1 - \mathcal{L}_1) - R_1 & -T_1T_2e^{i\Delta\phi/2} \\ -T_1T_2e^{i\Delta\phi/2} & R_1e^{i\Delta\phi}(1 - \mathcal{L}_2) - R_2 \end{pmatrix}. \quad (22.25)$$

Найбільший загальний інтерес представляють РФП з однаковими дзеркалами без втрат:

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \sqrt{1 - T_{1,2}^2} = \sqrt{\mathcal{R}} = \sqrt{1 - \mathcal{T}}, \\ \mathcal{L}_1 &= \mathcal{L}_2 = 0. \end{aligned} \quad (22.26)$$

У цьому разі вирази для потужностей відбитої, пройденої і циркулюючої всередині хвилі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
|b_1|^2 &= \frac{4\mathcal{R} \sin^2(\Delta\phi/2)}{(1-\mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2(\Delta\phi/2)} |a_1|^2, \\
|b_2|^2 &= \frac{(1-\mathcal{R})^2}{(1-\mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2(\Delta\phi/2)} |a_1|^2, \\
|a_0|^2 &= \frac{1-\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2(\Delta\phi/2)} |a_1|^2.
\end{aligned} \tag{22.27}$$

Максимуми пропускання спостерігаються коли

$$\begin{aligned}
\Delta\phi/2 &= \frac{\omega_m nd}{c} = m\pi, \\
f_m &= \frac{mc}{2nd}.
\end{aligned} \tag{22.28}$$

Якщо в дзеркалах і в середовищі, що заповнює резонатор, немає втрат, то на цих частотах знаменник у всіх виразах мінімальний, відбивання немає ($b_1 = 0$), а амплітуда пройденої хвилі по модулю дорівнює вхідній амплітуді. Чим менше коефіцієнт відбивання відрізняється від одиниці, тим вже ці максимуми, що перетворюються в гострі резонансні піки з лоренцевским профілем. Інтерферометр перетворюється в резонатор.

При цьому потужність, що циркулює всередині резонатора на резонансній частоті різко зростає:

$$|a_0|^2 = \frac{1}{1-\mathcal{R}} |a_1|^2. \tag{22.29}$$

При використанні хороших дзеркал $1-\mathcal{R} \ll 1$ і циркулююча всередині потужність може бути на багато порядків більша, ніж вхідна.

Відстань між сусідніми максимумами визначається співвідношенням:

$$f_{m+1} - f_m = \Delta f = \frac{c}{2nd}. \tag{22.30}$$

Як впливає з цього співвідношення, відстані між максимумами пропускання резонатора не залежить від частоти, тобто спектр власних частот ідеального резонатора Фабрі-Перо є еквідистантним.

Полоса пропускання Фабрі-Перо $\Delta\lambda$ – це відстань між максимумами пропускання, що виражені в довжинах хвиль:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta f}{f} \lambda = \frac{\lambda^2}{2nd}, \tag{22.31}$$

Повна ширина максимумів пропускання по рівню $1/2$ визначається з умови, див. формулу (22.27):

$$\sin \Delta\phi/2 = \frac{1-\mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}}, \tag{22.32}$$

що при умові вузьких піків пропускання $\Delta\phi/2 - m\pi \ll 1$ приводить до співвідношення:

$$\delta f_{1/2} = \frac{(1-\mathcal{R})c}{2\pi\sqrt{\mathcal{R}}nd}. \tag{22.33}$$

Величина, що є відношенням частотної відстані між сусідніми однотипними модами (ОСД) до полоси пропускання окремого резонансу

$$\frac{\Delta f}{\delta f_{1/2}} \equiv \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}}, \quad (22.34)$$

називається різкістю інтерферометра та характеризує роздільну здатність інтерферометра Фабрі-Перо як фільтра випромінювання. ОСД та полоса пропускання легко вимірюються експериментально і тому різкістю зручно характеризувати і резонатори, які не мають дзеркал. При цьому з'являється можливість порівнювати будь-який резонатор з еквівалентним резонатором Фабрі-Перо.

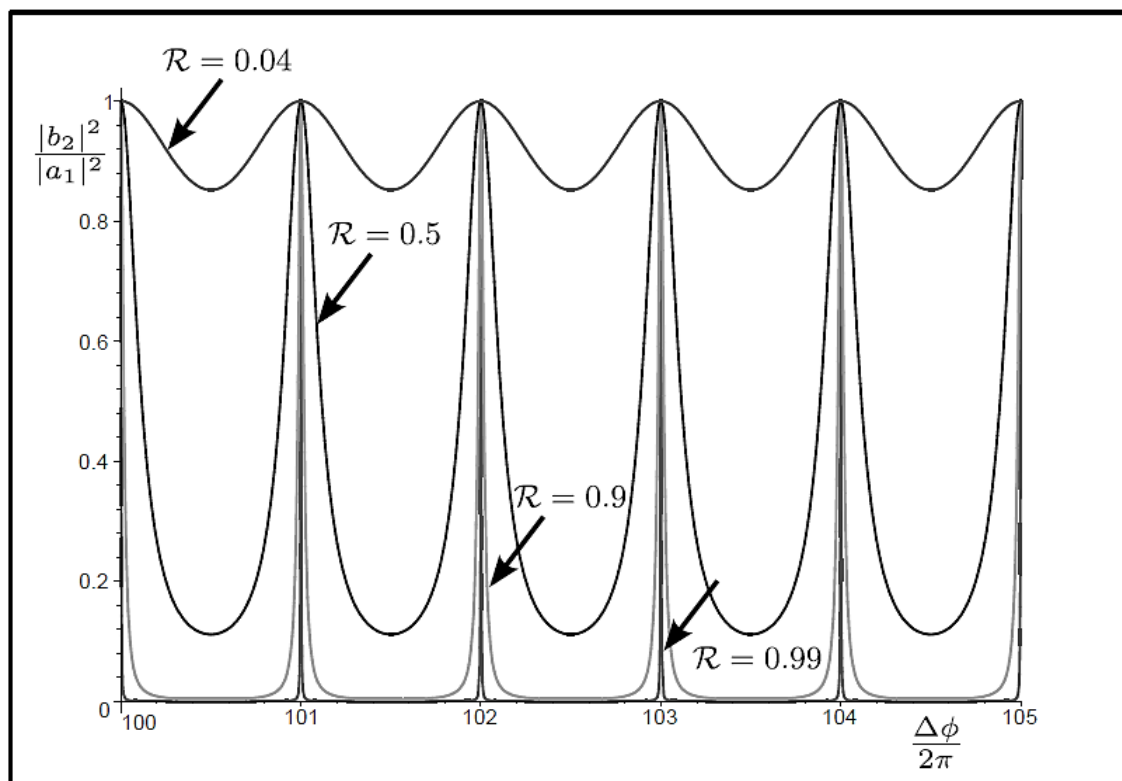


Рис. 22.3. Піки пропускання інтерферометра Фабрі-Перо при $\mathcal{R} = 0.04$ (скляна пластинка), $\mathcal{R} = 0.5$, $\mathcal{R} = 0.9$ та $\mathcal{R} = 0.99$.

Поняття різкості резонатора грає велику роль в теорії оптичних резонаторів. По-перше, на відміну від добротності, різкість не залежить від розміру резонатора типу Фабрі-Перо, а залежить тільки від відбивної здатності дзеркал. Отже, вона характеризує якість дзеркал. По-друге, різкість характеризує збільшення потужності хвилі в резонаторі у порівнянні з потужністю хвилі накачування. По-третє, різкість притаманна тільки принципово багатомодовим розподіленим системам. А добротність резонатора за означенням являється відношенням частоти резонансу до його півширини:

$$Q = \frac{f}{\delta f_{1/2}} = \mathcal{F} \frac{2nd}{\lambda}. \quad (22.35)$$

Резонатор з втратами. Узгодженні зв'язки

Розглянемо резонатор Фабрі-Перо з втратами в середовищі та з неідеальними дзеркалами. Втрати в середовищі можна описати, вводючи уявну частину показника заломлення на даній частоті $\text{Im}(n) = \alpha / (2k_0)$, де α – коефіцієнт затухання потужності хвилі, що розповсюджується:

$$P(d) = |e^{ik_0nd}|^2 P(0) = e^{-\alpha d} P(0). \quad (22.36)$$

Зручно ввести коефіцієнт внутрішніх втрат на один прохід

$$\mathcal{L} = 2\alpha d. \quad (22.37)$$

Якщо втрати невеликі, на резонансній частоті

$$e^{i\Delta\phi} = -e^{\alpha d} \approx (1 - \alpha d) = 1 - \mathcal{L}_0/2. \quad (22.38)$$

Виявляється, що і в цьому неідеальному випадку можна досягти того, щоб вся вхідна потужність потрапляла в резонатор на резонансній частоті, та було відсутнє відбивання.

Для того, щоб вся вхідна потужність потрапляла в резонатор, необхідне виконання умови $b_1 = 0$ на резонансній частоті. Вважаючи, що дзеркала досить хороші, та пропускання з поглинанням значно менше одиниці, розкладемо коефіцієнти відбивання

$$R_i = \sqrt{1 - \mathcal{T}_i - \mathcal{L}_i} \approx 1 - \mathcal{T}_i/2 - \mathcal{L}_i/2. \quad (22.39)$$

З виразу (22.23) слідує, що для перетворення в нуль b_1 досить вимагати при резонансі рівності нулю чисельника дробу:

$$R_1 - R_2 (R_1^2 + T_1^2) e^{-\alpha d} \approx -\mathcal{T}_1/2 - \mathcal{L}_1/2 + \mathcal{T}_2/2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0/2 = 0$$

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_0. \quad (22.40)$$

Ми знехтували тут членами другого порядку малості. Отриманий вираз має дуже простий фізичний зміст: \mathcal{T}_1 – визначає зв'язок резонатора з хвилею накачування і втрати зв'язку, а всі інші члени описують інші види втрат. Так, \mathcal{T}_2 можна інтерпретувати як втрати розсіювання резонатора на другому дзеркалі, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ – поглинання в дзеркалах, \mathcal{L}_0 – внутрішні (власні) втрати резонатора. Таким чином, оптимальний зв'язок з резонатором забезпечується умовою рівності втрат зв'язку сумі всіх інших видів втрат. Легко показати, що саме при такому пропусканні вхідного дзеркала, амплітуда і потужність, яка циркулює всередині резонатора, максимальна. Дійсно, знайдемо, при якому значенні \mathcal{T}_1 досягається максимум a_0 на резонансній частоті (22.21):

$$a_0 = \frac{i\mathcal{T}_1}{1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}} a_1 \approx \frac{i2\sqrt{\mathcal{T}_1}}{\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_0} a_1. \quad (22.41)$$

Диференціюючи по \mathcal{T}_1 та прирівнюючи похідну до нуля, отримаємо ту ж саму рівність, що і раніше. При цьому

$$|a_{0\max}|^2 = \frac{1}{\mathcal{T}_1} |a_1|^2. \quad (22.42)$$

Скорочене рівняння для поля в резонаторі.

Повернемося до виведеного раніше різницевого рівняння (22).

Використовуючи наближення $a\left(t - \frac{2nd}{c}\right) \approx a(t) - \frac{2nd}{c}\dot{a}(t)$, отримаємо

диференціальне рівняння:

$$\dot{a}_0 + a_0 \frac{c}{2nd} (1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}) = i \frac{T_1 c}{2nd} a_1, \quad (22.43)$$

припускаючи, як і раніше $R_i \approx 1 - \mathcal{T}_i/2 - \mathcal{L}_i/2$, $e^{i\Delta\phi} \approx 1 + i2n\Delta k_0 d - \alpha d$, та нехтуючи членами другого порядку малості, можна отримати диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 + a_0 (\delta_\Sigma - i\Delta\omega) &= i \frac{T_1 c}{2nd} a_1, \\ \delta_\Sigma &= \delta_0 + \delta_{1s} + \delta_{2s} + \delta_{1a} + \delta_{2a}, \\ \delta_0 &= \frac{\alpha c}{2n}, \quad \delta_{is} = \frac{\mathcal{T}_i c}{4nd}, \quad \delta_{ia} = \frac{\mathcal{L}_i c}{4nd}. \end{aligned} \quad (22.44)$$

Ми знайшли скорочене рівняння, зовсім аналогічне тому, яке було виведено в першій главі для моделі коливального контуру, пов'язаного з довгою лінією. Перший декремент δ_0 описує внутрішні втрати в резонаторі. Йому відповідає власна добротність:

$$Q_0 = \frac{\omega}{2\delta_0} = \frac{2\pi n}{\alpha\lambda}. \quad (22.45)$$

У випадку узгодженого резонатора δ_{1s} дорівнює сумі всіх інших видів витрат, і тоді:

$$Q_\Sigma = \frac{\omega}{4\delta_{1s}} = \frac{\pi}{\mathcal{T}_1} \frac{2dn}{\lambda} \approx \mathcal{F} \frac{2dn}{\lambda}, \quad (22.46)$$

що узгоджується з виразом, отриманим раніше.

Сканування довжини резонатора

Власні частоти і відповідні їм довжини хвиль задовольняють простій умові резонансу:

$$m \frac{\lambda_m}{2} = nd, \quad (22.47)$$

тобто на оптичній довжині резонатора укладається ціле число півхвиль. При цьому в резонаторі утворюється стояча хвиля, а вузли цієї хвилі припадають на поверхню дзеркал.

При повільній зміні довжини Фабрі-Перо резонатора, наприклад, за допомогою повздовжнього переміщення одного дзеркала, приклеєного до п'єзоелектричного пакету, змінюється і резонансна довжина хвилі в пропорції $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta d}{d}$ та, відповідно, змінюється його частота. Змінюючи, таким чином, резонансну довжину хвилі резонатора лазера, можна тим самим змінювати довжину хвилі одночастотного лазерного випромінювання. Такий спосіб сканування широко використовується, коли вимагається прецизійна перебудова довжини хвилі в незначних межах. Перебудова хвилі одночастотного лазера має зміст лише в межах вільного спектрального діапазону, в протилежному

випадку, випромінювання лазера буде перескакувати на моди іншого порядку, які відповідають іншим номерам m .

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda,$$

$$\Delta\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2nd}, \quad (22.48)$$

що з використанням отриманої пропорції дає:

$$\Delta d \leq \frac{d}{m} = \frac{\lambda}{2n}, \quad (22.49)$$

тобто існує максимально допустима перебудова лазера, яка досягається при зміні його довжини на половину довжини хвилі в середовищі – долі мікрона. Такий порядок переміщення легко забезпечують п'езопакети. Чим коротший резонатор, тим більшу перебудову довжини хвилі лазера забезпечує така зміна довжини резонатора.

