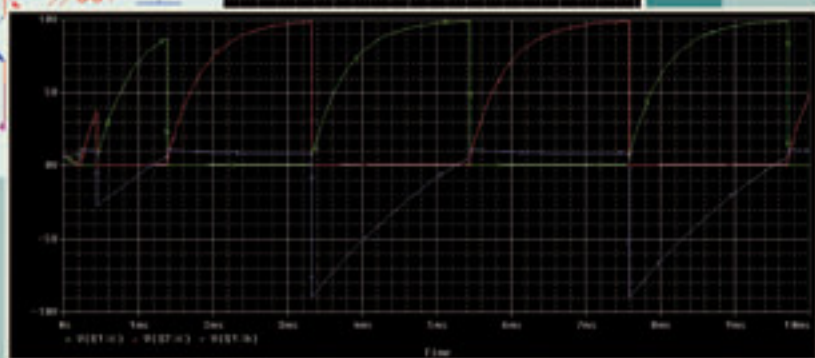
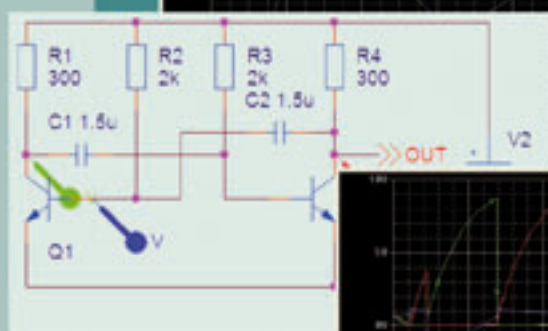
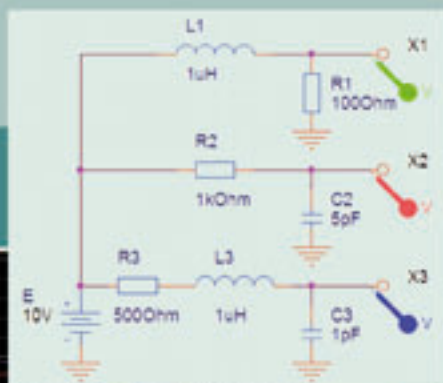


Ю. Я. Бобало, Б. А. Мандзій, П. Г. Стахів  
Л. Д. Писаренко, Ю. І. Якименко

# ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

електронний підручник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**Ю.Я. Бобало, Б.А. Мандзій, П.Г. Стахів,  
Л.Д. Писаренко, Ю.І. Якименко**

# ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

Електронний підручник для студентів вищих навчальних закладів

*За редакцією професора Ю.Я. Бобала*

Львів  
Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”  
2008

## ПЕРЕДМОВА

Цей підручник є третім, істотно доповненим виданням підручника з аналогічною назвою, що вийшов у 2006 р. Призначений для студентів вищих навчальних закладів України III–IV рівнів акредитації, які навчаються на базових напрямках “Електроніка”, “Комп’ютерна інженерія”, “Комп’ютерні науки”, “Лазерна та оптоелектронна техніка”, “Електронні апарати” і слухають курс “Основи теорії електронних кіл” або подібні за назвою курси.

Це видання підручника якісно відрізняється від попередніх передовсім тим, що воно охоплює всі види занять (лекції, практичні та лабораторні заняття) з теорії електронних кіл та уможливорює ефективний самоконтроль знань студента. Цьому сприяє насамперед те, що підручник належить також до класу електронних підручників, що дає змогу застосовувати сучасні технології комп’ютерного навчання.

Структурно підручник містить три частини: теоретична, практичні завдання із засобами самоконтролю, лабораторний практикум із комп’ютерними засобами імітаційного моделювання. Усі складові подаються, як у текстовій, так і в електронній версіях, причому електронні версії не є простими копіями відповідних текстових розділів, а мають форму, яка дає змогу максимально використовувати можливості сучасних комп’ютерів. Електронна версія записана на компакт-диску, який додається до підручника.

Теоретична частина підручника містить матеріал, який стосується основних понять теорії електронних кіл як різновиду електричних кіл. У ній викладено основні методи аналізу таких кіл, зокрема числові методи, орієнтовані на комп’ютерне моделювання електронних кіл. Значна увага приділена описанню функціонування типових компонент електронних кіл. Детальним є розділ, який стосується основ теорії сигналів. Він дає студентам змогу зрозуміти роль сигналів в електроніці та інформатиці, вивчити основні способи їхнього аналізу і перетворень та роль електронних кіл у цих процесах. Окремі розділи цього підручника дещо доповнено порівняно з попередніми виданнями конкретним матеріалом прикладного характеру.

Оригінальним та актуальним є матеріал останнього розділу, що стосується теорії дискретних та цифрових схем, який у компактній формі ознайомлює студентів із перспективними засобами оброблення та перетворення сигналів.

Кожний розділ підручника закінчується питаннями для самоконтролю та типовими задачами. Найважливіші висновки по кожному підрозділу винесено на поля. В електронній версії частина питань та деякі задачі подано окремим файлом. Також у текстовій частині для зручності користувачів поміщено інструкції щодо роботи з електронною версією підручника, подано приклади роботи з програмою самоконтролю знань та виконання імітаційної лабораторної роботи.

Зміст підручника відповідає навчальним програмам відповідних дисциплін, які читаються на вищеназваних базових напрямках. Його обсяг задовольняє вимоги, викладені в останніх нормативних документах Міністерства освіти і науки України.

Навчальний матеріал, викладений у підручнику, автори апробували упродовж багатьох років у навчальному процесі в Національному технічному університеті України “Київський політехнічний інститут” та Національному університеті “Львівська політехніка” на базових напрямках “Електроніка”, “Електронні прилади”, “Лазерна та оптоелектронна техніка”, “Комп’ютерна інженерія”, “Комп’ютерні науки”, “Геодезія, картографія та землеупорядкування”.

Автори висловлюють подяку рецензентам за зауваження та рекомендації, які сприяли поліпшенню змісту підручника.

Автори вдячні за значну допомогу у підготовці рукопису до видання інженеру С.Г. Самойловій та д-ру техн. наук С.Й. Рендзіяку і Р.О. Голощуку за вагомий внесок у реалізацію електронної версії підручника.

Зауваження та рекомендації стосовно змісту підручника автори просять надсилати на адресу: 79013, Львів–13, вул. С. Бандери, 12, кафедра теоретичної та загальної електротехніки Національного університету “Львівська політехніка”.

*Відповідальний редактор  
професор Ю.Я. Бобало*

# 1. Основні поняття теорії сигналів

## 1.1. Класифікація та способи математичного опису сигналів

Електричний сигнал як матеріальний носій інформації, являє собою певну змінну фізичну величину (напругу, струм, заряд, магнітний потік), яку називають **коливанням**.

Розрізняють дві основні групи сигналів: детерміновані та випадкові (стохастичні).

**Детермінованими** називають такі сигнали, значення яких у будь-який момент часу є точно відоме, тобто їх можна передбачити безпомилково. Такі сигнали не несуть нової інформації, проте їх використовують як тестові сигнали при дослідженні різних електронних кіл та пристроїв.

**Випадковими** називають такі сигнали, значення яких у будь-який момент часу неможливо передбачити абсолютно точно. Випадковими сигналами є різноманітні електромагнітні коливання атмосферного та промислового походження, а також сигнали інших передавальних станцій, які перешкоджають прийманню інформаційних сигналів. Отже, випадкові сигнали можна поділити на корисні та завади (шуми).

*Детерміновані та випадкові сигнали - дві основні групи сигналів.*

Зауважимо, що поділ усієї розмаїтості сигналів на детерміновані та випадкові є відносним. Наприклад, корисний сигнал, прийнятий на приймальному пункті, є для адресата випадковим, бо адресат наперед не знає змісту інформації, яку несе даний сигнал. У той же час цей сигнал на передавальному пункті вважається детермінованим, оскільки там точно відома інформація, яку несе сигнал.

Сигнали також прийнято класифікувати залежно від характеру зміни в часі та на множині значень.

Розрізняють сигнали неперервні та дискретні в часі. **Неперервні в часі** сигнали існують у кожен момент часу. **Дискретні в часі** сигнали появляються лише в певні моменти часу.

Крім того, розрізняють сигнали неперервні та дискретні на множині значень. **Неперервні на множині значень** сигнали можуть приймати неперервну множину значень (континуум значень) у заданому інтервалі, тобто їх миттєві значення можуть змінюватись плавно, хоча також можуть мати окремі стрибки. **Дискретні на множині значень** сигнали можуть приймати лише дискретні значення у заданому інтервалі, тобто їх миттєві значення можуть змінюватись лише стрибкоподібно.

На підставі цієї класифікації можна виділити такі чотири типи сигналів:

1. **Аналогові** або континуальні - неперервні в часі та на множині значень.
2. **Дискретизовані** - дискретні в часі та неперервні на множині значень.
3. **Квантовані** - неперервні в часі та дискретні на множині значень.
4. **Цифрові** - дискретні одночасно в часі та на множині значень.

Отже, будь-яке первинне повідомлення може бути перетворене у будь-який із чотирьох наведених вище типів сигналів. Наприклад, первинне повідомлення у вигляді неперервного звукового сигналу можна перетворити:

а) в аналоговий електричний сигнал  $s_A(t)$ , миттєві значення якого пропорційні силі звуку (рис.1.1а);

б) у дискретизований сигнал  $s_D(t)$ , який є послідовністю коротких імпульсів, амплітуди яких пропорційні силі звуку в дискретні моменти часу (рис.1.1 б);

в) у квантований сигнал  $s_K(t)$ , який є послідовністю стрибкоподібних змін з дозволеними фіксованими значеннями, що відповідають миттєвим значенням звукового сигналу з деякою допустимою похибкою (рис.1.1 в);

г) у цифровий сигнал  $s_U(t)$ , який є послідовністю коротких імпульсів, амплітуди яких можуть приймати дозвалені фіксовані значення, що відповідають миттєвим значенням звукового сигналу з певною допустимою похибкою (рис.1.1 г).

*Первинне повідомлення можна перетворити в один із чотирьох можливих типів сигналів: аналоговий, дискретизований, квантований, цифровий.*

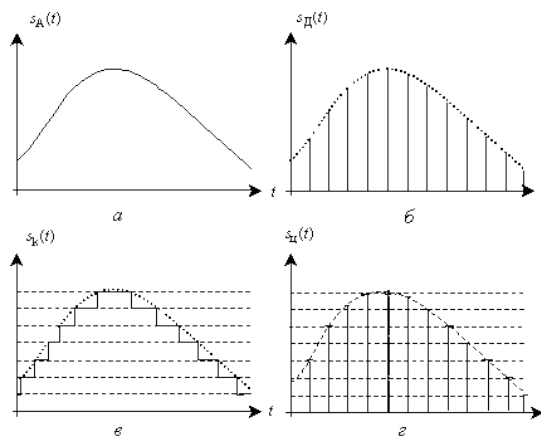


Рис.1.1 Аналоговий (а), дискретизований (б), квантований (в) та цифровий (г) сигнали, які відповідають одному й тому ж первинному повідомленню

Найбільш поширеними є аналогові та цифрові сигнали. Способи реалізації операцій пересилання, обробки, зберігання та відтворення інформації, представлені аналоговими та цифровими сигналами, докорінно різняться між собою, тому в інформаційній електроніці можна виділити два напрями - аналогову та цифрову електроніку, які займаються способами технічної реалізації, принципами побудови та методами проектування пристроїв і систем, які здійснюють різноманітні операції відповідно над аналоговими і цифровими сигналами.

*Аналогова та цифрова електроніка - два напрями інформаційної електроніки.*

Залежно від тривалості проміжку часу, протягом якого існує сигнал, розрізняють неперервні (довготривалі) та імпульсні сигнали.

**Неперервні сигнали** теоретично існують на нескінченному проміжку часу. Реальні сигнали мають початок і кінець і їх не можна вважати неперервними. Проте в багатьох випадках достатньо довготривалі сигнали вважають неперервними.

**Імпульсні сигнали** (одинокі імпульси) існують лише протягом короткого проміжку часу, а в усі інші моменти їх значення тотожно дорівнюють нулеві.

Всі реальні фізичні сигнали є дійсними функціями часу, але залежно від потреб методів аналізу найчастіше використовують такі способи їх математичного опису:

- а) опис сигналу як функції часу - часовий опис;
- б) опис сигналу як деякої функції частоти - частотний (спектральний) опис;
- в) опис сигналу в операторній формі - операторний опис.

У багатьох випадках для спрощення аналізу проходження сигналів через електронні кола доцільно описати сигнал як сукупність вибраних певним чином **елементарних (найпростіших) сигналів**. До елементарних сигналів належать: гармонічне коливання, одиничний стрибок (функція Хевісайда), дельта-імпульс (функція Дірака). Гармонічне коливання використовують при частотному (спектральному) описі сигналів, а одиничний стрибок та дельта-імпульс - при часовому описі, який інколи називають **динамічним описом**.

*Способи математичного опису реальних сигналів:*

- часовий
- частотний
- операторний.

## 1.2. Аналогові сигнали

У цьому підрозділі розглянемо способи математичного опису детермінованих аналогових сигналів, які найчастіше використовують для аналізу їхнього проходження через електронні кола.

### 1.2.1. Частотний (спектральний) опис сигналів

Вище зазначалось, що елементарним сигналом, який використовують при спектральному описі сигналів, є гармонічний сигнал, що задається виразом:

**Гармонічне коливання – елементарний сигнал, який використовують при частотному (спектральному) описі складних сигналів.**

$$s(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) = A_m \cos \psi(t), \quad (1.1)$$

де  $A_m$  – амплітуда (максимальне відхилення від нульового значення), розмірність якої збігається з розмірністю сигналу;

$\omega$  – кутова швидкість, яку вимірюють у радіанах за секунду;

$\varphi$  – початкова фаза, яку вимірюють в кутових одиницях (радіанах або градусах).

Аргумент гармонічного сигналу  $\psi(t) = \omega t + \varphi$  називають **повною фазою**.

Гармонічний сигнал належить до неперервних у часі сигналів, які теоретично існують на необмеженому часовому інтервалі ( $-\infty < t < \infty$ ), і задовольняють умову періодичності, тобто повторення миттєвих значень через певний проміжок часу, який називають **періодом**:

$$s(t) = s(t \pm nT), \quad (1.2)$$

де  $T$  – період сигналу,  $n$  – довільне ціле число.

Оскільки за період відбувається зміна повної фази на  $2\pi$  радіанів, то звідси випливає відоме співвідношення:

$$T = 2\pi / \omega = 1/f, \quad (1.3)$$

де  $f$  – частота коливань, яку вимірюють у герцах [Гц], і яка пов'язана з кутовою швидкістю  $\omega$  співвідношенням:  $\omega = 2\pi f$ .

Зауважимо, що кутову швидкість  $\omega$  часто називають кутовою частотою або просто частотою, і надалі будемо теж користуватись цим терміном.

Гармонічні сигнали мають цікаву властивість: похідна та інтеграл від гармонічного сигналу теж є гармонічним сигналом з тією самою частотою, амплітуда якого залежить від частоти, а початкова фаза зсунута на  $\pi/2$  відносно фази первинного сигналу.

**Гармонічний (частотний) спектр складного сигналу – подання цього сигналу сумою елементарних гармонічних коливань.**

Суть спектрального опису складних сигналів полягає у тому, що їх подають у вигляді нескінченної суми елементарних гармонічних сигналів з різними амплітудами, частотами та початковими фазами.

Сукупність усіх елементарних гармонічних сигналів, які в сумі утворюють заданий складний сигнал, називають **спектром** цього сигналу у базисі гармонічних коливань.

Так, складний сигнал який періодично повторюється з частотою  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , (де  $T_0 = 1/f_0$  – період повторення), можна описати рядом Фур'є у тригонометричній формі у базисі гармонічних функцій з кратними частотами:

$$s(t \pm nT_0) = s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k \cos(k\omega_0 t) + S_k \sin(k\omega_0 t)], \quad (1.4a)$$

або в компактнішій формі:

**Ряд Фур'є – спектральний опис складного періодичного сигналу.**

$$s(t \pm nT_0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad (1.4b)$$

де  $A_0$  – постійна складова (середнє значення сигналу за період);

$C_k$  та  $S_k$  – амплітуди косинусних та синусних складових  $k$ -го порядкового номера;

$A_k$ ,  $\varphi_k$  – амплітуда та початкова фаза  $k$ -ї гармонічної складової.

Ці величини визначають на підставі формул:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) dt; \quad (1.5)$$

$$C_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) \cos(k\omega_0 t) dt; \quad (1.6)$$

$$S_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) \sin(k\omega_0 t) dt; \quad (1.7)$$

Амплітуду  $A_k$  та початкову фазу  $\varphi_k$   $k$ -ї гармонічної складової визначають через  $C_k$  та  $S_k$ :

$$A_k = \sqrt{C_k^2 + S_k^2}; \quad (1.8)$$

$$\varphi_k = -\arctg(S_k/C_k). \quad (1.9)$$

Зауважимо, що вирази (1.4а) та (1.4б) справедливі, якщо функція  $s(t)$  задовольняє умови Діріхле, тобто протягом періоду вона може мати скінченну кількість розривів першого роду, а також скінченну кількість максимумів та мінімумів і задовольняє умову абсолютної інтегрованості:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Практично усі реальні сигнали задовольняють умови Діріхле, тому на практиці при спектральному поданні сигналів ці умови спеціально не акцентують.

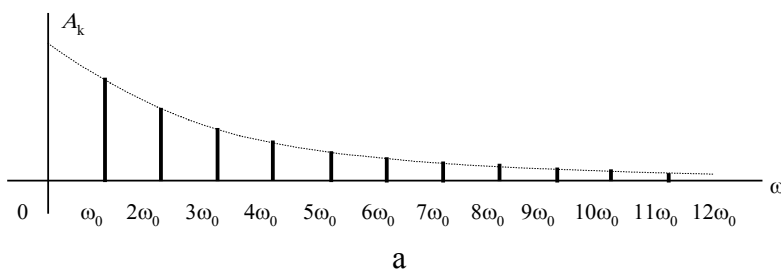
**Спектри періодичних сигналів є дискретними (лінійчастими).**

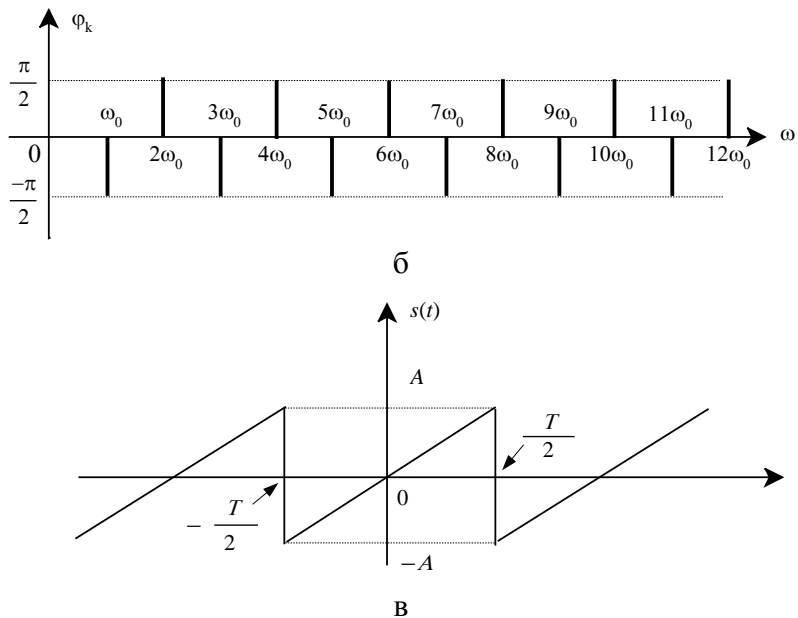
Отже, вирази (1.4а, 1.4б) описують спектр складного періодичного сигналу, який в загальному випадку складається з постійної складової  $A_0$  та нескінченної кількості гармонічних складових, частоти яких становлять дискретний ряд значень  $k\omega_0$  ( $k=1,2,3,\dots$ ), кратних основній частоті  $\omega_0$ . Ці складові називають **гармоніками періодичного сигналу**. Спектр, який складається з окремих складових, називають **дискретним** або **лінійчастим**. Гармоніку, яка відповідає номеру  $k=1$ , називають першою або основною гармонікою.

**Амплітудний та фазовий спектр – дві основні характеристики сигналів.**

У загальному випадку гармоніки, які входять до складу спектра, мають різні амплітуди та початкові фази. Щоб отримати наочне уявлення про спектр сигналу, використовують графічне зображення спектра у вигляді двох спектральних діаграм: амплітудної та фазової. Будуючи їх, на осі абсцис відкладають частоту, а на осі ординат – відповідно величини амплітуд  $A_k$  гармонік та їхні початкові фази  $\varphi_k$ .

На рис.1.2 для прикладу зображено амплітудну (а) та фазову (б) спектральні діаграми періодичного сигналу, поданого на рис. 1.2, в.



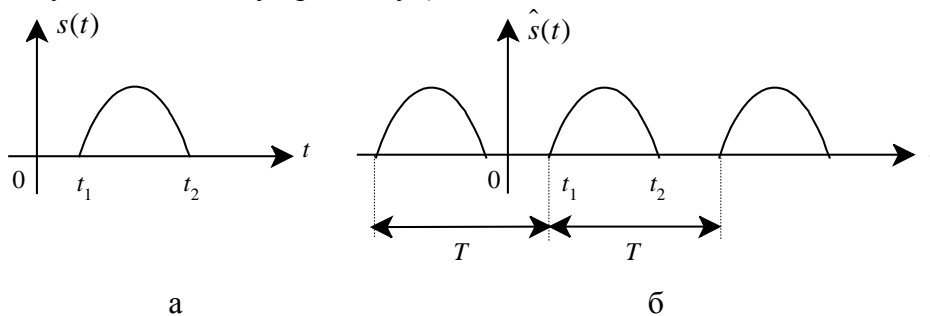


**Рис.1.2.** Ампліудна (а) та фазова (б) спектральні діаграми періодичного сигналу (в), який повторюється з частотою  $\omega_0 = 2\pi/T$

Із спектральних діаграм видно, що відстань між двома сусідніми гармоніками по осі частот (тобто відстань між вертикальними лініями) дорівнює значенню частоти повторення  $\omega_0$  періодичного сигналу. Це означає, що зі збільшенням частоти  $\omega_0$  повторення або зменшенням періоду  $T_0$  сигналу відстань між вертикальними лініями на спектральних діаграмах збільшується (спектр стає рідшим, але займає ширший діапазон частот) і навпаки. Крім того, як впливає з виразів (1.5) – (1.7), зміна частоти повторення (або періоду) сигналу впливає також і на величину амплітуд гармонік.

Згадану властивість спектра періодичного сигналу зручно використати під час визначення спектрів імпульсних сигналів, які не є періодичними.

Прийmemo, що імпульсний сигнал  $s(t)$  має форму поодинокого імпульсу (рис.1.3, а), який відрізняється від нуля на часовому проміжку  $(t_1, t_2)$ .



**Рис.1.3.** До спектрального аналізу імпульсного сигналу

**Імпульсний (поодинокий) сигнал як граничний випадок періодичного сигналу при  $T \rightarrow \infty$ .**

Перетворимо заданий поодинокий імпульс на періодичний сигнал  $\hat{s}(t)$  повторенням його з довільним періодом  $T > (t_2 - t_1)$ , як показано на рис.1.3, б. Отриману періодичну функцію  $\hat{s}(t)$  розкладемо в ряд Фур'є, причому коефіцієнти  $A_0, A_k, C_k, S_k$  будуть тим меншими, чим більшим буде вибрано інтервал  $T$  як період. Це впливає з виразів (1.5) – (1.7). Якщо період  $T$  збільшувати до нескінченності, то всі імпульси, крім первинного, змістяться у нескінченність і залишаться лише первинний імпульс  $s(t)$ .

Отже,



$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{s}(t) \quad (1.10)$$

При тому одержимо нескінченно малі амплітуди гармонічних складових, сума яких дає початкову неперіодичну функцію  $s(t)$ , задану в інтервалі  $(t_1, t_2)$ .

Оскільки при  $T \rightarrow \infty$  основна частота функції  $\omega_0 = (2\pi/T) \rightarrow 0$ , то це означає, що відстань по осі частот між спектральними лініями на спектральних діаграмах (яка дорівнює основній частоті  $\omega_0$ ) стає нескінченно малою, а спектр – суцільним. Отже, доходимо висновку, що при спектральному поданні імпульсних неперіодичних сигналів отримуємо суцільний спектр, який складається з нескінченно великої кількості гармонічних коливань з нескінченно малими амплітудами, частота яких неперервно змінюється від нуля до нескінченності.

Опишемо сказане математично. Амплітуди косинусних та синусних складових  $k$ -ї гармоніки періодичного сигналу  $\hat{s}(t)$  запишемо виразами:

$$\hat{E}_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{s}(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad (1.11)$$

$$\hat{S}_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{s}(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad (1.12)$$

де  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

Якщо  $T$  зростає до нескінченності, то частота  $\omega_0$  прямуватиме до нуля, і її необхідно замінити нескінченно малою величиною  $d\omega$ . Крім того, добуток  $k\omega_0$  може набувати довільних значень і стане неперервною (а не дискретною) функцією  $k$ , тому величину  $k\omega_0$  необхідно розглядати як неперервну змінну частоту  $\omega$ , яка змінюється від нуля до нескінченності.

Враховуючи це, отримуємо вирази для малих амплітуд косинусних та синусних складових:

***Косинус - перетворення та синус - перетворення Фур'є – складові спектральної характеристики імпульсних сигналів.***

$$dC(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{E}_k = \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) \cdot dt, \quad (1.13)$$

$$dS(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{S}_k = \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) \cdot dt, \quad (1.14)$$

Введемо позначення:

$$G_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt, \quad (1.15)$$

$$G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt, \quad (1.16)$$

Формули (1.15) та (1.16) називають відповідно косинус-перетворенням Фур'є та синус-перетворенням Фур'є.

Результуючі амплітуди складових спектра на довільній частоті  $\omega$  дорівнюють:

$$dA(\omega) = \sqrt{[dC(\omega)]^2 + [dS(\omega)]^2} = \frac{d\omega}{\pi} G(\omega), \quad (1.17)$$

а їхні початкові фази:

***Спектральна густина – основна спектральна характеристика імпульсних сигналів.***

$$\psi(\omega) = -\arctg[dS(\omega)/dC(\omega)] \quad (1.18)$$

У (1.17) позначено:

$$G(\omega) = \sqrt{G_c^2(\omega) + G_s^2(\omega)} \quad (1.19)$$

Функцію  $G(\omega)$  називають **модулем спектральної густини**, що описує амплітудний спектр імпульсного сигналу, а функцію  $\psi(\omega)$ , яка описує фазовий спектр цього сигналу, називають **аргументом спектральної густини**.

Зауважимо, що спектральна густина – не спектр, а лише спектральна характеристика імпульсного сигналу, оскільки на конкретній частоті амплітуда відповідної спектральної складової дорівнює нулеві.

Отже, імпульсний (неперіодичний) сигнал – це сукупність нескінченної кількості гармонічних складових із нескінченно малими амплітудами  $dA(\omega)$ , початковими фазами  $\psi(\omega)$ , частота яких неперервно змінюється від нуля до нескінченності, що математично можна записати так:

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cdot \cos[\omega t + \psi(\omega)] d\omega. \quad (1.20)$$

### 1.2.2. Часовий (динамічний) опис сигналів

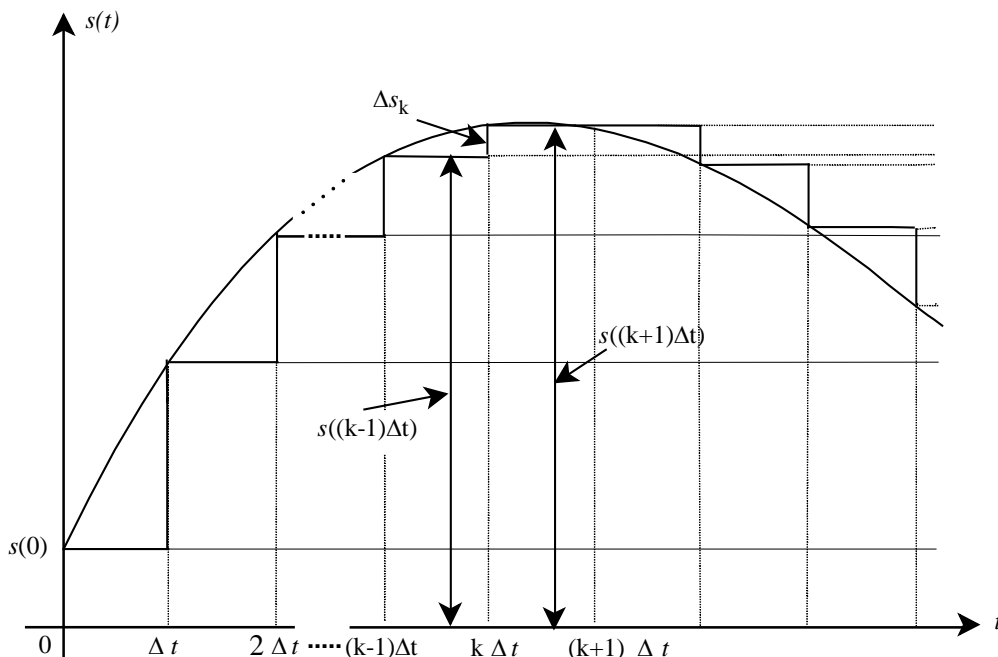
Як елементарні сигнали у часовому описі складних сигналів використовують одиничний стрибок та дельта-імпульс.

**Одиничний стрибок (функція Хевісайда)** загалом задається виразом:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } t < t_0 \\ 1 & \text{якщо } t \geq t_0 \end{cases} \quad (1.21)$$

**Функція Хевісайда як елементарний сигнал.**

Застосування одиничного стрибка для математичного опису аналогових сигналів полягає в тому, що спочатку замінюють (апроксимують) аналоговий сигнал  $s(t)$  ступінчастим сигналом  $\hat{s}(t)$ , який утворюється як сума вписаних у сигнал  $s(t)$  та зміщених на  $\Delta t$  елементарних стрибкоподібних сигналів, амплітуди яких пропорційні до деяких вагових коефіцієнтів  $\Delta s_k$  (див. рис. 1.4).



**Рис.1.4.** Заміна аналогового сигналу ступінчастим

**Часовий опис сигналів як послідовності стрибкоподібних змін.**

Як видно з рис. 1.4, значення вагових коефіцієнтів  $\Delta s_k$  у моменти часу  $t_k=k\Delta t$  дорівнюють різниці відліків сигналу  $s(t)$  у поточний і попередній моменти часу:

$$\Delta s_k = s(t_k) - s(t_{k-1}) = s(k\Delta t) - s((k-1)\Delta t)$$

Поточне значення сигналу  $s(t)$  у довільний момент  $t \leq N\Delta t$  наближено описує вираз:

$$\begin{aligned} s(t) \approx \hat{s}(N\Delta t) &= s(0) \cdot 1(t) + [s(\Delta t) - s(0)] \cdot 1(t - \Delta t) + \\ &+ [s(2\Delta t) - s(\Delta t)] \cdot 1(t - 2\Delta t) + \dots = s(0) \cdot 1(t) + \\ &+ \sum_{k=1}^N [s(k\Delta t) - s((k-1)\Delta t)] \cdot 1(t - k\Delta t). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Похибка апроксимації сигналу  $s(t)$  ступінчастим сигналом  $\hat{s}(t)$  буде зменшуватись зі зменшенням інтервалу  $\Delta t$  і у граничному випадку ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) сигнали  $s(t)$  та  $\hat{s}(t)$  будуть збігатися. У такому разі динамічну модель аналогового сигналу  $s(t)$ , поданого через функції Хевісайда, отримуємо із (1.22) заміною дискретної змінної  $k\Delta t$  неперервною змінною  $\tau$ , малих приростів

$[s(k\Delta t) - s((k-1)\Delta t)]$  – диференціалом  $ds = \frac{ds}{d\tau} \cdot d\tau$ , знака суми – інтегралом:

$$s(t) = s(0) \cdot 1(t) + \int_0^t \frac{ds}{d\tau} \cdot 1(t - \tau) \cdot d\tau \quad (1.23)$$

Інший спосіб математичного опису аналогового сигналу ґрунтується на використанні дельта-імпульсу (функції Дірака), який в загальному випадку задається виразом:

**Функція Дірака як елементарний сигнал.**

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0 \\ \infty & \text{при } t = t_0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Дельта-імпульс є імпульсом нескінченно короткої тривалості з нескінченно великою амплітудою та площею, що дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (1.25)$$

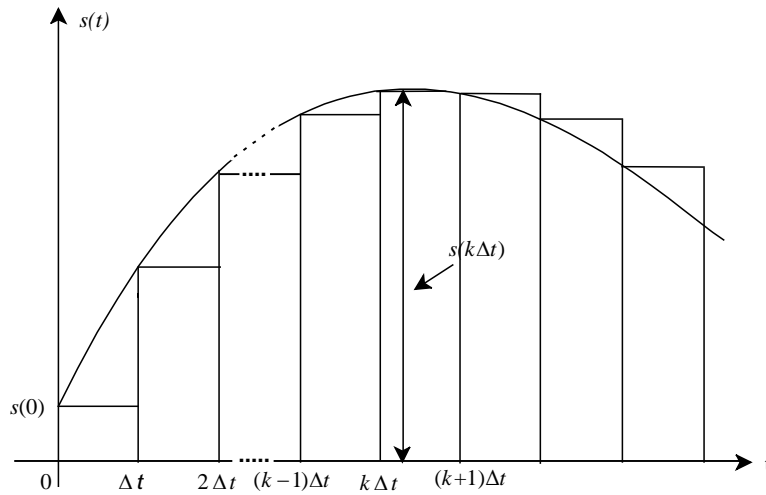
Функція Дірака є похідною від функції Хевісайда, а функція Хевісайда – інтегралом від функції Дірака:

$$\delta(t - t_0) = \frac{d(1(t - t_0))}{dt}, \quad (1.26)$$

$$1(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt \quad (1.27)$$

Використовуючи дельта-імпульс, аналоговий сигнал  $s(t)$  апроксимують сигналом  $\hat{s}(t)$ , що утворений зміщеними в часі на інтервали  $\Delta t$  прямокутними імпульсами заввишки  $s_k = s(t_k) = s(k\Delta t)$  та тривалістю  $\Delta t$ , як показано на рис.1.5

**Часовий опис сигналів як послідовності прямокутних імпульсів.**



**Рис.1.5.** Апроксимація аналогового сигналу послідовністю прямокутних імпульсів

Розглядаючи кожний елементарний імпульс як різницю двох стрибків, зсунутих у часі один відносно одного на інтервал  $\Delta t$ , можемо наближено записати поточне значення сигналу  $s(k\Delta t)$  в інтервалі  $k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t$  у вигляді:

$$\hat{s}(k\Delta t) \approx s(k\Delta t) \cdot [1(t - k\Delta t) - 1(k + 1)\Delta t)],$$

а для сигналу загалом:

$$s(t) \approx \hat{s}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k\Delta t) \cdot [1(t - k\Delta t) - 1(t - (k + 1)\Delta t)]. \quad (1.28)$$

Похибка апроксимації  $s(t)$  сигналом  $\hat{s}(t)$  буде зменшуватися у разі зменшення інтервалу  $\Delta t$ . У граничному випадку ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), замінюючи у (1.28) дискретну змінну  $k\Delta t$  неперервною змінною  $\tau$ , знак суми – інтегралом, та враховуючи (1.26), отримуємо динамічну модель аналогового сигналу з використанням дельта-функції:

$$s(t) = \int_0^t s(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.29)$$

Примітка: для одержання формули (1.29) використано співвідношення:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [1(t - k\Delta t) - 1(t - (k + 1)\Delta t)] \cdot \Delta t = \frac{d(1 - \tau)}{dt} \cdot dt$$

На закінчення зауважимо, що подання складного сигналу сукупністю елементарних однотипних сигналів дає змогу застосувати для аналізу електричних кіл принцип накладання (суперпозиції), згідно з яким реакція лінійного електричного кола на дію цього складного сигналу дорівнює сумі реакцій, викликаних кожним елементарним сигналом. Використання цього принципу істотно полегшує аналіз електричних кіл і є основою багатьох поширених методів аналізу.

### 1.2.3. Операторний опис сигналів

**Перетворення Лапласа як узагальнення перетворення Фур'є.**

Вище зазначалось, що спектральний опис сигналу  $s(t)$  можливий, якщо він задовольняє умову абсолютної інтегрованості. Проте чимало важливих сигналів, таких, як одиничний стрибок, гармонічне коливання та багато інших, не задовольняють цієї умови, і тому для них не можна отримати спектрального опису на підставі перетворення Фур'є. Для спектрального подання таких сигналів можна застосувати перетворення Лапласа, яке є узагальненням перетворення Фур'є і

ґрунтується на використанні поняття комплексної частоти. Річ у тім, що при перетворенні Фур'є сигнал описують у вигляді суми нескінченної кількості елементарних гармонічних складових, кожна з яких змінюється у часі за законом  $\exp(j\omega t)$ .

**Примітка:** нагадаємо, що згідно з відомою формулою Ейлера гармонічне коливання можна подати сумою двох експонент з уявними показниками:

$$\cos(\omega t) = [\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)]/2,$$

$$\sin(\omega t) = [\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)]/2j.$$

**Зображення Лапласа дає змогу отримати спектральний опис сигналів, визначених при  $t \geq 0$ , які не задовольняють умову абсолютної інтегрованості.**

Узагальнення перетворення Фур'є полягає в тому, що замість експоненційних сигналів з уявними показниками  $j\omega$  застосовують експоненційні сигнали з комплексними показниками  $\exp(pt)$ , де  $p = \sigma + j\omega$  – комплексне число, яке прийнято називати **комплексною частотою**.

Використання поняття комплексної частоти дає змогу отримати спектральний опис сигналів, математичні моделі яких не задовольняють умову абсолютної інтегрованості. Ці сигнали повинні бути визначені при  $t \geq 0$ , а при від'ємних значеннях  $t$  – дорівнювати нулеві. Перетворення Лапласа для таких сигналів описують виразом:

$$F(p) = \int_0^{\infty} s(t) \exp(-pt) dt = \int_0^{\infty} s(t) \exp(-\sigma t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1.30)$$

Зауважимо, що цей інтеграл існує завдяки тому, що функція  $s(t) \cdot \exp(-\sigma t)$  задовольняє умову абсолютної інтегрованості при  $t > 0$ , а з іншого боку, тому, що при  $t < 0$  функція  $s(t) = 0$  (у протилежному випадку множник  $\exp(-\sigma t)$  міг би призвести до розходження інтеграла).

Сигнал  $s(t)$  називають **оригіналом**, а функцію  $F(p)$  – **зображенням оригіналу за Лапласом (або зображенням Лапласа)**.

Не наводячи доведення, зазначимо, що маючи зображення  $F(p)$ , можна знайти оригінал  $s(t)$  на підставі формули:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(p) \exp(pt) dp \quad (1.31)$$

Інтегрування в площині комплексної змінної  $p$  здійснюється уздовж нескінченної вертикальної лінії, розміщеної з правого боку від уявної осі на відстані  $\sigma$ . Детальніше це питання розглянуто в теорії функцій комплексної змінної.

Формули (1.30) та (1.31) називають відповідно **прямим** та **зворотним перетворенням Лапласа**.

На практиці для знаходження оригіналів та зображень сигналів широко використовують таблиці, в яких наведено зображення за Лапласом для значної кількості оригіналів.

Взаємну відповідність між оригіналом  $s(t)$  та його зображенням  $F(p)$  за Лапласом позначимо:  $s(t) \div F(p)$ .

Для прикладу наведемо таблицю зображень Лапласа для деяких поширених сигналів.

	<b>Оригінал <math>s(t)</math></b>	<b>Зображення <math>F(p)</math></b>
1	Множення сигналу на константу: $A \cdot s(t)$	$A \cdot F(p)$
2	Диференціювання сигналу: $\frac{ds(t)}{dt}$	$p \cdot F(p) - s(0)$
3	Інтегрування сигналу: $\int_0^t s(t) dt$	$F(p)/p$
4	Зсув сигналу в часі: $s(t-t_0)$	$F(p) \exp(-pt_0)$
5	Одиничний стрибок: $1(t)$	$1/p$

6	Дельта-імпульс: $\delta(t)$	1
7	Гармонічні коливання (якщо $t \geq 0$ ) $\cos(\omega t)$ $\sin(\omega t)$	$p/(p^2 + \omega^2)$ $\omega/(p^2 + \omega^2)$
8	Експоненційні сигнали (якщо $t \geq 0$ ): $e^{\pm \alpha t}$ $(1 - a^{-\alpha t})/\alpha$	$1/(p \mp \alpha)$ $1/p(p + \alpha)$

Таблиця 1.1

На закінчення зауважимо, що між зображенням Лапласа та спектральною функцією сигналу існує такий взаємозв'язок: якщо у виразі для зображення Лапласа замість  $p$  підставити  $j\omega$ , то отримуємо спектральну функцію цього сигналу.

*Заміною  $p=j\omega$  у зображенні Лапласа отримуємо спектральну функцію  $G(j\omega)$  сигналу  $s(t)$ .*

Операторний опис сигналів знайшов широко застосовується в аналізі процесів у лінійних електричних колах, оскільки він дає змогу звести диференціальні рівняння кола до алгебричних, записаних відносно операторних зображень сигналів, що істотно спрощує знаходження розв'язку в операторній формі. Перехід від зображення шуканого сигналу до оригіналу здійснюють, як правило, на підставі таблиць операторних зображень.

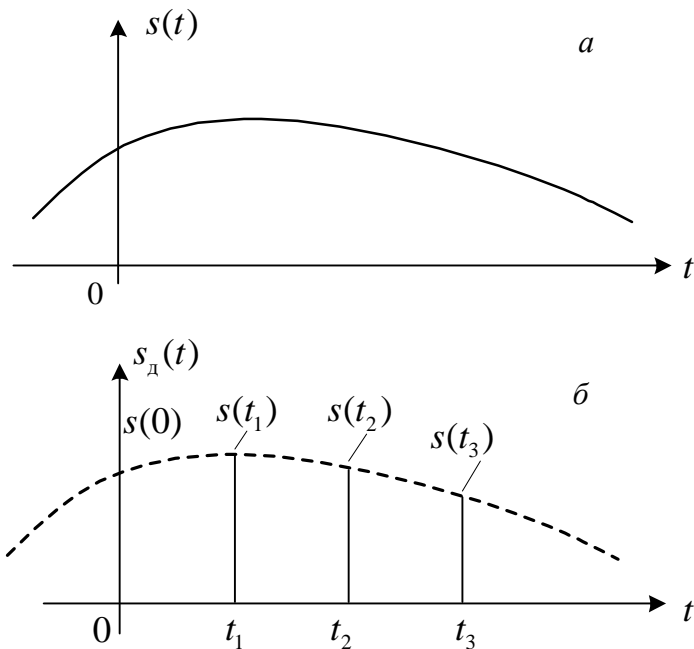
### 1.3. Дискретизовані та цифрові сигнали

Особливістю розглянутих раніше аналогових сигналів є те, що сукупність їхніх миттєвих значень на довільному часовому інтервалі описується неперервною (нескінченною) множиною точок, кожна з яких відображає миттєве значення сигналу у відповідний момент часу і може набувати неперервну (нескінченну) множину значень. Отже, уся множина точок містить у собі нескінченну кількість інформації, тому вона часто малоприматна для сприйняття, аналізу та ефективного оброблення і потребує стискання первинної інформації без істотної втрати корисної інформації.

*Дискретизація – подання сигналу скінченною множиною миттєвих значень.*

Перетворення аналогового сигналу в дискретний у часі чи цифровий сигнал еквівалентне поданню його скінченною множиною точок, що полегшує зберігання та оброблення інформації, дає змогу збільшувати кількість сигналів, які поширюються по одному й тому самому каналу зв'язку (ущільнювати канали зв'язку), стискати первинну інформацію тощо.

**Дискретизацією** називають таке перетворення аналогового сигналу  $s(t)$ , за якого його описують множиною миттєвих значень  $s(t_i)$  у фіксовані моменти часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$  (рис.1.6)



**Рис.1.6.** Дискретизація аналогового сигналу

Миттєві значення  $s(t_i)$  дискретизованого сигналу називають **відліками**, а часовий інтервал  $\Delta t = t_i - t_{i-1} = T_0$  між двома сусідніми відліками – **інтервалом дискретизації**. Очевидно, що збільшення інтервалу дискретизації збільшує пропускну здатність каналу зв'язку, але одночасно збільшує і похибку відтворення первинного сигналу  $s(t)$ . Тому інтервали дискретизації вибирають з урахуванням того, щоб на підставі наявних відліків  $s(t_i)$  можна відтворити із заданою точністю первинну функцію  $s(t)$  на приймальному пункті.

Здебільшого для сигналів, які утворюються у джерелах інформації, характерні порівняно повільні зміни в часі миттєвих значень та велика тривалість. Аналіз спектральних властивостей таких сигналів показує, що їхній спектральний склад здебільшого зосереджується в обмеженій смузі частот  $0 \dots \omega_b$ , а спектральні складові з частотами, вищими від  $\omega_b$ , практично відсутні. Такі сигнали прийнято називати **сигналами з обмеженим спектром**. Саме ця властивість дає змогу замінити, а відтак знову відновити із заданою точністю неперервний сигнал, заданий скінченною множиною відліків, узятих у дискретні моменти часу.

**Умови вибору інтервалу дискретизації сигналу з обмеженим спектром визначає теорема відліків (теорема Котельникова – Шеннона).**

Умови вибору інтервалу дискретизації  $\Delta t$ , який забезпечує відновлення із заданою точністю первинного аналогового сигналу  $s(t)$ , формулює теорема відліків (теорема Котельникова – Шеннона): неперервний сигнал  $s(t)$ , у спектрі якого відсутні частоти, вищі від  $\omega_b$ , повністю визначається послідовністю своїх миттєвих значень, узятих через інтервал часу  $\Delta t \leq \pi/\omega_b$ , і може бути поданий рядом:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \cdot \varphi_k(t), \quad (1.32)$$

в якому базисні функції мають вигляд:

$$\varphi_k(t) = \sin[\omega_b(t - k\Delta t)] / [\omega_b(t - k\Delta t)] \quad (1.33)$$

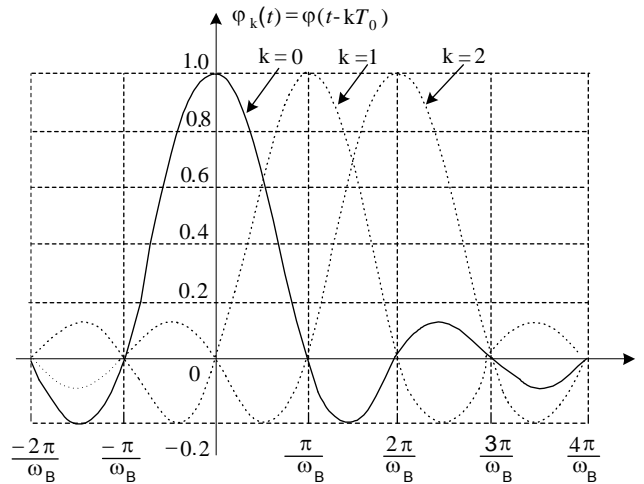
Ряд (1.32) відомий як ряд Котельникова. Він дає змогу визначити первинний сигнал у довільний момент часу на підставі відліків його миттєвих значень, які слугують ваговими коефіцієнтами при базисних функціях.

Базисні функції мають таку властивість:

$$\varphi_k(t - n\Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } n = k; \\ 0 & \text{якщо } n \neq k, \end{cases}$$

де  $n$  – ціле додатне або від’ємне число.

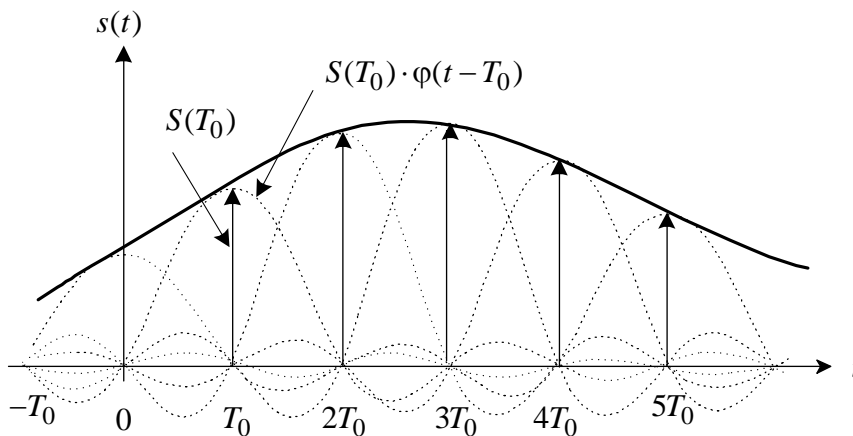
На рис.1.7 зображено графіки базисних функцій для різних значень  $k$ , звідки бачимо, що кожна базисна функція  $\varphi_k(t)$  зсунута стосовно найближчої сусідньої функції  $\varphi_{k-1}(t)$  або  $\varphi_{k+1}(t)$  на час  $T_0 = \pi/\omega_B$ , який відповідає інтервалові дискретизації  $\Delta t$ .



**Рис.1.7.** Графіки базисних функцій  $\varphi(t-kT_0)$

Відновлення аналогового сигналу  $s(t)$  на підставі ряду (1.32) зображено на рис.1.8, звідки бачимо, що точні значення сигналу  $s(t)$  отримуємо в точках відліку  $\dots-2T_0, -T_0, 0, T_0, 2T_0$  і т.д. Між точками відліку сигнал визначається точно лише тоді, коли додаються усі члени ряду, кількість яких нескінченно велика.

**Точне відновлення аналогового сигналу можливе лише за умови урахування нескінченної кількості відліків.**



**Рис.1.8.** Відновлення аналогового сигналу на підставі послідовності відліків

**Математична модель дискретизованого сигналу вимагає використання функцій Дірака ( $\delta$ -функції).**

Якщо неперервний в часі сигнал  $s(t)$  з найвищою частотою спектра  $\omega_B$  подати через ряд (1.32) на деякому обмеженому інтервалі  $T_c$ , то кількість відліків  $N$  дорівнюватиме:  $N=T_c/\Delta t=T_c\omega_B/\pi$ . Цю кількість відліків називають **кількістю ступенів свободи сигналу**  $s(t)$ , або базою сигналу. У такому разі сигнал наближено описують рядом, який складається із скінченної кількості членів, і



він відтворюється точно лише в точках відліку  $k\Delta t$ . У проміжках між відліками з'являється похибка апроксимації, яка збільшується біля країв інтервалу  $T_c$ , де відкинуті члени ряду мають найбільше значення.

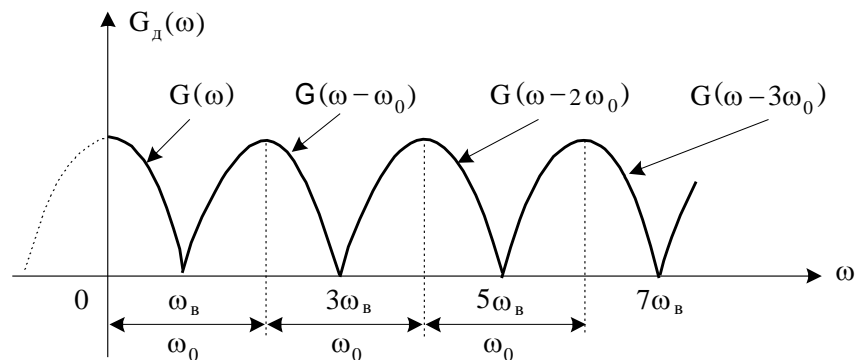
Математичну модель дискретизованого сигналу можна подати у вигляді добутку первинного неперервного аналогового сигналу  $s(t)$  і періодичної послідовності  $\delta$ -імпульсів:

**Правильний вибір частоти дискретизації забезпечує відтворення первинного сигналу за допомогою фільтра нижніх частот.**

$$s_D(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \quad (1.34)$$

Для спектрального опису дискретизованого сигналу  $s_D(t)$  застосовують до функції (1.34) пряме перетворення Фур'є.

Пропускаючи відповідні математичні викладки, зазначимо, що модуль спектральної функції  $G_D(\omega)$  дискретизованого сигналу  $s_D(t)$  має вигляд модуля спектральної функції  $G(\omega)$  первинного неперервного аналогового сигналу і повторюється з частотою дискретизації  $\omega_0 = 2\pi/\Delta t = 2\omega_B$ . Формування модуля спектральної функції  $G_D(\omega)$  дискретизованого сигналу показано на рис.1.9.



**Рис.1.9.** Модуль спектральної функції  $G_D(\omega)$  дискретизованого сигналу

На практиці частоту дискретизації  $\omega_D$  вибирають дещо вищою, ніж  $2\omega_B$  (тобто  $\Delta t < \pi/\omega_B$ ), оскільки у такому разі сусідні спектри не перекриваються між собою, що впливає із рис.1.9. Тоді можна відтворити первинний сигнал із дискретизованого, виділивши перший пелюсток спектра за допомогою фільтра нижніх частот.

Практично важливим є питання спектрального опису дискретизованого сигналу  $s_D(t)$ , який заданий на часовому інтервалі  $[0, T_c]$  своїми відліками  $s(0), s(\Delta t), s(2\Delta t), \dots, s((N-1)\Delta t)$ . Загальна кількість відліків дорівнює  $N = T_c/\Delta t$ . Спектральний опис такого сигналу ґрунтується на припущенні, що сигнал  $s_D(t)$  є періодичним з періодом  $T_c$ , тому застосовують його розклад у ряд Фур'є і знаходять відповідні амплітудні коефіцієнти.

**Спектральний опис дискретизованого сигналу ґрунтується на припущенні про періодичність цього сигналу.**

Часовий опис дискретизованого сигналу має вигляд:

$$s_D(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t) \cdot \Delta t \quad (1.35)$$

Комплексний ряд Фур'є такого сигналу описує формула:

$$s_D(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(j2\pi kt/T_c), \quad (1.36)$$

де комплексні амплітуди визначаємо за формулою:

$$A_k = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} s_d(t) \cdot \exp(-j2\pi kt / T_c) dt \quad (1.37)$$

Підставивши вираз (1.35) в (1.37) та враховуючи фільтрувальну властивість дельта-імпульсу, отримуємо:

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n\Delta t) \cdot \exp(-j2\pi kn / N). \quad (1.38)$$

Формулу (1.38) називають **дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ) розглянутого сигналу**. Вона визначає сукупність коефіцієнтів ряду Фур'є, які утворюють спектр дискретизованого сигналу.

**Кількість відліків дискретизованого сигналу дорівнює подвоєній кількості гармонічних складових, які можна визначити на підставі ДПФ.**

Аналіз властивостей ДПФ показує, що кількість різних комплексних амплітуд (крім постійної складової), які можна визначити за формулою (1.38), дорівнює половині кількості відліків за період  $T_c$ , тобто  $N/2$ .

Постійна складова дискретизованого сигналу дорівнює середньому арифметичному усіх

$$A_0 = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} s(n\Delta t) \right] / N.$$

відліків сигналу:

Часто розглядають зворотню задачу дискретного спектрального аналізу: за відомими

коефіцієнтами  $A_k$  ДПФ треба визначити відліки дискретизованого сигналу.

Для цього у формулі (1.36) приймають  $t=n\Delta t$  і підсумовують скінченну кількість членів ряду, які відповідають гармонікам, що входять до ряду.

Отже, відліки дискретизованого сигналу визначають за формулою:

$$s(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \exp(j2\pi kn / N) \quad (1.39)$$

яка описує зворотне (обернене) дискретне перетворення Фур'є.

**Цифрові сигнали подають у вигляді n-розрядних двійкових чисел.**

Дискретні перетворення Фур'є широко застосовують, використовуючи цифрові сигнали для подання та оброблення різноманітної інформації.

**Цифрові сигнали** – це дискретизовані у часі та квантовані за рівнем сигнали. Кожен з рівнів подається, як правило, у вигляді n - розрядного двійкового числа:

$$A_n = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 2 + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (2^i), \quad (1.40)$$

**Електричний цифровий сигнал можна сформулювати за принципом “додатної” або “від’ємної” логіки у вигляді паралельного або послідовного коду.**

де  $a_i$  – цифра в  $i$ -му розряді двійкового числа, яка може набувати значення 0 або 1.

Множник  $2^i$  відіграє роль вагового коефіцієнта. Отже, двійкові числа подають у вигляді комбінацій нулів та одиниць, які відповідають значенням цифр у відповідних розрядах.

В електричному цифровому сигналі роль “нулів” та “одиниць” відіграють звичайно сигнали напруги, які можуть бути сформовані за двома принципами:

а) додатної логіки – коли логічній “одиниці” відповідає високе значення потенціалу, а логічному “нулеві” – низьке;

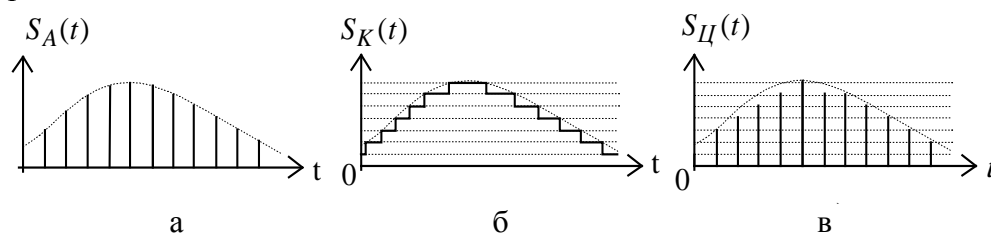
б) від'ємної логіки – коли логічній “одиниці” відповідає низьке значення потенціалу, а логічному “нулеві” – високе.

Значення потенціалів, що відповідають “нулеві” та одиниці”, називають стандартними значеннями логічних сигналів.

Із сказаного випливає, що цифровий сигнал – це послідовність комбінацій стандартних значень логічних сигналів, які утворюють  $n$ -розрядний цифровий код. Зауважимо, що стандартні сигнали відповідних розрядів можуть з'являтися одночасно (паралельний код) або послідовно (послідовний код).

Найпоширеніший спосіб перетворення аналогового сигналу на цифровий полягає у дискретизації аналогового сигналу в часі та у квантуванні відліків за рівнем. Питання дискретизації аналогових сигналів розглянуто раніше, тому далі коротко зупинимось на особливостях квантування за рівнем.

При квантуванні сигналу за рівнем неперервна множина значень аналогового сигналу  $s(t)$  замінюється множиною дискретних значень. Враховуючи це, вибирають у заданому діапазоні значень  $s_{\min} \dots s_{\max}$  скінченну кількість дискретних значень (дискретних рівнів) і в моменти відліків  $t_k = k\Delta t$  значення сигналу  $s(k\Delta t)$  замінюється найближчим дискретним значенням, як показано на рис.1.10.



**Рис.1.10.** Формування цифрового сигналу

Відстань  $\Delta s$  між сусідніми дискретними рівнями називають **кроком квантування**. Загальна кількість дискретних рівнів у заданому діапазоні значень сигналу дорівнює:  $M = (s_{\max} - s_{\min}) / \Delta s$ . Оскільки кожному значенню дискретного рівня ставиться у відповідність певний  $n$ -розрядний двійковий код, то кількість необхідних розрядів визначають за формулою:

$$n \geq \log_2 M \quad (\text{або } 2^n \geq M) \quad (1.41)$$

**Кількість розрядів двійкового коду визначає кількість кроків квантування.**

Найчастіше двійковий код відображає двійковий номер дискретного рівня.

Оскільки при квантуванні миттєве значення сигналу замінюється найближчим значенням дискретного рівня, то з'являється методична (систематична) похибка, яку прийнято називати **шумом квантування**. Очевидно, що похибка квантування має випадковий характер, її абсолютне значення у будь-який момент часу дорівнює різниці між квантованим значенням  $s_{кв}(t)$  та миттєвим значенням сигналу  $s(t)$  і не перевищує половини кроку квантування.

**Наявність шуму квантування – особливість процесу квантування.**

Наявність методичної похибки означає, що істотною відмінністю квантування за рівнем від дискретизації у часі є те, що після реалізації квантування аналоговий сигнал не можна відновити з похибкою, меншою, ніж половина кроку квантування.

### 1.4. Модульовані сигнали та їхнє застосування

Як зазначалось вище, високочастотні коливання, які можна ефективно випромінювати, і які здатні поширюватись з малими втратами по каналу зв'язку, виконують роль переносника інформаційних сигналів, і відповідають певним повідомленням. Ці високочастотні коливання називають **несучими або носійними**.

Несуче коливання характеризується відповідними параметрами (амплітудою, частотою тощо), які визначають його форму та характер змін в часі. За відсутності інформаційного сигналу ці параметри є незмінними.

Як несучі коливання звичайно використовують періодичні коливання (неперервні або періодичну послідовність імпульсів), які мають дискретний (лінійчастий) спектр.

Найпростішим неперервним несучим коливання є гармонічне коливання:

*Несуче високо-частотне коливання виконує роль переносника інформаційних сигналів.*

$$S_{нес}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_m \cos[\psi(t)], \quad (1.42)$$

яке характеризується трьома параметрами: амплітудою  $A_m$ , частотою  $\omega_0$  та початковою фазою  $\varphi_0$ .

Найпростіший імпульсний переносник – періодична послідовність імпульсів прямокутної форми (рис.1.11), яка характеризується більшою кількістю параметрів:

амплітудою  $A_m$ , тривалістю імпульсів  $\tau_i$ , періодом повторення  $T_n$ , а також іншими параметрами форми імпульсу.

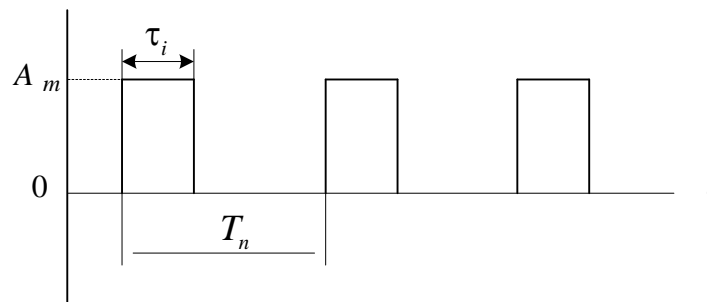


Рис.1.11. Імпульсний переносник

*Вид модуляції визначає параметр несучого коливання, який змінюється під дією інформаційного керуючого сигналу.*

Залежно від того, який з параметрів переносника змінюється відповідно до інформаційного керуючого сигналу, розрізняють різні види модуляції.

Так, для гармонічного переносника можливі три основні види модуляції: **амплітудна (АМ)**, **частотна (ЧМ)** та **фазова (ФМ)**. У деяких випадках використовують комбінацію цих видів.

Для імпульсного переносника можливі такі види модуляції: **амплітудно-імпульсна (АІМ)**, **фазоімпульсна(ФІМ)**, **широтноімпульсна (ШІМ)**, **частотно-імпульсна (ЧІМ)**, **кодоімпульсна (КІМ)**.

Далі коротко розглянемо математичні моделі (ММ) та основні параметри модульованих сигналів.

#### 1.4.1. Амплітудно-модульовані сигнали

Математичну модель АМ-сигналу можна записати в загальному вигляді:

$$s_{AM}(t) = A_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.43)$$

де  $A_m(t)$  – функція, яка описує закон зміни амплітуди неперервного несучого коливання в часі. Ця функція повинна бути повільною порівняно з  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , так, що за час, протягом якого повна фаза  $(\omega_0 t + \varphi_0)$  зміниться на  $2\pi$ , функцію  $A_m(t)$  можна вважати сталою. Функцію  $A_m(t)$  називають **обгинаючою** (обвідною) АМ-сигналу. Математично її описують виразом:

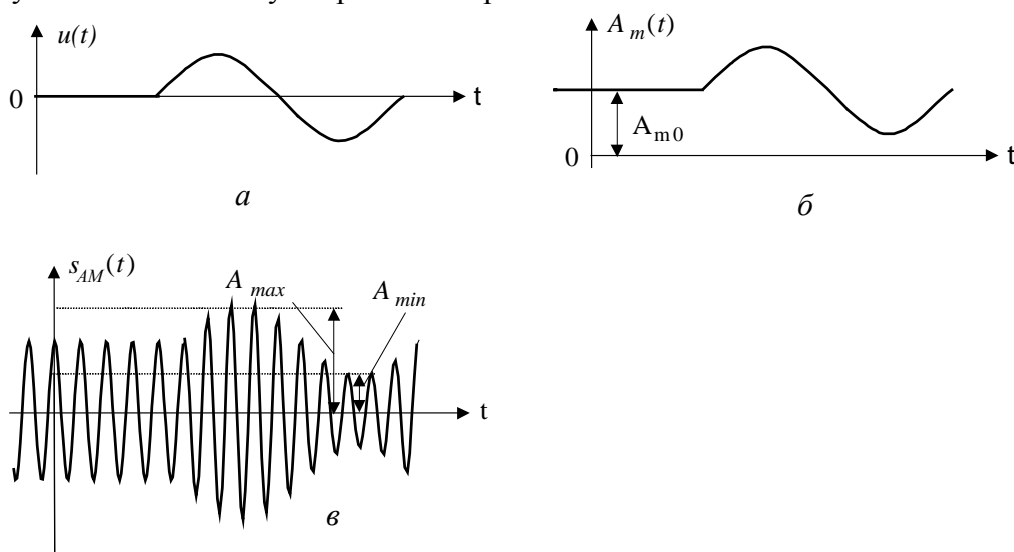
$$A_m(t) = A_{m0} + ku(t), \quad (1.44)$$

*Математична модель АМ-сигналу описує зміну амплітуди несучого коливання під дією інформаційного сигналу.*

де  $A_{m0}$  – амплітуда немодульованого (несучого) коливання, яка входить у (1.42);  $k$  – коефіцієнт пропорційності;  $u(t)$  – модулюючий (керуючий) сигнал.

Із (1.44) бачимо, що обгинаюча АМ-сигналу змінюється пропорційно до модулюючого сигналу  $u(t)$  стосовно амплітуди несучого коливання.

Формування АМ-сигналу зображено на рис.1.12.



**Рис.1.12.** Формування АМ-сигналу: *а* – модулюючий сигнал; *б* – обгинаюча АМ-сигналу; *в* – АМ-сигнал

**Забезпечення пропорційної залежності між обгинаючою АМ-сигналу та керуючим інформаційним сигналом – умова відсутності спотворень при амплітудній модуляції.**

З урахуванням (1.44) математичну модель АМ-сигналу можна записати:

$$s_{AM}(t) = [A_{m0} + ku(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.45)$$

звідки випливає, що між миттєвими значеннями модулюючого сигналу  $u(t)$  та обгинаючої  $A_m(t)$  існує однозначний пропорційний зв'язок за умови:

$$|ku(t)|_{\max} \leq A_{m0}. \quad (1.46)$$

Якщо умова (1.46) не виконується, то форма обгинаючої  $A_m(t)$  та модулюючого сигналу  $u(t)$  не збігаються – виникає небажане явище спотворення обгинаючої АМ-сигналу.

Основним параметром АМ-сигналу є коефіцієнт модуляції, який визначають як відношення максимального відхилення амплітуди модульованого сигналу стосовно амплітуди несучого (немодульованого) коливання до амплітуди несучого коливання:

$$m = |k \cdot u(t)|_{\max} / A_{m0}$$

Очевидно, що спотворення обгинаючої  $A_m(t)$  АМ-сигналу відсутні, якщо виконується умова:

$$0 < m \leq 1.$$

### 1.4.2. Сигнали з кутовою модуляцією (ЧМ- та ФМ-сигнали)

Термін “кутова модуляція” об’єднує частотну та фазову модуляцію, оскільки для неперервного несучого коливання (1.42) миттєві значення повної фази  $\Psi(t)$  та кутової частоти  $\omega(t)$  взаємопов’язані співвідношеннями:

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}, \quad (1.47a)$$

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0 \quad (1.476)$$

*При кутовій модуляції керуючий інформаційний сигнал впливає одночасно на зміну частоти та повної фази несучого коливання.*

Отже, параметри несучого коливання  $\omega$  та  $\psi$  не можуть змінюватись незалежно один від одного і вплив модулюючого сигналу на один із них викликає одночасну зміну другого. При кутовій модуляції амплітуда несучого коливання є сталою  $A_m = \text{const}$ , а модулюючий сигнал керує повною фазою  $\psi(t)$ .

Зауважимо, що за відсутності модуляції повна фаза несучого (немодульованого) коливання змінюється в часі за лінійним законом  $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$  і згідно з (1.47а) кутова частота

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0$$

є сталою.

Можливі два варіанти кутової модуляції:

а) пропорційно до модулюючого сигналу  $u(t)$  змінюється миттєве значення частоти стосовно частоти несучого коливання  $\omega_0$ :

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + \kappa_{\text{ЧМ}} u(t), \quad (1.48)$$

де  $\kappa_{\text{ЧМ}}$  – коефіцієнт пропорційності.

Повна фаза  $\psi_{\text{ЧМ}}(t)$ , згідно з (1.47б), змінюється стосовно лінійного закону пропорційно до інтеграла від модулюючого сигналу:

$$\psi_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 t + \psi_0 + \kappa_{\text{ЧМ}} \int_0^t u(t) dt \quad (1.49)$$

Такий варіант кутової модуляції називають **частотною модуляцією**.

Математична модель частотно-модульованих сигналів має вигляд:

*Математична модель сигналу з кутовою модуляцією описує залежність повної фази несучого коливання від модулюючого інформаційного сигналу.*

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = A_m \cos \psi_{\text{ЧМ}}(t) = A_m \cos \left[ \omega_0 t + \psi_0 + \kappa_{\text{ЧМ}} \int_0^t u(t) dt \right] \quad (1.50)$$

б) пропорційно до модулюючого сигналу змінюється повна фаза стосовно лінійного закону:

$$\psi_{\text{ФМ}}(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \kappa_{\text{ФМ}} u(t) \quad (1.51)$$

При тому кутова частота не залишається сталою, а змінюється, згідно з (1.47а), пропорційно до похідної модулюючого сигналу стосовно частоти  $\omega_0$  несучого коливання:

$$\omega_{\text{ФМ}}(t) = \omega_0 + \kappa_{\text{ФМ}} \frac{du(t)}{dt}. \quad (1.52)$$

Цей варіант кутової модуляції називають **фазовою модуляцією**.

Математична модель фазомодульованого сигналу має вигляд:

$$s_{\text{ФМ}}(t) = A_m \cos \psi_{\text{ФМ}}(t) = A_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \kappa_{\text{ФМ}} u(t)]. \quad (1.53)$$

Основними параметрами сигналів з кутовою модуляцією є **девіація частоти  $\Delta\omega_{\text{max}}$**  та **індекс модуляції  $M$** .

**Девіація частоти** – це максимальне відхилення частоти модульованого сигналу стосовно частоти несучого коливання  $\omega_0$ .

На підставі (1.48) та (1.49) визначаємо девіацію частоти відповідно для ЧМ- та ФМ-сигналів:

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ max}} = \kappa_{\text{ЧМ}} |u(t)|_{\text{max}} \quad (1.54a)$$

$$\Delta\omega_{\text{фм max}} = \kappa_{\text{фм}} \left| \frac{du(t)}{dt} \right|_{\text{max}} . \quad (1.546)$$

**Індекс модуляції** – це максимальне відхилення повної фази модульованого сигналу стосовно лінійного закону.

На підставі (1.49) та (1.51) визначаємо індекс модуляції відповідно для ЧМ- та ФМ сигналів:

$$M_{\text{чм}} = \kappa_{\text{чм}} \left| \int_0^t u(t) dt \right|_{\text{max}} \quad (1.55a)$$

$$M_{\text{фм}} = \kappa_{\text{фм}} \cdot \max [u(t)] \quad (1.55б)$$

Вимірюють девіацію частоти в рад/с або в герцах, а індекс модуляції – у радіанах або градусах.

### 1.4.3. Модуляція імпульсних коливань

Побудова математичної моделі модульованих сигналів з використанням високочастотного імпульсного переносника є достатньо складною і виходить за межі цього підручника, тому розглянемо лише часові діаграми сигналів за різних видів модуляції.

У разі АІМ імпульси змінюють амплітуду пропорційно до модулюючого сигналу, але зберігається незмінною їхня тривалість на період повторення (рис.1.13, б).

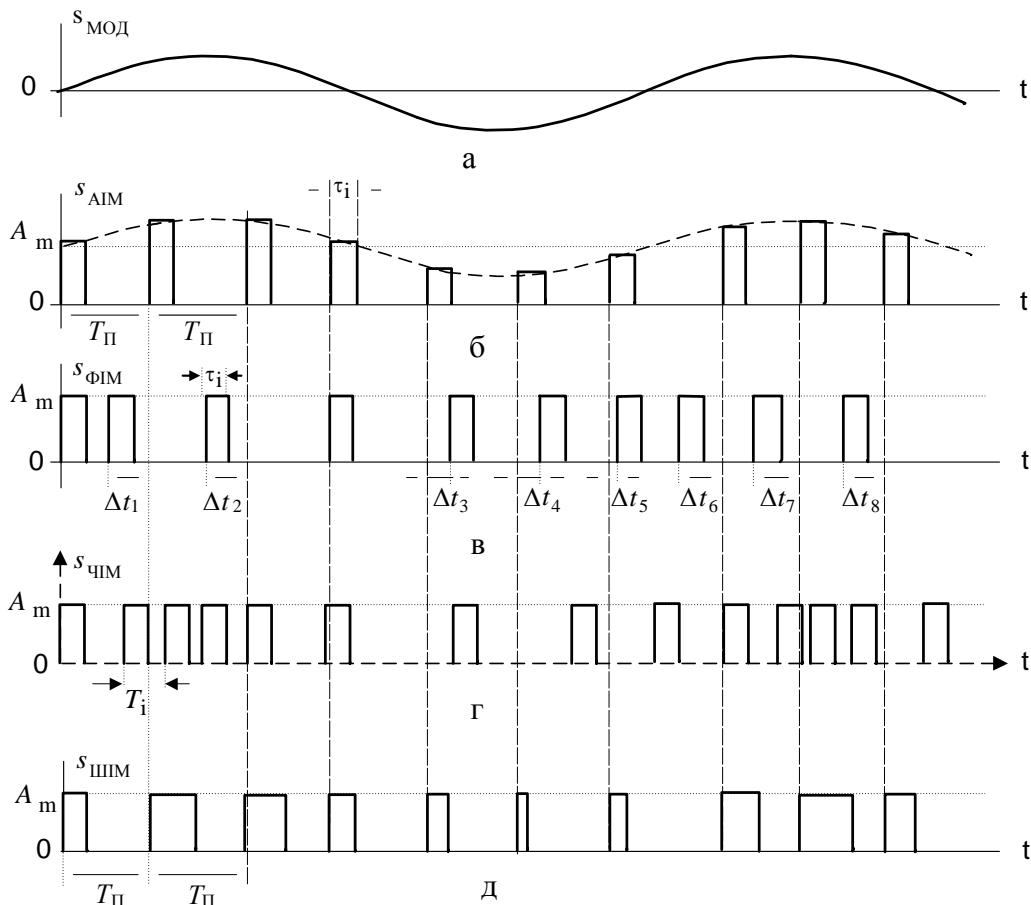
У разі ФІМ імпульси зберігають тривалість та амплітуду, проте моменти їхньої появи зміщуються у часі стосовно їхніх початкових значень на деяку величину  $\Delta t$ , яка пропорційна до миттєвого значення модулюючого сигналу. Часову діаграму для гармонічного модулюючого сигналу наведено на рис.1.13, в.

У разі ЧІМ імпульси зберігають незмінними тривалість та амплітуду, проте змінюється частота їхнього повторення пропорційно до миттєвих значень модулюючого сигналу (рис.1.13, г).

***Вид імпульсної модуляції визначає параметр імпульсного переносника, який змінюється під дією модулюючого інформаційного сигналу.***

У разі ШІМ змінюється тривалість імпульсів пропорційно до миттєвих значень модулюючого сигналу. Розрізняють односторонню ШІМ, коли один із фронтів імпульсу пересувається під час процесі модуляції, а другий зберігає своє розміщення у часі, та двосторонню – коли пересуваються обидва фронти симетрично стосовно середини імпульсу. Можливий вигляд послідовності імпульсів з односторонньою ШІМ при гармонічному модулюючому сигналі зображено на рис.1.13, д.

***При кодоімпульсній модуляції керуючим сигналом є цифровий сигнал, який відповідає миттєвому значенню первинного модулюючого сигналу у двійковій системі числення.***



**Рис.1.13.** Часові діаграми: а – гармонічного модулюючого сигналу;

б – АІМ - сигналу; в – ФІМ - сигналу;

г – ЧІМ - сигналу; д – ШІМ - сигналу

При КІМ імпульси зберігають тривалість та амплітуду, проте у фіксовані моменти часу, які визначені періодом повторення, з'являється не один імпульс, а “пакет” імпульсів, кодова послідовність яких відповідає у двійковій системі числення миттєвому значенню модулюючого сигналу в цей момент. Отже, сигнал з КІМ відповідає цифровому сигналові, у якого нулям та одиницям відповідає відсутність або наявність імпульсу у пакеті.

