

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



В.М. Горєв

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ

Частина I

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2021

УДК 537.3

Г 68

Затверджено вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка» як навчальний посібник для бакалаврів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка (протокол № 8 від 20.05.2021).

Рецензенти:

О.Й. Соколовський, д-р фіз.-мат. наук, проф. каф. теоретичної фізики Дніпровського національного університету ім. Олесья Гончара;

М.О. Алексеев, д-р техн. наук, декан факультету інформаційних технологій, проф. каф. програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».

Горєв В.М.

Г 68 Теорія електричних кіл та сигналів : навч. посіб. : у 2 ч. / В.М. Горєв ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2021. – Ч. 1. – 104 с.

ISBN 978–966–350–758–3

Викладено основні відомості про кола постійного та змінного струму. Зокрема, наведено закони Кірхгофа, описано потенціальні діаграми в резистивних колах, розв'язано задачу зарядження та розрядження конденсатора у колах з постійними ЕРС, описано основні характеристики змінного струму, розкрито фізичний зміст активної та реактивної потужності, що виділяється на резисторах, конденсаторах та котушках індуктивності в колах синусоїдального змінного струму, детально описано роботу паралельного та послідовного RLC-контурів, наведено основні відомості про комплексні числа та описано символічний метод розрахунку струмів і напруг у колах синусоїдального змінного струму.

Для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка та інших спеціальностей, що вивчають теорію електричних кіл та сигналів.

УДК 537.3

ISBN 978–966–350–758–3

© В.М. Горєв, 2021

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2021

Зміст

| | |
|---|----|
| Передмова | 5 |
| 1. Вступ до теорії резистивних кіл постійного струму | 10 |
| 1.1. Анотація | 10 |
| 1.2. Базові визначення..... | 11 |
| 1.3. Послідовне та паралельне з'єднання резисторів | 13 |
| 1.4. Амперметр та вольтметр | 15 |
| 1.5. Закон Ома для повного кола. Джерела напруги та струму і схеми їх заміщення..... | 17 |
| 1.6. Потужність струму. Умова передачі максимальної потужності від джерела в коло | 20 |
| 1.7. Закон Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС..... | 22 |
| 1.8. Резюме | 22 |
| 1.9. Питання для самоконтролю | 24 |
| 2. Закони Кірхгофа та потенціальна діаграма | 25 |
| 2.1. Анотація | 25 |
| 2.2. Закони Кірхгофа | 25 |
| 2.3. Потенціальна діаграма..... | 29 |
| 2.4. Резюме | 32 |
| 2.5. Питання для самоконтролю | 32 |
| 3. Конденсатор та котушка індуктивності в колах ЕРС постійної напруги..... | 33 |
| 3.1. Анотація | 33 |
| 3.2. Конденсатор. Ємність конденсатора..... | 33 |
| 3.3. Процес розрядження конденсатора..... | 35 |
| 3.4. Процес зарядження конденсатора | 38 |
| 3.5. Котушка індуктивності. Індуктивність котушки. Перехідні процеси на котушці індуктивності..... | 40 |
| 3.6. Закони комутації | 43 |
| 3.7. Резюме | 45 |
| 3.8. Питання для самоконтролю | 46 |

| | |
|---|-----|
| 4. Кола змінного синусоїдального струму | 48 |
| 4.1. Анотація | 48 |
| 4.2. Синусоїдальний змінний струм. Діяльні значення..... | 49 |
| 4.3. Поведінка резистора, конденсатора та котушки індуктивності в колі синусоїдального змінного струму | 52 |
| 4.4. Відомості про диференційні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами | 54 |
| 4.5. Послідовний RLC-контур. Резонанс напруг. | 55 |
| 4.6. Паралельний RLC-контур. Резонанс струмів..... | 61 |
| 4.7. Потужність змінного синусоїдального струму | 65 |
| 4.8. Резюме | 70 |
| 4.9. Питання для самоконтролю | 72 |
| 5. Метод комплексних амплітуд..... | 74 |
| 5.1. Анотація | 74 |
| 5.2. Комплексні числа | 75 |
| 5.3. Комплексна амплітуда..... | 77 |
| 5.4. Підсумовування синусоїд однакової частоти. Векторна діаграма..... | 78 |
| 5.5. Векторна діаграма послідовного RLC–контур..... | 80 |
| 5.6. Векторна діаграма для паралельного RLC–контур | 84 |
| 5.7. Символічний метод | 87 |
| 5.8. Прості приклади застосування символічного методу | 90 |
| 5.9. Резюме | 95 |
| 5.10. Питання для самоконтролю | 96 |
| Підсумки..... | 98 |
| Список рекомендованої літератури..... | 103 |