Багатошарові покриття

Срібні дзеркала, що застосовувалися у перших інтерферометрах та резонаторах Фабрі-Перо, не придатні для створення високооборотних резонаторів, оскільки металічні плівки мають великі оптичні втрати (10^6 см^{-1}), а коефіцієнт відбивання $\leq 0,96$ не достатній для більшості застосувань. Сучасна технологія дозволяє отримати діелектричні багатошарові дзеркала з дуже малими втратами та великими коефіцієнтами відбивання. Такі ж багатошарові дзеркала, що часто називаються брегівськими, застосовуються у монолітних мікрорезонаторах типу Фабрі-Перо.

Електричне та магнітне поле в площині біжучої хвилі (для визначеності виберемо поляризацію вздовж осі x) можна представити у вигляді:

$$E_x = E_{0+}e^{ikz} + E_{0-}e^{-ikz} = E_+(z) + E_-(z), \quad (22.50)$$

$$H_y = H_{0+}e^{ikz} + H_{0-}e^{-ikz} = \frac{1}{\eta} [E_{0+}e^{ikz} - E_{0-}e^{-ikz}] = \frac{1}{\eta} [E_+(z) - E_-(z)],$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = \frac{1}{n} Z_0. \quad (22.51)$$

При наступному записі пряма і зворотна електромагнітні хвилі еквівалентні прямій та зворотній хвилі в довгій лінії, що описується телеграфними рівняннями. При цьому електричне поле відповідає напрузі хвилі в довгій лінії, а магнітне поле – струму. Параметр η відповідає хвильовому опору довгої лінії. Як і в довгих лініях зручно ввести поняття коефіцієнта відбивання поля Γ та імпедансу Z :

$$\Gamma(z) = \frac{E_-(z)}{E_+(z)} = \frac{E_{0-}}{E_{0+}} e^{-2ikz} = \Gamma_0 e^{-2ikz},$$

$$Z(z) = \frac{E(z)}{H(z)} = \eta \frac{E_+(z) - E_-(z)}{E_+(z) + E_-(z)} = \eta \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \eta \frac{1 + \Gamma(0)e^{-2ikz}}{1 - \Gamma(0)e^{-2ikz}},$$

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - \eta}{Z(z) + \eta}. \quad (22.52)$$

Введенні параметри Γ і Z дозволяють легко розрахувати параметри будь-якої багат шарової системи. Оскільки тангенціальні компоненти електричних і магнітних полів неперервні на границях, це ж справедливо і для імпедансу Z . З іншого боку, Γ на границях здійснює скачок, але в однорідному середовищі змінює тільки фазу

$$\Gamma(z+d) = \Gamma(z)e^{-2ikz} = \Gamma(z)e^{-i\phi}. \quad (22.53)$$

Нехай багат шарове покриття нанесено між основою з показником заломлення n_s та іншим середовищем з показником заломлення n_0 (наприклад, на границі повітря з $n_0 \approx 1$ та скляного дзеркала), рис. 22.4. Розглядати шари потрібно з останньої границі шару з середовищем s , де є тільки пройдена хвиля E_+ , а $E_- = 0$ і тому $Z_s = \eta_s$.

Таким чином, починаючи з самого правого шару, де в субстраті $\Gamma_s = 0$ і $Z_s = \eta_s$, рухаючись шар за шаром, справа наліво, перераховуючи на границі справа коефіцієнт відбивання в імпеданс і потім на границі зліва імпеданс в коефіцієнт відбивання, ми можемо розрахувати коефіцієнт відбивання багат шарового дзеркала Γ_{out} . Можна зв'язати безпосередньо коефіцієнти відбивання праворуч Γ_r і ліворуч Γ_l від будь-якої межі розділу:

$$\Gamma_l = \frac{\Gamma_{rl} + \Gamma_r}{1 + \Gamma_r \Gamma_{rl}}, \quad (22.54)$$

де

$$\Gamma_{rl} = \frac{\eta_r - \eta_l}{\eta_r + \eta_l} = \frac{n_l - n_r}{n_l + n_r} \quad (22.55)$$

визначає коефіцієнт відбивання за амплітудою на границі розділу двох середовищ. Зокрема, він визначає коефіцієнт відбивання від діелектричної поверхні при нормальному падінні при $n_r = n_0$. Відзначимо, що якщо $n_l < n_r$, коефіцієнт відбивання від'ємний.

Таким чином, розкручуючи шари в зворотному порядку, чергуючи умови для Γ і Z , можна розрахувати довільне багат шарове покриття.

Розглянемо найпростішу систему шарів, яка найчастіше застосовується для створення діелектричних дзеркал – систему, що складається з $2N$ чергуючих чверть хвилевих шарів (тобто шарів, оптична товщина яких дорівнює чверті довжини хвилі в середовищі) з високим та низьким показником заломлення з $n_{2j} = n_H$, $n_{2j+1} = n_L$, $n_j d_j = \lambda/4$, $\phi_j = 2kn_j d_j = \pi$. Такий вид покриття забезпечує максимальний коефіцієнт відбивання при заданому числі шарів. Для чверть хвилевого шару

$$\Gamma_i \left(z + \frac{\lambda}{4n} \right) = -\Gamma_i(z),$$

$$Z_{i+1} = \eta \frac{1 + \Gamma_i \left(\frac{\lambda}{4n} \right)}{1 - \Gamma_i \left(\frac{\lambda}{4n} \right)} = \eta \frac{1 + \Gamma_i}{1 - \Gamma_i} = \frac{\eta^2}{Z_i}. \quad (22.56)$$

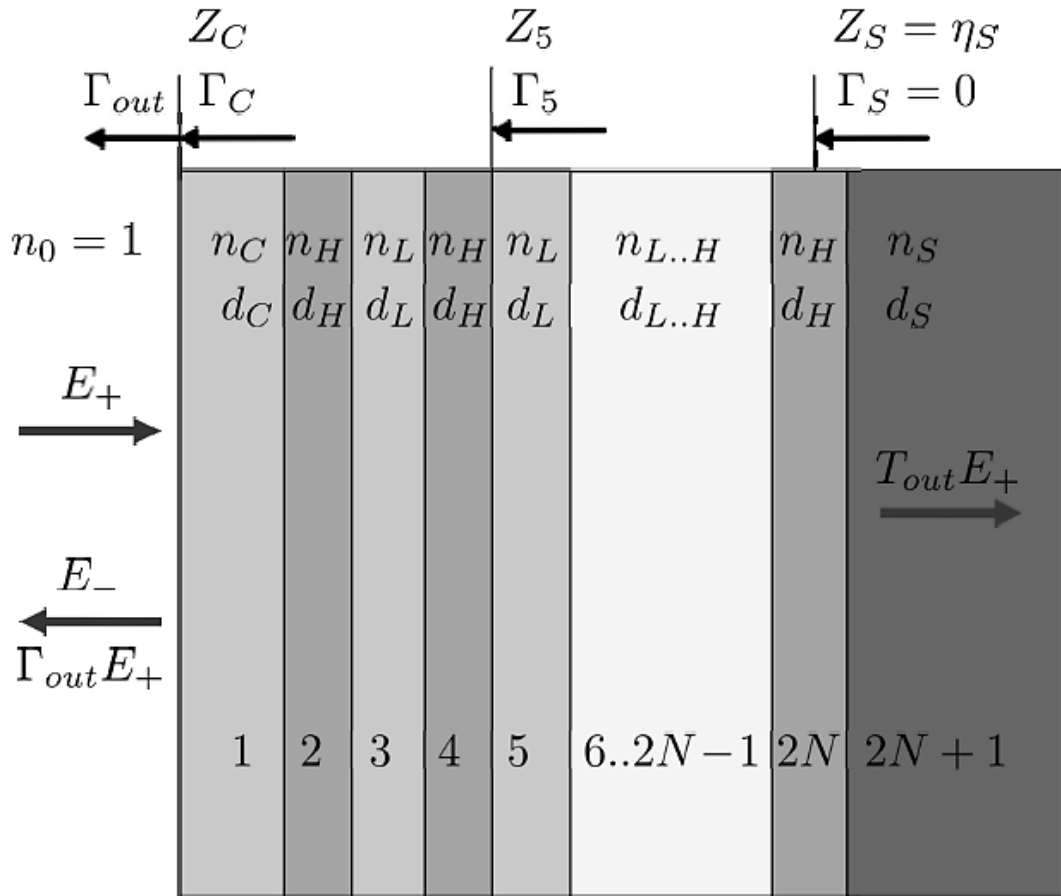


Рис. 22.4. Схема багатошарового діелектричного покриття

Ця властивість чверть хвильового шару перетворювати імпеданс (в теорії довгих ліній чверть хвильові відрізки називаються трансформатором) дозволяє побудувати прості рекурентні відношення між імпедансами шарів.

$$Z_2 = \frac{\eta_H^2}{Z_3} = \frac{\eta_L^2}{\eta_H^2} Z_4 = \frac{\eta_L^{2N-2}}{\eta_H^{2N-2}} Z_{2N} = \frac{\eta_H^{2N}}{Z_{2N+1} \eta_L^{2N-2}} = \frac{\eta_H^{2N}}{\eta_S \eta_L^{2N-2}}. \quad (22.57)$$

В даному виразі Z_2 – імпеданс на границі покривного шару з першим регулярним шаром, а $Z_{2N+1} = Z_S$ – вихідний імпеданс на границі багатошарового покриття з основою. Оскільки відбитої хвилі на виході нема, $Z_{2N+1} = \eta_S$. Кінцевий вираз коефіцієнта відбивання на вхідній поверхні:

$$\Gamma_1 = \frac{Z_1 - \eta_\alpha}{Z_1 + \eta_\alpha} = \frac{\left(\frac{\eta_L}{\eta_H}\right)^{2N} \eta_S - \eta_\alpha}{\left(\frac{\eta_L}{\eta_H}\right)^{2N} \eta_S + \eta_\alpha} = \frac{1 - \left(\frac{\eta_L}{\eta_H}\right)^{2N} \eta_S}{1 + \left(\frac{\eta_L}{\eta_H}\right)^{2N} \eta_S}. \quad (22.58)$$

Для двох принципових випадків 1) коли зовнішній покривний шар $n_C = n_L$ являється теж чверть хвильовим – вихідний шар з низьким показником заломлення, 2) без покривного шару ($d_C = 0$, вихідний шар з високим показником заломлення) отримуємо:

$$\Gamma_{out,L} = \frac{1 - \varepsilon n_s}{1 + \varepsilon n_s},$$

$$\Gamma_{out,H} = -\frac{1 - \varepsilon n_s / n_L^2}{1 + \varepsilon n_s / n_L^2}, \quad (22.59)$$

де $\varepsilon = (n_L/n_H)^{2N}$. Важливо, що коли $N \rightarrow \infty$ та $n_L/n_H < 1$ обидва випадки дають $|\Gamma_{out}| = 1$, але з різними знаками.

Розподілені відбиваючі структури в інтегральному виконанні, аналогічні за властивостями багатошаровим покриттям, можуть грати роль розподілених мікрорезонаторів. При цьому область в середовищі, в якій утворюється резонансне поле, протяжністю в ціле число півхвиль і поміщене між розподіленими відбивачами може бути дуже короткою. На відміну від звичайних резонаторів Фабрі-Перо, добротність зв'язку таких розподілених структур залежить від довжини нелінійно, а експоненційно.

Запитання

1. Перелічіть компоненти матриці розсіювання резонатора.
2. Наведіть енергетичні параметри резонатора та опишіть їх зв'язок з параметрами матриці розсіювання.
3. Опишіть методи для розрахунку поля всередині одновимірного резонатора Фабрі-Перо.
4. Наведіть коефіцієнт, який відповідає за втрати в дзеркалі, та його зв'язок з іншими коефіцієнтами.
5. Опишіть розподіл поля всередині резонатора на резонансній частоті.
6. Наведіть визначення «різкість резонатора».
7. Опишіть призначення багатошарових покриттів резонаторів.
8. Визначте різницю у властивостях багатошарового покриття за умови, що зовнішній шар має коефіцієнт малий або великий коефіцієнт заломлення.

Лекція № 23. Електромагнітні хвилі в напрямних системах

Загальні положення

У попередніх лекціях розглядалися основні питання теорії випромінювання електромагнітних хвиль. Було показано, що на великих відстанях від антени електромагнітне поле має характер сферичної хвилі. При русі такої хвилі в точку, де знаходиться споживач енергії (приймальний пристрій), природно, що попадає лише незначна частина загальної енергії, яка випромінюється антеною. Іншими словами, коефіцієнт корисної дії передавання електромагнітної енергії, тобто відношення потужності, що відбирається із простору приймальним пристроєм, до потужності, що випромінюється передавальною антеною, виходить дуже низьким. Це твердження залишається справедливим і в тому випадку, коли антена має високу спрямованість випромінювання.

Тепер ми перейдемо до вивчення так званих напрямних хвиль, які подібно плоскій електромагнітній хвилі розповсюджуються тільки в якомусь заданому напрямку. Проте якщо плоска хвиля є математичною абстракцією, то тут піде річ про хвилі, що існують в реальних умовах.

Пристрої в яких розповсюджуються хвилі лише у певному напрямку отримали назву **направних пристроїв** або **направних систем**. У більшості випадків вони утворені поверхнями провідників, але при деяких умовах напрямні властивості мають також поверхні діелектриків. Тому електромагнітні хвилі в напрямних системах рухаються вздовж граничних поверхонь, що виконують функції своєрідних «електромагнітних рейок».

Направні пристрої мають найрізноманітніші застосування в сучасній радіотехніці. Найбільш широко вони використовуються як лінії передачі або фідери, що призначені для передавання електромагнітної енергії із одної точки простору в іншу (наприклад, від передавача до антени або від антени до приймача і т. д.) з високим коефіцієнтом корисної дії.

Деякі типи напрямних пристроїв використовуються як уповільнюючі системи. Їх використовують для отримання хвиль, що розповсюджуються зі швидкістю, що є меншою швидкості світла c . Такі хвилі, виявляється, дуже ефективно взаємодіють з потоками заряджених елементарних частинок. Тому уповільнюючі системи знаходять широке застосування в електронних пристроях надвисоких частот і прискорювачах заряджених частинок. Іноді вони використовуються також в антенних і вимірювальних пристроях тощо.