### 1.5. Стохастичні (випадкові) сигнали

Оскільки характер прийнятих сигналів як носіїв інформації на приймальному пункті заздалегідь не є відомим, то з цього погляду сигнали треба розглядати як випадкові функції часу.

Отже, математичною моделлю випадкового сигналу є **випадкова функція часу**.

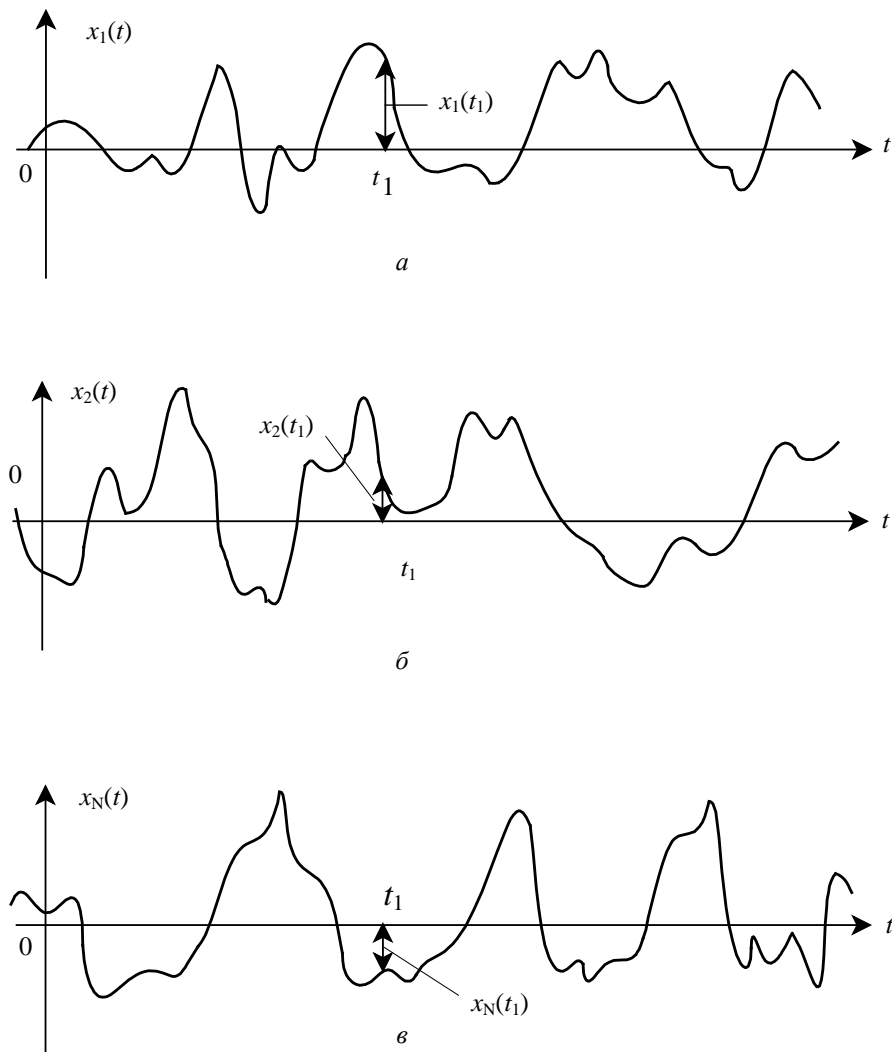
**Випадкова функція** будь-якого аргументу – це така функція, значення якої для кожного значення аргументу випадкове. Випадкову функцію часу називають **випадковим процесом**. Позначимо його функцією  $X(t)$ .

Спостерігаючи багаторазово за одним і тим самим випадковим процесом, що перебігає в незмінних умовах, кожен раз отримуємо конкретні реалізації  $x(t)$ , не подібні одна на одну, проте на підставі такого спостереження можна виявити певні закономірності, що характеризують цей процес, та визначити сукупність не випадкових числових характеристик, які описують його. Випадковий процес повністю характеризується нескінченно великою кількістю реалізацій, які утворюють **ансамбль реалізацій**.

*Ансамбль реалізацій випадкового процесу містить повну інформацію про закономірності, що характеризують цей процес.*

Розглянемо  $N$  реалізацій випадкового процесу  $X(t)$  (рис.1.14).





**Рис.1.14.** Ансамбль реалізацій випадкового процесу

Сукупність миттєвих значень випадкового процесу, заданого ансамблем реалізацій у довільний момент часу, називають **перетином випадкового процесу**.

На рис.1.14 показано перетин випадкового процесу  $X(t)$  у момент  $t_1$ , який дає змогу визначити сукупність миттєвих значень процесу  $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_N(t_1)$ , яку можна розглядати як сукупність значень деякої випадкової величини  $X(t_1)$ .

Ця сукупність дає можливість визначити одновимірну функцію розподілу ймовірностей випадкової величини  $X(t_1)$ . Для цього виділимо ті значення, які в момент часу  $t_1$  задовольняють умову:

$$X(t_1) < x_1, \quad (1.56)$$

де  $x_1$  – деяке вибране значення випадкового процесу.

Позначимо кількість цих значень як  $n(x_1, t_1)$ . Відношення  $n(x_1, t_1)/N$  називають у теорії ймовірностей **частотою настання події**. У такому разі під подією розуміємо виконання умови (1.56). За достатньо великого значення  $N$  відношення  $n(x_1, t_1)/N$  прямуватиме до постійного числа, яке називають ймовірністю того, що при  $t=t_1$  випадкова функція  $X(t)$  менша від значення  $x_1$ :

**Перетин випадкового процесу дає змогу визначити його одновимірну функцію розподілу та густину розподілу ймовірностей у довільний момент часу.**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [n(x_1, t_1) / N] = P\{X(t_1) < x_1\} \quad (1.57)$$

Діючи аналогічно для інших значень  $x$  в інтервалі  $-\infty \leq x \leq \infty$ , можемо побудувати **одновимірну функцію розподілу ймовірностей випадкового процесу**:

$$F_1(x, t_1) = P\{X(t_1) < x\}. \quad (1.58)$$

Функція  $F_1(x, t_1)$  матиме ступінчатий характер тоді, коли випадковий процес набуває дискретних значень. Якщо ж випадковий процес змінює свої значення неперервно, то функція  $F_1(x, t_1)$  теж матиме вигляд плавної кривої. Зауважимо, що функція розподілу ймовірностей є неспадною функцією свого аргументу, що впливає з її означення.

Тісно пов'язаною з одновимірною функцією розподілу ймовірностей випадкового процесу є **одновимірна густина розподілу ймовірностей випадкового процесу**, яку на підставі ансамблю реалізацій наближено визначають так:

$$W_1(x, t_1) \approx \frac{n(x + \Delta x, t_1) - n(x, t_1)}{N \cdot \Delta x}, \quad (1.59)$$

де  $n(x + \Delta x, t_1)$  – кількість реалізацій, значення яких у момент  $t_1$  були менші від  $x + \Delta x$ , а  $n(x, t_1)$  визначаємо, як і раніше.

За такого визначення густина розподілу теж має ступінчатий вигляд. Підвищення точності визначення густини розподілу досягають зменшенням інтервалу  $\Delta x$  до нуля:

$$W_1(x, t_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{n(x + \Delta x, t_1) - n(x, t_1)}{N \cdot \Delta x} \right]. \quad (1.60)$$

Із (1.60) випливає, що густина розподілу є похідною одновимірної функції розподілу:

$$W_1(x, t_1) = \frac{dF_1(x, t_1)}{dx}. \quad (1.61)$$

З іншого боку отримуємо:

$$F_1(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{x_1} W_1(x, t) dx. \quad (1.62)$$

Очевидно, що ймовірність перебування випадкової функції  $X(t)$  у момент  $t_1$  в інтервалі між  $x_1$  та  $x_2$ , дорівнює:

$$P\{x_1 \leq X(t_1) \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} W_1(x_1, t_1) dx = F_1(x_2, t_1) - F_1(x_1, t_1). \quad (1.63)$$

Зрозуміло, що ймовірність перебування значення випадкового процесу у межах від  $-\infty$  до  $\infty$ , дорівнює одиниці:

$$P\{-\infty \leq X(t_1) \leq \infty\} = F_1(\infty, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x, t_1) dx = 1. \quad (1.64)$$

*Інтегральний та диференціальний закони розподілу ймовірностей дають змогу визначити у довільний момент часу ймовірність перебування значення випадкової величини у заданих межах.*

Зауважимо, що функції  $F_1(x, t)$  та  $W_1(x, t)$  для довільних значень  $x$  та  $t$  завжди набувають додатні значення.

Часто функцію розподілу ймовірностей  $F_1(x, t)$  називають **інтегральним законом розподілу**, а густину розподілу ймовірностей – **диференціальним законом розподілу ймовірностей**.

Функції  $F_1(x, t_1)$  та  $W_1(x, t_1)$  статистично повністю характеризують значення випадкового процесу  $X(t)$  у заданий момент часу  $t_1$  і тому їх називають **одновимірними**. Ці функції є найпростішими характеристиками випадкового процесу, оскільки вони дають уявлення про процес лише в окремі фіксовані моменти часу.

### 1.5.1. Числові характеристики випадкових сигналів

Проходження сигналів в електронних колах супроводжується різноманітними перетвореннями їхніх характеристик. У випадкових сигналів можуть змінюватися закони їхнього

розподілу, аналітичний розрахунок яких дуже складний. Проте виявляється, що значно простішим є розрахунок певних числових характеристик законів розподілу, які можна визначити на підставі нескладних експериментів. У багатьох випадках точність розрахунків, яку забезпечують згадані числові характеристики, цілком достатня для потреб практики. Такими числовими характеристиками є **моменти випадкової величини**. Вони є детермінованими числами.

*Числові характеристики випадкових сигналів використовують в аналізі їхнього проходження через електронні кола.*

Момент  $n$ -го порядку  $M_n(x)$  неперервної випадкової величини  $x$  визначають за формулою:

$$M_n[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot W_1(x, t_1) dx, \quad (1.65)$$

де  $W_1(x, t_1)$  – одновимірна густина розподілу ймовірностей випадкової величини  $x(t_1)$ .

**Математичним сподіванням або середнім значенням випадкової величини** називають момент першого порядку:

$$M_1[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W_1(x, t_1) dx. \quad (1.66)$$

Усреднення випадкової величини  $x(t_1)$  згідно з (1.66) здійснюють за ансамблем реалізацій. Тому за наявності ансамблю із  $N$  реалізацій випадкового процесу статистичне визначення його середнього значення у перетині в момент часу  $t_k$  здійснюємо за формулою:

$$M_1[X(t_k)] = \left[ \sum_{i=1}^N x_i(t_k) \right] / N \quad (1.67)$$

Взаємозв'язок між формою закону розподілу ймовірностей та його числовими характеристиками стає наочнішим у разі використання поняття **центрованої випадкової величини**. Випадкова величина називається центрованою, якщо її середнє значення дорівнює нулеві. Отже, випадкова величина  $X(t_k)$  центрується відніманням від неї середнього значення  $M_1[X(t_k)]$ :

$$X_{\text{ц}}(t_k) = X(t_k) - M_1[X(t_k)]. \quad (1.68)$$

*Моменти випадкової величини є детермінованими числами, які визначають усередненням за ансамблем реалізацій в перетині у довільний момент часу.*

На відміну від початкових моментів, які визначають за формулою (1.65), моменти центрованої величини називають **центральними моментами**. Центральний момент  $n$ -го порядку розраховують за формулою:

$$M_n[X_{\text{ц}}(t_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{X(t_k) - M_1[X(t_k)]\}^n \cdot W_1(x, t_k) dx \quad (1.69)$$

Центральний момент першого порядку  $M_1[X_{\text{ц}}(t_k)]$  за означенням дорівнює нулеві.

Центральний момент другого порядку

$$M_2[X_{\text{ц}}(t_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{X(t_k) - M_1[X(t_k)]\}^2 \cdot W_1(x, t_k) dx \quad (1.70)$$

Цей момент характеризує розсіювання можливих значень випадкової величини  $X(t_k)$  стосовно її середнього значення і називається **дисперсією**. Часто використовують таке позначення дисперсії:  $\sigma^2[X(t_k)]$ . Величину  $\sigma[X(t_k)]$ , що дорівнює додатному значенню кореня квадратного з центрального моменту другого порядку, називають **середнім квадратичним відхиленням випадкової величини  $X(t_k)$** .

*Арифметичним операціям над випадковими сигналами відповідають арифметичні операції над їхніми числовими характеристиками.*

На підставі ансамблю з  $N$  реалізацій випадкового процесу статистичне визначення дисперсії виконуємо за формулою:

$$M_2[X_y(t_k)] = \sigma^2[X(t_k)] = \left[ \sum_{i=1}^N \{x_i(t_k) - M_1[X(t_k)]\}^2 \right] / (N - 1). \quad (1.71)$$

Розв'язуючи багато практичних задач, доводиться виконувати арифметичні операції над випадковими сигналами. При цьому числові характеристики результуючих сигналів достатньо просто визначають через числові характеристики первинних сигналів. Наприклад, якщо  $X_1(t)$  та  $X_2(t)$  є первинними незалежними сигналами, а  $A$  – постійна величина, то справедливі такі співвідношення:

$$M_1[AX(t)] = A \cdot M_1[X(t)]; \quad (1.72)$$

$$M_1[X_1(t) \pm X_2(t)] = M_1[X_1(t)] \pm M_1[X_2(t)]; \quad (1.73)$$

$$M_1[X_1(t) \cdot X_2(t)] = M_1[X_1(t)] \cdot M_1[X_2(t)]; \quad (1.74)$$

$$\sigma^2[AX(t)] = A^2 \cdot \sigma^2[X(t)]; \quad (1.75)$$

$$M_2[X_{1n}(t) \pm X_{2n}(t)] = \sigma^2[X_1(t)] + \sigma^2[X_2(t)]; \quad (1.76)$$

$$\sigma^2[X_1(t) \cdot X_2(t)] = \sigma^2[X_1(t)] \cdot \sigma^2[X_2(t)] + M_1^2[X_1(t)] \cdot \sigma^2[X_2(t)] + M_1^2[X_2(t)] \cdot \sigma^2[X_1(t)]. \quad (1.77)$$

Подані співвідношення можна узагальнити для більшої кількості випадкових сигналів.

Загалом числові характеристики одновимірних розподілів залежать від часу. Це зумовлюється часовою залежністю функції розподілу  $F_1(x, t)$  та густини розподілу  $W_1(x, t)$ . У такому разі числові характеристики замість чисел стають функціями часу і їх називають **моментними функціями**.

*Точний опис випадкового сигналу забезпечують n-вимірна функція розподілу та n-вимірна густина розподілу ймовірностей, якщо  $n \rightarrow \infty$*

Повніше можна описати випадковий процес, якщо визначити взаємозв'язок між його значеннями при двох і більше моментах часу. Такий взаємозв'язок описують n-вимірна функція розподілу ймовірностей  $F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots x_n, t_n)$  та n-вимірна густина розподілу ймовірностей  $W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots x_n, t_n)$ . Очевидно, що чим більше значення  $n$ , тим точніше описуємо випадковий процес.

Зауважимо, що для великих значень  $n$  аналітичний опис функцій  $F_n(\odot)$  та  $W_n(\odot)$  дуже складний і практично дуже важко отримати його. Проте існують деякі типи випадкових процесів, властивості яких можна повністю описати за допомогою густини розподілу ймовірностей для скінченного значення  $n$ . Такими процесами є білий шум та марковські випадкові процеси.

*Білий шум та марковський випадковий процес можна повністю описати за допомогою густини розподілу ймовірностей для скінченного значення  $n$ .*

**Білий шум** характеризується тим, що його миттєві значення у різні моменти часу є незалежними. Отже,  $n$ -вимірну густину розподілу білого шуму повністю визначаємо добутком  $n$  одновимірних густин.

**Марковські випадкові процеси** характеризуються тим, що густина розподілу ймовірностей у момент  $t_i$  залежить лише від значення випадкового процесу в попередній момент часу і не залежить від більш ранніх подій. Відповідний аналіз показує, що  $n$ -вимірну густину розподілу ймовірностей випадкового марковського процесу можна описати за допомогою густин розподілу ймовірностей, не вищих від другого порядку.

Закінчуючи розгляд основних характеристик випадкових сигналів, зазначимо, що множину випадкових процесів можна поділити на дві великі групи: стаціонарні та ергодичні.

Випадковий процес  $X(t)$  є **стаціонарним**, якщо будь-яка  $n$ -вимірна функція розподілу ймовірностей його значень, узятих у різні моменти часу, не змінюється за будь-якого зсуву (зміщення) цих моментів уздовж осі часу. Стаціонарні випадкові процеси виникають у джерелах випадкових сигналів за усталених режимів роботи, за незмінних умов зовнішнього середовища та незмінних значень параметрів електронних кіл, через які проходять випадкові сигнали.

**Ергодичні випадкові процеси** характерні тим, що їхні закони розподілу можна визначити, усереднюючи необхідні величини на підставі лише однієї реалізації, отриманої за достатньо

великий проміжок часу. Це означає, що для ергодичних стаціонарних процесів усереднення за ансамблем реалізацій та усереднення в часі в межах одної реалізації дають однаковий результат.

## Контрольні питання до розділу 1

1. Дайте означення детермінованих та випадкових сигналів.
2. Наведіть класифікацію сигналів залежно від характеру зміни в часі та на множині значень.
3. Які сигнали прийнято вважати елементарними?
4. Дайте означення спектра сигналу в базисі гармонічних коливань.
5. У чому полягає суть динамічного опису сигналів?
6. Які особливості спектрів періодичних детермінованих сигналів?
7. Запишіть формули для визначення амплітуд та початкових фаз спектральних складових періодичного сигналу.
8. Які особливості мають спектри імпульсних (поодиноких) сигналів?
9. Як взаємозв'язані зображення Лапласа та спектральна функція сигналу?
10. Назвіть основні види модуляції при гармонічному та імпульсному переносниках.
11. Дайте означення амплітудно-модульованого сигналу та коефіцієнта модуляції для однотональної модуляції.
12. Зобразіть часову залежність АМ-сигналу при однотональній модуляції та поясніть спосіб визначення коефіцієнта модуляції.
13. Дайте означення частотно-модульованого та фазомодульованого сигналів та поясніть, у чому полягає відмінність між ними.
14. Дайте означення індексу модуляції та девіації частоти для сигналу з кутовою модуляцією.
15. Які переваги забезпечує використання імпульсного переносника порівняно з неперервним переносником?
16. Дайте означення амплітудно-імпульсної, фазоімпульсної, частотно-імпульсної, широтно-імпульсної та кодоімпульсної модуляції.

## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 1.1.** Розрахуйте амплітуди  $A_k$  та початкові фази  $\varphi_k$  гармонічних складових спектра періодичної послідовності прямокутних імпульсів  $s(t)$  з такими параметрами: амплітуда  $E$ , тривалість імпульсу  $\tau$ , період повторення  $T$  (рис. 1.1.3Д).

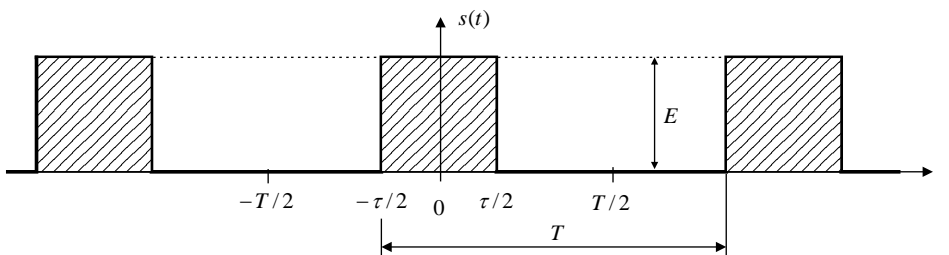


Рис. 1.1.3Д. Періодична послідовність прямокутних імпульсів

### Розв'язання.

На підставі рис. 1.1.3Д можемо записати математичну модель заданого сигналу упродовж одного періоду у вигляді:

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{якщо } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{якщо } -T/2 < t < -\tau/2; \tau/2 < t < T/2 \end{cases}$$

За заданої системи відліку часу сигнал  $s(t)$  описаний парною функцією часу, отже, його частотний спектр запишемо у вигляді:

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t)$$

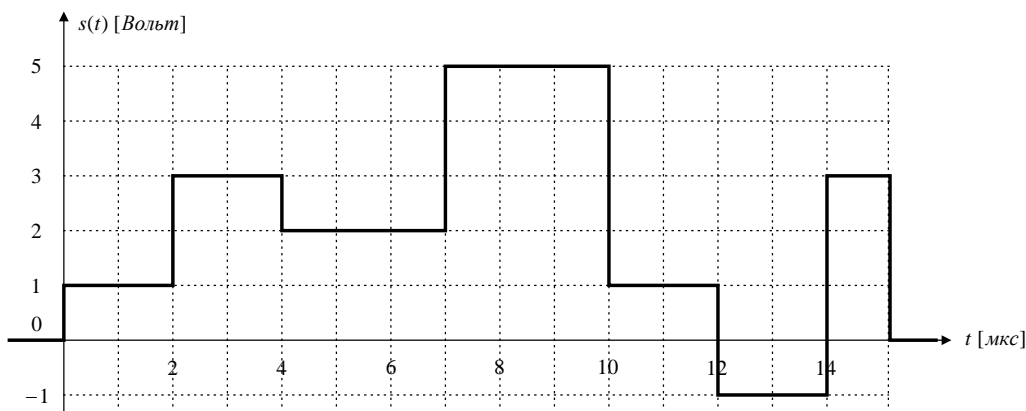
де  $\omega_0 = 2\pi/T$ ;

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = E \frac{\tau}{T};$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2E}{k\pi} \left| \sin\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) \right|.$$

Зауважимо, що під час розрахунку значень  $C_k$  враховуємо абсолютне значення функції  $\sin(k\pi\tau/T)$ . Початкові фази  $\varphi_k$  гармонічних складових спектра дорівнюють нулеві, за винятком тих складових, для яких функція  $\sin(k\pi\tau/T)$  набуває від'ємні значення. Їхні початкові фази дорівнюють  $\pm\pi$ .

**Задача 1.2.** Використовуючи функцію Хевісайда, запишіть математичну модель ступінчастого сигналу  $s(t)$ , часова залежність якого зображена на рис. 1.2.3Д.



**Рис. 1.2.3Д.** Ступінчастий сигнал

**Розв'язання.**

Математичну модель запишемо як послідовність стрибкоподібних змін різної величини:

$$s(t) = 1 \cdot 1(t) + 2 \cdot 1(t - 2 \cdot 10^{-6}) - 1 \cdot 1(t - 4 \cdot 10^{-6}) + 3 \cdot 1(t - 7 \cdot 10^{-6}) - 4 \cdot 1(t - 10^{-5}) - 2 \cdot 1(t - 12 \cdot 10^{-6}) + 4 \cdot 1(t - 14 \cdot 10^{-6}) - 3 \cdot 1(t - 15 \cdot 10^{-6}) \text{ Вольт.}$$

**Задача 1.3.** Використовуючи таблицю зображень Лапласа, розрахуйте модуль спектральної функції експоненційного сигналу  $s(t)$ , математична модель якого задана:

$$s(t) = Ae^{-\alpha t}, \text{ якщо } t \geq 0.$$

**Розв'язання.** На підставі таблиці зображень Лапласа знаходимо зображення заданого сигналу  $F(p) = A/(p + \alpha)$ . Замінивши у цьому зображенні  $p = j\omega$ , отримуємо комплексну спектральну функцію  $G(\omega) = A/(j\omega + \alpha)$ . Модуль цієї функції дорівнює  $G(\omega) = A/\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$ .

**Задача 1.4.** Розрахуйте значення індексу модуляції  $M$  та девіації частоти  $\Delta f_{\max}$  сигналу з кутовою модуляцією, математична модель якого задана виразом:

$$S(t) = 5 \cos[10^8 t + \pi/4 + 0,8 \cos(2 \cdot 10^3 t + \pi/6)] \text{ Вольт.}$$

**Розв'язання.** Повна фаза цього сигналу задана виразом:

$$\psi(t) = [10^8 t + \pi/4 + 0,8 \cos(2 \cdot 10^3 t + \pi/6)] \text{ рад.}$$

Індекс модуляції – це максимальне відхилення повної фази модульованого сигналу стосовно лінійного закону зміни, який у такому разі описується формулою  $10^8 t + \pi/4$ . Отже, індекс модуляції  $M=0,8$  рад. Миттєве значення частоти  $\omega(t)$  взаємозв'язане з повною фазою співвідношенням:

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt} \quad \text{Для заданого сигналу:}$$

$$\omega(t) = 10^8 - 1,6 \cdot 10^3 \sin(2 \cdot 10^3 t + \pi/6) \text{ рад/с.}$$

Отже, девіація частоти як максимальне відхилення частоти модульованого сигналу стосовно частоти несучого коливання дорівнює:

$$\Delta f_{max} = \frac{\Delta \omega_{max}}{2\pi} = \frac{1,6 \cdot 10^3}{2\pi} \cong 254,65 \text{ Гц}$$

### Приклади задач для самоконтролю

**Задача 1.5.** У чому полягають відмінності запису частотного спектра у вигляді тригонометричної форми ряду Фур'є для сигналів, які описані парними та непарними функціями часу?

**Задача 1.6.** Розрахуйте модуль  $G(\omega)$  та аргумент  $\psi(\omega)$  спектральної густини поодинокого прямокутного імпульсу, математична модель якого задана виразом:

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{якщо } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{якщо } t < -\tau/2; t > \tau/2 \end{cases}$$

**Задача 1.7.** У спектрі неперервного сигналу відсутні частоти, вищі від частоти  $f_b=20$  кГц. Визначте інтервал дискретизації  $\Delta t$  на підставі теореми відліків.

**Задача 1.8.** Визначте необхідну кількість  $n$  розрядів двійкового коду, яким можна закодувати значення напруги у діапазоні  $-10 \dots +10$  Вольт з кроком квантування  $\Delta U=0,1$  Вольт.

**Задача 1.9.** Розрахуйте значення коефіцієнта модуляції АМ-сигналу для випадку, коли амплітуда несучого коливання  $A_m=2B$ , а модулюючий сигнал описаний виразом:  $U(t)=[1,5\cos(\Omega t)+0,7\cos(2\Omega t)-0,2\cos(3\Omega t)]B$ . Для розрахунків прийміть значення коефіцієнта пропорційності  $K=0,4$ .

**Задача 1.10.** Запишіть у двійковій системі числення кодові послідовності КІМ-сигналу, які відповідають таким миттєвим значенням модулюючого сигналу: 3; 8; 10; 16; 25; 30; 48; 55.

**Задача 1.11.** Задана одновимірна функція розподілу ймовірностей випадкового сигналу  $x$  у момент  $t_0$ :

$$F_1(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x < -10 \text{ мВ} \\ \frac{x+10}{60} & \text{якщо } -10 \leq x \leq 50 \text{ мВ} \\ 1 & \text{якщо } x > 50 \text{ мВ} \end{cases}$$

Визначте ймовірність того, що у момент  $t_0$  значення випадкового сигналу перебуватимуть в інтервалі між 0 та 15 мВ.

**Задача 1.12.** На вхід підсилювача з нескінченно широкою смугою пропускання та коефіцієнтом підсилення  $K=100$  подано випадковий сигнал  $x_{вх}(t)$ , математичне сподівання якого  $M[x_{вх}(t)]=50$  мВ, а дисперсія  $\sigma^2[x_{вх}(t)]=0,1$  мВ<sup>2</sup>. Визначте математичне сподівання та дисперсію вихідного сигналу  $x_{вих}(t)$ .

## 2. Основні положення теорії електричних кіл

### 2.1. Електричне коло

Поняття електричного кола є узагальненим поняттям цілої низки систем – електротехнічних, електроенергетичних, електронних, радіотехнічних та комп'ютерних. Щодо застосування у конкретній галузі це поняття має певну специфіку, однак основні поняття теорії електричних кіл є універсальними і дають змогу аналізувати процеси у названих вище об'єктах.

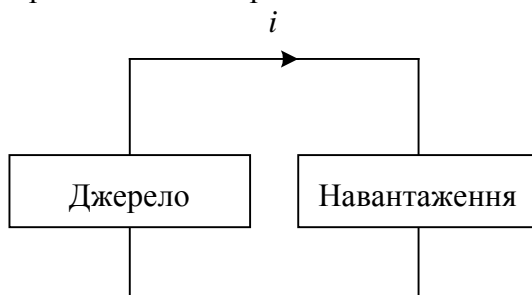
*Електричне коло – це реальний фізичний об'єкт, утворений сукупністю тіл і середовищ, що утворюють замкнуті контури для протікання струму*

**Електричним колом** називають сукупність тіл та середовищ, які утворюють замкнуті контури для протікання електричного струму.

Названі вище тіла і середовища можуть бути як провідниками, так і діелектриками бо, як відомо, навіть ідеальні ізолятори можуть проводити змінний струм.

Компонентами електричного кола можуть бути найрізноманітніші елементи (провідники, нагрівальні прилади, електричні лампи, електродвигуни, трансформатори, діоди, транзистори, інтегральні схеми, мікрофони, гучномовці, антени, батареї, акумулятори, електрогенератори тощо). Однак їх можна розділити на дві великі групи: елементи, які є причиною виникнення електричного струму, та елементи, які утворюють шляхи для протікання струму. Іншими словами, елементи першої групи продукують електричну енергію, а другої – є її споживачами, внаслідок чого ці елементи називають відповідно **джерелом енергії та елементами навантаження**.

Схематичне зображення найпростішого електричного кола подано на рис.2.1.



*Рис.2.1. Схематичне зображення одноконтурного кола*

Зважаючи на те, що компонентами електричного кола може бути велика множина різноманітних елементів та пристроїв, для спрощення аналізу доцільною є певна їхня уніфікація, яка полягає у виборі базового набору типових ідеальних елементів, з'єднанням яких можна з певною точністю відображати властивості усіх інших реальних компонент. Якщо використати такі типові елементи для схематичного зображення деякого кола, то ми отримаємо **електричну схему** цього кола.

Отже, електрична схема є моделлю електричного кола і слугує об'єктом подальшого аналізу з метою дослідження електромагнітних процесів, характерних для цього кола.

### 2.2. Типові двополюсні елементи електричних схем

Електричні схеми складаються із компонент, які під'єднуються до решти схеми двома або більшою кількістю затискачів.

Якщо елемент електричної схеми має два затискачі, то він називається двополюсним елементом, або **двополюсником**. Коли елемент під'єднується до схеми більше ніж двома затискачами, то такий елемент називають багатополюсним елементом або, скорочено, **багатополюсником**.

#### 2.2.1. Пасивні двополюсні елементи



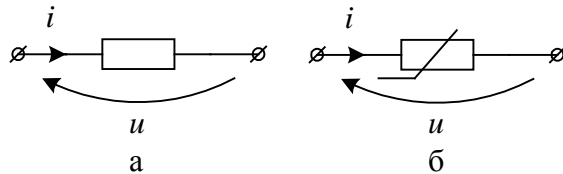
**Пасивними елементами** електричних схем називають такі елементи, які не можуть генерувати електричної енергії.

Типовими двополюсними елементами такого типу є **резистор, котушка індуктивності, конденсатор**. Розглянемо їх детальніше.

## Резистор

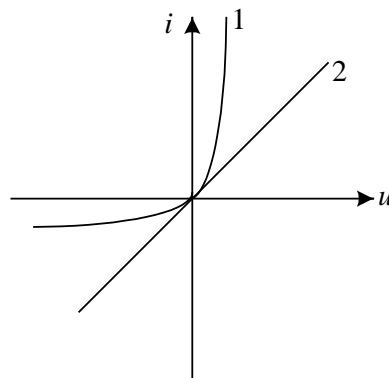
Резистором називають двополюсний елемент електричної схеми, який перетворює енергію електричного струму на теплову енергію необоротно.

Схемне позначення резистора показано на рис.2.2.



**Рис.2.2.** Схемне позначення резистора: а – лінійного, б – нелінійного

Основною характеристикою резистора є залежність між струмом і напругою  $i = f(u)$ , яка називається його вольт-амперною характеристикою (ВАХ). Приклади ВАХ деяких резисторів зображено на рис.2.3.



**Рис.2.3.** Вольт-амперні характеристики резисторів

Зауважимо, що графіки, які зображають ВАХ, обов'язково проходять через початок координат та розміщуються у першому і третьому квадрантах координатної площини як наслідок того, що резистор є споживачем електричної енергії. Якщо графік ВАХ резистора має вигляд прямої, то такий резистор називається **лінійним**. Для лінійного резистора справедливе таке співвідношення:

$$i = \frac{u}{R}; \text{ або } i = Gu. \quad (2.1)$$

Коефіцієнт  $R$  у співвідношенні (2.1) називають **опором** резистора і він є основним параметром резистора.

Поряд з опором лінійний резистор можна характеризувати також і **провідністю**  $G$ . Одиниця вимірювання опору – Ом, а також відповідні похідні – кОм (1 кілоом =  $10^3$  Ом), МОм (1 мегаом =  $10^6$  Ом). Провідність вимірюється у сименсах (Сим). Очевидно, провідність резистора є оберненою величиною до його опору ( $G = 1/R$ ).

Для нелінійного резистора (рис.2.2б) ВАХ є деякою кривою лінією. Параметри нелінійного резистора визначаються з таких співвідношень:

$$R_c = \frac{u}{i} = \frac{u}{f(u)}; \quad R_g = \frac{du}{di} = \left( \frac{df}{di} \right)^{-1}, \quad (2.2)$$

де  $R_c$  називають **статичним опором** резистора, а  $R_g$  – **динамічним або диференціальним опором**.

Очевидно, значення  $R_c$  і  $R_g$  залежать від напруги  $u$  чи струму  $i$  нелінійного резистора. Аналогічно вводять поняття статичної чи динамічної провідностей.

Як правило, статичний опір нелінійного резистора використовують для розрахунку схем постійного струму, а динамічний – у схемах змінного струму.

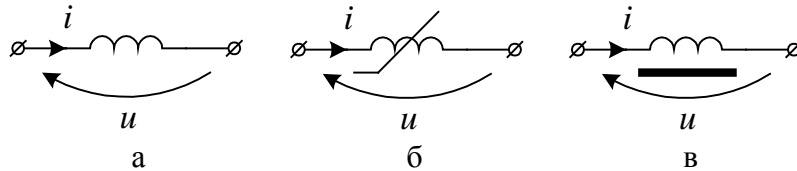
Як лінійні резистори в електронних колах застосовують провідники, виготовлені з металевого дроту чи плівки, графітові чи вугільні стержні або плівки.

**Потокозчеплення – це добуток магнітного потоку котушки на кількість витків її обвитки  $\Psi = n\Phi$ .**

Як нелінійні резистори найчастіше застосовують напівпровідникові структури.

### Котушка індуктивності

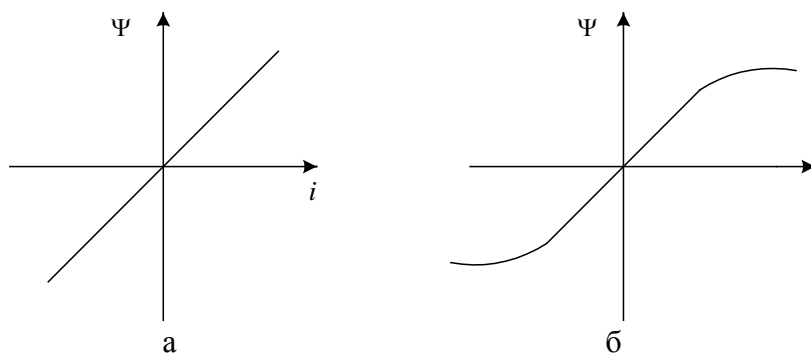
Конструктивно класична котушка індуктивності є циліндричним осердям, на якому намотана обвитка з металевого дроту. Осердя може виготовлятися як з феромагнітних, так і з інших матеріалів. Схемні позначення котушок індуктивності показано на рис.2.4.



**Рис. 2.4.** Схемні позначення котушок індуктивності: а – лінійної, б – нелінійної, в – з феромагнітним осердям

В ідеальних котушках індуктивності, які використовуються для побудови електричних схем, не враховується опір обвитки та розсіювання у просторі магнітного потоку.

Основною характеристикою котушки індуктивності є її **вебер-амперна характеристика**, що є функціональною залежністю потокозчеплення  $\Psi$  від струму  $i$ .



**Рис.2.5.** Вебер-амперна характеристика котушки індуктивності: лінійної (а) та нелінійної (б)

Як і резистори, котушки індуктивності бувають як лінійними, так і нелійними. Характеристика лінійної котушки показана на рис.2.5, а, а нелінійної – на рис.2.5, б. Як правило, нелінійні котушки індуктивності – це котушки, осердя яких виготовлено із феромагнетиків і їхні схемні позначення показані на рис.2.4, б та рис.2.4, в.

Котушки індуктивності, по суті, є консервативними елементами, бо вони перетворюють енергію електричного струму на енергію магнітного поля і навпаки в ідеальному випадку без втрат. Також котушки індуктивності зараховують до класу **реактивних** елементів електричних схем, оскільки у них взаємозв'язок струму та напруги описується диференціальним рівнянням.

Для лінійної котушки індуктивності справедливий такий вираз:

$$\Psi = Li \tag{2.3}$$

Коефіцієнт  $L$  називають **індуктивністю** котушки. Одиниця вимірювання індуктивності генрі (Гн), але на практиці, звичайно, використовують похідні від Гн, а саме мГн (1 мілігенрі =  $10^{-3}$  Гн), мкГн (1 мікрогенрі =  $10^{-6}$  Гн). Індуктивність є основним параметром котушки.

Для опису нелінійної котушки застосовують поняття **диференційної** індуктивності, яку визначаємо так

$$L_d = \frac{d\Psi}{di}. \quad (2.4)$$

Очевидно, значення диференційної індуктивності залежить від величини струму  $L_d = L_d(i)$ .

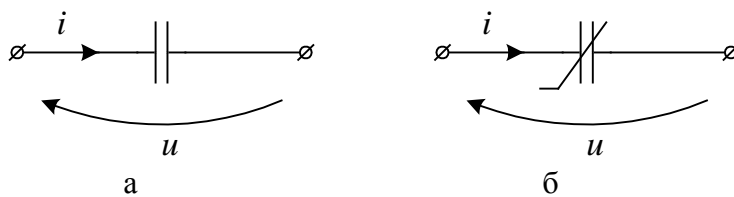
Нарешті наведемо формули, які пов'язують струм та напругу відповідно для нелінійної та лінійної котушок індуктивності

$$\text{а) } u = \frac{d\Psi}{dt} = L(i) \cdot \frac{di}{dt}; \quad \text{б) } u = L \frac{di}{dt}. \quad (2.5)$$

### Конденсатор

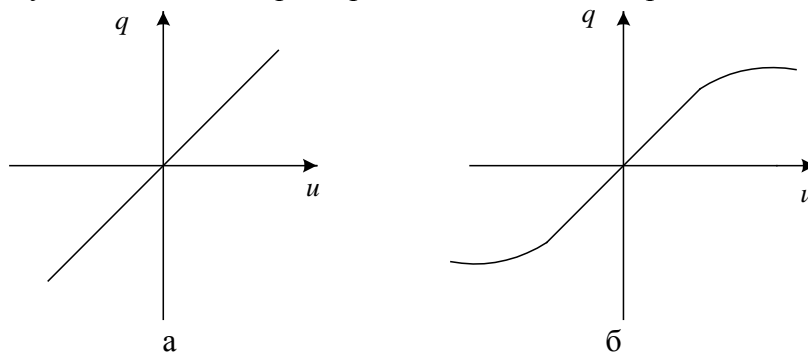
Конденсатор конструктивно виготовляється у вигляді двох провідних поверхонь, між якими розміщений діелектрик, наприклад, слюда, кераміка, папір, полімерна плівка, повітря, електриліт.

Схемне позначення конденсатора зображено на рис.2.6.



**Рис.2.6.** Схемне зображення конденсаторів: а – лінійного, б – нелінійного

Основною характеристикою конденсатора є залежність його заряду  $q$  від напруги  $u$ , яку називають кулон-вольотною характеристикою конденсатора.



**Рис.2.7.** Кулон-вольтна характеристика конденсаторів: а – лінійного та б – нелінійного

Ідеальний конденсатор, як і котушка, теж є консервативним елементом, оскільки він перетворює без втрат енергію електричного струму на енергію електричного поля і навпаки. Конденсатор також належить до класу реактивних елементів схем, оскільки його струм і напруга взаємозв'язані диференціальним рівнянням.

**Котушка індуктивності і конденсатор є реактивними консервативними елементами.**

Для лінійних конденсаторів (рис.2.7, а) справедлива залежність

$$q = CU \quad (2.6)$$

Коефіцієнт  $C$  називають ємністю конденсатора і він є основним його параметром. Одиниця вимірювання ємності – фарада (Ф), однак реально використовують дрібніші одиниці, такі, як мкФ (1 мікрофарада =  $10^{-6}$  Ф), нФ (1 нанофарада =  $10^{-9}$  Ф), пкФ (1 пікофарада =  $10^{-12}$  Ф).

Як параметр нелінійного конденсатора (рис.2.7, б) використовують диференційну ємність, що визначається так

$$C_d = \frac{dq}{du}, \quad (2.7)$$

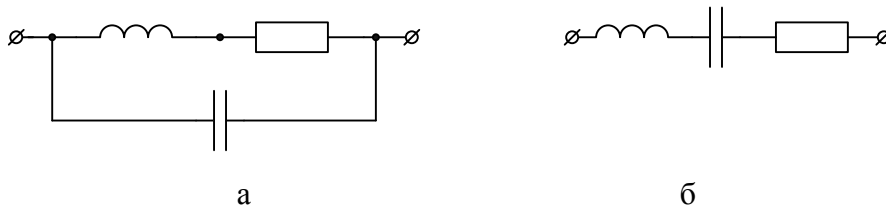
де  $C_d = C_d(u)$  є функцією напруги конденсатора.

Нелінійними конденсаторами є конденсатори з сегнетоелектричним діелектриком (вариконди), а також конденсатори, виконані на підставі напівпровідникового  $P-n$ -переходу (варикапи).

Струм та напруга нелінійного та лінійного конденсаторів взаємозв'язані такими співвідношеннями:

$$а) \quad i = \frac{dq(u)}{dt} = C_d \frac{du}{dt} \quad б) \quad i = c \frac{du}{dt} \quad (2.8)$$

На закінчення цього параграфу наведемо схеми, які відображають властивості реальних компонент електричного кола за допомогою описаних вище ідеальних схемних елементів (рис.2.8). Такі схеми називають схемами заміщення, або еквівалентними схемами.



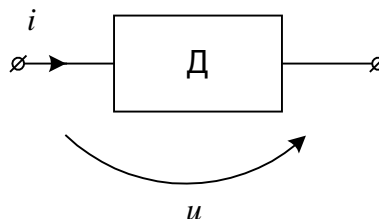
**Рис.2.8.** Схеми заміщення реальних компонент електричних кіл: а – резистора та котушки індуктивності, б – конденсатора

### 2.2.2. Джерела енергії

Джерела енергії, як вже зазначалось, віддають електричну енергію у зовнішнє коло, тобто їхня потужність є **від'ємною**.

Цей факт на схемі відображається вибраними додатними напрямками струмів і напруг, як показано на рис.2.9.

**Джерела енергії генерують електричну енергію в електричному колі.**



**Рис.2.9.** Схемне позначення джерела енергії

Джерело енергії характеризується **зовнішньою характеристикою**, тобто залежністю його струму від напруги, яка отримується у разі зміни опору навантаження, під'єданого до джерела від 0 до  $\infty$ . Для лінійних джерел енергії зовнішня характеристика має вигляд, показаний на рис.2.10.

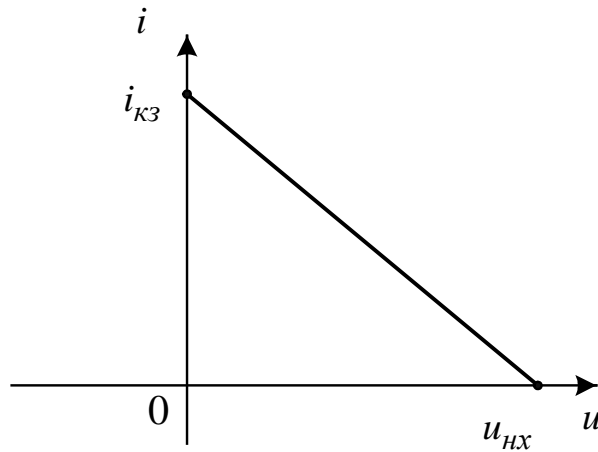


Рис.2.10. Зовнішня характеристика джерела енергії

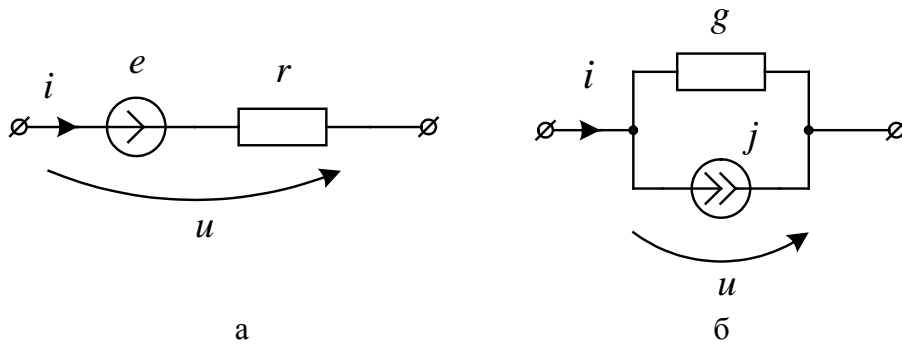
Як бачимо, така характеристика являє собою відтинку прямої, що лежить у першому квадранті координатної площини, причому кінці цього відтинка відповідають двом спеціальним режимам роботи джерела – короткого замикання (кз) та неробочого ходу (нх). Коротке замикання джерела здійснюється за нульового опору навантаження, а неробочий хід – за від’єданого навантаження, тобто його опір дорівнює нескінченності. Зазначені режими визначаються відповідними параметрами: струмом короткого замикання ( $i_{кз}$ ) та напругою неробочого ходу ( $u_{нх}$ ). Власне ці параметри повністю описують лінійне джерело енергії.

Рівняння, які описують графік зовнішньої характеристики джерела, можна записати так

$$а) u = e - ri \quad б) i = j - gu, \quad (2.9)$$

$$i_{кз} = j; \quad u_{нх} = e; \quad r = \frac{u_{нх}}{i_{кз}}; \quad g = \frac{i_{кз}}{u_{нх}}.$$


де  
Тоді у відповідність рівнянням можна поставити певні схеми, які є заступними схемами джерела енергії (рис.2.11).




**Ідеальними джерелами енергії є джерело струму і джерело ЕРС.**

Рис.2.11. Заступні схеми джерела енергії: а – неідеальне джерело ЕРС, б – неідеальне джерело струму

Зображені на рис.2.11 нові схемні елементи характеризуються так

 ідеальне джерело ЕРС (електрорушійної сили);

 ідеальне джерело струму

**Ідеальне джерело ЕРС** – це джерело енергії, напруга на затискачах якого не залежить від значення навантаження.

**Ідеальне джерело струму** – це джерело енергії, яке зумовлює у навантаженні сталі значення струму, що не залежить від його опору.

Очевидно, параметри обидвох заступних схем одного і того самого джерела енергії, зображених на рис.2.11, пов'язані між собою такими простими співвідношеннями:

$$r = \frac{1}{g}; \quad e = rj; \quad j = ge. \quad (2.10)$$

Зауважимо, що параметр  $r$  називають **внутрішнім опором** джерела ЕРС, а  $g$  – **внутрішньою провідністю** джерела струму. Розглянуті вище джерела енергії називають **автономними** джерелами, оскільки їхні параметри не залежать від струмів та напруг зовнішньої схеми.

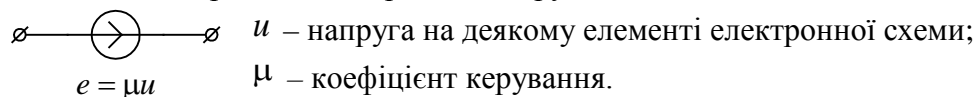
Водночас в теорії електричних кіл використовують спеціальні типи джерел, параметри яких є функціями певних струмів чи напруг цієї електричної схеми. Такі джерела енергії називають **неавтономними**, або **керованими**.

**Керовані джерела енергії використовують для побудови схем заміщення електронних компонент електричних кіл.**

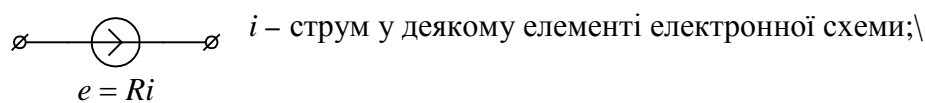
Основне призначення таких джерел – побудова схем заміщення електронних компонент електричних кіл, таких, як електронні лампи, транзистори, інтегральні схеми.

Розглянемо основні типи керованих джерел.

1. Джерело ЕРС, кероване напругою

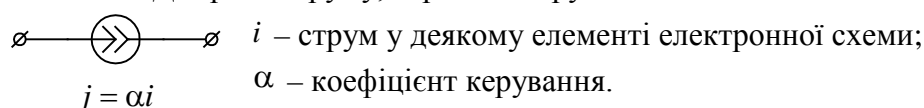


2. Джерело ЕРС, кероване струмом

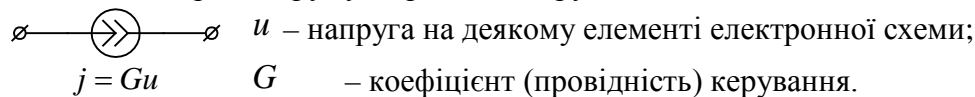


$R$  – коефіцієнт (опір) керування.

3. Джерело струму, кероване струмом



4. Джерело струму, кероване напругою



Розглянуті вище керовані джерела є лінійними, однак в окремих випадках застосовують складніші функціональні залежності  $e$  і  $j$  від струмів та напруг схеми. Останнім часом доволі часто використовують керовані джерела енергії, параметри яких залежать від декількох струмів чи напруг зовнішньої схеми.

**Математична модель електричного кола – це сукупність рівнянь, які описують процеси, що у ньому відбуваються.**

## 2.3. Математичні моделі електричних схем з двополюсниками

Електрична схема, як і будь-яка динамічна система характеризується певною сукупністю змінних, які визначають її стан. Як такі змінні найчастіше використовують струми та напруги окремих елементів схеми. Для математичного опису процесів в електричних колах необхідно утворити сукупність рівнянь, які б відображали взаємозалежності між змінними, що характеризують електричний стан кола. Таку сукупність рівнянь називають **математичною моделлю** електричного кола.

Рівняння, які утворюють математичну модель електричного кола, діляться на дві групи, перша з яких зумовлена взаємозв'язком струмів та напруг на окремих елементах схеми, а друга визначається способом з'єднання елементів у схемі. Рівняння першого типу називаються **компонентними** рівняннями, а другого – **топологічними**.

### 2.3.1. Повна система рівнянь електричної схеми

*Вузли та контури електричної схеми визначають спосіб з'єднання компонент схеми.*

Розглянемо електричну схему, яка складається з  $n$  елементів. Кількість змінних, які характеризують електричний стан такої схеми, очевидно, дорівнює  $2n$ , бо кожен двополюсний елемент характеризується струмом та напругою. Оскільки струми та напруги на кожному з елементів пов'язані відповідними співвідношеннями, їх можна записати у такому узагальненому вигляді:

$$F_k \left( u_k; i_k; \frac{du_k}{dt}; \frac{di_k}{dt} \right) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.11)$$

Сукупність виразів (2.11) утворює **систему компонентних рівнянь** електричної схеми, розмір якої, очевидно, дорівнює  $n$ . Наступні  $n$  рівнянь, необхідних для побудови математичної моделі схеми, визначимо із залежностей, зумовлених з'єднанням елементів у схему, тобто топологічних.

В електротехніці топологічні залежності визначаються законами Кірхгофа, для формування яких введемо деякі означення.

**Вузлом** електричної схеми називають місце з'єднання трьох або більше елементів схеми.

**Контуром** електричної схеми називають замкнуту послідовність, складену з елементів схеми.

**Системою незалежних контурів** електричної схеми називають сукупність контурів, кожен з яких відрізняється від інших хоча б одним елементом.

### Формулювання законів Кірхгофа

**Перший закон Кірхгофа** Алгебрична сума струмів елементів схеми, які утворюють вузол, дорівнює нулеві. Струми, які входять у вузол, беруться із знаком плюс, а ті, що виходять – із знаком мінус.

Математичний запис першого закону Кірхгофа має такий вигляд

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0 \quad (2.12)$$

*Повна система рівнянь електричного кола*

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0;$$

$$\sum_{k=1}^l u_k = 0;$$

$$F_k(u_k, i_k) = 0$$

$$k = \overline{1, n}.$$

**Другий закон Кірхгофа** Алгебрична сума напруг елементів схеми, які утворюють контур, дорівнює нулеві. Напруги, які збігаються з вибраним додатним напрямком обходу контуру, входять у суму із знаком “+”, а які не збігаються – беруться із знаком “-”.

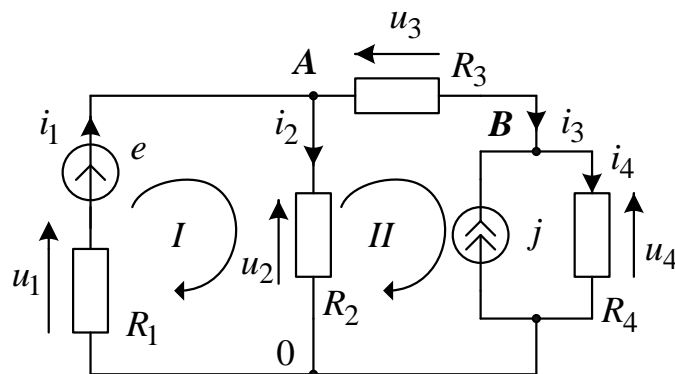
Математичний запис другого закону Кірхгофа такий

$$\sum_{k=1}^l u_k = 0 \quad (2.13)$$

Якщо записати рівняння (2.12) для усіх вузлів, крім одного, а рівняння (2.13) для всіх незалежних контурів, то вони разом з системою рівнянь (2.11) утворять математичну модель електричної схеми у вигляді повної системи рівнянь, в якій кількість рівнянь і невідомих дорівнює  $2n$ .

Як бачимо, сформувавши повну систему рівнянь електричної схеми доволі просто, однак така модель має істотний недолік, зумовлений великим розміром цієї системи.

**Приклад 2.1** Сформуємо повну систему рівнянь електричної схеми, показаної на рис.2.12.



**Рис.2.12.** Електрична схема до прикладу 2.1

Ця схема складається із чотирьох двополюсних елементів, тому що неідеальні джерела енергії вважаються одним елементом. Змінними, що визначають електричний стан схеми, є така сукупність струмів та напруг  $\{i_1, i_2, i_3, i_4, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ . Вузел у цій схемі – три, вони позначені великими буквами А, В, О, а контурів, що утворюють незалежну систему – два, вони позначені римськими цифрами, біля яких показаний додатний напрямок обходу контурів.

Запишемо систему компонентних рівнянь

$$u_1 = e - R_1 i_1; \quad u_2 = R_2 i_2; \quad u_3 = R_3 i_3; \quad u_4 = R_4 i_4.$$

Розглянувши два вузли (А, В) із трьох, запишемо співвідношення між струмами елементів згідно з першим законом Кірхгофа

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0; \quad i_3 + j - i_4 = 0.$$

Контурні залежності згідно з другим законом Кірхгофа записуються так:

$$e - u_1 - u_2 = 0; \quad u_2 - u_3 - u_4 = 0.$$

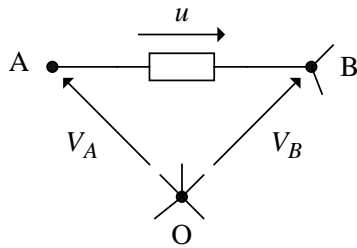
Об'єднавши записані вище рівняння і виконавши елементарні перетворення, отримуємо повну систему рівнянь електричної схеми у такому вигляді:



$$\begin{aligned}
u_1 + R_1 i_1 - e &= 0; \\
u_2 - R_2 i_2 &= 0; \\
u_3 - R_3 i_3 &= 0; \\
u_4 - R_4 i_4 &= 0; \\
i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\
i_3 + j - i_4 &= 0; \\
u_1 + u_2 &= e; \\
u_2 - u_3 - u_4 &= 0.
\end{aligned}$$

### 2.3.2. Метод вузлових напруг

Цей метод дає змогу будувати значно простіші математичні моделі електричних кіл за рахунок істотного зменшення кількості змінних, які характеризують їхній стан. Як змінні тут використовуються **вузлові напруги**, тобто різниці потенціалів між деяким вибраним вузлом для цієї схеми (базисним вузлом) та іншими вузлами. Очевидно, кількість вузлових напруг на одиницю менша за кількість вузлів схеми. Знаючи вузлові напруги схеми, легко визначити напругу на будь-якому елементі схеми, оскільки він обов'язково з'єднає якісь два вузли і тому ця напруга визначається як різниця відповідних вузлових напруг. Останнє показано на рис.2.13.



**Рис.2.13.** Зв'язок напруг елементів схеми з її вузловими напругами

O – базисний вузол;  $V_A, V_B$  – вузлові напруги вузлів A та B;  $u$  – напруга вибраного елемента схеми.

З рисунка видно, що згідно з другим законом Кірхгофа справедливим є

$$u = V_B - V_A. \quad (2.14)$$

Для виведення рівнянь електричної схеми у базисі вузлових напруг допустимо, що ми розглядаємо деяку електричну схему, що складається із резисторів та джерел струму, тобто узагальненим елементом цієї схеми є неідеальне джерело струму, зображене на рис.2.11, б. Розглянемо окремих вузол (не базисний) такої схеми. Очевидно, для цього вузла справедливий перший закон Кірхгофа

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0,$$

де  $i_k$  – струм  $k$ -го елемента, що з'єднується одним затискачем з вибраним вузлом, який позначимо буквою A, а другим – з деякими іншими вузлами, які позначатимемо буквою з індексом  $B_k$ . Ураховуючи співвідношення (2.9б), а також (2.14), запишемо вираз для струму  $i_k$ :

$$i_k = j_k - g_k u_k = j_k - g_k (V_A - V_{B_k}), \quad (2.15)$$

де  $j_k, g_k$  – параметри  $k$ -го елемента схеми;  $V_A, V_{B_k}$  – відповідно вузлові напруги.

Перепишемо вираз для закону Кірхгофа з урахуванням (2.15). Виконавши прості перетворення, отримуємо:

$$\left( \sum_{k=1}^m g_k \right) \cdot V_A - \sum_{k=1}^m g_k \cdot V_{B_k} = \sum_{k=1}^m j_k \quad (2.16)$$

Записавши рівняння виду (2.16) для кожного з  $n-1$  вузлів схеми і об'єднавши їх у систему, одержимо математичну модель схеми у вигляді **системи рівнянь вузлових напруг**, яку зручно записати у такому матричному вигляді:

$$\mathbf{Y}\bar{\mathbf{V}}=\bar{\mathbf{J}}, \quad (2.17)$$

де  $\bar{\mathbf{V}}$  – вектор-стовпчик, компонентами якого є  $(n-1)$  вузлових напруг схеми;  $\bar{\mathbf{J}}$  –  $(n-1)$ -вимірний вектор, що формується із струмів ідеальних джерел струмів схеми;  $\mathbf{Y}$  – квадратна матриця вузлових провідностей схеми.

Для формування матриці  $\mathbf{Y}$  та вектора  $\bar{\mathbf{J}}$  існують прості правила; урахувавши, що кожен рядок та стовпчик матриці  $\mathbf{Y}$  відповідає певному вузлу схеми, сформулюємо їх.

Діагональні елементи матриці  $\mathbf{Y}$  утворюються підсумуванням провідностей елементів схеми, дотичних до відповідного вузла.

Позадіагональний елемент матриці  $\mathbf{Y}$  визначається провідністю елемента схеми, який з'єднує відповідні вузли, взяті із протилежним знаком.

Компонента вектора  $\bar{\mathbf{J}}$  визначається як алгебрична сума струмів джерел струму, що входять у відповідний вузол схеми.

### Приклад 2.2

Розглянемо схему, показану на рис.2.14, і запишемо для неї матрицю  $\mathbf{Y}$  і вектор  $\bar{\mathbf{J}}$ .

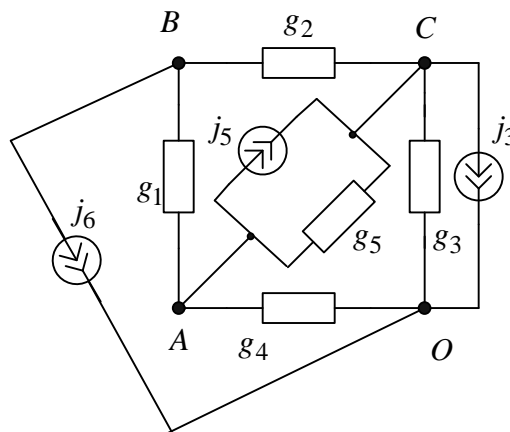


Рис.2.14. Електрична схема до прикладу 2.2

Вибравши як базисний вузол схеми вузол  $O$ , згідно з наведеними вище правилами, запишемо матричні коефіцієнти рівняння вузлових напруг (2.17)

*Контурні струми – це певна математична абстракція, яка дає змогу легко визначити струми реальних компонент електричного кола.*

$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_1 + g_4 + g_5 & -g_1 & -g_5 \\ -g_1 & g_1 + g_2 & -g_2 \\ -g_5 & -g_2 & g_2 + g_3 + g_5 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \bar{\mathbf{J}} = \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} -j_5 \\ -j_6 \\ j_5 - j_3 \end{bmatrix}.$$

### 2.3.3. Рівняння контурних струмів

Ця математична модель використовує як змінні, що характеризують електричний стан кола, **контурні струми**, тобто струми, які циркулюють у деякому контурі схеми. Контурні струми і

струми елементів електричної схеми пов'язані простими лінійними співвідношеннями, а саме струм будь-якого елемента схеми визначається як алгебрична сума контурних струмів контурів, у які цей елемент входить. Знак доданка у цій сумі визначається співвідношенням напрямків струмів контурів і струму цього елемента.

Зауважимо, що у цьому методі беруться до уваги контурні струми лише системи незалежних контурів.

Для виведення рівнянь контурних струмів розглянемо електричну схему, що складається з резисторів та джерел ЕРС, тобто в загальному випадку кожен елемент можна подати як неідеальне джерело ЕРС (рис.2.11, а). На підставі другого закону Кірхгофа запишемо рівняння для деякого контуру

$$\sum_{k=1}^l u_k = 0$$

і врахувавши співвідношення (2.9а), отримаємо

$$\sum_{k=1}^l u_k = \sum_{k=1}^l (e_k - r_k i_k) = 0. \quad (2.18)$$

Визначимо струми окремих елементів схеми через контурні струми

$$i_k = \sum_{s=1}^m I_s, \quad (2.19)$$

де  $I_s$  – контурні струми контурів до складу яких входить  $k$ -й елемент схеми. Виконавши певні перестановки у рівнянні (2.18) і врахувавши співвідношення (2.19), одержимо рівняння контурних струмів для вибраного контуру у такому вигляді

$$\sum_{k=1}^l r_k \cdot \sum_{s=1}^m I_s = \sum_{k=1}^l e_k. \quad (2.20)$$

Записавши такі рівняння для всіх контурів із незалежної системи контурів, отримаємо систему рівнянь контурних струмів для розглянутої схеми, яку зручно записати у матричному вигляді

$$\mathbf{Z} \vec{I} = \vec{E}, \quad (2.21)$$

де  $\mathbf{Z}$  – матриця опорів системи рівнянь контурних струмів;  $\vec{E}$  – вектор ЕРС контурів;  $\vec{I}$  – вектор контурних струмів. Елементи матриці  $\mathbf{Z}$  та вектор  $\vec{E}$  визначаються за такими правилами.

**Діагональні елементи** матриці  $\mathbf{Z}$  є сумою опорів компонентів схеми, що утворюють контур, який відповідає цьому елементу.

**Позадіагональний елемент** матриці  $\mathbf{Z}$  є сумою опорів компонентів схеми, які є спільними для двох контурів, що відповідають цьому елементу, причому ця сума береться із знаком “+”, якщо напрямки обходів контурів у спільних елементах схеми збігаються і “-” коли вони є протилежними.

**Компоненти вектора**  $\vec{E}$  дорівнюють алгебричній сумі ЕРС джерел, які входять у відповідний контур.

**Приклад 2.3** Складемо рівняння контурних струмів для такої схеми.

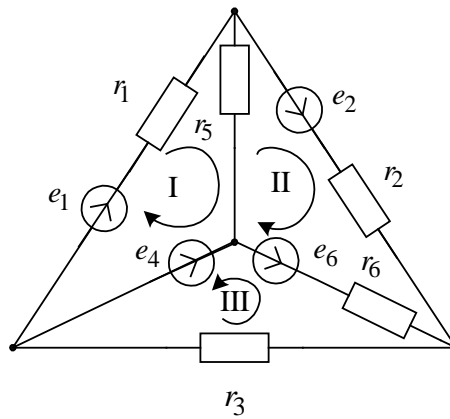


Рис.2.15. Схема до прикладу 2.3

Систему незалежних контурів цієї схеми утворюють три контури, позначені римськими цифрами. Додатні напрямки обходу контурів показані на рис.2.15. Запишемо матрицю  $\mathbf{Z}$  та вектор  $\vec{E}$  для цієї схеми згідно з наведеними вище правилами.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 I & II & III \\
 \hline
 I & \begin{array}{|c|c|c|} \hline r_1 + r_5 & -r_5 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 II & \begin{array}{|c|c|c|} \hline -r_5 & r_2 + r_5 + r_6 & r_6 \\ \hline \end{array} \\
 III & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & r_6 & r_3 + r_6 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 ; \vec{E} = \begin{array}{c}
 I \\
 II \\
 III \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline e_1 - e_4 \\ e_2 - e_6 \\ -e_4 - e_6 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Навпроти рядків та стовпчиків матриці  $\mathbf{Z}$  та вектора  $\vec{E}$  вказані відповідні контури.

## 2.4. Багатополюсні елементи електричних схем

У сучасних електронних колах поряд із компонентами, які мають два затискачі (двополюсники), використовуються і компоненти, які мають більше від двох затискачів для під'єднання їх до зовнішнього кола. Наприклад, це можуть бути транзистори, інтегральні схеми тощо. Такі елементи називаються **багатополюсними елементами, або багатополюсниками**.

Схемне зображення багатополюсника показано на рис.2.16.

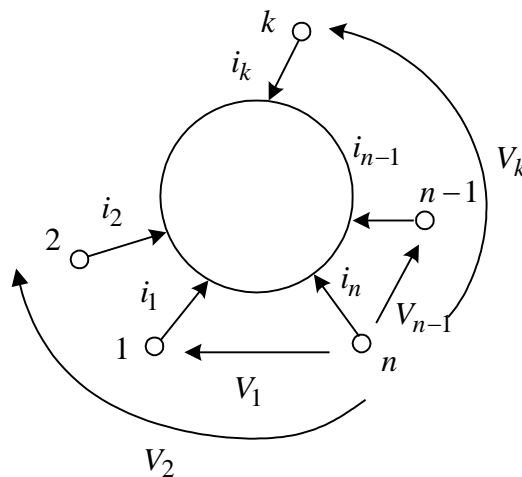


Рис.2.16. Схемне зображення багатополюсника

Схемний елемент, зображений на рис.2.16, називають **багатополюсником** або, конкретніше,  $n$ -полюсником, а його виводи – **полюсами**. На цьому самому рисунку показано **полюсні струми та напруги** такого багатополюсника. Як бачимо, полюсні напруги – це не що інше, як вузлові напруги, визначені стосовно деякого вибраного полюса багатополюсника (у цьому разі полюса  $n$ ). Тобто кількість полюсних напруг у  $n$ -полюсника дорівнює  $n-1$ , незалежних струмів у  $n$ -полюснику є теж  $n-1$ , оскільки струм базисного полюса згідно з першим законом Кірхгофа можна виразити через інші полюсні струми багатополюсника

$$i_n = -\sum_{k=1}^{n-1} i_k \quad (2.22)$$

Очевидно, між струмами та напругами багатополюсника існує взаємозв'язок, який зручно записувати у вигляді таких матричних рівнянь

$$\text{а) } \vec{i} = \mathbf{Y} \cdot \vec{V} - \vec{j} \quad \text{б) } \vec{V} = \mathbf{Z} \cdot \vec{i} - \vec{E}, \quad (2.23)$$

де  $\vec{i} = [i_1, i_2, \dots, i_{n-1}]^T$ ;  $i$  – вектор полюсних струмів багатополюсника;  $\vec{V} = [V_1, V_2, \dots, V_{n-1}]^T$  – вектор полюсних напруг;  $\vec{j}$  – вектор струмів внутрішніх джерел багатополюсника;  $\vec{E}$  – вектор ЕРС внутрішніх джерел багатополюсника;  $\mathbf{Y}$  – матриця провідностей багатополюсника,  $\mathbf{Z}$  – матриця опорів багатополюсника.

Рівняння (2.23а) – називають **рівнянням багатополюсника в  $Y$ –параметрах**, а рівняння (2.23б) – **рівнянням багатополюсника в  $Z$ – параметрах**. Очевидно, обидва рівняння пов'язані, зокрема  $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ . Діагональні елементи матриці  $\mathbf{Y}$  ( $\mathbf{Z}$ ) називають власними провідностями (опорами) полюсів, а позадіагональні – взаємними провідностями (опорами).

Доволі часто у теорії кіл окремо розглядають спеціальний тип багатополюсників, які називають **прохідними чотириполюсниками** (рис.2.17).

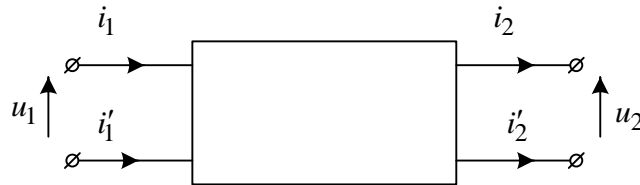


Рис.2.17. Зображення прохідного чотириполюсника

Оскільки у прохідному чотириполюснику обов'язковими є умови  $i_1 = -i_1'$ ;  $i_2 = -i_2'$ , то такий багатополюсник характеризується лише чотирма струмами та напругами, зокрема,  $i_1$  та  $u_1$  – вхідний струм і напруга відповідно,  $i_2$  та  $u_2$  – вихідні струм і напруга.

Прохідними чотириполюсниками зручно зображати такі пристрої електронних схем, як фільтри, підсилювачі, випрямлячі тощо.

Будемо розглядати лише **пасивні чотириполюсники**, тобто такі прохідні чотириполюсники, які не містять джерел енергії. Для таких чотириполюсників запишемо рівняння у різних формах.

а) рівняння прохідного чотириполюсника в  $Y$  – параметрах

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}u_1 + y_{12}u_2 \\ i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2 ; \end{cases} \quad (2.24)$$

б) рівняння прохідного чотириполюсника в  $z$  – параметрах

$$\begin{cases} u_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ u_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 ; \end{cases} \quad (2.25)$$

в) рівняння прохідного чотириполюсника у гібридних параметрах

$$\begin{cases} u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2 ; \end{cases} \quad (2.26)$$

г) рівняння прохідного чотириполюсника в  $a$  – параметрах

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}u_2 + a_{12}i_2 \\ i_1 = a_{21}u_2 + a_{22}i_2 . \end{cases} \quad (2.27)$$

Зауважимо, що рівняння (2.26) часто використовують для опису таких компонент електронних кіл, як біполярні транзистори, а рівняння (2.27) зручні для опису класичних  $LC$  – фільтрів та процесів у довгій лінії.

На прикладі рівнянь чотириполосника в  $a$  – параметрах покажемо, як можна інтерпретувати конкретні параметри чотириполосника. З рівняння (2.27) можна записати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad a_{11} &= \left. \frac{u_1}{u_2} \right|_{i_2 = 0}; & \text{б)} \quad a_{12} &= \left. \frac{u_1}{i_2} \right|_{u_2 = 0}; \\ \text{в)} \quad a_{21} &= \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{i_2 = 0}; & \text{д)} \quad a_{22} &= \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{u_2 = 0}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Із поданих співвідношень випливає, що коефіцієнт  $a_{11}$  можна трактувати як обернене значення коефіцієнта передавання напруги чотириполосника із входу на вихід за неробочого режиму на виході.

Аналогічно коефіцієнт  $a_{22}$  є оберненим значенням коефіцієнта передавання струму при короткому замиканні вихідних затискачів чотириполосника.

Водночас коефіцієнт  $a_{12}$  є відповідним передавальним опором для режиму короткого замикання, а  $a_{21}$  – передавальною провідністю для неробочого ходу на виході.

Коефіцієнти рівнянь (2.24) – (2.27) – тобто параметри чотириполосника взаємозв'язані і цей зв'язок легко знайти за допомогою простих алгебричних перетворень.

Доволі часто для характеристики прохідних чотириполосників використовують такі параметри, як **коефіцієнти передавання**:

$$K_u = \frac{u_2}{u_1} \text{ – коефіцієнт передавання напруги;}$$

$$K_i = \frac{i_2}{i_1} \text{ – коефіцієнт передавання струму.}$$

## 2.5. Особливості формування математичних моделей електричних схем з багатополосниками

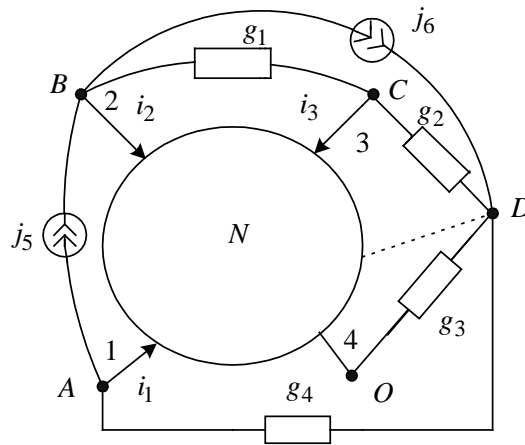
Під час формування математичних моделей схем з багатополосниками виникають певні особливості і тому наведені в п. 2.3 правила формування рівнянь необхідно узагальнити. Для прикладу розглянемо формування рівняння вузлових напруг електричної схеми, в якій є один багатополосник. У такому разі зручно використовувати для його опису математичну модель у вигляді рівняння в  $\mathbf{Y}$  – параметрах (2.43а). Також як базисний вузол схеми рекомендується вибирати вузол, до якого приєднаний базисний полюс багатополосника. У разі виконання вказаних умов правила формування елементів матриці  $\mathbf{Y}$  та вектора  $\vec{J}$  (§2.3.2) узагальнюються так.

**Діагональні елементи** матриці вузлових провідностей є сумою провідностей двополосних елементів схеми та власних провідностей полюсів багатополосника, які утворюють відповідний вузол.

**Позадіагональні елементи** матриці вузлових провідностей дорівнюють сумі провідностей двополосних елементів схеми, які з'єднують відповідні вузли схеми, взятій із протилежним знаком, та взаємних провідностей багатополосника полюсів, дотичних до вказаних вузлів.

**Компоненти вектора**  $\vec{J}$  є алгебричною сумою струму джерел струмів, а також відповідних компонент вектора струмів  $\vec{j}$  багатополосника.

**Приклад 2.4.** Запишемо рівняння вузлових напруг для схеми, зображеної на рисунку.



**Рис.2.18.** Електрична схема до прикладу 2.4

Рівняння чотирьохполюсника, показаного на схемі, запишемо у такому вигляді

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_{N1} \\ j_{N2} \\ j_{N3} \end{bmatrix}$$

Вузол O вибираємо як базисний, а відповідно для полюсних напруг вузлів A, B, C, D запишемо матрицю  $\mathbf{Y}$  та вектор  $\vec{J}$ .

	A	B	C	D
A	$g_4 + y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$-g_4$
B	$y_{21}$	$g_1 + y_{22}$	$y_{23} - g_1$	$0$
C	$y_{31}$	$y_{32} - g_1$	$g_1 + g_2 + y_{33}$	$-g_2$
D	$-g_4$	$0$	$-g_2$	$g_2 + g_3 + g_4$

A	$j_{N1} - j_5$
B	$j_5 - j_6 + j_{N2}$
C	$j_{N3}$
D	$j_6$

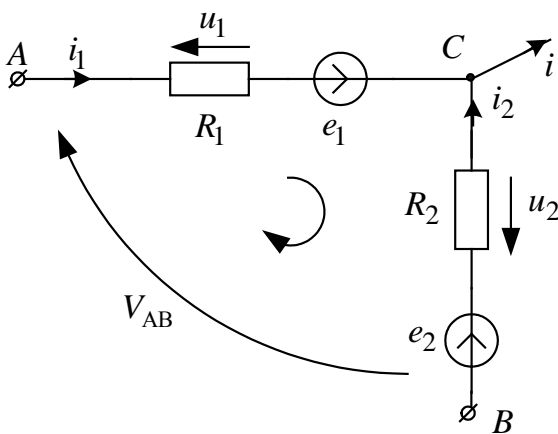
Подібно можна формувати рівняння вузлових напруг схем із декількома багатополіусниками, базисні вузли яких під'єднуються до одного вузла.