Передмова

Програмні результати навчання освітньо-професійної програми кваліфікаційного рівня бакалавра «Телекомунікації та радіотехніка» спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка, які регламентовано викладати та опановувати в навчальній дисципліні «Теорія електричних кіл та сигналів»:

| Шифр | Зміст програмних результатів навчання |
|------|--|
| ПРН5 | Уміти розраховувати елементи телекомунікаційних систем, інфокомунікаційних та телекомунікаційних мереж, радіотехнічних систем та систем телевізійного й радіомовлення, згідно технічного завдання у відповідності до міжнародних стандартів, з використанням засобів автоматизації проектування, в т.ч. створених самостійно |
| ПРН6 | Уміти проектувати, в т.ч. схемотехнічно нові (модернізувати існуючі) елементи (модулі, блоки, вузли) телекомунікаційних та радіотехнічних систем, систем телевізійного й радіомовлення тощо |

Мета навчальної дисципліни «Теорія електричних кіл та сигналів» – формування результатів навчання щодо вміння теоретично описувати та експериментально досліджувати процеси у резистивних колах постійного струму та RLC–колах змінного синусоїдального струму.

За Національною рамкою кваліфікацій ключовими характерними результатами навчання для кваліфікаційного рівня бакалавра є:

- знання – концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання;

- уміння/навички – поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв’язання складних

спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання.

Дисциплінарні результати навчання, сформульовані шляхом декомпозиції програмних:

| Шифр | Зміст дисциплінарних результатів навчання (знання, уміння/навички) |
|-------------|---|
| ДРН5.1 | Знати визначення понять основних параметрів електричних кіл |
| ДРН5.2 | Уміти формулювати та виводити основні закони електричних кіл |
| ДРН5.3 | Знати схеми заміщення реальних джерел ЕРС та напруги |
| ДРН5.4 | Знати основні методи опису кіл постійного і змінного струму |
| ДРН5.5 | Уміти описувати резистивні кола постійного струму на основі законів Кірхгофа та потенціальної діаграми |
| ДРН5.6 | Уміти описувати поведінку конденсатора та котушки в колах з постійними ЕРС на основі диференціальних рівнянь |
| ДРН5.7 | Уміти виводити взаємозв'язки між напругою та струмом на резисторі, котушці та конденсаторі у колах змінного струму |
| ДРН5.8 | Уміти описувати RLC–кола змінного струму, зокрема, послідовний та паралельний RLC–контур на основі векторної діаграми, диференціальних рівнянь та символічного методу |
| ДРН5.9 | Знати визначення активної, реактивної та повної потужності змінного струму, а також їхній фізичний зміст |
| ДРН5.10 | Уміти в усталеному режимі кіл змінного струму визначати явну залежність фізичної величини від часу за її комплексною амплітудою та навпаки. |
| ДРН5.11 | Уміти виводити точні та асимптотичні часові залежності напруг на елементах RC–ланцюжка при підключенні до нього заданої зовнішньої напруги. |