Ознайомимося коротко з основними типами напрямних систем.

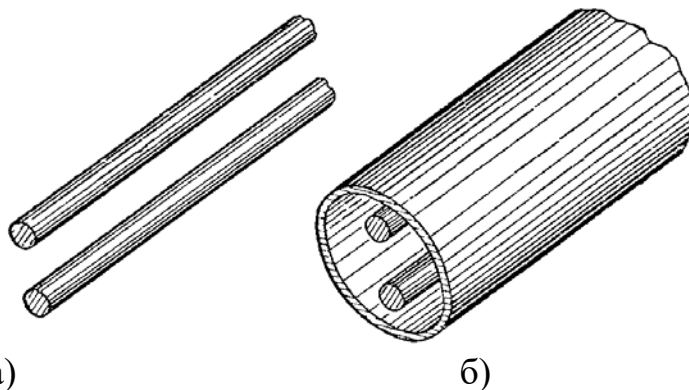


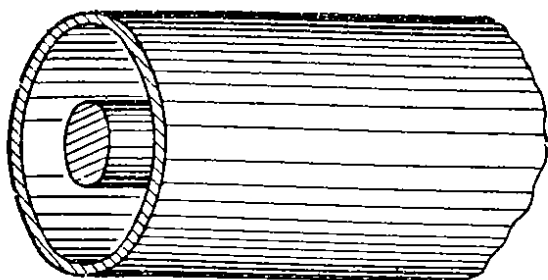
Рис. 23.1. Відкрита а) і екранована б) двопровідні лінії

Найбільш простою лінією передачі є відкрита двопровідна лінія, рис. 23.1,а. Спрямована такою системою електромагнітна хвиля поширюється, як видно з рисунка 23.1, в просторі, що оточує провід. Відповідно, передавання електромагнітної енергії вздовж цієї лінії практично завжди супроводжується втратами на випромінювання і втратами в оточуючих предметах. Крім того частина енергії поля втрачається на нагрівання дротів.

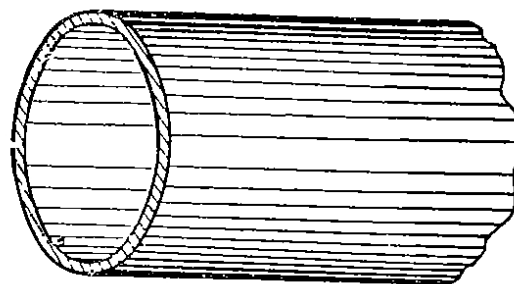
По мірі скорочення довжини хвилі загальний рівень втрат енергії в лінії зростає. У зв'язку з цим відкрита двопровідна лінія може працювати цілком задовільно лише в діапазоні порівняно довгих хвиль (зазвичай на хвилях, що довші 1 м).

Із теорії поверхневого ефекту відомо, що електромагнітне поле дуже швидко затухає при поширенні у добре провідних середовищах. Це означає, що якщо поле оточити провідною металічною поверхнею – екраном, то інтенсивність його в зовнішньому просторі буде нескінченно мала. Звідси випливає, що двопровідна екранована лінія, рис. 23.1, б на високих частотах повинна мати більш високий коефіцієнт корисної дії, ніж відкрита лінія.

На рис. 23.2 а зображена коаксіальна лінія. Електромагнітна хвиля тут поширюється в просторі між поверхнями зовнішнього і внутрішнього провідників. Тому коаксіальна лінія має всі переваги екранованої лінії і разом з тим має більш просту конструкцію.



а) коаксіальна лінія;



б) хвилевод

Рис 23.2. Конструкції напрямних систем

Електромагнітні хвилі також можуть поширюватися за певних умов вздовж лінії, навіть якщо в просторі, що обмежений металічним екраном без внутрішніх дроти. Напрямні пристрої такого типу носять назву хвилеводів, рис 23.2 б. Очевидно, що поширення електромагнітної хвилі у хвилеводі нагадує поширення звукової хвилі вздовж пустої труби з жорсткими стінками.

Типовим прикладом уповільнюючої системи є спіральна лінія. Вона утворена дротом, що згорнутий у циліндричну спіраль, рис. 23.3. При спрощеному розгляді процесів в такій системі можна припускати, що хвиля, яка спрямовується поверхнею дроту, буде рухатися зі швидкістю c вздовж гвинтової лінії. Внаслідок цього швидкість її поширення в осьовому напрямку стає менше швидкості c .

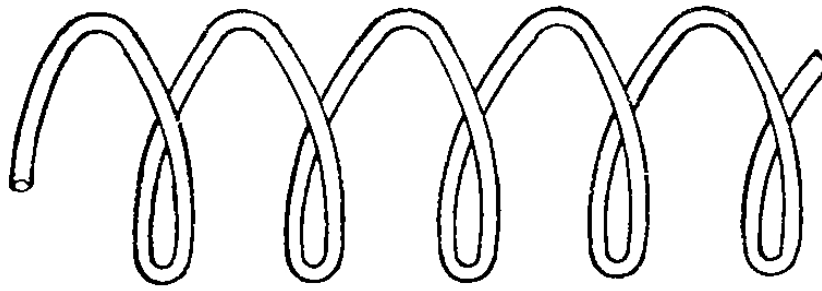


Рис. 23.3. Спіральна лінія

На рис. 23.4 зображена уповільнююча система, що називається ребристою структурою.

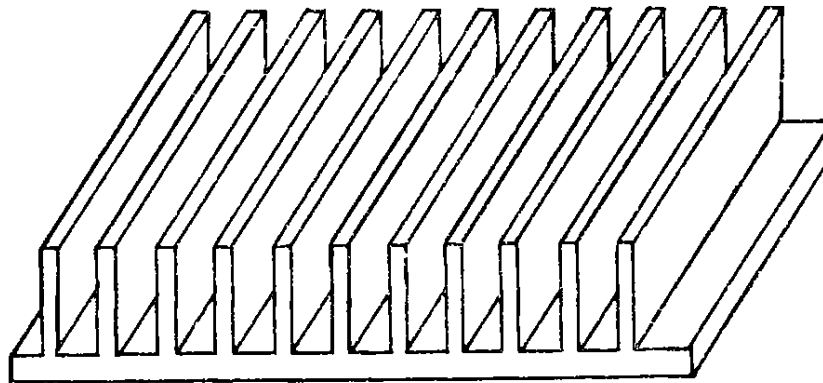


Рис. 23.4. Ребриста структура

Сповільнення електромагнітних хвиль можна також здійснити, якщо як напрямну систему використовувати діелектричне середовище, тому що швидкість поширення хвилі в діелектрику менша швидкості її у вільному просторі. Прикладом такої системи є діелектричний хвилевод, рис. 23.5.

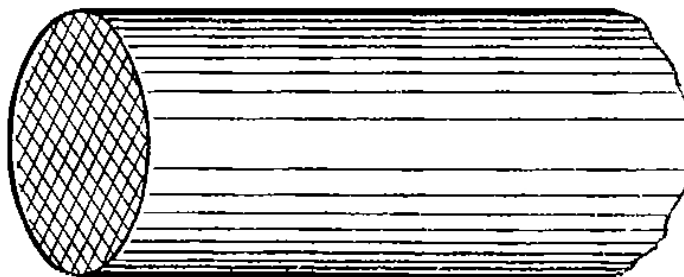


Рис. 23.5. Діелектричний хвилевод

Нижче розглянуто основні властивості найбільш поширених напрямних систем. Перш за все необхідно визначити типи хвиль, які можуть поширюватися в напрямній системі, та встановити способи їх збудження. Разом з цим необхідно розрахувати втрати електромагнітної енергії при поширенні хвилі вздовж системи.

Відповідь на всі ці питання дає рішення рівнянь Максвелла для тих чи інших областей з урахуванням відповідних граничних умов.

При визначенні структури можливих типів хвиль та способів їх збудження для спрощення досліджень можна припустити, що провідники

напрямної системи мають нескінченно велику провідність, а діелектрики – провідність, що дорівнює нулю. Іншими словами, реальну систему можна замінити ідеалізованою системою без втрат.

У реальних пристроях провідники мають скінченну, але все-таки достатньо велику провідність, а діелектрики – провідність, що наближається до нуля. Внаслідок цього результати, що отримані для ідеалізованих систем, виявляються близькими до істинних. Однак при розрахунку втрат у напрямному пристрої такі припущення, звісно, вже втрачають сенс.

Задачі поширення хвиль у напрямних системах стали актуальними одразу після створення теорії електромагнітного поля. Так, перші дослідження, що відносяться до хвиль в пустих трубах (хвилеводах), були проведені англійським фізиком Релеєм ще в 1897 році.

Електромагнітні хвилі між паралельними ідеально провідними пластинами

Найпростішою напрямною системою є сукупність двох паралельних провідних нескінченних площин, простір між якими заповнений діелектриком, рис. 23.6. Звісно, напрямна система такого типу є теоретичною абстракцією. Тим не менше аналіз електромагнітного поля в ній дозволяє з'ясувати основні особливості поширення електромагнітних хвиль в реальних напрямних пристроях.

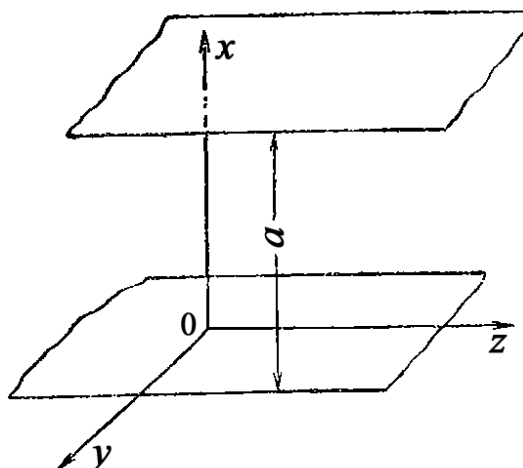


Рис. 23.6. Напрямна система двох паралельних провідних нескінченних площин

Для того, щоб знайти поля, які можуть існувати в просторі між провідними площинами, необхідно вирішити рівняння Максвелла в заданій області при відповідних граничних умовах.

Керуючись наведеними вище міркуваннями, припустимо, що напрямні площини мають нескінченно велику провідність. Тоді дотична складова вектора \vec{E} на цих площинах повинна обертатись в нуль

$$\vec{E}_{tg} = 0. \quad (23.1)$$

Для вирішення рівнянь Максвелла використаємо прямокутну систему координат, рис. 23.1. У цій системі рівняння напрямних поверхонь запишуться найпростішим способом: $x=0$ та $x=a$.

Припустимо, що джерела поля знаходяться поза границями області, що нас цікавить, та хвилі розповсюджуються вздовж осі z . Будемо також вважати, що вектори \vec{E} та \vec{H} шуканого поля не залежать від координати y (двовірна задача).

При таких умовах рівняння для проекцій векторів поля в усталеному режимі мають вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = i\omega\mu\dot{H}_x; & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} = -i\omega\mu\dot{H}_z; \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon\dot{E}_y; \end{cases} \quad (23.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon\dot{E}_x; & \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = i\omega\varepsilon\dot{E}_z; \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = i\omega\mu\dot{H}_y, \end{cases} \quad (23.3)$$

де ε і μ – параметри середовища в просторі між площинами (провідність середовища σ дорівнює нулю).

Отримані рівняння розкладаються на дві незалежні системи, тому що в рівнянні (23.2) входять невідомі $\dot{E}_y, \dot{H}_x, \dot{H}_z$, а в рівнянні (23.3) – невідомі $\dot{E}_x, \dot{E}_z, \dot{H}_y$. Оскільки за умовою задачі електромагнітні хвилі розповсюджуються вздовж осі z , то система (23.2) визначає поля поперечно-електричні (H -хвилі), а система (23.3) – поля поперечно-магнітні (E -хвилі). Дійсно в полі (23.2) проекція вектора \vec{H} на напрямок поширення не дорівнює нулю (проекція H_z), а вектор \vec{E} лежить в площині, перпендикулярній осі z . Аналогічно в полі (23.3) проекція вектора \vec{E} на напрямок поширення не дорівнює нулю, а в площині, що перпендикулярна осі z , лежить вектор \vec{H} .

Розглянемо кожен тип полів окремо.

Поперечно-магнітні поля

Виразимо проекції \dot{E}_x та \dot{E}_z із першого та другого рівняння системи (23.3) через \dot{H}_y :

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}; \quad \dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \quad (23.4)$$

Підставивши їхні значення в останнє рівняння системи, отримаємо диференціальне рівняння для складових \dot{H}_y :

$$\dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y = 0, \quad (23.5)$$

де $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$.

Відповідно, розрахунок поперечно-магнітного поля в напрямній системі зводиться до рішення рівняння (23.5) при граничних умовах (23.1). Останні в розглянутому випадку мають вид

$$\dot{E}_{ig} = \dot{E}_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0; x=a \quad (23.6)$$

або просто $\partial \dot{H}_y / \partial x = 0$ при $x=0; x=a$.

Рішення рівняння (23.5) будемо шукати методом розділення змінних, припускаючи, що

$$\dot{H}_y = X(x)Z(z). \quad (23.7)$$

Тоді рівняння (23.5) можливо привести до виду

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0. \quad (23.8)$$

Останнє рівняння еквівалентне двом наступним рівнянням:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - k_c^2 X = 0; \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - \gamma^2 Z = 0, \end{cases} \quad (23.9)$$

де k_c^2 – невідома постійна розділення, а

$$\gamma^2 = k_c^2 - k^2. \quad (23.10)$$

Розв'язок першого рівняння (23.9) доцільно записати таким чином:

$$X(x) = A_1 \sin k_c x + B_1 \cos k_c x.$$

Для другого рівняння (23.9) розв'язок зручно представити у вигляді лінійної комбінації показникових функцій:

$$Z(z) = C e^{-\gamma z} + D e^{\gamma z}.$$

Відповідно,

$$\dot{H}_y = (A_1 \sin k_c x + B_1 \cos k_c x)(C e^{-\gamma z} + D e^{\gamma z}). \quad (23.11)$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти, що входять в (23.11), і постійну розділення k_c , використаємо граничні умови (23.6). Підставивши туди значення \dot{H}_y , отримаємо

$$k_c (A_1 \cos k_c x - B_1 \sin k_c x) = 0, \quad (23.12)$$

при $x=0; x=a$.