## Контрольні питання до розділу 2

1. Дайте означення електричного кола та електричної схеми.
2. Назвіть ідеальні елементи електричних схем.
3. Що є основною характеристикою резистора?
4. Який елемент схеми характеризує вебер-амперна характеристика?
5. Які Ви знаєте реактивні елементи електричних схем?
6. Наведіть приклади нелінійних конденсаторів.
7. Як отримати зовнішню характеристику джерела енергії?
8. Який вигляд має зовнішня характеристика ідеального джерела струму (напруги)?
9. Які Ви знаєте параметри джерела енергії?
10. Де використовують керовані джерела енергії?
11. Які змінні характеризують електричний стан схеми?
12. Компонентні та топологічні рівняння електричного кола.
13. Коли зручно використовувати для опису електричної схеми рівняння вузлових напруг?

14. Порівняйте метод вузлових напруг та контурних струмів.
15. Який основний недолік має математична модель схеми у вигляді повної системи рівнянь?
16. Система полюсних напруг та струмів багатополосника.
17. Прохідний чотириполосник, особливості його математичного опису.
18. Знайдіть вираз  $h$ -параметрів прохідного чотириполосника через його  $y$ -параметри.
19. Власні та взаємні провідності багатополосника.

### Приклади розв'язання типових задач



**Задача 2.1.** Визначити напругу  $U_{AB}$  в колі, якщо:

$$R_1 = 3 \text{ Ом}; R_2 = 5 \text{ Ом};$$

$$e_1 = 20 \text{ В}; e_2 = 30 \text{ В};$$

$$i_1 = 2 \text{ А}; i = 3 \text{ А}.$$

Рис. 2.1. 3Д.

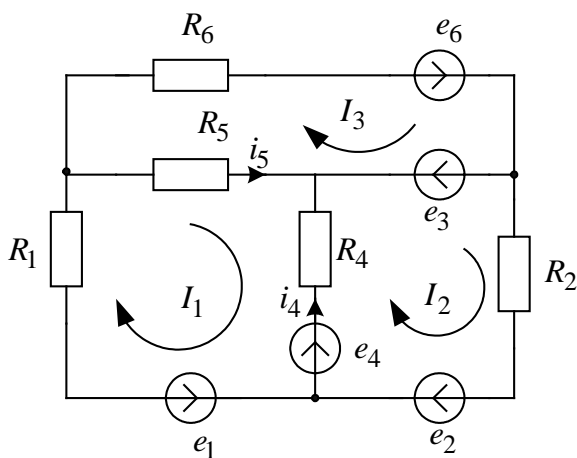
#### Розв'язання

Вибравши напрям обходу контуру за стрілкою годинника та врахувавши, що  $u_1 = R_1 i_1$  і  $u_2 = R_2 i_2$ , запишемо рівняння для нього за другим законом Кірхгофа:  $V_{AB} - R_1 i_1 + e_1 + R_2 i_2 - e_2 = 0$ .

Для визначення струму  $i_2$  скористаємось першим законом Кірхгофа:  $i_2 = i - i_1 = 3 - 2 = 1 \text{ А}$ .

Тоді отримаємо:

$$V_{AB} = R_1 i_1 - e_1 - R_2 i_2 + e_2 = 11 \text{ В}.$$



**Задача 2.2.** Визначити струми  $i_4$  та  $i_5$  методом контурних струмів, якщо:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}; R_2 = 3 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 4 \text{ Ом}; R_4 = 5 \text{ Ом}; R_5 = 6 \text{ Ом}; R_6 = 4 \text{ Ом}.$$

$$e_1 = 20 \text{ В}; e_2 = 8 \text{ В};$$

$$e_3 = 10 \text{ В}; e_4 = 16 \text{ В};$$

$$e_6 = 10 \text{ В}.$$

Рис.2.2. 3Д.

#### Розв'язання

Виберемо три незалежні контури з контурними струмами  $I_1$  та  $I_2, I_3$ .

Сформуємо систему рівнянь за методом контурних струмів і розв'яжемо її:



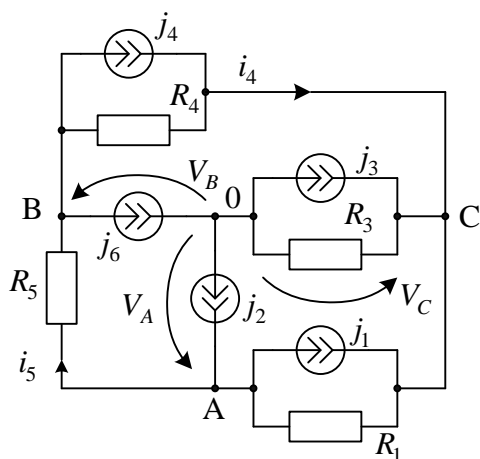
$$\begin{cases} (R_1 + R_5 + R_4)I_1 - R_4I_2 - R_5I_3 = -e_1 - e_4 \\ -R_4I_1 + (R_2 + R_4)I_2 = e_2 + e_4 - e_3 \\ -R_5I_1 + (R_5 + R_6)I_3 = e_3 - e_6 \end{cases}$$

Підставимо числові дані і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 21I_1 - 5I_2 - 6I_3 = -36 \\ -5I_1 + 8I_2 = 14 \\ -6I_1 + 10I_3 = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = -1,91 \text{ А}; \quad I_2 = 0,56 \text{ А}; \quad I_3 = -1,15 \text{ А};$$

Струми віток:  $i_4 = I_2 - I_1 = -2,457 \text{ А}; \quad i_5 = I_1 - I_3 = -0,76 \text{ А}.$



**Задача 2.3.** Методом вузлових напруг визначити струми  $i_5$  та  $i_4$ , якщо:

$$R_1 = 9 \text{ Ом};$$

$$R_3 = R_5 = 5 \text{ Ом}; \quad R_4 = 9 \text{ Ом};$$

$$j_1 = 1 \text{ А}; \quad j_2 = j_6 = 1 \text{ А};$$

$$j_3 = 2,5 \text{ А}; \quad j_4 = 2 \text{ А}.$$

Рис.2.3. ЗД

### Розв'язання

Виберемо як базисний вузол точку "0". Тоді вузлові напруги будуть  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_C$ . Система рівнянь за методом вузлових напруг буде мати вигляд:

$$\begin{cases} (G_5 + G_1)V_A - G_5V_B - G_1V_C = j_2 - j_1 \\ -G_5V_A + (G_3 + G_4)V_B - G_4V_C = -j_6 - j_4 \\ -G_1V_A - G_4V_B + (G_1 + G_3 + G_4)V_C = j_1 + j_3 + j_4 \end{cases}$$

Підставимо числові значення параметрів:

$$\begin{cases} 0,31 \cdot V_A - 0,2 \cdot V_B - 0,11 \cdot V_C = 0 \\ -0,2 \cdot V_A + 0,22 \cdot V_B - 0,11 \cdot V_C = -3 \\ -0,11 \cdot V_A - 0,11 \cdot V_B + 0,42 \cdot V_C = 5,5. \end{cases}$$

З цих рівнянь отримаємо:  $V_A = -58 \text{ В}, \quad V_B = -77 \text{ В}, \quad V_C = -22 \text{ В}.$

На підставі зв'язку між вузловими напругами та напругами гілок визначимо шукані струми:

$$V_A = V_B + i_5 R_5, \quad i_5 = \frac{V_A - V_B}{R_5};$$

$$V_B = V_C + i_4 R_4, \quad i_4 = \frac{V_B - V_C}{R_4}.$$

**Задача 2.4.** Знайти вирази, що дають змогу визначити  $h$  – параметри прохідного чотириполюсника через відомі його  $a$  – параметри.

## Розв'язання

Для розв'язання цієї задачі поділимо друге рівняння із системи (2.27) на  $a_{22}$  і зробимо відповідні перенесення з його правої частини у ліву і навпаки.

$$i_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot i_1 - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot u_2$$

Порівнявши одержаний вираз з другим рівнянням з (2.26), отримуємо

$$h_{21} = \frac{1}{a_{22}}; \quad h_{22} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Для визначення коефіцієнтів  $h_{21}$  і  $h_{22}$  отриманий вище вираз для  $i_2$  підставимо у перше рівняння (2.27).

$$u_1 = a_{11}u_2 + a_{12} \left( \frac{1}{a_{22}} i_1 - \frac{a_{21}}{a_{22}} u_2 \right).$$

Після відповідних перетворень маємо

$$u_1 = \frac{a_{12}}{a_{22}} i_1 + \left( a_{11} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{22}} \right) u_2.$$

Отже,

$$h_{11} = \frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad h_{12} = a_{11} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{22}}.$$

## Приклади задач для самоконтролю

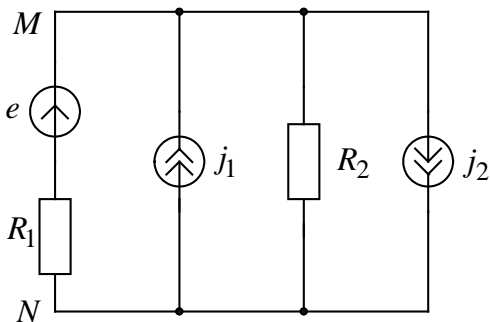


Рис.2.5. 3Д.

**Задача 2.5.** Визначити величину і напрям струму у гілці  $MN$ , якщо:  $e = 30$  В,  $R_1 = R_2 = 5$  Ом,  $j_1 = 20$  А,  $j_2 = 10$  А.

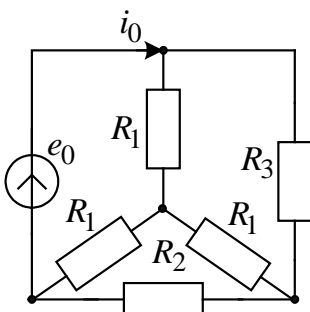
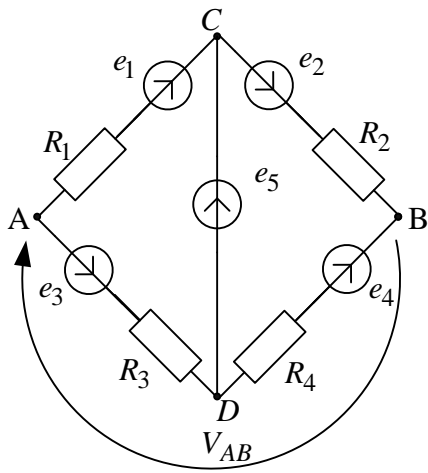


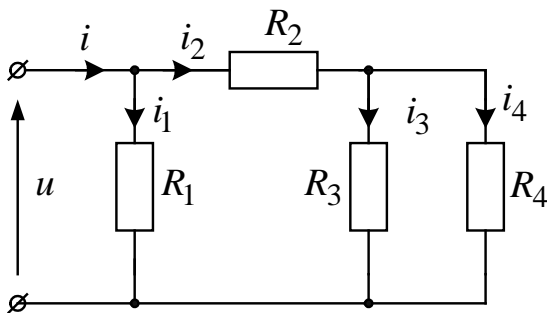
Рис. 2.6.3Д.

**Задача 2.6.** Для заданого кола визначити струм  $i_0$ , якщо:  $e_0 = 80$  В,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $R_3 = 6$  Ом.



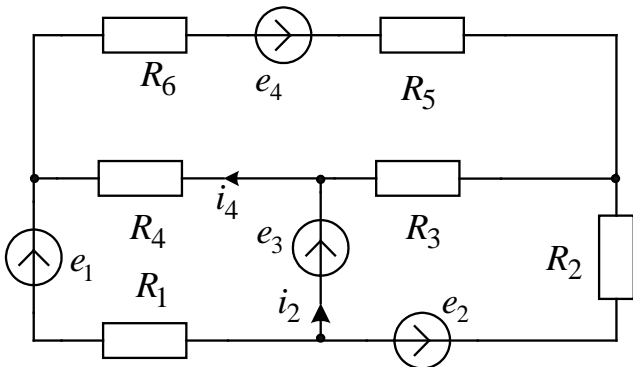
**Задача 2.7.** Дано:  $e_1 = e_4 = 80$  В,  
 $e_2 = 60$  В,  $e_3 = 20$  В,  
 $e_5 = 20$  В,  
 $R_1 = R_3 = 10$  Ом,  
 $R_2 = R_4 = 5$  Ом.  
 Визначити напругу  $V_{AB}$ .

Рис. 2.7. 3Д.



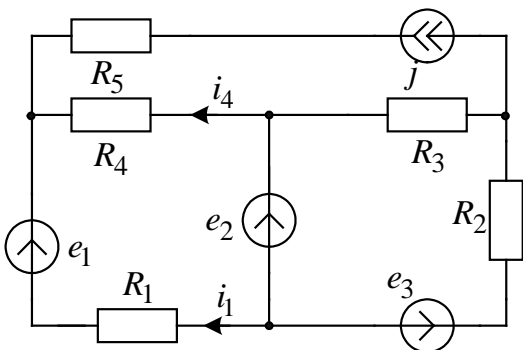
**Задача 2.8.** Визначити струм  $i$  та споживану колом потужність, якщо:  
 $u = 50$  В;  
 $R_1 = R_2 = 5$  Ом;  
 $R_3 = R_4 = 10$  Ом.

Рис. 2.8. 3Д.



**Задача 2.9.** Визначити струми  $i_2$  та  $i_4$  методом контурних струмів, якщо:  
 $R_1 = 9$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  
 $R_3 = 4$  Ом,  $R_4 = 7$  Ом,  
 $R_5 = 5$  Ом,  $R_6 = 5$  Ом,  
 $e_1 = 16$  В,  $e_2 = 10$  В,  
 $e_3 = 6$  В,  $e_4 = 18$  В.

Рис. 2.9. 3Д.



**Задача 2.10.** Визначити струми  $i_1$  та  $i_4$ , якщо:  
 $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом,  
 $R_3 = 3$  Ом,  $R_4 = 30$  Ом,  
 $R_5 = 10$  Ом  
 $e_1 = 6$  В,  $e_2 = 16$  В,  $e_3 = 10$  В,  
 $j = 2$  А.

Рис. 2.10. 3Д.

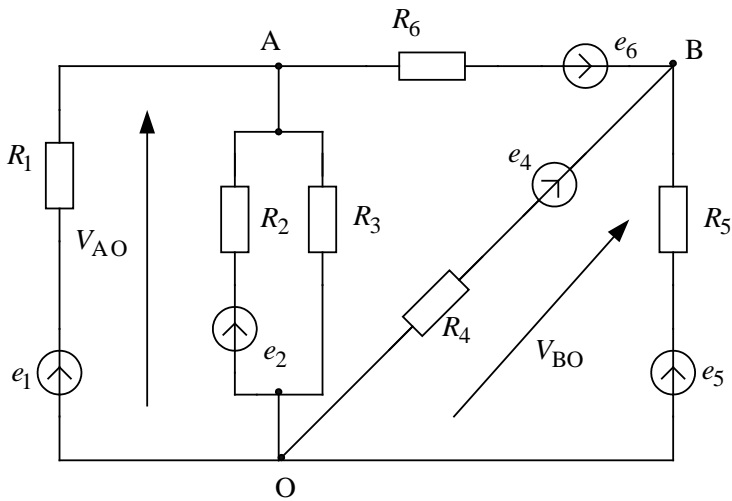


Рис. 2.11. ЗД.

**Задача 2.11.**  
Для заданої схеми кола скласти рівняння за методом вузлових напруг для вузла В, приймаючи за базовий вузол точку 0.

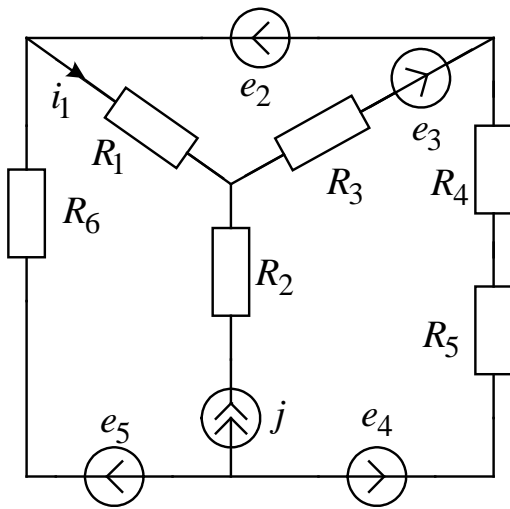


Рис. 2.12. ЗД.

**Задача 2.12.** Обчислити струм  $i_1$ , застосувавши теорему Тевенена, якщо:  
 $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 7 \text{ Ом}$ ,  
 $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 7 \text{ Ом}$ ,  
 $R_5 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 2 \text{ Ом}$ ,  
 $e_2 = 6 \text{ В}$ ,  $e_3 = 10 \text{ В}$ ,  $e_4 = 8 \text{ В}$ ,  
 $e_5 = 13 \text{ В}$ ,  $j = 1 \text{ А}$ .

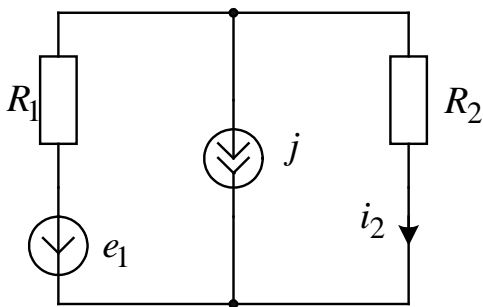


Рис. 2.13. ЗД.

**Задача 2.13.** Застосувавши принцип накладання, обчислити струм  $i_2$ , якщо:  
 $e_1 = 20 \text{ В}$ ;  $j = 6 \text{ А}$ ;  
 $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 3 \text{ Ом}$ .

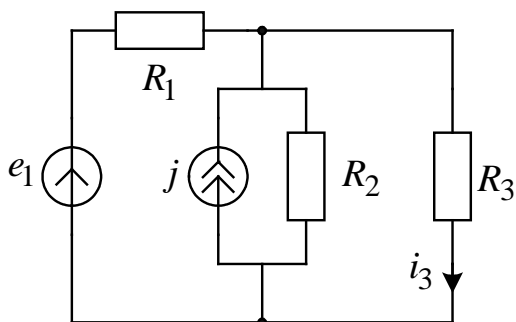


Рис. 2.14. ЗД.

**Задача 2.14.** Застосувавши принцип накладання, визначити струм  $i_3$ , якщо:  
 $e_1 = 30 \text{ В}$ ;  $j = 125 \text{ мА}$ ;  
 $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ;  
 $R_3 = 300 \text{ Ом}$ .

### 3. Компоненти електронних кіл

Електронні кола є частинним видом електричних кіл і відрізняється лише спеціальними компонентами, функціонування яких зумовлюється певними електронними ефектами. Ці ефекти можуть викликатися термоелектронною емісією, процесами на контактах (переходах) різнотипних провідників тощо. Важливо, що за допомогою компонент електронних кіл можна збільшувати енергію електричних сигналів. Здебільшого електронні компоненти є багатополюсними, тобто для їхнього аналізу зручно використовувати підходи, описані в § 2.4 та § 2.5. Однак іноді вдається замінити конкретну багатополюсну електронну компоненту деяким з'єднанням класичних дво полюсних компонент (заступними схемами), описаних в § 2.2 цього підручника, які, як правило, містять керовані джерела енергії.

Зазначені особливості електронних кіл опишемо більш детально.

#### 3.1. Напівпровідникові діоди

Напівпровідниковими діодами називають напівпровідникові прилади, основою яких є контакт напівпровідників різних типів, які мають два виводи. Як контакт використовують звичайний p-n-p – перехід, гетероперехід або бар'єр Шоттки. Усі напівпровідникові діоди можна поділити на дві групи: загального та спеціального призначення.

**Опір діода залежить від напрямку струму, що протікає через нього.**

Діоди загального призначення, завдяки здатності пропускати струм в одному напрямі і не пропускати в протилежному використовують переважно для випрямлення змінного струму. Діоди, призначені для випрямлення змінного струму низької частоти, називають випрямними діодами. Діоди, які призначені для випрямлення змінних струмів високої частоти, називають високочастотними діодами. До діодів загального призначення також належать імпульсні діоди, які використовують в імпульсних та цифрових пристроях.

Діоди спеціального призначення ґрунтуються на використанні особливих фізичних властивостей, які проявляються в p-n – переходах, а саме: явищі електричного пробиття, наявності бар'єрної ємності, тунельному ефекті тощо. До них належать стабілітрони, варикапи, тунельні діоди тощо.

Схемні позначення діодів різного призначення подано на рис. 3.1. Вивід діодів, під'єднаний до p-області, називають анодом, а вивід, під'єднаний до n-області – катодом.

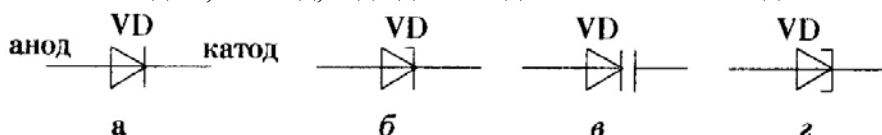


Рис. 3.1. Схемні позначення діодів: загального призначення (а), стабілітронів (б), варикапів (в), тунельних діодів (г)

Зауважимо, що ВАХ діодів дещо відрізняються від ВАХ ідеального p-n – переходу. Їхній вигляд залежить від типу напівпровідникового матеріалу, площі поперечного перерізу p-n – переходу, концентрації домішок тощо. У разі прямого вмикання діодів істотний вплив на хід характеристики має падіння прикладеної напруги в p- і n-областях, а особливо в базовій області, опір якої  $R_B$  може дорівнювати десяткам Ом. З урахуванням цього пряму гілку ВАХ часто описують формулою:

$$i = I_0 \left( e^{(u - iR_B)/\phi_T} - 1 \right), \quad (3.1a)$$

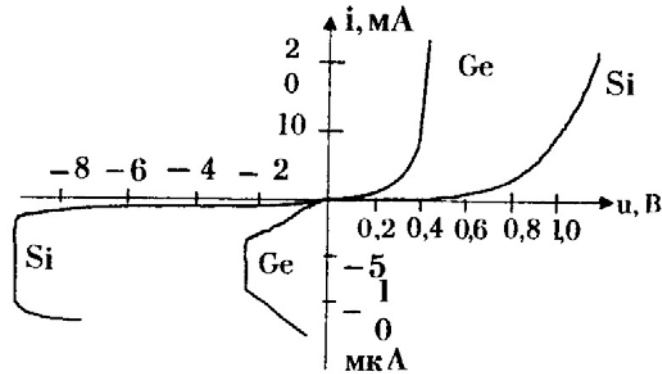
або

$$u = \phi_T \ln(i / I_0 + 1) + iR_B. \quad (3.1б)$$

де  $u$  – напруга, прикладена до діода;  $I_0$  – тепловий струм або зворотний струм насичення;  $\phi_T$  – тепловий потенціал p-n – переходу.

**Типи напівпровідникових діодів: випрямні, високочастотні, імпульсні, стабілітрони, варикапи, тунельні.**

У разі зворотного вмикання зворотний струм діодів дещо більший від зворотного струму p-n – переходу внаслідок теплової генерації носіїв заряду в самому p-n – переході, а також за рахунок струмів витоку, що виникають на поверхні p-n – переходу. Як приклад на рис. 3.2 подано реальні ВАХ кремнієвого та германієвого діодів, відмінність прямих гілок яких пояснюється різними потенціальними бар'єрами германієвого та кремнієвого p-n – переходів, а зворотних – різними ширинами заборонених зон.



**Рис. 3.2.** Вольт-амперні характеристики германієвого та кремнієвого діодів

**Випрямні діоди** – це діоди, за допомогою яких перетворюють змінний струм електромережі на постійний. До цих діодів не ставлять підвищених вимог стосовно швидкодії, ємностей p-n – переходу і стабільності параметрів. Матеріалом для виготовлення випрямних діодів останнім часом є кремній, оскільки кремнієві діоди завдяки більшій ширині забороненої зони мають значно менші зворотні струми, а також ширший діапазон робочих температур, ніж германієві. Для збільшення напруги пробиття випрямних діодів застосовують випрямні стовпи, які конструктивно складаються з декількох послідовно увімкнених кремнієвих p-n – переходів в одному корпусі.

Основними параметрами випрямних діодів є:

- найбільше допустиме значення випрямленого струму за період  $I_{\text{вип.макс}}$ ;
- пряме падіння напруги  $U_{\text{пр}}$  на діоді під час протікання через нього заданого випрямленого струму;
- найбільша зворотна напруга  $U_{\text{зв.макс}}$ , яка може бути тривалий час прикладена до діода в зворотному напрямі без виникнення небезпеки його пробиття;
- найбільший зворотний струм  $I_{\text{зв.макс}}$ , який протікає через діод під час прикладення до нього допустимої зворотної напруги;
- найбільша допустима потужність розсіювання  $P_{\text{розс.макс}}$ , за якої забезпечується нормальне функціонування приладу.

**Діоди використовуються для випрямлення змінного струму, модуляції та детектування сигналів, стабілізації напруги електронного керування частотою, генерування змінних сигналів.**

**Високочастотні діоди** – напівпровідникові прилади універсального призначення, які можуть бути використані для випрямлення, детектування та інших нелінійних перетворень електричних сигналів у діапазоні високих частот. Їх виготовляють на основі звичайних p-n – переходів, гетеропереходів або бар'єрів Шотткі.

Найпростіші високочастотні діоди виготовляють точковими з германію або кремнію, що дає змогу отримати ємність p-n – переходу, не більшу, ніж 1 пФ. Проте такі діоди внаслідок малої площі поперечного перерізу p-n – переходу не можна використовувати у схемах, розрахованих на великі струми і напруги.

У надвисокочастотних схемах (десятки – сотні гігагерц) застосовують високочастотні діоди, побудовані на основі бар'єра Шотткі, в яких дифузійна ємність відсутня, а бар'єрна не перевищує 0,1 пФ.

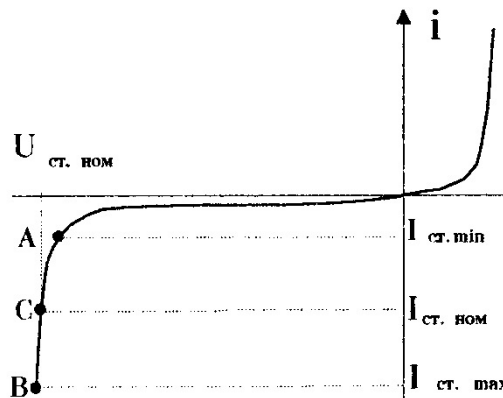
Високочастотні діоди описують аналогічними параметрами, як звичайні випрямні діоди. Додатково для них вказують прохідну ємність  $C_{пр}$ , яка за своєю суттю є статичною ємністю діода, виміряною між його выводами, та найвищу робочу частоту  $f_{макс}$ .

**Імпульсні діоди** – це напівпровідникові прилади, які призначені для роботи в імпульсних режимах, що використовуються в імпульсних та цифрових схемах. У таких режимах через проміжки часу, що становлять одиниці – частки мікросекунди, діоди перемикаються з відкритого стану в закритий та навпаки. Кожний новий стан діода не може встановлюватись раптово. Причиною цього є ємності електричних переходів, а за високих рівнів інжекції – накопичення та, відповідно, розсмоктування неосновних носіїв зарядів під час перемикань діодів. У зв'язку з цим для імпульсних діодів, виготовлених на основі р-п-переходів, важливими є не тільки малі ємності переходів, але й тривалості перехідних процесів, зумовлені вищезгаданими явищами. Для швидкодіючих імпульсних діодів ці тривалості дорівнюють 0,1...10 мкс, а для надшвидкодіючих – 0,1 мкс.

Для побудови швидкодіючих імпульсних діодів з малими тривалостями перехідних процесів використовують гетеропереходи та бар'єри Шотткі, в яких відсутні вищезгадані процеси накопичення та розсмоктування неосновних носіїв заряду і тривалості перемикання струмів та напруг визначаються лише бар'єрними ємностями.

**Стабілітрони** – це напівпровідникові діоди, побудовані на основі звичайних р-п – переходів, принцип роботи яких ґрунтуються на тому, що при зворотному вмиканні р-п – переходу напруга в області електричного пробиття у разі значних змін струму залишається майже постійною. У радіоелектронних пристроях ці діоди використовують для стабілізації напруг, як джерела опорних напруг, для обмеження імпульсів тощо. Пробивна напруга р-п – переходу для них є робочою напругою і називається напругою стабілізації. Якщо значення зворотного струму обмежити, щоб електричне пробиття не перейшло в теплове, то стан електричного пробиття переходу можна підтримувати і відтворювати протягом тривалого часу. Як вихідний матеріал для виготовлення стабілітронів використовують кремній, який має ширшу заборонену зону і теплове пробиття настає за значно більших струмів, ніж у германієвих.

Основною характеристикою стабілітрона є ВАХ напівпровідникового діода в області пробиття (рис. 3.3).



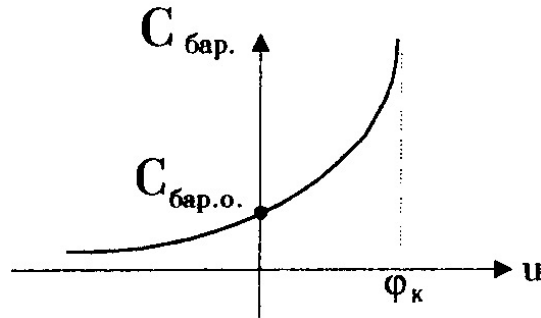
**Рис. 3.3.** ВАХ напівпровідникового діода в області пробиття

До його основних параметрів належать: номінальна напруга стабілізації  $U_{ст. ном}$ , яка відповідає напрузі середньої точки робочої ділянки ВАХ (відрізка АВ); мінімальний та максимально допустимий струми стабілізації:  $I_{ст. min}$  та  $I_{ст. max}$ ; диференційний опір стабілітрона  $r_{ст} = \Delta u_{ст} / \Delta i_{ст}$ , який відображає нахил робочого відрізка ВАХ; температурний коефіцієнт напруги стабілізації  $TK_U$ , який характеризує відносну зміну напруги стабілізації у разі температури на один градус:  $TK_U = (\Delta u_{ст} / u_{ст}) / \Delta T^\circ$ , якщо  $i_{ст} = const$ . У стабілітронах з низькими  $u_{ст}$ , в яких механізм електричного пробиття тунельний, коефіцієнт  $TK_U$  від'ємний, при високих  $u_{ст}$ , в яких механізм пробиття є лавинним,  $TK_U$  додатний.

**Варикап в електронних колах використовують як конденсатор, ємність якого можна змінювати, змінюючи напругу, прикладену до нього.**

**Варикапи** – це напівпровідникові діоди, виготовлені на основі р-п – переходів, принцип роботи яких ґрунтується на використанні бар’єрної ємності р-п – переходу при його зворотному вмиканні. Дифузійну ємність, яка є значно більшою, використовувати не можна, оскільки вона проявляється у разі прямого вмикання р-п – переходу, коли його провідність є дуже великою, а отже, добротність такого конденсатора буде дуже малою.

Основною характеристикою варикапа є вольт-фарадна характеристика р-п – переходу, яка відображає залежність бар’єрної ємності від зворотної напруги (рис. 3.4).



**Рис.3.4.** Вольт-фарадна характеристика р-п – переходу

До основних параметрів варикапа належать: мінімальна та максимальна ємності  $C_{\text{min}}$  і  $C_{\text{max}}$ ; коефіцієнт перекриття ємності  $k_c = C_{\text{max}}/C_{\text{min}}$ , добротність  $Q_v$ .

Варикапи широко використовують для електронного настроювання коливальних контурів у високочастотних вузлах радіоапаратури, в генераторах, у модуляторах, у параметричних підсилювачах тощо.

**Тунельні діоди** – це напівпровідникові діоди, виготовлені на основі р-п – переходів, в яких використовується тунельний механізм перенесення носіїв заряду через р-п – перехід і ВАХ яких має ділянку з від’ємним диференційним опором.

**Тунельний діод є нелінійним резистивним елементом, динамічний опір якого за певної напруги стає від’ємним.**

Тунельні діоди виготовляють з таких напівпровідникових матеріалів, які мають підвищену концентрацію домішок. Товщина р-п – переходу стає в сотні разів меншою, ніж у звичайних діодів. Іншим наслідком великої концентрації домішок є те, що носії заряду можуть переходити (тунелювати), з однієї області в іншу без затрат енергії.

За невеликої прямої напруги, прикладеної до тунельного діода, починається тунельний перехід електронів з п-області в р-область і через р-п – перехід потече тунельний струм. За деякого значення прямої напруги на тунельному діоді тунельний струм буде максимальним. Подальше збільшення прямої напруги на діоді призведе до зменшення тунельного струму, оскільки буде зменшуватись кількість електронів, здатних тунелювати з п-області в р-область.

За деякої прямої напруги  $U_v$  тунелювання електронів припиниться. У цьому разі струм буде мінімальним і визначатиметься лише переходом носіїв заряду через потенціальний бар’єр, який значно понизився (тобто, як у звичайному діоді, за рахунок інжекції носіїв заряду). З подальшим збільшенням прямої напруги, у зв’язку із зменшенням висоти потенціального бар’єра інжекція носіїв заряду через р-п – перехід, і, відповідно, струм діода, будуть зростати.

За зворотної напруги в тунельному діоді знову виникнуть умови для тунелювання електронів. При збільшенні зворотної напруги тунелювання електронів з р-області в п-область, а також і зворотний струм тунельного діода зростатимуть.

ВАХ тунельного діода показана на рис. 3.5 Її особливістю є те, що вона має спадну ділянку АВ, на якій диференційний опір діода є від’ємним.



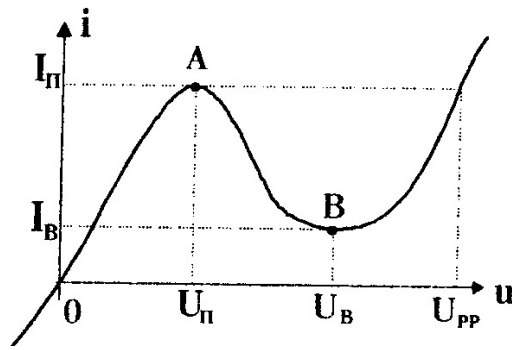


Рис.3.5. ВАХ тунельного діода

До основних параметрів тунельних діодів належать:

- піковий струм  $I_{\text{П}}$  – прямий струм у точці максимуму вольт-амперної характеристики;
- напруга піка  $U_{\text{П}}$  – пряма напруга, яка відповідає піковому струмові;
- напруга западини  $U_{\text{В}}$  – пряма напруга, яка відповідає мінімальному струмові;
- напруга розкривання  $U_{\text{РР}}$  – пряма напруга на другій зростаючій гілці при струмі, який дорівнює піковому;
- ємність  $C_{\text{д}}$  – сумарна ємність, виміряна між виводами діода.

1. Важливою перевагою тунельних діодів перед звичайними напівпровідниковими приладами є те, що вони можуть працювати на доволі високих частотах, бо тунельний перехід електронів відбувається практично миттєво – за  $10^{-13}$  с. Крім того, в тунельних діодах, що працюють при напругах, за яких спостерігається тунельний ефект, накопичення неосновних носіїв заряду  $i$ , відповідно, їхнє розсмоктування відсутні. У зв'язку з цим тунельні діоди можуть працювати на частотах до сотень гігагерц (міліметровий діапазон радіохвиль). Верхня межа частотного діапазону роботи тунельних діодів обмежена лише паразитними параметрами – власною ємністю  $C_{\text{д}}$ , основу якої становить бар'єрна ємність p-n – переходу, та індуктивністю  $L$  виводів.

### 3.2. Біполярні транзистори

**Біполярні транзистори** – це напівпровідникові прилади з двома p-n – переходами, що взаємодіють, утвореними в кристалі напівпровідника, та трьома виводами. Назва приладу “біполярний” зумовлена тим, що робота транзистора ґрунтується на використанні носіїв зарядів обох знаків (електронів та дірок).

Структура біполярного транзистора складається з трьох областей електронної та діркової провідності, які чергуються. Залежно від послідовності розташування цих областей розрізняють біполярні транзистори типу n-p-n та типу p-n-p (рис. 3.6). Одна з крайніх областей транзистора називається емітером, середня область – базою, а інша крайня область – колектором; p-n – перехід з боку емітера називають емітерним переходом, а з боку колектора – колекторним.

Емітер, база та колектор відрізняються концентрацією носіїв зарядів та розмірами. В емітері концентрація носіїв зарядів є найбільшою, в базі – найменшою. Емітерний перехід відрізняється значно меншою площею поперечного перерізу, ніж колекторний. Ширина базової області становить одиниці мікрон.

Емітерний та колекторний переходи транзистора залежно від полярностей прикладених до них напруг можна зміщувати як в прямому, так і в зворотному напрямках. Залежно від напрямів вмикання p-n – переходів розрізняють такі режими роботи транзистора:

- 1) нормальний активний режим – емітерний перехід зміщений у прямому, а колекторний – у зворотному напрямі;
- 2) режим відтину – обидва переходи транзистора зміщені у зворотному напрямі;
- 3) режим насичення – обидва переходи транзистора зміщені у прямому напрямі;

4) інверсний активний режим – колекторний перехід зміщений у прямому, а емітерний – у зворотному напрямі.

Основним режимом роботи біполярного транзистора є нормальний активний режим. У цьому режимі транзистор успішно виконує функції керованого активного елемента, тобто може здійснювати підсилення, генерування та перетворення електричних сигналів.

**Біполярний транзистор за своєю суттю є джерелом струму, що керується струмом.**

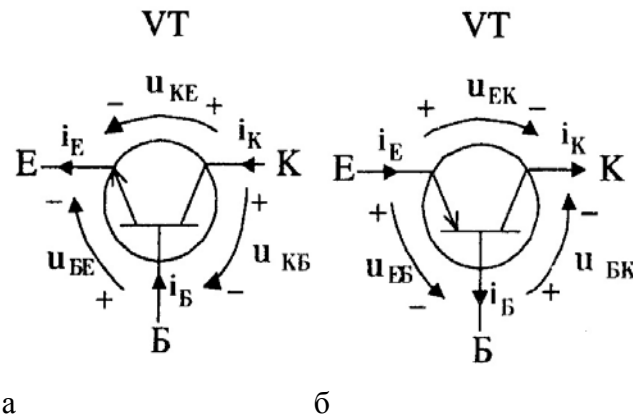


Рис. 3.6. Схемні позначення біполярних транзисторів: типу n-p-n (а); типу p-n-p (б) та полярності зовнішніх напруг

На рис. 3.6 подано схемні позначення біполярних транзисторів та вказано полярності зовнішніх напруг, які забезпечують нормальний активний режим роботи транзисторів, а також показано додатні напрями струмів через зовнішні виводи транзисторів. Зауважимо, що абсолютне значення напруги, прикладеної до колекторного переходу, є більшим від абсолютного значення напруги, прикладеної до емітерного переходу.

**Принцип роботи біполярного транзистора.** Із структури транзисторів (рис. 3.7) видно, що, по суті, вони є двома напівпровідниковими діодами, які мають спільну базову область, через яку взаємодіють.

У нормальному активному режимі залежність струму від напруги на емітерному переході подібна до залежності струму від напруги звичайного діода, зміщеного прямо, а залежність струму від напруги на колекторному переході аналогічна залежності струму від напруги зворотно зміщеного діода. Проте наявність спільної базової області зумовлює те, що через неї емітерний та колекторний переходи взаємно впливають на роботу один одного. Розглянемо це на прикладі транзистора типу n-p-n, схема вмикання якого подана на рис. 3.7.

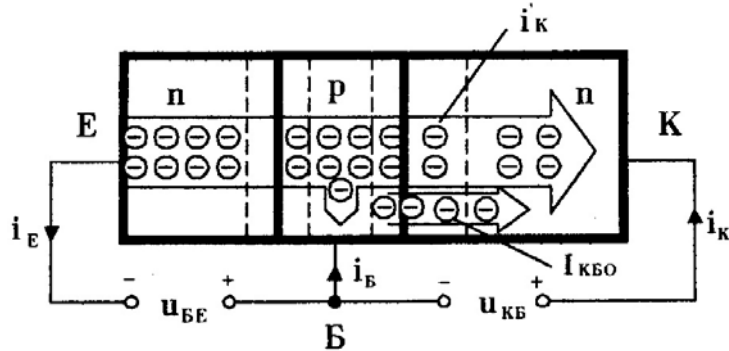


Рис. 3.7. До пояснення принципу біполярного транзистора (типу n-p-n)

За нульової напруги на емітерному переході ( $u_{BE} = 0$ ) через колекторний перехід, який зміщений у зворотному напрямі, тече тепловий струм  $I_{KBO}$ .

Якщо прикласти до емітерного переходу пряму напругу  $u_{BE}$ , через нього потече струм  $i_B$  внаслідок інжекції електронів з емітера в базу та інжекції дірок з бази в емітер. Оскільки концентрація дірок в базі є нижчою, ніж в емітері, то цим процесом можна знехтувати. Ширина

бази в біполярних транзисторах достатньо мала, так, що інжектовані електрони досягають колекторного переходу, не встигаючи рекомбінувати з дірками бази. Лише невелика частина (близько 1 %) електронів рекомбінує в базі, внаслідок чого виникає струм бази  $i_B$ , який порівняно з іншими струмами транзистора є незначним. Наблизившись до колекторного переходу, електрони потрапляють під вплив сильного електричного поля зворотного зміщеного колекторного переходу, яке для них є прискорювальним. Тому вони втягуються в колекторний перехід і переходять в колекторну область. Відбувається так звана екстракція носіїв зарядів у колектор. Внаслідок цього колекторний струм  $i_K$  збільшиться на величину  $i'_K$ , зумовлену електронами, що надійшли в колекторну область.

Значення струму  $i'_K$  буде дещо меншим від струму емітера, оскільки невелика частина електронів рекомбінувала в базі, тобто:

$$i'_K = \alpha i_E, \quad (3.2)$$

де  $\alpha$  – деякий коефіцієнт пропорційності, менший від одиниці ( $\alpha=0,99\dots0,999$ ), який називають коефіцієнтом передавання емітерного струму в нормальному активному режимі. Зауважимо, що коефіцієнт  $\alpha$  не є величиною сталою, а змінюється зі зміною емітерного струму.

Отже, сумарний струм колектора дорівнюватиме

$$i_K = I_{KBO} + \alpha i_E. \quad (3.3)$$

За великих емітерних струмів транзистора, для яких  $I_{KBO} \ll i_E$ , наближено приймають:

$$i_K \cong \alpha i_E. \quad (3.4)$$

Оскільки потік електронів, що рухаються з емітера в колектор, та відповідно емітерний струм в базі розгалужуються на дві частини, то можна записати, що

$$i_E = i_K + i_B. \quad (3.5)$$

*Для визначення параметрів та характеристик транзистора його подають як прохідний чотириполюсник, де один з затискачів транзистора є спільним для входу та виходу.*

Часто замість коефіцієнта  $\alpha$  використовують коефіцієнт  $\beta$ , який показує, у скільки разів струм колектора більший від струму бази:

$$\beta = \frac{i_K}{i_B} = \frac{\alpha i_E}{i_E - i_K} = \frac{\alpha i_E}{i_E(1 - \alpha)} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (3.6)$$

Значення коефіцієнта  $\beta$  для промислових зразків транзисторів лежить у межах 50...300.

Якщо пряму напругу емітерного переходу збільшувати, відповідно зростатиме колекторний струм, тобто пряма напруга емітерного переходу у нормальному активному режимі роботи транзистора керує струмом колектора. Власне на цьому ефекті ґрунтується підсилення електричних сигналів за допомогою транзисторів.

Якщо до обох переходів транзистора прикладено зворотну напругу (режим відтинання), через виводи транзистора протікатимуть лише незначні зворотні струми переходів, близькі до нуля. Транзистор у такому разі вважають закритим.

У разі прикладення до обох переходів прямих напруг настає режим насичення, в якому виникне інжекція електронів з колектора у базу, спрямована назустріч потоку електронів, що рухаються з емітера. В результаті сумарний струм колектора дещо понизиться, а струм бази зросте.

**Статичні ВАХ транзистора.** Із викладеного вище випливає, що зовнішні струми біполярного транзистора взаємозв'язані співвідношенням (3.5):  $i_E = i_K + i_B$ , а напруги між зовнішніми виводами, як бачимо із рис. 3.6, задовольняють умову:

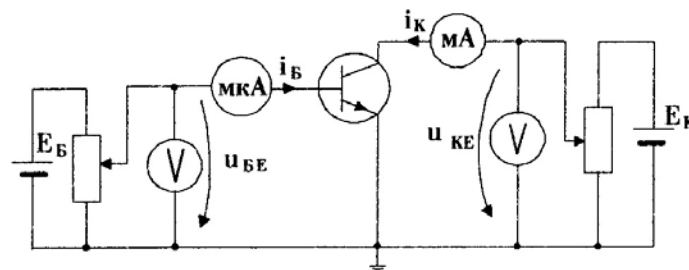
$$u_{KE} = u_{BE} + u_{KB}. \quad (3.7)$$

Розглядаючи біполярний транзистор як триполюсник, можемо стверджувати, що режим роботи транзистора повністю визначають дві будь-які напруги між його зовнішніми виводами та два будь-які струми, що течуть через його зовнішні виводи. Звідси висновок: статичні ВАХ транзистора повинні описувати взаємозв'язок двох довільних напруг між його зовнішніми виводами та двох довільних струмів через його зовнішні виводи.

Із трьох зовнішніх напруг  $u_{KE}$ ,  $u_{BE}$ ,  $u_{KB}$  та трьох зовнішніх струмів  $i_E$ ,  $i_K$ ,  $i_B$  можна вибрати такі пари:

- а) напруг:  $u_{BE}$ ,  $u_{KE}$ ;  $u_{BE}$ ,  $u_{KB}$ ;  $u_{BK}$ ,  $u_{KE}$ ;
- б) струмів:  $i_E$ ,  $i_K$ ;  $i_E$ ,  $i_B$ ;  $i_K$ ,  $i_B$ .

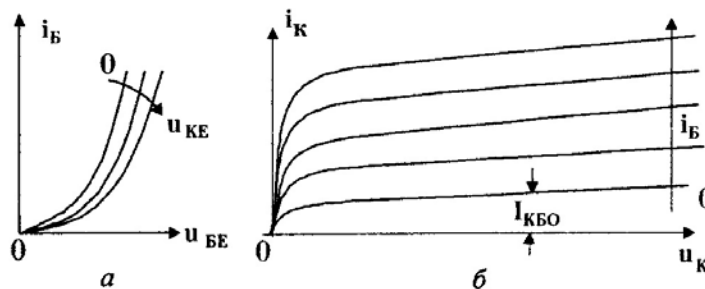
Отже, оскільки для кожної пари напруг можна вибрати три різні пари струмів, то існує дев'ять можливих варіантів статичних ВАХ біполярних транзисторів. Звичайно у довідковій літературі подають такі варіанти ВАХ, які найзручніше отримувати експериментально. Такими ВАХ є ті, що описують взаємозв'язок між парою напруг  $u_{BE}$ ,  $u_{KE}$  та парою струмів  $i_K$ ,  $i_B$ .



**Рис. 3.8.** Схема експериментального зняття ВАХ біполярного транзистора типу *n-p-n*

Їх часто називають характеристиками транзистора для схеми зі спільним емітером, оскільки для експериментального зняття ВАХ використовують схему, де емітер є спільним виводом для базового та колекторного кіл (див. рис. 3.8).

Графічно ВАХ подають у вигляді двох сімей характеристик, типовий вигляд яких зображено на рис. 3.9. Характеристики, зображені на рис. 3.9, а, називають вхідними, а зображені на рис. 3.9, б – вихідними, оскільки вхідну керуючу напругу прикладають між базою та емітером, а колекторний струм є вихідним струмом транзистора.



**Рис. 3.9.** Статичні ВАХ біполярного транзистора типу *n-p-n* для схеми зі спільним емітером: вхідні (а) та вихідні (б)

Кожна вхідна статична ВАХ транзистора відображає залежність вхідного базового струму  $i_B$  від вхідної напруги  $U_{BE}$  за деякого незмінного значення напруги  $U_{KE}$ , тобто  $i_B = f_{ex}(u_{BE})$  при  $u_{KE} = \text{const}$ . У разі збільшення напруги  $u_{KE}$  вхідні характеристики зміщуються праворуч внаслідок того, що зміщений у зворотному напрямі колекторний *p-n* – перехід розширюється, а базова область звужується, і кількість носіїв зарядів, що рекомбінують у базі, і відповідно струм бази зменшуються. Проте вплив напруги  $U_{KE}$  на струм  $i_B$  незначний, тому вхідні характеристики розміщені на графіку дуже щільно і часто в довідниках подають лише одну усереднену вхідну характеристику  $i_B = f_{ex}(u_{BE})$ .

Кожна вихідна ВАХ відображає залежність вихідного колекторного струму  $i_K$  від напруги  $u_{KE}$  за деякого фіксованого значення базового струму  $i_B$ , тобто  $i_K = f_{вих}(u_{KE})$  при  $i_B = \text{const}$ . У разі збільшення базового струму вихідні характеристики зміщуються вгору, а за фіксованого значення базового струму  $i_B$  колекторний струм  $i_K$  дещо зростає із збільшенням напруги  $u_{KE}$ , що впливає із описаного вище принципу дії транзистора.

Зауважимо, що аналогічний вигляд мають статичні ВАХ транзисторів типу p-n-p.

Зауважимо, що ВАХ транзистора істотно залежать від температури навколишнього середовища: зі збільшенням температури вхідні характеристики зміщуються ліворуч, а вихідні – вгору, що еквівалентно збільшенню струмів транзистора за незмінних зовнішніх напруг.

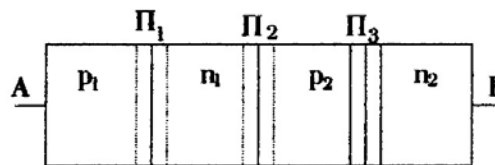
**Основне призначення тиристорів – електронна комутація напруги.**

Статичні ВАХ найчастіше використовують для визначення статичних робочих точок транзисторів під час аналізу електронних схем у режимі постійного струму. Для розв’язання таких задач застосовують відповідні графоаналітичні методи. Крім того, на підставі статичних ВАХ розраховують низькочастотні малосигнальні параметри транзисторів у робочій точці, про що йтиметься далі.

### 3.3. Тиристори

Тиристорами називають багатошарові напівпровідникові прилади з трьома і більше p-n – переходами, які характеризуються двома стійкими станами: відкритим та закритим, і можуть перемикатися з одного стану в інший.

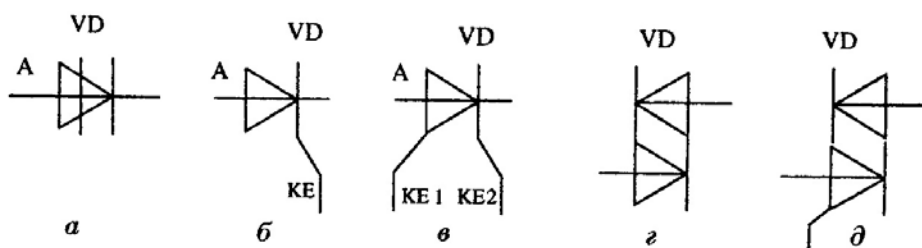
Класичні тиристори мають чотиришарову структуру, розділену трьома p-n – переходами (рис. 3.10). Крайні області  $p_1$  та  $n_2$  цих тиристорів називають емітерами, а виводи від цих областей – відповідно, анодом (А) та катодом (К).



*Рис.3.10. Структура класичного тиристора*

Внутрішні області  $n_1$  та  $p_2$  називають базами. Крайні p-n-переходи  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$  називають емітерними, а внутрішній p-n – перехід  $\Pi_2$  – колекторним.

За кількістю зовнішніх виводів тиристори поділяють на діодні, тріодні і тетродні. Діодні тиристори мають два зовнішні виводи: анод і катод. У тріодних тиристорів є три виводи: анод, катод і керуючий електрод (КЕ), який під’єднаний до однієї з баз. Тетродні тиристори мають чотири виводи, два – під’єднані до баз, які є керуючими. Крім них, існує група симетричних діодних та тріодних тиристорів, які здатні перемикатись із закритого стану у відкритий та навпаки як в прямому, так і у зворотному напрямках. Їх називають симісторами. Схемні позначення тиристорів подано на рис. 3.11.



*Рис. 3.11. Схемні позначення тиристорів: діодних (а); тріодних (б); тетродних (в); симетричних діодних (г); симетричних тріодних (д)*

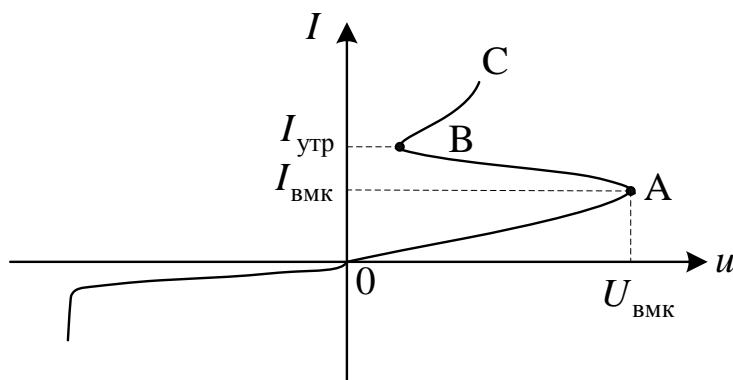
Діодні тиристори, або диністори – це напівпровідникові прилади з чотирма р- і n-областями, розділеними трьома р-n – переходами, які мають два виводи: анод і катод. Структура цих тиристорів аналогічна структурі, показаній на рис. 3.10.

У разі подання на діодний тиристор прямої напруги (плюс до анода і мінус до катода) переходи П<sub>1</sub> та П<sub>3</sub> змістяться у прямому напрямі, а колекторний перехід П<sub>2</sub> – у зворотному. Практично вся прикладена напруга буде зосереджена на зворотно зміщеному колекторному переході, а падіння напруг на прямо зміщених емітерних переходах буде незначним.

Струм тиристора за такого вмикання буде визначатися носіями зарядів, що інжектуються через прямозміщені емітерні переходи, які, дифундуючи через бази, наблизяться з обох боків до колекторного переходу. Внутрішнє електричне поле цього переходу є для них прискорювальним, і вони перетягуються цим полем в сусідні області (бази), де поповнять кількість основних носіїв зарядів, що збільшуватиме електропровідність баз та зменшуватиме потенціальні бар'єри р-n – переходів, які прилягають до них. До певного значення прикладеної напруги ці потоки носіїв зарядів та відповідно струм тиристора будуть незначними через те, що колекторний перехід залишається зміщеним у зворотному напрямі.

**Відкриття диністора відбувається за певного значення прямої напруги, прикладеної до нього.**

Проте у разі збільшення прямої напруги колекторний перехід розширюється і напруженість його електричного поля зростає. Коли напруга досягне певного значення  $U_{\text{ВМК}}$ , у колекторному переході виникає ударна іонізація, яка спричинить лавинне розмноження носіїв зарядів (лавинний електричний пробій колекторного переходу). Утворені електрони перекидатимуться в базу  $n_1$ , а дірки в базу  $p_2$ . Струм тиристора збільшиться. Перехід П<sub>2</sub> внаслідок зменшення потенціального бар'єра через накопичення основних носіїв зарядів у базах зміститься прямо і його опір та відповідно падіння напруги на ньому зменшаться. Все це призведе до підвищення напруг на емітерних переходах та збільшення інжекції носіїв зарядів і спричинить подальше зростання струму тиристора. Описаний процес відбувається лавиноподібно.



**Рис. 3.11а.** Вольт-амперна характеристика діодного тиристора

Внаслідок цього струм тиристора різко зростає, а напруга зменшується і на вольт-амперній характеристиці (рис.3.11, а) виникає ділянка АВ, на якій диференційний опір від'ємний.

Діодний тиристор переходить із закритого стану (ділянка ОА) у відкритий (ділянка ВС). У відкритому стані залежність струму тиристора від напруги така сама, як для звичайних прямозміщених р-n – переходів.

Для вимкання діодного тиристора (переведення його з відкритого стану у закритий) необхідно зменшити прямий струм до значення, нижчого, ніж мінімальний струм  $I_{\text{утр}}$ , який утримує тиристор у відкритому стані. Вимкати диністор можна також зміною полярності прикладеної напруги. У разі прикладання зворотної напруги діодний тиристор буде закритим, оскільки переходи П<sub>1</sub> та П<sub>3</sub> будуть під зворотною напругою.

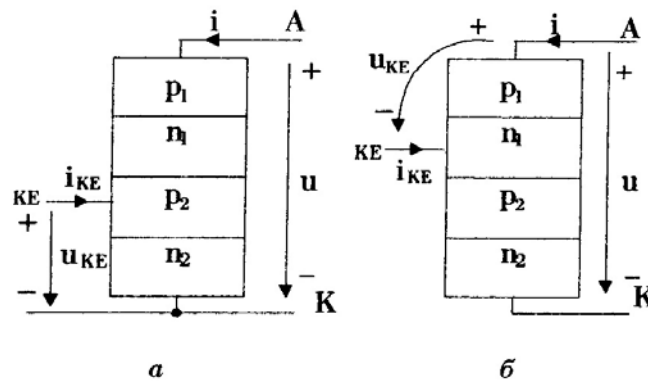
До основних параметрів діодного тиристора належать:

– напруга вмикання  $U_{\text{ВМК}}$  – напруга, за якої струм диністора починає різко зростати;

- струм вмикання  $I_{\text{вмк}}$  – струм, який протікає через диністор при напрузі вмикання;
  - струм утримування  $I_{\text{утр}}$  – мінімальний прямий струм, за якого диністор залишається у відкритому стані;
  - максимально допустимий прямий струм  $I_{\text{макс}}$ ;
  - максимально допустима зворотна напруга  $U_{\text{зв. макс}}$  – максимально допустиме значення зворотної напруги, яку можна тривалий час прикладати до приладу і це не призведе до його пробиття;
  - час вмикання  $t_{\text{вмк}}$  – час з моменту подання відкриваючого імпульсу і до моменту, коли напруга на диністорі зменшиться до 0,1 від початкового значення;
  - час вимикання  $t_{\text{вимик}}$  – мінімальний час, протягом якого треба подавати запираючу напругу для переведення диністора з відкритого стану в закритий;
  - максимальна потужність розсіювання  $P_{\text{макс}}$ .
- Триодні тиристори, або триністори, мають таку саму структуру, як діодні, проте у них є додатковий третій електрод, під'єднаний до однієї з баз, який називають керуючим.

**Відкриття триністора здійснюється за допомогою керуючої напруги.**

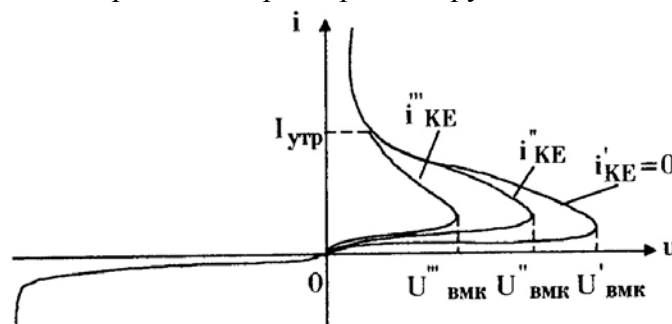
У разі подання на цей електрод зовнішньої напруги, прямої для найближчого емітерного переходу, збільшиться струм цього переходу на величину струму керуючого електрода  $I_{\text{КЕ}}$ , що призведе до зростання колекторного струму і лавинного розмноження носіїв зарядів (електричного пробоя колекторного переходу) за менших напруг, прикладених між анодом і катодом. Отже, змінюючи струм через один з емітерних переходів за допомогою струму керуючого електрода, можна змінювати напругу вмикання тиристора.



**Рис. 3.12.** Схеми вмикання триодного тиристора: з керуванням по катоду (а); з керуванням по аноду (б)

Полярність напруги, яку подають на керуючий електрод, залежить від того, до якої базової області він приєднаний. Якщо керуючий електрод приєднаний до р-бази (рис. 3.12, а), то тиристор переводиться у відкритий стан під час подання на цей електрод додатної напруги стосовно катода. У цьому разі тиристор називають триодним тиристором з керуванням по катоду.

У разі приєднання керуючого електрода до n-бази (рис.3.12, б) перемикання тиристора у відкритий стан відбувається у разі подання на цей електрод від'ємної напруги стосовно анода. У цьому разі тиристор називають триодним тиристором з керуванням по аноду.



**Рис. 3.13.** Типовий вигляд ВАХ триодного тиристора

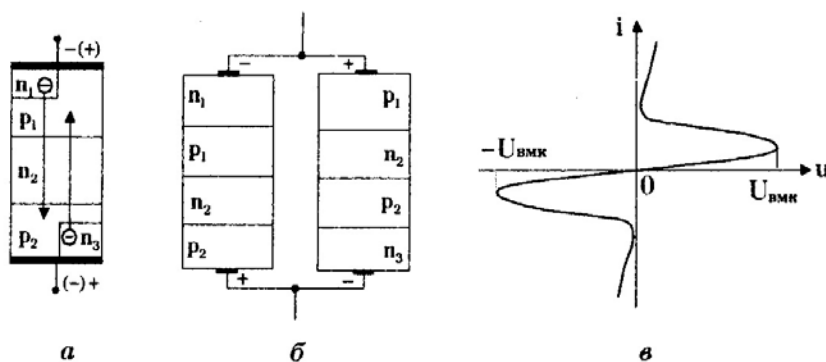
Типовий вигляд статичних ВАХ тріодного тиристора з керуванням по катоду зображений на рис. 3.13. Перемикати тріодний тиристор можна зменшенням струму анода або поданням в коло керуючого електрода напруги протилежної полярності.

Тріодні тиристори характеризуються такими самими параметрами, як і діодні. Додаються лише параметри, які характеризують керуюче коло, а саме:

- струм відкриття  $I_{відкр}$  – найменший струм керуючого електрода, необхідний для вмикання тиристора;
- запираюча напруга на керуючому електроді  $U_{зап}$  – напруга, яка забезпечує необхідне значення струму керуючого електрода, за якого тиристор вимикається.

**Перехід тиристора у закритий стан відбувається лише після зняття прикладеної до нього напруги.**

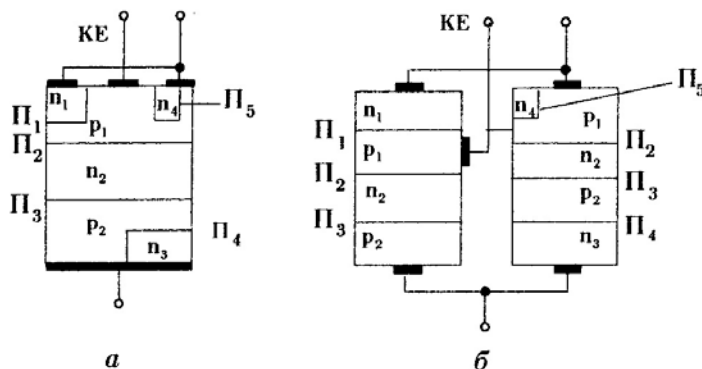
Діодний симетричний тиристор, або діак – це напівпровідниковий прилад, який складається з п'яти n- і p-областей, розділених чотирма p-n – переходами, і має два виводи. Структура діака подана на рис. 3.14, а.



**Рис. 3.14.** Структура діодного симетричного тиристора (а), його еквівалент (б), складений з двох паралельно увімкнених діодних тиристорів, та його статична ВАХ (в)

Під час прикладання до такого тиристора напруги мінусом до верхнього виводу і плюсом – до нижнього працює ліва половина приладу (напрямок руху електронів вказано стрілкою). При оберненій полярності, показаній знаками в дужках, працює права половина приладу. Отже, роль симетричного тиристора можуть виконувати два звичайні діодні тиристори, увімкнені паралельно і назустріч один одному (рис. 3.14, б). Статична ВАХ діака подана на рис. 3.14, в.

Тріодний симетричний тиристор, або тріак складається з шести p- і n-областей, розділених п'ятьма p-n – переходами. Структура одного з типів таких тиристорів зображена на рис. 3.15, а.



**Рис. 3.15.** Структура симетричного тріодного тиристора (а) та його еквівалент (б), складений з двох паралельно увімкнених діодних тиристорів

У цій структурі умовно можна виділити два тріодні тиристори (рис. 3.15, б), увімкнені паралельно назустріч один одному, один з яких (правий) має додатковий p-n – перехід. При прямому вмиканні, тобто у разі прикладання зовнішньої напруги плюсом до верхнього виводу і мінусом до нижнього працюватиме тріодний тиристор з p-n – переходами  $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  та з додатковим переходом  $\Pi_5$ , який буде при цьому закритим. Керують перемиканням тиристора із закритого стану у відкритий, подаючи на керуючий електрод імпульсу додатну напругу стосовно



верхнього виводу, який у такому разі є анодом. На додатковому переході  $\Pi_5$  з'явиться пряма напруга і через нього відбуватиметься додаткова інжекція електронів у р-область та їхній дифузійний рух через цю область до переходу  $\Pi_2$ , електричне поле якого прискорює їх.

У результаті ці носії заряду перейдуть у сусідню n-область, де стануть основними. Це призведе до пониження потенціального бар'єра на переході  $\Pi_2$  та відповідно до додаткового зростання інжекції дірок з р-області в n-область, що дасть змогу тиристорі перемикатися із закритого стану у відкритий за менших напруг, прикладених між основними выводами.

У разі зміни полярності напруги між основними выводами працюватиме тріодний тиристор з р-n – переходами  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  та керуючим електродом, приєднаним до р-бази, який є звичайним тріодним тиристором з керуванням по катоду.

Сім'я статичних ВАХ симетричного тріодного тиристора подана на рис. 3.16.

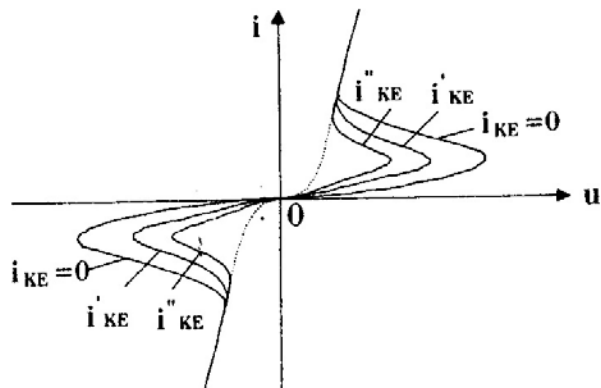


Рис. 3.16. ВАХ симетричного тріодного тиристора

Симетричні діодні та тріодні тиристири характеризуються параметрами, подібними до параметрів звичайних діодних та тріодних тиристорів.

### 3.4. Польові транзистори

Польовими транзисторами називають напівпровідникові прилади, виготовлені на основі напівпровідників одного типу електропровідності, керування струмом в яких здійснюють за допомогою електричного поля, прикладеного перпендикулярно до напрямку протікання струму.

Їхня узагальнена структура подана на рис. 3.17.

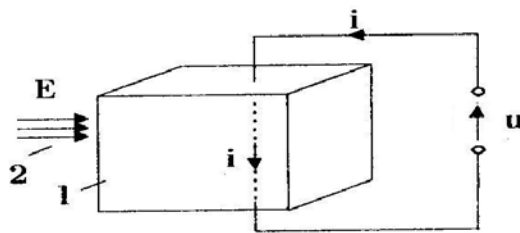


Рис.3.17. Узагальнена структура польового транзистора: кристал напівпровідника n- або р-типу (1); керуюче електричне поле (2)

**Польовий транзистор – це приклад джерела напруги, керованого напругою.**

Область транзистора, по якій протікає струм, називають каналом. Виводи від протилежних боків каналу називають відповідно виток (В) та сток (С). Під виток розуміють вивід, від якого розпочинається рух основних носіїв заряду по каналу. Стоком називають вивід, до якого рухаються основні носії заряду.

Керування струмом, який протікає в каналі, здійснюють за допомогою випрямних електричних переходів, утворених в каналі, або за допомогою структури метал–діелектрик–напівпровідник (МДН), утвореної на поверхні каналу. Вивід від випрямного переходу або від МДН-структури називають затвором (3).

Польові транзистори, в яких використовують перший спосіб керування струмом, називають польовими транзисторами з керуючим переходом. Польові транзистори, в яких застосовують другий спосіб керування струмом, називають польовими транзисторами з ізольованим затвором, або просто МДН-транзисторами. Оскільки в МДН-структурі як діелектрик використовують окисел кремнію, що утворений на поверхні каналу, то існує ще одна назва МДН-транзисторів – МОН-транзистори (МОН – аббревіатура словосполучення метал–окисел–напівпровідник).

Таблиця 3.1

**Схемні позначення польових транзисторів**

Тип польового транзистора	Електропровідність каналу	
	п-типу	р-типу
Польовий транзистор з керуючим р-п-переходом		
Польовий транзистор з вбудованим каналом		
МДН-транзистор з індукованим каналом		

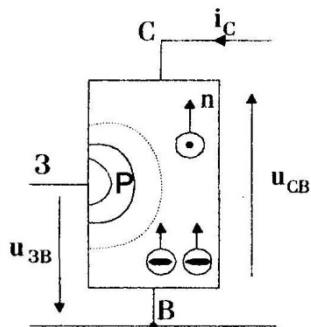
*Примітка:* літерою П позначають вивід від підкладки транзистора.

Канал МДН-транзисторів може бути сформований під час виготовлення транзистора або утворюватись (індукуватись) при прикладанні до затвора відповідної напруги. У зв'язку з цим МДН-транзистори поділяють на МДН-транзистори з вбудованим каналом та МДН-транзистори з індукованим каналом. Схемні позначення польових транзисторів подано в табл.3.1.

**3.4.1. Польові транзистори з керуючим р-п – переходом**

Роль керуючого переходу може виконувати звичайний р-п – перехід, гетероперехід або бар'єр Шотткі. Найпоширенішими є польові транзистори з керуючим р-п – переходом (рис. 3.18), сформовані на основі кремнію.

**Важливою перевагою польових транзисторів є їхній великий вхідний опір, що не вимагає великих потужностей вхідних сигналів.**



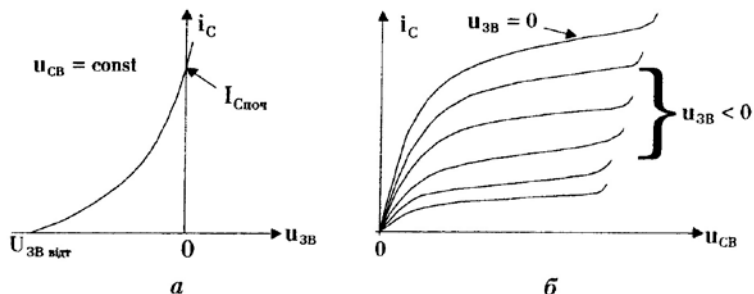
**Рис.3.18.** Структура польового транзистора з керуючим р-п переходом та каналом п-типу

Робочим режимом польового транзистора з керуючими р-п – переходом є такий режим, за якого керуючий р-п – перехід зміщений у зворотному напрямі, тобто коли між затвором і витоком подається напруга, яка є зворотною для р-п – переходу. Принцип дії транзистора полягає в тому, що під час зміни зворотної напруги на керуючому р-п – переході змінюється ширина каналу, що зумовлює зміну його опору та, відповідно, струму, який протікає по ньому. Зокрема, у разі збільшення зворотної напруги р-п – переходу поперечний переріз каналу, його електропровідність та значення струму будуть зменшуватися, а у разі зменшення зворотної напруги – зростатимуть.

Напругу між затвором і витоком, за якої транзистор закривається і його струм  $i_c$  наближається до нуля, називають напругою відтину  $u_{зв. відт.}$

**Польові транзистори виготовляють за допомогою інтегральних технологій.**

Залежність струму транзистора  $i_c$  від напруги  $u_{зв.}$ , прикладеної між затвором і витоком, за деякої заданої напруги  $u_{св} = \text{const}$  називають передавальною або стокозатворною статичною ВАХ польового транзистора. Її типовий вигляд зображено на рис. 3.19, а.



**Рис. 3.19.** Стокозатворна (а) і стокові (б) статичні вольт-амперні характеристики польового транзистора з керуючим р-п – переходом

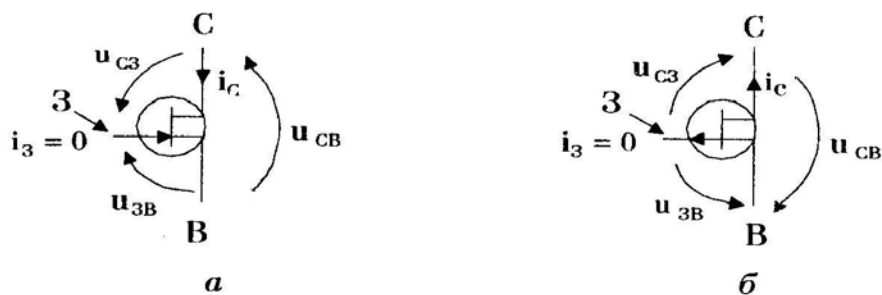
Залежності струму стоку  $i_c$  від напруги  $u_{св.}$ , прикладеної між стоком і витоком, за різних значень напруги  $u_{зв.}$ , мають типовий вигляд, зображений на рис. 3.19, б. Ці залежності називають вихідними статичними, або стоковими ВАХ.

На підставі стокових характеристик бачимо, що струм  $i_c$  із збільшенням напруги  $u_{св.}$  спочатку доволі швидко зростає, а відтак його наростання майже зовсім припиняється. Це пояснюється тим, що за малих напруг  $u_{св.}$  транзистор веде себе подібно до резистора: збільшення напруги  $u_{св.}$  викликає майже лінійне наростання струму  $i_c$ . У разі подальшого збільшення напруги  $u_{св.}$  канал в області стоку настільки звужується, що зростання струму  $i_c$  із збільшенням напруги  $u_{св.}$  майже припиняється – настає насичення. Горизонтальні ділянки стокових характеристик (ділянки насичення) є робочими ділянками польового транзистора.

За великих напруг  $u_{св.}$  у транзисторі може виникати електричне пробиття керуючого р-п – переходу біля стоку. Значення напруги  $u_{св.}$ , за якої відбувається пробиття, залежить від напруги  $u_{зв.}$ , оскільки зворотна напруга на керуючому р-п – переході біля стоку дорівнює  $u_{зв.} + u_{св.}$ . Отже, чим більше значення напруги  $u_{зв.}$ , тим за меншої напруги  $u_{св.}$  настане пробиття.

Зміщення вихідних ВАХ транзистора вниз зі збільшенням напруги  $u_{зв.}$ , пояснюється тим, що керуючий р-п – перехід розширюється (поперечний переріз каналу звужується), що приводить до зменшення струму, який протікає через транзистор.

Затворну (вхідну) характеристику звичайно не використовують, оскільки керуючий перехід закритий і струм затвора дуже малий ( $i_3 = 10^{-8} \dots 10^{-9} \text{ A}$ ), тому часто його не враховують.



**Рис. 3.20.** Полярності зовнішніх напруг польових транзисторів з керуючим р-п – переходом: n-канальних (а) та p-канальних (б)

На рис. 3.20 подано полярності зовнішніх напруг та додатні напрями струмів польових транзисторів, які забезпечують нормальний режим роботи.

### 3.4.2. МДН-транзистори із вбудованим каналом

МДН-транзистори із вбудованим каналом виготовляють у кристалі високоомного напівпровідника, який називають підкладкою. У підкладці дифузією акцепторних домішок утворюють дві локальні області  $n^+$  з підвищеною концентрацією домішок, які слугуватимуть витоком і стоком. Відстань між цими областями 5...50 мкм. Між областями витоку і стоку формують тонкий приповерхневий шар такого самого типу електропровідності, як локальні області, який слугуватиме каналом. На поверхні каналу утворюють діелектричну плівку з окислу кремнію ( $SiO_2$ ). Зверху на діелектрик навпроти каналу наносять металевий шар, який слугуватиме затвором. За допомогою таких самих металевих шарів, нанесених безпосередньо на області  $n^+$ , утворюють площини, до яких приварюють виводи витоку і стоку. Знизу від підкладки також формують вивід (П).

Для прикладу на рис. 3.21 подана типова структура МДН-транзистора із вбудованим  $n$ -каналом на підкладці  $p$ -типу.