| Шифр | Зміст дисциплінарних результатів навчання (знання, уміння/навички) |
|-------------|--|
| ДРН6.1 | Знати прилади, якими вимірюються параметри електричних кіл, та їх характеристики. |
| ДРН6.2 | Знати визначення частотного фільтру та основні типи частотних фільтрів. Знати визначення основних параметрів та характеристик частотних фільтрів |
| ДРН6.3 | Знати схеми реалізації найпростіших частотних фільтрів різних типів |
| ДРН6.4 | Уміти за заданою схемою реалізації частотного фільтру виводити його основні параметри та характеристики. |
| ДРН6.5 | Знати схему реалізації перетворення синусоїдального сигналу на імпульсну послідовність |
| ДРН6.6 | Уміти виводити основні параметри імпульсних послідовностей на виході пасивних формувальних схем |
| ДРН6.7 | Уміти описувати проходження прямокутної послідовності імпульсів через RC–ланцюжок в різних випадках |
| ДРН6.8 | Знати принцип перетворення періодичних сигналів на синусоїду за допомогою фільтру нижніх частот |
| ДРН6.9 | Уміти розвивати періодичні сигнали в тригонометричний ряд Фур'є та обчислювати потужності, що виділяються на кожній гармоніці сигналу |

Навчальний посібник призначено для набуття перелічених знань та умінь/навичок здобувачами кваліфікаційного рівня бакалавра спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка.

Перша частина посібника складається з 5 розділів, кожний з яких містить анотацію, основний текст і резюме.

У розділі 1 описано базові поняття кіл резистивного струму. Зокрема, у цьому розділі надано визначення електричних струму, напруги, потенціалу та опору, обґрунтовано властивості послідовного та паралельного з'єднань резисторів, описано схеми заміщення реальних джерел струму та напруги, описано умову максимальної передачі потужності від джерела в коло, виведено закони Ома для ділянки кола та для повного кола.

У розділі 2 детально описані такі методи опису кіл постійного струму, як потенціальна діаграма та закони Кірхгофа, наведено фізичне пояснення походження законів Кірхгофа.

У розділі 3 описано перехідні процеси на конденсаторі та на котушці індуктивності в колах з постійними ЕРС. Отримано точні аналітичні часові залежності напруги й струму на конденсаторі в задачах зарядження й розрядження конденсатора, наведено вирази для енергії електричного поля в конденсаторі та енергії магнітного поля в котушці, описано закони комутації та наведено приклади їх застосування.

У розділі 4 описано базові результати для кіл змінного синусоїдального струму. Описано співвідношення між амплітудами й фазами напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці, на основі розв'язання відповідних диференціальних рівнянь отримано результати для опору послідовного RLC-контур та провідності паралельного RLC-контур, а також для зсуву фаз між загальним струмом та загальною напругою на цих контурах. Наведено вирази для активної, реактивної та повної потужності, та розкрито фізичний зміст цих величин.

У розділі 5 викладено такі методи опису кіл змінного струму, як векторна діаграма та символічний метод, що базуються на понятті комплексної амплітуди. Наведено основні поняття про комплексні числа, описано алгебраїчні операції з комплексними числами та наведено визначення модуля та аргументу комплексного числа. Наведено закони Кірхгофа для комплексних амплітуд та пояснено їхнє походження. Наведено прості приклади застосування символічного методу.

В анотаціях на початку розділів сформульовано навчальні цілі у вигляді вимог до знань та умінь/навичок здобувача після вивчення розділу, що дозволяє однозначно оцінювати ступінь їхнього досягнення.

Основний текст являє собою блоки модулів самостійного значення, що підлягають контролю рівня сформованості результатів навчання.

У резюме в кінці кожного розділу віддзеркалено його ключові положення, що сполучені з реалізацією навчальних цілей.