Умови (23.12) очевидно можуть виконуватися, якщо прийняти $k_c = 0$. В цьому випадку проекція \dot{E}_z , як видно із (23.4), перетворюється в нуль не тільки на провідних площинах, але й у всіх точках простору між ними. Тоді із (23.10) випливає, що $\gamma = ik$.

Підставляючи наведені значення k_c та γ у вирази (23.11) і (23.4), отримаємо

$$\dot{E}_z \equiv 0;$$

$$\begin{cases} \dot{E}_x = \frac{k}{\omega\varepsilon} [\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}] = Z_0 [\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}]; \\ \dot{H}_y = \dot{A}e^{-ikz} + \dot{B}e^{ikz}; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \end{cases} \quad (23.13)$$

Тут ми вважали, що $B_1C = A$ і $B_1D = B$.

Таким чином, розв'язок системи рівнянь (23.3) при $k_c = 0$ визначає електромагнітне поле як суму двох біжучих хвиль, що розповсюджуються по осі z в протилежних напрямках.

Якщо припустити, що джерело електромагнітної енергії знаходиться в нескінченності, $z \rightarrow -\infty$, то в лінії, природно, буде існувати лише одна хвиля, що поширюється в напрямку від $z \rightarrow -\infty$ до $z \rightarrow \infty$. У такому випадку вирази для компонентів електромагнітного поля мають вид:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = \dot{A}_0 e^{-ikz}; \quad \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_y = \frac{\dot{A}_0}{Z_0} e^{-ikz}. \end{cases} \quad (23.14)$$

Із рівнянь (23.14) випливає, що вектори електромагнітного поля отриманої хвилі не мають складових на напрямок поширення. Відповідно, електромагнітне поле, що визначається рівнянням (23.4), (23.5), при $k_c = 0$ вироджується в хвилю поперечно-електромагнітного типу.

Фазова швидкість хвилі (23.14) співпадає зі швидкістю поширення плоскої хвилі у вільному просторі з параметрами середовища ε, μ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Для характеристики напрямної системи доцільно ввести величину, що називається характеристичним опором. Остання визначається як відношення поперечної проекції вектора \dot{E} до перпендикулярної їй поперечної проекції вектора \dot{H} . У нашому випадку характеристичний опір Z_c буде дорівнювати

$$Z_c = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

тобто він співпадає з хвильовим опором середовища для плоскої хвилі. Таке співпадіння не можна вважати випадковим, тому що хвиля TEM в розглянутій системі аналогічна по своїй структурі плоскій хвилі в необмеженому просторі. Дійсно, якщо в поле плоскої хвилі, що поширюється в необмеженому просторі, внести дві нескінченно тонкі провідні площини, що перпендикулярні вектору \vec{E} , то граничні умови (23.1) автоматично виконуються.

Електромагнітне поле (23.14) в просторі між провідними площинами має хвильовий характер при будь-якому значенні частоти коливань. Іншими словами, поперечна хвиля в напрямній системі може існувати при будь-якій частоті коливань поля, причому поширення цієї хвилі відбуваються зі швидкістю, що залежить лише від параметрів середовища.

Отриманий вище розв'язок рівнянь (23.3) виявляється не єдиним можливим. Насправді, умови (23.6), (23.12) можна також задовольнити, якщо $k_c \neq 0$, але

$$A_1 \cos k_c x - B_1 \sin k_c x = 0 \text{ при } x = 0; \text{ і } x = a.$$

Легко переконатися, що ліва частина останньої рівності буде обертатися в нуль при $x = 0$; і $x = a$, якщо

$$A_1 = 0; \sin k_c a = 0,$$

звідки випливає, що

$$k_c = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Коефіцієнт розповсюдження γ , який надалі позначається γ_m , відповідно до (23.11) буде дорівнювати

$$\gamma = \gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k_c^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (23.15)$$

Підставивши знайдене значення γ_m у вираз (23.12) та враховуючи, що $A_1 = 0$, отримаємо

$$\dot{H}_y = \left(\dot{A} e^{-\gamma_m z} + \dot{B} e^{-\gamma_m z} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x.$$

Аналогічно раніше досліджуваному випадку поперечної хвилі ми можемо прирівняти параметр до нуля, $\dot{B} \equiv 0$. Тоді відповідно до (23.5), вирази для проекцій векторів поля будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{H}_y = \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \cos \frac{m\pi}{a} x; \\ \dot{E}_x = \frac{\gamma_m}{i\omega\varepsilon} \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \cos \frac{m\pi}{a} x; \\ \dot{E}_z = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \sin \frac{m\pi}{a} x; \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (23.16)$$

Тут коефіцієнт \dot{A} ми замінили на \dot{A}_m .

Оскільки m за визначенням – будь-яке ціле число, то в просторі між паралельними провідними площинами, крім раніше знайденої хвилі ТЕМ, може існувати нескінченна множина полів поперечно-магнітного типу, що характеризується різними значеннями m (поля ТМ m).

Із виразів (23.16) можна зробити висновок, що поширення поля вздовж осі x має форму стоячої хвилі. Характер зміни поля на інтервалі $0 \leq x \leq a$ визначається індексом m . Відповідно до (23.16) при різних m на проміжку між площинами буде укладатись різне число «півхвиль» поля, при чому це число дорівнює m . На рис. 23.7 зображені криві зміни E_z вздовж осі x , що відповідають різним m . (Максимальне значення E_z для різних «гармонік» тут

вибрані довільно. Початкові фази взяті або однаковими або такими, що відрізняються одна від іншої на π).

Неважко переконатися, що компоненти електромагнітного поля (23.16) при $m = 0$ співпадають з компонентами поля (23.14), оскільки $m = 0$ відповідає $k_c = 0$. Відповідно, поперечно-електромагнітна хвиля в просторі між паралельними провідними пластинами можна розглядатися як вироджений випадок поля поперечно-магнітного типу.

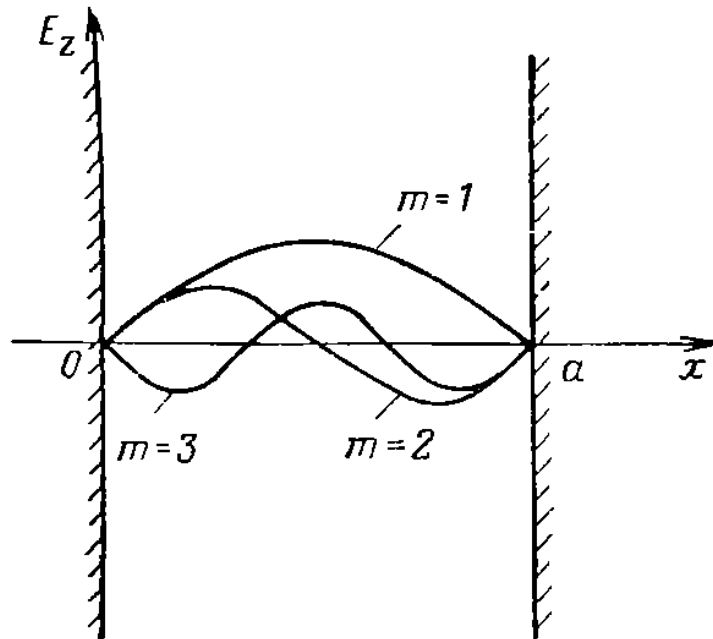


Рис. 23.7. Принцип формування стоячих хвиль

Розглянемо тепер формулу (23.15), що визначає коефіцієнт розповсюдження γ_m .

Легко помітити, що при $k_c > m\pi/a$, $m = 0, 1, 2, \dots$, коефіцієнт розповсюдження є чисто уявною величиною:

$$\gamma_m = i\beta_m,$$

де

$$\beta_m = \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

У такому випадку поперечно-магнітне поле (23.16) буде мати хвильовий характер, тому що вирази (23.16) при $\gamma_m = i\beta_m$, описують хвилі, що розповсюджуються з визначеною швидкістю вздовж осі z .

Припустимо, що при даних значеннях частоти f , відстані a та заданому типі поля, що характеризується величиною m , виконується відношення

$$k_c = 2\pi f \sqrt{\epsilon\mu} < \frac{m\pi}{a}.$$

У такому випадку електромагнітне поле (23.16) вже не буде мати вигляд хвильового характеру, оскільки зараз γ_m має дійсне значення, і множник $e^{-\gamma_m z}$

визначає лише експоненційний характер зменшення амплітуди коливань поля в різних точках осі z . Електромагнітні поля такого типу зазвичай називають затухаючими полями.

Для будь-якого значення m і a можна, очевидно, знайти таку частоту коливань, при якій коефіцієнт розповсюдження перетворюється в нуль. Із виразів (23.15) слідує, що $\gamma_m = 0$, якщо

$$k = k_c = \frac{m\pi}{a} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Частота коливань електромагнітного поля, що визначена із останнього рівняння, має назву критичної частоти і позначається $f_{кр}$. Не важко помітити, що

$$f_{кр} = \frac{1}{2\pi} k_c \nu = \frac{m}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{m\nu}{2a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (23.17)$$

Для кожної критичної частоти можна розрахувати відповідну їй критичну довжину хвилі:

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} = \frac{2\pi c}{k_c \nu} = \frac{2a}{m} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (23.18)$$

якщо $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\mu = \mu_0$, то $\lambda_{кр} = 2a/m$.

Використовуючи вирази (23.15), (23.17) та (23.18), отримаємо

$$\begin{cases} \gamma_m = ik \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = ik \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = i\beta_m; \\ \beta_m = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \end{cases} \quad (23.19)$$

Відповідно при даних a , m та f поперечно-магнітне поле TM_m буде мати форму біжучої хвилі в тому випадку, коли частота коливань поля більше критичної частоти (23.17), тобто коли довжина хвилі λ коротша критичної довжини хвилі $\lambda_{кр}$. Наприклад, поле TM_1 в лінії з $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\mu = \mu_0$ буде мати

хвильовий характер, якщо частота $f > \frac{c}{2a} = \frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, або відповідна довжина

хвилі $\lambda < 2a$. Якщо ж частота коливань менше критичної частоти, поле стає затухаючим.

Аналізуючи вирази (23.16) можна показати, що перенесення електромагнітної енергії вздовж напрямної системи здійснюється тільки біжучими хвилями. Насправді, середнє значення проекції вектора Пойтінга на вісь z в розглянутому випадку, як витікає з формули (23.16), має вид

$$(\Pi_z)_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}} \right] \bar{i}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma_m}{i\omega\varepsilon} \dot{A}_m \dot{A}_m^* e^{-z(\gamma_m + \gamma_m^*)} \cos^2 \frac{m\pi}{a} x \right].$$

Якщо коефіцієнт розповсюдження γ_m має уявне значення, то

$$(\Pi_z)_{cp} = \frac{1}{2} \frac{\beta_m}{\omega \varepsilon} |A_m|^2 \cos^2 \frac{m\pi}{a} x.$$

При дійсному γ_m (затухаюче поле)

$$(\Pi_z)_{cp} = 0.$$

Відповідно, потужність, що знаходиться в затухаючому електромагнітному полі, є чисто коливальною. Останній висновок стає очевидним, якщо врахувати, що проекція E_x у випадку дійсного γ_m зсунута по фазі відносно проекції H_y на кут $-\pi/2$.

Знайдемо фазову швидкість хвилі ТМ m . Оскільки за визначенням $v_\phi = v/\beta_m$, то, враховуючи (23.17)–(23.18), отримаємо

$$v_\phi = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}}, \quad (23.20)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Звідси випливає, що фазова швидкість хвилі ТМ m при $f > f_{кр}$ ($\lambda < \lambda_{кр}$), більша швидкості v . При $f \rightarrow f_{кр}$ величина v_ϕ стає нескінченно великою.

Характеристичний опір

$$(Z_c)_{ТМ} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\beta_m}{\omega \varepsilon} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}, \quad (23.21)$$

у випадку поперечно-магнітних хвиль виявляється менше характеристичного опору Z_0 .

Таким чином, величини, що характеризують хвилі ТМ в розглянутій системі, залежать і від частоти коливань f і від відстані a між напрямними площинами. Що ж стосується хвилі ТЕМ, то її характеристики не залежать ні від f , ні від a . Виходить, що напрямна система не здійснює впливу на розповсюдження цієї хвилі.

Користуючись виразом (23.16), можна зобразити силові лінії електромагнітного поля різних типів хвиль. На рис. 23.8 показані силові лінії хвилі ТЕМ в різних координатних площинах (суцільні лінії відповідають електричному полю, а пунктирні – магнітному). На рис. 23.9 приведені силові лінії хвилі ТМ $_1$.

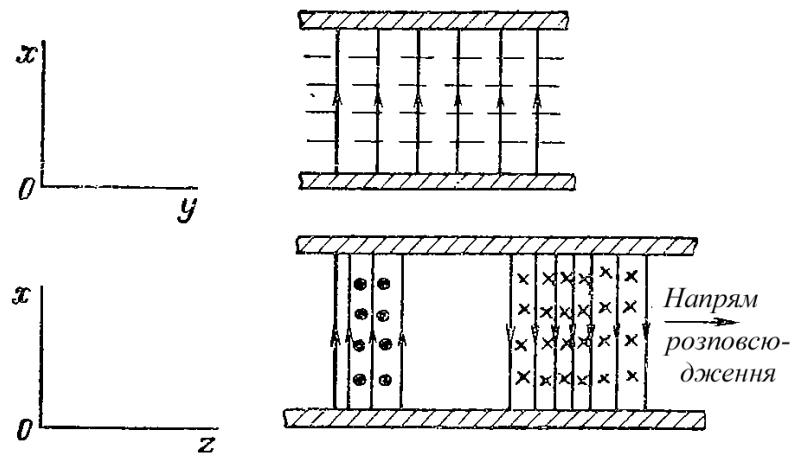


Рис. 23.8. Силові лінії векторів E і H хвилі TEM

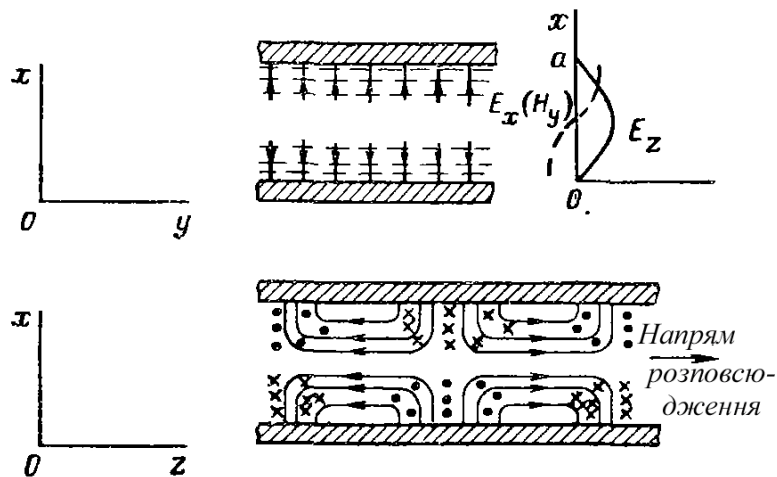


Рис. 23.9. Силові лінії векторів E і H хвилі TM_1

Запитання

1. Наведіть сфери застосування напрямних систем.
2. Дайте визначення терміну «Напрямна система».
3. Наведіть найпростішу конструкцію напрямної системи та вкажіть її недоліки.
4. Перелічіть основні типи напрямних систем.
5. Наведіть основні задачі, вирішення яких дозволяє визначити основні параметри передавання енергії по хвильоводам.
6. Наведіть структуру напрямної системи, у якій аналіз процесу передавання енергії є найпростішим.
7. Вкажіть умову, за якої хвиля E типу перетворюється у хвилю TEM типу.
8. Наведіть тип хвилі, якому аналогічна хвиля E типу, що розповсюджується у напрямній системі.
9. Вкажіть тип хвиль, які розповсюджуються у напрямній системі за умови $k_c = m\pi/a$.
10. Наведіть умову за якої у напрямній системі встановлюється затухаюче поле.
11. Охарактеризуйте обсяг енергії, який переноситься затухаючим полем.