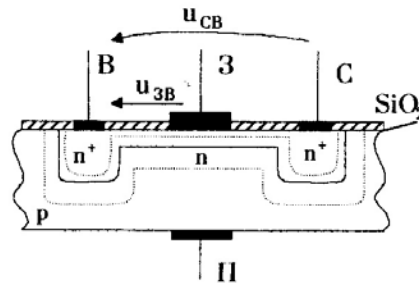
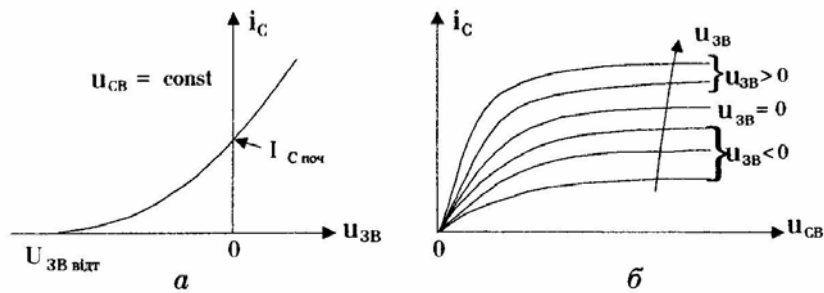


Рис.3.21. Структура МДН-транзистора з вбудованим  $n$ -каналом

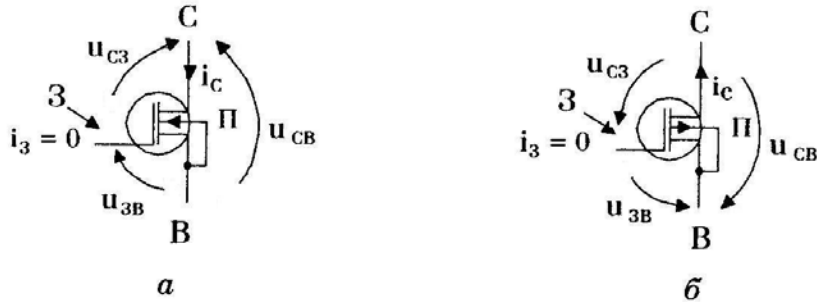
Ізоляція транзистора від підкладки здійснюється за допомогою зворотнозміщеного  $p$ - $n$  – переходу, утвореного між структурою транзистора та підкладкою. Для цього на вивід підкладки подають напругу відповідної полярності або з'єднують його з витоком.

У разі прикладання між стоком і витоком деякої напруги  $u_{св}$  в каналі МДН-транзистора потече струм  $i_c$ . Керування струмом здійснюється напругою  $u_{зв}$ , яку подають між затвором і витоком. При додатній напрузі на затворі стосовно витоку електричне поле, утворене цією напругою, втягує з підкладки в канал додаткові електрони, збагачуючи його основними носіями заряду, і струм в каналі зростає. За від'ємної напруги на затворі електричне поле виштовхує електрони з каналу в підкладку, збіднюючи канал на основні носії заряду, внаслідок чого струм  $i_c$  зменшується. За достатньо великої від'ємної напруги на затворі концентрація електронів у каналі стає настільки малою, що струм  $i_c$  прямує до нуля. Таку напругу затвора називають напругою відтинання і позначають  $U_{зв. відт.}$ . Отже, змінюючи напругу  $u_{зв}$ , можна змінювати провідність каналу та, відповідно, струм, що протікає в ньому. Зауважимо, що в МДН-транзисторах із вбудованим каналом змінюється не поперечний переріз каналу, а концентрація основних носіїв заряду в ньому і для керування струмом можна подавати на затвор як додатну, так і від'ємну напругу.

Залежність струму стоку  $i_c$  від напруги  $u_{зв}$  для деякого фіксованого значення  $u_{св} = const$  називають передавальною або стокозатворною характеристикою, як для польового транзистора з керуючим  $p$ - $n$  – переходом. Типовий вигляд цієї характеристики подано на рис. 3.22, а.



**Рис. 3.22.** Стокозатворна (а) і стокові (б) статичні ВАХ МДН-транзистора із вбудованим каналом

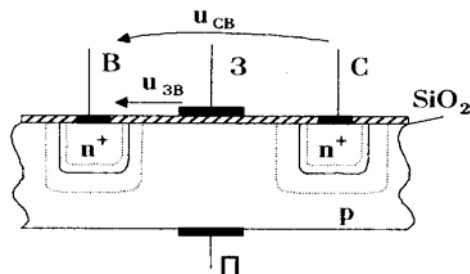


**Рис. 3.23.** Полярності зовнішніх напруг польових танзисторів з вбудованим каналом: *n*-канальних (а) та *p*-канальних (б)

Вихідні (стокові) ВАХ МДН-транзистора із вбудованим каналом мають типовий вигляд, зображений на рис. 3.22, б, звідки бачимо, що вони подібні до вихідних ВАХ польового транзистора з керуючим *p-n* – переходом, проте напруга  $u_{ЗВ}$  може набувати як додатні, так і від’ємні значення. Якщо між стоком і витоким прикласти надто велику напругу, може виникнути пробиття ізолюючого *p-n* – переходу під стоком або пробиття діелектрика під затвором. На рис. 3.23 подано полярності зовнішніх напруг та додатні напрями струмів польових транзисторів із вбудованим каналом у нормальному робочому режимі.

### 3.4.3. МДН-транзистор з індукованим каналом

МДН-транзистор з індукованим каналом відрізняється від попереднього транзистора тим, що канал між областями витоку і стоку під час виготовлення не створюється. На рис. 3.47 зображена структура МДН-транзистора з індукованим *n*-каналом, виконаного на підкладці *p*-типу.



**Рис.3.24.** Структура МДН-транзистора з індуктивним *n*-каналом

За нульової напруги між затвором та витоким струм стоку буде дуже малим. Подання на затвор від’ємної напруги стосовно витоку також картини не змінить. При поданні на затвор стосовно витоку невеликої додатної напруги електричне поле, яке виникає під затвором, виштовхує дірки з приповерхневого шару в глибину підкладки і притягує електрони до поверхні. Внаслідок цього біля поверхні підкладки під затвором виникає шар з електронною провідністю, який і буде каналом між витоким і стоком. Нижче від каналу утворюється шар від’ємних нерухомих зарядів з

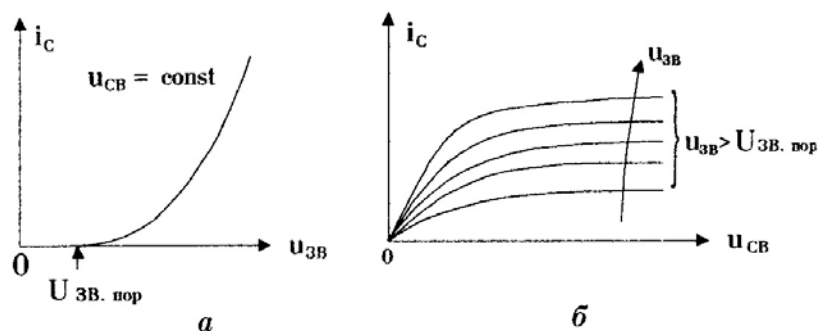
іонізованих атомів акцепторних домішок підкладки, збіднений на носії заряду, який стає свого роду ізолятором між каналом і підкладкою.

Напругу між затвором і витоком, за якої електропровідність приповерхневого шару підкладки стає електронною, тобто за якої утворюється канал, називають пороговою напругою і позначають  $U_{зв. пор.}$

У разі подальшого збільшення додатної напруги  $u_{зв}$  в утвореному каналі розпочнеться рух основних носіїв заряду (електронів) від витоку до стоку, тобто потече електричний струм.

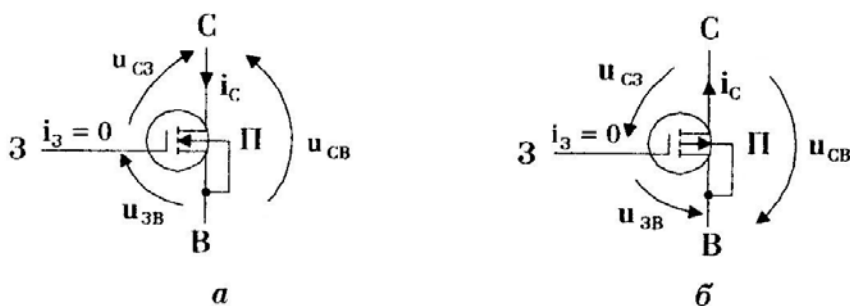
**Польові транзистори з індукованим каналом характеризуються найбільшим вхідним опором.**

Значення струму буде тим більшим, чим більша додатна напруга  $u_{зв}$ , прикладена між затвором і витоком. Залежність струму стоку  $i_c$  від напруги затвор-виток  $u_{зв}$  називають стокозатворною статичною ВАХ МДН-транзистора з індукованим каналом. Її типовий вигляд зображено на рис. 3.25, а.



**Рис. 3.25.** Стокозатворна (а) і стокові (б) статичні ВАХ МДН-транзистора з індукованим каналом *n*-типу

Залежності струму стоку  $i_c$  від напруги  $u_{св}$ , прикладеної між стоком і витоком, при різних значеннях напруги  $u_{зв}$  зображено на рис. 3.25, б. Ці залежності подібні до стокових ВАХ лише за додатних напруг  $u_{зв}$ , більших від  $U_{зв. пор.}$ . Із збільшенням напруги  $u_{св}$  ізолюючий шар від'ємних іонів, який формується під каналом, у напрямі стоку розширюється, а канал відповідно звужується, внаслідок чого настає режим насичення, як і у польових транзисторів з керуючим *p-n* – переходом чи з вбудованим каналом. У разі прикладання між стоком і витоком надто великої напруги  $u_{св}$  може виникнути пробиття ізолюючого *p-n* – переходу в області стоку транзистора.



**Рис. 3.26.** Полярності зовнішніх напруг польових транзисторів з індукованим каналом: *n*-канальних (а) та *p*-канальних (б)

На рис 3.26 подано полярності зовнішніх напруг та додатні напрями струмів польових транзисторів з індукованим каналом у нормальному робочому режимі.

### 3.5. Електровакуумні лампи

#### 3.5.1. Електронна емісія. Електровакуумний діод

Електровакуумна лампа – електронний електровакуумний прилад, призначений для перетворень електричних величин (випрямлення змінного струму, модуляції, детектування, підсилення тощо).

**Вакумний діод забезпечує випрямлення високих напруг близько десятків тисяч вольт.**

Принцип дії електровакуумних ламп ґрунтується на фізичних явищах, пов'язаних з рухом вільних електронів у вакуумі. Електронні лампи використовують явище термоелектронної емісії – випромінювання електронів з поверхні спеціального електрода під час його нагрівання. Такий електрод називають катодом. Під дією тепла деякі електрони набувають енергії, достатньої для виходу електрона з металу, і покидають катод. Емісійну здатність катода можна збільшити, створюючи на його металевій поверхні тонку плівку іншого металу, який має меншу роботу виходу. Такі катода називають активованими.

За способом розжарення розрізняють катода прямого розжарення і підігрівні, які підігрівають за допомогою нитки розжарення, яка проходить всередині керамічної трубки, на якій і розміщено катод у вигляді металевий циліндра. Завдяки високій тепловій інерції для розжарення катода застосовують як змінний, так і постійний струми.

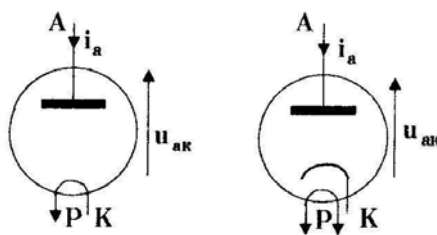
В електронних лампах, крім катода, що випромінює електрони, завжди наявний другий електрод – анод. Анод збирає електрони, якщо до нього прикладають додатний потенціал стосовно катода.

Цю напругу називають анодною. Вона змушує електрони рухатися від катода до анода.

З метою забезпечення вільного руху електронів від катода до анода ці два електроди вставляють в скляний або металевий балон, в якому створюють вакуум. Такий компонент утворює двоелектродну електронну лампу – діод.

**Внутрішній опір вакуумних діодів значно більший за внутрішній опір напівпровідникових діодів.**

На рис. 3.27 подано умовні графічні позначення діодів з двома типами катода і вказано умовні додатні напрями струмів та напруг, де буквами А, К і Р позначено, відповідно, анод, катод діода та нитка розжарення.



**Рис.3.27.** Умовні графічні позначення діодів з двома типами катода

Основною електричною характеристикою діода є його вольт-амперна характеристика (ВАХ)  $i_a = f(u_{ак})$ , знята за номінальних напруги та струмові розжарення (рис. 3.28).



**Рис.3.28.** Вольт-амперна характеристика діода

Часто під час розрахунків використовують як основний параметр діода крутість його ВАХ на лінійній ділянці, яку визначають за формулою:  $S = di_a / du_{ак}$ , або внутрішній опір  $R_i = du_{ак} / di_a = 1 / S$ .

Діапазон значень крутості, як правило, лежить у межах 0,5 – 6 мА/В.

За призначенням електровакуумні діоди поділяють на дві основні групи:

1) випрямні – кенотрони (призначені для випрямлення змінного струму у джерелах живлення). Крім параметрів  $S$  чи  $R_i$ , їх характеризують додатковими параметрами: допустимою потужністю розсіювання на аноді  $P_{а доп}$  та максимально допустимою зворотною напругою анода  $U_{а зв}$ ;

2) високочастотні (призначені для використання при перетвореннях слабких сигналів в області високих частот). Їхнім важливим параметром є міжелектродна ємність  $C_{ак}$  між анодом і катодом.

Великою перевагою електровакуумного діода перед напівпровідниковим є відсутність зворотного струму діода. Електровакуумний діод порівняно з напівпровідниковим має і недоліки, а саме: значно більші розміри; необхідність джерела живлення для розжарення катода і забезпечення термоелектронної емісії; більший опір діода у прямому вмиканні.

### 3.5.2. Електровакуумний тріод

Тріод – триелектродна лампа, між катодом і анодом якої розміщений третій електрод – сітка, призначена для керування анодним струмом для отримання підсилювального ефекту. На сітку подають від'ємний потенціал відносно катода, тому її струм дорівнює нулеві. Сіткова напруга впливає сильніше на анодний струм ніж анодна, оскільки сітка розміщена ближче до катода і, отже, зумовлює більші значення напруженості електричного поля.

**Основна перевага вакуумних тріодів – це можливість отримання високих вихідних напруг (~20 кВ).**

Анодний струм тріода залежить від напруги на аноді і від напруги на сітці:

$$i_a = f(u_{ск}; u_{ак}), \quad (3.28)$$

де  $i_a$  – анодний струм;  $u_{ск}$  – напруга між сіткою і катодом;  $u_{ак}$  – напруга між анодом і катодом.

Залежність (3.28) графічно подають у вигляді двох варіантів сімей ВАХ:

а) анодно-сіткових характеристик, кожна з яких є залежністю анодного струму тріода  $i_a$  від напруги  $u_{ск}$  на сітці за заданої напруги  $u_{ак}$  на аноді:

$$i_a = f_1(u_{ск}) \text{ при } u_{ак} = \text{const}; \quad (3.29а)$$

б) анодних характеристик, кожна з яких – це залежність анодного струму  $i_a$  від анодної напруги  $u_{ак}$  за заданих значень напруги  $u_{ск}$  на сітці:

$$i_a = f_2(u_{ак}) \text{ при } u_{ск} = \text{const}. \quad (3.29б)$$

На рис. 3.29 подано умовне графічне позначення електровакуумного тріода з вказаними додатними напрямками струмів та напруг, а також сім'ї його анодно-сіткових та анодних характеристик.



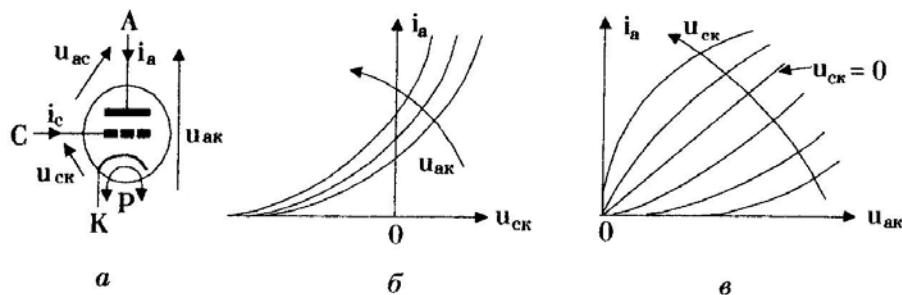


Рис. 3.29. Умовне графічне позначення електровакуумного тріода (а) і його анодно-сіткової (б) та анодні (в) характеристики

З рис.3.29, а бачимо, що для електровакуумного тріода як триполюсника, з урахуванням вказаних додатних напрямів струмів та напруг, справедливі такі співвідношення між його зовнішніми струмами та напругами:

$$i_a = f_2(u_{ak}), \text{ при } u_{ck} = \text{const}; \quad (3.30a)$$

$$i_a + i_c = i_k \quad (3.30б)$$

$$u_{ak} = u_{ac} + u_{ck}. \quad (3.31)$$

**Примітка:** оскільки в нормальному робочому режимі електровакуумного тріода напруга  $u_{ck} < 0$ , то струм сітки  $i_c = 0$  і, отже, з (3.30б) випливає:  $i_a = i_k$ .

Статичний режим роботи тріода повністю описується двома постійними напругами ( $u_{ck}$  та  $u_{ak}$ ) і двома постійними струмами ( $i_c$  та  $i_a$ ):

$$i_c = \varphi(u_{ck}, u_{ak}) = 0; \quad (3.32)$$

$$i_a = f(u_{ck}, u_{ak}). \quad (3.33)$$

Для малих приростів струмів та напруг тріода стосовно статичного режиму можемо записати на підставі (3.32) та (3.33):

$$\Delta i_c = 0; \quad (3.34)$$

$$\Delta i_a = \left. \frac{di_a}{du_{ck}} \right|_{u_{ak}=\text{const}} \Delta u_{ck} + \left. \frac{di_a}{du_{ak}} \right|_{u_{ck}=\text{const}} \Delta u_{ak} = S \Delta u_{ck} + 1/R_i \Delta u_{ak} \quad (3.35)$$

Отже, малосигнальними параметрами тріода є:

– крутість анодно-сіткової характеристики в робочій точці:

$$S = \frac{di_a}{du_{ck}} \quad \text{при } u_{ak} = \text{const}; \quad (3.36)$$

– вихідний диференційний опір у робочій точці:

$$R_i = \frac{du_{ak}}{di_a} \quad \text{при } u_{ck} = \text{const}. \quad (3.37)$$

Часто використовують малосигнальний параметр тріода, який є похідним від двох попередніх, – статичний коефіцієнт підсилення в робочій точці:

$$\mu = \frac{du_{ak}}{du_{ck}} \quad \text{при } i_a = \text{const}.$$

Цей параметр показує, наскільки сильніше впливає на анодний струм сіткова напруга порівняно з анодною напругою. Зауважимо, що для забезпечення незмінного значення анодного

струму прирости напруг  $\Delta u_{\text{СК}}$  та  $\Delta u_{\text{АК}}$  треба вибирати з різними знаками. Неважко встановити взаємозв'язок між значеннями параметрів  $S$ ,  $R_i$ ,  $\mu$ :

$$\mu = \frac{du_{\text{АК}}}{du_{\text{СК}}} = \frac{di_a}{du_{\text{СК}}} \cdot \frac{du_{\text{АК}}}{di_a} = -SR_i \quad (3.38)$$

Знак “мінус” у (3.38) враховує те, що прирости напруг  $du_{\text{СК}}$  та  $du_{\text{АК}}$  мають різні знаки. Інколи замість параметра  $\mu$  використовують обернену величину  $D=1/\mu$ , яку називають проникністю трюда.

Окрім вакуумних діодів і тріодів є ще електронні лампи з додатковими сітками, такі, як тетроди, пентоди, гексоди, гептоди. Також іноді в одному балоні можуть розміщуватись дві окремі електронні лампи.

## 3.6. Основні відомості про інтегральні мікросхеми

### 3.6.1. Класифікація інтегральних мікросхем

Використання електронних пристроїв для розв'язання найскладніших задач призводить до постійного ускладнення їхніх електронних схем. Аналіз розвитку електронної техніки показує, що упродовж десяти років складність електронних пристроїв збільшується приблизно вдесятеро. Якщо десять років тому використовували електронні пристрої з кількістю активних елементів до  $10^7$ , то сьогодні є електронні пристрої з кількістю елементів близько  $10^8$ . За той самий час істотно зросла швидкодія електронних пристроїв, зменшились їхні габарити, зокрема, і напівпровідникових приладів. Розміри одного активного елемента зменшились до 0,2 мкм, що дає змогу розміщувати в одній мікросхемі  $10^6$ – $10^7$  елементів. Створення нових електронних пристроїв з великою кількістю елементів стало можливим на базі мікроелектроніки та наноелектроніки. Це новий напрям електроніки, який охоплює проблеми створення мікромініатюрних електронних пристроїв, що відрізняються надійністю, низькою вартістю, високою швидкістю і малою споживаною потужністю. Основним конструктивно-технічним принципом мікроелектроніки є елементна інтеграція – об'єднання в одному складному мініатюрному компоненті багатьох найпростіших елементів (діодів, транзисторів, резисторів тощо). Отриманий в результаті такого об'єднання складний мікрокомпонент називають інтегральною мікросхемою (ІМС).

**Інтегральна мікросхема** – мікроелектронний виріб, до складу якого входить не менше ніж п'ять активних елементів (транзисторів, діодів) і пасивних елементів (резисторів, конденсаторів), які виготовляють в одному технологічному процесі. Ці елементи електрично з'єднані між собою, вміщені в загальний корпус і є нероздільним цілим.

З погляду інтеграції основними параметрами ІМС є щільність упакування і ступінь інтеграції. Щільність упакування характеризується кількістю елементів в одиниці об'єму ІМС, ступінь інтеграції – кількістю елементів, які входять до складу ІМС. За ступенем інтеграції всі ІМС поділяють на: ІМС першого ступеня інтеграції – до 10 елементів, другого ступеня – від 10 до 100 елементів, третього ступеня – від 100 до 1000 елементів і т.д.

***Інтегральні мікросхеми є основними компонентами сучасних електронних кіл.***

За технологією виготовлення розрізняють напівпровідникові і гібридні ІМС.

**Напівпровідникова ІМС** – інтегральна мікросхема, всі елементи і міжелектродні з'єднання якої виконані в об'ємі і на поверхні напівпровідника.

Щільність упакування сучасних напівпровідникових ІМС сягає  $10^5$  елементів на  $1 \text{ см}^3$  для шостого ступеня інтеграції. Лінійні розміри окремих елементів і відстані між ними можуть бути зменшені до 1 мкм.

Аналіз тенденції розвитку мікроелектроніки показав, що складність найбільших напівпровідникових ІМС збільшується приблизно вдвічі за рік.

**Гібридна ІМС** – інтегральна мікросхема, пасивні елементи якої виконані нанесенням різних плівок на поверхню діелектричної підкладки зі скла, кераміки, сіталу або сапфіру, активними ж елементами є безкорпусні напівпровідникові прилади.

*Інтегральні мікросхеми характеризує висока надійність їхнього функціонування.*

Щільність упакування гібридних ІМС дещо менша – до 150 елементів на 1 см<sup>3</sup>, ступінь інтеграції – перший і другий. Гібридні ІМС перспективні для пристроїв з невеликою кількістю елементів, в яких може бути забезпечена висока точність параметрів.

Висока точність виконання плівкових елементів може бути використана під час виготовлення мікросхем за суміщеною технологією, в якій активні і частину пасивних елементів виконують в об'ємі напівпровідника, а іншу частину пасивних елементів – на його поверхні в тонкоплівковому виконанні. Застосування двох технологій підвищує вартість таких ІМС, проте дає змогу істотно збільшити точність їхніх параметрів.

Останнім часом застосовують суміщену технологію, за якою в гібридних мікросхемах як навісні компоненти використовують безкорпусні напівпровідникові ІМС. За такою технологією виготовляють мікросхеми до шостого ступеня інтеграції для швидкодіючих ЕОМ.

Застосування мікросхем істотно збільшує надійність електронних пристроїв, тому що надійність мікросхем загалом, до складу яких входить велика кількість елементів, не поступається надійності окремих транзисторів, діодів, резисторів.

На відміну від напівпровідникових діодів і транзисторів, ІМС є не окремими елементами, а цілими функціональними вузлами, призначеними для перетворення електричних сигналів. Залежно від типу сигналів, які формують та перетворюють ІМС, розрізняють два класи ІМС: аналогові та цифрові.

**Аналогові ІМС** призначені для оброблення та перетворення аналогових сигналів і реалізують такі основні аналогові функції: підсилення, порівняння, перемноження, обмеження, частотну фільтрацію. Кожна із названих функцій є відповідною математичною операцією, яку здійснюють ІМС над аналоговими сигналами:

- функція підсилення – це збільшення миттєвих значень сигналу в  $K$  разів без нелінійних спотворень у необмеженій смузі частот;
- функція порівняння – це зіставлення двох аналогових сигналів з деякою заданою точністю;
- функція перемноження дає змогу отримати результат перемноження двох аналогових сигналів;
- функція обмеження встановлює межі допустимих змін миттєвих значень сигналу, які він не може перейти. Розрізняють обмеження зверху, знизу та двостороннє обмеження;
- функція частотної фільтрації – це виділення потрібного діапазону частот із повного спектра сигналу, в якому здійснюється передавання його гармонік.

Перелічені основні аналогові функції утворюють у сукупності повний набір операцій, необхідних для перетворення та оброблення аналогових сигналів. Аналогові ІМС виготовляють переважно у вигляді напівпровідникових ІМС та великих інтегральних мікросхем (ВІС).

**Цифрові ІМС** призначені для оброблення та перетворення цифрових сигналів і реалізують логічні та арифметичні операції та операції запам'ятовування цифрової інформації. При цьому звичайно використовують двійкову систему числення. Двійкова система порівняно з іншими системами дає змогу найпростіше реалізувати арифметичні дії.

Основою будови цифрових ІМС є так звані логічні елементи, тобто електронні схеми, які виконують найпростіші логічні операції, до яких належать:

- операція логічного заперечення (інверсія) – функція “НЕ”;
- операція логічного додавання (диз'юнкція) – функція “АБО”;
- операція логічного множення (кон'юнкція) – функція “І”.

Ці елементарні логічні функції утворюють так званий основний логічний базис. З їхньою допомогою можна реалізувати будь-яку складну логічну функцію. Інтегральні логічні елементи

становлять основу складніших мікросхем та цифрових пристроїв і систем. Найпоширенішими є цифрові ІМС на біполярних та МДН-транзисторах.

### 3.6.2. Номенклатура інтегральних мікросхем

Під номенклатурою ІМС розуміють перелік різновидів мікросхем, які відрізняються за функціональним призначенням, параметрами, конструктивно-технологічними характеристиками.

#### 3.6.2.1. Номенклатура аналогових ІМС

*Найважливішими типами аналогових ІМС є такі: підсилювачі, компаратори, стабілізатори, генератори, змішувачі, ЦАП, АЦП*

Основа номенклатури аналогових мікросхем утворюють ІМС, які реалізують основні та спеціальні аналогові функції. Залежно від реалізованої аналогової функції розрізняють такі основні типи аналогових ІМС: багатоцільові підсилювачі, операційні підсилювачі, компаратори напруги, обмежувачі, перемножувачі, активні та пасивні фільтри, аналого-цифрові та цифроаналогові перетворювачі, стабілізатори напруги, комутатори і ключі, формувачі, генератори, детектори, модулятори, змішувачі тощо.

Багатоцільові підсилювачі призначені для підсилення сигналів у широкому діапазоні частот. До них належать підсилювачі низьких, проміжних та високих частот, а також широкосмугові підсилювачі і підсилювачі постійного струму.

Окрему підгрупу становлять операційні підсилювачі – найпоширеніший тип підсилювача широкого застосування, який реалізує функцію підсилення і виконує роль базового універсального елемента для побудови аналогових функціональних вузлів різноманітного призначення. Типовий операційний підсилювач характеризується високим коефіцієнтом підсилення (десятки – сотні тисяч), високим вхідним опором (сотні кОм – десятки МОм), низьким вихідним опором (сотні Ом – одиниці кОм).

Компаратори напруги реалізують функцію порівняння двох сигналів і в момент їхньої рівності стрибком змінюють вихідну напругу.

Обмежувачі реалізують функцію обмеження і призначені для зміни форми сигналів.

Перемножувачі реалізують функцію перемноження двох аналогових сигналів. Їх застосовують під час здійснення таких перетворень сигналів, як модуляція, помноження, ділення та перетворення частоти коливальних, детектування, генерування коливальних.

Фільтри реалізують функції частотної вибірності (селекції). Їх випускають серійно у вигляді активних RC-фільтрів на основі операційних підсилювачів, а також у вигляді пристроїв на основі поверхневих акустичних хвиль та приладів із зарядовим зв'язком.

Аналого-цифрові та цифроаналогові перетворювачі (АЦП і ЦАП) призначені для перетворення відповідно аналогових сигналів у цифровий код і цифрової інформації на аналогові сигнали. Їхнє застосування забезпечує цифрове оброблення аналогових сигналів і подальше перетворення результатів оброблення в аналогову форму.

Стабілізатори напруги призначені для підтримання сталої напруги живлення електронних вузлів, блоків, пристроїв.

Аналогові комутатори і ключі застосовують для перемикання і перерозподілу у часі інформації.

Формувачі сигналів, генератори, детектори, модулятори, змішувачі належать також до аналогових ІМС. Оскільки кількість таких схем велика, а їхня стандартизація ускладнена, то під час їхнього виготовлення використовують різні типи операційних підсилювачів з додатковими зовнішніми підсхемами.

На закінчення зауважимо, що різноманітність функцій, які реалізують аналогові ІМС, не дає змогу характеризувати їх сукупністю параметрів, єдиних для усіх типів мікросхем. Кожну групу аналогових ІМС характеризують певними параметрами, притаманними лише однотипним мікросхемам. Ці питання є предметом вивчення спеціальних дисциплін.

### 3.6.2.2. Номенклатура та основні параметри цифрових ІМС

Найзагальніша класифікація цифрових ІМС ґрунтується на поданні цифрових схем як цифрових автоматів.

На підставі такого підходу цифрові ІМС поділяють на дві групи:

а) комбінаційні схеми (цифрові автомати без пам'яті), особливість яких полягає у тому, що їхні вихідні сигнали у будь-який момент часу залежать лише від комбінації вхідних сигналів у той самий момент. До комбінаційних схем належать суматори, комутатори (мультиплексори і демультіплексори), перетворювачі кодів (шифратори і дешифратори), компаратори, програмовані логічні матриці, арифметико-логічні блоки тощо.

*Основними групами цифрових ІМС є комбінаційні схеми, запам'ятовувальні пристрої, послідовнісні схеми*

б) послідовнісні схеми (цифрові автомати з пам'яттю), до складу яких входять елементи пам'яті – запам'ятовувальні комірки. Внаслідок цього вихідні сигнали послідовнісних схем залежать не тільки від комбінації вхідних сигналів, але і від стану елементів пам'яті. До послідовнісних схем належать регістри, лічильники, генератори чисел тощо, також мікропроцесори – програмно керовані великі інтегральні схеми (ВІС), які реалізують арифметичні та логічні операції над цифровими сигналами. Програмування мікропроцесорів здійснюють поданням зовнішніх сигналів, комбінація яких утворює певну команду для мікропроцесора, забезпечуючи виконання тієї чи іншої операції.

Окрему групу цифрових ІМС утворюють запам'ятовувальні пристрої, які призначені для зберігання інформації і реалізують операції запису, запам'ятовування та зчитування цифрових сигналів.

На відміну від аналогових, цифрові ІМС характеризують набором основних параметрів, однакових для усіх мікросхем, що дає змогу порівнювати між собою мікросхеми різних типів.

До основних параметрів належать: логічна функція, яку реалізує мікросхема; навантажувальна здатність (коефіцієнт розгалуження на виході  $n$  та коефіцієнт об'єднання на вході  $m$ ); середній час затримки передавання сигналу  $t_{з,ср}$ ; статична завадостійкість  $U_3$ ; споживана потужність  $P_{ср}$ ; гранична робоча частота  $f_{гр}$ .

Перелічені параметри взаємопов'язані функціональними залежностями, специфічними для схем різних типів. Для усіх типів мікросхем характерно те, що покращання одного з параметрів призводить до погіршення інших параметрів.

Навантажувальна здатність характеризує максимальну кількість однотипних мікросхем, які можна з'єднувати між собою. Коефіцієнтом розгалуження на виході називають кількість  $n$  однотипних мікросхем, які можна під'єднати до виходу такої самої мікросхеми без спотворення інформації, яку передають. Коефіцієнтом об'єднання на вході називають кількість  $m$  виходів однотипних мікросхем, які можна під'єднати до входу мікросхеми без спотворення інформації.

Середній час затримки сигналу  $t_{з,ср}$  характеризує швидкодію цифрових ІМС і визначає середній час проходження сигналу через одну мікросхему.

Статична завадостійкість  $U_3$  характеризує максимальне значення напруги зовнішньої статичної завади, яка діє на мікросхему і не призводить до порушення нормального її функціонування.

Потужність, яку споживає мікросхема від джерел живлення, не є сталою у будь-який момент часу, а залежить від логічного стану і типу логічних елементів й змінюється у разі перемикання схеми. Тому як основний параметр використовують не миттєве, а середнє значення потужності, яку споживає мікросхема упродовж достатньо великого часу:  $P_{ср} = (P_0 + P_1)/2$ , де  $P_0$  і  $P_1$  – потужності, споживані схемою відповідно у стані логічного нуля та логічної одиниці. Якщо потужність, споживана під час перемикань мікросхеми, більша від потужності, споживаної у

статичних станах, мікросхеми додатково характеризують потужністю, споживаною за максимальної частоти перемикання. Зауважимо, що чим більшу потужність споживає мікросхема, тим більша її швидкодія.

Конкретні значення основних параметрів цифрових ІМС залежать від їхніх конструктивно-технологічних та схемотехнічних рішень, які є предметом вивчення окремих дисциплін.

### 3.7. Моделі компонент електронних кіл.

Для оцінки перетворення сигналів, які відбуваються в електронних колах, тобто аналізу таких кіл, потрібно знати взаємозв'язки між струмами та напругами їхніх компонент. Зазвичай такі взаємозв'язки задають за допомогою **моделей** цих компонент. Нині найвживанішими **моделями** компонент електронних кіл є **схеми заміщення** та **математичні моделі**.

*Моделями багатополюсних компонент електронних кіл є схеми заміщення та математичні макромоделі.*

**Схемою заміщення** компоненти електронного кола називають електричну схему, складену із з'єднаних між собою ідеальних елементів (резисторів, конденсаторів, котушок індуктивностей, автономних та керованих джерел енергії), яка є еквівалентною до модельованої компоненти стосовно зовнішніх струмів та напруг.

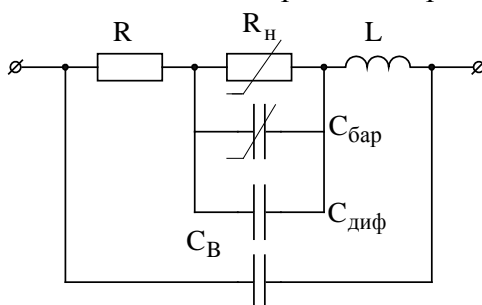
Часто схеми заміщення називають еквівалентними схемами.

**Математична модель** (макромодель) компоненти електронного кола відображає взаємозв'язки її зовнішніх струмів та напруг за допомогою певних математичних співвідношень, зокрема рівнянь.

Розглянемо найпоширеніші моделі типових компонент електронних кіл.

#### 3.7.1. Схема заміщення напівпровідникового діода

Схема заміщення напівпровідникового діода зображена на рис.3.30.



**Рис. 3.30.** Схема заміщення напівпровідникового діода

Нелінійний резистор на рис.3.30 моделює активний опір р-п – переходу, його ВАХ визначається співвідношенням (3.1). Сумарні об'ємні опори  $p$  і  $n$  областей напівпровідника на цій самій схемі відображено за допомогою лінійного резистора  $R$ .

Ємність р-п – переходу тут відображено за допомогою двох конденсаторів:

–  $C_{бар}$  моделює бар'єрну ємність, яка нелінійно залежить від напруги на діоді

$$C_{бар} = C_0 / \sqrt{1 - u/\Phi_T} \quad (3.39)$$

–  $C_{диф}$  моделює дифузійну ємність р-п – переходу, що визначається формулою

$$C_{диф} = i \cdot \tau / \Phi_T \quad (3.40)$$

У (3.39) та (3.40) позначено:

$\Phi_T$  – тепловий потенціал р-п – переходу,

$\tau$  – середній час життя носіїв заряду,

$u$  – зовнішня напруга, прикладена до р-п – переходу,

$i$  – прямий струм, що протікає через р-п – перехід.

Індуктивність та ємність виводів відображають відповідно котушка  $L$  та конденсатор  $C_B$ . Останні параметри доцільно враховувати лише для високочастотних діодів.

### 3.7.2. Моделі біполярного транзистора

Найдетальніше відображає процеси у біполярному транзисторі п-р-п-типу еквівалентна схема Еберса –Молла, показана на рис.3.31.

Для транзистора типу р-п-р необхідно у цій моделі змінити полярності вмикання діодів на протилежні, а також вибрані додатні напрями струмів та напруг.

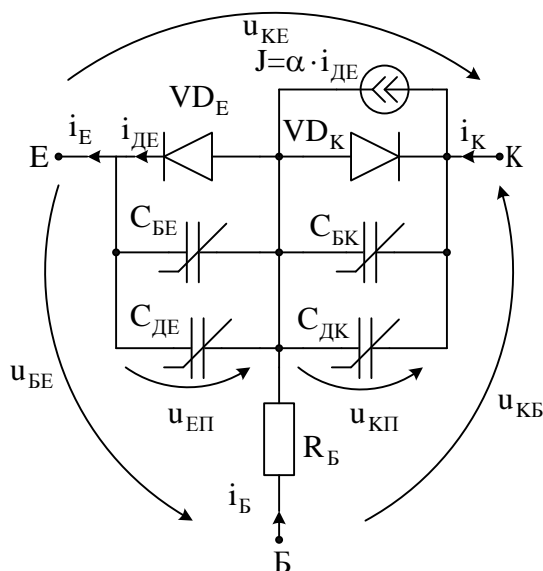


Рис. 3.31. Еквівалентна схема Еберса–Молла біполярного транзистора типу п-р-п

У моделі, показаній на рис. 3.31, діоди  $VD_E$  та  $VD_K$  відображають відповідно емітерний та колекторний переходи. Кероване джерело струму  $J = \alpha \cdot i_{DE}$  моделює передавання струму з емітера в колектор. Ємності  $C_{BE}$  та  $C_{BK}$  – це нелінійні бар'єрні ємності емітерного та колекторного переходів, а  $C_{DE}$  та  $C_{DK}$  – їхні дифузійні ємності. Резистор  $R_B$  відображає опір базової області транзистора. У відповідній довідковій літературі наведено формули для розрахунку параметрів компонент цієї моделі. Найчастіше враховують залежності бар'єрних ємностей від напруг  $u_{EP}$  та  $u_{KP}$  на переходах та залежність коефіцієнта  $\alpha$  від напруг та струмів.

В аналізі електронних схем у режимі слабких сигналів (лінійні підсилювачі, лінійні фільтри тощо) використовують лінеаризовані малосигнальні еквівалентні схеми біполярних транзисторів, які пов'язують між собою малі відхилення струмів та напруг стосовно значень у статичній робочій точці.

Це означає, що в еквівалентній схемі транзистора (рис. 3.31) нелінійні елементи замінюють лінійними, значення параметрів яких дорівнюють значенням диференційних параметрів, визначених в статичній робочій точці. Так, діоди  $VD_E$  та  $VD_K$  замінюють диференційними опорами  $R_{BE}$  та  $R_{KB}$ , бар'єрні ємності  $C_{BE}$  та  $C_{BK}$  – диференційними ємностями, які в сумі з відповідними дифузійними ємностями утворюють ємності емітерного переходу  $C_{EP}$  та колекторного переходу  $C_{KP}$ . Отже, еквівалентна малосигнальна схема біполярного транзистора набуває вигляду, зображеного на рис. 3.32. Наявність ємностей  $C_{EP}$  та  $C_{KP}$  у цій еквівалентній схемі дає змогу відобразити частотні властивості транзистора, які проявляються в діапазоні високих частот (сотні кГц і вище). Орієнтовні значення параметрів елементів еквівалентної схеми:  $R_B$  та  $R_{BE}$  – десятки Ом – одиниці кОм;  $R_{KB}$  – десятки – сотні кОм;  $\alpha = 0,95 - 0,995$ ;  $C_{EP}$  – сотні – тисячі пФ;  $C_{KP}$  – одиниці – сотні пФ.

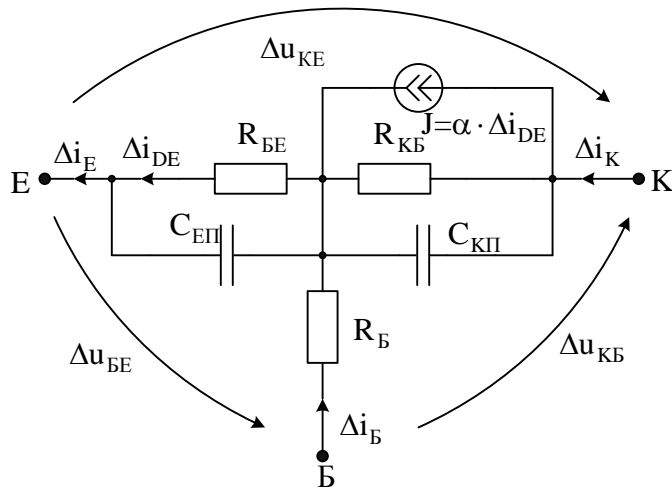


Рис. 3.32. Еквівалентна малосигнальна схема біполярного транзистора

У діапазоні низьких частот впливом ємностей можна знехтувати, і в такому разі малосигнальні параметри можна безпосередньо визначати на підставі ВАХ транзистора.

Спосіб визначення параметрів  $di_B/du_{BE}$  та  $di_B/du_{CE}$  у деякій робочій точці А на підставі вхідних ВАХ для схеми вмикання транзистора із спільним емітером подано на рис. 3.33.

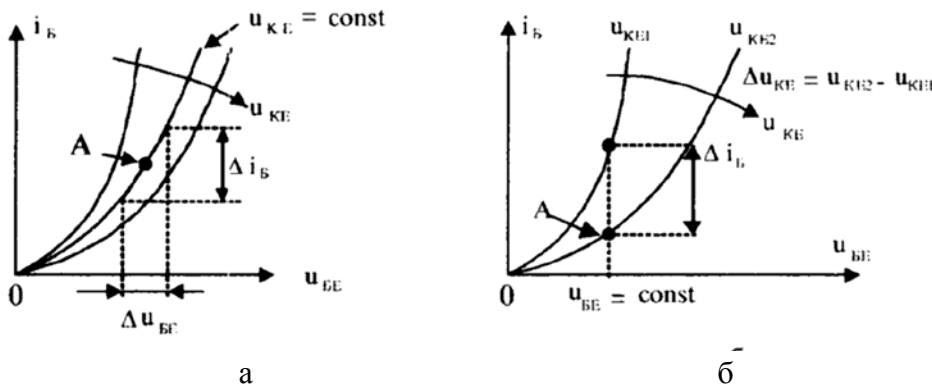
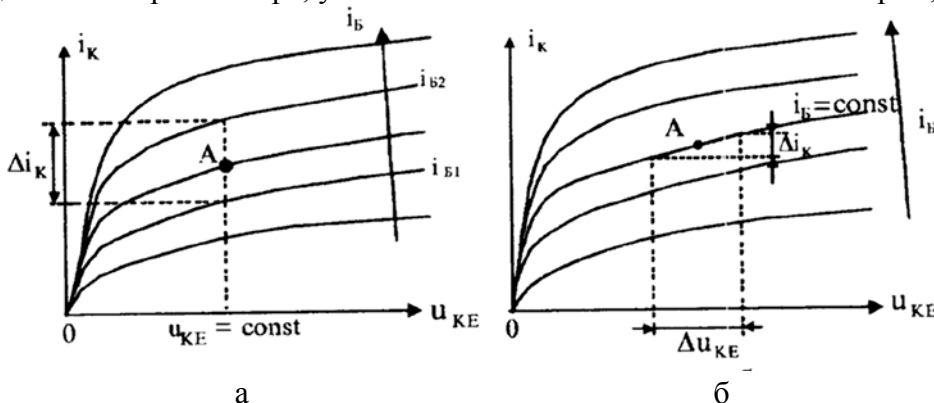


Рис. 3.33. Визначення низькочастотних малосигнальних параметрів транзистора на підставі вхідних ВАХ

Отже, як бачимо з рис. 3.33, а, параметр  $di_B/du_{BE} \approx \Delta i_B/\Delta u_{BE}$ , якщо  $u_{CE} = \text{const}$ . Його фізичний зміст – вхідна провідність транзистора для малих приростів струму  $i_B$  та напруги  $u_{BE}$  у разі вмикання транзистора зі спільним емітером. Позначимо його  $g_{ББ}$ .

З рис. 3.33, б випливає, що  $di_B/du_{CE} \approx \Delta i_B/\Delta u_{CE}$ , якщо  $u_{BE} = \text{const}$ . Фізичний зміст цього параметра – зворотна прохідна провідність транзистора для малих приростів струму  $i_B$  та напруги  $u_{CE}$ . Позначимо цей параметр  $g_{БК}$ . Оскільки при  $\Delta u_{CE} > 0$  приріст струму  $\Delta i_B < 0$ , то  $g_{БК} < 0$ .

Спосіб визначення параметрів  $di_K/di_B$  та  $di_K/du_{CE}$  в деякій робочій точці А на підставі вихідних ВАХ транзистора, увімкненого за схемою із спільним емітером, подано на рис. 3.34.





**Рис. 3.34.** Визначення низькочастотних малосигнальних параметрів транзистора на підставі вихідних ВАХ

Із рис. 3.34, а бачимо, що параметр  $di_K / di_B \approx \Delta i_K / \Delta i_B$ , якщо  $u_{KE} = \text{const}$ . Його фізичний зміст – коефіцієнт передавання струму з бази в колектор, який було позначено як  $\beta_{\text{диф}}$ .

Із рис. 3.34, б бачимо, що параметр  $di_K / du_{KE} \approx \Delta i_K / \Delta u_{KE}$ , якщо  $i_B = \text{const}$ . Фізичний зміст цього параметра – вихідна провідність транзистора для малих приростів струму  $i_K$  та напруги  $u_{KE}$ . Позначимо цей параметр  $g_{KK}$ .

Отже, з урахуванням прийнятих позначень, можемо записати співвідношення (3.41):

$$\begin{aligned} \Delta i_B &= g_{BB} \cdot \Delta u_{BE} + g_{BK} \cdot \Delta u_{KE} \\ \Delta i_K &= \beta_{\text{диф}} \cdot \Delta i_B + g_{KK} \cdot \Delta u_{KE} \end{aligned} \quad (3.41)$$

які в сукупності утворюють **математичну модель** біполярного транзистора у режимі малих сигналів.

У другому розділі зазначено, що лінеаризовані багатополіусники доцільно описувати компонентними рівняннями типу (2.24), в яких усі лінеаризовані параметри є провідностями. Для транзистора ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta i_B &= g_{BB} \cdot \Delta u_{BE} + g_{BK} \cdot \Delta u_{KE} \\ \Delta i_K &= g_{KB} \cdot \Delta u_{BE} + g_{KK} \cdot \Delta u_{KE} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Порівнюючи рівняння (3.41) та (3.42), бачимо, що вони відрізняються лише першими доданками останніх рівнянь. Одночасно легко переконатись, що параметр  $g_{KB}$ , який дорівнює відношенню  $\Delta i_K / \Delta u_{BE}$ , якщо  $u_{KE} = \text{const}$ , можна визначити через параметри рівняння (3.41):

$$g_{KB} = \Delta i_K / \Delta u_{BE} = (\Delta i_K / \Delta i_B) \cdot (\Delta i_B / \Delta u_{BE}) = \beta_{\text{диф}} \cdot g_{BB}$$

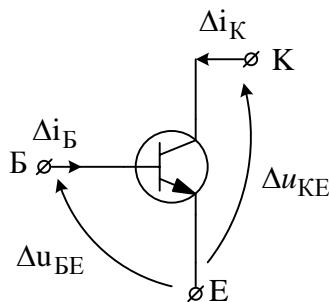
Отже, компонентні рівняння біполярного транзистора як лінеаризованого багатополіусника можна записати так:

$$\begin{aligned} \Delta i_B &= g_{BB} \cdot \Delta u_{BE} + g_{BK} \cdot \Delta u_{KE} \\ \Delta i_K &= \beta_{\text{диф}} \cdot g_{BB} \cdot \Delta u_{BE} + g_{KK} \cdot \Delta u_{KE} \end{aligned} \quad (3.43)$$

У матрицевій формі ці рівняння набувають вигляду:

$$\begin{matrix} & \text{Б} & \text{К} \\ \begin{bmatrix} \Delta i_B \\ \Delta i_K \end{bmatrix} &= & \begin{matrix} \text{Б} & \text{К} \\ \begin{bmatrix} g_{BB} & g_{BK} \\ \beta g_{BB} & g_{KK} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Delta u_{BE} \\ \Delta u_{KE} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.44)$$

що відповідає рівнянню в у-параметрах триполіусника, яким є транзистор. Схемне зображення такого триполіусника подано на рис. 3.35.



**Рис.3.35.** Біполярний транзистор як триполіусник

### 3.7.3. Моделі польових транзисторів

Спрощена модель польового транзистора, яка відображає його нелінійні та частотні властивості, подана на рис. 3.36, де кероване джерело струму  $J_c = f(u_{зв}, u_{св})$  моделює статичні ВАХ транзистора. Оскільки струм затвора практично дорівнює нулеві ( $i_3 \approx 10^{-8} - 10^{-9}$  А), то в моделі не врахований активний опір між затвором і витком ( $R_{зв} \rightarrow \infty$ ). Міжелектродні ємності  $C_{зв}$ ,  $C_{зс}$ ,  $C_{св}$  – це відповідно ємності затвор-виток, затвор-стік та стік-виток, які визначають частотні властивості транзистора. Ці ємності є нелінійними, зокрема, у польового транзистора з керуючим р-п – переходом  $C_{зв}$  та  $C_{зс}$  – це бар'єрні ємності переходів в області витoku та стоку.

Під час роботи транзистора у статичному режимі та в області низьких частот впливом міжелектродних ємностей нехтують і тоді модель транзистора – це лише джерело струму  $J_c$ , кероване напругою  $u_{зв}$ .

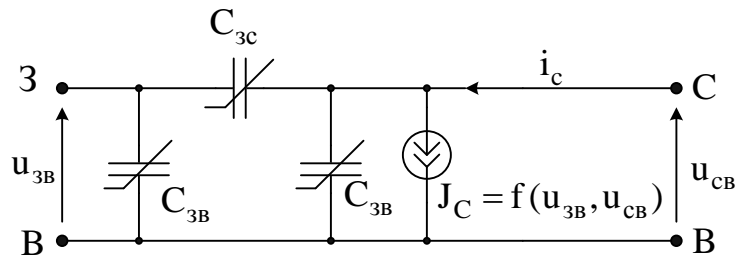


Рис. 3.36. Еквівалентна схема польового транзистора

На заступній схемі транзистора (рис. 3.36) стрілками позначено умовні додатні напрями струмів та напруг для n-канального польового транзистора. У р-канального транзистора напрям стрілок потрібно змінити на протилежний.

Аналізуючи роботу транзистора у малосигнальному режимі, коли на його зовнішніх виводах діють, крім постійних напруг, ще й невеликі змінні у часі напруги і струми  $\Delta u$  та  $\Delta i$ , використовують так звану лінеаризовану (малосигнальну) заступну схему (рис. 3.37), яку отримують із заступної схеми (рис. 3.36), визначаючи диференційні параметри транзистора у заданій робочій точці.

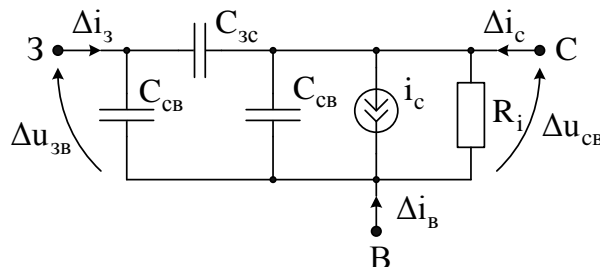


Рис. 3.37. Лінеаризована (малосигнальна) заступна схема польового транзистора

У лінеаризованій схемі міжелектродні ємності вважають лінійними, їхні значення дорівнюють значенням відповідних диференційних ємностей у робочій точці, яка визначається

значеннями постійних напруг  $u_{зв0}$ ,  $u_{св0}$ ,  $i_c = S \cdot \Delta u_{зв}$ .

Параметри малосигнальної заступної схеми, а саме  $S$  – крутість стоко-затворної характеристики транзистора в заданій робочій точці та  $R_i$  – вихідний диференційний опір транзистора, який характеризує нахил стокових ВАХ, визначають на підставі ВАХ аналогічно, як і для біполярних транзисторів:

$$S = di_c / du_{зв}, \quad \text{якщо } u_{св} = \text{const}; \quad (3.45)$$

$$R_i = du_{св} / di_c, \quad \text{якщо } u_{зв} = \text{const}. \quad (3.46)$$

Підсилювальні властивості транзистора у малосигнальному режимі характеризують, крім крутості  $S$ , також коефіцієнтом  $\mu$ , який називають коефіцієнтом підсилення напруги:

$$\mu = du_{св} / du_{зв} \quad \text{якщо } i_c = \text{const}. \quad (3.47)$$

Значення коефіцієнта  $\mu$  можна виразити через параметри  $S$  та  $R_i$ :

$$\mu = SR_i. \quad (3.48)$$

Орієнтовні значення параметрів лінеаризованих заступних схем є такими:

а) для польових транзисторів з керуючим р-п – переходом:  $C_{ЗВ} \approx C_{СВ} \approx 6 - 20$  пФ;  $C_{ЗС} \approx 2 - 8$  пФ;  $S \approx 0,3 - 7$  мА/В;  $R_i \approx 0,02 - 0,5$  мОм;

б) для МДН-транзисторів:  $C_{ЗВ} \approx C_{СВ} \leq 10$  пФ;  $C_{ЗС} \leq 2$  пФ;  $S$  та  $R_i$  приблизно такі самі, як і у транзисторів з керуючим р-п – переходом.

Як відомо, режим роботи лінійного триполюсника повністю визначають дві незалежні напруги між його зовнішніми виводами та два незалежні струми його зовнішніх виводів. Вибравши як незалежні змінні відповідно прирости струмів та напруг  $\Delta i_{ЗВ}$ ,  $\Delta u_{СВ}$ , та  $\Delta i_{З}$ ,  $\Delta i_{С}$ , можна записати рівняння транзистора у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta i_{З} &= g_{33}\Delta u_{ЗВ} + g_{3С}\Delta u_{СВ}; \\ \Delta i_{С} &= g_{С3}\Delta u_{ЗВ} + g_{СС}\Delta u_{СВ}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

де  $g_{33}$ ,  $g_{3С}$ ,  $g_{С3}$ ,  $g_{СС}$  – комплексні диференційні провідності транзистора, які є математичною моделлю польового транзистора.

Під час роботи транзистора в області низьких частот, коли впливом міжелектродних ємностей можна знехтувати, диференційні провідності набувають таких значень:  $g_{33} = g_{3С} = 0$ ;  $g_{С3} = S$ ;  $g_{СС} = 1/R_i$ .

Отже, на підставі викладеного доходимо висновку, що узагальненою характеристикою польового транзистора у малосигнальному (лінійному) режимі роботи є матриця диференційних провідностей, яку записують у вигляді:

$$[g] = \begin{matrix} & \begin{matrix} З & С \end{matrix} \\ \begin{matrix} З \\ С \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_{33} & g_{3С} \\ g_{С3} & g_{СС} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} З & С \end{matrix} \\ \begin{matrix} З \\ С \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & 1/R_i \end{bmatrix}. \end{matrix} \quad (3.50)$$

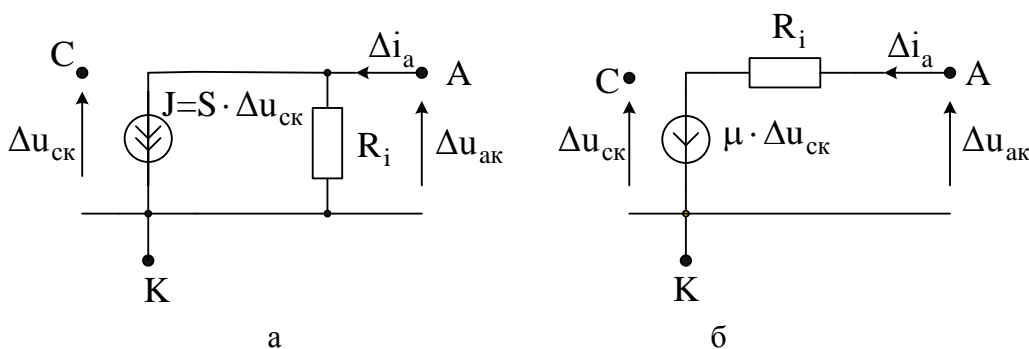
### 3.7.4. Моделі електронної лампи (тріода)

Рівнянням (3.34) і (3.35) лампового тріода відповідає малосигнальна схема (модель) електровакуумного тріода, яка показана на рис.3.38, а.

Неважко показати, що рівняння (3.35) можна записати так:

$$R_i \Delta i_a = -\mu \Delta u_{СК} + \Delta u_{аК}. \quad (3.51)$$

Цьому рівнянню відповідає малосигнальна еквівалентна схема (модель) електровакуумного тріода, показана на рис. 3.38, б.



**Рис. 3.38.** Малосигнальні еквівалентні схеми електровакуумного тріода: з керованим джерелом струму (а) та з керованим джерелом напруги (б)

Типові значення малосигнальних параметрів тріодів лежать у таких межах:  $S \approx (1 - 5)$  мА/В;  $R_i \approx (0,1 - 100)$  кОм;  $|\mu| \approx (10 - 100)$ . Крім згаданих параметрів, використовують такі не менш важливі параметри:

– максимально допустима потужність розсіювання на аноді  $P_{a \text{ доп}}$ ;

– міжелектродні ємності  $C_{ак}$ ,  $C_{ск}$ ,  $C_{ас}$ , які визначають частотні властивості тріода.

Зауважимо, що компонентні рівняння для малосигнального режиму є **математичною моделлю** лампового тріода, яка в матричній формі набирає вигляду:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_c \\ \Delta i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ S, & 1/R_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_{ск} \\ \Delta u_{ак} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

### Контрольні питання до розділу 3

1. Наведіть класифікацію напіпровідникових діодів загального призначення, накресліть схемні позначення, назвіть їхні основні параметри.
2. Назвіть типи діодів спеціального призначення, їхні основні параметри. Накресліть їхні схемні позначення та вольт-амперні характеристики.
3. Поясніть принцип роботи біполярного транзистора, назвіть можливі режими роботи, накресліть схемні позначення транзисторів типу n-p-n та p-n-p та вкажіть полярності зовнішніх напруг, які забезпечують нормальний активний режим роботи.
4. Які співвідношення справедливі для зовнішніх струмів транзистора та для зовнішніх напруг між його виводами?
5. Накресліть еквівалентну схему біполярного транзистора та поясніть фізичний зміст її елементів.
6. Накресліть статичні вольт-амперні характеристики біполярного транзистора, поясніть методику визначення малосигнальних параметрів на їхній підставі та запишіть матрицю провідностей транзистора.
7. Поясніть принцип роботи діодного тиристора, накресліть його схемне позначення та вольт-амперну характеристику, назвіть основні параметри.
8. Поясніть принцип роботи тріодного тиристора, накресліть його схемне позначення, вольт-амперні характеристики та способи вмикання.
9. Накресліть схемні позначення діодного і тріодного симетричних тиристорів та їхні вольт-амперні характеристики.
10. Поясніть принцип роботи польового транзистора з керуючим p-n – переходом, накресліть його схемні позначення та вольт-амперні характеристики, вкажіть додатні напрями струмів та напруг для n-канального та p-канального транзисторів.
11. Поясніть принцип роботи МДН-транзистора з вбудованим каналом, накресліть його схемні позначення та вольт-амперні характеристики, вкажіть додатні напрями струмів та напруг для n-канального та p-канального транзисторів.
12. Поясніть принцип роботи МДН-транзистора з індукованим каналом, накресліть його схемні позначення та вольт-амперні характеристики, вкажіть додатні напрями струмів та напруг для n-канального та p-канального транзисторів.
13. Накресліть малосигнальну заступну схему польового транзистора, поясніть методику визначення малосигнальних параметрів на підставі його вольт-амперних характеристик, запишіть матрицю провідностей транзистора.
14. Поясніть принцип роботи електровакуумного діода, накресліть його вольт-амперну характеристику, назвіть основні параметри діодів різного призначення.
15. Поясніть принцип роботи електровакуумного тріода, накресліть його вольт-амперні характеристики та малосигнальну заступну схему, назвіть основні параметри та вкажіть спосіб їхнього визначення на підставі вольт-амперних характеристик.
16. Дайте означення терміна “інтегральна мікросхема” та наведіть класифікацію інтегральних мікросхем.
17. Назвіть основні аналогові функції, які реалізують аналогові інтегральні мікросхеми, та наведіть їхню номенклатуру.
18. Наведіть класифікацію цифрових інтегральних мікросхем та назвіть їхні основні параметри.

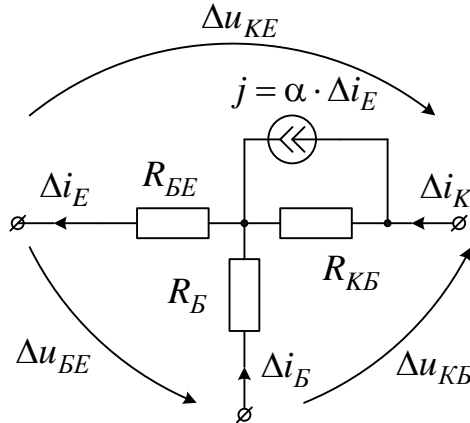
## Приклади розв'язання типових задач

### Задача 3.1.

Для малосигнальної еквівалентної схеми біполярного транзистора в області низьких частот визначити параметр  $g_{KE}$  його математичної моделі.

#### Розв'язання

В області низьких частот малосигнальна модель біполярного транзистора матиме такий вигляд

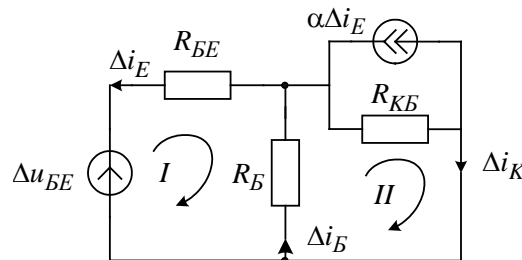


**Рис. 3.1.** ЗД.

Параметр  $g_{KE}$  для приростів напруг та струмів визначається згідно з виразом

$$g_{KE} = \left. \frac{\Delta i_K}{\Delta u_{BE}} \right|_{\Delta u_{KB}=0}$$

Оскільки цей параметр визначається у режимі короткого замикання на виході ( $u_{KB} = 0$ ), то розрахункова схема набере такого вигляду



Для показаної на рисунку схеми запишемо контурні рівняння

$$\Delta u_{BE} + R_{BE} \Delta i_E + R_B (\Delta i_K + \Delta i_E) = 0$$

$$R_B (\Delta i_K + \Delta i_E) + R_{CB} (\Delta i_K + \alpha \Delta i_E) = 0$$

Визначимо з другого рівняння  $\Delta i_E$

$$\Delta i_E = - \frac{R_B + R_{CB}}{R_B + \alpha R_{CB}} \cdot \Delta i_K ;$$

і підставимо цей вираз у перше рівняння

$$\Delta u_{BE} - \left\{ (R_{BE} + R_B) \cdot \frac{R_B + R_{CB}}{R_B + \alpha R_{CB}} + R_B \right\} \cdot \Delta i_K = 0$$

Звідти отримаємо

$$g_{KE} = \frac{\Delta i_K}{\Delta u_{BE}} = \frac{R_B + \alpha R_{CB}}{(R_{BE} + R_B) \cdot (R_B + R_{CB}) + R_B (R_B + \alpha R_{CB})}$$

- Задача 3.2.** Для заступної схеми біполярного транзистора із задачі 3.1. визначити параметр  $g_{EE}$ .
- Задача 3.3.** Для заступної схеми біполярного транзистора із задачі 3.1. визначити параметр  $g_{KE}$ .
- Задача 3.4.** На підставі із співвідношення (3.50), визначити вхідний опір польового транзистора.
- Задача 3.5.** На підставі співвідношення (3.52) визначити коефіцієнт підсилення напруги ламповим тріодом.

## 4. Аналіз електричних кіл

Під аналізом електричних кіл розуміють визначення змінних, які характеризують електричний стан кола на підставі відомих параметрів елементів кола та способу їхніх з'єднань.

*Аналіз електричних схем дає змогу прогнозувати перетворення сигналів у реальних колах.*

Очевидно, аналіз електричного кола відбувається на підставі математичної моделі схеми, що відповідає цьому колу. Тобто аналіз електричного кола у математичному розумінні зводиться до розв'язання деякого рівняння чи системи рівнянь. Існують різні види аналізу електричних кіл, взаємоз'язок між якими показано на рис.4.1.

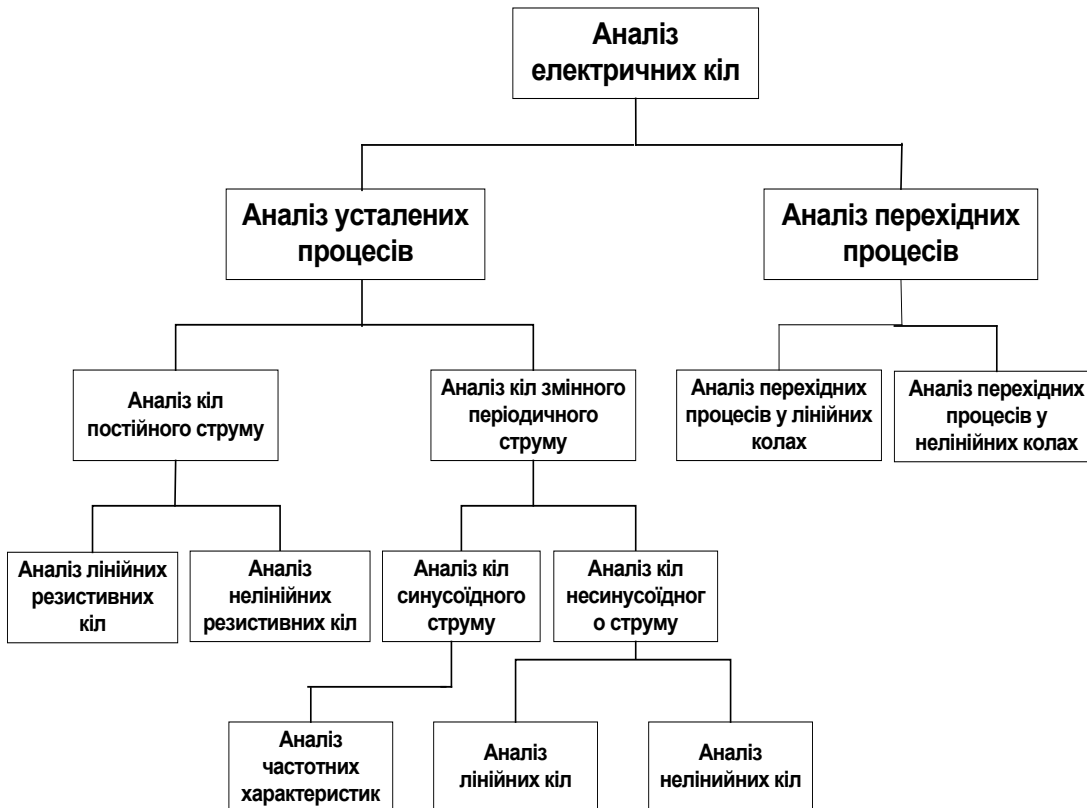


Рис.4.1. Види аналізу електричних кіл

*Компонентами кіл постійного струму є резистивні компоненти та джерела енергії, параметри яких не змінюються у часі.*

### 4.1. Аналіз електричних кіл постійного струму

У колах постійного струму всі струми і напруги є величинами незалежними від часу, тобто сталими. Як наслідок цього елементами відповідних електричних схем, з названих у розділі 2, можуть бути лише резистори чи резистивні багатополіусники, а також джерела постійної ЕРС чи струму. Наявність у схемі тільки резистивних елементів є причиною того, що доволі часто цей вид аналізу називають розрахунком резистивних електричних кіл, хоча цілковитої відповідності між цими двома назвами немає, оскільки в резистивних колах можуть бути і джерела змінної напруги чи струму. Остання особливість зумовлює певну специфіку розрахунку резистивних схем змінного струму, особливо це стосується нелінійних кіл.

#### 4.1.1. Розрахунок лінійних кіл постійного струму

Математичні моделі лінійних електричних кіл постійного струму, як це було показано у розділі 2, у будь-якій формі являють собою систему лінійних рівнянь стандартного вигляду

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{c}, \quad (4.1)$$

де змінними  $\vec{x}$  є ті чи інші струми або напруги схеми,  $\mathbf{A}$  – матриця, елементи якої визначаються опором (провідностями) резисторів, а компоненти вектора  $\vec{c}$  визначаються параметрами джерел енергії  $j_k, e_k$ .

Розв'язання цієї системи рівнянь у загальному вигляді виглядає так:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{c}, \quad (4.2)$$

де  $\mathbf{A}^{-1}$  – обернена матриця до матриці  $\mathbf{A}$ . Очевидно, під час знаходження оберненої матриці можуть виникнути певні труднощі, однак сьогодні вони успішно вирішуються засобами обчислювальної математики та можливостями сучасних комп'ютерів.

У разі змінних у часі струмів та напруг вираз (4.2) залишається справедливим, однак у такому разі вектор  $\vec{x}$  стає вектор-функцією часу і, отже, розв'язується задача розрахунку лінійних резистивних кіл змінного струму.

Описаний вище підхід зручно застосовувати, коли є потреба визначити усі струми та напруги схеми. Однак доволі часто дослідника цікавить струм чи напруга лише одного елемента схеми. У такому разі застосовують метод розрахунку, названий **методом еквівалентного генератора**. Суть цього методу полягає у такому поданні схеми (рис.4.2, а).

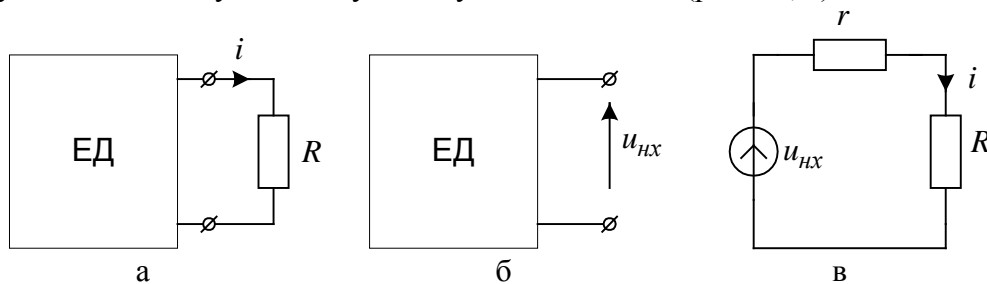


Рис.4.2. Подання схеми за допомогою еквівалентного генератора

Двополюсник ЕД (рис.4.2, б) містить всі елементи схеми, крім одного, в якому необхідно визначити струм, і опір якого позначимо  $R$ . На наступному кроці розрахуємо напругу на затискачах двополюсника ЕД при від'єданому резисторі  $R$ , яку називають **напругою неробочого ходу** і позначають  $u_{нх}$ . Після цього, вилучивши у вказаному двополюснику всі джерела енергії закорочуванням джерел ЕРС і розриванням джерел струму, знайдемо його опір, який позначимо через  $r$  і назвемо внутрішнім опором еквівалентного двополюсника. Тоді, як це видно з рис.4.2, в, шуканий струм знаходять за формулою:

$$i = \frac{u_{нх}}{R + r}. \quad (4.3)$$

**Приклад 4.1.** Визначимо струм  $i$ , показаний на схемі (рис.4.3, а) методом еквівалентного генератора

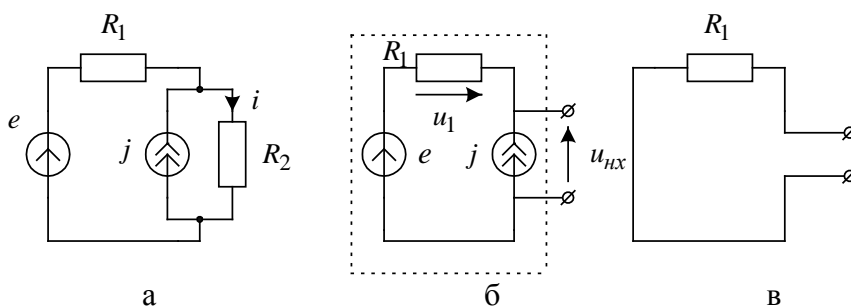


Рис.4.3. Схема до прикладу 4.1

На рис.4.3, б показаний еквівалентний двополюсник, напругу неробочого ходу якого  $u_{нх}$  легко визначити так

$$u_{нх} = e + u_1 = e + R_1 \cdot j,$$



а на підставі схеми (рис.4.3, в) очевидним є той факт, що внутрішній опір цього двополюсника  $r = R_1$ .

Отже, шуканий струм дорівнює

$$i = \frac{e + R_1 \cdot j}{R_1 + R_2}.$$

## 4.2. Особливості розрахунку нелінійних резистивних кіл

**Нелінійним електричним колом** називається коло, в якому хоча би один елемент має нелінійну характеристику.

Складність аналізу таких кіл полягає у тому, що відповідні їм математичні моделі мають вигляд нелінійних рівнянь чи системи рівнянь, а як відомо, загальних методів аналітичного розв'язання таких рівнянь не існує. Тому для аналізу нелінійних електричних кіл, зокрема, резистивних використовують або графічні, або числові методи. Графічні методи є простими, не вимагають запису математичних моделей схем, однак їх можна ефективно застосовувати лише для аналізу доволі простих схем.

Основою числових методів аналізу є ті чи інші методи наближених обчислень, які потребують значних обчислювальних затрат. Причому розв'язок є сукупністю чисел, а не аналітичним виразом, що ускладнює його якісний аналіз. Однак універсальність названих методів та можливості простих комп'ютерних засобів зумовили нині їхнє широке використання.

### Графічні методи

Розглянемо побудову вольт-амперних характеристик з'єднаних нелінійних резисторів. Почнемо із розгляду елементарних способів з'єднання двох резисторів: послідовного та паралельного (рис.4.4)

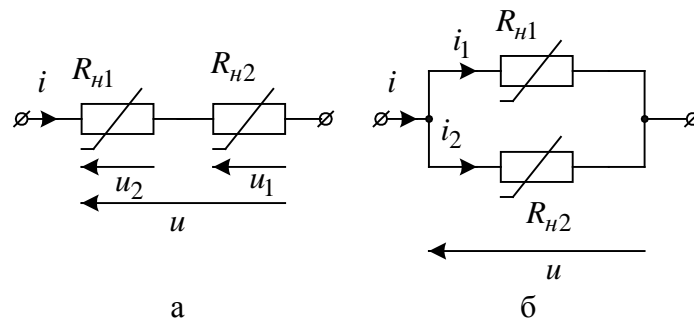


Рис.4.4. З'єднання двох нелінійних резисторів: а – послідовне; б – паралельне

Вольт-амперні характеристики (ВАХ) резисторів  $R_{H1}$ ,  $R_{H2}$  показано на рис.4.5.

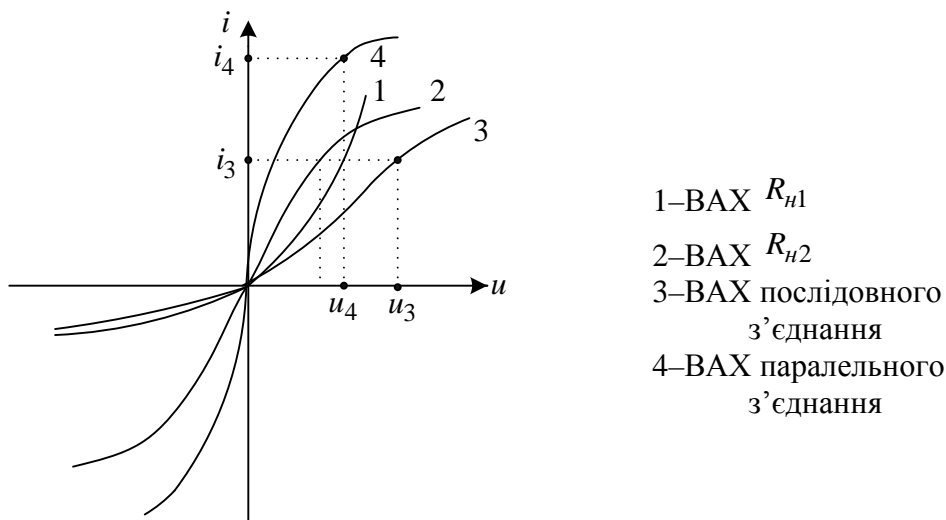


Рис.4.5. Вольт-амперні характеристики нелінійних резисторів  $R_{H1}$  та  $R_{H2}$

- 1–ВАХ  $R_{H1}$
- 2–ВАХ  $R_{H2}$
- 3–ВАХ послідовного з'єднання
- 4–ВАХ паралельного з'єднання

**Графічні методи розрахунку нелінійних резистивних кіл є зручними для якісного аналізу процесів у простих електричних колах.**

Враховуючи відомі співвідношення  $u = u_1 + u_2$  для послідовного та  $i = i_1 + i_2$  для паралельного з'єднання, можна сформулювати правила побудови ВАХ послідовно чи паралельно з'єднаних резисторів.