1. Вступ до теорії резистивних кіл постійного струму

1.1. Анотація

Описано базові поняття кіл резистивного струму. Зокрема, надано визначення основних параметрів кіл, обґрунтовано властивості послідовного та паралельного з'єднань резисторів, описано схеми заміщення реальних джерел струму та напруги, описано умову максимальної передачі потужності від джерела в коло, виведено закони Ома для ділянки кола та для повного кола.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Знати визначення сили електричного струму, напруги, потенціалу та опору. Уміти виражати розмірності цих величин через базові розмірності СІ.
- Уміти виводити формули для загальних струму, напруги та опору для послідовного та паралельного з'єднань резисторів.
- Знати визначення амперметра та вольтметра. Знати, яким є опір цих приладів в ідеальному випадку і уміти обґрунтувати, чому саме таким.
- Знати визначення ідеального джерела ЕРС та ідеального джерела струму.
- Знати схеми заміщення (послідовну та паралельну) реальних джерел струму та ЕРС. Уміти обґрунтувати, при яких параметрах цих схем відповідні джерела є ідеальними.
- Знати закон Ома для ділянки кола, що не містить ЕРС. Уміти виводити закон Ома для повного кола та для ділянки кола, що містить джерело ЕРС.
- Уміти виводити вираз для потужності струму, а також співвідношення між зовнішнім загальним опором кола та внутрішнім опором джерела, при якому має місце максимальна передача потужності від джерела в коло.

1.2. Базові визначення

Електричний струм (як фізичне явище) – напрямлений (впорядкований) рух заряджених частинок. Для виникнення та підтримування електричного струму необхідні як наявність електричного поля (щоб «було кому ганяти заряди») та наявність вільних заряджених частинок (щоб «було кому рухатись» під дією поля). Напрямок струму завжди є напрямком руху позитивних зарядів.

Електричне коло – сукупність пристроїв, з'єднаних провідниками таким чином, який забезпечує можливість протікання електричного струму.

Фізична величина, що описує електричний струм – це **сила струму** I . За визначенням

$$I \equiv \frac{dq}{dt}, \quad (1.1)$$

де dt – нескінченно малий проміжок часу, а dq – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час dt . Як бачимо, *сила струму є похідною від заряду за часом*.

Поговоримо про розмірності. У цьому посібнику усі розмірності вказано в СІ. Єдиною базовою електромагнітною одиницею СІ є ампер (А), усі інші одиниці розмірності в СІ, що описують електричні або магнітні величини, виражаються в термінах ампера, а також кілограма, метра та секунди. Ампер є одиницею розмірності для сили струму: $[I] = \text{А}$. Одиницею розмірності заряду є кулон ($[q] = \text{Кл}$), на основі (1.1) бачимо, що

$$\text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}. \quad (1.2)$$

Розглянемо дві точки B та C електричного кола. Тоді **різниця потенціалів** між точками B та C – це робота по переносу одиничного позитивного заряду (тобто заряду, що дорівнює +1 Кл) з точки B в точку C . Різницю потенціалів між двома точками також називають **напругою** між двома точками. Відповідно, робота A по переносу заряду q з точки B в точку C дорівнює

$$A = q(\varphi_B - \varphi_C) = qU_{BC}, \quad (1.3)$$

де φ_B та φ_C – потенціали точок B та C відповідно та U_{BC} – напруга між точками B та C (не плутати позначення роботи та позначення ампера)! Розмірністю напруги та потенціалу у СІ є вольт: $[U] = [\varphi] = \text{В}$, на основі (1.3) бачимо, що вольт таким чином виражається через базові одиниці СІ:

$$\text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^3}, \quad (1.4)$$

тут використано відомий з механіки вираз для ньютонів через базові одиниці СІ.

Електричні кола завжди зручно описувати в термінах потенціалів. При цьому слід зауважити, що *фізичний зміст має не стільки сам потенціал, скільки їхня різниця*. Потенціали завжди задані з точністю до плюс константи, тобто якщо до всіх потенціалів кола додати одну й ту ж величину, то фізичний опис кола не зміниться. Дійсно, нехай до всіх потенціалів кола додали одну й ту ж величину φ . Тоді напруга між двома точками кола не зміниться, бо

$$U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C = (\varphi_B + \varphi) - (\varphi_C + \varphi), \quad (1.5)$$

Однак досить часто для потенціалів кола задають конкретні числові значення, базуючись на такій домовленості: потенціал заземленої точки вважається рівним нулю.