Лекція № 24. Електромагнітні хвилі в напрямних системах (продовження)

Поперечно – електричні поля

Виразивши величини \dot{H}_x та \dot{H}_z через \dot{E}_y , отримаємо:

$$\dot{H}_x = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z}; \quad \dot{H}_z = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x}.$$

Підставивши знайдені значення \dot{H}_x та \dot{H}_z у третє рівняння, отримаємо для проекції \dot{E}_y :

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_y = 0. \quad (24.1)$$

Використовуючи метод розділення змінних, легко показати, що розв'язок рівняння (24.1) має вигляд:

$$\dot{E}_y = (A_1 \sin k_c x + B_1 \cos k_c x)(C e^{-\gamma z} + D e^{\gamma z});$$

$$\gamma^2 = k_c^2 - k^2.$$

Аналогічно попередньому випадку будемо розглядати тільки хвилі, які протікають у додатному напрямі осі z . Тоді $D=0$ і

$$\dot{E}_y = (\dot{A} \sin k_c x + \dot{B} \cos k_c x) e^{-\gamma z}, \quad (24.2)$$

де

$$\dot{A} = A_1 C; \quad \dot{B} = B_1 C.$$

Щоб знайти невідомі, які входять у (24.2), скористаємося граничними умовами:

$$\dot{E}_y = 0. \quad (24.3)$$

Ці умови будуть виконуватись, якщо

$$\dot{B} = 0 \text{ і } \sin k_c a = 0,$$

звідки випливає:

$$k_c = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \gamma = \gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2}.$$

Отже, вирази для проекцій векторів поля поперечно-електричного типу будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{E}_y = \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \sin \frac{m\pi}{a} x; \\ \dot{H}_x = -\frac{\gamma_m}{i\omega\mu} \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \sin \frac{m\pi}{a} x; \\ \dot{H}_z = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_m e^{-\gamma_m z} \cos \frac{m\pi}{a} x. \end{cases} \quad (24.4)$$

З системи (24.4) випливає, що в просторі між паралельними провідними площинами може існувати нескінченна множина поперечно-електричних полів, які відповідають різним значенням m (поля TE_m). Число m має той же зміст, що і у випадку полів поперечно-магнітного типу. Проте на відміну від

попереднього випадку поле TE_0 у напрямній системі не існує, тому що при $m = 0$ складові векторів \vec{E} і \vec{H} перетворюються в нуль.

Електромагнітне поле (24.4) буде мати хвильовий характер, якщо

$$\gamma_m = i\beta_m = i\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}. \quad (24.5)$$

уявне число. Це виконується при умові, що величина $k > \frac{m\pi}{a}$. Отже, для кожного типу поперечно-електричного поля можна визначити критичну частоту $f_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2\pi}$, при якій

$$\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{m\pi}{a} = k_c.$$

дана частота дорівнює

$$f_{кр} = \frac{k_c v}{2\pi} = \frac{mv}{2a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (24.6)$$

Відповідно, критична довжина хвилі

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2a}{m} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (24.7)$$

Підставивши отриманні значення $f_{кр}$ і $\lambda_{кр}$ у вираз (24.5), отримаємо

$$\gamma_m = i\beta_m = ik\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = ik\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}.$$

Отже, поперечно-електричне поле має хвильовий характер, якщо $f > f_{кр}$ (або $\lambda < \lambda_{кр}$). При $f < f_{кр}$ поле (24.4) буде затухати вздовж осі z . Затухаюче поле ТЕ, як і ТМ, характеризується реактивною потужністю, тобто воно не приймає участі при переносі енергії вздовж напрямку розповсюдження.

Фазова швидкість поперечно-електричної хвилі визначається виразом

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad (24.8)$$

З виразу (24.8) можна зробити висновок, що при $f > f_{кр}$ фазова швидкість більша за швидкість $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Характеристичний опір хвилі у напрямній системі дорівнює

$$(Z_c)_{TE} = \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_m} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}. \quad (24.9)$$

Ця величина виявляється більшою за характеристичний опір Z_0 середовища, яке заповнює простір між провідниками. На рис. 24.1 зображені силові лінії електромагнітного поля хвилі TE_1 .

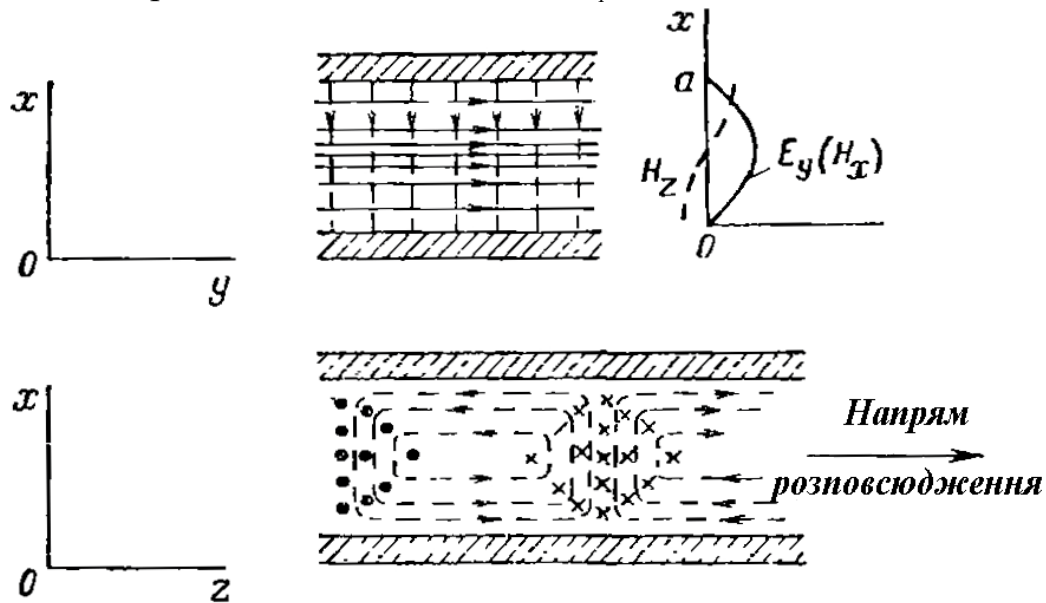


Рис. 24.1. Епюри силових ліній електромагнітного поля хвилі типу TE_1

Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль

Нехай електромагнітна хвиля розповсюджується у просторі (або напрямній системі) без втрат. У режимі встановлених гармонічних коливань миттєві комплексні значення будь-якої проекції вектору \vec{E} або \vec{H} на вісь прямокутної системи координат має вигляд:

$$\psi_k = \dot{A}_m e^{i(\omega t - \beta z)}. \quad (24.10)$$

Тут вісь z прийнята за напрям розповсюдження хвилі.

Із виразу (24.10) можна зробити висновок, що змінна фази поля вздовж напрямку розповсюдження визначається величиною $\omega t - \beta z$. Звідси ми знаходимо фазову швидкість хвилі

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}, \quad (24.11)$$

як швидкість руху поверхні рівних фаз вздовж осі z . Таким чином, фазова швидкість характеризує зміну початкових фаз гармонічних коливань за напрямком руху хвилі.

Розглянемо тепер більш складне питання про розповсюдження коливань довільної форми. У подальшому такі коливання ми будемо умовно називати сигналами.

Очевидно, ми не маємо підстав стверджувати, що швидкість розповсюдження сигналу буде співпадати з фазовою швидкістю. Справді, остання, як було встановлено, характеризує тільки фазові співвідношення між гармонічними коливаннями в довільних точках простору, коли ці коливання вже виникли та встановились всюди.

Припустимо, що в точці $z = 0$ міститься сигнал, який змінюється з часом за законом $f(t)$. З'ясуємо, який вигляд буде мати цей сигнал в інших точках осі

z при $t > 0$; іншими словами, визначимо функцію $f(t, z)$, якщо відома функція $f(t, 0)$, а також відомі характеристики середовища, в якому відбувається розповсюдження.

Використовуючи інтеграл Фур'є, представимо $f(t, 0)$ у вигляді:

$$f(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \dot{A}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (24.12)$$

де $\dot{A}(\omega)$ – спектральна щільність функції $f(t)$. Згідно з виразом (24.12) функція $f(t, 0)$ є сумою гармонічних коливань з частотами ω і амплітудами $\frac{1}{\pi} \dot{A}(\omega) d\omega$. Сукупність цих коливань, як відомо, утворює спектр функції $f(t)$.

Кожній складовій $\frac{1}{\pi} \dot{A}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ при розповсюдженні коливань вздовж осі z відповідає хвиля

$$\frac{1}{\pi} \dot{A}(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega,$$

де β – хвильове число. Тому функцію $f(t, z)$ в будь-якій точці осі z можна представити у вигляді

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \dot{A}(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega; \quad z \geq 0. \quad (24.13)$$

Згідно з формулою (24.13), розповсюдження сигналу у даному напрямку обумовлено рухом всіх його гармонічних складових.

У загальному випадку фазова швидкість хвилі залежить від частоти коливань. При наявності такої залежності різні гармонічні складові сигналу будуть рухатися вздовж осі z з різними фазовими швидкостями. А це, очевидно, може призвести до того, що форма сигналу по мірі його розповсюдження буде змінюватися.

Так як хвильове число $\beta = 2\pi/\lambda$ є функцією частоти, тобто $\beta = \beta(\omega)$, у (24.13) замість інтегрування по ω можна перейти до інтегрування по β :

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \dot{A}(\beta) e^{i[\omega(\beta)t - \beta z]} d\beta. \quad (24.14)$$

Нехай дійсний складова спектру сигналу обмежений частотами $\omega_{\min} = \omega_0 - \Delta\omega$ і $\omega_{\max} = \omega_0 + \Delta\omega$ та, крім того, $\Delta\omega \ll \omega_0$ (ω_0 – середня частота спектру). Тоді інтегрування формули (24.13) здійснюється на проміжку $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$, а у (24.14) – на проміжку $\beta_0 - \Delta\beta \leq \beta \leq \beta_0 + \Delta\beta$. Тут $\beta_0 = \omega_0/v_0$ – середнє значення хвильового множника, який відповідає середній частоті ω_0 та фазовій швидкості на цій частоті, а $\Delta\beta \ll \beta_0$. На підставі цього, замість (24.14) можна записати

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\beta_0 - \Delta\beta}^{\beta_0 + \Delta\beta} \dot{A}(\beta) e^{i(\omega t - \beta z)} d\beta. \quad (24.15)$$

Сигнал, який визначається інтегралом (24.15), називається хвильовим пакетом або групою хвиль.

Розглядаючи ω як функцію змінної β , розкладемо $\omega(\beta)$ у ряд за степенями $\beta - \beta_0$:

$$\omega(\beta) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\beta_0} (\beta - \beta_0) + \dots, \quad (24.16)$$

та підставимо $\omega(\beta)$ з (24.16) у (24.15).

При малому проміжку інтегрування у розкладі (24.16) можна обмежитись двома першими членами. У цьому випадку, інтеграл (24.15) має вигляд:

$$\begin{aligned} f(t, z) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\beta_0 - \Delta\beta}^{\beta_0 + \Delta\beta} A(\beta) e^{\left\{ \left[\omega_0 + \frac{d\omega}{d\beta_0} (\beta - \beta_0) \right] t - [\beta_0 + (\beta - \beta_0)] z \right\}} d\beta = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\beta_0 - \Delta\beta}^{\beta_0 + \Delta\beta} A(\beta) e^{i \left[\frac{d\omega}{d\beta_0} (\beta - \beta_0) t - (\beta - \beta_0) z \right]} d\beta \right\}, \end{aligned}$$

де $d\omega/d\beta_0$ - похідна $d\omega/d\beta$ в точці $\beta = \beta_0$.

Вводячи далі нову змінну інтегрування $\xi = \beta - \beta_0$ отримаємо

$$f(t, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\Delta\beta}^{+\Delta\beta} A(\xi) e^{i \left(\frac{d\omega}{d\beta_0} \xi - z \right)} d\xi \right\}.$$

Будемо вважати, що $\dot{A}(\xi)$ - неперервна функція, яка повільно змінюється. Тоді її на малому інтервалі $[-\Delta\beta, \Delta\beta]$ можна вважати постійною, рівною $\dot{A}(\beta_0)$. У цьому випадку

$$\begin{aligned} f(t, z) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ A(\beta_0) e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\Delta\beta}^{+\Delta\beta} e^{i \left(\frac{d\omega}{d\beta_0} \xi - z \right)} d\xi \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi} A(\beta_0) \frac{\sin \left(\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z \right) \Delta\beta}{\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z} \cos(\omega_0 t - \beta_0 z - \varphi_0), \end{aligned} \quad (24.17)$$

де φ_0 - аргумент комплексного виразу $\dot{A}(\beta_0)$.