**а) Послідовне з'єднання**

При послідовному з'єднанні двох резисторів для одержання деякої точки ВАХ з'єднаних резисторів необхідно для вибраного значення струму провести горизонтальну пряму до перетину з ВАХ окремих резисторів і визначити на підставі точок перетину значення напруг на окремих резисторах. Графічно додавши ці величини, отримаємо значення напруги на послідовному з'єднанні, яке відкладаємо на проведеній раніше горизонтальній прямій. Так отримується точка  $(u_3, i_3)$  результуючої ВАХ.

Сказане вище проілюстроване на рис.4.5, де ВАХ послідовного з'єднання резисторів зображене кривою 3.

**б) Паралельне з'єднання**

При паралельному з'єднанні двох резисторів для отримання деякої точки ВАХ з'єднаних резисторів необхідно для вибраного значення напруги провести вертикальну пряму до перетину з ВАХ окремих резисторів і визначити на підставі точок перетину значення струмів через окремі резистори. Графічно додавши ці величини, одержимо значення струму в паралельному з'єднанні, яке відкладаємо на проведеній раніше вертикальній прямій. Так отримуємо точку  $(u_4, i_4)$  ВАХ паралельного з'єднання двох резисторів.

**Метод трьох площин використовується для визначення форми струму (напруги) нелінійного резистора за заданої змінної напруги (струму).**

Результуюча ВАХ показана на рис.4.5 кривою 4.

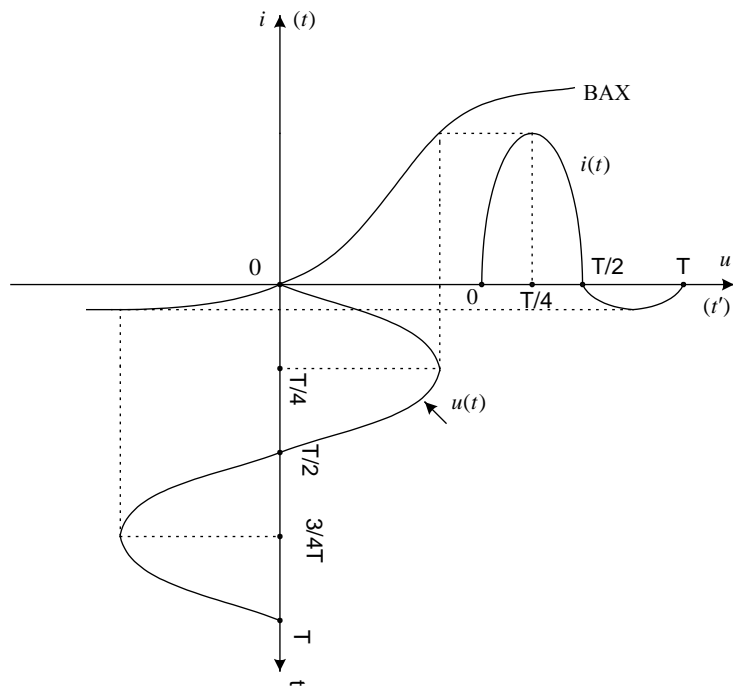
**Побудова кривої струму у нелінійному резисторі.**

Суть цієї задачі полягає у графічній побудові часової залежності струму у нелінійному резистивному двополюснику  $i(t)$ , до якого прикладена змінна напруга  $u(t)$ . ВАХ резистивного елемента задається графічно. Сама процедура побудови показана на рис.4.6 і її часто називають **методом трьох площин**.

Перша координатна площина утворюється осями  $i, u$  і в цій площині відображається ВАХ заданого резистивного двополюсника.

Друга координатна площина утворена віссю  $u$ , а також віссю  $t$ , яка збігається з віссю  $i$  попередньої координатної площини. У цій площині будується графік змінної напруги, прикладеної до резистора.

Третя площина має координатні осі  $i$  та  $t'$ , причому вісь  $t'$  збігається з віссю  $u$  першої координатної площини і вони слугують для відображення графіка струму у резистивному двополюснику.



**Рис.4.6.** Ілюстрація методу трьох площин

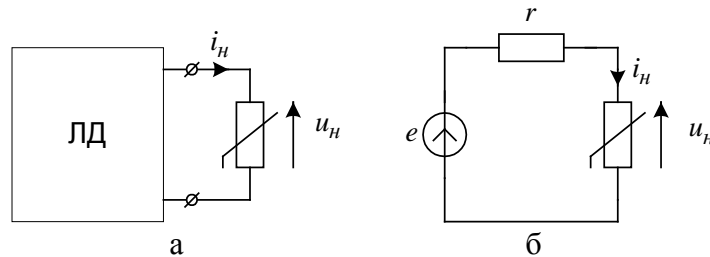
Процедура побудови кривої струму, як це видно з рис.4.6, полягає у тому, що спочатку для заданого моменту часу  $t$  знаходять значення напруги, прикладеної до резистора  $u$ , а після цього, проєктуючи це значення на графік ВАХ, отримують значення струму в той самий момент часу, який відображається на осі  $t'$ .

#### Числові методи розрахунку нелінійних резистивних схем

Як уже було сказано вище, суть числових методів полягає у наближеному розв'язанні математичної моделі нелінійного кола. Тому детальніше розглянемо формування математичної моделі нелінійної резистивної схеми.

#### Математична модель схеми з одним нелінійним резистором

У такому разі нелінійну схему зручно подати так, як зображено на рис.4.7.



**Рис.4.7.** Подання електричної схеми з одним нелінійним резистором

Двополюсник ЛД, показаний на рисунку, містить всі лінійні елементи схеми, тобто на підставі методу еквівалентного генератора він може бути поданий неідеальним джерелом ЕРС з параметрами  $e, r$ , які легко розрахувати.

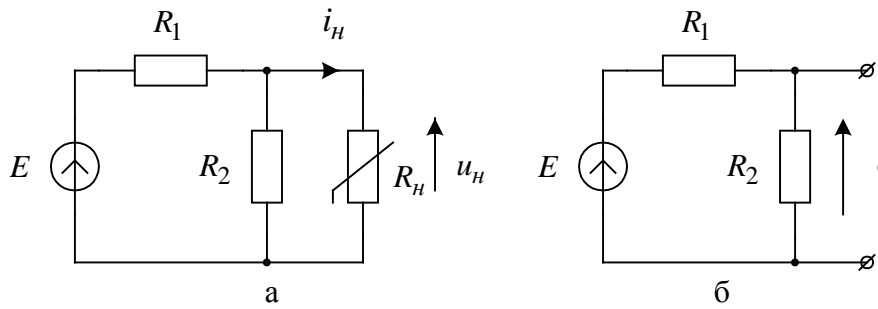
Аналізуючи спрощену схему (рис.4.7, б), на підставі другого закону Кірхгофа можна записати рівняння

$$e - r \cdot i_n - u_n = 0, \quad (4.4)$$

або, врахувавши рівняння ВАХ нелінійного резистора  $i_n = f(u_n)$ , отримаємо математичну модель у такому вигляді:

$$e - r \cdot f(u_n) - u_n = 0 \quad (4.5)$$

**Приклад 4.2.** Записати математичну модель такої нелінійної резистивної схеми.



**Рис.4.8.** Схема до прикладу 4.2

Неважно переконатись, що параметри еквівалентного генератора двополюсника рис.4.2, б такі

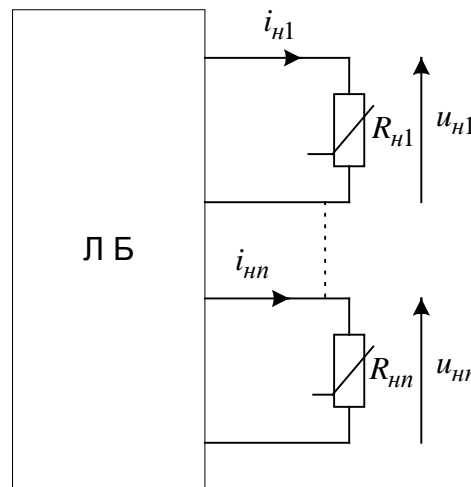
$$e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E; \quad r = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Тоді згідно з (4.5) математична модель заданої схеми матиме вигляд:

$$\frac{R_2 \cdot E}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot f(u_n) - u_n = 0.$$

*Побудова математичних моделей резистивної схеми із декількома нелінійними елементами*

Будь-яку електричну схему з декількома нелінійними резисторами можна подати у такому вигляді, зображеному на рис. 4.9.



**Рис.4.9.** Подання резистивної схеми з  $n$  - нелінійними резисторами

На рис.4.9 ЛБ є лінійним резистивним багатополюсником, тобто його можна описати, зокрема, рівнянням в  $Y$  - параметрах (2.43)

$$\vec{i}_n = \mathbf{Y} \cdot \vec{u}_n + \vec{j}, \tag{4.6}$$

де  $\vec{i}_n = (i_{n1}, i_{n2}, \dots, i_{nn})^T$ ;  $\vec{u}_n = (u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nn})^T$  – вектори струмів та напруг лінійного багатополюсника;  $\vec{j}$  – вектор вільних струмів багатополюсника;  $\mathbf{Y}$  – матриця  $Y$ -параметрів багатополюсника. Очевидно, що струми та напруги багатополюсника є одночасно струмами та напругами нелінійних резисторів.

ВАХ нелінійних резисторів можна записати також у вигляді векторного співвідношення

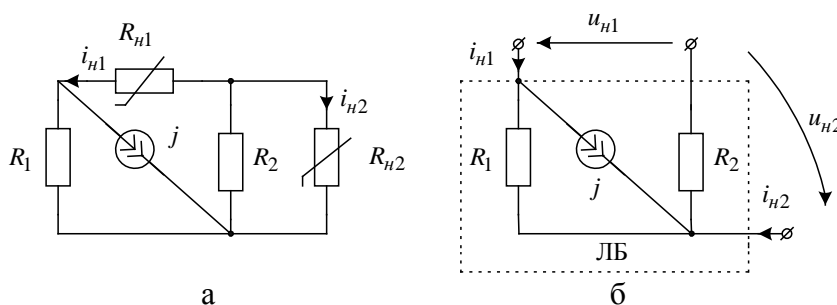
$$\vec{i}_n = \vec{f}(\vec{u}_n), \tag{4.7}$$

де  $\vec{f}(u_n) = [f_1(u_{n1}); f_2(u_{n2}); \dots; f_n(u_{nn})]^T$

є деякою вектор-функцією, компонентами якої є вирази ВАХ окремих нелінійних резисторів. Підставивши вираз (4.7) у рівняння (4.6), отримаємо математичну модель цієї схеми у матричному записі:

$$\vec{f}(\vec{u}_H) = \mathbf{Y}(\vec{u}_H) + \vec{j} \quad (4.8)$$

**Приклад 4.3.** Запишемо математичну модель схеми, показаної на рис. 4.10.



**Рис.4.10.** Схема до прикладу 4.3

Запишемо рівняння в  $Y$ -параметрах лінійного триполюсника ЛБ стосовно напруг, показаних на рис.4.10, б.

$$\begin{bmatrix} i_{n1} \\ i_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & -1/R_1 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j \\ j \end{bmatrix}$$

З урахуванням виразів ВАХ нелінійних резисторів  $i_{n1} = f_1(u_{n1})$ ;

$i_{n2} = f_2(u_{n2})$  математична модель схеми (рис.4.10, а) матиме такий вигляд

$$\begin{bmatrix} f_1(u_{n1}) \\ f_2(u_{n2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & -1/R_1 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j \\ j \end{bmatrix}$$

Підсумувавши матеріал цього параграфу, що математичну модель нелінійних резистивних кіл можна подати у такому вигляді

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0, \quad (4.9)$$

де  $\vec{x}$  – вектор змінних схеми; як правило, це струми чи напруги нелінійних резисторів;  $\vec{F}(\vec{x})$  – це деяка нелінійна вектор-функція.

### Розв'язання рівнянь нелінійних електронних схем числовими методами

Оскільки найпростіша математична модель нелінійних резистивних схем є системою нелінійних алгебричних рівнянь стандартного вигляду (4.9), то для розв'язання її можна застосувати традиційні обчислювальні процедури, зокрема, метод Ньютона, чи метод простої ітерації.

Метод простої ітерації реалізується згідно з такою ітераційною процедурою

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{F}(\vec{x}^{(k)}) + \vec{x}^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

$\vec{x}^{(k)}$  –  $k$ -те наближення вектора змінних схеми, причому  $\vec{x}^{(0)}$  – початкове наближення, вибирається довільно, однак для того, щоб ітераційний процес згідно з (4.10) збігався, необхідно, щоб воно було доволі близько від розв'язку системи рівнянь (4.9).

Ітераційний процес згідно з методом Ньютона є складнішим, водночас він має істотну перевагу перед методом простої ітерації, яка полягає у швидшій збіжності, а також менш жорстких вимогах до вибору початкового наближення.

У разі розрахунку кола з одним нелінійним елементом система рівнянь (4.9) зводиться до одного рівняння з одним невідомим і тоді ітераційний процес реалізується згідно з такою формулою

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})}, \quad (4.11)$$

де  $F'(x)$  – похідна функції  $F(x)$ .

Якщо ж у схемі, яка аналізується, є декілька нелінійних резисторів, тобто коли співвідношення (4.9) є системою нелінійних рівнянь, тоді запис рекурентної формули, що визначає ітераційний процес, є дещо іншим

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \mathbf{Y}^{-1} \cdot F(\bar{x}^{(k)}), \quad (4.12)$$

де  $\mathbf{Y}$  – матриця Якобі, або Якобіан, що визначається у такий спосіб:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Як бачимо, рекурентні формули (4.10) – (4.12) є доволі зручними для комп'ютерної реалізації і це є основною причиною масового використання числових методів для аналізу нелінійних резистивних електронних схем.

### 4.3. Основні характеристики кіл змінного струму

Струм чи напруга, значення яких залежить від часу, називаються змінними. Відповідно електричні кола, у яких струми і напруги є змінними, називають **електричними колами змінного струму**.

Значення змінного струму  $i(t)$  (напруги  $u(t)$ ) у певний момент часу називають **миттєвим значенням**.

Якщо миттєві значення струму (напруги) задовольняють для усіх значень часу  $t$  таку умову

$$i(t) = i(t + T), \quad (4.13)$$

де  $T$  – стала величина, яка називається періодом, то такі величини є періодичними.

Якщо ж закон зміни у часі струму (напруги) визначається таким виразом

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (4.14)$$

то такий струм (напруга) називається **синусоїдним або гармонічним**, а величина  $I_m$  – амплітуда;

$\omega$  – кутова частота;  $\psi_i$  – початкова фаза – є його параметрами і пов'язані між собою такими самими співвідношеннями, як і для гармонічних сигналів.

Періодичні величини характеризуються певними інтегральними параметрами, зокрема для струму:

$$\text{середнє значення} \quad I_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (4.15)$$

за період

$$\text{діюче значення} \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (4.16)$$

Подібно визначаються середнє та діюче значення напруги  $U_{cp}, U$ .

Для гармонічного струму  $I_{cp} = 0, \quad I = I_m / \sqrt{2}$ .

Важливими для кіл змінного струму є їхні енергетичні характеристики, основними з яких є такі

$$\text{миттєва потужність} \quad p(t) = i(t) \cdot u(t) \quad (4.17)$$

$$\text{активна потужність} \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (4.18)$$

*Енергетичний стан електричних кіл змінного синусоїдного струму характеризують потужності  $P, Q, S$  (активна, реактивна, повна), які зв'язані між собою так  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .*

Як бачимо, активна потужність є середнім значенням миттєвої потужності за період і ця величина не залежить від часу. Одиниця вимірювання активної потужності – ват [Вт].

Для характеристики енергетичних властивостей кіл синусоїдного струму, як легко переконатись  $P = I \cdot U \cos \varphi$ ,

де  $\varphi = \Psi_u - \Psi_i$  ( $\Psi_u$  – початкова фаза напруги на елементі схеми).

Крім активної потужності, у колах синусоїдного струму використовують також поняття **реактивної потужності** (4.19) та **повної потужності** (4.20).

$$Q = U \cdot I \sin \varphi \quad (4.19)$$

$$S = U \cdot I \quad (4.20)$$

Одиниці вимірювання реактивної потужності – вольт-ампер реактивний [ВАР], а повної – вольт-ампер [ВА].

Фізичний зміст активної потужності – кількість електричної енергії за одиницю часу, яка перетворюється необоротно на інші види енергії (теплову, механічну тощо).

Реактивна потужність характеризує усереднене значення електричної енергії, якою обмінюються окремі елементи електричної схеми (реактивні елементи та джерела енергії).

#### 4.4. Аналіз усталених режимів кіл синусоїдного струму

Електричними колами синусоїдного струму можуть бути лише лінійні кола, оскільки будь-який нелінійний елемент кола приводить до появи струмів чи напруг, що мають несинусоїдний характер.

Враховуючи те, що частота зміни струмів та напруг у лінійних схемах є величиною постійною і визначається параметрами джерел енергії, то в усталеному режимі кожен струм чи напруга характеризується двома параметрами – амплітудою та початковою фазою. Щоб відобразити ці параметри, для гармонічних струмів та напруг вводиться поняття **комплексної амплітуди** синусоїдної величини

$$\dot{A}_m = A_m \cdot e^{j\psi} \quad (4.21)$$

*Символічний метод розрахунку дає змогу розрахувати усталені режими лінійних електричних кіл синусоїдного струму і як змінні використовує комплексні амплітуди струмів та напруг.*

$\dot{A}_m$  – комплексна амплітуда синусоїдної величини  $a(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$ ;  $A_m$  – амплітуда синусоїдної величини  $a(t)$ . Тобто є справедливим таке означення:

**Комплексною амплітудою синусоїдної величини називають комплексне число, модуль якого дорівнює її амплітуді, а аргумент – початковій фазі.**

Комплексна амплітуда однозначно описує синусоїдну величину за умови заданої частоти, тобто цю величину можна вважати комплексним зображенням змінної у часі синусоїдної величини. Замінивши у схемах реальні струми та напруги на їхні комплексні зображення (комплексні амплітуди), ми позбудемось часової залежності, що значно спрощує подальший аналіз кіл синусоїдного струму. Покажемо це на прикладах конкретних елементів електричних схем:

а) Резистор

Після підстановки у відоме співвідношення  $u_R = R \cdot i$  виразу (4.14) для синусоїдного струму отримуємо

$$u_R(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Перейшовши у лівій і правій частинах цього виразу до комплексних амплітуд, маємо

$$\dot{U}_{mR} = R \cdot \dot{I}_{mR} \quad (4.22)$$

б) Котушка індуктивності

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_m \sin(\omega t + \psi_i)] = \\ &= \omega L \cdot I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Знов-таки замінивши перший і останній вирази їхніми комплексними амплітудами, отримуємо:

$$\dot{U}_{mL} = \omega L \cdot I_m \cdot e^{j\left(\psi_i + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega L \cdot I_m \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\psi_i} = j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j\psi_i}$$

Або в остаточному вигляді

$$\dot{U}_{mL} = j\omega L \cdot \dot{I}_{mL} \quad (4.23)$$

в) Конденсатор

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = \\ &= -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Переходячи до комплексних зображень

$$U_{mC} = \frac{I}{\omega C} \cdot e^{j\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{I_m}{\omega C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\psi_i} = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_m \cdot e^{j\psi_i}$$

одержуємо

$$\dot{U}_{mC} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_{mC} \quad (4.24)$$

Вирази (4.22) – (4.24) показують, що для комплексних амплітуд струмів та напруг типових елементів існують **алгебричні** взаємозалежності, тобто так ми позбуваємось диференціальних чи інтегральних взаємозалежностей, які справедливі для миттєвих значень.

Узагальнюючи співвідношення (4.22) – (4.24), їх можна подати у такому вигляді:

$$\dot{U}_m = \underline{Z} \cdot \dot{I}_m \quad (4.25)$$



де  $\dot{U}_m$  та  $\dot{I}_m$  – комплексні амплітуди напруги та струму двополюсного елемента,  $\underline{Z}$  – комплексний коефіцієнт, який називають комплексним опором цього двополюсника.

Вираз (4.25) називають **законом Ома у комплексному вигляді**.

Використовуючи прості тригонометричні перетворення, можна переконатись, що перехід від миттєвих значень струмів та напруг до їхніх комплексних амплітуд не порушує принципу суперпозиції і, отже, закони Кірхгофа, є справедливими і для комплексних амплітуд.

$$\text{а) } \sum_{k=1}^m \dot{I}_{mk} = 0 \quad \text{б) } \sum_{k=1}^v \dot{U}_{mk} = 0 \quad (4.26)$$

Наслідком співвідношень (4.25) та (4.26) є те, що для комплексних опорів, як і для опорів резисторів справедливі закони паралельного та послідовного з'єднання.

Комплексний опір деякого двополюсника  $\underline{Z}$ , як і будь-яке комплексне число, можна записати в алгебричному чи експоненціальному виглядах

$$\underline{Z} = R + jX \quad \underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi},$$

де  $R$  – **активний опір двополюсника**;  
 $X$  – **реактивний опір двополюсника**;  
 $Z$  – **повний опір (модуль комплексного опору)**;  
 $\varphi$  – **аргумент комплексного опору**.

Очевидно, справедливими є такі співвідношення

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R};$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi; \quad X = Z \cdot \sin \varphi.$$

Модуль комплексного опору котушки індуктивності  $\underline{Z}_L = j\omega L$  називають індуктивним опором і позначають через  $X_L$ , а модуль комплексного опору конденсатора  $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$  називають ємнісним опором та позначають через  $X_C$ .

Фізичний зміст комплексного опору такий:

модуль комплексного опору (повний опір) показує, у скільки разів амплітуда напруги на елементі перевищує амплітуду струму, а аргумент є різницею початкових фаз (зсувом фаз) напруги та струму.

Поряд із поняттям комплексного опору використовується поняття комплексної провідності, яка є оберненою до опору

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

Введені у такий спосіб комплексні амплітуди струмів та напруг і комплексні опори дають змогу розраховувати електричні кола змінного синусоїдного струму, тобто кола, які складаються з резисторів, котушок індуктивності, конденсаторів, джерел гармонічної напруги чи струму, подібно, як це було у резистивних схемах.

Відповідний метод аналізу часто називають **символічним методом або методом комплексних амплітуд**.

Суть названого методу така.

**Крок 1.** Як змінні, що характеризують електричний стан схеми, вибираємо комплексні амплітуди струмів та напруг.

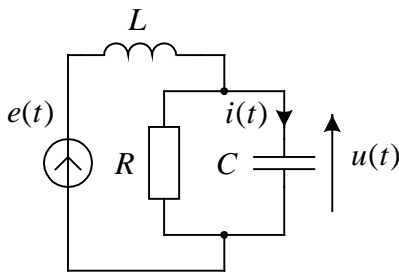
**Крок 2.** Реальні елементи електричної схеми замінюють їхніми комплексними опорами.

**Крок 3.** Використовуючи той чи інший метод з п. 2.3, будують математичну модель схеми у вигляді системи комплексних рівнянь.

**Крок 4.** Розв'язавши отримані на кроці 3 рівняння, знаходять комплексні амплітуди шуканих струмів та напруг.

**Крок 5.** За знайденими на попередньому кроці комплексними амплітудами відтворюють відповідні миттєві значення струмів та напруг.

**Приклад 4.4.** Визначити миттєве значення струму  $i(t)$  для схеми, зображеної на рис.4.11.



Параметри схеми:

$$e(t) = 100 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ [В]},$$

$$R = \omega L = 1/\omega C = 10 \text{ [Ом]}.$$

**Рис.4.11.** Електрична схема до прикладу 4.4

Комплексна амплітуда ЕРС джерела дорівнює:

$$\dot{E}_m = 100 \cdot e^{-j30^\circ}$$

Комплексні опори теж легко визначити:

$$\underline{Z}_R = 10 \text{ [Ом]}; \quad \underline{Z}_L = 10j \text{ [Ом]}; \quad \underline{Z}_C = -10j \text{ [Ом]}.$$

Знайдемо комплексний опір паралельного з'єднання конденсатора та резистора

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{-100j}{10 - 10j} = 5 - 5j.$$

Вираз для комплексної амплітуди напруги  $u(t)$  матиме вигляд:

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{E}_m}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{11}} \cdot \underline{Z}_{11} = \frac{100 \cdot (5 - 5j) \cdot e^{-j30^\circ}}{(10j + 5 - 5j)} = 100 \cdot e^{-j120^\circ}.$$

Тоді комплекс струму у котушці визначаємо так

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}_L} = \frac{100 \cdot e^{-j120^\circ}}{10j} = 10 \cdot e^{-j210^\circ}$$

і його миттєве значення

$$i(t) = 10 \cdot \sin(\omega t - 210^\circ).$$

## 4.5. Усталені режими електронних кіл, в яких діють несинусоїдні струми та напруги

У першому розділі зазначалось, що будь-яку періодичну несинусоїдну величину можна записати у вигляді ряду Фур'є, тобто суми гармонічних складових з різними частотами

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k) \quad (4.27)$$

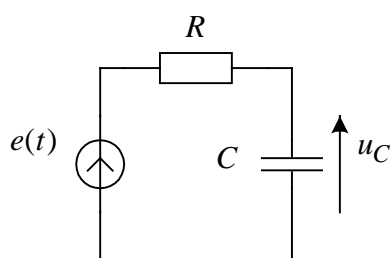
Також відомо, що у лінійних системах, зокрема електричних колах, справедливим є принцип суперпозиції. Стосовно до електричних кіл його можна сформулювати так.

**Розрахунок лінійних електричних кіл змінного несинусоїдного струму здійснюється символічним методом для кожної гармоніки зокрема.**

Струм (напруга), зумовлений дією декількох джерел енергії, дорівнює сумі струмів, породжених кожним джерелом зокрема. Якщо в електричному колі є джерело періодичного

несинусоїдного струму чи напруги, то таке джерело можемо замінити низкою паралельно або послідовно з'єднаних джерел енергії, кожне з яких є гармонічним з частотою  $k\omega$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Тоді, розраховуючи схему з одним джерелом, що відображає одну гармоніку, отримуємо частковий розв'язок для шуканої змінної, а підсумовуючи ці часткові розв'язки, одержаний ряд типу Фур'є, який відображає цю змінну. Очевидно, для розрахунку кожної гармоніки шуканої величини необхідно використовувати символічний метод аналізу, пам'ятаючи про залежність комплексного опору елементів схеми від частоти. Звичайно при такому підході застосовують усічений ряд Фур'є, тобто враховують скінченну кількість гармонік у спектрі, що зумовлює певну похибку обчислень.

**Приклад 4.5.** Визначити напругу  $u_C(t)$  для схеми, зображеної на рис. 4.12.



$$e(t) = 10 + 40 \sin \omega t + 20 \sin(2\omega t - 30^\circ),$$

$$R = 10 \text{ Ом}, \quad \omega C = 0,1 \text{ Сим.}$$

**Рис.4.12.** Схема до прикладу 4.5

Враховуючи гармонічний склад ЕРС джерела, шукану напругу подамо у такому вигляді:

$$u_C(t) = u_0 + u_1(t) + u_2(t),$$

де  $u_k$  – складова, що відповідає  $k$ -й гармоніці шуканої напруги  $u_C(t)$ . Нескладно записати вираз для визначення  $k$ -ї гармоніки шуканої напруги

$$\dot{U}_k = \frac{\dot{E}_k \cdot \underline{Z}_{Ck}}{\underline{Z}_{Rk} + \underline{Z}_{Ck}}.$$

На підставі цієї формули знайдемо комплексні амплітуди окремих гармонік

$$\dot{U}_0 = U_0 = \frac{\dot{E}_0 \cdot \underline{Z}_{C0}}{\underline{Z}_{R0} + \underline{Z}_{C0}} = \frac{10 \cdot \infty}{10 + \infty} = 10 \text{ [В]},$$

$$\dot{U}_{C1} = \frac{\dot{E}_1 \cdot \underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{C1}} = \frac{40 \cdot (-10j)}{10 - 10j} = \frac{40 \cdot e^{-j90^\circ}}{\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}} = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ},$$

$$\dot{U}_{C2} = \frac{\dot{E}_2 \cdot \underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_{C2}} = \frac{20 \cdot e^{-j30^\circ} \cdot (-5j)}{10 - 5j} = \frac{20 \cdot e^{-j30^\circ} \cdot e^{-j90^\circ}}{\sqrt{5} e^{-j27^\circ}} = 4\sqrt{5} \cdot e^{-j93^\circ}.$$

Переходячи від комплексів до миттєвих значень, отримуємо

$$u_C(t) = 10 + 20\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ) + 4\sqrt{5} \sin(2\omega t - 93^\circ).$$

#### 4.6. Аналіз перехідних процесів електронних кіл

**Перехідними процесами** в електричних колах називаються процеси, які виникають під час переходу від одного усталеного стану до іншого.

*Перехідні процеси в електричних колах часто зумовлюють значні хоча і короткочасні зміни струмів та напруг кола, що може призвести до виходу з ладу електронних пристроїв.*

Такий перехід зумовлюється комутаціями, тобто під'єднанням чи від'єднанням від електричного кола того чи іншого елемента. Перехідні процеси виникають в колах як постійного, так і змінного струмів, однак необхідною умовою є наявність у колі реактивних елементів, бо саме реактивні елементи можуть нагромаджувати електричну енергію і тим самим зумовлюють інерційність процесів у колі.

Потреба у розрахунку перехідних процесів зумовлена, переважно двома причинами:

По-перше, під час комутацій в електричних колах можуть виникати різкі збільшення напруг та струмів, що призводить до виходу з ладу компонент електричних кіл, особливо електронних елементів.

По-друге, часто важливим є час переходу електричної схеми із одного усталеного стану (стаціонарного режиму) в інший, що визначає швидкодію відповідного пристрою, а його можна оцінити, лише розрахувавши перехідний процес.

Для розрахунку перехідних процесів в електричних колах існує декілька методів: операторний, інтеграл Дюамеля, класичний, числовий. Перші два методи придатні до розрахунку лише лінійних кіл, а два останні методи є універсальними і стосуються як лінійних, так і нелінійних кіл.

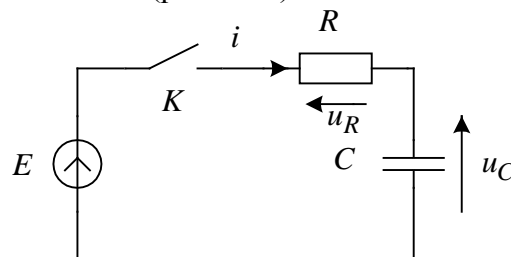
## *Перехідні процеси у лінійних колах*

### **4.6.1. Класичний метод розрахунку**

Суть цього методу полягає у формуванні математичної моделі схеми у вигляді диференційного рівняння чи системи диференційних рівнянь, які розв'язуються традиційними методами теорії диференціальних рівнянь. Змінними у такій математичній моделі є миттєві значення струмів та напруг. Причому найзручніше вибрати змінними струми у котушках індуктивності та напруги на конденсаторах, які визначають енергетичний стан кола. Крім цього, напруги на конденсаторах і струми у котушках індуктивності визначають значення змінних у початковий момент часу (початкові умови), які є необхідними для запису розв'язку диференційного рівняння.

Проілюструємо класичний метод розрахунку перехідних процесів на простому прикладі.

**Приклад 4.6.** Розрахуємо перехідний процес у послідовній  $RC$ -ланці, зумовлений під'єднанням до неї джерела постійної ЕРС (рис. 4.13).



**Рис. 4.13.** Схема до прикладу 4.6

Запишемо рівняння такого кола після комутації (ключ  $K$ -замкнутий), на підставі другого закону Кірхгофа

$$E - u_R - u_C = 0.$$

Урахувавши, що  $u_R = Ri$ , а  $i = C \frac{du_C}{dt}$ ,  
отримуємо диференціальне рівняння

$$CR \frac{du_C}{dt} + u_C = E,$$

яке перепишемо у стандартному вигляді

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}.$$

Це рівняння є неоднорідним і тому його розв'язок складається із загального розв'язку однорідного рівняння і часткового розв'язку неоднорідного  $u_C(t) = u_C^{(0)} + u_C^{(H)}$ .

$$u_C^{(0)} = k_1 \cdot e^{\lambda t}, \text{ де } \lambda = -\frac{1}{RC},$$

$$u_C^{(H)} = E, \quad k_1 - \text{ стала інтегрування, тобто } u_C(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E.$$

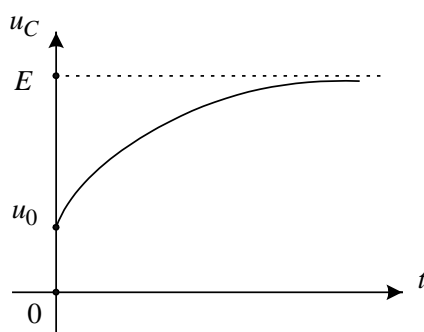
Визначимо сталу  $k_1$  із початкових умов  $u_C(0) = u_0$ , тобто

$$k_1 + E = u_0 \quad \text{або} \quad k_1 = u_0 - E.$$

Отже, напруга на конденсаторі під час перехідного процесу змінюється за таким законом

$$u_C(t) = (u_0 - E) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E.$$

Графік  $u_C(t)$  показаний на рис. 4.14 для випадку, коли  $u_0 < E$ .



**Рис. 4.14.** Графік перехідної напруги на конденсаторі

Зауважимо, що величину, обернену до кореня характеристичного рівняння  $\lambda$ , називають **сталюю часу** електронної схеми і позначають буквою  $\tau$  і для цього прикладу  $\tau = RC$ .

На закінчення наведемо два закони комутації, які дозволяють визначити початкові умови, необхідні для отримання розв'язку диференційного рівняння.

**1-й закон** Струм у котушці індуктивності не може змінюватися стрибкоподібно.

**2-й закон** Напруга на конденсаторі не може змінюватися стрибкоподібно.

#### 4.6.2. Операторний метод розрахунку перехідних процесів

Цей метод розрахунку ґрунтується на відомому перетворенні Лапласа функцій часу.

$$\text{а) } F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt; \quad \text{б) } f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (4.28)$$

де  $f(t)$  – деяка функція часу (оригінал), причому  $f(t) = 0$  для  $t < 0$ .

$F(p)$  – зображення за Лапласом функції  $f(t)$ ;

$p$  – комплексна змінна.

Перетворення (4.28а) називають прямим, а (4.28б) – зворотним.

Суть операторного методу полягає у тому, що для описання електричного кола замість миттєвих значень струмів та напруг  $i(t)$ ;  $u(t)$  використовують їхні операторні зображення  $I(p)$ ,  $U(p)$ .

Внаслідок лінійності перетворення Лапласа закони Кірхгофа справедливі і для операторних зображень струмів та напруг, а зв'язок між операторними зображеннями струмів та напруг на основних елементах схеми можна отримати так.

Резистор

$$\mathcal{L}\{u_R(t) = R \cdot i_R(t)\} \Rightarrow U_R(p) = R \cdot I_R(p), \quad (4.29)$$

Котушка індуктивності

$$\mathcal{L}\left\{u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}\right\} \Rightarrow U_L(p) = pL \cdot I_L(p), \quad (4.30)$$

Конденсатор

$$\mathcal{L}\left\{u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt\right\} \Rightarrow U_C(p) = \frac{1}{pC} \cdot I_C(p). \quad (4.31)$$

Зауважимо, що співвідношення (4.30) та (4.31) отримані за умови нульових значень початкового струму в котушці та початкової напруги на конденсаторі.

Узагальнюючи формули (4.29) – (4.31), як і за символічним методом, можна одержати такий вираз

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p), \quad (4.32)$$

який називають **законом Ома в операторній формі**, а коефіцієнт  $Z(p)$  – **операторним опором** двополюсника. Відповідно для окремих елементів схеми:

$R$  – операторний опір резистора,

$pL$  – операторний опір котушки індуктивності,

$1/pC$  – операторний опір конденсатора.

Також існує поняття комплексної провідності, яка є оберненою величиною до  $Z(p)$ .

Для операторних опорів та провідностей теж справедливі закони паралельного та послідовного з'єднання.

Алгоритм розрахунку перехідних процесів операторним методом подібний до алгоритму символічного методу і його можна подати у вигляді такої послідовності кроків.

**Крок 1.** Замінюємо всі струми та напруги електричної схеми їхніми операторними зображеннями, а елементи схеми описуємо операторними опорами чи провідностями.

**Крок 2.** Записуємо математичну модель схеми щодо тих чи інших операторних струмів та напруг, використовуючи традиційні методи, описані у розділі 2.

**Крок 3.** За допомогою розрахунку знаходимо зазначені операторні зображення струмів чи напруг.

**Крок 4.** За відомими операторними зображеннями струмів та напруг відтворюємо їхні оригінали, тобто записуємо миттєві значення струмів та напруг.

Щодо виконання кроку 4, як правило, його реалізують не з допомогою інтеграла (4.28б), а на підставі теореми про лишки, частинним видом якої є теорема Хевісайда.

Вказана теорема ґрунтується на тому, що операторні зображення струмів чи напруг електричного кола є, як правило, відношенням степеневих поліномів змінної  $P$ .

$$X(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (4.33)$$

де 
$$M(p) = \sum_{k=1}^m a_k p^k; \quad N(p) = \sum_{k=1}^n b_k p^k.$$

Тоді полюси функції  $X(p)$  отримують як розв'язки такого рівняння:

$$N(p) = 0.$$

Позначивши ці полюси через  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) і допускаючи, що вони всі різні, одержуємо запис теореми Хевісайда у такому вигляді:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(p - p_k)M(p)}{N(p)} \cdot e^{p_k t}, \quad (4.34)$$

де  $x(t)$  – миттєве значення струму чи напруги.

Для зручності наведемо таблицю найвживаніших в теорії кіл оригіналів та їхніх зображень:

Оригінал	Операторне зображення
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Рис. 4.15. Операторні зображення деяких часових функцій

**Приклад 4.7.** Знайдемо перехідний струм  $i_L(t)$  схеми, зображеної на рис.4.16, а

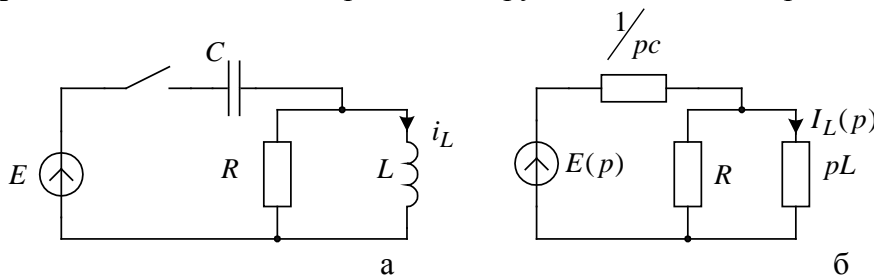


Рис.4.16. Схема до прикладу 4.7

Виконавши крок 1 алгоритму, отримуємо схему, показану на рис.4.16, б. Операторне зображення

ЕРС джерела, яке під'єднується в нульовий момент часу до схеми, дорівнює  $\frac{E}{p}$ , оскільки у часовій області вмикання відображається функцією Хевісайда. Знайдемо вираз для операторного зображення струму у котушці.  $1(t)$

$$I_L(p) = \frac{E/p}{1/pC + \frac{pRL}{pL+R}} \cdot \frac{pRL}{pL+R} \cdot \frac{1}{pL} = \frac{E/L}{p^2 + \frac{1}{RC} \cdot p + \frac{1}{LC}}$$

Використавши (4.34), визначимо миттєве значення струму  $i_L(t)$ . Для цього знайдемо полюси  $I_L(p)$

$$p^2 + \frac{1}{RC} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0 \quad p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}$$

Враховавши, що знаменник виразу для  $I_L(p)$ , якщо відомі полюси, можна подати так

$$p^2 + \frac{1}{RC} \cdot p + \frac{1}{LC} = (p - p_1)(p - p_2),$$

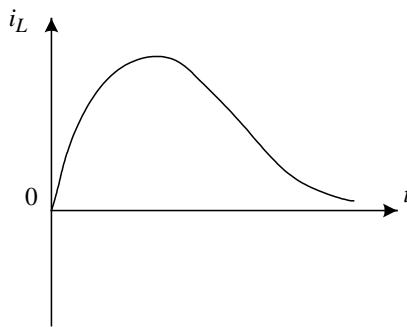
знайдемо перехідний струм у котушці:

$$i_L(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{E}{L(p_2 - p_1)} \cdot e^{p_2 t}.$$

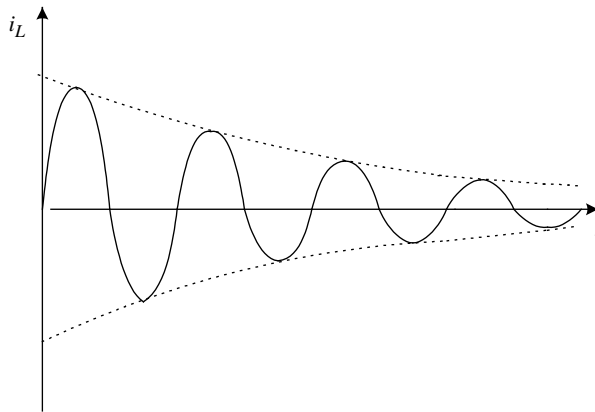
Проаналізуємо останній вираз, врахувавши, що полюси  $I_L(p)$  залежно від значення параметрів схеми можуть набувати як дійсні значення, так і комплексні. Причому умовою того, щоб полюси були дійсними, є така нерівність

$$\frac{1}{4R^2 C^2} \geq \frac{1}{LC} \quad \text{або} \quad R \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

$p_1$  і  $p_2$  набувають від'ємні значення і тому графік перехідного процесу виглядатиме так, як це показано на рис.4.17, а.



**Рис.4.17а.** Вигляд перехідного процесу при дійсних значеннях полюсів



**Рис.4.17б.** Вигляд перехідного процесу у разі комплексноспряжених полюсів

Зауважимо, що такий вид перехідного процесу називається **апериодичним**.

Якщо ж полюси набувають комплексноспряжені значення, тобто  $p_1 = -d + j\omega$ ;  $p_2 = -d - j\omega$ , характер перехідного процесу якісно змінюється. Покажемо це аналітично

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{E}{2Lj\omega} \left( e^{(-d+j\omega)t} - e^{(-d-j\omega)t} \right) = \\ &= \frac{E \cdot e^{-d \cdot t}}{2j\omega L} \left( e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} \right) = \frac{E \cdot e^{-d \cdot t}}{\omega L} \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \\ &= \frac{E}{\omega L} \cdot e^{-d \cdot t} \sin \omega t. \end{aligned}$$



Як видно з останнього виразу, у такому разі перехідний струм є синусоїдою, амплітуда якої з часом зменшується. (рис.4.17, б). Такий вид перехідного процесу називають **коливним**.

### 4.6.3. Застосування інтеграла Дюамеля до розрахунку перехідних процесів

Цей метод застосовується, коли потрібно визначити перехідну напругу чи струм у деякому елементі схеми, зумовлені під'єднанням до схеми джерела, струм  $i(t)$  чи напруга  $e(t)$  якого мають складну форму.

Для розрахунку перехідного процесу задану схему подамо у вигляді, наведеному на рис.4.18.



**Рис.4.18.** Подання схеми під час перехідного процесу за допомогою інтеграла Дюамеля

На рис.4.18  $e(t)$  – джерело змінної ЕРС, вмикання якого зумовлює перехідний процес,  $u(t)$  – вихідна напруга, яку потрібно визначити.

Введемо поняття операторного коефіцієнта передавання напруги для прохідного чотириполюсника ПЧ

$$H(p) = \frac{U(p)}{E(p)}, \tag{4.35}$$

де  $U(p)$  – операторне зображення вихідної напруги чотириполюсника;

$E(p)$  – операторне зображення вхідної напруги.

Якщо припустити, що вхідним сигналом є напруга у вигляді  $\delta(t)$  (функція Дірака), операторне зображення якої згідно з табл. 4.15 дорівнює одиниці, то з (4.35) випливає

$$H(p) = U(p). \tag{4.36}$$

А це означає, що операторний коефіцієнт є не що інше, як зображення за Лапласом вихідної напруги чотириполюсника при поданні на його вхід сигналу у вигляді  $\delta$  - імпульсу.

Цю напругу позначають

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] \tag{4.37}$$

і називають **імпульсною характеристикою** чотириполюсника ПЧ.

Перепишемо співвідношення (4.35) у дещо іншому вигляді

$$U(p) = H(p) \cdot E(p)$$

і застосуємо до лівої і правої частин зворотне перетворення Лапласа, використавши інтеграл згортки.

$$u(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau) \cdot e(\tau) d\tau \tag{4.38}$$

Отриманий у такий спосіб вираз називають **інтегралом Дюамеля** і він дає змогу визначити перехідну напругу у схемі у разі вмикання змінної напруги будь-якої форми.

Інтеграл Дюамеля можна обчислити як аналітично, так і числовими методами.

Зауважимо, що вираз (4.38) придатний для розрахунку перехідної напруги лише за умови нульових початкових умов, тобто коли  $u(0) = 0$ . Якщо ж така умова не виконується, то для розрахунку перехідних процесів варто користуватися таким виразом

$$u(t) = u(0) \cdot h(t) + \int_0^{\infty} h(t - \tau) \cdot e(\tau) d\tau. \tag{4.39}$$

Доволі часто для характеристики перехідних процесів у колі використовують **перехідну характеристику**  $v(t)$ , тобто значення вихідної напруги чотириполюсника ПЧ при вхідному сигналі у формі функції Хевісайда  $1(t)$ . Зв'язок між імпульсною перехідною характеристикою кола та її перехідною характеристикою такий:

$$h(t) = \frac{dv}{dt} \quad (4.40)$$

Зручність використання перехідної характеристики електронного кола для обчислення інтеграла Дюамеля полягає у можливості її експериментального визначення.

**Приклад 4.8.** Розрахуємо перехідний процес у послідовному з'єднанні резистора та конденсатора (рис. 4.19, а), під'єднаних до джерела змінної напруги (рис. 4.19, б).

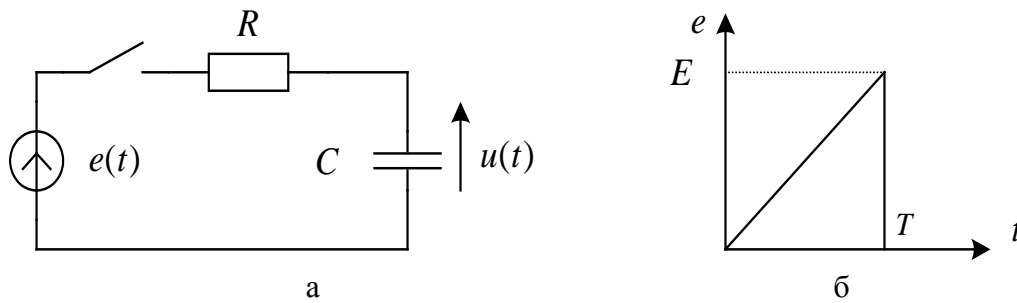


Рис. 4.19. Схема до прикладу 4.8

Знайдемо передавальну функцію  $H(p)$  згідно з виразом (4.35)

$$H(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{1}{pC} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC}$$

Враховуючи, що  $H(p)$  є операторним зображенням імпульсної перехідної характеристики цього кола, визначимо її.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC}$$

Перехідну напругу на конденсаторі  $u(t)$  доцільно визначати для двох випадків

- коли  $0 \leq t \leq T$  (тобто під час дії вхідного сигналу),
- коли  $t \geq T$  (після закінчення дії вхідного сигналу).

Допустивши, що початкова напруга конденсатора нульова, для першого випадку згідно з (4.38) одержимо

$$u(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot e(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \cdot \frac{E}{T} \tau \cdot d\tau = \frac{E}{T} \left[ t - RC \left( 1 - e^{-t/RC} \right) \right]$$

У другому випадку, врахувавши що  $e(t)$  при  $t \geq T$  дорівнює 0, перехідна напруга на конденсаторі розраховується так:

$$u(t) = \int_0^T \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \cdot \frac{E}{T} \tau \cdot d\tau = \frac{E}{T} \left[ (RC - T) \cdot e^{-t/RC} - RC \right] \cdot e^{-t/RC}$$

#### 4.6.4. Числові методи розрахунку перехідних процесів електронних кіл

Розглянуті вище методи розрахунку перехідних процесів в електронних колах переважно придатні до розрахунку лінійних кіл. Це є істотним недоліком, що обмежує сферу їхнього застосування. Як альтернативу розглянутим методам можна розглядати числові методи

розрахунку перехідних процесів, які ґрунтуються на використанні числових методів інтегрування диференціальних рівнянь, зокрема методів Ейлера, Рунге-Кутта тощо. Як відомо, числові методи розв'язання диференціальних рівнянь з однаковим успіхом можуть бути застосовані до розв'язання як лінійних, так і нелінійних рівнянь, що істотно підвищує їхню практичну цінність. Також цими методами успішно розв'язують системи диференціальних рівнянь доволі високих порядків, що робить їх придатними для розрахунку сучасних складних електронних пристроїв.

Нині числові методи розрахунку перехідних процесів електронних схем використовуються у двох варіантах:

1. Застосування традиційних числових методів розв'язання диференціальних рівнянь.
2. Використання асоційованих дискретних моделей реактивних елементів електронних схем.

Перший спосіб полягає у формуванні математичної моделі електронного кола у вигляді рівняння чи системи диференціальних рівнянь першого порядку, наприклад, як це робиться для класичного методу розрахунку перехідних процесів і подальшому числовому інтегруванню цих рівнянь. Допустимо, що математична модель електронного кола має такий вигляд:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad (4.41)$$

де  $\vec{x}$  – вектор змінних, що описує електричний стан кола (деякі струми і напруги кола);

$\vec{f}(\vec{x}, t)$  – деяка вектор-функція, яка для лінійних кіл буде, очевидно, лінійною – і може бути подана так:

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{v}, \quad (4.42)$$

де  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  – деякі матриці коефіцієнтів,  $\vec{v}$  – вектор параметрів джерел енергії розглянутого кола.

Застосувавши до розв'язання системи диференціальних рівнянь неявний метод Ейлера, отримуємо таке різницеве рівняння:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + h\vec{f}(\vec{x}^{(k)}, t^{(k)}), \quad (4.43)$$

де верхні індекси змінних визначають номер дискретного значення змінної,  $h$  – крок інтегрування.

Другий підхід полягає у заміні реактивних елементів на кожному кроці інтегрування резистивними схемами заміщення. Розглянемо цей підхід детальніше. Для цього запишемо рівняння котушки індуктивності

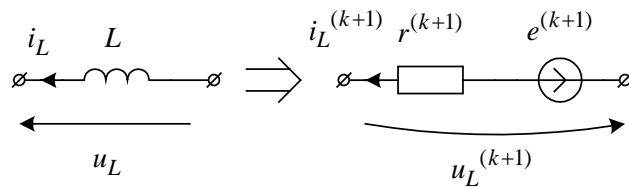
$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

і перейдемо від неперервних змінних  $u_L(t)$  та  $i_L(t)$  до їхніх дискрет  $u_L^{(k)} = u_L(kh)$ ;  $i_L^{(k)} = i_L(kh)$   $\{k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Тоді згідно з неявним методом Ейлера наближено можна записати, що

$$L \cdot \frac{i_L^{(k+1)} - i_L^{(k)}}{h} = u_L^{(k+1)}, \quad (4.44)$$

$$\text{або } u_L^{(k+1)} = \frac{L}{h} \cdot i_L^{(k+1)} - \frac{L}{h} \cdot i_L^{(k)}. \quad (4.45)$$

Ураховуючи, що в ітераційному процесі величину  $i_L^{(k)}$  можна трактувати як відому, тобто постійну на цьому кроці інтегрування і змінними на  $(k+1)$  кроці інтегрування є величини  $i_L^{(k+1)}$ ,  $u_L^{(k+1)}$ , що дає змогу замінити на цьому кроці котушку індуктивності резистивною схемою заміщення (рис.4.20).

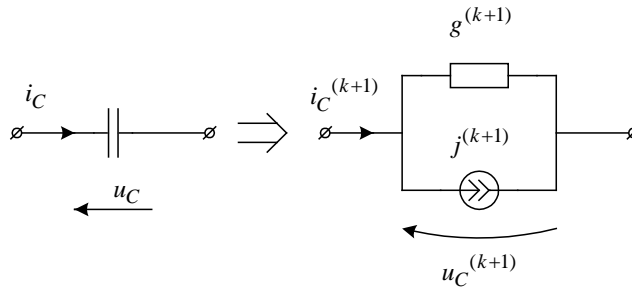


**Рис. 4.20.** Схема заміщення котушки індуктивності на  $(k+1)$  кроці інтегрування, асоційована до неявного методу Ейлера,

де  $r^{(k+1)} = L/h$ ;  $e_L^{(k+1)} = L/h \cdot i_L^{(k)}$ .

Аналогічна схема заміщення конденсатора показана на рис. 4.21, де

$$g^{(k+1)} = C/h; \quad j^{(k+1)} = C/h \cdot u_C^{(k)}.$$

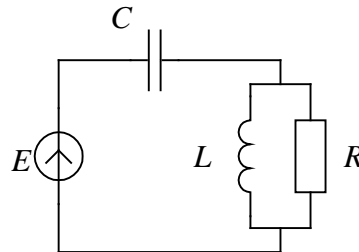


**Рис. 4.21.** Схема заміщення конденсатора на  $(k+1)$  кроці інтегрування, асоційована до неявного методу Ейлера

Замінивши у такий спосіб у реальній схемі всі реактивні елементи схемами заміщення, отримуємо резистивну схему з невідомими змінними. Це є дискрети струмів та напруг на котушках індуктивності та конденсаторах, стосовно яких складаємо рівняння, розв’язання якого дає змогу одержати рекурентну формулу для визначення дискретних значень (дискрет) струмів та напруг на реактивних елементах.

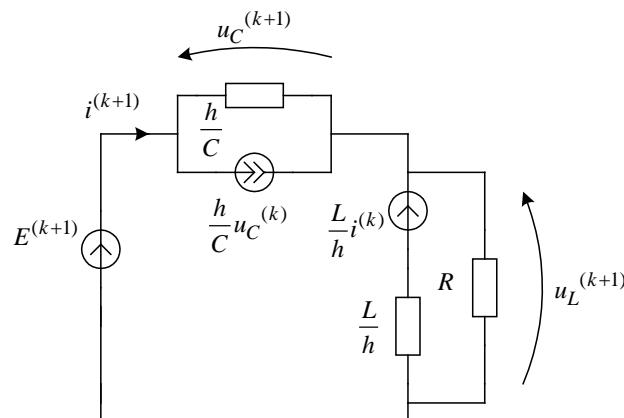
Для ілюстрації останнього підходу розглянемо приклад.

**Приклад 4.9.** Розрахуємо числовим методом перехідний процес у схемі, показаній на рис.4.22.



**Рис. 4.22.** Схема до прикладу 4.9

Після заміни реактивних елементів вказаної схеми резистивними схемами заміщення отримуємо резистивну схему (рис. 4.23).



**Рис.4.23.** Дискретна резистивна схема заміщення до прикладу 4.9

Згідно із законами Ома та Кірхгофа запишемо систему рівнянь резистивного кола, показаного на рис. 4.22.

$$u_C^{(k+1)} = \frac{h}{C} \cdot \left( i^{(k+1)} - \frac{C}{h} \cdot u_C^{(k)} \right);$$

$$u_L^{(k+1)} = \frac{L}{h} \cdot i^{(k)} + \frac{L}{h} \cdot i_L^{(k+1)};$$

$$E^{(k+1)} - u_C^{(k+1)} - u_L^{(k+1)} = 0;$$

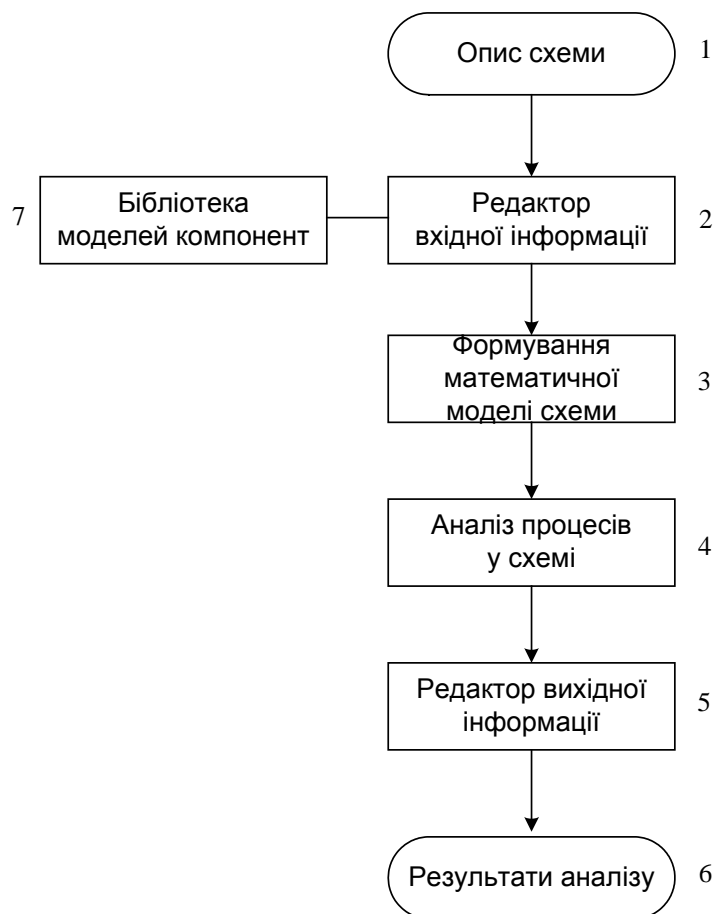
$$i_L^{(k+1)} = \frac{u_L^{(k+1)}}{R} - i^{(k+1)}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно змінної  $i^{(k+1)}$ , одержуємо рекурентну формулу для визначення дискрет перехідного струму  $i^{(k+1)}$

$$i^{(k+1)} = \frac{E^{(k+1)} + u_C^{(k)} - \frac{L}{h - \frac{L}{R}} \cdot i^{(k)}}{\frac{h}{C} + \frac{L}{h - \frac{L}{R}}}.$$

#### 4.7. Загальна характеристика пакетів програм комп'ютерного аналізу електронних кіл

Під час проектування електронних пристроїв обов'язковим етапом є їхнє попереднє моделювання на комп'ютері, що дає змогу прогнозувати їхнє функціонування при подальшій фізичній реалізації. Причому потрібно дослідити поведінку електронних схем, що відповідають конкретним пристроям, у різних режимах: на постійному та змінному струмах, лінійному та нелінійному, перехідні та частотні характеристики. Для цього нині існує досконале програмне забезпечення, яке переважно використовує числові методи розрахунку, а іноді і аналітичні (символьні) методи. Загальну структуру пакетів аналізу електронних кіл можна подати у вигляді, показаному на рис. 4.24.



**Рис.4.24.** Узагальнена блок-схема програми комп'ютерного аналізу електронних схем

Як бачимо з рисунка, крім традиційних блоків 3, 4 формування математичної моделі та її розв'язання у сучасних пакетах програм аналізу наявні сервісні блоки 2, 5, які призначені для узгодження способів подання інформації про електронну схему, що аналізується, зручних для користувача (конструктора-схемотехніка) та комп'ютера, де інформація задається виключно у числовому вигляді.

Наприклад, первинну інформацію про електронну схему користувачу зручно подавати у графічному вигляді (схемне зображення), що є загальноприйнятим, а комп'ютер її може лише сприймати у вигляді певних числових масивів (матриць інцидентів, компонентних матриць тощо). Також часто результати аналізу для користувача зручніше подавати у вигляді графіків, часових діаграм, спектрів, частотних характеристик тощо. Тому блоки 2 і 5 здійснюють відповідне перетворення форми вхідної та вихідної інформації.

Нині відома велика кількість програм аналізу процесів в електронних колах. Найпоширеніші з них PSpice, Matlab, Sumploer, Electro, ETP.

PSpice – це синтез комп'ютерного аналізу процесів у електронних колах переважно із зосередженими параметрами, орієнтованого на розробників електронної апаратури.

Matlab – пакет прикладних програм широкого призначення, який дає змогу здійснювати різні види аналізу процесів в електронних схемах різних типів (з зосередженими та розподіленими параметрами) і орієнтований переважно на науковців та дослідників.

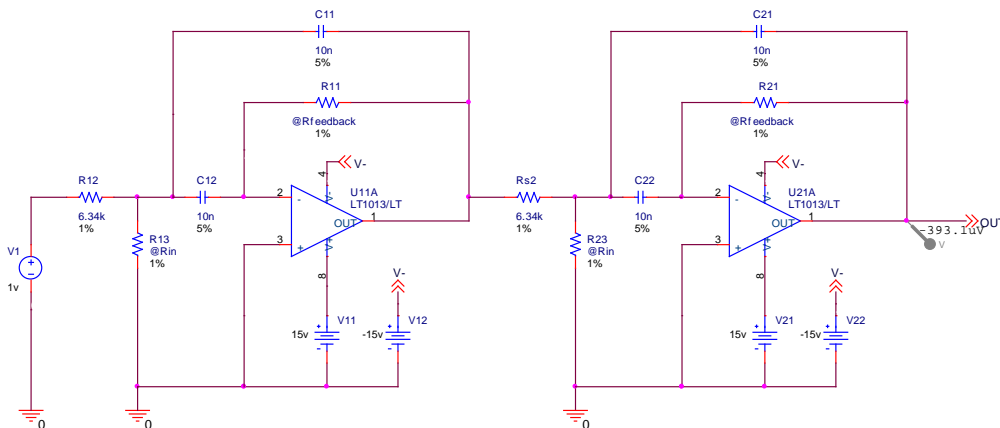
Sumploer – програма аналізу електротехнічних систем, орієнтована на розробників.

Electro – імітаційна програма аналізу процесів в електронних колах призначених насамперед для навчальних цілей (імітація лабораторних робіт, вироблення навиків розрахунку типових задач теорії кіл студентами тощо).

ETP – програма аналізу процесів в енергоелектронних системах, орієнтована на швидкий аналіз стану енергосистем з метою забезпечення їхнього оптимального функціонування.

Із перелічених вище програм аналізу найуніверсальнішою і орієнтованою на широке коло користувачів є програма PSpice, яку ми розглянемо детальніше.

**Рис.4.25.** Електронна схема до прикладу 4.10



**Приклад 4.10.** Розглянемо приклад використання аналізу Монте-Карло для прогнозування виходу готової продукції при виробництві фільтра Чебишова 4-го порядку. Фільтр Чебишова повинен мати центральну частоту 10 кГц і ширину смуги пропускання 1,5 кГц. Схему фільтра показано на рис.4.25. Технічні вимоги до джерел:

V11:DC, V21:DC =+15

V12:DC, V22:DC =-15

V1:AC =1

У схемі використано резистори з розкидом 1 % і конденсатори із розкидом 5 %. Технологічні розкиди резисторів і конденсаторів приводять до зміни ширини смуги пропускання і центральної частоти фільтра.

Для аналізу фільтра встановлюється аналіз AC Sweep і Монте-Карло. Аналіз AC Sweep охоплює 50 точок на декаду від 100 Гц до 1 МГц. Аналіз Монте-Карло встановлений, щоб отримати 100 статистичних розрахунків. Вихідна змінна — V(OUT). У полі Save data from list виберемо All.

Оскільки файл даних може стати дуже великим під час виконання аналізу Монте-Карло, розглянемо тільки вихідні дані фільтра. Для цього помістимо маркер напруги на виході фільтра і виконаємо такі операції.

У меню Pspice виберемо New Simulation Profile або Edit Simulation Settings (якщо це нове моделювання, введемо назву профайла моделювання і клацнемо ОК). З'явиться діалогове вікно Simulation Settings.

У позиції Data Collection виберемо опцію At Markers Only для кожного типу маркера (напруги, струму, потужності, шуму, зумовленого дискретизацією).

Клацнемо ОК.

В меню PSpice Capture виберемо Run, щоб почати моделювання.

Коли моделювання завершиться, PSpice автоматично відобразить вибрані графіки.

Оскільки PSpice виконує аналіз Монте-Карло, він зберігає безліч статистичних розрахунків. Вони перераховані в діалоговому вікні Available Sections.

Відображення гістограми для смуги пропускання при нерівномірності 1 дБ:

В меню Plot PSpice виберемо Axis Settings.

Виберемо позицію X Axis.

У рамці Processing Options виберемо поле Performance Analysis.

Клацнемо ОК.

В меню Trace виберемо Performance Analysis.

У діалоговому вікні, що відкрилося, клацнемо Select Sections.

У вікні Available Sections клацнемо All, а потім ОК.

Клацнемо по клавіші Wizard.

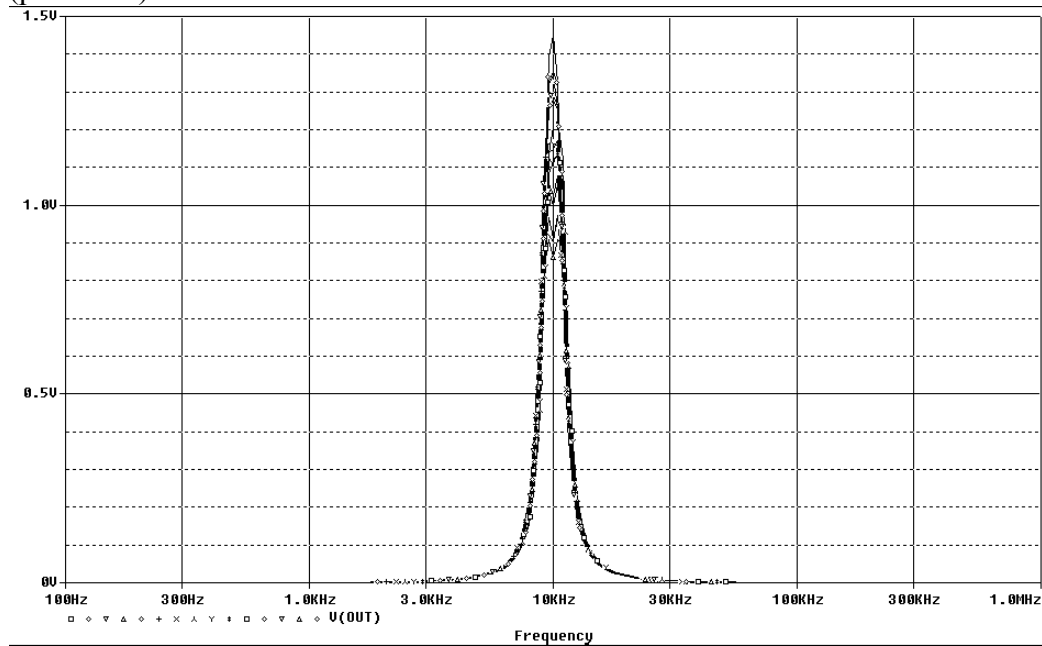
У вікні Performance Analysis Wizard клацнемо по клавіші Next.

У вікні вибору цільових функцій, що відкрилося, виберемо Bandwidth, а потім клацнемо Next.

У вікні, що відкрилося, введемо V(OUT) в текстове поле Name trace to search.

Введемо 1 db у текстове поле level down for bandwidth calc.

Клацнемо Next, потім клацнемо у вікні, що відкрилося, знову Next, щоб розглянути гістограму (рис. 4.26).



*Рис.4.26. Гістограма для смуги пропускання при нерівномірності 1dB*

Опис схеми прикладу вхідною мовою PSpice:

\*\* WARNING: THIS AUTOMATICALLY GENERATED FILE MAY BE OVERWRITTEN BY SUBSEQUENT PROFILES

\*Libraries:

\* Local Libraries :

\* From [PSPICE NETLIST] section of pspice91.ini file:

.lib "nom.lib"

\*Analysis directives:

.AC DEC 50 100 1MEG

.MC 15 AC v([OUT]) YMAX LIST OUTPUT ALL

.PROBE

.INC "histo-Histo.net"

\*\*\*\* INCLUDING histo-Histo.net \*\*\*\*

\* source HISTO

V\_V1 N00023 0 AC 1v

V\_U1\_V2 U1\_V- 0 -15v

R\_U1\_R2 N00023 U1\_N00024 R\_U1\_R2 6.34k

.model R\_U1\_R2 RES R=1 DEV=1%

R\_U1\_R1 U1\_N00034 N00030 R\_U1\_R1 18.2k

.model R\_U1\_R1 RES R=1 DEV=1%

R\_U1\_R3 0 U1\_N00024 R\_U1\_R3 93.1

.model R\_U1\_R3 RES R=1 DEV=1%

C\_U1\_C1 U1\_N00024 N00030 C\_U1\_C1 10n

.model C\_U1\_C1 CAP C=1 DEV=5%

C\_U1\_C2 U1\_N00024 U1\_N00034 C\_U1\_C2 10n

.model C\_U1\_C2 CAP C=1 DEV=5%

X\_U1\_U1A 0 U1\_N00034 U1\_N00594 U1\_V- N00030 LT1013/LT

V\_U1\_V1 U1\_N00594 0 15v

V\_U2\_V2 U2\_V- 0 -15v



```

R_U2_R2      N00030 U2_N00024 R_U2_R2 6.34k
.model      R_U2_R2 RES R=1 DEV=1%
R_U2_R1      U2_N00034 OUT R_U2_R1 22.1k
.model      R_U2_R1 RES R=1 DEV=1%
R_U2_R3      0 U2_N00024 R_U2_R3 110
.model      R_U2_R3 RES R=1 DEV=1%
C_U2_C1      U2_N00024 OUT C_U2_C1 10n
.model      C_U2_C1 CAP C=1 DEV=5%
C_U2_C2      U2_N00024 U2_N00034 C_U2_C2 10n
.model      C_U2_C2 CAP C=1 DEV=5%
X_U2_U1A     0 U2_N00034 U2_N00594 U2_V- OUT LT1013/LT
V_U2_V1      U2_N00594 0 15v

```

```

**** RESUMING histo-histo-ac.sim.cir ****
.INC "histo-Histo.als"

```

```

**** INCLUDING histo-Histo.als ****

```

```

.ALIASES

```

```

V_V1      V1(+=N00023 -=0 )
_ U1(IN=N00023 OUT=N00030 )
V_U1_V2   U1.V2(+=U1_V- -=0 )
R_U1_R2    U1.R2(1=N00023 2=U1_N00024 )

R_U1_R1    U1.R1(1=U1_N00034 2=N00030 )

R_U1_R3    U1.R3(1=0 2=U1_N00024 )

C_U1_C1    U1.C1(1=U1_N00024 2=N00030 )

C_U1_C2    U1.C2(1=U1_N00024 2=U1_N00034 )

X_U1_U1A   U1.U1A(+=0 -=U1_N00034 V+=U1_N00594 V-=U1_V- OUT=N00030 )
V_U1_V1    U1.V1(+=U1_N00594 -=0 )
_ (U1.IN=N00023)
_ (U1.OUT=N00030)
_ (U1.V-=U1_V-)
_ U2(IN=N00030 OUT=OUT )
V_U2_V2    U2.V2(+=U2_V- -=0 )
R_U2_R2    U2.R2(1=N00030 2=U2_N00024 )

R_U2_R1    U2.R1(1=U2_N00034 2=OUT )

R_U2_R3    U2.R3(1=0 2=U2_N00024 )

C_U2_C1    U2.C1(1=U2_N00024 2=OUT )

C_U2_C2    U2.C2(1=U2_N00024 2=U2_N00034 )

X_U2_U1A   U2.U1A(+=0 -=U2_N00034 V+=U2_N00594 V-=U2_V- OUT=OUT )
V_U2_V1    U2.V1(+=U2_N00594 -=0 )
_ (U2.IN=N00030)
_ (U2.OUT=OUT)
_ (U2.V-=U2_V-)
_ (OUT=OUT)

```

.ENDALIASES

\*\*\*\* RESUMING histo-histo-ac.sim.cir \*\*\*\*

.END

Програма PSpice дає змогу моделювати різні електронно-електричні пристрої, розраховувати перехідні процеси у разі дії різноманітних вхідних сигналів, їх спектри, режими по постійному струму, частотні характеристики, спектральні густини внутрішніх шумів. У неї входять бібліотеки напівпровідникових приладів, операційних підсилювачів і компараторів напруг, що випускаються фірмами Maxim, Philips, Siemens і Zetex. Із найістотніших можливостей цієї системи варто відзначати такі:

- прискорення пошуку помилок, допущених під час створення принципової схеми; введення майстра створення символів нових компонентів, спрощення створення ієрархічних символів;
- наявність менеджера проектів і засобів ведення журналу проектів;
- відображення на схемі значень вузлових потенціалів і струмів вибраних гілок у режимі постійного струму;
- можливість моделювання схем, що містять декілька пристроїв логіки, що програмується Xilinx;
- побудова графіків не тільки сумарної щільності вихідного шуму, але і впливу від окремих компонентів, що шумлять;
- завантаження в редактор печатних плат MicroSim PCBoards списків електричних з'єднань схем, створених в інших системах.

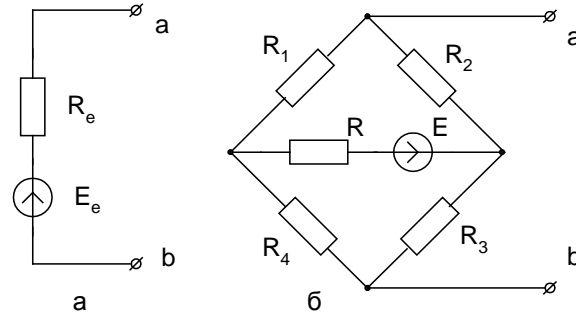
Контрольні питання до розділу 4

1. Які види аналізу електронних кіл Ви знаєте?
2. З яких компонент складаються електронні кола постійного струму?
3. До якої математичної операції зводимо аналіз кіл постійного струму?
4. Основна відмінність аналізу нелінійних резистивних кіл порівняно з лінійними.
5. Переваги та недоліки графічних методів аналізу нелінійних резистивних кіл.
6. Призначення методу трьох площин.
7. Суть числових методів розрахунку нелінійних резистивних кіл та їхні переваги і недоліки.
8. Як формується математична модель нелінійного резистивного кола?
9. Основні характеристики змінного струму.
10. Потужність у колах змінного синусоїдного струму.
11. Комплексна амплітуда, її фізичний зміст.
12. Поняття комплексного опору.
13. Суть символічного методу розрахунку кіл змінного струму.
14. Як застосувати символічний метод до розрахунку кіл, у яких струми та напруги мають несинусоїдний характер?
15. Означення перехідного процесу та обґрунтування необхідності його розрахунку.
16. Назвіть відомі Вам методи розрахунку перехідних процесів.
17. Переваги та недоліки операторного методу розрахунку перехідних процесів.
18. Коли зручно користуватись для розрахунку перехідних процесів інтегралом Дюамеля?
19. Можливості числових методів розрахунку перехідних процесів.
20. Побудуйте схеми заміщення котушки та конденсатора, асоційовані до явного методу Ейлера.
21. Які Ви знаєте сучасні програми розрахунку електронних кіл?
22. Основні функціональні можливості програми PSpice.

\* Для кращого засвоєння матеріалу приклади розв'язання типових задач розміщено безпосередньо після викладу теоретичних засад відповідних методів аналізу.

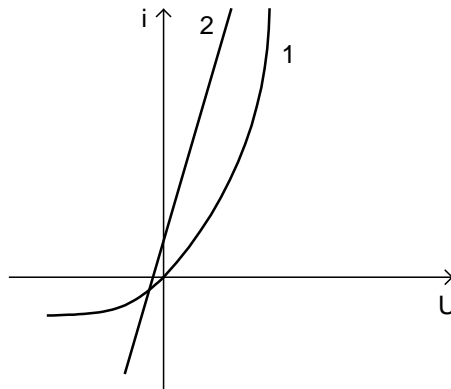
**Приклади задач для самоконтролю**

**Задача 4.1.** Визначити ЕРС та внутрішній опір  $R_e$  генератора (а – рис.4.1.3Д.), еквівалентного заданому колу (б – рис.4.1.3Д.), якщо  $R_1=4$  Ом,  $R_2=16$  Ом,  $R_3= 7$  Ом,  $R_4=18$  Ом,  $E= 50$  В, а опір  $R$  можна вважати таким, що дорівнює нулеві.