Опір – фізична величина, яка характеризує властивість тіла опиратись проходженню через нього електричного струму. Опір тіла є властивістю лише самого тіла, а не параметрів кола. В переважній більшості випадків при описі кола провали вважаються ідеальними, тобто такими, що мають нехтовно малий опір. **Резистор** – елемент кола, що має опір (тобто його опір є набагато більшим за опір провідів).

Нехай ми маємо ділянку кола між точками A та B . Нехай цією ділянкою тече струм від точки A до точки B . Тоді струм та напруга на цій ділянці пов'язані таким співвідношенням:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = IR_{AB}, \quad (1.6)$$

яке називають *законом Ома для ділянки кола, що не містить джерел*; тут R_{AB} – опір ділянки AB .

Одиницею розмірності опору в СІ є Ом, на основі (1.6) та (1.4) бачимо, що Ом таким чином виражається через базові одиниці СІ:

$$O_M = \frac{B}{A} = \frac{кг \cdot м^2}{А^2 \cdot с^3}. \quad (1.7)$$

1.3. Послідовне та паралельне з'єднання резисторів

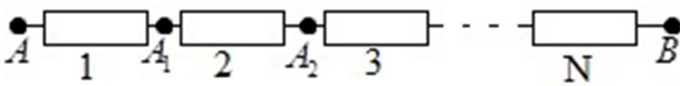


Рис. 1.1

При **послідовному** з'єднанні «кінець» кожного попереднього резистора з'єднаний з «початком» наступного, та таке з'єднання не містить розгалужень. Нехай N резисторів з'єднані послідовно (див. рис. 1.1.), опір першого резистора дорівнює R_1 , опір другого резистора дорівнює R_2 , і так далі; маємо ділянку кола між точками A та B .

Нехай за час dt ділянкою AB пройшов заряд dq . Очевидно, що цей же заряд пройшов через кожен резистор, тобто і через перший, і через другий, і так далі. Позначимо I_1 – струм через перший резистор, I_2 – струм через другий резистор, і т. д. Тоді очевидно, що

$$I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_N = \frac{dq}{dt} = I_{AB}, \quad (1.8)$$

де I_{AB} – струм через ділянку AB . Тож *при послідовному з'єднанні резисторів загальний струм через з'єднання дорівнює струму через кожен резистор; струм через усі резистори є однаковим.*

Очевидно, що загальна напруга на ділянці AB

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B. \quad (1.9)$$

У той же час, напруги на окремих резисторах

$$U_1 = U_{AA_1} = \varphi_A - \varphi_{A_1}, \quad U_2 = U_{A_1A_2} = \varphi_{A_1} - \varphi_{A_2}, \dots, \quad U_N = U_{A_{N-1}B} = \varphi_{A_{N-1}} - \varphi_B. \quad (1.10)$$

Підсумовуючи усі рівняння з (1.10), маємо

$$U_1 + U_2 + \dots + U_N = \varphi_A - \cancel{\varphi_{A_1}} + \cancel{\varphi_{A_1}} - \cancel{\varphi_{A_2}} + \cancel{\varphi_{A_2}} - \cancel{\varphi_{A_3}} + \dots + \cancel{\varphi_{A_{N-1}}} - \varphi_B = \quad (1.11)$$

$$= \varphi_A - \varphi_B = U_{AB},$$

звідки приходимо до висновку, що *при послідовному з'єднанні резисторів загальна напруга на з'єднанні є сумою напруг на всіх резисторах.*