Вираз (24.17), таким чином, визначає сигнал в будь-якій точці $z \geq 0$. Функція

$$F(t, z) = \frac{2}{\pi} A(\beta_0) \frac{\sin \left(\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z \right) \Delta\beta}{\frac{d\omega}{d\beta_0} t - z}, \quad (24.18)$$

в наслідок того, що $\Delta\beta$ мале, є функцією змінних t і z . Тому її можна вважати амплітудою хвилі $\cos(\omega_0 t - \beta_0 z - \varphi_0)$. При $z = \text{const}$ функція $F(t, z)$ є огинаючою сигналу $f(t, z)$ з вузьким частотним спектром.

З формули (24.14) видно, що з плином часу обвідна переміщується вздовж осі z . Про її рух зручно судити по переміщенню максимуму, який знаходиться в точці $\frac{d\omega}{d\beta_0}t - z = 0$. З плином часу цей максимум рухається вздовж осі z зі швидкістю

$$v_{zp} = \left. \frac{d\omega}{d\beta_0} \right|_{\beta=\beta_0}. \quad (24.19)$$

Остання формула отримала назву групової швидкості. Вона і визначає швидкість розповсюдження сигналу типу «хвильовий пакет».

Встановимо зв'язок між груповою та фазовою швидкостями. Диференціюючи вираз (24.19) за частотою, отримуємо

$$\frac{dv_{zp}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{\beta} \right) = -\frac{\beta - \omega \frac{d\beta}{d\omega}}{\beta^2},$$

звідки

$$v_{zp} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{v_{\phi}}{1 - \frac{\omega}{v_{\phi}} \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}. \quad (24.20)$$

Якщо фазова швидкість не залежить від частоти, тобто $\frac{dv_{\phi}}{d\omega} = 0$, то і $\frac{dv_{zp}}{d\omega} = 0$. В цьому випадку $v_{zp} = v_{\phi}$.

Залежність фазової швидкості від частоти коливань у фізиці прийнято називати дисперсією, а середовище, в якому це явище спостерігається – дисперсійним середовищем.

Подібна залежність характерна, наприклад, для прямої системи, яку ми розглядали у попередньому параграфі. Справді, фазова швидкість хвилі ТЕ і ТМ, яка розповсюджується між провідними площинами, рівна

$$v_{\phi} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2}}, \quad (24.21)$$

а хвильове число

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2} = \frac{2\pi}{v} f \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2}.$$

Використовуючи співвідношення (24.19) та (24.20), для групової швидкості отримуємо

$$v_{zp} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2}, \quad (24.22)$$

і відповідно

$$v_{\phi} v_{gp} = v^2. \quad (24.23)$$

На рис. 24.2 показані графіки зміни фазової та групової швидкостей (24.21), (24.22) у залежності від частоти коливань.

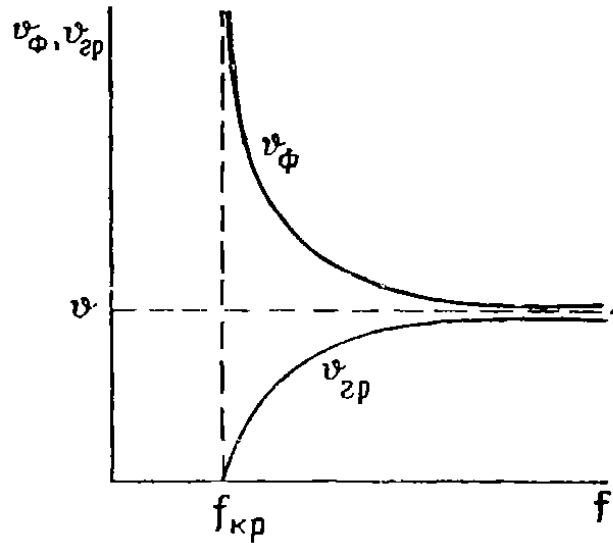


Рис. 24.2. Залежність фазової і групової швидкостей хвилі, що розповсюджується між паралельними провідними пластинами від частоти

Якщо в середовищі дисперсії немає, то хвильовий множник β виявляється лінійною функцією частоти

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{v_{\phi}} = \frac{\omega}{v}; v_{\phi} = v = const.$$

При цій умові вираз (24.13) має вид

$$\begin{aligned} f(t, z) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega \left(t - \frac{z}{v}\right)} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t'} d\omega; t' = t - \frac{z}{v}. \end{aligned} \quad (24.24)$$

Порівнюючи останній вираз з формулою (24.12), отримаємо

$$f(t, z) = f(t', 0) = f\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (24.25)$$

Таким чином, у середовищі без дисперсії сигнал будь-якої форми розповсюджується зі швидкістю v , при цьому форма сигналу не змінюється.

Дослідження питання про розповсюдження сигналу у дисперсійному середовищі представляє собою дуже складну задачу. У загальному випадку цей процес не може бути повністю охарактеризований величинами фазової та групової швидкості.

Складність питання полягає у тому, що форма сигналу при русі деформується, сигнал по мірі розповсюдження розпливається. У цій ситуації поняття швидкості взагалі стає неоднозначним, так як немає однакових сигналів, які у різний час займають різне положення у просторі.

Аналогічну картину ми спостерігаємо при русі хмари. Тут також не існує однозначного визначення швидкості. Можна говорити про швидкість переднього краю хмари, швидкість його центра мас і тому подібне, і всі ці величини будуть різними.

Введене вище поняття групової швидкості сигналу визначало швидкість переміщення його обвідної, та це поняття мало сенс, поки обвідна переміщувалась без зміни форми.

Якщо частотний спектр сигналу не широкий, то викривлення обвідної при розповсюдженні відбувається повільно. В цьому випадку зміну форми сигналу на невеликих відстанях від джерела можна не враховувати, та групова швидкість буде визначати рух всієї групи коливань в цілому. Очевидно, що такий сигнал за своїми властивостями наближається до хвильового пакету.

У підсумку зупинимося на питанні про швидкість руху енергії електромагнітних коливань. Ця величина для плоскої хвилі визначається як відношення середнього значення вектора Пойнтінга до середньої щільності енергії у даній точці. Для напрямної системи швидкість руху енергії слід визначити як відношення середнього потоку потужності через поперечний переріз системи до середньої енергії поля на одиницю її довжини. Очевидно, що швидкість руху енергії не може бути більшою за швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у вакуумі.

Вчений М. А. Леонтович показав, що у всіх випадках, коли групова швидкість має фізичний зміст, вона співпадає зі швидкістю руху енергії. Якщо сигнал рухається у середовищі з втратами, то до викривлення, які обумовлені дисперсією, додається ще зміна форми сигналу за рахунок поглинання енергії. Отже, процес розповсюдження в цьому випадку стає ще більш складнішим.

Запитання

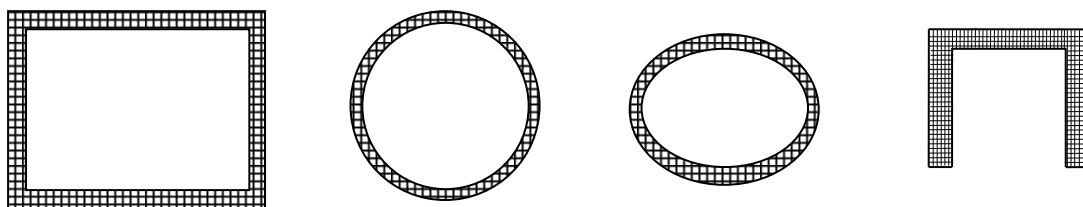
1. Назвіть кількість поперечно-електричних полів різного типу, які можуть існувати в просторі між паралельними провідними площинами.
2. Наведіть умову, за якої електромагнітне поле має хвильовий характер.
3. Вкажіть, яке твердження дійсне, за умови, що величина $k > \frac{m\pi}{a}$.
4. Наведіть співвідношення між фазовою і груповою швидкостями, якщо фазова швидкість не залежить від частоти.
5. Вкажіть чи може фазова швидкість перевищувати швидкість розповсюдження хвилі.
6. Наведіть визначення фазової швидкості.
7. Вкажіть параметр розповсюдження хвилі, який характеризує дисперсія.
8. Наведіть умову, коли електромагнітна хвиля в середовищі розповсюджується без дисперсії.
9. Наведіть фізичний зміст групової швидкості.

Лекція № 25. Розповсюдження електромагнітних хвиль в хвилеводах

Вступ

Хвилевід – структура, призначена для передавання енергії електромагнітних хвиль, в яких вони обмежені в одному або двох вимірах явищем повного відбивання на його межі. Внутрішній простір хвилеводу, який обмежений провідною поверхнею, заповнений діелектриком. У більшості випадків таким діелектриком є повітря. Стінки хвилеводу, які виготовляються з металу з великою електропровідністю, наприклад з міді або латуні, для уникнення корозії часто вкриваються тонким шаром срібла.

Існують різні типи хвилеводів, які відрізняються один від одного формою утворюючих їх металевих поверхонь та формою поперечних перерізів. Деякі з них показані на рис. 25.1: хвилевод *a* на цьому рисунку має прямокутний поперечний переріз та називається прямокутним, *б* – круглим циліндричним, *в* – еліптичним і, нарешті, *г* – П-подібним.



а) прямокутний; б) круглий; в) еліптичний; г) П-подібний

Рис. 25.1. Структури хвилеводів

Нижче буде показано, що хвиля у хвилеводі може розповсюджуватися, якщо його розміри поперечного перерізу при заданій частоті коливань вибрані більшими за деякі граничні допустимі значення. Проте у діапазоні надвисоких частот хвилеводи мають суттєво менший рівень втрат енергії, ніж коаксіальні та двопровідні лінії. Тому на хвилях дециметрового, сантиметрового та частково міліметрового діапазону для передавання електромагнітної енергії застосовуються саме хвилеводи. розглянемо властивості найпростішого і найрозповсюдженішого хвилевода – прямокутного.

Прямокутний хвилевод

Щоб знайти поля, які можуть існувати в прямокутному хвилеводі без втрат, необхідно розв'язати рівняння Максвелла для області, яка обмежена ідеально провідними стінками, при нульових граничних умовах.

Будемо вважати, що хвилевод має нескінченно велику протяжність і не містить джерел електромагнітного поля.

Увівши прямокутну систему координат, рис. 10.2, запишемо граничні умови на стінках хвилеводу у виді:

$$\overline{E}_{tg} = 0 \text{ при } x = 0, x = a, y = 0, y = b. \quad (25.1)$$

Нас будуть цікавити умови, при яких розв'язок рівнянь поля має форму біжучої хвилі, що розповсюджується вздовж осі хвилеводу (осі *z*). Тому

природно вважати, що залежність складових векторів \vec{E} та \vec{H} від координати z представляється функцією

$$f(z) = e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (25.2)$$

де γ – коефіцієнт розповсюдження.

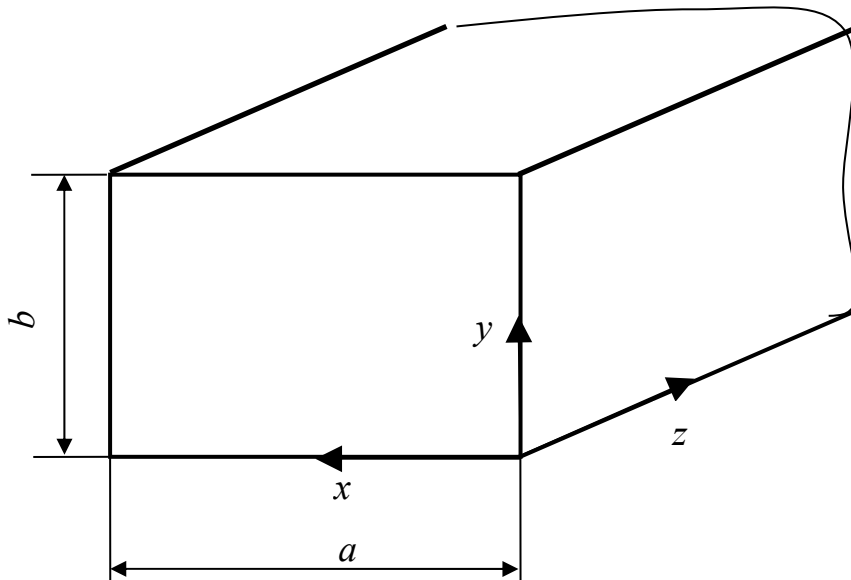


Рис. 25.2. Топологія прямокутного хвилевода

Але відповідно до формули (25.2) диференціювання будь-якої з проекцій вектора \vec{E} або вектора \vec{H} за змінною z еквівалентна множенню її на параметр $-\gamma$. Наприклад,

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} [\dot{E}_{x0}(x, y) e^{-\gamma z}] = -\gamma \dot{E}_x.$$

На підставі цього, для внутрішнього простору хвилеводу при $\vec{j} = 0$ та $\rho = 0$ будемо мати:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \gamma \dot{H}_y = i\omega\varepsilon \dot{E}_x, \\ -\gamma \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon \dot{E}_z, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + \gamma \dot{E}_y = -i\omega\mu \dot{H}_x; \\ -\gamma \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega\mu \dot{H}_y; \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -i\omega\mu \dot{H}_z, \end{array} \right. \quad (25.3)$$

де ε і μ – електрична та магнітна проникності середовища, яке заповнює хвилевод.

Якщо в рівняння (1) і (2) системи (25.3) підставити значення \dot{H}_x і \dot{H}_y з рівнянь (4) та (5), а потім у рівняння (4), (5) – значення \dot{E}_x і \dot{E}_y з рівнянь (1) і (2), то невідомі \dot{E}_x , \dot{E}_y , \dot{H}_x , \dot{H}_y будуть виражені через проєкції \dot{E}_z і \dot{H}_z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + i\omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right); \\ \dot{E}_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + i\omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right); \\ \dot{H}_x = \frac{1}{k_c^2} \left(i\omega\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right); \\ \dot{H}_y = -\frac{1}{k_c^2} \left(i\omega\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right), \end{array} \right. \quad (25.4)$$

де $k_c^2 = \gamma^2 + k^2$.