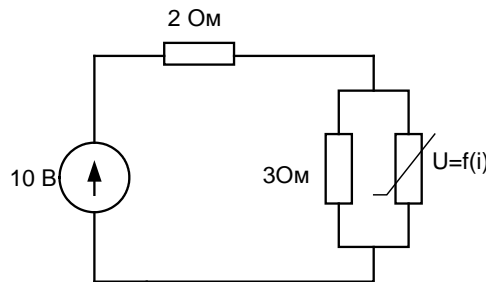
**Рис.4.1. 3Д.**

**Задача 4.2.** За поданими В/А характеристиками двох послідовно з'єднаних резисторів побудуйте результуючу характеристику.



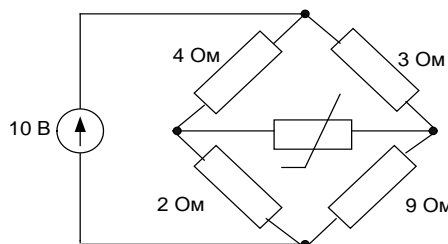
**Рис.4.2. 3Д.**

**Задача 4.3.** Для заданого електричного кола побудуйте математичну модель, якщо  $f(i) = i + 4i^3$ .



**Рис.4.3. 3Д.**

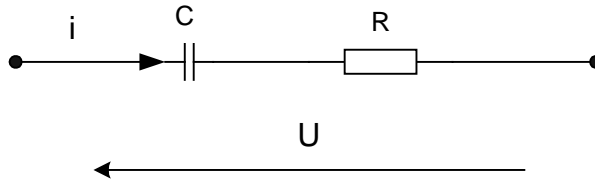
**Задача 4.4.** Побудуйте математичну модель заданого електричного кола, якщо В/А характеристика нелінійного резистора  $U=4i+2i^2$ .



**Рис.4.4. 3Д.**

**Задача 4.5.** Знайдіть струм  $i$  у такому колі :  $\omega C = 0.1$ ,  $R = 10$  Ом.

$$U(t) = 40 + 100 \sin \omega t - 40 \sin(2\omega t - \pi/3).$$



*Рис.4.5. ЗД.*

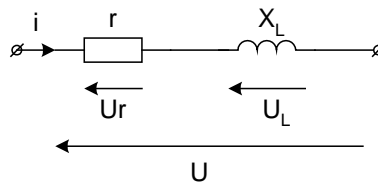
**Задача 4.6.** Рівняння нелінійного кола має такий вигляд:

$$ax^3 - 4x = 7.$$

За яких значень  $a$  це коло можна розрахувати, використовуючи метод простої ітерації (умова забезпечення збіжності)?

**Задача 4.7.** Електричне коло складається з послідовно з'єднаних: джерела ЕРС (10 В), лінійного резистора опором 4 Ом та нелінійного резистора, рівняння якого  $i = 0.2U + 0.1U^3$ . Використовуючи метод Ньютона, визначте струм у такому колі.

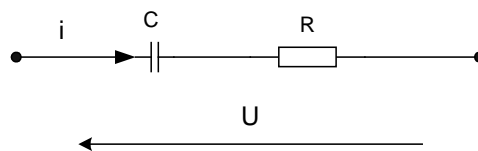
**Задача 4.8.** Коло синусоїдного струму має такі параметри:  $r=40$  Ом,  $X_L=40$  Ом. Визначити миттєве значення загальної напруги  $u$  на затискачах кола, якщо напруга на індуктивності задана:  $u_L=240 \sin(\omega t + 150^\circ)$  В.



*Рис.4.6. ЗД.*

**Задача 4.9.** Знайдіть реактивну потужність для такого двополюсника:  $\omega C = 0.1$ ,  $R = 10$  Ом.

$$U(t) = 40 + 100 \sin \omega t - 40 \sin(2\omega t - \pi/3).$$



*Рис.4.7. ЗД.*

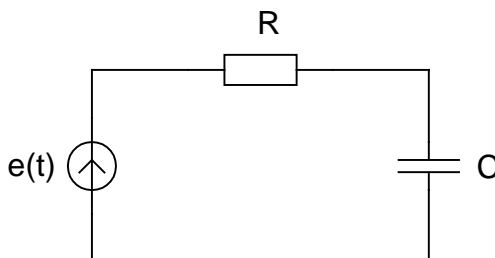
**Задача 4.10.** Операторна функція передавання чотириполюсника дорівнює

$$H(p) = \frac{p+1}{p^2 + 40p + 300}.$$

Визначити його імпульсну характеристику.

**Задача 4.11.** Розрахуйте задане коло за допомогою інтеграла Дюамеля,

$$e(t) = \begin{cases} 10^4 t & 0 \leq t \leq 0.01 \text{ c} \\ 0 & t > 0.01 \text{ c} \end{cases} ;$$



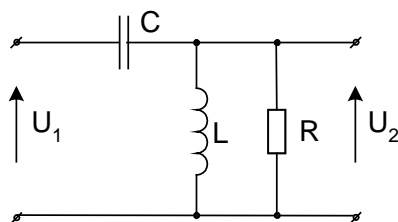
$R=10^3$  Ом,  $C = 10$  мкФ.

*Рис.4.8. ЗД.*

**Задача 4.12.** Дано операторне зображення напруги (за Лапласом). Потрібно знайти оригінал  $u(t)$ .

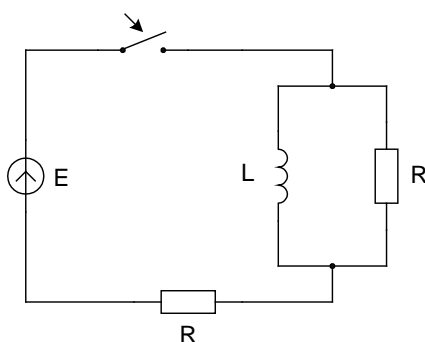
$$U(p) = U \frac{pCr + 1}{p(pCr + 2)}$$

**Задача 4.13.** Запишіть вираз для операторного коефіцієнта передавання напруги схеми, наведеної нижче.



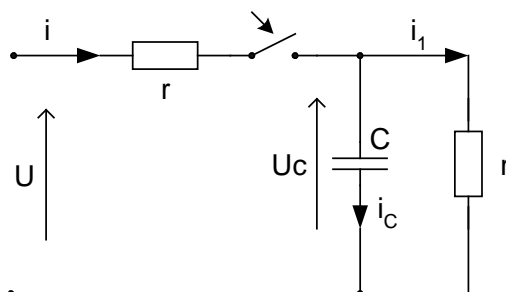
*Рис. 4.9. ЗД.*

**Задача 4.14.** Отримайте рекурентну формулу для розрахунку перехідного процесу на основі використання дискретних схем заміщення реактивних елементів для кола, наведеного нижче.



*Рис.4.10. ЗД.*

**Задача 4.15.** У колі визначити операторне зображення струму  $i$  (за Лапласом).



*Рис.4.11. ЗД.*

## 5. Перетворення сигналів в електронних колах

Електронні кола здійснюють перетворення аналогових сигналів, які приводять до зміни їхньої форми та характеристик. Ці перетворення можна описати за допомогою певних аналогових функцій, тобто подати їх у вигляді відповідних математичних операцій, що здійснюються над аналоговими сигналами. Основними аналоговими функціями є такі: підсилення, порівняння, перемноження, обмеження, частотна фільтрація. Ці функції у сукупності утворюють набір операцій, які дають змогу реалізувати складніші функції, такі, як генерування сигналів, модуляція, детектування, перетворення частоти тощо.

*Основні аналогові функції дають змогу реалізувати різноманітні перетворення аналогових сигналів в електронних колах.*

З метою вивчення математичного змісту перелічених основних аналогових функцій прийmemo, що вони можуть бути реалізовані за допомогою відповідних функціональних вузлів, взаємозв'язок між вхідними та вихідними сигналами яких описує конкретна аналогова функція.

*Лінійне підсилення змінює миттєві значення сигналу, не змінюючи його форми.*

**Підсилення** – це збільшення миттєвих значень сигналу в  $K$  разів без спотворень форми в необмеженій смузі частот. Функцію підсилення реалізує ідеалізований підсилювач. Залежність вихідного сигналу підсилювача  $s_{\text{вих}}(t)$  від вхідного  $s_{\text{вх}}(t)$  описує формула:

$$s_{\text{вих}}(t) = K s_{\text{вх}}(t). \quad (5.1)$$

**Порівняння** – це оцінка співвідношень двох сигналів  $s_{1\text{вх}}(t)$  та  $s_{2\text{вх}}(t)$ . Функцію порівняння реалізує компаратор, вихідний сигнал  $s_{\text{вих}}(t)$  якого стрибком змінюється у момент рівності між собою вхідних сигналів  $s_{1\text{вх}}(t)$  та  $s_{2\text{вх}}(t)$ . Математично цю функцію можна описати так:

$$s_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} S_1, & \text{якщо } s_{1\text{вх}}(t) < s_{2\text{вх}}(t) \\ S_2, & \text{якщо } s_{1\text{вх}}(t) > s_{2\text{вх}}(t) \\ (S_1 + S_2)/2, & \text{якщо } s_{1\text{вх}}(t) = s_{2\text{вх}}(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

де  $S_1$  та  $S_2$  – фіксовані сталі значення вихідного сигналу компаратора, причому  $S_1 \neq S_2$

Функція **перемноження** дає змогу отримати вихідний сигнал  $s_{\text{вих}}(t)$  як результат перемноження двох вхідних сигналів  $s_{1\text{вх}}(t)$  та  $s_{2\text{вх}}(t)$ ;

$$s_{\text{вих}}(t) = A s_{1\text{вх}}(t) \cdot s_{2\text{вх}}(t), \quad (5.3)$$

де  $A$  – масштабний коефіцієнт, який не залежить від вхідних сигналів. Реалізує функцію перемноження перемножувач.

**Обмеження** – це перетворення вхідного сигналу  $s_{\text{вх}}(t)$  на вихідний сигнал  $s_{\text{вих}}(t)$  згідно із співвідношенням:

$$s_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} K \cdot s_{\text{вх}}(t), & \text{якщо } S_{\text{н}} \leq s_{\text{вх}}(t) \leq S_{\text{в}}; \\ S_{\text{мін}}, & \text{якщо } s_{\text{вх}}(t) < S_{\text{н}}; \\ S_{\text{макс}}, & \text{якщо } s_{\text{вх}}(t) > S_{\text{в}}, \end{cases} \quad (5.4)$$

де  $K$  – масштабний коефіцієнт;  $S_{\text{н}}$  та  $S_{\text{в}}$  – відповідно нижній та верхній пороги обмеження вхідного сигналу;  $S_{\text{мін}}$  та  $S_{\text{макс}}$  – відповідно мінімальне та максимальне фіксоване значення вихідного сигналу обмежувача.

Функцію обмеження реалізує обмежувач. Співвідношення (5.4) описує функцію двостороннього обмеження (знизу і зверху). Частинними випадками двостороннього обмеження є обмеження знизу (для якого  $S_{\text{в}} = \infty$ ) та обмеження зверху (для якого  $S_{\text{н}} = -\infty$ ).

**Частотна фільтрація** – це функція виділення з повного спектра вхідного сигналу гармонічних складових у заданому діапазоні частот від  $\omega_{\text{н}}$  до  $\omega_{\text{в}}$ . Реалізує функцію частотної

фільтрації частотний фільтр – чотириполюсник, який може пропускати гармонічні коливання з деяким коефіцієнтом передавання  $K$  у заданому частотному діапазоні, а за межами цього діапазону коефіцієнт передавання дорівнює нулеві.

Відповідно до цього розрізняють смугу пропускання фільтра (діапазон частот, де  $K \neq 0$ ) та смугу запирання (діапазон частот, де  $K = 0$ ).

Описані основні аналогові функції є ідеалізованими, оскільки реальні функціональні вузли можуть реалізувати їх з певними наближеннями, які зумовлені властивостями реальних компонентів електронних кіл.

Далі розглянемо детальніше особливості побудови та принципи роботи конкретних функціональних вузлів, які реалізують аналогові функції.

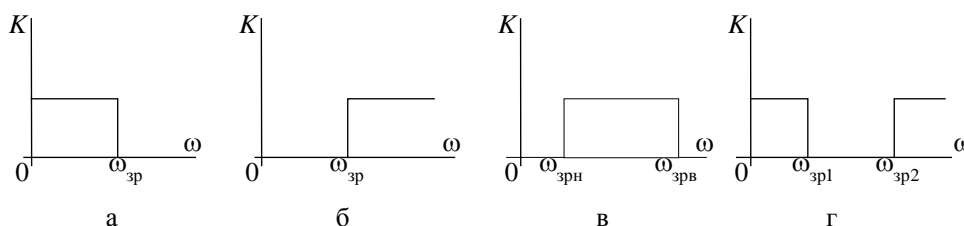
## 5.1. Частотна фільтрація електричних сигналів

Електричні фільтри класифікують, передовсім, залежно від діапазону частот, які пропускає фільтр. Відповідно до цього розрізняють:

- фільтри нижніх частот (ФНЧ), смуга пропускання яких міститься в діапазоні від 0 до деякої частоти  $\omega_{зр}$ , яку називають частотою зрізу;
- фільтри верхніх частот (ФВЧ), смуга пропускання яких міститься в діапазоні частот від  $\omega_{зр}$  до  $\infty$ ;
- смугові фільтри (СФ), смуга пропускання яких лежить в діапазоні частот від  $\omega_{зрн}$  до  $\omega_{зрв}$ ;
- режекторні (запираючі) фільтри (ЗФ), смуга запирання яких міститься в діапазоні частот від  $\omega_{зр1}$  до  $\omega_{зр2}$ .

*Суть фільтрації сигналів полягає у зміні спектрального складу вхідного сигналу, при якому різним гармонікам відповідають різні коефіцієнти передавання.*

На рис. 5.1. зображені амплітудно-частотні характеристики коефіцієнта передавання ідеальних фільтрів.



**Рис. 5.1.** Амплітудно-частотні характеристики ідеальних фільтрів: а – ФНЧ; б – ФВЧ; в – СФ; г – ЗФ

Залежно від типів елементів, які входять до складу фільтра, розрізняють:

- пасивні фільтри, до складу яких входять тільки пасивні елементи (конденсатори, резистори, котушки індуктивності);
- активні фільтри, до складу яких входять пасивні та активні елементи (транзистори, операційні підсилювачі тощо).

### 5.1.1. Пасивні фільтри

Оскільки основне завдання електричного фільтра полягає у тому, щоб пропустити сигнали з мінімальними втратами у смугі пропускання, то для побудови пасивних фільтрів використовують  $L$ - і  $C$ - елементи з малими втратами, якими практично можна знехтувати. Тому такого типу фільтри називають реактивними фільтрами.

*Умова прозорості реактивного фільтра передбачає відсутність послаблення сигналу у смугі пропускання фільтра.*

Елементарною ланкою пасивного реактивного фільтра є Г-ланка (рис. 5.2, а), аналіз властивостей якої показує, що вона може пропускати сигнали без послаблення у певній смузі частот, в якій реактивні опори її елементів задовольняють умову:

$$-1 \leq X_h/X_v \leq 0. \quad (5.5)$$

Співвідношення (5.5) називають умовою прозорості фільтра.

Із (5.5) випливає, що для виконання умови прозорості необхідно, щоб реактивні опори  $X_h$  та  $X_v$  мали різні знаки.

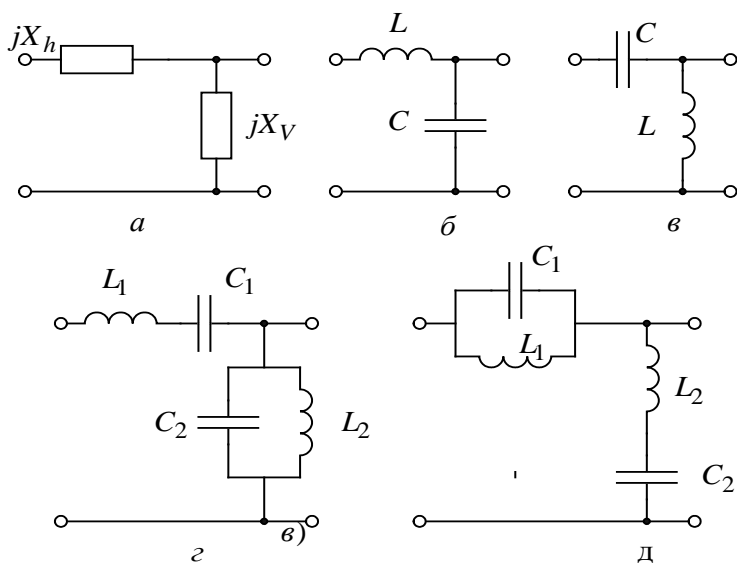
Частоти зрізу, які відповідають границям смуги пропускання, визначають співвідношення:

$$X_h/X_v=0; \quad (5.6a)$$

$$X_h/X_v=-1. \quad (5.6b)$$

Схеми елементарних Г-ланок ФНЧ, ФВЧ, СФ та ЗФ зображено відповідно на рис. 5.2, б, в, г, д.

**Фільтри типу К – найпростіші реактивні фільтри.**



**Рис.5.2.** Ланки реактивних фільтрів: а – узагальнена схема; б – ФНЧ; в – ФВЧ; г – СФ; д – ЗФ

Зауважимо, що добуток реактивних опорів горизонтального та вертикального плечей Г-ланки є величиною сталою, тобто  $X_h \cdot X_v = K^2$ , де К – довільне число. Тому такі фільтри називають фільтрами типу К.

Перевагою фільтрів типу К є простота їхньої схеми, проте їхні амплітудно-частотні характеристики мають надто пологі схили і тому не забезпечують чіткої межі між смугою пропускання та смугою запирання. Вхідний та вихідний опори таких фільтрів істотно залежать від частоти, що не дає змогу забезпечити умови узгодження з резистивним опором навантаження та з резистивним опором генератора сигналу.

Крім того, оскільки реальні конденсатори та індуктивні котушки мають певні втрати, то у смузі пропускання сигнали теж зазнають певного послаблення.

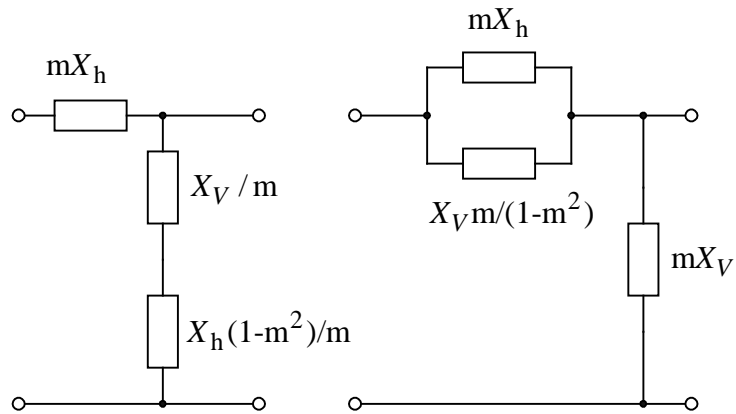
Внаслідок цього амплітудно-частотні характеристики реальних фільтрів типу К істотно відрізняються від характеристик ідеальних фільтрів, зображених на рис. 5.1.

Недоліки фільтрів типу К значною мірою усуваються у фільтрах типу m.

Принцип побудови фільтрів типу m полягає у перерозподілі реактивних опорів у горизонтальних та вертикальних гілках фільтрів типу К, які називають прототипами. У результаті отримують два варіанти фільтрів типу m: послідовно-похідні та паралельно-похідні (див. рис. 5.3).

**Фільтри типу m усувають недоліки, наявні у фільтрах типу К. Їх будують, модифікуючи схеми прототипів – фільтрів типу К.**





**Рис. 5.3.** Фільтри типу  $m$ : а – послідовно-похідний; б – паралельно-похідний

Характеристики фільтрів типу  $m$  істотно залежать від вибору значення коефіцієнта  $m$ , який може набувати значення від 0 до 1. Зауважимо, що при  $m=1$  фільтр типу  $m$  перетвориться на фільтр типу К.

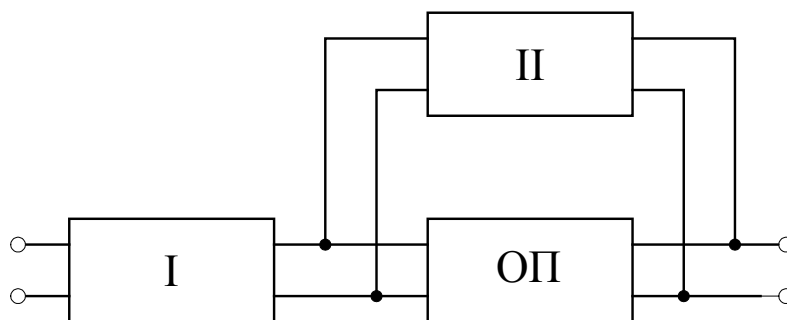
Фільтри типу  $m$  забезпечують чіткіше розділення смуг пропускання та запирання, а також практично сталі значення вхідного і вихідного опорів, що полегшує умови узгодження.

На закінчення зауважимо, що пасивні реактивні фільтри широко застосовуються для фільтрації сигналів у діапазоні високих частот (вищих від 100 кГц), де значення індуктивностей є порівняно невеликими і їхні габарити теж невеликі, тому фільтри конструктивно виготовляють компактними, зручними для практичного застосування.

### 5.1.2. Активні RC-фільтри

На порівняно низьких частотах, нижчих за 100 кГц, де реактивні фільтри набувають значних габаритів внаслідок збільшення значень індуктивностей, широко застосовуються активні RC-фільтри, до складу яких входять  $R$ - і  $C$ -елементи, а також малогабаритні операційні підсилювачі, виконані у вигляді інтегральних мікросхем. Операційні підсилювачі мають великий вхідний (десятки – сотні кОм) і низький вихідний опір (десятки – сотні Ом) та великий коефіцієнт підсилення напруги (десятки тисяч – сотні тисяч).

Узагальнена схема активного RC-фільтра з операційним підсилювачем зображена на рис. 5.4.



**Рис.5.4.** Узагальнена схема активного RC-фільтра

Операційний підсилювач (ОП) увімкнута так, що він підсилює сигнал і повертає фазу на  $180^\circ$ , а RC-чотириполосники I та II забезпечують потрібну форму амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) фільтра загалом.

**Операційний підсилювач – невід’ємна складова сучасних активних фільтрів.**

Аналіз узагальненої схеми активного RC-фільтра показує, що передавальна функція напруги активного фільтра визначається відношенням операторних передавальних провідностей чотириполосників I та II, які можна записати у вигляді поліномів. Отже, вибираючи відповідно

схеми і параметри чотирьох полюсників I і II, можна реалізувати фільтр будь-якого типу (ФНЧ, ФВЧ, СФ, ЗФ).

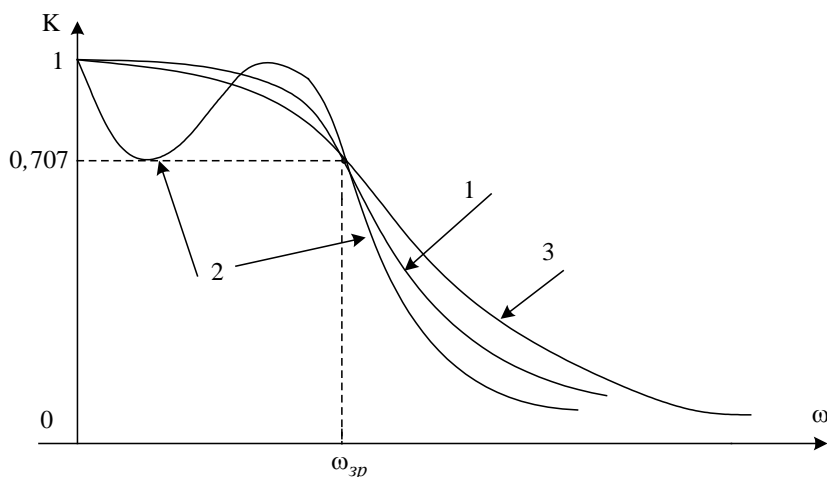
Проектуючи активні фільтри, спочатку задаються бажаною формою АЧХ фільтра, а відтак наближено описують (апроксимують) операторну передавальну функцію алгебричними поліномами.

Залежно від виду полінома розрізняють фільтри Баттерворта, Чебишова, Бесселя тощо.

Фільтри Баттерворта забезпечують найкращу рівномірність АЧХ у смузі пропускання та достатньо стрімкі схили. Фільтри Чебишова забезпечують певну хвилястість АЧХ у смузі пропускання і стрімкіші схили, ніж фільтри Баттерворта.

Фільтри Бесселя забезпечують лінійну фазочастотну характеристику, проте стрімкість схилів АЧХ є меншою, ніж у фільтрів Баттерворта і Чебишова.

На рис. 5.5 зображено якісно АЧХ ФНЧ трьох розглянутих типів з однаковою смугою пропускання, звідки бачимо їхні властивості.



**Рис. 5.5.** Амплітудно-частотні характеристики ФНЧ: 1 – Баттерворта; 2 – Чебишова; 3 – Бесселя

## 5.2. Підсилення сигналів

### 5.2.1. Класифікація, основні параметри та характеристики підсилювачів

Функцію підсилення сигналів реалізують підсилювачі. **Підсилювачем** називають пристрій, призначений для збільшення потужності вхідного сигналу. Принцип дії підсилювача ґрунтується на перетворенні енергії джерела живлення на енергію сигналу. Основним елементом підсилювача є підсилювальний елемент (транзистор, електронна лампа тощо), який дає змогу керувати енергією джерела живлення при малих затратах енергії на вході підсилювача.

**Підсилення сигналів можливе завдяки перетворенню частини енергії джерела постійної напруги на енергію сигналу.**

Спільною властивістю різноманітних підсилювачів слабких сигналів (сигналів з малою амплітудою) є те, що в них підсилювальні елементи працюють у лінійному режимі, тобто використовуються невеликі ділянки їхніх вольтамперних характеристик, що дає змогу лінеаризувати відповідні залежності і використовувати для аналізу таких підсилювачів теорію лінійного чотирьох полюсника.

Найважливішим показником підсилювача є діапазон частот, які він може підсилювати. В усіх підсилювачах діапазон частот обмежений зверху, оскільки на високих частотах погіршуються підсилювальні властивості транзисторів, ламп та інших підсилювальних елементів внаслідок впливу паразитних міжелектродних ємностей, паразитних індуктивностей виводів електродів, інерційності носіїв заряду, а також впливу паразитних ємностей монтажу.

Залежно від властивостей підсилювача в діапазоні низьких частот розрізняють:

- підсилювачі постійного струму, які підсилюють сигнали як завгодно низьких частот, зокрема постійну складову. Звичайно їх будують з гальванічними зв'язками між каскадами;
- підсилювачі змінного струму, частотний діапазон яких обмежений також з боку низьких частот.

Залежно від ширини діапазону частот, які може підсилювати підсилювач, розрізняють:

– вузькосмугові підсилювачі, у яких нижня та верхня граничні частоти мало відрізняються між собою і, отже, підсилювач, призначений для виділення та підсилення вузької смуги частот, яка може міститися як в діапазоні низьких, так і високих частот;

**Основні параметри лінійних підсилювачів.**

– широкосмугові підсилювачі, у яких нижня та верхня граничні частоти дуже різняться між собою і можна вважати, що ширина їхнього частотного діапазону є співмірною із середньою частотою цього діапазону.

Розглядаючи підсилювач як лінійний прохідний чотириполосник, можна описати його за допомогою таких параметрів:

– комплексний коефіцієнт підсилення напруги

$$\underline{K}_u = \dot{U}_{m \text{ вих}} / \dot{U}_{m \text{ вх}} = (U_{m \text{ вих}} / U_{m \text{ вх}}) \exp(\varphi_{u \text{ вих}} - \varphi_{u \text{ вх}}); \quad (5.7)$$

– комплексний коефіцієнт підсилення струму

$$\underline{K}_i = \dot{I}_{m \text{ вих}} / \dot{I}_{m \text{ вх}} = (I_{m \text{ вих}} / I_{m \text{ вх}}) \exp(\varphi_{i \text{ вих}} - \varphi_{i \text{ вх}}); \quad (5.8)$$

– коефіцієнт підсилення потужності

$$K_p = P_{\text{вих}} / P_{\text{вх}}; \quad (5.9)$$

– комплексний вхідний опір

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \dot{U}_{m \text{ вх}} / \dot{I}_{m \text{ вх}} = (U_{m \text{ вх}} / I_{m \text{ вх}}) \exp(\varphi_{u \text{ вх}} - \varphi_{i \text{ вх}}); \quad (5.10)$$

– комплексний вихідний опір

$$\underline{Z}_{\text{вих}} = \dot{U}_{m \text{ вих}} / \dot{I}_{m \text{ вих}} = (U_{m \text{ вих}} / I_{m \text{ вих}}) \exp(\varphi_{u \text{ вих}} - \varphi_{i \text{ вих}}). \quad (5.11)$$

У наведених виразах позначено:  $U_{m \text{ вх}}$ ,  $U_{m \text{ вих}}$ ,  $I_{m \text{ вх}}$ ,  $I_{m \text{ вих}}$  амплітуди напруг та струмів на вході та виході підсилювача;  $\varphi_{u \text{ вх}}$ ,  $\varphi_{u \text{ вих}}$ ,  $\varphi_{i \text{ вх}}$ ,  $\varphi_{i \text{ вих}}$  – початкові фази напруг та струмів на вході та виході підсилювача;  $P_{\text{вих}}$  – вихідна потужність підсилювача, яку він віддає у навантаження;  $P_{\text{вх}}$  – потужність, яку споживає підсилювач від джерела вхідного сигналу.

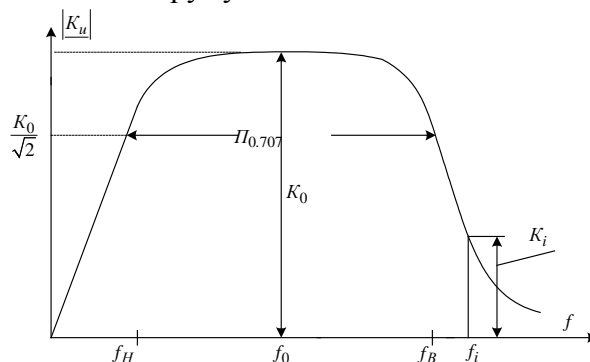
Додатковими параметрами підсилювачів є потужність  $P_0$ , яку споживає підсилювач від джерела живлення, та коефіцієнт корисної дії  $\eta = P_{\text{вих}} / P_0$ . Ці параметри використовують переважно для характеристики потужних підсилювачів.

До основних характеристик підсилювачів належать:

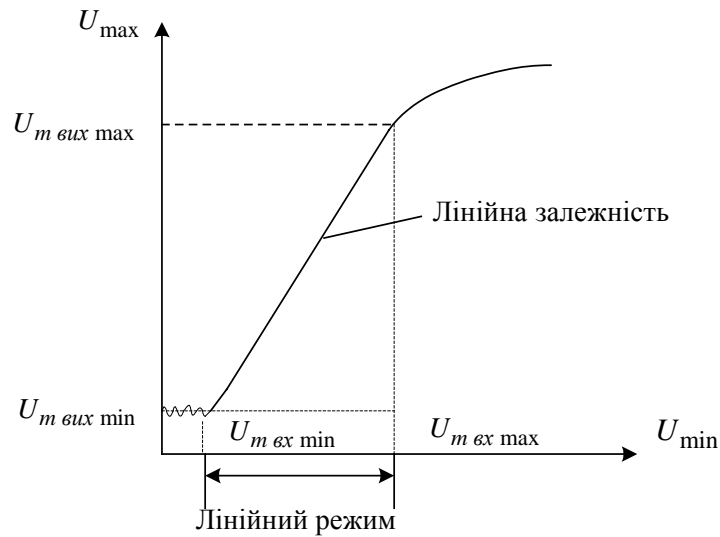
– амплітудно-частотна (АЧХ) та фазочастотна (ФЧХ) характеристики, які відображають частотну залежність модуля та аргументу комплексного коефіцієнта підсилення;

– амплітудна характеристика  $U_{m \text{ вих}} = f(U_{m \text{ вх}})$ , яка являє собою залежність амплітуди  $U_{m \text{ вих}}$  вихідного сигналу від амплітуди  $U_{m \text{ вх}}$ , тобто вона характеризує динамічний діапазон підсилювача.

На рис. 5.6 та рис. 5.7 відповідно зображено типовий вигляд АЧХ та амплітудної характеристик підсилювача змінного струму.



**Рис. 5.6.** Типовий вигляд АЧХ підсилювача



**Рис. 5.7.** Типовий вигляд амплітудної характеристики підсилювача

На підставі АЧХ підсилювача (рис.5.6) визначають такі додаткові параметри:

- смугу пропускання  $\Pi$  на заданому рівні (звичайно на рівні  $K_o/\sqrt{2} \approx 0,707 K_o$ ) і нижню  $f_n$  та верхню  $f_v$  граничні частоти;

**Частотні спотворення змінюють форму складного сигналу, проте не приводять до появи нових спектральних складових.**

- коефіцієнт частотних спотворень  $M_i$  на вибраній частоті  $f_i$ , який дорівнює відношенню номінального коефіцієнта підсилення  $K_o$  до коефіцієнта підсилення  $K_i$  на частоті  $f_i$ :  $M_i = K_o/K_i$ .

Зауважимо, що частотні спотворення зумовлені нерівномірністю АЧХ та нелінійністю ФЧХ, які є наслідком наявності у схемі підсилювача реактивних елементів з частотозалежним опором (ємностей та індуктивностей). Частотні спотворення приводять до зміни форми сигналу, який проходить через підсилювач, оскільки при цьому різні спектральні складові сигналу підсилюються по-різному.

На підставі амплітудної характеристики підсилювача (рис.5.8) визначають:

- чутливість підсилювача, яку визначає мінімальна амплітуда вхідного сигналу  $U_{m \text{ вх min}} = U_{m \text{ вих min}}/K_o$ , що перевищує рівень власних шумів підсилювача;

- динамічний діапазон  $D$  підсилювача як відношення максимальної амплітуди вихідного сигналу  $U_{m \text{ вих max}}$ , за якого ще зберігається лінійна залежність між амплітудами  $U_{m \text{ вих}}$  і  $U_{m \text{ вх}}$ , до мінімальної вихідної амплітуди  $U_{m \text{ вих min}}$ , обмеженої рівнем власних шумів підсилювача:

$$D = U_{m \text{ вих max}} / U_{m \text{ вих min}}$$

Зауважимо, що причиною власних шумів підсилювача є теплові шуми резисторів та власні шуми підсилювальних елементів (транзисторів, електронних ламп), які практично неможливо усунути.

**Нелінійні спотворення приводять до появи нових спектральних складових у спектрі вихідного сигналу.**

Нелінійна залежність між амплітудами вхідного і вихідного сигналів, яка виникає за максимальних значень цих амплітуд (рис.5.8), зумовлена нелінійністю вольтамперних характеристик електронних елементів, які наявні у схемі підсилювача (діодів, транзисторів, електронних ламп). При цьому виникають нелінійні спотворення гармонічного сигналу, які проявляються у появі на виході підсилювача, крім основної гармоніки, ще і вищих гармонік (другої, третьої і т.д.) з кратними частотами.

Кількісну оцінку нелінійних спотворень визначає коефіцієнт нелінійних спотворень  $K_r$ , значення якого розраховують за формулою:

$$K_{\Gamma} = \sqrt{\sum_{k=2} U_{m_k}^2} / U_{m_1}, \quad (5.12)$$

де  $U_{m_k}$  – амплітуди вищих гармонік вихідного сигналу ( $k=2,3,\dots,n$ );  $U_{m_1}$  – амплітуда основної гармоніки вихідного сигналу.

### 5.2.2. Елементарні підсилювальні каскади

Елементарні підсилювальні каскади – підсилювачі, побудовані на одному біполярному чи уніполярному (польовому) транзисторі. Усі елементарні каскади підсилюють потужність, причому це може здійснюватися як за рахунок одночасного підсилення струму і напруги, так і за рахунок підсилення лише напруги або лише струму. Залежно від того, яку величину підсилює підсилювач, елементарні каскади розділяють на три групи:

- 1) підсилювальні каскади – підсилюють одночасно струм та напругу;

*Три можливі способи вмикання транзисторів у схему підсилювального каскаду.*

- 2) повторювачі напруги – підсилюють струм і передають напругу на вихід без підсилення;
- 3) повторювачі струму – підсилюють напругу і передають на вихід струм без підсилення.

Елементарні підсилювальні каскади працюють у режимі слабких сигналів, які не виходять за межі лінійних ділянок вольтамперних характеристик транзисторів.

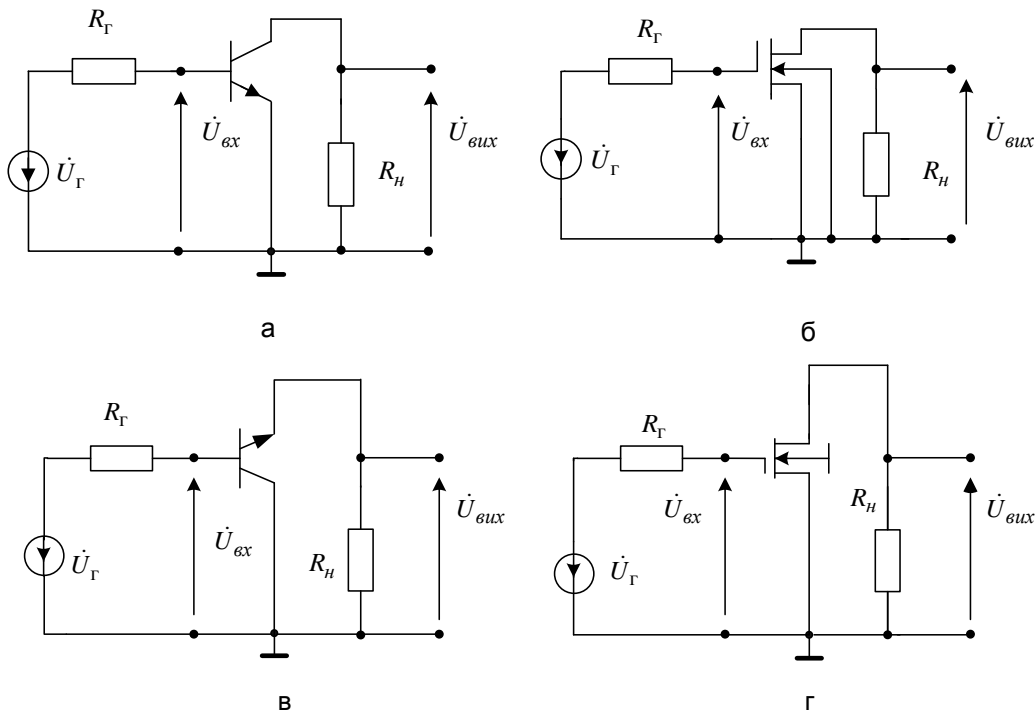
Залежно від способу вмикання транзисторів у схему підсилювального каскаду розрізняють такі елементарні каскади:

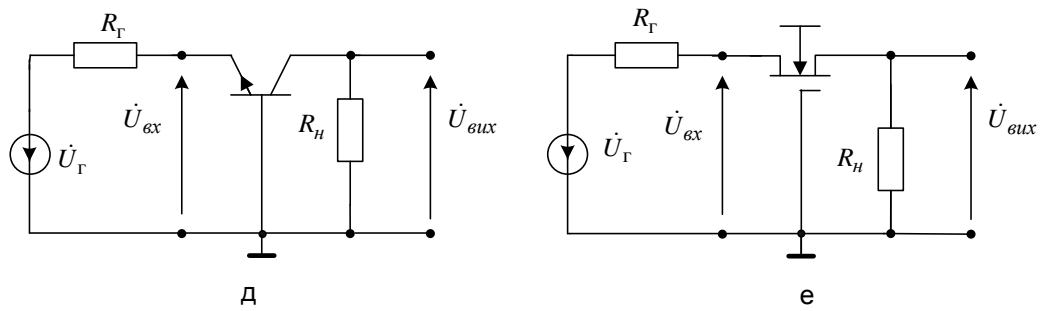
- а) у разі використання біполярних транзисторів:

– каскади зі спільним емітером (СЕ), зі спільним колектором (СК) та зі спільною базою (СБ);

б) у разі використання уніполярних транзисторів: каскади із спільним витоком (СВ), із спільним стоком (СС) та із спільним затвором (СЗ).

На рис.5.8 зображено малосигнальні еквівалентні схеми елементарних каскадів при різних способах вмикання біполярного (типу n-p-n) та уніполярного n-канального транзистора у схему підсилювача.



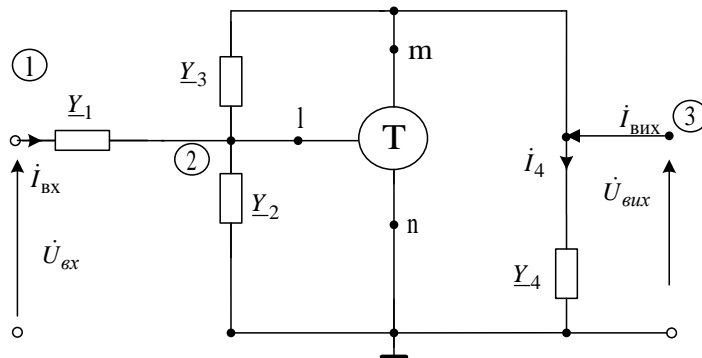


**Рис.5.8.** Малосигнальні еквівалентні схеми елементарних підсилювальних каскадів: а – СЕ; б – СВ; в – СК; г – СС; д – СБ; е – СЗ

Для розрахунку основних характеристик елементарних каскадів використовуємо узагальнену схему (рис.5.9), на якій транзистор зображено у вигляді лінійного триполосника із зовнішніми виводами 1, m, n та комплексні провідності  $Y_1...Y_4$  зовнішніх елементів схеми, які також можуть моделювати вплив паразитних ємностей монтажу та міжелектродних ємностей транзисторів. Матриця комплексних провідностей транзистора має вигляд:

	1	m	n
1	$Y_{11}$	$Y_{1m}$	$Y_{1n}$
m	$Y_{m1}$	$Y_{mm}$	$Y_{mn}$
n	$Y_{n1}$	$Y_{nm}$	$Y_{nn}$

Нагадаємо, що сума елементів кожного рядка та стовпця цієї матриці дорівнює нулеві. Отже, із дев'яти елементів незалежними є чотири елементи.



**Рис.5.9.** Узагальнена схема елементарного підсилювального каскаду

**Використання матрицевого числення для розрахунку основних характеристик підсилювального каскаду.**

Звертаючись до узагальненої схеми (рис. 5.9), бачимо, що залежно від способу вмикання транзистора виводам 1, m, n відповідають різні електроди транзистора (див. табл. 5.1).

Таблиця 5.1.

Схема	Зовнішні виводи		
	1	m	n
СЕ	база	колектор	емітер
СК	база	емітер	колектор
СБ	емітер	колектор	база
СВ	заслін	стік	витік
СС	заслін	витік	стік
СЗ	витік	стік	заслін

Матриця провідностей узагальненої схеми має вигляд

	1	2	3
1	$\underline{Y}_1$	$-\underline{Y}_1$	-
2	$-\underline{Y}_1$	$\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_{11}$	$\underline{Y}_{1m} - \underline{Y}_3$
3	-	$\underline{Y}_{m1} - \underline{Y}_3$	$\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_{mm}$

На підставі наведеної матриці отримуємо формули для розрахунку основних характеристик каскаду:

$$\underline{K}_u = \dot{U}_{\text{вux}} / \dot{U}_{\text{ex}} = \Delta_{13} / \Delta_{11}; \quad (5.13)$$

$$\underline{K}_i = \dot{I}_4 / \dot{I}_{\text{ex}} = \Delta_{13} \cdot \underline{Y}_4 / \Delta; \quad (5.14)$$

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = \dot{U}_{\text{ex}} / \dot{I}_{\text{ex}} = \Delta_{11} / \Delta; \quad (5.15)$$

$$\underline{Z}_{\text{вux}} = \dot{U}_{\text{вux}} / \dot{I}_{\text{вux}} = \Delta_{11,33} / \Delta_{11}; \quad (5.16)$$

У наведених формулах детермінант матриці провідностей  $\Delta$  та алгебричні доповнення  $\Delta_{ij}, \Delta_{ii}, \Delta_{jj}$  описують вирази:

$$\Delta = \underline{Y}_1 [(\underline{Y}_4 + \underline{Y}_{mm}) \cdot (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_{11}) + \underline{Y}_3 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{1m} + \underline{Y}_{ml}) - \underline{Y}_{1m} \underline{Y}_{ml}];$$

$$\Delta_{11} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_{11}) \cdot (\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_{mm}) - (\underline{Y}_{ml} - \underline{Y}_3) (\underline{Y}_{1m} - \underline{Y}_3);$$

$$\Delta_{13} = -\underline{Y}_1 (\underline{Y}_{ml} - \underline{Y}_3);$$

$$\Delta_{11,33} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_{11}.$$

Підставляючи у наведені співвідношення значення параметрів транзисторів та провідностей зовнішніх елементів  $\underline{Y}_1 \dots \underline{Y}_4$ , можна дослідити властивості елементарних каскадів з різними способами вмикання транзисторів. Такий аналіз дає підстави зробити висновки:

1) Каскади СЕ та СВ підсилюють одночасно напругу і струм та змінюють полярність сигналу.

2) Каскади СК та СС підсилюють струм і за умови відповідного вибору параметрів елементів забезпечують коефіцієнт передавання напруги, близький до одиниці. Тому їх називають відповідно емітерним та витоковим повторювачем напруги. Обидва каскади не змінюють полярності сигналу, мають високий вхідний та низький вихідний опір. Завдяки цьому їх використовують у ролі буферних каскадів, які дають змогу узгодити високоомне джерело сигналу з низькоомним навантаженням.

3) Каскади СБ та СЗ підсилюють напругу та передають струм з коефіцієнтом передавання, близьким до одиниці, у зв'язку з чим їх називають повторювачами струму. Ці каскади не змінюють полярності сигналу і мають низький вхідний та високий вихідний опір. Підсилення напруги досягається лише за виконання умови, що опір навантаження більший від внутрішнього опору джерела сигналу.

Аналіз властивостей елементарних каскадів у діапазоні високих частот (з урахуванням впливу інерційності транзисторів та паразитних міжелектродних ємностей транзисторів та ємностей монтажу) виявляє такі особливості:

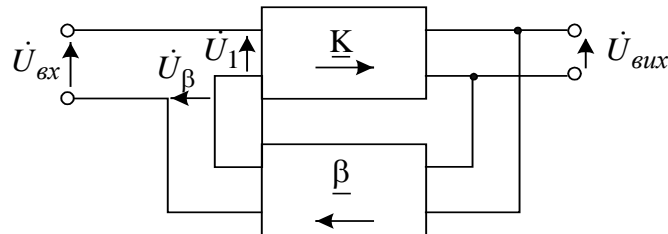
1) високочастотні спотворення сигналів у каскаді СЕ зумовлені переважно впливом ємності навантаження та інерційності транзистора, а в каскаді СВ – впливом ємності навантаження. Вхідний та вихідний опори каскадів СЕ та СВ мають резистивно-ємнісний характер;

2) причинами високочастотних спотворень сигналів в каскадах СК та СС є ті самі причини, що і в каскадах СЕ та СВ. Вхідний та вихідний опори мають теж резистивно-ємнісний характер, проте за певних умов може з'явитись від'ємна резистивна складова у вхідному опорі та викликати нестійкість (самозбудження) каскаду;

3) каскади СБ та СЗ забезпечують в діапазоні високих частот менші спотворення, ніж каскади СЕ та СВ, оскільки низькоомний вхідний опір зменшує вплив паразитної ємності на вході каскаду.

### 5.2.3. Зворотні зв'язки в підсилювачах

Часто в підсилювальних каскадах застосовують зворотний зв'язок для покращання їхніх характеристик. Суть застосування зворотного зв'язку полягає у тому, що частина вихідного сигналу підсилювача через чотириполіусник зворотного зв'язку підводиться знову до входу, внаслідок чого результуючий вхідний сигнал у певний спосіб змінюється, що впливає на основні характеристики підсилювача (коефіцієнт підсилення, вхідний опір тощо).



**Рис.5.10.** Послідовно-паралельний зворотний зв'язок

Найпоширенішим видом зворотного зв'язку в підсилювачах є послідовно-паралельний зв'язок, який зображений на рис.5.10, де позначено:

$\underline{K}$  – комплексний коефіцієнт підсилення напруги підсилювального каскаду за відсутності зворотного зв'язку ( $\underline{K} = \dot{U}_{вих} / \dot{U}_1$ );

$\underline{\beta}$  – комплексний коефіцієнт передавання напруги чотириполіусника зворотного зв'язку ( $\underline{\beta} = \dot{U}_\beta / \dot{U}_{вих}$ ).

Із рис. 5.10 бачимо, що напруга зворотного зв'язку  $\dot{U}_\beta$  подається у вхідне коло послідовно з вхідною напругою, а вхід чотириполіусника зворотного зв'язку під'єднаний паралельно до виходу підсилювального каскаду.

Для цієї схеми справедливі співвідношення:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{вих} + \dot{U}_\beta, \tag{5.17a}$$

**Комплексний коефіцієнт підсилення напруги підсилювача, охопленого зворотним зв'язком, залежить від петльового підсилення.**

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{вих} / \underline{K}, \tag{5.17б}$$

$$\dot{U}_\beta = \dot{U}_{вих} \cdot \underline{\beta} = \underline{\beta} \underline{K} \dot{U}_1 \tag{5.17в}$$

На підставі наведених співвідношень отримуємо формулу для визначення комплексного коефіцієнта підсилення напруги підсилювача, охопленого зворотним зв'язком:

$$K_{зв} = \underline{K} / (1 - \underline{\beta} \underline{K}). \tag{5.18}$$

Добуток  $\underline{\beta} \cdot \underline{K}$  характеризує сумарний комплексний коефіцієнт передавання напруги  $\dot{U}_1$  через власне підсилювач та чотириполіусник зворотного зв'язку. Тому часто його називають



коефіцієнтом петльового підсилення. Враховуючи, що  $\underline{K}$  та  $\underline{\beta}$  в загальному випадку є комплексними числами, тобто  $\underline{K} = K \cdot e^{j\varphi_K}$ ;  $\underline{\beta} = \beta e^{j\varphi_\beta}$ , можемо записати:

$$\underline{\beta K} = \beta K \cdot e^{j(\varphi_K + \varphi_\beta)}. \quad (5.19)$$

**За наявності додатного зворотного зв'язку підсилювач може самозбудитись.**

Якщо  $\varphi_K + \varphi_\beta = 0$  або  $2\pi$ , то як випливає з (5.17в), напруга зворотного зв'язку  $\dot{U}_\beta$  та напруга  $\dot{U}_1$  збігаються за фазою. Такий зворотний зв'язок називають **додатним**.

При цьому, як випливає з (5.18), комплексний коефіцієнт підсилення  $\underline{K}_{зв}$  зростає порівняно з  $\underline{K}$ :

$$\underline{K}_{зв} = \underline{K} / (1 - \beta K). \quad (5.20)$$

Зауважимо, що звичайно  $0 \leq \beta K \leq 1$ .

Якщо ж  $\varphi_K + \varphi_\beta = \pi$ , то добуток  $\underline{\beta K}$  є дійсним від'ємним числом і на підставі (5.17в) робимо висновок, що напруги  $\dot{U}_\beta$  та  $\dot{U}_1$  протилежні за фазою. Такий зворотний зв'язок називають **від'ємним**. У такому разі коефіцієнт підсилення  $\underline{K}_{зв}$  зменшується порівняно з  $\underline{K}$ :

**Від'ємний зворотний зв'язок покращує ряд характеристик підсилювача.**

$$\underline{K}_{зв} = \underline{K} / (1 + \beta K). \quad (5.21)$$

Глибший аналіз показує, що додатний зворотний зв'язок має істотний недолік: збільшуючи коефіцієнт підсилення, він може призвести при  $\beta K \rightarrow 1$  до самозбудження підсилювача ( $\underline{K}_{зв} \rightarrow \infty$ ). Це означає, що підсилювач втрачає функцію підсилення і стає генератором коливань. Тому практично у підсилювачах додатний зворотний зв'язок не застосовують.

Хоч від'ємний зворотний зв'язок дещо зменшує коефіцієнт підсилення, проте він надає підсилювачеві корисні властивостей: розширює смугу пропускання підсилювача і покращує рівномірність його амплітудно-частотної та лінійність фазочастотної характеристики, забезпечуючи умови підсилення сигналів без спотворень. Водночас зменшується вплив нестабільності параметрів підсилювальних елементів на значення коефіцієнта підсилення, зменшуються нелінійні спотворення та послаблюється вплив внутрішніх шумів підсилювача (покращується відношення сигнал/шум на виході підсилювача).

Зокрема, послідовно-паралельний від'ємний зворотний зв'язок збільшує вхідний опір підсилювача та зменшує його вихідний опір і тим самим покращує умови ланцюгового з'єднання підсилювальних каскадів.

Завдяки цьому від'ємний зворотний зв'язок широко застосовують в сучасних підсилювачах.

### 5.3. Перетворення частоти в нелінійних електронних колах

Частотні перетворення у нелінійних електронних колах зумовлені нелінійною залежністю між струмами та напругами нелінійних компонент кола. Для прикладу розглянемо нелінійний резистор, вольтамперну характеристику якого у загальному випадку запишемо так:

$$i = f(u). \quad (5.22)$$

Якщо прикладена до резистора напруга має синусоїдний характер з частотою  $\omega$ , то струм визначається формулою

$$i(t) = f(U_m \cos \omega t), \quad (5.23)$$

тобто він зберігає періодичність, але його форма буде відрізнятися від гармонічної. У результаті цього відповідний спектр може містити складові з частотами  $k\omega$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Виділивши із

спектра струму гармоніку із заданим значенням  $k$ , частотною фільтрацією досягаємо **помноження частоти** на ціле число  $k$ .

Ще різноманітніший спектр струму у нелінійному резисторі отримується, якщо до нього прикласти напругу, що у спектрі якої дві частоти

$$u(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t. \quad (5.24)$$

У такому разі, розклавши функцію  $f(u)$  у ряд Тейлора

$$i(t) = i_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots \quad (5.25)$$

і використавши формули піднесення до степеня суми, а також виконавши певні тригонометричні перетворення, бачимо, що спектр струму містить гармоніки, частоти яких визначаються співвідношенням:

**Види перетворення частоти:**

- помноження частоти;
- утворення комбінаційних частот;
- зміщення спектра сигналу.

$$\begin{aligned} \omega &= k\omega_1 \pm m\omega_2 \\ k, m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (5.26)$$

Зауважимо, що частоти, визначені формулою (5.26), називаються **комбінаційними**, а саме їхнє утворення називаємо **змішуванням частоти**. Останній процес має важливе практичне застосування, окремий випадок якого буде розглянутий нижче.

Зауважимо, що як нелінійний елемент може використовуватись не тільки резистор, а й конденсатор чи котушка індуктивності.

**Окремий випадок** перетворення частоти полягає у **зміщенні** спектра сигналу вздовж шкали частоти у бік вищих або нижчих частот за умови збереження співвідношень між амплітудами та фазами спектральних складових сигналу. Таке перетворення частоти реалізують на підставі принципу гетеродинування, тобто перемноження сигналу на допоміжне гармонічне коливання, що утворюється допоміжним генератором-гетеродином.

Пояснимо сказане на прикладі перетворення частоти амплітудно-модульованого сигналу, спектр якого складається у простішому випадку із трьох спектральних складових:

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= A_{m0} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} M A_{m0} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi] + \\ &+ \frac{1}{2} M A_{m0} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi], \end{aligned} \quad (5.27)$$

де  $A_{m0}$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$  – відповідно амплітуда, частота та початкова фаза несучого коливання;  $\Omega$ ,  $\Phi$  – частота та початкова фаза модулюючого гармонічного коливання;  $M$  – коефіцієнт модуляції.

Прийmemo, що гетеродин генерує коливання

$$s_r(t) = A_{mr} \cos(\omega_r t). \quad (5.28)$$

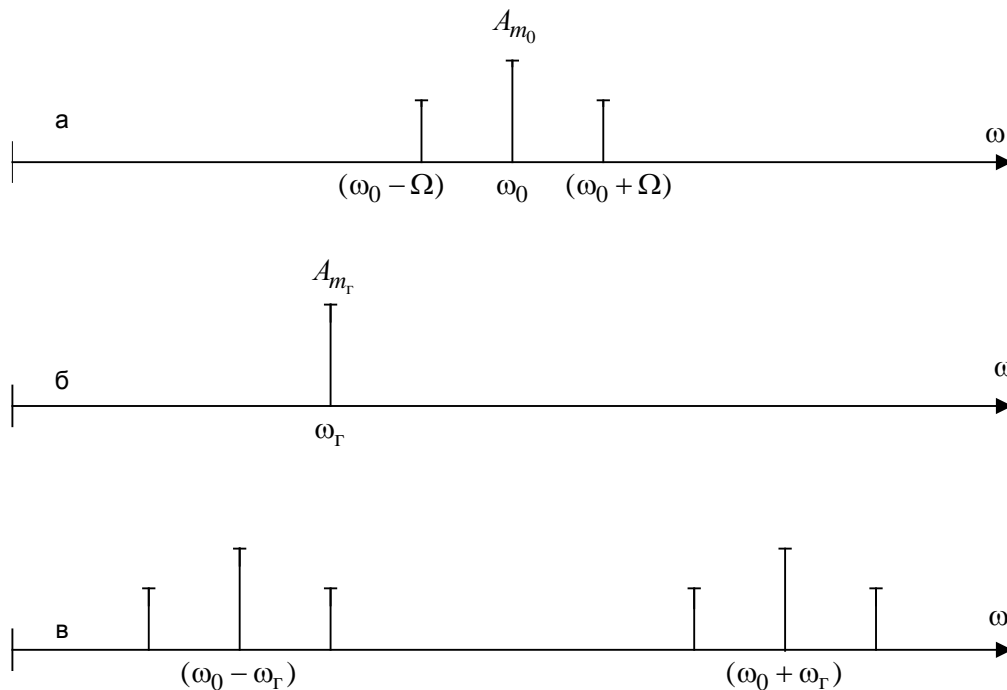
Після перемноження АМ-сигналу на коливання гетеродина отримуємо шість спектральних складових:

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) \cdot s_r(t) &= \frac{1}{2} A_{m0} A_{mr} \cos[(\omega_0 + \omega_r)t + \varphi_0] + \\ &+ \frac{1}{4} M A_{m0} A_{mr} \cos[(\omega_0 + \omega_r + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi] + \\ &+ \frac{1}{4} M A_{m0} A_{mr} \cos[(\omega_0 + \omega_r - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi] + \\ &+ \frac{1}{2} A_{m0} A_{mr} \cos[(\omega_0 - \omega_r)t + \varphi_0] + \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} M A_{m_0} A_{m_r} \cos[(\omega_0 - \omega_r + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi] + \\
& + \frac{1}{4} M A_{m_0} A_{m_r} \cos[(\omega_0 - \omega_r - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi].
\end{aligned}$$

Перші три складові утворюють у сумі АМ-сигнал, спектр якого зміщений стосовно спектра первинного АМ-сигналу в бік вищих частот на величину  $\omega_r$ , а інші три складові теж утворюють АМ-сигнал, спектр якого зміщений стосовно спектра первинного АМ-сигналу в бік нижчих частот на величину  $\omega_r$ . Значення амплітуди гетеродина  $A_{m_r}$  відіграє роль коефіцієнта пропорційності, на який множаться амплітуди всіх складових. Співвідношення між фазами складових спектра теж зберігається. Зауважимо, що спектральні складові з сумарними та різницевиими частотами типу  $\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 + \dots$  називають комбінаційними складовими.

Із сказаного випливає, що для побудови амплітудного спектра коливання (5.29) необхідно змістити спектр первинного АМ-сигналу вздовж осі частот на величину  $\omega_r$  один раз в бік вищих частот і один раз – в бік нижчих частот, як показано на рис.5.11.



**Рис. 5.11.** Принцип перетворення частоти.

*а – спектр первинного АМ-сигналу, б – спектр коливання гетеродина, в – спектр добутку АМ-сигналу та коливання гетеродина*

Отже, результатом перемноження  $s_{AM}(t)$  і  $s_r(t)$  є два спектри, рознесені по частоті на величину  $2\omega_r$ . Залежно від того, в бік яких частот потрібно змістити спектр первинного сигналу, виділяють за допомогою смугового фільтра один із спектрів, а інший відсіюють.

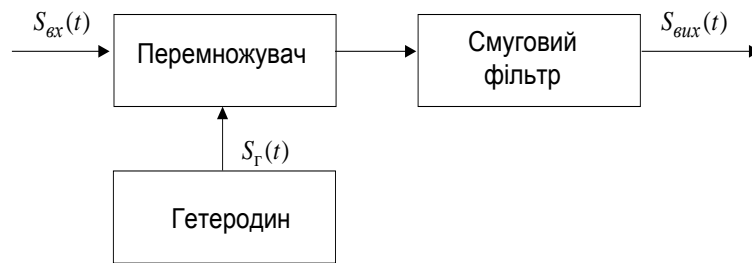
Такий перетворювач частоти складається з основних функціональних вузлів:

а) генератора гармонічних коливань (гетеродина), частоту якого можна змінювати для зміщення спектра вхідного сигналу на потрібну величину;

б) перемножувача, який реалізує функцію перемноження вхідного сигналу  $s_{вх}(t)$  і коливання гетеродина  $s_r(t)$ ;

в) частотного фільтра, який виділяє спектр сигналу з перетвореними частотами.

Структурна схема перетворювача частоти показана на рис.5.12.



**Рис.5.12.** Структурна схема перетворювача частоти

Функцію перемножувача можуть виконувати нелінійні елементи (транзистори, напівпровідникові діоди, електронні лампи) або спеціальні операційні підсилювачі, виконані у вигляді мікросхем.

**Існує оптимальне значення амплітуди гетеродина, яке забезпечує максимум відношення сигнал/шум.**

Зауважимо, що перетворення частоти часто супроводжується нелінійними спотвореннями, результатом яких є поява паразитних (небажаних) спектральних складових, котрі потрібно відсіювати за допомогою частотних фільтрів.

Основним параметром перетворювача частоти є **крутість перетворення**  $S_{\Pi}$ , яка визначається як відношення амплітуди корисної спектральної складової вихідного струму перемножувача до амплітуди вхідного сигналу.

Наприклад, якщо перетворювач перетворює гармонічну напругу з частотою  $f_{\text{вх}}=100$  кГц на гармонічну напругу з частотою  $f_{\text{вих}}=465$  кГц, причому амплітуда вхідної напруги  $U_{\text{вх}}=100$  мВ, амплітуда спектральної складової струму перемножувача з частотою 465 кГц дорівнює 5 мА, то крутість перетворення дорівнює  $S_{\Pi}=50$  мА/В.

**Основне завдання стабілізаторів напруги та струму – зменшення негативного впливу зовнішніх чинників та процесів старіння елементів на параметри та характеристики електронних кіл .**

Крутість перетворення пропорційна до амплітуди гетеродина, проте значне збільшення амплітуди гетеродина призводить до збільшення кількості паразитних спектральних складових, які відіграють роль шуму і ускладнюють виділення корисних спектральних складових. Тому у кожному конкретному випадку значення амплітуди гетеродина вибирають індивідуально.

### 5.4. Стабілізація напруги та струму

Нестабільність джерел живлення, коливання температури, зміна вологості навколишнього середовища, старіння елементів та інші чинники є причинами зміни параметрів та характеристик функціональних вузлів електронної апаратури. Зменшення негативного впливу перелічених чинників досягають, з одного боку, ізоляцією функціональних вузлів від навколишнього середовища (наприклад, поміщаючи їх у спеціальні камери з стабільною температурою – термостати), а з іншого боку – застосуванням стабілізаторів напруги та струму. Стабілізатори описують відповідними параметрами. Проілюструємо сказане на прикладі стабілізаторів напруги.

Стабілізатором напруги називають електронну схему (прохідний чотириполосник), номінальна напруга на виході якого  $U_{\text{вих}}$  підтримується практично незмінною за заданих допустимих відхилень від номінальних значень напруги  $U_{\text{вх}}$  на вході стабілізатора, струму  $I_{\text{вих}}$  (чи опору навантаження  $R_{\text{н}}$ ) на виході стабілізатора, а також температури  $T$  навколишнього середовища.

Отже вихідна напруга стабілізатора залежить від перелічених чинників, тобто  $U_{\text{вих}}=f(U_{\text{вх}}, I_{\text{вих}}, T)$ .

Приріст напруги  $\Delta U_{\text{вих}}$  на виході стабілізатора з урахуванням цієї залежності опишемо співвідношенням:

$$\Delta U_{вих} \cong \frac{\partial U_{вих}}{\partial U_{вх}} \cdot \Delta U_{вх} + \frac{\partial U_{вих}}{\partial I_{вих}} \cdot \Delta I_{вих} + \frac{\partial U_{вих}}{\partial T} \cdot \Delta T \quad (5.30)$$

Частинні похідні у (5.30) при малих приростах величин  $\Delta U_{вх}$ ,  $\Delta I_{вих}$ ,  $\Delta T$  мають такий фізичний зміст:

$\frac{\partial U_{вих}}{\partial U_{вх}} = K_{\Delta}$  – коефіцієнт передавання пульсації вхідної напруги, якщо  $I_{вих} = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ ;

$\frac{\partial U_{вих}}{\partial I_{вих}} = R_i$  – внутрішній опір стабілізатора, якщо  $U_{вх} = \text{const}$ ;  $T = \text{const}$ ;

$\frac{\partial U_{вих}}{\partial T} = \gamma$  – температурний коефіцієнт нестабільності вихідної напруги, якщо  $U_{вх} = \text{const}$ ;  $I_{вих} = \text{const}$ .

Ці параметри дають змогу сформуванню основні характеристики стабілізаторів напруги, які використовують для розрахунку та порівняння різних типів стабілізаторів.

Стабілізатором струму називають електронну схему, яка забезпечує практично стабільний струм  $I_{вих}$  в опорі навантаження  $R_H$  за допустимих змін напруги  $U_{вх}$  на вході стабілізатора, опору навантаження  $R_H$  та температури  $T$  навколишнього середовища.

Отже,  $I_{вих} = f(U_{вх}, R_H, T)$ . Використовуючи цю залежність, можна визначити параметри стабілізатора струму, як і у випадку стабілізатора напруги.

Важливим параметром стабілізаторів напруги та струму є коефіцієнт корисної дії (ККД), який числово дорівнює відношенню потужності на виході стабілізатора до споживаної ним потужності на вході від джерела живлення:

**Регулюючий елемент – обов'язковий елемент схеми стабілізатора напруги (струму).**

$$\eta = P_{вих} / P_{вх} = (U_{вих} I_{вих}) / (U_{вх} I_{вх}). \quad (5.31)$$

Найпоширеніші стабілізатори напруги, тому далі переважно розглядатимемо саме їх.

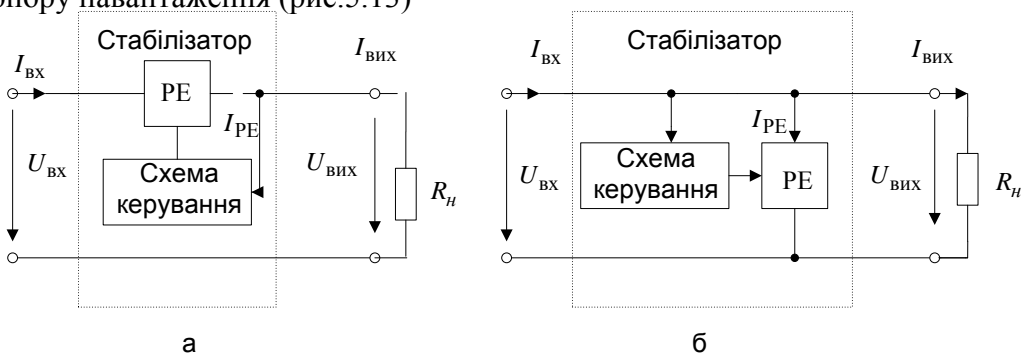
Обов'язковим елементом схеми стабілізатора є регулюючий елемент (РЕ), який призначений для керування вихідною напругою (струмом) стабілізатора.

Залежно від призначення, способу під'єднання та режиму роботи регулюючого елемента, наявності чи відсутності зворотного зв'язку стабілізатори поділяють на такі типи:

- стабілізатори змінної та постійної напруги;
- послідовні та паралельні стабілізатори;
- стабілізатори неперервної та імпульсної дії.
- стабілізатори параметричного та компенсаційного типу.

Стабілізатори змінної напруги призначені для забезпечення на опорі навантаження змінної напруги заданої форми зі стабільними параметрами (наприклад, гармонічної напруги з стабільною амплітудою). Стабілізатори постійної напруги підтримують на виході постійну за величиною та полярністю напругу.

Послідовні та паралельні стабілізатори відрізняються способом під'єднання регулюючого елемента до опору навантаження (рис.5.13)



**Рис.5.13.** Структурні схеми послідовного (а) та паралельного (б)

**Коефіцієнт стабілізації показує, у скільки разів зміна вихідної величини є меншою за зміну вхідної величини, що стабілізується.**

У схемі послідовного стабілізатора (рис.5.13, а) за умови малого споживання струму схемою керування виконується співвідношення:  $I_{\text{вих}} \approx I_{\text{PE}} \approx I_{\text{вх}}$ . Тому, як випливає з (5.31), ККД навантаженого стабілізатора прямує до значення  $\eta \approx U_{\text{вих}}/U_{\text{вх}}$ . Якщо ж навантаження відсутнє ( $I_{\text{вих}}=0$ ), то ККД прямує до 1.

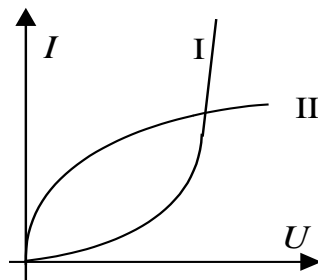
У схемі паралельного стабілізатора (рис.5.13, б) надлишковий струм, створений у вхідному джерелі живлення, відгалужується у РЕ. Тому за умови малого споживання струму схемою керування можемо записати:  $I_{\text{вих}} \approx I_{\text{вх}} - I_{\text{PE}}$ . Внаслідок цього, як бачимо із (5.31), ККД навантаженого стабілізатора ( $U_{\text{вих}} \approx U_{\text{вх}}$ ) прямує до значення  $\eta \approx 1 - I_{\text{PE}}/I_{\text{вх}}$ . У разі відсутності навантаження ( $I_{\text{вих}}=0$ ,  $I_{\text{PE}}=I_{\text{вх}}$ ) ККД прямує до нуля.

Зауважимо, що в схемі послідовного стабілізатора треба передбачати кола захисту РЕ від короткого замикання на виході, бо тоді вся споживана стабілізатором потужність виділяється на РЕ, що може призвести до його перегрівання і виходу з ладу. Паралельний стабілізатор позбавлений цього недоліку.

У стабілізаторах неперервної дії струм через РЕ протікає неперервно. Тому ККД таких стабілізаторів є низьким ( $\eta=0,5\dots0,7$ ).

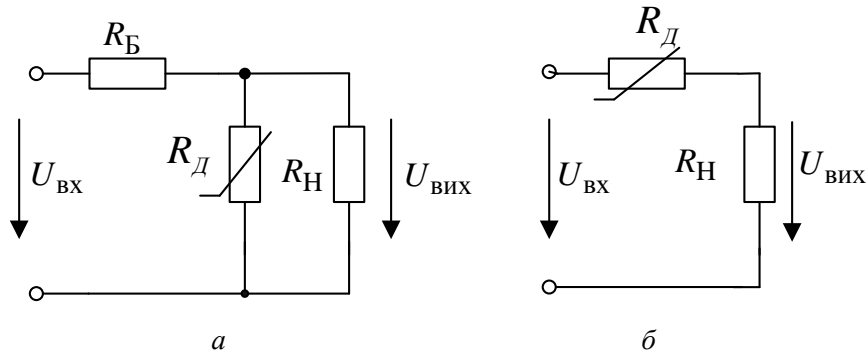
Принцип дії імпульсних стабілізаторів ґрунтується на періодичному (з періодом  $T$ ) під'єднанні на час  $T_1$  до джерела живлення з напругою  $E$  і від'єднанні на час  $T-T_1$ . При цьому РЕ працює у ключовому режимі і струм через нього протікає лише протягом інтервалу  $T_1$ . Внаслідок цього постійна складова напруги на навантаженні дорівнює:  $U_{\text{вих}}=ET_1/T$  і її можна регулювати зміною співвідношення  $T_1/T$ . ККД таких стабілізаторів сягає значень  $\eta=0,85\dots0,95$ . Недоліком таких стабілізаторів є значні пульсації вихідної напруги, для усунення яких вмикають у схему стабілізатора фільтр нижніх частот між ключем і навантаженням і використовують достатньо високу (десятки кГц) частоту перемикавання ключа.

У стабілізаторах параметричного типу стабілізація здійснюється завдяки використанню як РЕ нелінійних компонентів з відповідними вольтамперними характеристиками (ВАХ) – кремнієвих стабілітронів, газових стабілітронів, транзисторів, баретерів тощо. Спосіб увімкнення нелінійного елемента у схему стабілізатора залежить від типу його ВАХ. На рис. 5.14 зображено два типи ВАХ: увігнута (I) та опукла (II).



**Рис.5.14.** Типи ВАХ нелінійних елементів:  
I – увігнута, II – опукла

Обидва типи нелінійних елементів істотно відрізняються значеннями динамічних опорів  $R_{\text{Д}}$ : у першого типу динамічний опір  $R_{\text{ДИ}}$  дуже малий, а у другого  $R_{\text{ДII}}$  – дуже великий. Тому нелінійний елемент першого типу вмикають паралельно до опору навантаження (рис.5.15, а), а нелінійний елемент другого типу – послідовно з опором навантаження (рис.5.15, б).



**Рис.5.15.** Способи вмикання нелінійних елементів у схему стабілізатора параметричного типу

Для забезпечення високих значень коефіцієнта стабілізації значення параметрів елементів повинні задовольняти умови:

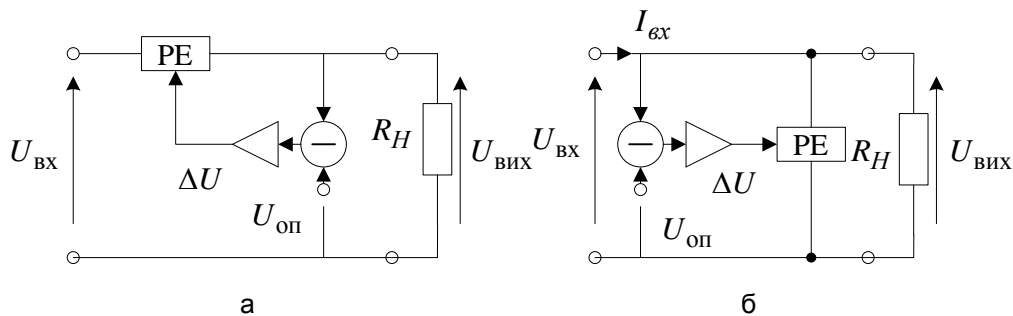
– для схеми рис.5.15, а:  $R_D < R_H < R_B$

– для схеми рис.5.15, б:  $R_D \ll R_H$

У разі виконання наведених умов відхилення вхідної напруги від номінального значення падатимуть відповідно на баластному опорі  $R_B$  та на  $R_{ДП}$ , а вихідна напруга  $U_{вих}$  практично не змінюватиметься.

Основним недоліком стабілізаторів параметричного типу є низький ККД та недостатньо високий коефіцієнт стабілізації, неможливість плавного регулювання значення стабілізованої напруги чи струму, мала вихідна потужність

Стабілізатори компенсаційного типу являють собою електронні схеми з від'ємним зворотним зв'язком, який виконує функцію автоматичного регулювання опору РЕ. У ролі РЕ тут застосовують електронні компоненти, опір яких автоматично змінюється під дією сигналу схеми керування. Такими компонентами слугують транзистори, електровакуумні лампи тощо. Сигнал керування являє собою підсилену у  $K$  разів різницю  $\Delta U$  між вихідною напругою стабілізатора  $U_{вих}$  та еталонною (опорною) напругою  $U_{оп}$ . Сказане ілюструє рис.5.16, на якому показано функціональні схеми компенсаційних стабілізаторів напруги послідовного та паралельного типів.



**Рис.5.16.** Функціональні схеми компенсаційних стабілізаторів:  
а – послідовного типу; б – паралельного типу

Використання у стабілізаторах компенсаційного типу стабільних джерел опорної напруги та підсилювальних елементів з великим коефіцієнтом підсилення забезпечує високу стабільність вихідної напруги, дає змогу плавно регулювати вихідну напругу.

Для послаблення впливу температури навколишнього середовища вмикають в схему стабілізатора термочутливі елементи (терморезистори), які змінюють свій опір залежно від зміни температури навколишнього середовища. Увімкнення таких елементів у коло зворотного зв'язку дає змогу компенсувати зміну вихідної напруги стабілізатора від зміни температури.

### 5.5. Випрямлення змінного струму

Випрямленням змінного струму називають перетворення змінної (гармонічної) напруги промислової частоти 50 Гц на постійну напругу. Реалізує функцію випрямлення електронне коло, яке називають випрямлячем.

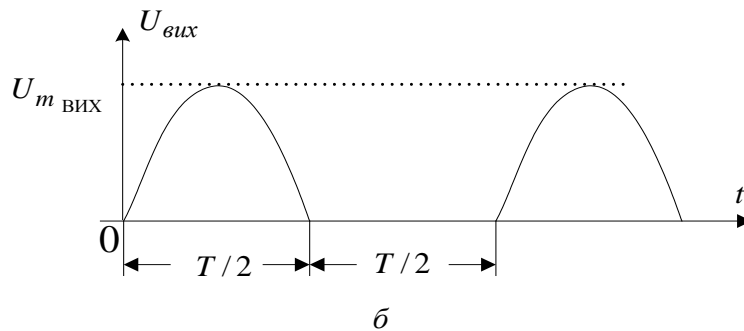
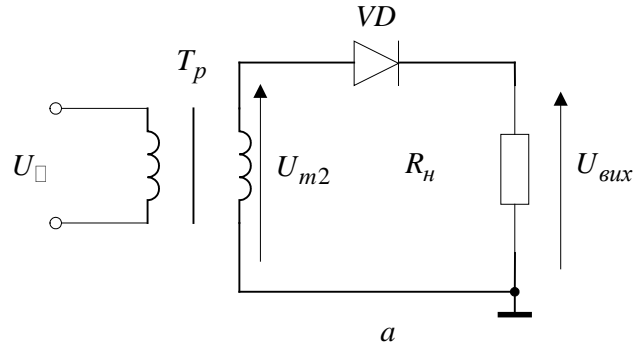
**Однопівперіодний випрямляч зумовлює нерівномірне навантаження джерела змінної напруги.**

Схема випрямляча складається з таких основних елементів: трансформатора, випрямних елементів (діода або декількох діодів) і згладжувального фільтра.

Трансформатор змінює діюче значення змінної напруги мережі на змінну напругу, величина якої відповідає заданій величині постійної напруги на виході випрямляча.

Випрямні елементи можуть проводити струм лише в одному напрямі і, отже, перетворюють змінну напругу на пульсуючу.

Згладжувальний фільтр призначений для зменшення пульсацій вихідної напруги до допустимого значення. Найпростішою є однопівперіодна схема випрямляча (рис.5.17, а).



**Рис.5.17.** Схема однопівперіодного випрямляча (а) та часова діаграма його вихідної напруги (б)

Упродовж додатних півперіодів вхідної напруги (коли діод відкритий) вихідна напруга повторює форму напруги на вторинній обмотці трансформатора, а протягом від'ємних півперіодів діод закритий і не пропускає струму, тому вихідна напруга дорівнює нулеві (див. рис.5.17, б). Частота пульсацій вихідної напруги однопівперіодної схеми дорівнює частоті мережі  $f$ , а сама вихідна напруга містить постійну складову та ряд гармонічних складових з частотами  $f, 2f, 3f$  і т.д.

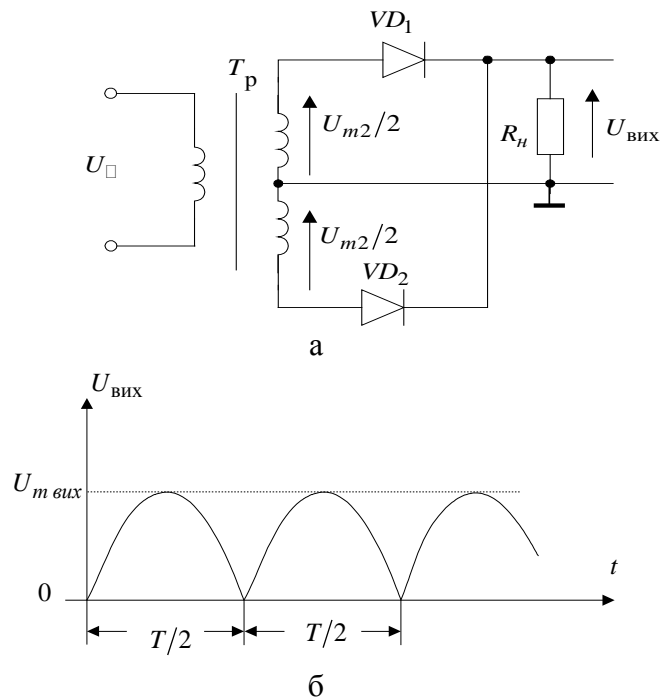
Таку схему застосовують при малих струмах і невисоких вимогах стосовно фільтрації вихідної напруги.

Недоліком однопівперіодної схеми є наявність постійного підмагнічування трансформатора, що погіршує його параметри.

Ефективнішими у плані випрямлення змінного струму є двопівперіодна та мостова схеми випрямляча.

У двопівперіодній схемі випрямляча (рис.5.18, а) діоди відкриваються по черзі у різні половини періоду вхідної напруги. Наприклад, у додатний півперіод вхідної напруги  $VD_1$  відкривається і пропускає струм, а діод  $VD_2$  у цей час закритий. Під час дії від'ємного півперіоду відкривається  $VD_2$ , а  $VD_1$  закривається. В результаті через опір навантаження струм протікає під час обох півперіодів в одному і тому самому напрямі. Тому вихідна напруга має пульсуючий характер (рис.5,18, б), але, на відміну від однопівперіодної схеми, частота пульсацій дорівнює  $2f$ .





**Рис.5.18.** Схема двоперіодного випрямляча (а) та часова діаграма його вихідної напруги (б)

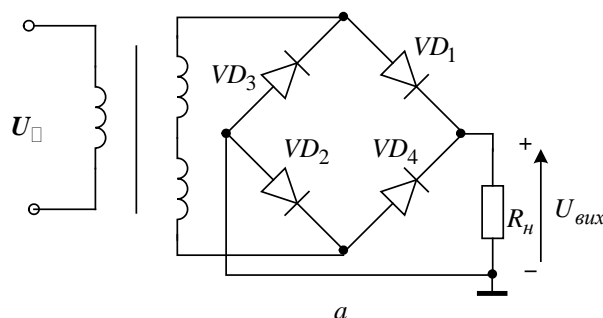
Постійна складова  $U_0$  вихідної напруги у два рази більша, ніж в однопівперіодній схемі.

**Частота пульсацій на виході двопівперіодного випрямляча більша удвічі за частоту вхідної напруги.**

Найчастіше застосовують мостову схему випрямляча (рис.5.19), перевагою якої порівняно з двопівперіодною схемою є те, що у вторинній обмотці трансформатора немає виводу від середньої точки, тому виготовляти такий трансформатор технологічно простіше. У мостовій схемі (рис.5.19) діоди попарно відкриваються протягом різних півперіодів. Наприклад, при додатній півхвилі вхідної напруги відкриті діоди  $VD_1$  та  $VD_2$  ( $VD_3$  та  $VD_4$  в цей час закриті), а в наступний півперіод відкриваються  $VD_3$  та  $VD_4$ , а  $VD_1$  та  $VD_2$  закриваються. Часова діаграма вихідної напруги така сама, як і у двопівперіодній схемі (рис.5.19, б).

Перевагами двопівперіодної та мостової схем порівняно з однопівперіодною схемою є відсутність постійного підмагнічування трансформатора, а також кращі умови фільтрації вихідної напруги, оскільки частота пульсацій удвічі вища, ніж у однопівперіодній схемі. Згладжувальні фільтри випрямлячів вмикають між випрямними елементами та опором навантаження, як показано для мостової схеми.

**Коефіцієнт пульсацій є відношенням діючого значення змінних складових напруги на виході випрямляча до величини її постійної складової.**



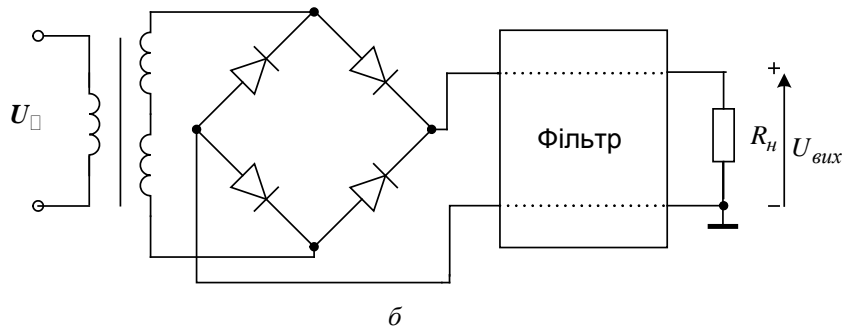


Рис.5.19. Мостова схема випрямляча (а), схема із згладжувальним фільтром (б)

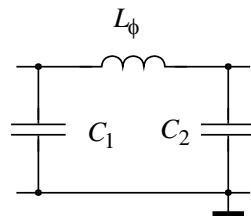


Рис.5.20. П-подібна схема згладжувального LC-фільтра

Основне завдання згладжувального фільтра – максимальне зменшення змінної складової та мінімальне зменшення постійної складової випрямленої напруги, яка подається на вхід фільтра. Найпростішими згладжувальними фільтрами є такі, які складаються або з однієї котушки індуктивності, увімкненої послідовно з опором навантаження, або з однієї ємності, увімкненої паралельно з опором навантаження.

Часто застосовують П-подібні LC-фільтри (рис.5.20), які дають змогу зменшити пульсації випрямленої напруги до значень, які не перевищують 1 %. Значення параметрів елементів можуть бути значними (одиниці – десятки Генрі, сотні – тисячі мікрофарад).

Основними параметрами випрямлячів є:

- номінальне значення випрямленої напруги  $U_{\text{вих ном}}$  ;
- номінальний струм навантаження  $I_{\text{вих ном}}$  ;
- номінальна напруга мережі живлення  $U_{\text{вх ном}}$  ;
- допустима напруга пульсації та виході випрямляча  $U_{\text{п}}$  або коефіцієнт пульсації

$$K_n = U_{\text{п}} / U_{\text{вих ном}} ;$$

- вихідна потужність  $P_{\text{вих}} = U_{\text{вих ном}} \cdot I_{\text{вих ном}}$  .

**Поява нових складових у спектрі вихідного сигналу порівняно зі спектром вхідного сигналу можлива лише при нелінійному перетворенні сигналу.**

Основним параметром згладжувального фільтра є коефіцієнт згладжування, який дорівнює відношенню коефіцієнта пульсацій на вході фільтра до коефіцієнта пульсацій на виході фільтра:

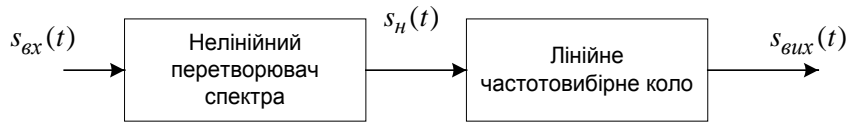
$$K_{\text{згл}} = K_{n \text{ вх}} / K_{n \text{ вих}} .$$

## 5.6. Модуляція і детектування

### 5.6.1. Принципи побудови перетворювачів спектра

Процеси модуляції, перетворення частоти, детектування модульованих сигналів, випрямлення змінного струму, генерування коливальних, які здійснюються в електронних колах, пов'язані з перетворенням спектрів сигналів.

Більшість перетворювачів спектра являють собою поєднання нелінійних перетворювачів та лінійних частотовибірних кіл (рис.5.21).

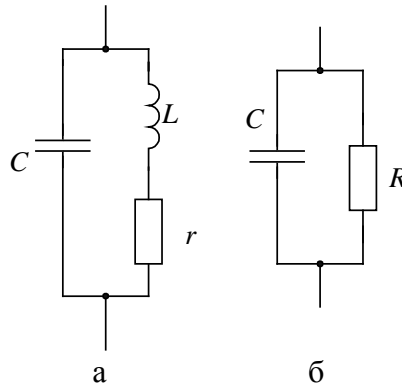


**Рис.5.21.** Узагальнена структурна схема перетворювача спектра

Нелінійний перетворювач перетворює спектр вхідного сигналу  $s_{вх}(t)$  так, що спектр сигналу  $s_н(t)$  на його виході містить нові спектральні складові.

Лінійне частотовибірне коло виділяє із спектра сигналу  $s_н(t)$  на виході нелінійного перетворювача корисні (потрібні) спектральні складові і передає їх на вихід у вигляді сигналу  $s_{вих}(t)$ . Отже, лінійне частотовибірне коло виконує функції частотного фільтра.

Найчастіше як фільтр використовують або високочастотне коливальне коло, або  $RC$ -ланку (рис.5.22).



**Рис.5.22.** Лінійні частотновибірні кола.

*а* – коливальне коло як смуговий фільтр; *б* –  $RC$  -ланка як фільтр низьких частот

Коливальне коло виконує роль смугового фільтра і його застосовують для виділення певної смуги частот у високочастотному діапазоні. Модуль комплексного опору коливального кола описує вираз:

$$Z(\omega) = R_0 / (\sqrt{1 + \varepsilon^2}), \quad (5.32)$$

де  $R_0 = L/Cr$  – резонансний опір кола;

$\varepsilon = (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)Q$  – узагальнене розстроєння;

$\omega_0, Q$  – відповідно резонансна частота та добротність кола.

Із (5.32) випливає, що опір кола найбільший на резонансній частоті ( $\varepsilon=0$ ) і різко зменшується у разі відхилення частоти від резонансної. Очевидно, що чим більша добротність кола, тим різкіше зменшується його опір у разі відхилення від резонансної частоти. Тому при застосуванні коливального кола у схемі перетворювача спектра параметри  $LC$ -елементів вибирають так, щоб його резонансна частота збігалася з частотою корисного колювання. Опір кола для цієї частоти найбільший і тому напруга на колі буде найвищою. Для інших складових спектра опір кола незначний, і відповідно напруга на колі, утворена цими складовими, буде близькою до нуля.

$RC$ -ланку застосовують у схемі перетворювача спектра тоді, коли корисною спектральною складовою є низькочастотна або постійна складова. Модуль комплексного опору такої ланки описує вираз:

$$Z(\omega) = R / \sqrt{1 + (\omega CR)^2} \quad (5.33)$$

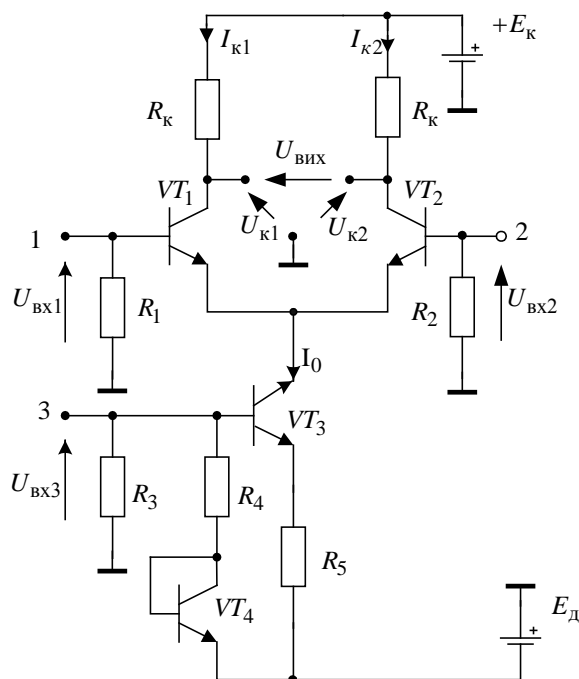
Для колювань високої частоти модуль опору істотно зменшується порівняно з опором  $R$  для постійної та низькочастотної складових спектра (внаслідок шунтувального впливу конденсатора), тому високочастотні складові не створюють на ланці помітної напруги.

Як нелінійні перетворювачі можуть бути використані діоди, транзистори, нелінійні  $p-n$  – переходи (варикапи), а також окремі мікросхеми на основі диференціальних каскадів (ДК), та аналогових перемножувачів, що містять декілька взаємозв'язаних ДК. Застосування ДК як

нелінійних перетворювачів дає змогу скоротити кількість типів використовуваних мікросхем та забезпечити високу однорідність структури перетворювачів спектра. Кращі зразки ДК мають граничні частоти, які сягають одиниць гігагерц, що дає можливість будувати на їхній основі перетворювачі спектра на частотах, які сягають сотень мегагерц. Тому далі переважно розглядатимемо перетворювачі спектра, побудовані на ДК.

Попередньо коротко розглянемо принцип роботи ДК та його властивості. На рис. 5.23 зображена схема ДК, який складається з двох однакових пліч, утворених відповідно транзисторами  $VT_1$  та  $VT_2$  з однаковими колекторними навантаженнями. Важливою вимогою є ідентичність параметрів елементів обох пліч, що забезпечує високу стабільність роботи і повну компенсацію температурного дрейфу.

**Диференціальний транзисторний каскад є універсальним нелінійним перетворювачем, зручним для різноманітних частотних перетворень сигналів.**



**Рис.5.23.** Схема диференціального каскаду з трьома входами

Вираз, що описує характеристику передавання напруги через ДК, яку можна використати для аналізу перетворення спектра, має такий вигляд:

$$U_{вих} = -AU_{вх3}U_{д} = -AU_{вх3}(U_{вх1} - U_{вх2}). \quad (5.34)$$

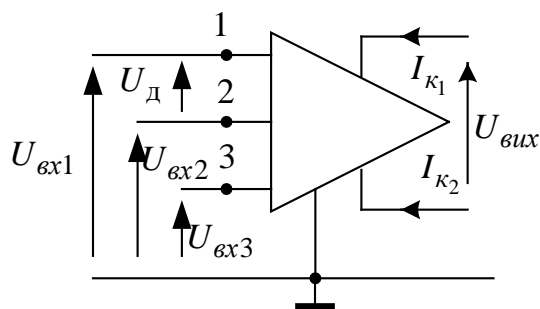
На підставі сказаного відзначимо такі властивості ДК:

1) нелінійний характер залежності вихідної напруги  $U_{вих}$  від сукупності вхідних сигналів  $U_{д}$  дає змогу використати ДК як перетворювач спектра;

2) залежність вихідної напруги ДК від напруги  $U_{вх3}$  можна використовувати для перемноження сигналів  $U_{д}$  та  $U_{вх3}$ . Ця властивість дає змогу будувати на основі ДК перемножувач сигналів та інші перетворювачі спектра;

3) характеристика передавання напруги ДК є лінійною лише для невеликих значень диференціального сигналу  $U_{д}$ .

Для подальшого аналізу використаємо макромодель ДК у вигляді нелінійного багатополосника (рис.5.24).



**Рис.5.24.** Макромодель диференційного каскаду як нелінійного перетворювача спектра

### 5.6.2. Амплітудні модулятори

Вище зазначалось, що для здійснення амплітудної модуляції треба перемножити високочастотне несуче коливання та низькочастотний модулюючий сигнал, накладений на постійну складову:

$$s_{AM}(t) = A_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_{m0} [1 + k s_{\text{мод}}(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.35)$$

Отже, амплітудний модулятор реалізує математичну функцію перемноження двох згаданих коливань.

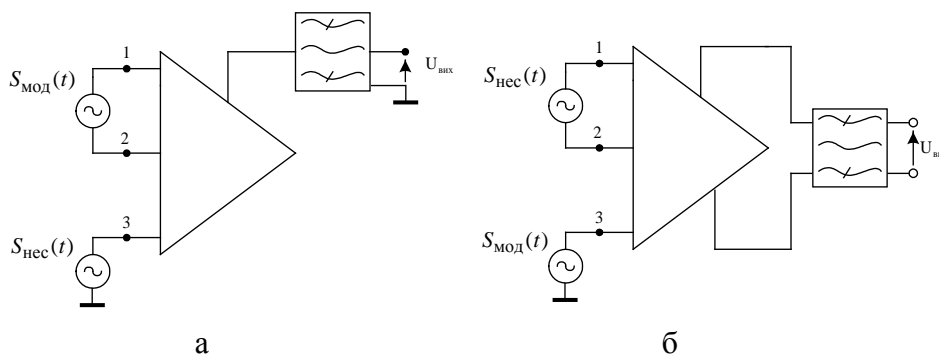
**Амплітудні модулятори є найпростішими модуляторами сигналів.**

При побудові схеми амплітудного модулятора на основі ДК можливі два варіанти подання двох згаданих коливань на входи ДК:

а) несуче коливання подають як  $U_{вх3}$ , а модулюючий сигнал – на диференційний вхід (рис.5.25, а);

б) несуче коливання подають на диференційний вхід ДК, а модулюючий сигнал – на третій вхід (рис.5.25, б).

При обох варіантах подання вхідних напруг на ДК у спектрі колекторних струмів транзисторів  $VT1$  та  $VT2$  утворюються необхідні спектральні складові (з частотою несучого коливання та сумарні і різницеві комбінаційні складові), для виділення яких у схему модулятора вводять смуговий фільтр, настроєний на частоту несучого коливання  $\omega_0$ , смуга пропускання якого дорівнює  $2\Omega_{\text{макс}}$ , де  $\Omega_{\text{макс}}$  – максимальна частота у спектрі модулюючого сигналу.



**Рис.5.25.** Варіанти побудови схеми амплітудного модулятора на ДК

Основною характеристикою модулятора є **статична модуляційна характеристика**, яка являє собою залежність амплітуди складової колекторного струму транзистора з частотою несучого коливання  $I_{кнес}$  від постійного зміщення на керуючому вході ДК при постійній амплітуді несучого коливання на іншому вході ДК. Типовий вигляд статичної модуляційної характеристики показаний на рис.5.26. За малих значень амплітуди колекторного струму ( $I_{кнес} < I_{кмін}$ ) та великих значень ( $I_{кнес} > I_{кмакс}$ ) модуляційна характеристика є нелінійною, що зумовлено, з одного боку,

нелінійністю статичних вольтамперних характеристик транзисторів при малих струмах, а з іншого – явищем обмеження струму транзисторів.

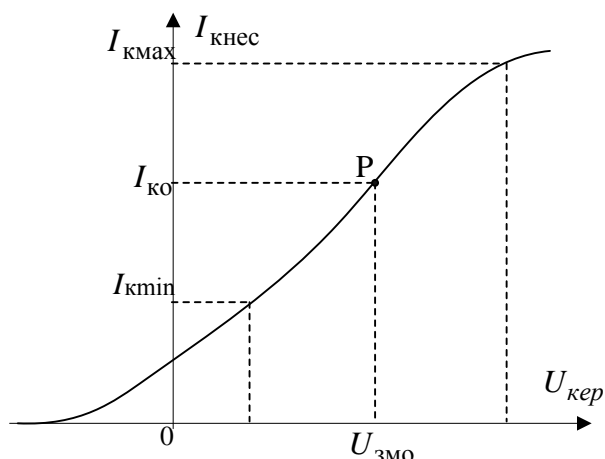


Рис.5.26. Статична модуляційна характеристика

Для того, щоб модулятор не вносив значних нелінійних спотворень, треба використовувати лише лінійну ділянку модуляційної характеристики. Для цього початкове зміщення  $U_{змо}$  на керуючому вході вибирають таким, щоб початкова робоча точка Р була розміщена посередині лінійної ділянки модуляційної характеристики (див.рис.5.26).

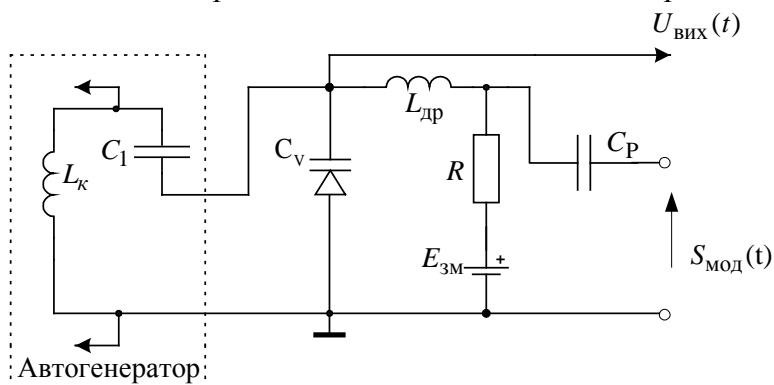
**Статична модуляційна характеристика – основна характеристика модулятора.**

Максимальне значення коефіцієнта модуляції, за якого ще не виникатимуть нелінійні спотворення, визначають на підставі статичної модуляційної характеристики за формулою:

$$M_{\max} = (I_{k\max} - I_{k\min}) / (I_{k\max} + I_{k\min}) \quad (5.36)$$

### 5.6.3. Частотні і фазові модулятори

Побудова **частотного модулятора** полягає у створенні такого генератора гармонічних коливань, частота генерування якого змінюється за законом зміни модулюючого сигналу. Принципи побудови автогенераторів гармонічних коливань розглянуто у наступному підрозділі. Тут розглянемо лише принцип здійснення частотної модуляції у діючому LC-автогенераторі, зважаючи на те, що частота коливань, генерованих автогенератором, дорівнює резонансній частоті коливального кола, використаного в автогенераторі, яка, своєю чергою, визначається параметрами реактивних елементів (конденсаторів та котушок індуктивності). Найчастіше для цієї мети застосовують варикапи, які являють собою закриті відповідним зміщенням p-n – переходи, бар’єрна ємність яких залежить від прикладеної напруги. На рис. 5.27 проілюстровано принцип здійснення частотної модуляції у схемі LC-автогенератора за допомогою варикапа  $C_v$ . Коливальне коло автогенератора утворюють котушка індуктивності  $L_k$  та послідовно з’єднані конденсатори  $C_1$  і варикап  $C_v$ . Елементи  $L_{др}$ ,  $C_p$ ,  $R$ ,  $E_{зм}$  відіграють допоміжну роль (забезпечують усунення небажаного впливу низькочастотного кола, в якому діє модулюючий сигнал  $s_{мод}(t)$ , на високочастотне вихідне коло та створюють необхідне зміщення на варикап.



**Рис.5.27.** Здійснення частотної модуляції за допомогою варикапа

Частота генерованих коливань дорівнює:

$$\omega_r = \sqrt{(C_1 + C_v) / L_k C_1 C_v} \quad (5.37)$$

З виразу (5.37) видно, що частота  $\omega_r$  нелінійно залежить від ємності варикапа  $C_v$ , проте при невеликих змінах цієї ємності ( $\Delta C_v / C_v < 1$ ) з певним наближенням можна прийняти:

$$\Delta \omega_r / \omega_r \cong -[C_1 / 2(C_1 + C_v)] \cdot (\Delta C_v / C_v). \quad (5.38)$$

Отже, у разі невеликих змін  $\Delta C_v$  ємності варикапа під дією модулюючого сигналу можна отримати пропорційну зміну частоти автогенератора  $\Delta \omega_r$ .

Як керований реактивний елемент у схемах частотних модуляторів також часто використовують т.зв. “реактивний транзистор”, який являє собою транзисторний каскад з реактивним зворотним зв’язком, за якого опір транзистора між колектором та емітером має реактивний характер (зсув фаз між струмом та напругою близький до  $90^\circ$ ). Реактивного опір змінюють за допомогою напруги зміщення на базі транзистора. Під’єднавши реактивний транзистор до коливального кола автогенератора, змінюють резонансну частоту кола і, отже, здійснюють частотну модуляцію.

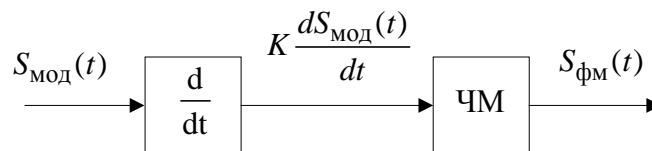
Реактивний транзистор, як і варикап, забезпечує здійснення частотної модуляції без спотворень лише за невеликих відносних значень девіації частоти.

Недоліком частотних модуляторів є те, що частотну модуляцію супроводжує паразитна амплітудна модуляція, яка виникає внаслідок зміни модуля комплексного опору коливального кола при зміні частоти генерації.

Для здійснення **фазової модуляції** треба побудувати схему, на виході якої фаза коливань змінюється пропорційно до модулюючого сигналу  $s_{\text{мод}}(t)$  стосовно лінійного закону  $\psi(t) = \omega_0 t$ .

Серед багатьох способів здійснення фазової модуляції виділимо один, який ґрунтується на тому, що фазомодульовані коливання можна розглядати як модульовані по частоті за законом, пропорційним до похідної від модулюючого сигналу.

Звідси випливає, що для здійснення фазової модуляції можна використати частотний модулятор (ЧМ) спільно з диференціатором модулюючого сигналу  $S_{\text{мод}}(t)$ , як показано на рис.5.28.



**Рис.5.28.** Здійснення фазової модуляції за допомогою частотного модулятора

У схемах фазових модуляторів теж з’являється паразитна амплітудна модуляція, для усунення якої на виході модуляторів вмикають амплітудні обмежувачі.

#### 5.6.4. Амплітудні детектори

Детектування АМ-сигналів полягає у відновленні модулюючого сигналу  $S_{\text{мод}}(t)$ , згідно з яким змінюється амплітуда модульованого сигналу. Детектування пов’язане з перетворенням спектра, яке полягає у створенні низькочастотних складових, котрих не було у спектрі АМ-сигналу.

Узагальнена структурна схема амплітудного детектора аналогічна схемі, зображеній на рис.5.21. На виході нелінійного перетворювача у спектрі сигналу  $S_H(t)$  поряд з іншими спектральними складовими утворюється постійна складова струму  $I_0$ , величина якої залежить від амплітуди  $A_m(t)$  модульованого вхідного сигналу  $S_{\text{АМ}}(t)$ . У разі зміни цієї амплітуди постійна складова складова струму  $I_0$  теж змінюватиметься з низькою частотою. На виході детектора вмикають фільтр низьких частот (рис. 5.22, б), на резисторі  $R$  якого низькочастотна складова струму створює вихідну напругу, а високочастотні складові практично закорочує малий опір

конденсатора  $C$ . Очевидно, що для цього значення параметрів  $R$  і  $C$  фільтра треба підбрати так, щоб задовольнялись співвідношення:

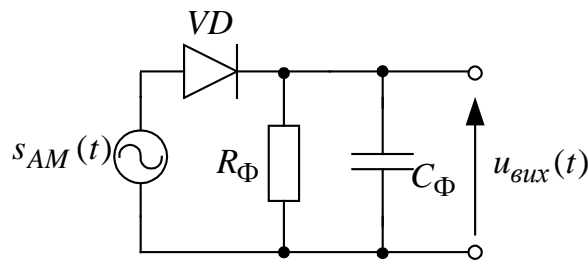
$$\frac{1}{\omega C} \ll R \ll \frac{1}{\Omega C}, \quad (5.39)$$

де  $\omega$  та  $\Omega$  – відповідно значення високої та низької частот у спектрі перетвореного сигналу  $S_H(t)$  на виході нелінійного перетворювача.

Детектування АМ-сигналів здійснюється без нелінійних спотворень, якщо постійна складова струму  $I_0$  нелінійного перетворювача пропорційна до амплітуди  $A_m$  високочастотного сигналу, що діє на вході детектора. Залежність  $I_0(A_m)$  називають **характеристикою детектування**.

*Як нелінійний елемент для реалізації амплітудного детектора зручно використовувати напівпровідниковий діод, В/А характеристика якого апроксимується квадратичною залежністю.*

Найпростішим детектором є діодний детектор, в якому роль нелінійного перетворювача відіграє напівпровідниковий діод (рис.5.29).



**Рис.5.29.** Схема діодного детектора АМ-сигналів

У разі слабких сигналів на вході детектора ( $A_m < \dots 0,2$  В) вольтамперну характеристику (ВАХ) діода  $i_d = f(u_d)$  звичайно апроксимують квадратичною параболою і знаходять, що постійна складова струму  $I_0$  пропорційна до квадрата амплітуди  $A_m$  високочастотного вхідного сигналу  $I_0 = k_1 A_m^2$  ( $k_1$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від параметра апроксимувальної параболи).

Якщо ж на детектор діють сигнали з достатньо великою амплітудою ( $A_m > 0,5 \dots 1$  В), то у цьому разі ВАХ діода апроксимують кусково-лінійною залежністю, і при тому отримують лінійну залежність постійної складової струму  $I_0$  від амплітуди  $A_m$ :  $I_0 = k_2 A_m$  ( $k_2$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від крутості ВАХ діода та опору  $R$  низькочастотного фільтра).

Отже, детектування слабких сигналів називають квадратичним детектуванням, а детектування сильних сигналів – лінійним. Недоліком квадратичного детектування є наявність значних нелінійних спотворень, які проявляються у виникненні вищих гармонік низькочастотного модулюючого сигналу.

Лінійне детектування є бажаним режимом роботи детектора, бо у цьому разі нелінійні спотворення відсутні. Тому звичайно попередньо підсилюють АМ-сигнал, щоб досягти достатньо великої амплітуди, а відтак подають підсилений сигнал на детектор, забезпечуючи режим лінійного детектування.

На закінчення зауважимо, що як нелінійні перетворювачі у схемі амплітудного детектора можуть бути використані транзистори або ДК в нелінійному режимі роботи, що дає змогу одночасно з детектуванням АМ-сигналу підсилити продетектований сигнал.

### 5.6.5. Частотні і фазові детектори

Математична модель коливань із кутовою модуляцією має такий узагальнений вигляд:

$$s(t) = A_m \cos[\psi(t)], \quad (5.40)$$



де  $\psi(t)$  – повна фаза, яку при частотній модуляції описуємо виразом (1.49), а при фазовій – виразом (1.51).

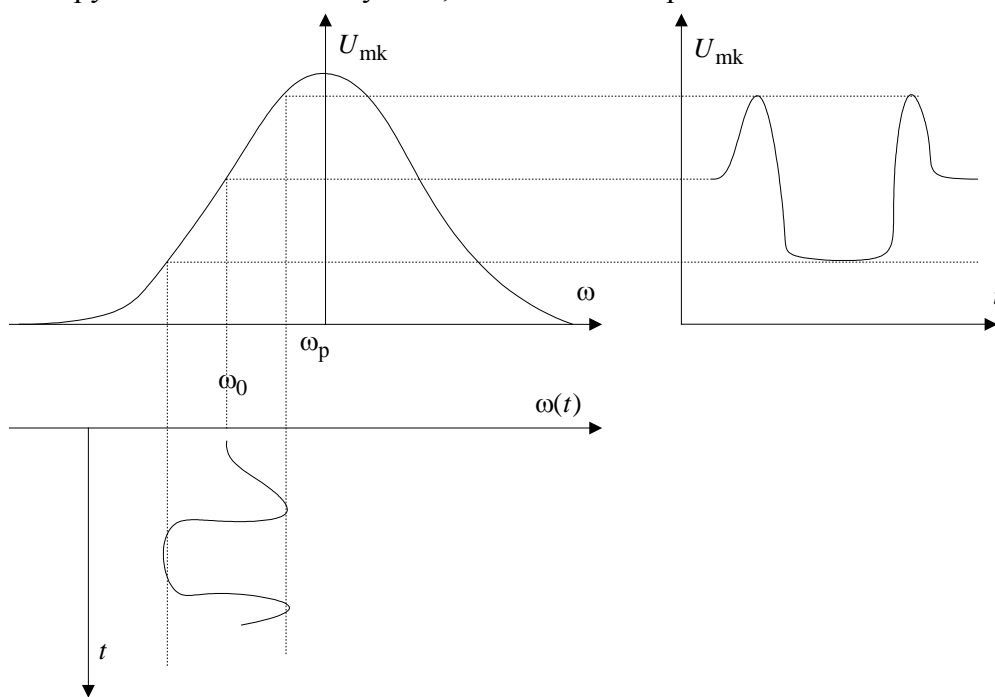
Із (5.40) випливає, що ЧМ- та ФМ-сигнали мають незмінну амплітуду  $A_m$ , тому вони не можуть бути продетектовані за допомогою амплітудних детекторів, оскільки вихідна напруга таких детекторів залежить лише від амплітуди модульованих сигналів.

**Детектори ЧМ-сигналів працюють на основі принципу перетворення ЧМ-сигналів на АМ-сигнали з подальшим їхнім детектуванням.**

Вихідна напруга частотного детектора повинна відтворити закон зміни частоти ЧМ-сигналу стосовно частоти несучого коливання, тобто вона має бути пропорційна до відхилення миттєвого значення частоти вхідного модульованого сигналу від частоти  $\omega_0$  несучого коливання.

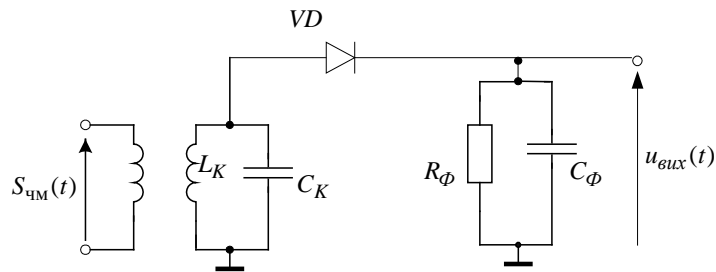
Поширений спосіб детектування ЧМ-сигналів полягає у попередньому перетворенні цих сигналів на такі, амплітуда яких змінюється пропорційно до зміни частоти, і подальшому їхньому детектуванню за допомогою амплітудного детектора.

Перетворення ЧМ-сигналів на сигнали, які змінюють амплітуду одночасно зі зміною частоти, здійснюють за допомогою т.зв. розстроєного коливального кола, використовуючи один із схилів його резонансної характеристики. Резонансна частота  $\omega_p$  коливального кола відрізняється на деяку величину  $\Delta\omega$  від частоти  $\omega_0$  несучого коливання ЧМ-сигналу. У разі подання на це коло коливання несучої частоти на ньому виникає напруга, амплітуда  $U_{mk}$  якої менша від максимально можливої. При відхиленні частоти сигналу від значення  $\omega_0$  одночасно змінюватиметься і амплітуда  $U_{mk}$  напруги на коливальному колі, як показано на рис.5.30.



**Рис.5.30.** Використання розстроєного коливального кола для перетворення ЧМ-сигналу на сигнал зі змінною амплітудою

З коливального кола знімають високочастотне коливання, одночасно модульоване за амплітудою та частотою, яке відтак подають на амплітудний детектор. Вихідна напруга детектора відтворює характер зміни амплітуди сигналу, що діє на його вході, і одночасно характер зміни частоти. На рис. 5.31 зображена найпростіша схема частотного детектора, побудованого за описаним принципом.



**Рис.5.31.** *Схема частотного детектора з розстроєним коливальним колом*

Елементи  $L_K$  і  $C_K$  утворюють коливальне коло, резонансна частота якого відрізняється від частоти несучого коливання, а діод  $VD$  та елементи  $R_\phi$ ,  $C_\phi$  – амплітудний детектор, вихідна напруга якого  $u_{вих}(t)$  пропорційна до відхилення частоти вхідного ЧМ-сигналу  $S_{чм}(t)$  від частоти несучого коливання.

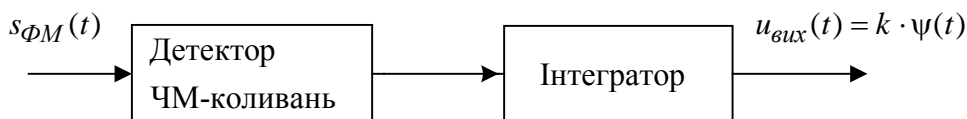
Недоліком цієї схеми є наявність нелінійних спотворень, які виникають внаслідок нелінійності схилів резонансної характеристики коливального кола. На практиці часто використовують дещо складнішу схему, яка складається з двох амплітудних детекторів із розстроєними коливальними колами, одне з яких настроєне на частоту, дещо вищу від частоти несучого коливання, а друге – на нижчу частоту. Така схема забезпечує менші нелінійні спотворення і відома під назвою дискримінатора із розстроєними коливальними колами.

Відомі інші способи побудови частотних детекторів, проте їх розгляд виходить за межі цього підручника.

Основною характеристикою частотних детекторів є характеристика детектування, яка відображає залежність вихідної напруги детектора  $U_{вих}$  від миттєвого значення частоти ЧМ-сигналу.

*Під час детектування ФМ-сигналів їх спочатку перетворюють на ЧМ-сигнали, а потім детектують.*

Один із способів побудови фазових детекторів ФМ-коливань ґрунтується на відомому співвідношенні між повною фазою  $\psi(t)$  та частотою  $\omega(t)$ :  $\psi(t) = \int \omega(t) dt$ . Отже, для детектування ФМ-коливань можна використати частотний детектор, якщо проінтегрувати його вихідну напругу (яка відтворює закон зміни частоти вхідного сигналу). Сказане ілюструє рис. 5.32.



**Рис.5.32.** *Детектування ФМ-сигналів за допомогою частотного детектора*

Раніше було сказано, що на практиці кутову модуляцію супроводжує паразитна амплітудна модуляція, що може призводити до похибок при детектуванні ЧМ-сигналів. Для усунення таких похибок перед частотними та фазовими детекторами вмикають обмежувач, який забезпечує стабільність амплітуди вхідного модульованого сигналу.

## 5.7. Генерування гармонічних сигналів

### 5.7.1. Основні поняття про принципи побудови автогенераторів

Функцію генерування коливань реалізують автогенератори – електронні кола, в яких виникають та як завгодно довго існують періодичні електричні коливання.

*У генераторах здійснюється перетворення енергії постійного струму на енергію періодичних коливань.*

Коливання, що виникають в автогенераторах, називають автоколиваннями. Звичайно автогенератори є малопотужними колами, основне призначення яких полягає у генеруванні коливань з високою стабільністю частоти.

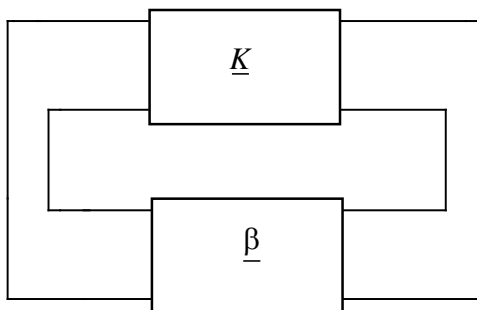
Виникнення та існування усталених автоколивань у автогенераторі неодмінно пов'язане з перетворенням певного виду енергії на енергію електричних коливань заданої частоти. Залежно від способу перетворення енергії розрізняють два типи автогенераторів:

1) автогенератори, в яких здійснюється перетворення енергії постійного струму на енергію коливань певної форми та частоти. Цей тип автогенераторів поділяють на дві групи: а) генератори гармонічних коливань, форма коливань яких близька до гармонічної; б) генератори релаксаційних (розривних) коливань, які мають різкі стрибки струмів та напруг або їхніх похідних;

2) автогенератори параметричного типу, в яких хоча б один із параметрів елементів схеми змінюється у часі за періодичним законом під зовнішньою дією (механічною, електричною тощо). У цих автогенераторах енергія коливань зовнішньої дії перетворюється на енергію електричних коливань заданої частоти, причому частота коливань зовнішньої дії у загальному випадку не збігається з частотою коливань автогенератора.

Тут розглянемо лише автогенератори гармонічних коливань.

Більшість автогенераторів можна подати узагальненою структурною схемою у вигляді чотириполосника (підсилювача)  $\underline{K}$ , охопленого додатним зворотним зв'язком через чотириполосник  $\underline{\beta}$  (рис.5.33).



**Рис. 5.33.** Узагальнена структурна схема автогенератора

Раніше було показано, що загалом за наявності зворотного зв'язку комплексний коефіцієнт підсилення підсилювача описує формула:

$$\underline{K}_{зв} = \underline{K} / (1 - \underline{\beta}\underline{K}) \quad (5.41)$$

У разі додатного зворотного зв'язку добуток  $\underline{\beta}\underline{K}$  є величиною дійсною і додатною, тобто

$$\underline{\beta}\underline{K} = K\beta \exp[j(\varphi_K + \varphi_\beta)] > 0, \quad (5.42)$$

де  $K$ ,  $\beta$  – відповідно модуль коефіцієнта підсилення підсилювача та коефіцієнта передавання напруги чотириполосника зворотного зв'язку;  $\varphi_K$ ,  $\varphi_\beta$  – фазові зсуви, що вносять відповідно підсилювач та чотириполосник зворотного зв'язку.

Із (5.42) випливає, що у схемі автогенератора повинна виконуватись т. зв. умова балансу фаз:

$$\varphi_K + \varphi_\beta = 2\pi n \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (5.43)$$

**Робота автогенератора ґрунтується на реалізації у підсилювачі додатного зворотного зв'язку.**

Проте лише цієї умови недостатньо для самозбудження автогенератора. Автогенератор самозбудиться, якщо хоча б для однієї частоти буде одночасно з (5.43) виконана умова:

$$K\beta > 1. \quad (5.44)$$

Отже, одночасне виконання співвідношень (5.43) та (5.44) для однієї і тієї самої частоти є умовою самозбудження автогенератора, яка свідчить про наростання коливань у схемі.

Аналіз показує, що  $K$ -чотириполосник та  $\beta$ -чотириполосник повинні мати такі властивості:

1) К-чотириполосник повинен мати нелінійні властивості: його коефіцієнт підсилення  $K$  має залежати від величини амплітуди так, щоб зі збільшенням амплітуди коливань значення  $K$  зменшувалось. За цієї умови у схемі можливе встановлення коливань із незмінною амплітудою. Якщо б коефіцієнт підсилення  $K$  був незмінним, то згідно з (5.44) амплітуда коливань наростала б до нескінченності.

2) Оскільки автогенератор генерує гармонічні коливання (тобто коливання однієї частоти), то це означає, що  $\beta$ -чотириполосник повинен бути частотовибірним і забезпечувати баланс фаз лише для коливань однієї частоти, а коливання усіх інших частот – придушувати.

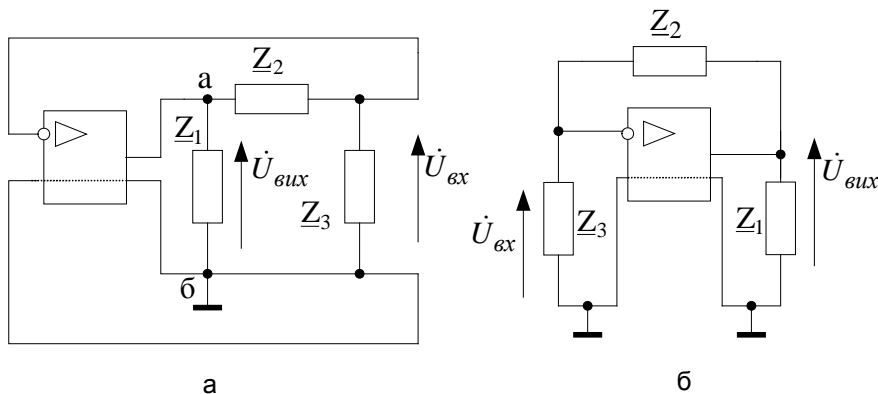
В усталеному режимі гармонічних коливань в автогенераторі одночасно виконуються умови балансу фаз та балансу амплітуд:

$$\begin{cases} \varphi_K + \varphi_\beta = 2\pi n; & (5.45a) \\ K_{уст} \cdot \beta = 1. & (5.45б) \end{cases}$$

Залежно від схемної реалізації автогенератори гармонічних коливань поділяють на  $LC$ -автогенератори та  $RC$ -автогенератори.

### 5.7.2. $LC$ -автогенератори

Більшість  $LC$ -автогенераторів будують за т. зв. триточною схемою, яка являє собою інвертуючий підсилювач ( $\varphi_K = \pm\pi$ ), охоплений чотириполосником зворотного зв'язку (рис. 5.34, а). Ця сама схема показана у триточковому зображенні на рис. 5.34, б.



**Рис.5.34.** Узагальнена схема  $LC$ -генератора: а – у вигляді підсилювача, охопленого зворотним зв'язком;  
б – у вигляді триточної схеми

Чотириполосник зворотного зв'язку складається з елементів типу  $L$  і  $C$ , і фактично являє собою коливальне коло. Нехтуючи втратами згаданих елементів, прийемо, що опори елементів  $Z_1, Z_2, Z_3$  є суто реактивними:  $Z_1 = jX_1; Z_2 = jX_2; Z_3 = jX_3$ .

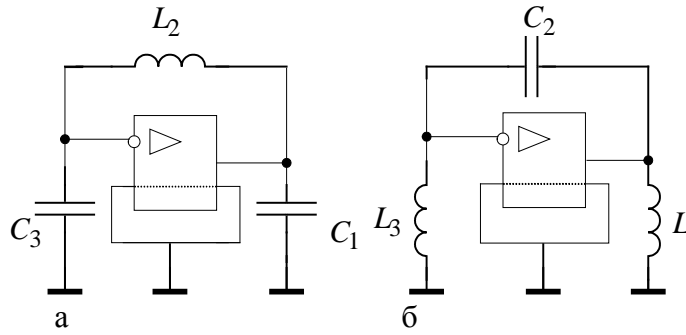
На резонансній частоті  $\omega_0$  сума усіх реактивних опорів дорівнює нулеві:

$$X_{10} + X_{20} + X_{30} = 0. \quad (5.46)$$

Оскільки підсилювач є інвертуючим ( $K = K \exp(j\pi) < 0$ ), то для забезпечення умови балансу фаз (5.43) необхідно, щоб коефіцієнт передавання напруги чотириполосника зворотного зв'язку теж був від'ємною дійсною величиною:

$$\beta = \dot{U}_{ze} / \dot{U}_{вих} = jX_{30} / j(X_{20} + X_{30}) = 1 / (1 + X_{20} / X_{30}) < 0. \quad (5.47)$$

Умова (5.47) може бути виконана, якщо  $X_{20}/X_{30} < 0$ , причому  $|X_{20}| > |X_{30}|$ . З урахуванням (5.46) приходимо до висновку, що елементи  $Z_1$  та  $Z_3$  повинні мати реактивні опори однакового знака, протилежного до знака реактивного опору елемента  $Z_2$ . Отже, можливі два варіанти побудови триточкових схем  $LC$ -автогенераторів: ємнісна триточка (рис. 5.35, а) та індуктивна триточка (рис. 5.35, б)



**Рис.5.35.** Варіанти триточкових схем автогенераторів:  
*а – ємнісна триточка; б – індуктивна триточка*

**У  $LC$  - генераторі частоту генерації задає певний  $LC$  - контур.**

Частота генерованих коливань в обох варіантах схеми дорівнює резонансній частоті  $\omega_0$  коливального кола. Отже, у разі ємнісної триточки вона визначається за формулою:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L_2 C_1 C_3 / (C_1 + C_3)}, \quad (5.48)$$

а у разі індуктивної триточки:

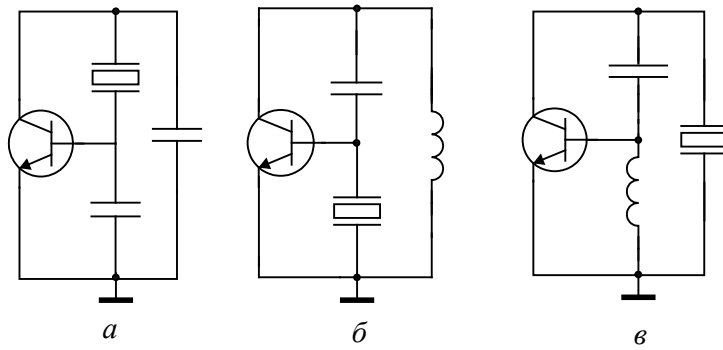
$$\omega_0 = 1/\sqrt{(L_1 + L_3) C_2}. \quad (5.49)$$

Для забезпечення самозбудження автогенераторів модуль коефіцієнта підсилення підсилювача повинен задовольняти умови відповідно для ємнісної та індуктивної триточок:  $|K_C| > C_3/C_1$ ;  $|K_L| > L_1/L_3$ .

Обмеження наростання амплітуди  $LC$ -автогенераторів зумовлене нелінійністю вольтамперних характеристик підсилювальних елементів – транзисторів, які, з одного боку, відсікають струм, а з іншого – обмежують його за рахунок насичення. Отже, в усталеному режимі автогенератора транзистори завжди працюють у нелінійному режимі, в якому виникають вищі гармоніки струму (друга, третя і т.д.). Проте наявність у схемі автогенератора високодобротного коливального кола забезпечує виділення основної гармоніки струму, частота якої дорівнює резонансній частоті коливального кола, і придушення вищих гармонік. Тим самим забезпечується форма коливань, близька до гармонічної.

Забезпечити високу стабільність частоти автогенератора можна, застосовуючи високодобротні коливальні системи зі стабільною резонансною частотою. Звичайні  $LC$ -коливальні кола не можуть задовольнити високих вимог стосовно стабільності частоти. Допустима відносна нестабільність частоти для сучасних передавальних пристроїв становить  $10^{-5} \dots 10^{-7}$ . Такі вимоги задовольняють коливальні системи, виготовлені з матеріалів, які проявляють п'єзоелектричні властивості, наприклад, із кварцу. Добротність серійних кварцових резонаторів становить десятки-сотні тисяч, а у прецизійних кварців сягає навіть декількох мільйонів. У кварцовому резонаторі пластина кварцу розміщена між двома металевими обкладками. Під дією високочастотної напруги, прикладеної до металевих пластинок, у кварцовій пластині виникають пружні механічні коливання. Частота цих коливань визначається геометричними розмірами кварцової пластини та видом зрізу. Звичайно використовують кварцові пластини на частотах 50 – 500 кГц, але не вище 15 – 30 МГц.

Перелічені властивості кварцових резонаторів дають змогу застосовувати їх у схемах автогенераторів для стабілізації частоти. Кварц використовують як індуктивний опір і вмикають його у схему автогенератора замість однієї із індуктивностей (див. рис. 5.36).

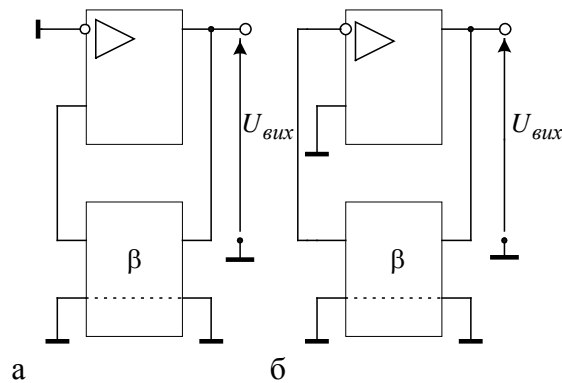


**Рис. 5.36.** Тривиточкові схеми автогенераторів із кварцовою стабілізацією частоти: а – ємнісна тривиточка; б, в – індуктивні тривиточки

### 5.7.3. RC-автогенератори

Під час побудови RC-автогенераторів найчастіше як підсилювальний елемент використовують операційний підсилювач (ОП) який має два входи: неінвертуючий ( $\varphi_k=0$ ) та інвертуючий ( $\varphi_k=\pi$ ). Чотириполюсник зворотного зв'язку  $\beta$  вмикають між виходом ОП та одним із входів залежно від того, який зсув  $\varphi_\beta$  він може забезпечити на частоті генерування автогенератора.

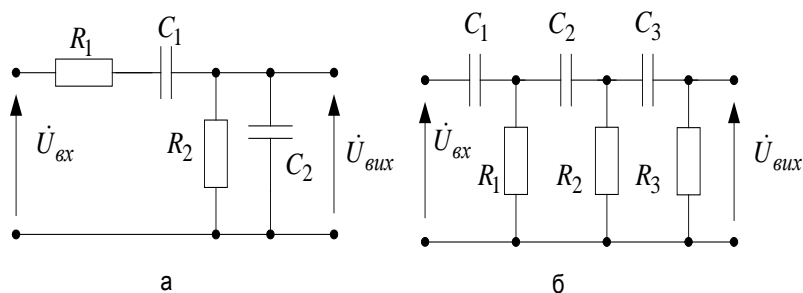
Наприклад, якщо на частоті генерування  $\omega_r$  фазовий зсув  $\varphi_\beta=2\pi n$ , то зворотний зв'язок подають на неінвертуючий вхід ОП, як показано на рис 5.37, а. Якщо ж  $\varphi_\beta=(2n+1)\pi$ , то зворотний зв'язок подають на інвертуючий вхід ОП, як показано на рис. 5.37, б.



**Рис. 5.37.** Способи побудови RC-автогенераторів на ОП: а – якщо  $\varphi_\beta=0^\circ$ ; б – якщо  $\varphi_\beta=180^\circ$

Найчастіше як чотириполюсник зворотного зв'язку використовують міст Віна (рис. 5.38а) та триланкову RC-схему (рис. 5.38б).

У RC-генераторах умова балансу фаз виконується за допомогою RC-чотириполюсника, який здійснює зсув фаз сигналу у ланці зворотного зв'язку.



**Рис.5.38.** Варіанти чотириполюсників зворотного зв'язку  
*RC*-автогенераторів: а – міст Віна;  
 б – триланкова *RC*-схема

**Міст Віна** звичайно вибирають з однаковими значеннями параметрів відповідно *R*- і *C*-елементів, тобто  $R_1=R_2=R$ ;  $C_1=C_2=C$ . У такому разі комплексний коефіцієнт передавання напруги описує формула:

$$\underline{\beta} = \dot{U}_{\text{вих}} / \dot{U}_{\text{вх}} = 1/[3 + j(\omega CR - 1/\omega CR)]. \quad (5.50)$$

Прирівнявши до нуля уявну частину знаменника у (5.50), визначаємо частоту  $\omega_0=1/RC$ , на якій модуль коефіцієнта передавання стає дійсним додатним числом  $\beta_0=1/3$ . Отже, міст Віна забезпечує генерування коливань з частотою  $\omega_r=\omega_0=1/RC$  за умови, що на цій частоті ОП забезпечить коефіцієнт підсилення  $K_0>3$ , щоб виконати умову самозбудження (5.44). У такому разі автогенератор будують за схемою, показаною на рис. 5.37, а.

У триланковій *RC*-схемі звичайно вибирають  $R_1=R_2=R$ ;  $C_1=C_2=C$ . Комплексний коефіцієнт передавання напруги описує формула:

$$\underline{\beta} = 1/[1 - 5/\omega^2 C^2 R^2 + j(1/\omega^3 C^3 R^3 - 6/\omega CR)] \quad (5.51)$$

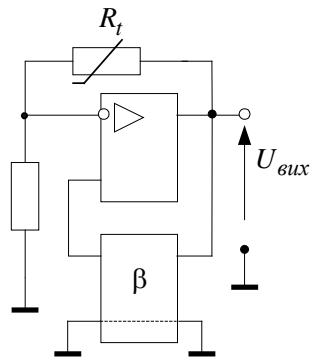
Діючи аналогічно, як і в попередньому випадку, знаходимо, що на частоті  $\omega_0 = 1/\sqrt{6}RC$  коефіцієнт  $\beta$  стає від'ємним числом  $\beta_0=-1/29$ , тобто фазовий зсув  $\varphi_\beta=180^\circ$ .

Отже, автогенератор будують за схемою, показаною на рис. 5.37, б, причому ОП має забезпечити коефіцієнт підсилення  $K_0>29$ , щоб виконати умову самозбудження на частоті  $\omega_r=\omega_0 = 1/\sqrt{6}RC$ .

Можливі також інші варіанти вибору чотириполюсників зворотного зв'язку. Із наведених прикладів випливає, що частота коливань *RC*-автогенераторів обернено пропорційна до значень параметрів *R* і *C* елементів схеми. Малогабаритні резистори та конденсатори можуть мати великі номінальні значення параметрів, тому *RC*-автогенератори доцільно застосовувати для генерування низькочастотних коливань, причому нижня межа частотного діагнозу може сягати значень, менших за 1 Гц. Верхня межа частотного діапазону обмежується значеннями паразитних ємностей, а також мінімальними значеннями опорів резисторів, за яких допустимі струми підсилювальних елементів ще можуть забезпечити напруги потрібних амплітуд. Практично *RC*-автогенератори можуть генерувати коливання з частотами, які сягають значень сотень кілогерц.

*RC*-чотириполюсники зворотного зв'язку мають невисоку частотну вибірковість, тому підсилювальний елемент у схемі *RC*-автогенератора повинен працювати практично в лінійному режимі, щоб не допускати значних нелінійних спотворень. Це означає, що обмеження зростання амплітуди коливань автогенератора під час самозбудження повинно здійснюватись не за рахунок нелінійності амплітудної характеристики підсилювача, а іншими способами. Схему *RC*-автогенератора будують так, щоб обмеження амплітуди здійснювалось у колі зворотного зв'язку. Для цього в коло зворотного зв'язку вмикають елемент, параметри якого залежать від амплітудних значень струму, а саме теплоінерційний елемент. Такими елементами є терморезистори, лампи розжарювання тощо. Оскільки завдяки значній теплоінерційності опір цих елементів у межах одного періоду коливань залишається незмінним, то вони не спотворюють форми гармонічного струму і тому вищі гармоніки практично відсутні. У сучасних *RC*-автогенераторах найчастіше застосовують напівпровідникові терморезистори, опір яких із зростанням амплітуди прикладеної до них напруги зменшується.

На рис. 5.39 показано один з найпростіших способів стабілізації амплітуди за допомогою терморезистора  $R_T$ , який увімкнутий в коло від'ємного зворотного зв'язку. У разі збільшення амплітуди коливань автогенератора опір терморезистора зменшується, внаслідок чого від'ємний зворотний зв'язок посилюється і амплітуда коливань повертається до попереднього значення.



**Рис.5.39.** Стабілізація амплітуди коливань RC- автогенератора за допомогою терморезистора

Для стабілізації амплітуди RC-автогенераторів застосовують також світлодіоди, опір яких зменшується зі збільшенням амплітуди коливань, або стабілітрони, які забезпечують обмеження амплітуди на рівні напруги стабілізації.

### Контрольні питання до розділу 5

1. Назвіть можливі перетворення сигналів в електронних колах.
2. Які з названих вище перетворень сигналів можливі лише у нелінійних колах?
3. Поняття функції підсилення.
4. Для чого використовують частотну фільтрацію сигналів?
5. Назвіть переваги активних фільтрів порівняно з пасивними.
6. Амплітудно-частотні характеристики фільтрів, їхні різновиди.
7. Які вимоги ставлять до ФЧХ фільтрів?
8. Якими основними параметрами характеризуються підсилювачі сигналів?
9. Означення коефіцієнта стабілізації.
10. Які вимоги ставляться до В/А характеристик нелінійних елементів, які використовуються у стабілізаторах напруги (струму)?
11. Які ви знаєте схеми двопівперіодних випрямлячів, порівняйте їх.
12. Роль фільтра у випрямленні змінного струму.
13. Назвіть властивості елементарних підсилювальних каскадів залежно від способу вмикання транзисторів.
14. Дайте означення додатного та від'ємного зворотного зв'язку.
15. Поясніть принцип перетворення частоти за допомогою гетеродина.
16. Порівняйте властивості послідовного та паралельного стабілізаторів.
17. Назвіть призначення основних елементів схеми випрямляча: трансформатора, випрямних елементів та згладжувального фільтра.
18. Порівняйте властивості однопівперіодної, двопівперіодної та мостової схем фільтра.
19. Назвіть принцип побудови та призначення основних елементів структурної схеми перетворювача спектра.
20. Проаналізуйте принцип дії частотного модулятора, побудованого з використанням варикапа.
21. Поясніть принцип дії амплітудних детекторів.
22. Поясніть фізичний зміст квадратичного та лінійного детектування.
23. Поясніть фізичний зміст умови самозбудження автогенератора гармонічних коливань.
24. У чому полягають умови балансу амплітуд та балансу фаз автогенератора гармонічних коливань?
25. Поясніть принцип обмеження зростання амплітуди коливань в RC-автогенераторах. У чому полягає його відмінність від обмеження зростання амплітуди в LC-автогенераторах?

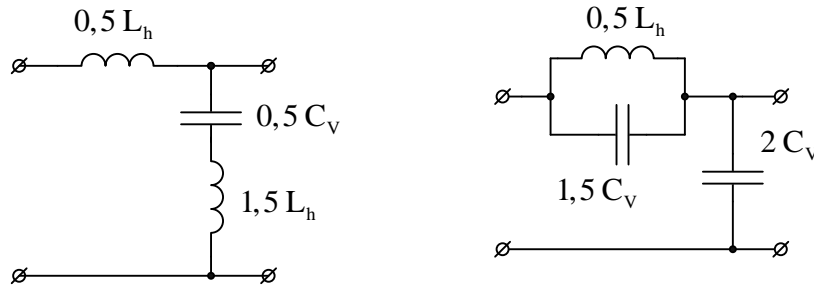


## Приклади розв'язання типових задач

**Задача 5.1.** Накресліть схеми послідовно-похідного та паралельно-похідного фільтрів нижніх частот типу  $m$  та вкажіть значення параметрів їхніх елементів, якщо значення параметрів прототипу дорівнюють  $L_h$  та  $C_v$ , а  $m=0,5$ .

### Розв'язання.

На підставі рис. 5.3 будемо схеми послідовно-похідного та паралельно-похідного ФНЧ типу  $m$ .



**Задача 5.2.** У схемі потроювача частоти використано високодобротне паралельне коливальне коло, яке виділяє третю гармоніку вхідного сигналу і у 150 разів послаблює основну (першу) гармоніку. Визначте добротність коливального кола.

### Розв'язання.

Коливальне коло настроєне на частоту третьої гармоніки і його опір для цієї гармоніки є максимальним і, згідно з (5.32), дорівнює резонансному опоріві  $R_0$ . Частота першої гармоніки у три рази нижча від резонансної частоти кола, тобто  $\omega_1 = \omega_0/3$  і, отже, узагальнене розстроєння для

цієї частоти дорівнює  $\varepsilon_1 = \frac{8}{3} Q$ . Модуль комплексного опору коливального кола для першої гармоніки у 150 разів менший від резонансного опору кола, тобто, як випливає із (5.32),  $\sqrt{1 + \varepsilon_1^2} = 150$ .

З цієї умови визначаємо значення добротності коливального кола  $Q \approx 56$ .

## Приклади задач для самоконтролю

**Задача 5.3.** На підставі умови прозорості фільтра визначте граничні частоти для фільтрів ФНЧ та ФВЧ типу  $K$  (рис. 5.2, б та рис. 5.2, в) якщо значення ємності та індуктивності дорівнюють:

- а) для ФНЧ:  $C=0,05$  мкФ;  $L=100$  мГн;
- б) для ФВЧ:  $C=4 \cdot 10^3$  пФ;  $L=1$  мГн.

**Задача 5.4.** Знайдіть значення коефіцієнта нелінійних спотворень підсилювача, якщо амплітуди гармонічних складових вихідного сигналу відповідно дорівнюють:  $U_{m1}=5$  В;  $U_{m2}=0,2$  В;  $U_{m3}=0,05$  В.

**Задача 5.5.** У підсилювальному каскаді використано послідовно-паралельний зворотний зв'язок (рис. 5.10), за якого комплексний коефіцієнт передавання напруги чотирьополосника зворотного зв'язку на певній частоті дорівнює  $\underline{\beta} = 0,02 e^{-j120^\circ}$ . Визначте, як зміниться комплексний коефіцієнт підсилення напруги підсилювача, якщо без зворотного зв'язку він дорівнював  $\underline{K} = 50 e^{-j70^\circ}$ .

**Задача 5.6.** Автогенератор гармонічних коливань побудовано за структурною схемою, зображеною на рис. 5.32. Перевірте, чи самозбудиться автогенератор, якщо комплексні коефіцієнти передавання напруги його складових частин відповідно дорівнюють:

$$\underline{K} = 20e^{j30^\circ}; \underline{\beta} = 20e^{j30^\circ}.$$

## 6. Лінійні кола з розподіленими параметрами

### 6.1. Вступні зауваження

У попередніх розділах ми розглянули такі моделі електронних кіл, процеси в яких можна описати звичайними диференційними рівняннями стосовно струмів та напруг, тобто струми та напруги яких були функціями часу:  $i = i(t)$ ;  $u = u(t)$ . Ці моделі використовують на порівняно низьких частотах, коли довжина хвилі електромагнітних коливань значно більша від геометричних розмірів досліджуваного кола. За таких умов в електронних колах можна виділити окремі ділянки, у кожній з яких зосереджений певний фізичний ефект – нагромадження енергії електричного чи магнітного поля, перетворення електричної енергії на тепло чи на інші види енергії, перетворення енергії сторонніх сил неелектричного характеру на електричну енергію. Замінюючи кожну таку ділянку відповідним ідеалізованим компонентом – конденсатором, котушкою індуктивності, резистором, джерелом електричної енергії, отримують еквівалентну електричну схему, до складу якої входить скінченна кількість компонентів зі скінченними параметрами. Вважають, що струм у всіх послідовно з'єднаних компонентах кола в конкретний момент часу є однаковим. Такі кола називають колами із зосередженими параметрами.

*Особливість електронних кіл з розподіленими параметрами – це урахування польових ефектів, зокрема хвильових електромагнітних процесів.*

У теорії кіл розглядають переважно одновимірні кола з розподіленими параметрами, в яких параметри розподілені вздовж довжини кола. В таких колах струми та напруги є не лише функціями часу  $t$ , але і координати  $x$ , яку відраховують вздовж довжини кола:

$$i = i(x, t), \quad (6.1a)$$

$$u = u(x, t). \quad (6.1б)$$

Тому процеси в колах з розподіленими параметрами описують диференційними рівняннями в частинних похідних.

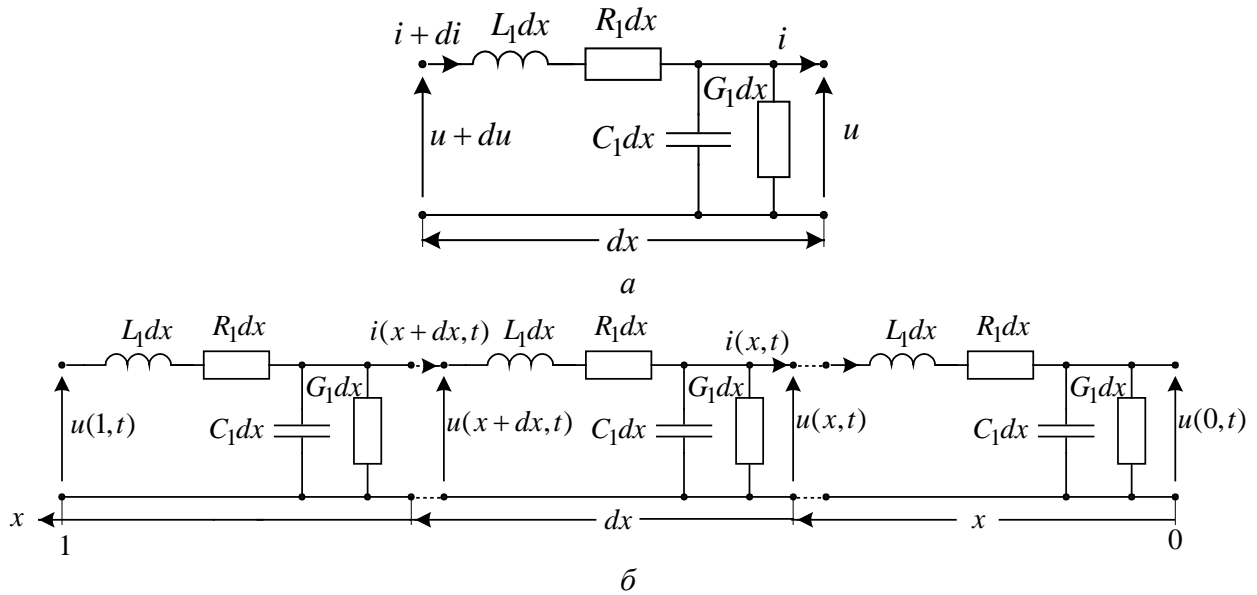
Для кіл з розподіленими параметрами вважають, що параметри елементарних ділянок кола є величинами сталими і не залежать від значень струмів та напруг, і для кількісної оцінки використовують т. зв. погонні параметри  $R_1, L_1, C_1$ , тобто такі, що припадають на одиницю довжини кола і мають розмірність відповідно Ом/м; Гн/м; Ф/м. Погонні параметри можуть мати однакові значення на усіх ділянках кола або можуть змінюватись уздовж кола за певним законом. Лінійні кола з розподіленими параметрами, в яких погонні параметри є сталими і не залежать від координати  $x$ , називають однорідними. Кола з розподіленими параметрами, в яких значення погонних параметрів змінюються вздовж кола, тобто вони є функціями координати  $x$ , називають неоднорідними.

Кола з розподіленими параметрами відіграють важливу роль у сучасній радіоелектроніці, яка активно освоює високочастотні діапазони електромагнітних коливань. Зокрема, такими колами є лінії передавання високочастотної енергії (відкриті двопровідні лінії та коаксіальні кабелі) від передавача до антени та від антени до радіоприймача тощо. На ультракоротких хвилях відрізки таких ліній використовують як смугові фільтри або як коливальні системи (резонатори), а також застосовують їх під час вимірювання довжини хвилі, амплітуди коливань, резистивних та реактивних опорів.

### 6.2. Еквівалентна схема та рівняння довгої лінії

Розглянемо однорідну довгу лінію, яка складається із двох паралельно розміщених провідників. Кожна елементарна ділянка такої лінії, оточена електричним та магнітним полями, буде одночасно мати доволі малі ємність, індуктивність, опір втрат та провідність середовища. Хоча для лінії загалом не можна безпосередньо записати рівняння Кірхгофа, проте для будь-якої елементарної ділянки лінії можна скласти еквівалентну схему з використанням погонних параметрів лінії і застосувати для аналізу цієї ділянки методи теорії кіл.

**Довгу лінію утворюють два або більше паралельних ізольованих між собою провідників, відстань між якими є набагато меншою за їхню довжину.**



**Рис. 6.1.** Еквівалентна схема елементарної ділянки (а) та довгої лінії (б)

На рис. 6.1, а зображена еквівалентна схема елементарної ділянки довгої лінії завдовжки  $dx$ , де  $L_1 dx$  – результуюча індуктивність обох провідників цієї ділянки;  $C_1 dx$  – ємність між провідниками ділянки;  $R_1 dx$  – опір втрат в обох провідниках ділянки;  $G_1 dx$  – провідність витоку, яка характеризує втрати в середовищі на ділянці  $dx$ , у якому розміщені провідники довгої лінії. Своєю чергою  $L_1, C_1, R_1, G_1$  – це відповідно погонна індуктивність, погонна ємність, погонний опір втрат та погонна провідність витоку.

Еквівалентна схема довгої лінії скінченної довжини складається із нескінченної кількості елементарних ділянок, як показано на рис. 6.1, б.

Відлік координати  $x$  вздовж лінії можна здійснювати, починаючи від початку або від кінця лінії. Досвід показує, що, коли відлік ведуть від кінця лінії, математичні вирази спрощуються. Тому будемо вести відлік координати  $x$ , починаючи від кінця лінії, як показано на рис. 6.1, б.

Завдання аналізу одновимірних кіл з розподіленими параметрами полягає у визначенні характеру зміни струмів та напруг вздовж координати  $x$  та у знаходженні частотних чи часових характеристик кіл відносно зовнішніх виводів.

**Змінні, які описують електронні кола з розподіленими параметрами, зокрема довгу лінію, залежать як від часу, так і від просторових координат, тобто є функціями багатьох змінних.**

Щоб знайти напругу та струм у будь-якій точці довгої лінії, розглянемо елементарну ділянку завдовжки  $dx$ , яка розміщена на відстані  $x$  від кінця лінії (рис. 6.1, б). Позначимо напругу та струм на виході ділянки, тобто в точці з координатою  $x$ , відповідно  $u(x, t)$  та  $i(x, t)$ , а значення напруги та струму на вході цієї ділянки, тобто в точці з координатою  $x + dx$ , – відповідно  $u(x + dx, t)$  та  $i(x + dx, t)$ . Очевидно, що прирости напруги та струму на ділянці лінії завдовжки  $dx$  дорівнюють:

$$u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx; \tag{6.2a}$$

$$i(x + dx, t) - i(x, t) = \frac{\partial i}{\partial x} dx. \quad (6.26)$$

Звернувшись до еквівалентної схеми елементарної ділянки довгої лінії (рис. 6.1, а), можемо записати на підставі законів Кірхгофа рівняння для приростів напруг та струмів на елементарній ділянці лінії завдовжки  $dx$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = (i + di)R_1 dx + L_1 dx \frac{\partial(i + di)}{\partial t}; \quad (6.3a)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} dx = uG_1 dx + C_1 dx \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6.36)$$

Нехтуючи величинами другого порядку малості в (6.3a,б), після нескладних спрощень запишемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (6.4a)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6.46)$$

Рівняння (6.4a,б) які описують взаємозв'язок між струмами і напругами елементарної ділянки довгої лінії, називають телеграфними рівняннями. Як бачимо, ці рівняння є диференціальними рівняннями в частинних похідних для миттєвих значень струмів  $i = i(x, t)$  та напруг  $u = u(x, t)$ .