Для хвилі, яка розповсюджується у протилежному напрямку, перед параметром γ у виразах (25.3) та (25.4) потрібно поставити протилежний знак. Таким чином, усі поперечні проєкції векторів \vec{E} і \vec{H} виражаються через повздовжні проєкції \dot{E}_z і \dot{H}_z . Підставляючи \dot{E}_x і \dot{E}_y з (25.4) у рівняння (6) системи (25.у), а \dot{H}_x , \dot{H}_y – у рівняння (3), отримуємо рівняння для проєкцій \dot{H}_z і \dot{E}_z :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{H}_z = 0; \quad (25.5)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{E}_z = 0. \quad (25.6)$$

З виразів (25.4) можна зробити висновок, що електромагнітне поле у хвилеводі у загальному випадку представляє собою суму двох незалежних полів:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}; & \dot{E}_y = \frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}; & \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}; & \dot{H}_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}; & \dot{H}_z \neq 0; \end{cases} \quad (25.7)$$

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}; & \dot{E}_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}; & \dot{E}_z \neq 0; \\ \dot{H}_x = \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}; & \dot{H}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}; & \dot{H}_z = 0. \end{cases} \quad (25.8)$$

Легко помітити, що поле (25.7) є поперечно-електричним полем ($E_z = 0$), а поле (25.8) – поперечно-магнітним ($H_z = 0$).

Перейдемо до вивчення цих полів окремо.

Поперечно-електричні поля

Згідно з формулою (25.7) поле ТЕ у хвилеводі визначається повздовжньою складовою \dot{H}_z , яка задовольняє рівнянню (25.5).

Граничні умови для функції \dot{H}_z можна знайти із загальних граничних умов (25.1). Останні умови, які застосовуються до поля ТЕ, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = b; \\ \dot{E}_y &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a. \end{aligned} \quad (25.9)$$

Звідси, враховуючи (25.7) будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a; \\ \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = b. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Розв'язок рівняння (25.7) представимо у вигляді:

$$\dot{H}_z = X(x)Y(y)e^{-\gamma z}, \quad (25.11)$$

де $X(x)$ і $Y(y)$ – функції, які залежать відповідно тільки від x і y . Підставляючи останній вираз у рівняння (25.11) та проводячи нескладні перетворення, отримаємо

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_c^2 = 0,$$

звідки можна отримати, що

$$X'' + p^2 X = 0, \quad Y'' + q^2 Y = 0 \quad i \quad p^2 + q^2 = k_c^2,$$

де p^2 і q^2 – довільні коефіцієнти.

Загальний розв'язок цих диференціальних рівнянь можна зобразити у наступному вигляді:

$$X = (\dot{A}_1 \cos px + \dot{B}_1 \sin px);$$

$$Y = (\dot{A}_2 \cos qy + \dot{B}_2 \sin qy).$$

Отже, згідно з формулою (25.11) проекція \dot{H}_z буде дорівнювати

$$\dot{H}_z = (A_1 \cos px + B_1 \sin px)(A_2 \cos qy + B_2 \sin qy)e^{-\gamma z}, \quad (25.12)$$

причому коефіцієнт розповсюдження виражається з формули $\gamma^2 = p^2 + q^2 - k^2$.

Щоб знайти невідомі параметри, скористаємося граничними умовами (25.10). З першої умови випливає, що

$$B_2 = 0; \quad \sin qb = 0 \quad i \quad q = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

З другої умови отримаємо:

$$B_1 = 0; \quad \sin pa = 0 \quad i \quad p = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Отже,

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2;$$

$$\gamma = \gamma_{mn} = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2};$$

$$\dot{H}_z = \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z},$$

за умови, що $A_1 A_2 = \dot{A}_{mn}$.

Підставляючи тепер значення \dot{H}_z у рівняння (25.7), знайдемо остаточні вирази для проекцій векторів поперечно-електричного поля у прямокутному хвилеводі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = \frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn}z}; \\ \dot{E}_y = -\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn}z}; \\ \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{A}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn}z}; \\ \dot{H}_y = \frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn}z}; \\ \dot{H}_z = \dot{A}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn}z}. \end{array} \right. \quad (25.13)$$

Як видно із отриманих рівностей, при $m = n = 0$ всі компоненти векторів, за виключенням \dot{H}_z , перетворюються в нуль. Звідси можна зробити висновок, що числа m і n - можуть мати будь-які цілі значення, але вони не повинні одночасно дорівнювати нулю.

Таким чином, у прямокутному хвилеводі існує нескінченна множина типів поперечно-електричних полів, які характеризуються різними значеннями m і n (поля TE_{mn} і H_{mn}). Згідно (25.13), вздовж сторін a і b розподіл поля має форму стоячої хвилі, причому значення m визначає число напівхвиль, які вкладаються на інтервалі $0 \leq x \leq a$, а n - число напівхвиль на інтервалі $0 \leq y \leq b$.

Поле (25.13), очевидно, буде розповсюджуватися по осі z у вигляді біжучої хвилі, якщо коефіцієнт розповсюдження γ_{mn} має чисто уявне значення

$$\gamma_{mn} = i\beta_{mn} = i\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (25.14)$$

де β_{mn} - коефіцієнт фази (хвильове число). Для цього необхідно, щоб при заданих параметрах f , m , n , a і b виконувалася нерівність

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Якщо $k^2 < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, то поле є затухаючим.

Отже, у хвилеводі, так як і у просторі між провідними площинами, поле TE_{mn} буде хвильовим, якщо частота коливань f більша деякої критичної частоти $f_{кр}$, яка визначається з умови γ_{mn} .

Враховуючи (25.15), після неважких перетворень для $f_{кр}$ отримаємо

$$f_{кр} = \frac{1}{2\pi} k_c v = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (25.15)$$

де $\nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Критична довжина хвилі $\lambda_{кр}$, яка відповідає знайденій критичній частоті, розраховується за формулою

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} = \frac{2\pi c}{k_c \nu} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (25.16)$$

Звідси слідує, що умова розповсюдження хвилі по хвилеводу має вигляд

$$f > f_{кр} \quad \text{або} \quad \lambda < \lambda_{кр}. \quad (25.17)$$

Неважко розрахувати фазову швидкість та довжину хвилі TE_{mn} у хвилеводі. Фазова швидкість ν_ϕ дорівнює

$$\nu_\phi = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}, \quad (25.18)$$

а довжина хвилі

$$\lambda_{хв} = \frac{\nu_\phi}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \frac{\nu}{c}. \quad (25.19)$$

Отже, величина $\lambda_{хв}$ відрізняється від довжини хвилі, яка визначена для вільного простору з $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\mu = \mu_0$.

Групова швидкість $\nu_{гр}$ розраховується за формулою:

$$\nu_{кр} = \frac{d\omega}{d\beta_{mn}} = \nu \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}. \quad (25.20)$$

З формул (25.18) і (25.20) для фазової та групової швидкостей випливає, що прямокутний хвилевод є дисперсійним середовищем.

Характеристичний опір хвилевода у випадку поперечно-електричних хвиль дорівнює

$$(Z_c)_{TE} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}. \quad (25.21)$$

Згідно з виразом (10.61), при незмінних розмірах поперечного перерізу хвилевода, критична частота росте із збільшенням m і n , тобто хвилі з великими значеннями m і n мають більш високі критичні частоти. Отже, для передавання електромагнітної енергії на заданій частоті коливань по хвилеводу з найменшими поперечними розмірами необхідно використовувати хвилю з малими значеннями параметрів m і n . Структура поперечно-електричних полів

різних типів у прямокутному хвилеводі та інші їхні характеристики наведені в табл. 25.1.

Таблиця 25.1. Хвилі в прямокутних хвилеводах

Тип хвилі	TE ₁₀	TE ₁₁
Структура поля у різних перетинах хвилевода 1) переріз площиною $y = \text{const}$; 2) переріз площиною $x = \text{const}$; 3) переріз площиною $z = \text{const}$;		
Компоненти поля відмінні від нуля	E_y, H_x, H_z	E_x, E_y, H_x, H_y, H_z
k_c	$\frac{\pi}{a}$	$\frac{\pi\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$
$\lambda_{кр}$	$2a\sqrt{\epsilon' \mu'}$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{\epsilon' \mu'}$
$f_{кр}$	$\frac{1}{2a\sqrt{\epsilon' \mu'}}$	$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab\sqrt{\epsilon' \mu'}}$
TE ₂₁	TM ₁₁	TM ₂₁
E_x, E_y, H_x, H_y, H_z	E_x, E_y, E_z, H_x, H_y	E_x, E_y, E_z, H_x, H_y
$\frac{\pi\sqrt{a^2 + 4b^2}}{ab}$	$\frac{\pi\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$	$\frac{\pi\sqrt{a^2 + 4b^2}}{ab}$
$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} \sqrt{\epsilon' \mu'}$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{\epsilon' \mu'}$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} \sqrt{\epsilon' \mu'}$
$\frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2ab\sqrt{\epsilon' \mu'}}$	$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab\sqrt{\epsilon' \mu'}}$	$\frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2ab\sqrt{\epsilon' \mu'}}$

Поперечно-магнітні поля

Поперечно-магнітні поля у хвилеводі визначаються проекцією \dot{E}_z , яка задовольняє диференціальне рівняння (25.6) та граничним умовам:

$$\begin{aligned}\dot{E}_z &= 0 \text{ при } x=0, x=a; \\ \dot{E}_z &= 0 \text{ при } y=0, y=b.\end{aligned}\quad (25.22)$$

Так як рівняння (25.5) та (25.6) аналогічні, то розв'язок останнього буде мати такий же вигляд, як і (25.12), тобто

$$\dot{E}_z = (\dot{A}_1 \cos px + \dot{B}_1 \sin px)(\dot{A}_2 \cos qy + \dot{B}_2 \sin qy)e^{-\gamma z}, \quad (25.23)$$

причому знову

$$p^2 + q^2 = k_c^2 \text{ у } \gamma^2 = p^2 + q^2 - k^2. \quad (25.24)$$

Задовольнивши граничні умови (25.22), отримаємо

$$\begin{cases} A_1 = 0; \quad \sin pa = 0; \quad p = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ A_2 = 0; \quad \sin qb = 0; \quad q = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (25.25)$$

З урахуванням цього вираз (25.23) перетвориться до виду

$$\dot{E}_z = \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z},$$

де $\dot{B}_{mn} = B_1 B_2$.

Підставляючи розраховане значення \dot{E}_z у формулу (25.8), отримаємо остаточний вираз для складових векторів поперечно-магнітних полів у прямокутному хвилеводі:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_y = -\frac{\gamma_{mn}}{k_c^2} \frac{m\pi}{b} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{E}_z = \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_x = \frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \dot{B}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \dot{B}_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma_{mn} z}; \\ \dot{H}_z = 0, \end{cases} \quad (25.26)$$

причому згідно з (25.23) та (25.24)

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2; \quad \gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}.$$

Таким чином, у прямокутному хвилеводі може існувати нескінченна множина типів поперечно-магнітних полів, які характеризуються різними числами m і n (поля TM_{mn} і E_{mn}). Ці числа мають той же фізичний зміст, що і у випадку полів ТЕ.

Легко помітити, що при m або n , рівному нулю, вектори поля всюди перетворюються в нуль. Отже, у розглянутому хвилеводі полів TM_{00} , TM_{m0} або TM_{0n} , не існує, а параметри m і n можуть змінюватись в діапазоні $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$.

Аналогічно до попередніх міркувань виводяться формули для критичних частот, критичних хвиль та інших характеристик поперечно-магнітних хвиль різних типів. Їх загальний вид співпадає з формулами, які відносяться до поперечно-електричних хвиль, окрім формули для характеристичного опору хвилеводу, яка у випадку поперечно-магнітних хвиль має інший вигляд:

$$(Z_c)_{TM} = \frac{\beta_{mn}}{\omega \varepsilon} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}. \quad (25.27)$$

Структура поперечно-магнітних полів різних типів зображена на епюрах табл. 25.1.

Отже, всі можливі типи розв'язків у прямокутному хвилеводі вичерпуються полями (25.13) і (25.26) при $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Ці поля носять назву власних полів або власних хвиль прямокутного хвилеводу. Очевидно, що будь-яке інше поле з більш складною конфігурацією у точках, де немає джерел, може бути представлено у вигляді сукупності власних полів.

Хвиля TE_{10} у прямокутному хвилеводі

Найпростішими хвилями у прямокутному хвилеводі є поперечно-електричні хвилі TE_{10} і TE_{01} . Обидві вони мають ідентичні властивості, тому ми обмежимося тим, що розглянемо тільки хвилі TE_{10} .

Задавши у виразах (25.13) $m = 1$ і $n = 0$, для проєкцій векторів \vec{E} і \vec{H} цієї хвилі отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -i\omega\mu \frac{a}{\pi} \dot{A}_{10} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}; \\ \dot{E}_x = \dot{E}_z = 0; \\ \dot{H}_x = i\beta_{10} \frac{a}{\pi} \dot{A}_{10} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}; \\ \dot{H}_y = 0; \\ \dot{H}_z = \dot{A}_{10} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta_{10}z}, \end{cases} \quad (25.28)$$

де $\beta_{10} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$.

Згідно з формулою (25.15) критична частота поля TE_{10} дорівнює

$$(f_{кр})_{TE_{10}} = \frac{v}{2a} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{2a},$$

і, відповідно, критична довжина хвилі

$$(\lambda_{кр})_{TE_{10}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} 2a.$$

Якщо хвилевод заповнений повітрям, тобто $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\mu = \mu_0$, то

$$(f_{кр})_{TE_{10}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{2a}; \quad (\lambda_{кр})_{TE_{10}} = 2a.$$

З останніх можна зробити висновок, що параметри $f_{кр}$ і $\lambda_{кр}$ у даному випадку не залежать від розміру b поперечного перерізу хвилеводу. Крім того, $\lambda_{кр}$ у поля TE_{10} має більше значення ніж критичних хвиль всіх інших типів, включаючи і поле TE_{01} при умові, що $a > b$ (для поля TE_{01} критична довжина хвилі дорівнює $\sqrt{\varepsilon\mu / \varepsilon_0\mu_0} 2b$). Внаслідок цього допустимі поперечні розміри хвилеводу для заданої частоти коливань виходять найменшими, якщо в ньому збуджується хвиля TE_{10} . Дана причина, на ряду з простотою конфігурації поля, призвела до того, що на практиці у прямокутних хвилеводах, як правило, застосовується хвиля типу TE_{10} .

Структура електромагнітного поля TE_{10} зображена на рисунку в табл. 25.1. Згідно з формулою (25.28) та рисунком силові лінії електричного поля паралельні осі y . Магнітні силові лінії замкнуті. Вони лежать в площині, яка перпендикулярна електричним силовим лініям, та оточують вертикально направленні струми зсуву.

При розповсюдженні хвилі вздовж хвилевода на його стінках з'являється поверхневий електричний струм. Вектор щільності струму пов'язаний з вектором напруженості магнітного поля співвідношенням

$$\vec{j}_s = \vec{H} \times \vec{n}.$$

З цього рівняння випливає, що складовою напруженості магнітного поля H_x у хвилеводі відповідає повздовжній струм j_{S_z} , причому при $y = 0$

$$j_{S_z} = H_x,$$

а при $y = b$

$$j_{S_z} = -H_x.$$

Розподіл щільності повздовжнього струму j_{S_z} у площині $y = b$, $0 \leq x \leq a$ для будь-якого фіксованого моменту часу зображено на рис. 25.3. Так як H_x перетворюється в нуль при $x = 0$ та $x = a$, то повздовжній струм на бічних стінках хвилеводу також дорівнює нулю.

Складовій поля H_z відповідають поперечні електричні струми, які протікають по стінках хвилеводу у напрямках, перпендикулярних осі z . На

бічних стінках протікає струм з щільністю $j_{S_y} = -H_z$. На верхній стінці хвилеводу – струм $j_{S_x} = -H_z$, на нижній – струм $j_{S_x} = H_z$.

Розподіл поперечних струмів у хвилеводі показано на рис. 25.4.

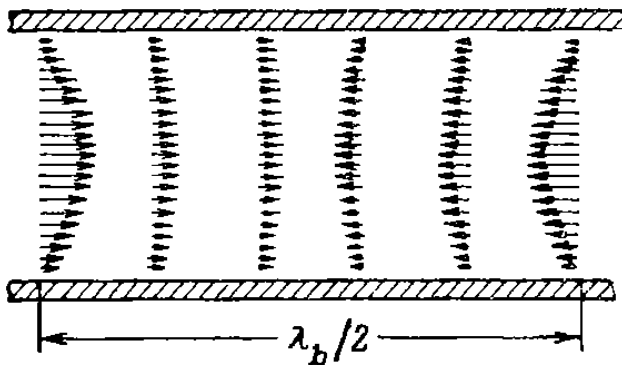


Рис. 25.3. Силві лінії поздовжнього струму хвилі TE_{10} на стінці $y = b$ хвилевода

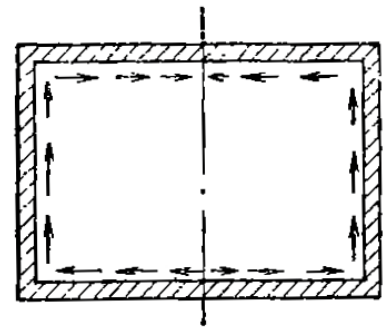


Рис. 25.4. Силві лінії поперечного струму хвилі TE_{10} на стінці $y = b$ хвилевода

Загальний вид силових ліній струму для фіксованого моменту часу представлено на рис. 25.5. У точках, позначених цифрами 1, 2, ..., струми провідності переходять у струми зсуву.

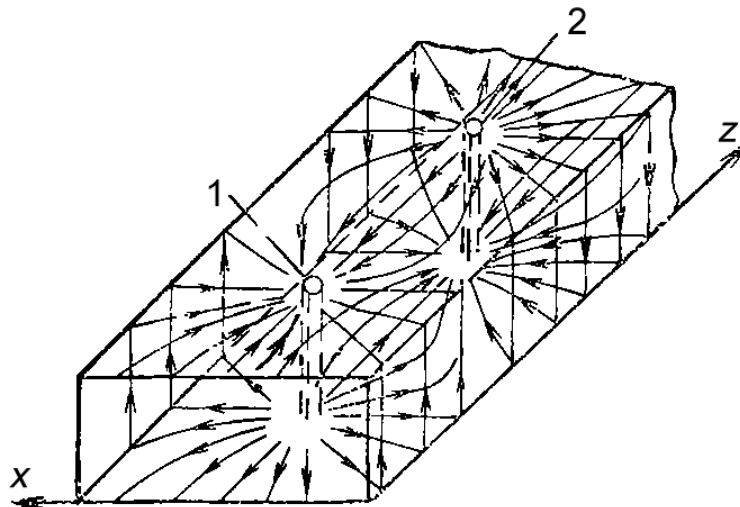


Рис. 25.5. Епюри силових ліній струму TE_{10} на стінках хвилевода

Визначимо величину потужності, яка проходить через поперечний переріз S_0 хвилевода.

$$P = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_0} \dot{E}_y \dot{H}_x^* dS = \frac{1}{4} \omega \mu A_{10}^2 \beta_{10} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 ab. \quad (25.29)$$

За допомогою цього виразу можна обчислити параметр $A_{10} = |\dot{A}_{10}|$ як функцію переданої потужності.

Розрахуємо середню енергію поля на одиницю довжини хвилеводу. Дана величина дорівнює

$$W_0 = W_{0e} + W_{0m} = \int_{S_0} (w_e)_{cp} dS + \int_{S_0} (w_m)_{cp} dS,$$

де W_{0e} і W_{0m} – середні енергії електричного та магнітного полів на одиницю довжини хвилеводу. $(w_e)_{cp}$ і $(w_m)_{cp}$ – середні щільності енергії електричного та магнітного полів, які розраховуються за формулами:

$$(w_e)_{cp} = \frac{\varepsilon}{4} \omega^2 \mu^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 A_{10}^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x;$$

$$(w_m)_{cp} = \frac{\mu}{4} (|\dot{H}_x|^2 + |\dot{H}_z|^2) = \frac{\mu}{4} A_{10}^2 \left[\beta_{10}^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x + \cos^2 \frac{\pi}{a} x \right],$$

звідки

$$W_{0e} = \frac{\varepsilon}{4} \omega^2 \mu^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 A_{10}^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi}{a} x dx dy = \frac{\varepsilon}{8} \omega^2 \mu^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 A_{10}^2 ab;$$

$$W_{0m} = \frac{\mu}{4} A_{10}^2 \int_0^a \int_0^b \left[\left(k^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right) \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \times \sin^2 \frac{\pi}{a} x + \cos^2 \frac{\pi}{a} x \right] dx dy = \frac{\varepsilon}{8} \omega^2 \mu^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 A_{10}^2 ab;$$

$$W_0 = \frac{\varepsilon}{4} \omega^2 \mu^2 A_{10}^2 ab. \quad (25.30)$$

Згідно з наведеними формулами енергії, збережені у електричному та магнітному полях хвилевода, рівні між собою. Проте така рівність має місце тільки в тому випадку, коли поле є хвильовим, тобто коли частота коливань $f > f_{кр}$. Розрахунок показує, що при $f < f_{кр}$ середня енергія електричного поля вже не дорівнює середній енергії магнітного поля.

Відношення P/W_0 , як відомо, є швидкістю передавання енергії в напрямній системі. Розрахувавши це відношення, отримаємо

$$\frac{P}{W_0} = \frac{\beta_{10}}{\omega \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2} = v_{zp}.$$

Окрім того, поле хвилі TE_{10} у прямокутному хвилеводі може бути представлено як сукупність полів двох плоских хвиль. Для цього вираз (25.28) запишемо інакше:

$$\begin{cases} \dot{E}_y = -\omega \mu \frac{a}{2\pi} \left[e^{-i\left(-\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} \right] \dot{A}_{10}; \\ \dot{H}_x = \beta_{10} \frac{a}{2\pi} \left[e^{-i\left(-\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} \right] \dot{A}_{10}; \\ \dot{H}_z = \frac{1}{2} \left[e^{-i\left(-\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{a}x + \beta_{10}z\right)} \right] \dot{A}_{10}, \end{cases} \quad (25.31)$$

звідки

$$\dot{E}_y = \dot{E}_y^{(1)} + \dot{E}_y^{(2)};$$

$$\dot{H}_x = \dot{H}_x^{(1)} + \dot{H}_x^{(2)};$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_z^{(1)} + \dot{H}_z^{(2)}.$$

Позначивши $\beta_{10} / k = \sin \varphi$ і $\pi / ak = \cos \varphi$, із (25.31) отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{E}_y^{(1)} = -\frac{\omega\mu a}{2\pi} \dot{A}_{10} e^{-ik(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \\ \dot{H}_x^{(1)} = \frac{\beta_{10} a}{2\pi} \dot{A}_{10} e^{-ik(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \\ \dot{H}_z^{(1)} = \frac{1}{2} \dot{A}_{10} e^{-ik(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \end{cases} \quad (25.32)$$

$$\begin{cases} \dot{E}_y^{(2)} = \frac{\omega\mu a}{2\pi} \dot{A}_{10} e^{-ik(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \\ \dot{H}_x^{(2)} = -\frac{\beta_{10} a}{2\pi} \dot{A}_{10} e^{-ik(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \\ \dot{H}_z^{(2)} = \frac{1}{2} \dot{A}_{10} e^{-ik(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}. \end{cases} \quad (25.33)$$

Множник $e^{-ik(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}$ у виразах (25.32), (25.33) відповідає плоскій хвилі, яка розповсюджується у напрямку орта \bar{r}_1 , який утворює з осями x , y , z кути $\pi - \varphi$, $\pi/2$, $\pi/2 - \varphi$, рис. 25.6. Вектор $\dot{E}^{(1)}$ у полі, що описується формулою (25.32) перпендикулярний напрямку \bar{r}_1 . В цьому легко переконатися, якщо обчислити скалярний добуток $(\dot{E}^{(1)}, \bar{r}_1)$, який буде дорівнювати нулю. Вектор $\dot{H}^{(1)}$ лежить у площині xOz і також є перпендикулярним до орта \bar{r}_1 .

Модуль вектора $\dot{H}^{(1)}$ має вигляд

$$|\dot{H}^{(1)}| = \sqrt{|\dot{H}_x^{(1)}|^2 + |\dot{H}_z^{(1)}|^2} = A_{10} \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} \beta_{10}^2 a^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2\pi} ka A_{10}.$$

Тоді, відношення

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{H}_1} = -\frac{\dot{E}_y^{(1)}}{\dot{H}_x^{(1)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0.$$

Таким чином, поле (25.32) є полем лінійно-поляризованої плоскої хвилі, яка рухається у напрямку \bar{r}_1 .

Аналогічно можна показати, що вирази (25.33) визначають поле іншої плоскої хвилі, яка розповсюджується у напрямку \bar{r}_2 , рис. 25.6. Зрозуміло, що ці хвилі існують не у всьому просторі, а тільки там, де зосереджена хвиля TE_{10} , тобто в області, обмеженій стінками хвилевода.

Сукупність двох таких плоских хвиль можна розглядати як результат багаторазового відбивання однієї плоскої хвилі при позмінному її падінні на ідеально провідні площини $x=0$ і $x=a$. Рух цієї хвилі у проміжках між площинами характеризується променями, зображеними на рис. 25.7.

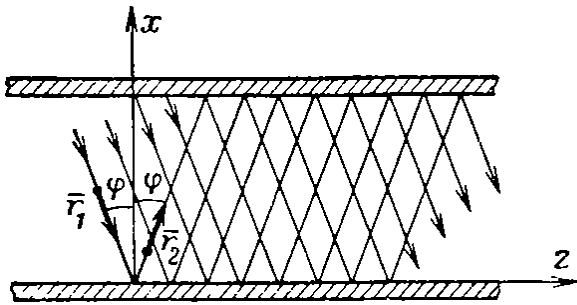


Рис. 25.6. Епюр напрямку розповсюдження плоских хвиль, утворюючих хвилю TE_{10}

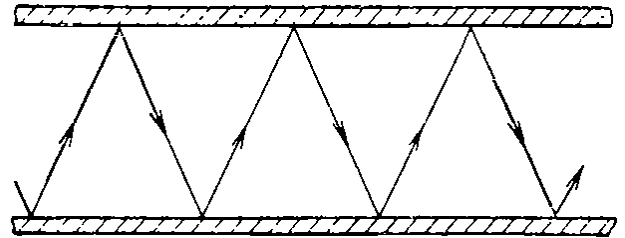


Рис. 25.7. Епюр багаторазового відбивання плоскої хвилі від паралельних пластин (бічних стінок хвилевода)

Кут падіння хвилі на відбиваючу поверхню визначається виразом

$$\varphi = \arccos \pi / ak = \arccos \lambda / 2a \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 / \varepsilon \mu} = \arccos (\lambda / \lambda_{кр}).$$

Звідки випливає, що при $\lambda = \lambda_{кр}$ плоска хвиля розповсюджується у напрямках, перпендикулярних вздовжній осі хвилеводу (кут $\varphi = 0$). У цьому випадку, перенесення енергії електромагнітного поля вздовж хвилеводу відсутнє. З останнього виразу випливає, що $\lambda > \lambda_{кр}$ розповсюдження хвилі TE_{10} у хвилеводі стає неможливим, тому що $\cos \varphi$ повинен бути більше одиниці.

Запитання

1. Наведіть визначення терміну «хвилевод».
2. Назвіть складові конструкції хвилевода, вздовж яких протікають електричні струми та передається енергія електромагнітного поля.
3. Перелічіть типові структури хвилеводів.
4. Вкажіть перевагу хвилеводів у порівнянні з іншими лініями, призначеними для передавання електромагнітної енергії.
5. Назвіть типи хвиль, які можуть існувати в прямокутному хвилеводі.
6. Назвіть напрямок у якому розповсюджується електромагнітна енергія в прямокутному хвилеводі і визначте тип хвилі, який встановлюється у всіх інших напрямках можливого розповсюдження енергії.
7. Наведіть умову, яка визначає можливість розповсюдження енергії у виді поперечної хвилі у хвилеводі.
8. Вкажіть залежність між параметрами хвиль m , n і його критичною частотою.
9. Зазначте, якими повинні бути значення параметрів хвилевода m , n за умови мінімальних розмірів хвилевода.
10. Наведіть назву сукупності всіх можливих електромагнітних хвиль, що можуть передаваись хвилеводом.

Теорія поля: Навчально-методичний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізації «Електронні компоненти та системи» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Є. В. Вербицький. – Електронні текстові данні (1 файл: 3,07 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 262 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 23.11.2017 р.) за поданням Вченої ради інституту/факультету (протокол № 10/2017 від 30.10.2017 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Укладач: *Вербицький Євген Володимирович*, канд. техн. наук

Відповідальний редактор: *Ромашко В.Я.*, проф. кафедри промислової електроніки, д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: *Кисельова А.Г.*, доц. кафедри системного проектування, канд. техн. наук
Безносик О.Ю., доц. кафедри системного проектування, канд. техн. наук