Щоб знайти розв'язок цих рівнянь, зручно використати операторний метод, який дає змогу перейти від розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних для миттєвих значень до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, записаних стосовно операторних зображень струмів  $I(x, p)$  та напруг  $U(x, p)$ . Згідно з (4.28) операторні зображення струмів та напруг для нашого прикладу запишемо так:

$$I(x, p) = \int_0^{\infty} i(x, t) e^{-pt} dt \div i(x, t); \quad (6.5)$$

$$U(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt \div u(x, t). \quad (6.6)$$

Отже, помноживши ліву та праву частини (6.4a,б) на  $e^{-pt}$  та проінтегрувавши в межах від  $t = 0$  до  $t = \infty$ , отримаємо:

$$\frac{dU(x, p)}{dx} = (R_1 + pL_1)I(x, p) - L_1 i(x, 0); \quad (6.7a)$$

$$\frac{dI(x, p)}{dx} = (G_1 + pC_1)U(x, p) - C_1 u(x, 0). \quad (6.76)$$

де функції  $i(x, 0)$  та  $u(x, 0)$  описують розподіл струму та напруги лінії при  $t = 0$ , тобто вони визначають початкові умови.

Зауважимо, що оскільки в рівняннях (6.7a,б) наявні похідні невідомих функцій  $U(x, p)$  та  $I(x, p)$  лише за однією змінною, то частинні похідні цих функцій за координатою  $x$  замінені звичайними (повними) похідними.

За нульових початкових умов запишемо:

$$\frac{dU(x, p)}{dx} = (R_1 + pL_1)I(x, p); \quad (6.8a)$$

$$\frac{dI(x, p)}{dx} = (G_1 + pC_1)U(x, p). \quad (6.8b)$$

Позначимо:

$Z_1(p) = R_1 + pL_1$  – операторний погонний опір лінії;

$Y_1(p) = G_1 + pC_1$  – операторна погонна провідність лінії.

Рівняння (6.8a, 6.8b) можна звести до одного диференційного рівняння, записаного відносно операторного зображення напруги або струму. Продиференціювавши ліву і праву частини (6.8a) за змінною  $x$  та підставивши в нього (6.8b), одержуємо:

$$\frac{d^2U(x, p)}{dx^2} = Z_1(p) \cdot Y_1(p) \cdot U(x, p). \quad (6.9)$$

Диференційне рівняння для операторного зображення струму має аналогічний вигляд:

$$\frac{d^2I(x, p)}{dx^2} = Z_1(p) \cdot Y_1(p) \cdot I(x, p). \quad (6.10)$$

Позначимо:  $\gamma^2(p) = Z_1(p) \cdot Y_1(p) = (R_1 + pL_1)(G_1 + pC_1)$ .

Величину  $\gamma(p) = \sqrt{Z_1(p) \cdot Y_1(p)} = \sqrt{(R_1 + pL_1)(G_1 + pC_1)}$  називають операторним коефіцієнтом поширення.

Отже, як випливає з (6.9) та (6.10), розподіл операторних зображень струмів та напруг у однорідній довгій лінії описують лінійні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок рівняння (6.9) має вигляд:

$$U(x, p) = A_1(p)e^{\gamma(p)x} + A_2(p)e^{-\gamma(p)x}, \quad (6.11)$$

де  $A_1(p), A_2(p)$  – сталі інтегрування, які визначаються граничними умовами, тобто значеннями функцій  $U(x, p)$  та  $I(x, p)$  на кінці ( $x = 0$ ) або на початку ( $x = l$ ) лінії.

**Довга лінія є однорідною тоді, коли її параметри не залежать від просторової координати.**

Підставивши (6.11) у (6.8a), визначаємо вираз для операторного зображення струму:

$$I(x, p) = \left[ A_1(p) \cdot \gamma(p)e^{\gamma(p)x} - A_2(p) \cdot \gamma(p)e^{-\gamma(p)x} \right] / Z_1(p). \quad (6.12)$$

Позначимо:  $Z_1(p)/\gamma(p) = \sqrt{(R_1 + pL_1)/(G_1 + pC_1)} = Z_l(p)$  – операторний опір довгої лінії.

Отже, остаточно запишемо:

$$I(x, p) = \left[ A_1(p) \cdot e^{\gamma(p)x} - A_2(p) \cdot e^{-\gamma(p)x} \right] / Z_l(p). \quad (6.13)$$

Рівняння (6.11) та (6.13) описують операторні зображення напруги та струму на довільній відстані  $x$  від кінця лінії при довільній зовнішній дії на вході лінії. У цьому полягає універсальність цих рівнянь.

Для визначення конкретних зображень потрібно попередньо знайти сталі інтегрування, які відповідають граничним умовам на кінці чи на початку лінії.

Далі розглянемо властивості однорідної довгої лінії в усталеному режимі гармонічних коливань та в перехідному режимі.

### 6.3. Однорідна довга лінія в усталеному режимі гармонічних коливань

#### 6.3.1. Хвильові параметри довгої лінії

Прийmemo, що на вході лінії діє джерело гармонічної напруги з частотою  $\omega$  і що в лінії існує усталений режим гармонічних коливань, тобто в усіх точках лінії напруги та струми змінюються у часі за гармонічним законом. Для визначення розподілу комплексних амплітуд напруги  $\dot{U}_m(x)$  та струму  $\dot{I}_m(x)$  вздовж однорідної лінії використаємо рівняння (6.11) та (6.13), замінивши комплексну частоту  $p$  на  $j\omega$ . Операторний коефіцієнт поширення  $\gamma(p)$  перетвориться на комплексний коефіцієнт поширення:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}, \quad (6.14)$$

а операторний хвильовий опір лінії  $Z_L(p)$  – на комплексний хвильовий опір лінії:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)/(G_1 + j\omega C_1)}, \quad (6.15)$$

Отже, після вказаної заміни отримаємо телеграфні рівняння довгої лінії у комплексній формі:

$$\dot{U}_m(x) = \underline{A}_1 e^{\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{-\underline{\gamma}x}, \quad (6.16)$$

$$\dot{I}_m(x) = \underline{A}_1 e^{\underline{\gamma}x} / \underline{Z}_L - \underline{A}_2 e^{-\underline{\gamma}x} / \underline{Z}_L. \quad (6.17)$$

*Динамічні процеси у довгій лінії являють собою сукупність хвиль, які поширюються вздовж лінії як в прямому, так і у зворотному напрямках.*

Хвильовий опір та коефіцієнт поширення називають хвильовими параметрами довгої лінії. Вони характеризують властивості однорідної довгої лінії.

Подамо комплексний коефіцієнт поширення в алгебраїчній формі:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta, \quad (6.18)$$

а комплексний хвильовий опір лінії та сталі інтегрування – у показниковій формі:

$$\underline{Z}_L = Z_L e^{j\varphi_z} \quad (6.19)$$

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}, \quad (6.20)$$

$$\underline{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2}. \quad (6.21)$$

Підставивши (6.18) – (6.21) у (6.16) та (6.17), отримуємо:

$$\dot{U}_m(x) = A_1 e^{\alpha x} \cdot e^{j(\beta x + \varphi_1)} + A_2 e^{-\alpha x} \cdot e^{-j(\beta x - \varphi_2)} \quad (6.22)$$

$$\dot{I}_m(x) = A_1 e^{\alpha x} \cdot e^{j(\beta x + \varphi_1 - \varphi_z)} / Z_L - A_2 e^{-\alpha x} \cdot e^{-j(\beta x - \varphi_2 + \varphi_z)} / Z_L. \quad (6.23)$$

Із (6.22) та (6.23) випливає, що в усталеному режимі напруга і струм в довгій лінії є сумою двох хвиль, що поширюються у взаємно протилежних напрямках. Обидві хвилі мають однакову структуру, але відрізняються знаками перед коефіцієнтами  $\alpha$  і  $\beta$ . Перша хвиля, амплітуда та початкова фаза якої зростають із збільшенням координати  $x$  (тобто з наближенням до початку лінії), рухається в напрямі від початку лінії до кінця. Цю хвилю називають прямою, або падаючою.

Друга хвиля рухається в напрямі від кінця до початку лінії. Її амплітуда та початкова фаза зменшуються із збільшенням координати  $x$ . Цю хвилю називають зворотною, або відбитою.

Отже, для комплексних амплітуд можемо записати:

$$\dot{U}_m(x) = \dot{U}_{m np}(x) + \dot{U}_{m зб}(x), \quad (6.24)$$

$$\dot{I}_m(x) = \dot{I}_{m np}(x) + \dot{I}_{m зб}(x), \quad (6.25)$$

де

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m np}(x) &= A_1 e^{\alpha x} \cdot e^{j(\beta x + \varphi_1)}; \\ \dot{U}_{m зб}(x) &= A_2 e^{-\alpha x} \cdot e^{-j(\beta x - \varphi_2)}; \\ \dot{I}_{m np}(x) &= A_1 e^{\alpha x} \cdot e^{j(\beta x + \varphi_1 - \varphi_Z)} / Z_L; \\ \dot{I}_{m зб}(x) &= -A_2 e^{-\alpha x} \cdot e^{-j(\beta x - \varphi_2 + \varphi_Z)} / Z_L. \end{aligned}$$

Розглянемо детальніше фізичний зміст отриманих результатів. Переходячи від комплексних амплітуд до миттєвих значень напруг та струмів, одержуємо:

$$u(x, t) = u_{np}(x, t) + u_{зб}(x, t), \quad (6.26)$$

$$i(x, t) = i_{np}(x, t) + i_{зб}(x, t), \quad (6.27)$$

де

$$\begin{aligned} u_{np}(x, t) &= A_1 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_1); \\ u_{зб}(x, t) &= A_2 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_2); \end{aligned}$$

*Зворотна хвиля є результатом відбивання прямої хвилі від кінця довгої лінії і її параметри залежать від навантаження, під'єданого до кінця довгої лінії.*

$$\begin{aligned} i_{np}(x, t) &= (A_1 e^{\alpha x} / Z_L) \cos(\omega t + \beta x + \varphi_1 - \varphi_Z); \\ i_{зб}(x, t) &= -(A_2 e^{\alpha x} / Z_L) \cos(\omega t - \beta x + \varphi_2 - \varphi_Z) = \\ &= (A_2 e^{-\alpha x} / Z_L) \cos(\omega t - \beta x + \varphi_2 - \varphi_Z + \pi). \end{aligned}$$

### 6.3.2. Розподіл амплітуд напруги та струму вздовж лінії

Із (6.26) та (6.27) випливає, що у довільному перетині довгої лінії на відстані  $x$  від кінця лінії обидві складові напруги та струму (пряма та зворотна хвилі) змінюються у часі за гармонічним законом з частотою  $\omega$ , яку задає джерело напруги, що діє на початку лінії. Розглянемо пряму та зворотну хвилі напруги.

Для фіксованого значення координати  $x$ , наприклад,  $x = x_i$ , амплітуда прямої хвилі напруги дорівнює  $A_1 e^{\alpha x_i}$ , причому зі збільшенням координати  $x$  (тобто з наближенням до початку лінії) амплітуда зростає за експоненціальним законом.

Для фіксованого моменту часу, наприклад  $t = t_1$ , розподіл миттєвих значень прямої хвилі напруги описує вираз:

$$u_{np}(x, t_1) = A_1 e^{\alpha x} \cos(\omega t_1 + \beta x + \varphi_1); \quad (6.28)$$



Через деякий проміжок часу  $\Delta t$  розподіл зміниться і в момент часу  $t_2 = t_1 + \Delta t$  дорівнюватиме

$$u_{np}(x, t_2) = A_1 e^{\alpha x} \cos(\omega t_2 + \beta x + \varphi_1). \quad (6.29)$$

Цю зміну розподілу можна уявити собі як переміщення прямої хвилі напруги вздовж лінії, як зображено на рис. 6.2, а. Для визначення швидкості поширення прямої хвилі напруги вздовж лінії розглянемо деяку точку  $M_1$  (рис. 6.2, а), якій в момент часу  $t_1$  відповідає миттєве значення повної фази, що дорівнює

$$\psi_1 = \omega t_1 + \beta x_1 + \varphi_1. \quad (6.30)$$

У момент  $t_2 = t_1 + \Delta t$  таке саме миттєве значення повної фази відповідатиме точці  $M_2$  з координатою, що дорівнює  $x_2$ , тобто

$$\psi_2 = \omega t_2 + \beta x_2 + \varphi_1 = \psi_1. \quad (6.31)$$

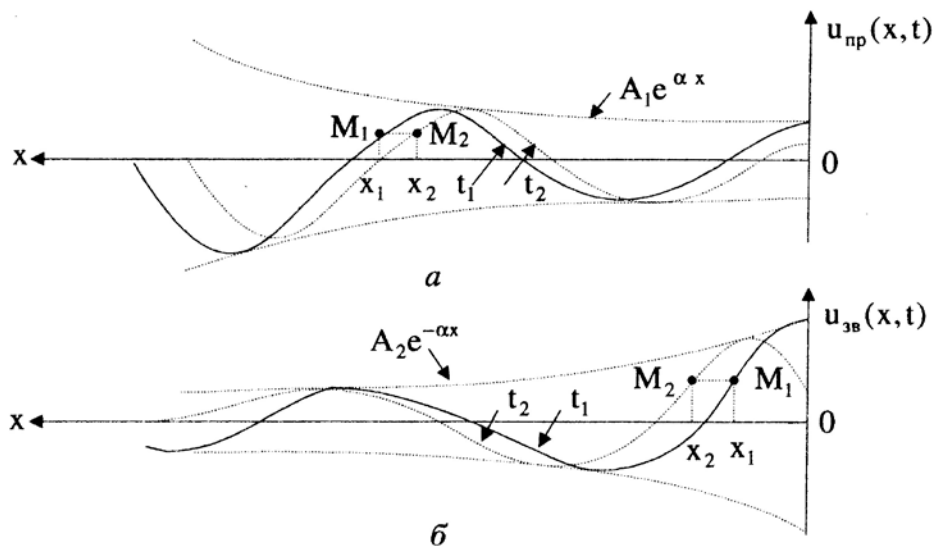


Рис. 6.2. Пряма (а) та зворотна (б) хвилі напруги у довгій лінії

**Фазова швидкість визначає швидкість переміщення зображувальної точки хвилі, для якої фаза (аргумент функції cos) є постійною.**

Прирівнявши між собою (6.30) та (6.31), отримуємо:

$$\beta(x_1 - x_2) = \omega(t_2 - t_1). \quad (6.32)$$

Позначивши  $\Delta x = x_2 - x_1$  та  $\Delta t = t_2 - t_1$ , визначаємо швидкість поширення хвилі напруги (фазову швидкість):

$$V_{np} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = -(\omega/\beta). \quad (6.33)$$

Знак мінус у виразі (6.33) вказує на те, що пряма хвиля рухається в напрямі зменшення координати  $x$ .

Розглядаючи аналогічно зворотну хвилю напруги, бачимо, що її амплітуда зменшується із збільшенням координати  $x$  за експоненційним законом  $A_2 e^{-\alpha x}$  і що ця хвиля поширюється вздовж лінії в напрямі до початку лінії (рис. 6.2, б). Швидкість її поширення за модулем така сама, як і швидкість поширення прямої хвилі, проте, оскільки рухається вона у напрямі збільшення координати  $x$ , то швидкість є додатною, тобто

$$V_{зв} = \frac{dx}{dt} = \omega / \beta. \quad (6.34)$$

Із (6.33) та (6.34) випливає, що загалом швидкість поширення хвиль у довгій лінії залежить від частоти  $\omega$  зовнішньої дії на початку лінії.

Аналіз прямої і зворотної хвиль струму  $i_{np}(x, t)$  та  $i_{зв}(x, t)$  показує, що вони мають подібні властивості, як відповідно пряма  $u_{np}(x, t)$  та зворотна  $u_{зв}(x, t)$  хвилі напруги стосовно розподілу амплітуд та напрямів і швидкостей поширення вздовж лінії.

Підсумовуючи сказане раніше, відзначимо, що дійсна частина  $\alpha$  комплексного коефіцієнта поширення  $\underline{\gamma}$  (6.18) характеризує зменшення амплітуд прямої та зворотної хвиль напруги і струму на одиницю довжини лінії в напрямі поширення цих хвиль і тому називається коефіцієнтом послаблення:

$$\alpha = \text{Re}(\underline{\gamma}) = \text{Re} \left[ \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \right]. \quad (6.35)$$

Уявна частина  $\beta$  комплексного коефіцієнта поширення  $\underline{\gamma}$  (6.18) характеризує запізнення фази прямої та зворотної хвиль напруги і струму на одиницю довжини лінії при їхньому поширенні вздовж лінії і називається коефіцієнтом фази:

$$\beta = \text{Im}(\underline{\gamma}) = \text{Im} \left[ \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \right]. \quad (6.36)$$

Відстань між двома точками хвилі (прямої чи зворотної), фази яких відрізняються на  $2\pi$ , називається довжиною хвилі  $\lambda$ .

Отже, можемо записати співвідношення для зміни повної фази прямої хвилі напруги на ділянці лінії завдовжки  $\lambda$ :

$$[\omega t + \beta(x + \lambda) + \varphi_1] - (\omega t + \beta x + \varphi_1) = 2\pi, \quad (6.37)$$

звідки отримуємо:

$$\lambda = 2\pi / \beta. \quad (6.38)$$

**Довжина хвилі у довгій лінії залежить лише від коефіцієнта фази лінії.**

Вираз (6.38) свідчить, що загалом довжина хвилі в лінії залежить від коефіцієнта фази  $\beta$ . Використовуючи вирази (6.34) та (6.38), знаходимо співвідношення між фазовою швидкістю  $V_\phi$  та довжиною хвилі  $\lambda$ :

$$\lambda = 2\pi V_\phi / \omega = V_\phi / f = V_\phi \cdot T, \quad (6.39)$$

звідки випливає, що за час, що дорівнює періоду  $T$  зовнішньої гармонічної напруги, яка діє на початку лінії, пряма та зворотна хвилі напруги та струму переміщуються на відстань, що дорівнює довжині хвилі  $\lambda$ .

Сталі інтегрування  $\underline{A}_1$  та  $\underline{A}_2$  визначимо, враховуючи граничні умови в кінці лінії.

Приймемо, що відомі комплексні амплітуди напруги  $\dot{U}_m(0)$  та струму  $\dot{I}_m(0)$  на кінці лінії. Очевидно, що ці величини визначають комплексний опір навантаження на кінці лінії:

$$\underline{Z}_н = \dot{U}_m(0) / \dot{I}_m(0). \quad (6.40)$$

Отже, на підставі (6.16) та (6.17) запишемо:

$$\dot{U}_m(0) = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad (6.41)$$

$$\dot{I}_m(0) = (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) / \underline{Z}_л; \quad (6.42)$$

звідки визначаємо:

$$\underline{A}_1 = [\dot{U}_m(0) + \underline{Z}_л \dot{I}_m(0)] / 2; \quad (6.43)$$

$$\underline{A}_2 = [\dot{U}_m(0) - \underline{Z}_л \dot{I}_m(0)] / 2. \quad (6.44)$$

Підставивши (6.43) та (6.44) у (6.24) та (6.25) і враховуючи (6.40), після нескладних перетворень отримуємо рівняння, які описують розподіл комплексних амплітуд напруги та струму вздовж довгої лінії залежно від координати  $x$ :

$$\dot{U}_m(x) = \dot{U}_m(0) \text{ch} \underline{Z}_л \gamma x + \underline{Z}_л \dot{I}_m(0) \text{sh} \underline{Z}_л \gamma x; \quad (6.45)$$

$$\dot{I}_m(x) = \dot{I}_m(0) \text{ch} \underline{Z}_л \gamma x + [\dot{U}_m(0) / \underline{Z}_л] \text{sh} \underline{Z}_л \gamma x. \quad (6.46)$$

*Модуль комплексного коефіцієнта відбиття визначає зміну амплітуди відбитої хвилі стосовно тієї, що падає, а його аргумент є зміною фази хвилі при її відбитті від кінця довгої лінії.*

### 6.3.3. Коефіцієнт відбиття лінії

Розподіл напруг і струмів у довгій лінії залежить, з одного боку, від хвильових параметрів лінії, а з іншого боку – від ступеня узгодження лінії з джерелом енергії, що діє на початку лінії, та з навантаженням, під'єднаним на кінці лінії. Ступінь узгодження лінії з джерелом та з навантаженням характеризують коефіцієнти відбиття.

Комплексними коефіцієнтами відбиття напруги та струму довгої лінії називають відповідно відношення комплексних амплітуд напруг чи струмів відбитої (зворотної) та падаючої (прямої) хвилі у довільному перетині лінії:

$$\underline{p}_u(x) = \dot{U}_{m\text{зв}}(x) / \dot{U}_{m\text{пр}}(x) = \underline{A}_2 e^{-2\gamma x} / \underline{A}_1; \quad (6.47)$$

$$\underline{p}_i(x) = \dot{I}_{m\text{зв}}(x) / \dot{I}_{m\text{пр}}(x) = -\underline{A}_2 e^{-2\gamma x} / \underline{A}_1. \quad (6.48)$$

Як бачимо, комплексні коефіцієнти відбиття  $\underline{p}_u(x)$  та  $\underline{p}_i(x)$  відрізняються лише знаком, тому звичайно розглядають лише один коефіцієнт – комплексний коефіцієнт відбиття напруги і називають його коефіцієнтом відбиття лінії  $\underline{p}(x) = \underline{p}_u(x) = -\underline{p}_i(x)$ .

Підставивши (6.43) та (6.44) в (6.47) та враховуючи (6.40), знаходимо коефіцієнт відбиття лінії:

$$\underline{p}(x) = \underline{p}_u(x) = -\underline{p}_i(x) = [(\underline{Z}_н - \underline{Z}_л) / (\underline{Z}_н + \underline{Z}_л)] e^{-2\gamma x}, \quad (6.49)$$

звідки бачимо, що в кінці лінії ( $x = 0$ ) коефіцієнт відбиття набуває значення, яке залежить лише від співвідношення між опором навантаження  $\underline{Z}_н$  та хвильовим опором лінії  $\underline{Z}_л$ .

$$\underline{p}(0) = (\underline{Z}_н - \underline{Z}_л) / (\underline{Z}_н + \underline{Z}_л). \quad (6.50)$$

Аналіз виразу (6.49) показує, що модуль коефіцієнта відбиття залежить від координати  $x$ :

$$\underline{p}(x) = \dot{U}_{m\text{зв}}(x) / \dot{U}_{m\text{пр}}(x) = \underline{p}(0) e^{-2\alpha x}, \quad (6.51)$$

причому найбільше значення  $\underline{p}(0)$  він набуває в кінці лінії ( $x = 0$ ). Аргумент коефіцієнта відбиття характеризує фазовий зсув між зворотною та прямою хвилями залежно від координати  $x$ :

$$\varphi_p(x) = -(2\beta x + \varphi_1 - \varphi_2), \quad (6.52)$$

причому найменше значення він набуває в кінці лінії ( $x = 0$ ), яке дорівнює  $\varphi_p(0) = \varphi_2 - \varphi_1$ , де  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$  – фази відповідно прямої та зворотної хвиль в кінці лінії.

Із фізичних міркувань випливає, що модуль коефіцієнта відбиття не може бути більшим від одиниці, а аргумент може змінюватись у межах від  $-\pi$  до  $+\pi$ .

### 6.3.4. Усталений режим гармонічних коливань у безвтратній довгій лінії

Безвтратною вважають довгу лінію, для якої справедливі такі співвідношення між погонними параметрами:

$$R_l \ll \omega L_1; \quad G_1 \ll \omega C_1. \quad (6.53)$$

Ці співвідношення найчастіше виконуються у високочастотних лініях. При тому, як впливає із (6.14) та (6.15), хвильовий опір лінії можна вважати не комплексним, а суто резистивним:

$$\underline{Z}_l \approx \rho_l = \sqrt{L_1 / C_1}, \quad (6.54)$$

а коефіцієнт поширення – суто уявним ( $\alpha = 0$ ) і пропорційним до частоти  $\omega$ :

$$\underline{\gamma} \approx j\beta = j\omega\sqrt{L_1 C_1}. \quad (6.55)$$

Із (6.33) та (6.34) бачимо, що фазова швидкість прямої та зворотної хвиль не залежить від частоти:

$$V_\phi = V_{ze} = -V_{np} = 1 / \sqrt{L_1 C_1}. \quad (6.56)$$

Довжина хвилі у безвтратній лінії:

$$\lambda = 2\pi / \beta = 2\pi / (\omega\sqrt{L_1 C_1}) = 1 / (f\sqrt{L_1 C_1}) = T / \sqrt{L_1 C_1}. \quad (6.57)$$

**Безвтратною довгою лінією є лінія, в якій погонний опір провідників є нульовим, а ізоляторів – нескінченним.**

Коефіцієнт відбиття безвтратної лінії, згідно з (6.49), описує вираз:

$$\underline{p}(x) = \underline{p}_u(x) = -\underline{p}_i(x) = [(\underline{Z}_H - \rho_l) / (\underline{Z}_H + \rho_l)] e^{-2j\beta x}, \quad (6.58)$$

звідки бачимо, що модуль коефіцієнта відбиття не залежить від координати  $x$ , змінюється лише його аргумент пропорційно до координати.

Враховуючи, що для уявного коефіцієнта поширення ( $\underline{\gamma} = j\beta$ ) гіперболічні функції перетворюються відповідно на тригонометричні ( $\text{sh}j\beta x = j\sin\beta x$ ;  $\text{ch}j\beta x = \cos\beta x$ ), отримуємо на підставі (6.45) та (6.46) рівняння, які описують розподіл комплексних амплітуд напруги та струму вздовж безвтратної довгої лінії залежно від координати  $x$ :

$$\dot{U}_m(x) = \dot{U}_m(0) \cos\beta x + j\rho_l \dot{I}_m(0) \sin\beta x; \quad (6.59)$$

$$\dot{I}_m(x) = \dot{I}_m(0) \cos\beta x + j[\dot{U}_m(0) / \rho_l] \sin\beta x. \quad (6.60)$$

Розрізняють три характерні режими роботи безвтратної довгої лінії залежно від значення коефіцієнта відбиття  $\underline{p}(x)$ :

1) режим біжучих хвиль, який існує в лінії, коли коефіцієнт відбиття  $\underline{p}(x) = 0$ . Цей режим характеризуються тим, що в лінії є лише прямі (падаючі) хвилі напруги та струму, а зворотних (відбитих) хвиль немає. Теоретично це можливо тоді, коли лінія має нескінченно велику довжину ( $x \rightarrow \infty$ ), і, як випливає із (6.58), коефіцієнт відбиття теж дорівнює нулеві, якщо опір навантаження на кінці лінії дорівнює хвильовому опорі лінії ( $\underline{Z}_H = \rho_l$ ). Таке навантаження називають узгодженим з лінією;

2) режим стоячих хвиль (режим повного відбиття), який існує в лінії тоді, коли модуль коефіцієнта відбиття дорівнює одиниці:  $|\underline{p}(x)| = 1$ . Це означає, що амплітуди прямих (падаючих) та зворотних (відбитих) хвиль у всіх перетинах довгої лінії є однаковими і відрізняються лише фазами залежно від координати  $x$ . Аналіз формули (6.58) показує, що модуль коефіцієнта відбиття безвтратної лінії дорівнює одиниці у таких випадках: а)  $Z_H = 0$ ; б)  $Z_H = \infty$ ; в)  $Z_H = jX_H$ , тобто режим стоячих хвиль може існувати у безвтратній лінії при короткому замиканні або при неробочому ході на кінці лінії, а також якщо опір навантаження лінії має суто реактивний характер;

3) режим змішаних хвиль (режим частинного відбиття), який існує в лінії тоді, коли амплітуди зворотних (відбитих) хвиль напруги та струму менші від амплітуд прямих (падаючих) хвиль. Модуль коефіцієнта відбиття менший від одиниці:  $0 < |\underline{p}(x)| < 1$ . Із (6.58) випливає, що режим змішаних хвиль встановлюється у безвтратній лінії за довільних опорів навантаження  $Z_H$ , крім випадків  $Z_H = 0$ ;  $Z_H = \infty$ ;  $Z_H = jX_H$ ;  $Z_H = \rho_H$ .

Проаналізуємо розподіл амплітуд напруги та струму вздовж лінії у названих режимах роботи безвтратної лінії.

### 6.3.4.1. Режим біжучих хвиль

Опір навантаження  $Z_H = \rho_L = \sqrt{L_1/C_1}$ .

Комплексні амплітуди напруги та струму в кінці лінії ( $x = 0$ ) взаємозв'язані співвідношенням:

$$\dot{U}_m(0) = \rho_L \dot{I}_m(0), \quad (6.61)$$

звідки бачимо, що напруга та струм навантаження збігаються за фазою.

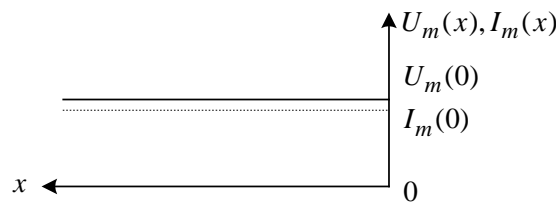
З урахуванням (6.61) на підставі (6.59) та (6.60) отримуємо:

$$\dot{U}_m(x) = \dot{U}_m(0)(\cos \beta x + j \sin \beta x) = \dot{U}_m(0)e^{j\beta x} = \dot{I}_m(0)\rho_L e^{j\beta x} \quad (6.62)$$

$$\dot{I}_m(x) = \dot{I}_m(0)(\cos \beta x + j \sin \beta x) = \dot{I}_m(0)e^{j\beta x} = [\dot{U}_m(0)/\rho_L]e^{j\beta x}. \quad (6.63)$$

**У довгій лінії без втрат амплітуда хвилі є сталою.**

Із (6.62) та (6.63) випливає, що амплітуди напруги та струму вздовж лінії не змінюються і дорівнюють відповідно амплітуді напруги та струму навантаження на кінці лінії (рис. 6.3).



**Рис. 6.3.** Розподіл амплітуд напруги та струму у безвтратній лінії в режимі біжучих хвиль

Початкові фази напруги та струму змінюються вздовж лінії пропорційно до координати  $x$ , причому зсув фаз між напругою та струмом у всіх перетинах лінії дорівнює нулеві, тобто напруга та струм у всіх перетинах збігаються за фазою.

Прийнявши  $\dot{U}_m(0) = U_m(0)e^{j0}$ , можемо на підставі (6.62) та (6.63) записати миттєві значення напруги та струму у довільному перетині безвтратної лінії:

$$u(x,t) = U_m(0)\cos(\omega t + \beta x) = [I_m(0) \cdot \rho_L]\cos(\omega t + \beta x); \quad (6.64)$$

$$i(x,t) = I_m(0)\cos(\omega t + \beta x) = [U_m(0)/\rho_L]\cos(\omega t + \beta x). \quad (6.65)$$

Вхідний опір лінії в режимі біжучих хвиль має суто резистивний характер і дорівнює хвильовому опорі лінії незалежно від довжини лінії:

$$\underline{Z}_{ex}(x) = \dot{U}_m(x) / \dot{I}_m(x) = \rho_L. \quad (6.66)$$

Миттєва потужність, яку споживає безвтратна лінія завдовжки  $x$  в режимі біжучих хвиль:

$$p(x,t) = u(x,t) \cdot i(x,t) = U_m(0)I_m(0)\cos^2(\omega t + \beta x), \quad (6.67)$$

звідки бачимо, що вона не може бути від'ємною. Отже, передавання енергії відбувається лише в одному напрямі – від джерела енергії до навантаження, і всю енергію, яку несе пряма (падаюча) хвиля, споживає навантаження.

### 6.3.4.2. Режим стоячих хвиль

Розглянемо для прикладу коротке замикання на кінці лінії ( $Z_H = 0$ ). У цьому разі, згідно з (6.58), коефіцієнт відбиття напруги на кінці лінії  $\underline{p}_u(0) = -1$ , а коефіцієнт відбиття струму  $\underline{p}_i(0) = 1$ . Це означає, що на кінці лінії пряма та зворотна хвилі напруги мають однакові амплітуди і зсунуті між собою на  $180^\circ$ , тому результуюча напруга на кінці лінії дорівнює нулеві:  $U_H(0) = 0$ . Водночас пряма та зворотна хвилі струму на кінці лінії мають однакові амплітуди і збігаються за фазою, тому результуючий струм короткого замикання на кінці лінії має амплітуду  $I_m(0)$ , що дорівнює сумі амплітуд прямої та зворотної хвиль струму. Умовно прийнемо, що початкова фаза струму в кінці лінії дорівнює нулеві, тобто  $I_m(0) = I_m(0)e^{j0}$ . Тепер на підставі (6.59) та (6.60) можемо записати рівняння, які описують розподіл комплексних амплітуд напруги та струму вздовж лінії:

$$\dot{U}_m(x) = j\rho_L I_m(0) \sin \beta x = \rho_L I_m(0) \sin \beta x \cdot e^{j\pi/2}, \quad (6.68)$$

$$\dot{I}_m(x) = I_m(0) \cos \beta x. \quad (6.69)$$

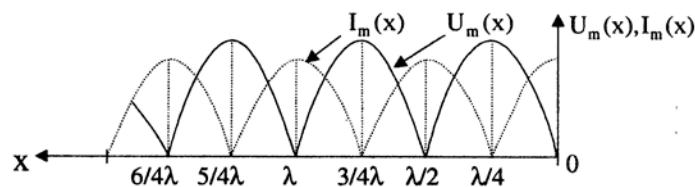
Із (6.68) та (6.69) випливає, що амплітуди напруги  $U_m(x)$  та струму  $I_m(x)$  змінюються вздовж лінії за періодичними законами:

$$U_m(x) = \rho_L I_m(0) |\sin \beta x|, \quad (6.70)$$

$$I_m(x) = I_m(0) |\cos \beta x|, \quad (6.71)$$

**Стояча хвиля виникає у безвтратній довгій лінії, коли амплітуда відбитої хвилі дорівнює амплітуді падаючої хвилі.**

причому в окремих точках лінії вони набувають максимальних значень, що дорівнюють відповідно  $U_{\max} = \rho_L I_m(0)$  та  $I_m(0)$ , а в деяких інших точках – нульових значень, як показано на рис. 6.4.



**Рис. 6.4.** Розподіл амплітуд напруги та струму вздовж безвтратної довгої лінії при короткому замиканні на кінці лінії

Такий розподіл амплітуд напруги та струму вздовж лінії пояснюється тим, що у кожному перетині довгої лінії додаються пряма та зворотна хвилі напруги і струму, які мають однакові амплітуди. У тих перетинах, де фази прямої та зворотної хвиль збігаються, амплітуда результуючої напруги (струму) набуває максимального (подвійного) значення, а у перетинах, де фази прямої та зворотної хвилі зсунуті на  $180^\circ$ , – амплітуда дорівнює нулеві.

Ті точки лінії, в яких амплітуда напруги (струму) дорівнює нулеві, називають вузлами напруги (струму), а точки, в яких амплітуда напруги (струму) має максимальне значення, називають пучностями напруги (струму).

Координати  $x_B$  вузлів напруги визначають із умови:  $\sin\beta x_B = 0$ , координати  $x_n$  пучностей напруги – із умови:  $|\sin\beta x_n| = 1$ , звідки відповідно знаходимо:

$$x_B = k\pi/\beta, \quad (6.72)$$

$$x_n = (2k+1)\pi/2\beta, \quad (6.73)$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots$

Значення координат  $x_B$  та  $x_n$  зручно відраховувати у частинах довжини хвилі  $\lambda$ . Отже, з урахуванням співвідношення (6.57) можна записати:

$$x_B = k\lambda/2, \quad (6.74)$$

$$x_n = (2k+1)\lambda/4, \quad (6.75)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Координати  $x'_B$  вузлів та  $x'_n$  пучностей струму визначають відповідно із умов:  $\cos\beta x'_B = 0$  та  $|\cos\beta x'_n| = 1$ , звідки знаходимо:

$$x'_B = (2k+1)\pi/2\beta = (2k+1)\lambda/4, \quad (6.76)$$

$$x'_n = k\pi/\beta = k\lambda/2, \quad (6.77)$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots$

Із (6.72)...(6.77) випливає, що вузлам напруги відповідають пучності струму і навпаки – вузлам струму відповідають пучності напруги, як це показано на рис. 6.4. Вузли напруги (струму) та пучності напруги (струму) чергуються з інтервалом  $\lambda/4$ , а відстань між сусідніми вузлами чи пучностями дорівнює  $\lambda/2$ . Оскільки координати пучностей та вузлів не змінюються з часом, тобто вони ніби стоять на одному місці, то цей режим роботи отримав назву “режим стоячих хвиль”.

#### 6.4. Перехідні процеси в однорідній безвтратній довгій лінії

Задачі аналізу перехідних процесів розв’язують переважно операторним методом, використовуючи рівняння (6.11) та (6.13), які описують розподіл операторних зображень напруг та струмів у однорідній довгій лінії. Для безвтратної довгої лінії операторний хвильовий опір та операторний коефіцієнт поширення відповідно дорівнюють:

$$Z_L(p) = \sqrt{L_1/C_1} = \rho_L, \quad (6.78)$$

$$\gamma(p) = p\sqrt{L_1C_1}. \quad (6.79)$$

Отже, у такому разі рівняння (6.11) та (6.13) набувають вигляду:

$$U(x, p) = A_1(p)e^{p\sqrt{L_1C_1}x} + A_2(p)e^{-p\sqrt{L_1C_1}x} \quad (6.80)$$

$$I(x, p) = \left[ A_1(p)e^{p\sqrt{L_1C_1}x} \right] / \rho_L - \left[ A_2(p)e^{-p\sqrt{L_1C_1}x} \right] / \rho_L \quad (6.81)$$

Рівняння (6.80) та (6.81) дають змогу визначити операторні зображення напруги та струму у довільному перетині довгої лінії, враховуючи задані граничні умови.

Далі розглянемо приклади визначення напруги та струму на виході безвтратної довгої лінії у різних режимах роботи.

##### а) Режим узгодженого навантаження ( $R_n = \rho_L$ ).

Приймемо, що на вході лінії, довжина якої дорівнює  $l$ , діє джерело напруги, яке описує вираз:

$$U_{вх}(t) = u_1(t) \cdot 1(t), \quad (6.82)$$

де  $1(t)$  – функція Хевісайда;  $u_1(t)$  – довільний закон зміни вхідної напруги.

Позначимо:

$U_1(p)$  – операторне зображення вхідної напруги;

$U(0,p), I(0,p)$  – операторні зображення відповідно напруги та струму на виході довгої лінії ( $x = 0$ ).

Очевидно, що операторні зображення напруги та струму на виході лінії взаємозв'язані співвідношенням:

$$U(0,p) = \rho_L I(0,p). \quad (6.83)$$

З іншого боку, звернувшись до рівнянь (6.80) та (6.81), можемо записати:

$$U(0,p) = A_1(p) + A_2(p), \quad (6.84)$$

$$I(0,p) = A_1(p)/\rho_L - A_2(p)/\rho_L, \quad (6.85)$$

Розв'язуючи сумісно (6.83) – (6.85), знаходимо:

$$A_2(p) = 0. \quad (6.86)$$

Своєю чергою, на підставі (6.80) операторне зображення напруги на вході лінії ( $x = l$ ) набуває вигляду:

$$U(l,p) = U_1(p) = A_1 e^{p\sqrt{L_1 C_1} l}, \quad (6.87)$$

звідки визначаємо:

$$A_1(p) = U_1(p) \cdot e^{-p\sqrt{L_1 C_1} l}. \quad (6.88)$$

*Перехідні процеси у довгій лінії при узгодженому навантаженні ( $R_n = \rho_L$ ) зумовлюють затримку передавання сигналу, яка залежить від значення добутку погонних ємності та індуктивності лінії.*

Зауважимо, що оскільки, згідно з (6.56),  $\sqrt{L_1 C_1} = 1/V_\phi$ , то величина  $\sqrt{L_1 C_1} \cdot l = l/V_\phi$  дорівнює часові проходження хвилі від початку до кінця лінії, тобто часові затримки  $t_3$ .

Підставивши (6.86) та (6.88) у (6.84) та (6.85), отримуємо вирази для операторних зображень напруги та струму на виході лінії:

$$U(0,p) = A_1(p) = U_1(p) \cdot e^{-pt_3}, \quad (6.89)$$

$$I(0,p) = A_1(p)/\rho_L = [U_1(p)/\rho_L] e^{-pt_3}. \quad (6.90)$$

Звертаючись до таблиці операторних зображень, визначаємо часові залежності (оригінали) напруги та струму на виході лінії:

$$u_{\text{вих}}(t) = u_1(t - t_3), \quad (6.91)$$

$$i_{\text{вих}}(t) = u_1(t - t_3)/\rho_L = i_1(t - t_3), \quad (6.92)$$

звідки бачимо, що вихідна напруга є зсунутою в часі на величину  $t_3$  вхідною напругою, а струм на виході лінії повторяє за формою вихідну напругу і теж зсунутий в часі на величину  $t_3$  стосовно вхідного струму.

Отже, безвтратна довга лінія в режимі узгодженого навантаження передає вхідний сигнал без спотворень із затримкою  $t_3$  на час, потрібний для проходження прямої хвилі від початку до кінця лінії. Ця властивість безвтратної лінії зумовлена тим, що фазова швидкість, хвильовий опір та коефіцієнт послаблення не залежать від частоти.

### **б) Режим неробочого ходу ( $Z_n = \infty$ ).**

Прийmemo, що в момент часу  $t = 0$  до входу безвтратної лінії, довжина якої дорівнює  $l$ , під'єднане джерело постійної напруги  $E$ , операторне зображення якої позначимо  $U_1(p) = E/p$ .



Очевидно, що в режимі неробочого ходу струм на виході лінії дорівнює нулеві, тому на підставі (6.81) можемо записати:

$$I(0,p) = A_1(p)/\rho_{л-} - A_2(p)/\rho_{л+} = 0, \quad (6.93)$$

звідки знаходимо:

$$A_1(p) = A_2(p). \quad (6.94)$$

З урахуванням (6.94) записуємо на підставі (6.80) співвідношення для операторного зображення напруги на вході лінії:

$$U(l,p) = A_1(p)(e^{pt_3} + e^{-pt_3}) = U_1(p), \quad (6.95)$$

звідки визначаємо сталі інтегрування:

$$A_1(p) = U_1(p)/(e^{pt_3} + e^{-pt_3}). \quad (6.96)$$

**У режимі неробочого ходу можна використовувати довгу лінію для формування послідовності прямокутних імпульсів.**

*Примітка:* у (6.95) та (6.96) позначено:  $t_3 = l\sqrt{L_1C_1}$  – час затримки лінії.

Звертаючись до (6.80) та враховуючи (6.94) і (6.96), записуємо операторне зображення напруги на виході лінії:

$$\begin{aligned} U(0,p) &= 2A_1(p) = 2U_1(p)/(e^{pt_3} + e^{-pt_3}) = \\ &= 2U_1(p)e^{-pt_3}/(1 + e^{-2pt_3}) = (2E/p)e^{-pt_3}/(1 + e^{-2pt_3}). \end{aligned} \quad (6.97)$$

Приведемо вираз (6.97) до вигляду, зручного для здійснення зворотного перетворення Лапласа. Для цього використаємо такий розклад у степеневий ряд:

$$1/(1 + e^{-2pt_3}) \cong 1 - e^{-2pt_3} + e^{-4pt_3} - e^{-6pt_3} + \dots \quad (6.98)$$

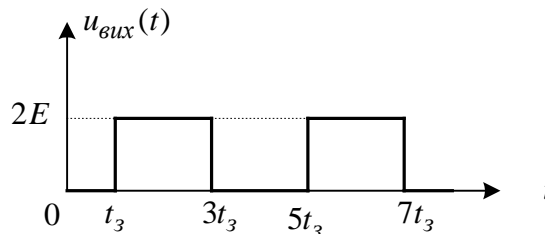
Підставляючи (6.98) у (6.97), отримуємо:

$$U(0,p) = (2E/p) \cdot (e^{-pt_3} - e^{-3pt_3} + e^{-5pt_3} - e^{-7pt_3} + \dots). \quad (6.99)$$

На підставі таблиці операторних зображень знаходимо часову залежність напруги на виході довгої лінії:

$$u_{\text{вих}}(t) = 2E[1(t-t_3) - 1(t-3t_3) + 1(t-5t_3) - 1(t-7t_3) + \dots]. \quad (6.100)$$

Графічне зображення цієї залежності показано на рис. 6.5



**Рис. 6.5.** Часова залежність вихідної напруги довгої лінії у режимі неробочого ходу

Стрибокподібний характер часової залежності вихідної напруги зумовлений процесами відбиття в лінії.

### Контрольні питання до розділу 6

1. Накресліть еквівалентну схему елементарної ділянки довгої лінії та

- пояснить фізичний зміст елементів схеми.
2. Запишіть телеграфні рівняння однорідної довгої лінії та пояснить їхній фізичний зміст.
  3. Назвіть хвильові параметри довгої лінії та запишіть формули для їхнього розрахунку за відомими погонними параметрами лінії.
  4. Дайте означення прямої та відбитої хвиль напруги і струму в довгій лінії в усталеному режимі гармонічних коливань.
  5. Як визначають фазову швидкість  $V_{\phi}$  та довжину хвилі  $\lambda$  на підставі комплексного коефіцієнта поширення  $\underline{\gamma}$  ?
  6. Що називають комплексним коефіцієнтом відбиття напруги (струму) довгої лінії? Від чого залежить модуль та аргумент цього коефіцієнта?
  7. За яких співвідношень погонних параметрів вважають довгу лінію безвтратною? Чому дорівнюють хвильовий опір та коефіцієнт поширення безвтратної лінії?
  8. Запишіть формули для визначення фазової швидкості, довжини хвилі та коефіцієнта відбиття напруги (струму) в безвтратній довгій лінії.
  9. Назвіть види усталених режимів роботи безвтратної довгої лінії та вкажіть, за яких умов вони можуть існувати.
  10. Пояснить характер розподілу амплітуд напруги та струму вздовж безвтратної лінії в режимі біжучих хвиль.
  11. Пояснить характер розподілу амплітуд напруги та струму вздовж безвтратної лінії в режимі стоячих хвиль, а також залежність вхідного опору від довжини лінії.

### Приклади розв'язання типових задач

**Задача 6.1.** Відрізок безвтратної довгої лінії довжиною  $l=50$  м використано в режимі неробочого ходу для формування періодичної послідовності прямокутних імпульсів. Визначте тривалість  $\tau$  імпульсів та період  $T$  їхнього повторення, якщо погонні параметри довгої лінії дорівнюють:

$$L_1=0,2 \text{ мкГн/м}; C_1=20 \text{ пФ/м.}$$

#### Розв'язання.

Як бачимо із рис. 6.5, тривалість імпульсів  $\tau=2t_3$ , а період їхнього повторення  $T=4t_3$  ( $t_3$  – час затримки лінії).

$$\text{Отже, } \tau=2l\sqrt{L_1C_1} = 200 \text{ нс}, \quad T = 4l\sqrt{L_1C_1} = 400 \text{ нс}.$$

### Приклади задач для самоконтролю

**Задача 6.2.** Визначте хвильовий опір та швидкість поширення хвилі у однорідній безвтратній довгій лінії, погонні параметри якої дорівнюють:

$$L_1=0,25 \text{ мкГн/м}; C_1=0,1 \text{ нФ/м.}$$

**Задача 6.3.** Розрахуйте опір навантаження  $R_n$  на кінці безвтратної довгої лінії, якщо коефіцієнт відбиття напруги на кінці лінії  $\rho_n=0,8$ , а погонні параметри лінії дорівнюють:  $L_1=0,24$  мкГн/м;  $C_1=100$  пФ/м.

**Задача 6.4.** Безвтратна довга лінія працює в усталеному режимі гармонічних коливань. Визначте фазову швидкість  $V_{\phi}$ , час затримки  $t_3$  та довжину хвилі  $\lambda$ , якщо задано: погонні параметри лінії  $L_1=0,28$  мкГн/м;  $C_1=50$  пФ/м, довжина лінії  $l=2$  м, робоча частота  $f=3 \cdot 10^8$  Гц.

## 7. Дискретні та цифрові електронні кола

Останнім часом в електроніці широко використовуються дискретні та цифрові сигнали, основні властивості яких, зокрема переваги, описано у першому розділі. Очевидно, для перетворення та оброблення таких сигналів необхідно будувати спеціальні електронні кола, які істотно відрізняються від неперервних (аналогових) електронних кіл, описаних вище. Ці електронні кола отримали відповідно назви **дискретні та цифрові**. Розглянемо названі кола детальніше.

### 7.1. Дискретні електронні кола

Дискретні електронні кола застосовуються як в електротехнічних системах, так і в радіоелектроніці. У першому випадку за допомогою таких кіл реалізують системи електроприводу з частотно-імпульсною широтно-імпульсною модуляцією. У радіоелектронних пристроях за допомогою дискретних кіл реалізують частотну фільтрацію електричних сигналів.

Дискретні електронні кола відрізняються від розглянутих вище аналогових кіл наявністю у них спеціальних компонент, названих ключами. З їхньою допомогою здійснюється під'єднання чи від'єднання до основної схеми окремих компонент чи підсхем. Зокрема, використовуючи електронні ключі, легко можна перетворити неперервний сигнал на дискретний.

Для реалізації ключів переважно використовують транзистори або тиристори. Ключі бувають вмикаючі та перемикаючі, їхні схемні позначення показано на рис. 7.1.



Рис. 7.1. Схемне позначення електронних ключів

Проста схема дискретизації аналогового сигналу за допомогою вмикаючого ключа показана на рис. 7.2.

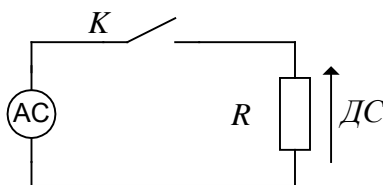


Рис. 7.2. Схема для перетворення аналогового сигналу на дискретний

На рис.7.3 зображено аналоговий (АС) та дискретний (ДС) сигнали.

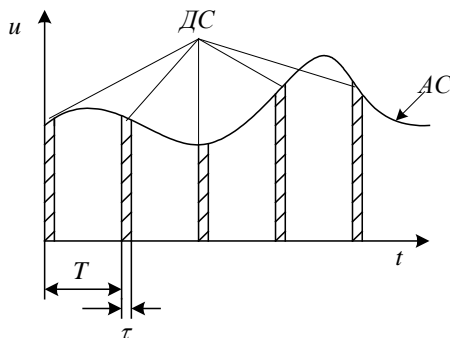


Рис. 7.3. Зображення аналогового та дискретного сигналів

Як видно з рис.7.3, у такому разі дискретний сигнал є сукупністю імпульсів тривалістю  $\tau$ , які повторюються через час  $T$  і їхня амплітуда збігається із миттєвими значеннями аналогового сигналу у відповідний момент часу. Очевидно, це реалізується завдяки тому, що ключ  $K$  періодично змінює свій стан (з періодом  $T$ ), причому час його перебування у замкнутому стані дорівнює  $\tau$ .

Дискретний сигнал визначається амплітудою відповідних імпульсів і позначається  $x^{(k)}$ :

$$x^{(k)} = x(kT) \quad (7.1)$$

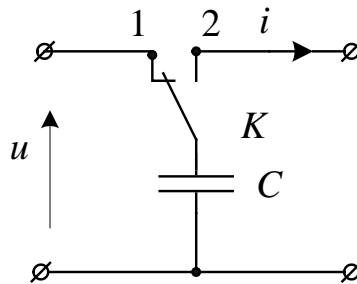
**Електронні кола, які здійснюють перетворення дискретних сигналів, називають дискретними схемами.**

Теоретично час  $\tau$  може бути як завгодно малим, оскільки зменшення  $\tau$  веде до зниження енергозатрат під час оброблення таких сигналів, однак для практичної дискретизації сигналів є істотне обмеження щодо мінімальної величини  $\tau$ , зумовлене тривалістю перехідних процесів в реальних електронних колах.

Електронні кола, які здійснюють перетворення дискретних сигналів, називають дискретними колами (схемами).

Найпоширенішим різновидом названих кіл є частотні фільтри з циклічно-комутованими конденсаторами (ЦКК). Вагомою перевагою фільтрів на ЦКК є відсутність у їхніх схемах резистивних елементів, а також можливість їхнього електронного перелаштування (зміна типу фільтра та його смуги пропускання). Відзначені переваги роблять такі фільтри зручними для реалізації за допомогою інтегральної технології й істотно зменшують втрати потужності сигналів.

Проілюструємо принцип роботи ЦКК-фільтрів на простому прикладі, розглянувши схему на рис. 7.4.



**Рис. 7.4.** Проста схема з циклічно комутованим конденсатором

На схемі літерою К позначено комутатор (перемикач), який періодично переміщається з положення 1 у положення 2 і навпаки. За час перебування комутатора у стані 1 конденсатор встигає зарядитися до напруги  $u$ , тобто його заряд дорівнює  $Cu$ , за час перебування в стані 2 будемо вважати, що цей заряд втрачається, тобто конденсатор повністю розряджається. Позначивши період перемикання комутатора К через  $T$  і допустивши, що часи перебування комутатора у стані 1 і 2 однакові та дорівнюють  $T/2$ , можна розрахувати усереднене значення струму  $i$  у такому колі за один період комутації:

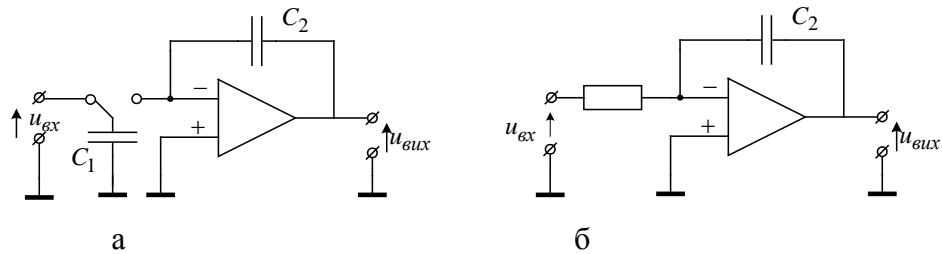
$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{C \cdot u}{T}. \quad (7.2)$$

Із співвідношення (7.2) за аналогією із законом Ома випливає, що величина  $T/C$  відіграє роль еквівалентного входного опору схеми на рис. 7.4. Його величина залежить від періоду комутації конденсатора, що забезпечує можливість зручного електронного керування.

Зауважимо, що схема, показана на рис. 7.4, одночасно виконує роль і функцію дискретизатора, тобто перетворювача аналогового сигналу на дискретний, бо вхідний сигнал –  $u$  є аналоговим, а струм  $i$  має дискретний характер.

**Основні переваги фільтрів на ЦКК – це можливість електронного перелаштування і малі потужності, необхідні для їхнього функціонування.**

Показана вище схема є базовою для побудови частотних фільтрів з використанням операційних підсилювачів. Наприклад, електронна схема, яка здійснює інтегрування вхідного сигналу (напруги), зображена на рис. 7.5.



**Рис. 7.5.** Схеми інтеграторів вхідної напруги на ОП:  
а – дискретний інтегратор; б – аналоговий інтегратор

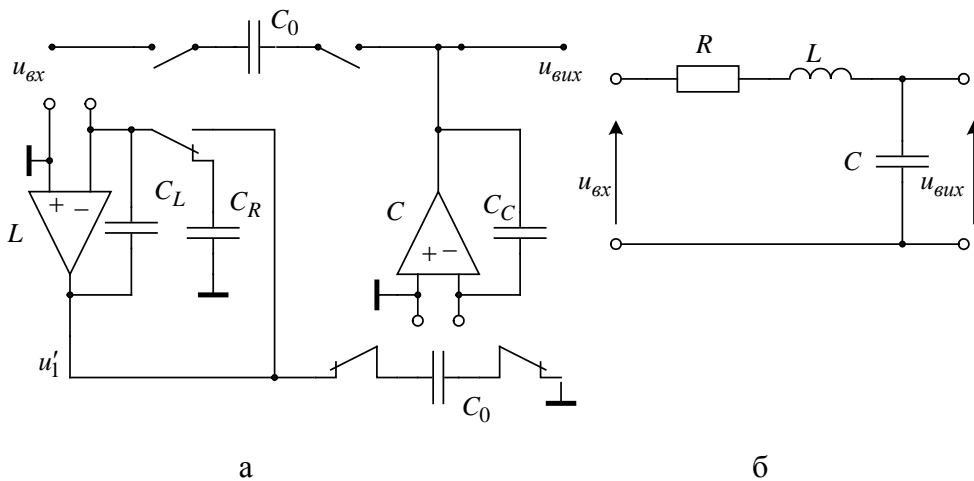
Електронна схема на рис.7.5, а здійснює інтегрування вхідної напруги  $u_{вх}$  подібно до аналогової схеми – прототипу на рис.7.5, б, тобто для обох схем справедливо:

$$u_{вих} = \int u_{вх} dt. \quad (7.3)$$

Відмінність між схемами, показаними на рис. 7.5, а і рис.7.5, б, полягає у тому, що у першій з них вихідний сигнал є дискретним, а у другій – аналоговим.

Приклад дискретного фільтра з використанням ЦКК наведено на рис.7.6. Його передавальна функція має вигляд:

$$H(p) = \frac{a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (7.4)$$



**Рис. 7.6.** Схема фільтра на ЦКК другого порядку та його аналогового прототипу

Зв'язки між параметрами схеми фільтра на ЦКК та параметрами його аналогового прототипу такі:

$$\frac{C_0}{T \cdot C_L} = \frac{R}{L}; \quad \frac{C_R}{T \cdot C_L} = \frac{R}{L}; \quad \frac{C_C}{C_0} = \frac{R \cdot C}{T}.$$

**Цифрові кола здійснюють перетворення сигналів, виконуючи логічні та арифметичні операції над їхніми цифровими відображеннями.**

Зауважимо, що на виході фільтра на ЦКК сигнал є дискретним. Щоб перетворити його знову на аналоговий сигнал, необхідно використати додатковий ФНЧ, який під'єднується до виходу схеми.

## 7.2. Цифрові електронні кола

Цифрові електронні кола призначені для перетворення цифрових сигналів, значення яких визначається у числовому вигляді для певних дискретних значень часу.

З математичного погляду оброблення цифрових сигналів зводиться до певних арифметичних операцій над числами, що визначають величину сигналу у певний та попередній

моменти часу. Оскільки у названих операціях беруть участь і попередні значення сигналу, це означає, що під час оброблення цифрових сигналів їх потрібно запам'ятовувати, що вимагає обов'язкового використання у цифрових електронних схемах елементів пам'яті. Окрім того, як відомо, всі арифметичні операції можна звести до простіших операцій – логічних, для виконання яких використовують спеціальні логічні схеми.

Отже, можна стверджувати, що цифрові електронні кола складаються із двох типів компонент: логічних схем та елементів пам'яті.

### 7.2.1. Прості логічні схеми

Серед великої кількості логічних операцій виділяють три основні, за допомогою яких можна реалізувати будь-які інші логічні перетворення. Ними є диз'юнкція, кон'юнкція та заперечення. Суть цих операцій можна пояснити за допомогою таблиць істинності:

$x_1$	0	0	1	1
$x_2$	0	1	0	1
$y$	0	1	1	1

а

$x_1$	0	1	0	1
$x_2$	0	0	1	1
$y$	0	0	0	1

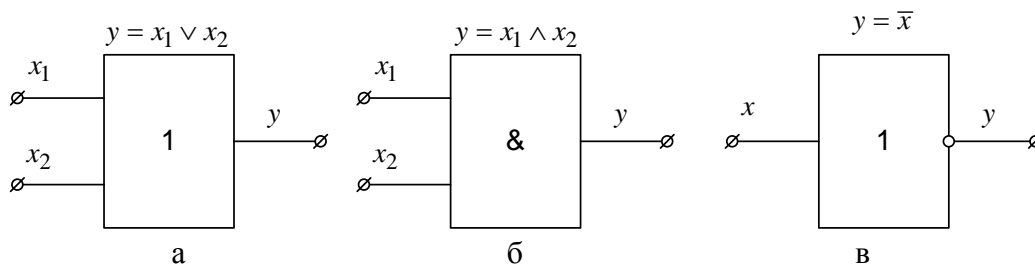
б

$x$	0	1
$y$	1	0

в

**Рис. 7.7.** Таблиці істинності типових логічних операцій:  
а – диз'юнкція; б – кон'юнкція; в – заперечення

Зауважимо, що на рис. 7.7 літерою  $x$  позначені вхідні логічні змінні, а  $y$  – вихідні, які, як відомо, можуть набувати лише два значення: 1 – “істинне”, 0 – “хибне”. Схемне позначення елементів, які виконують названі операції, та їхній формульний запис показані на рис. 7.8.

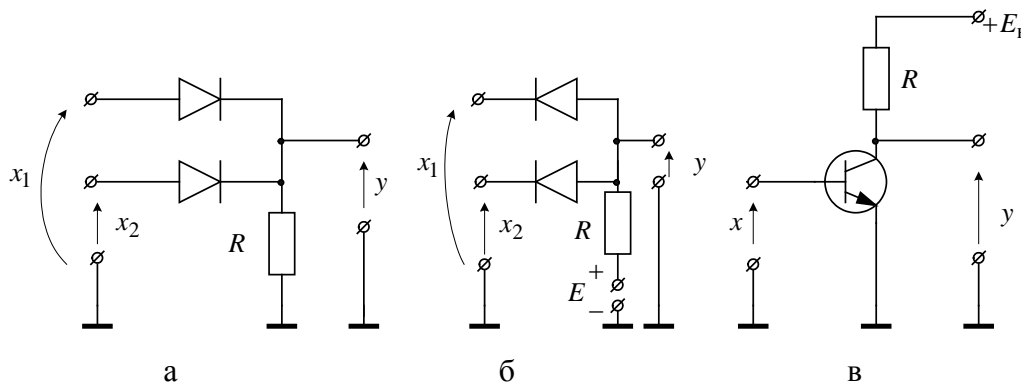


**Рис. 7.8.** Схемні позначення типових логічних елементів:  
а – схема “або”; б – схема “і”; в – схема “не”

Зауважимо, що електронні схеми, які реалізують логічні операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення, називають відповідно “або”, “і”, “не”.

**Логічні схеми є основою для створення АЛП (арифметико-логічних пристроїв), які перетворюють цифрові сигнали у визначений спосіб.**

Для схемної реалізації названих вище логічних елементів спочатку потрібно визначитись із формою подання логічних змінних за допомогою електричних величин, наприклад, напруги. Допустимо, що істинному значенню логічної змінної, тобто 1, відповідає деяка додатна напруга, а хибному – нульова. Тоді схемна реалізація типових логічних елементів буде виглядати так, як зображено на рис. 7.9.



**Рис.7.9.** Схемна реалізація логічних елементів:  
*а* – схема “або”; *б* – схема “і”; *в* – схема “не”

Діодна схема, яка реалізує операцію диз’юнкції, показана на рис. 7.9, а, передає на вихід додатну напругу, подану на будь-який вхід, а наявність діодів усуває вплив одного вхідного сигналу на інший.

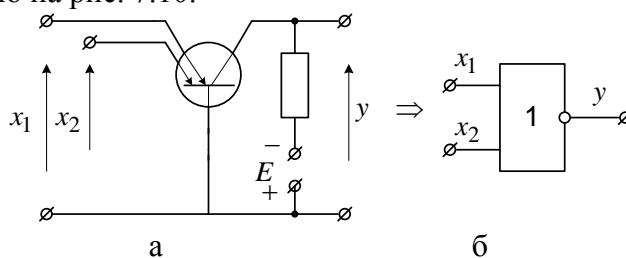
Розглядаючи схему “і” (рис.7.9, б) для реалізації операції кон’юнкції, бачимо, що наявність на вході хоча б одного сигналу “0” (тобто відповідний вхід, з’єднаний із землею) зумовлює струм через резистор  $R$ , який дорівнює  $E/R$ . Оскільки напруга на виході схеми дорівнює

$$y = E - Ri, \quad (7.5)$$

то у зазначеному випадку вона дорівнює нулеві. І лише в одному випадку, коли обидва діоди закриті додатною вхідною напругою ( $x_1 = x_2 = 1$ ), вихідна напруга  $y$  буде дорівнювати  $+E$ , тобто буде відповідати істинному значенню, що і характерно для схеми “і”.

Схема “не”, як легко бачити, є звичайним інверторним каскадом на біполярному транзисторі, в якому додатна вхідна напруга відкриває транзистор і тим самим зумовлює мінімальну вихідну напругу  $y$ , що відповідає хибному значенню вихідної змінної. За нульової вхідної напруги транзистор буде закритий, тобто на його виході буде максимальна додатна напруга, що відповідає істинному значенню вихідної змінної.

Зазначимо, що останнім часом значного поширення набули електронні схеми, які одночасно виконують декілька простих логічних операцій. Наприклад, використовуючи багатомітерні транзистори, легко реалізувати логічну схему, що послідовно виконує операції “або” – “не”, як це показано на рис. 7.10.



**Рис.7.10.** Схема “або” – “не”:

*а* – транзисторна схема, що реалізує позначення операції “або” – “не”;

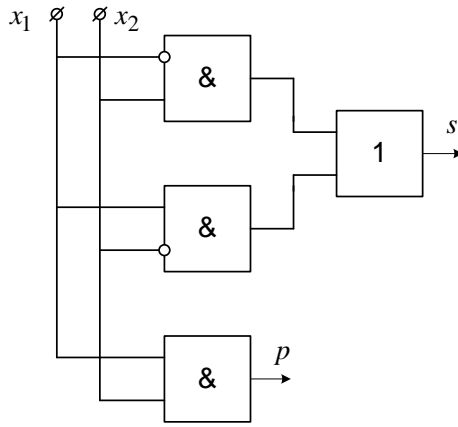
*б* – її схемне позначення

Використовуючи розглянуті вище базові логічні схеми, можна будувати схеми, які виконують будь-які арифметичні операції над цифровими сигналами.

Для прикладу наведемо схему однорозрядного двійкового суматора, що здійснює операції згідно з такою таблицею істинності:

$x_1$	0	0	1	1
$x_2$	0	1	0	1
$S$	0	1	1	0
$P$	0	0	0	1

де  $x_1, x_2$  – розряди доданків,  $S$  – відповідає розряду суми,  $P$  – сигнал перенесення у старший розряд суми.



**Рис.7.11.** Логічна схема однорозрядного суматора

Зазначимо, що цифрові електронні схеми, які виконують перетворення сигналів за допомогою простих логічних перетворень “і”, “не”, “або”, називають **комбінаційними**.

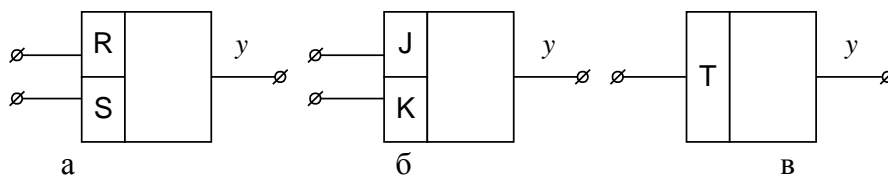
### 7.2.2. Елементи пам’яті цифрових схем

Як уже було відзначено вище, під час перетворення цифрових сигналів використовуються як поточні, так і попередні значення сигналів. Останнє вимагає запам’ятовування декількох значень цифрового сигналу з метою їхнього подальшого використання. Функцію запам’ятовування цифрових сигналів виконують спеціальні електронні схеми, названі **елементами пам’яті**. Елементи пам’яті мають три функції: запис інформації; зберігання інформації; читання інформації.

**JK-тригери є базовими елементами для створення сучасних мікросхем для запам’ятовування цифрової інформації.**

Найпоширенішими елементами пам’яті є електронні схеми, названі **тригерами**. Спільним для всіх тригерів є те, що вони можуть перебувати у двох стійких станах, одному з яких відповідає значення “1”, а іншому “0”. Стан тригера визначають за його вихідним сигналом. Перехід з одного стану в інший зумовлюється певним входним сигналом чи їхньою сукупністю.

Найпоширенішими є три типи тригерів, схемні зображення яких наведено на рис. 7.12.



**Рис. 7.12.** Схемні позначення тригерів різних типів:  
а – RS-тригер; б – JK-тригер; в – T-тригер

Таблиці істинності, які описують роботу зображених вище тригерів, мають вигляд:

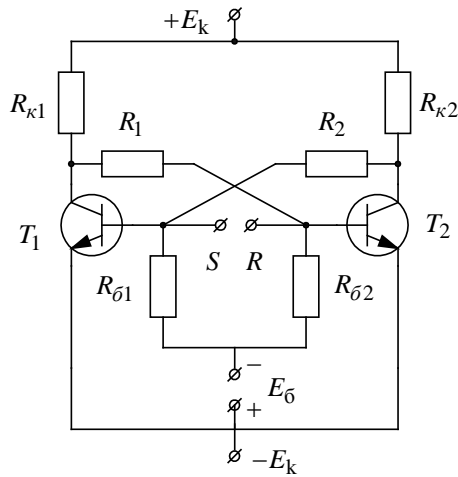
R	S	y
0	0	y
1	0	0
0	1	1
1	1	

J	K	y
0	0	y
1	0	0
0	1	1
1	1	$\bar{y}$

T	y
0	y
1	$\bar{y}$

Транзисторна реалізація RS-тригера показана на рис. 7.13





**Рис.7.13.** Транзисторна схема, яка реалізує функцію *RS*-тригера

Тригери *JK*-типу доволі просто реалізуються за допомогою польових транзисторів і, як правило, виконуються в інтегральному виконанні. Цей тригер є найуніверсальнішим, бо об'єднанням входів *J* та *K* він перетворюється на *T*-тригер і нині є основою переважної більшості інтегральних схем пам'яті.

Окремий тригер призначений для запам'ятовування одного двійкового розряду і тому, щоб запам'ятати багаторозрядне число, тригери спеціальним способом об'єднують у **реєстри**, які дають змогу зберігати багаторозрядні числа, зокрема дискретні значення цифрового сигналу.

### 7.3. Цифрові фільтри

Цифровими фільтрами називають пристрої, які здійснюють частотну селекцію цифрових сигналів.

Оскільки цифровий сигнал – це послідовність чисел, які відображають величину сигналу у певні моменти часу, то формально цифрову фільтрацію можна трактувати як деякі числові перетворення, що відображаються деяким аналітичним виразом. Обмежившись лінійним випадком, запишемо такий вираз:

$$y^{(k+1)} = \sum_{m=0}^n \epsilon_m \cdot y^{(k-m)} + \sum_{m=0}^l a_m \cdot x^{(k-m+1)}, \quad (7.6)$$

де  $x^{(i)}$  – дискретне значення вхідного сигналу, подане у цифровій формі;

$y^{(i)}$  – дискретне значення вихідного сигналу, подане у цифровій формі;

$a_i$  та  $\epsilon_i$  – деякі коефіцієнти.

Як видно із співвідношення (7.6), поточне значення на виході цифрового фільтра (ЦФ) загалом залежить від поточного, а також  $l$  попередніх значень цифрового сигналу і від  $n+1$  попередніх значень вихідного сигналу. Тоді такий ЦФ фільтр називають **рекурсивним цифровим фільтром**.

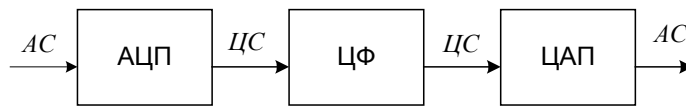
Можливий випадок, коли вихідний сигнал цілком визначається певною кількістю значень вхідного сигналу, тобто у такому разі співвідношення (7.6) виглядатиме так:

$$y^{(k+1)} = \sum_{m=0}^l a_m \cdot x^{(k-m+1)}. \quad (7.7)$$

Фільтр, робота якого описується співвідношенням (7.7), називають **нерекурсивним ЦФ**.

У разі застосування ЦФ для фільтрації аналогових сигналів необхідно використовувати додаткові пристрої, як це показано на рис.7.14.

**Цифрові фільтри дають змогу реалізувати ідеальні АЧХ.**



**Рис.7.14.** Схема оброблення аналогового сигналу за допомогою цифрового фільтра:  
*АС – аналоговий сигнал; ЦС – цифровий сигнал; АЦП – аналогово - цифровий перетворювач; ЦАП – цифрово- аналоговий перетворювач*

Очевидно, АЦП перетворює аналоговий сигнал на цифровий, а ЦАП навпаки – цифровий на аналоговий.

Перевага такого цифрового оброблення аналогових сигналів полягає в тому, що за допомогою ЦФ можна доволі просто реалізувати амплітудно-частотну характеристику будь-якого вигляду, зокрема, й ідеальну. Також параметри ЦФ є виключно стабільними і добре захищені від впливу завад, що зумовлює нині можливість їхнього використання для оброблення аудіо- і відеосигналів.

Для побудови ЦФ використовують два підходи: **апаратний і програмний.**

**Апаратна реалізація ЦФ** полягає у використанні для їхньої побудови регістрів (для зберігання потрібної кількості відліків вхідного та вихідного сигналів) та спеціальних процесорів (для виконання операцій множення та додавання).

**При програмній реалізації ЦФ** застосовують універсальні комп'ютери, запрограмовані для виконання операцій над відліком вхідного і вихідного сигналів згідно з виразом (7.6). Перший спосіб реалізації ЦФ є швидшим, тобто дає змогу фільтрувати доволі високочастотні сигнали, але потребує значних затрат на спеціальні обчислювальні пристрої (як правило, це спецпроцесори, наприклад, TMS – 320).

При програмній реалізації ЦФ швидкість оброблення сигналів є істотно нижчою, ніж у попередньому випадку, адже така реалізація потребує мінімальних затрат і є доволі гнучкою стосовно параметрів фільтра.

### Контрольні питання до розділу 7

1. Як чином перетворити аналоговий сигнал на дискретний?
2. Переваги та недоліки фільтрів на ЦКК.
3. У чому полягають істотні відмінності оброблення цифрових сигналів порівняно з аналоговими чи дискретним?
4. Назвіть базові логічні схеми, що використовуються для оброблення цифрових сигналів.
5. Призначення комбінаційних схем.
6. Які відомі типи тригерів?
7. Як перетворити *JK*-тригер на *T*-тригер?
8. Основні переваги ЦФ порівняно з аналоговим.
9. Які додаткові пристрої використовуються при цифровій фільтрації аналогових сигналів?
10. Апаратна та програмна реалізація ЦФ, їхнє порівняння.

### Приклади задач для самоконтролю

**Задача 7.1.** Побудуйте можливу схему диференціатора з використанням ЦКК та відзначте його переваги та недоліки.

**Задача 7.2.** Побудуйте схему, що реалізує операцію “або” для трьох вхідних сигналів.

**Задача 7.3.** Побудуйте схему, що реалізує операцію “і” для трьох сигналів.

**Задача 7.4.** Побудуйте логічну схему, що реалізує функцію повного двійкового суматора (враховує перенесення із молодшого розряду).

## Література:

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник М. Высшая школа, 1988, –448с.
2. Стахів П.Г., Коруд В.І., Гамола О.Є. Основи електроніки. Підручник. Львів, Новий світ 2000, 2003. –205с.
3. Мандзій Б.А., Желяк Р.І. Основи теорії сигналів. Навчальний посібник /за редакцією д.т.н., проф. Мандзія Б.А. / Львів, ЛДКФ “АТЛАС”, 2003. – 152с.
4. Бобало Ю.Я., Желяк Р.І., Кіселичник М.Д., Мандзій Б.А., Якубенко В.М. Основи радіоелектроніки. Навчальний посібник / за редакцією д.т.н., проф. Мандзія Б.А. / Львів, вид. Нац. університету “Львівська політехніка”, 2002. – 455с.
5. Мандзій Б.А., Желяк Р.І. Основи аналогової мікросхемотехніки. Навчальний посібник /за редакцією д.т.н., проф. Мандзія Б.А. / НМК “Тезаурус”, ТОО “Форвард”, Львів, 1993. –186с.



#### **Бобало Юрій Ярославович**

професор, ректор Національного університету «Львівська політехніка». Стаж педагогічної діяльності у вищій школі понад 30 років. Автор близько 130 наукових та науково-методичних праць, зокрема 6 монографій і підручників. Основна тематика наукових досліджень – теорія електронних кіл та методи забезпечення їхньої відмовостійкості.



#### **Мандзій Богдан Андрійович**

доктор технічних наук, професор кафедри теоретичної радіотехніки та радіовимірювань Національного університету «Львівська політехніка». Стаж педагогічної діяльності більше ніж 40 років. Автор понад 250 наукових та науково-методичних праць, зокрема 2 монографій та 6 підручників і посібників. Основна тематика наукових досліджень – методи автоматизованого аналізу нелінійних електронних кіл.



#### **Стахів Петро Григорович**

доктор технічних наук, професор, педагогічний стаж у вищій школі понад 30 років. Автор більше ніж 200 наукових праць, серед них 2 монографії та 3 підручники. Основна тематика наукових досліджень – теорія електричних і радіоелектронних кіл та методи їхнього комп'ютерного моделювання.



#### **Писаренко Леонід Дмитрович**

доктор технічних наук, професор кафедри електронних приладів та пристроїв Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Автор понад 130 наукових праць, серед яких 6 навчальних посібників. Працює у галузі моделювання в електроніці та інформаційної електроніки.



#### **Якименко Юрій Іванович**

доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України; перший проректор, завідувач кафедри мікроелектроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Автор понад 250 наукових та методичних праць. Фахівець у галузі електроніки та інформатики.