За законом Ома для всього з'єднання

$$U_{AB} = I_{AB} R_{AB}, \quad (1.12)$$

R_{AB} – загальний опір з'єднання. У той же час, для кожного окремого резистора

$$U_1 = I_1 R_1, U_2 = I_2 R_2, \dots, U_N = I_N R_N. \quad (1.13)$$

Підсумовуючи всі рівняння з (1.13) з урахуванням (1.8) отримуємо

$$U_1 + U_2 + \dots + U_N = I_{AB} (R_1 + R_2 + \dots + R_N), \quad (1.14)$$

та на основі (1.14), (1.11) і (1.12) приходимо до висновку, що

$$R_{AB} = R_1 + R_2 + \dots + R_N, \quad (1.15)$$

тобто *при послідовному з'єднанні резисторів загальний опір з'єднання є сумою опорів усіх резисторів.*

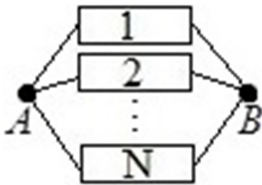


Рис. 1.2

При **паралельному** з'єднанні резисторів усі «початки» резисторів з'єднано в одній точці та всі «кінці» резисторів з'єднано в іншій точці, див. рис. 1.2. Очевидно, що для напруг справедливе таке співвідношення:

$$U_1 = U_2 = \dots = U_N = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B, \quad (1.16)$$

тобто *при паралельному з'єднанні резисторів загальна напруга на з'єднанні дорівнює напрузі на кожному резисторі; напруга на всіх резисторах є однаковою.*

Нехай за час dt ділянкою AB пройшов заряд dq_{AB} . Частина цього заряду пройшла через перший резистор, частина – через другий, і так далі, тобто

$$dq_{AB} = dq_1 + dq_2 + \dots + dq_N, \quad (1.17)$$

поділивши (1.17) на dt приходимо до висновку, що

$$I_{AB} = I_1 + I_2 + \dots + I_N, \quad (1.18)$$

тобто *при паралельному з'єднанні резисторів загальний струм через з'єднання дорівнює сумі струмів через резистори.*

З закону Ома очевидно, що для всієї ділянки виконується співвідношення

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{I_{AB}}{U_{AB}}, \quad (1.19)$$

а окремо для кожного резистора маємо

$$\frac{1}{R_1} = \frac{I_1}{U_1}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{I_2}{U_2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{R_N} = \frac{I_N}{U_N}. \quad (1.20)$$

Підсумовуючи всі рівняння з (1.20) з урахуванням (1.16) отримуємо

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} = \frac{I_1 + I_2 + \dots + I_N}{U_{AB}}, \quad (1.21)$$

та на основі (1.21), (1.19) та (1.18) приходимо до висновку, що

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}, \quad (1.22)$$

тобто *при паралельному з'єднанні резисторів підсумовуються величини, обернено пропорційні до опорів.*

1.4. Амперметр та вольтметр

Амперметр – прилад для вимірювання електричного струму. Важливо розуміти, що *амперметр завжди показує струм, який через нього проходить*, тому амперметр завжди підключають **послідовно** до тієї ділянки кола, через яку хочуть виміряти струм, бо струм на всіх елементах послідовного з'єднання є однаковим. При цьому важливо розуміти, що амперметр є суто вимірювальним приладом та *внесення амперметра до кола повинно не змінювати параметрів кола.*

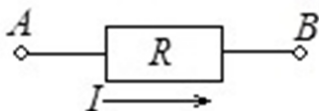


Рис. 1.3

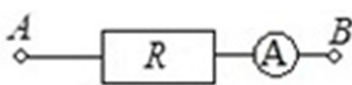


Рис. 1.4

Нехай маємо ділянку AB з загальним опором R , через яку тече струм I , який необхідно виміряти (рис. 1.3).

Нехай напруга між точками A і B дорівнює U .

Підключимо амперметр послідовно до цієї ділянки (рис. 1.4). Таке підключення амперметра не повинно змінювати струм через ділянку AB та напругу на ділянці. Тобто

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R + R_A}, \quad (1.23)$$

друга частина рівності (1.23) має місце, бо загальний опір послідовного з'єднання є сумою опорів. На основі (1.23) бачимо, що $R_A = 0$ – тобто опір ідеального амперметра дорівнює нулю. Опори реальних амперметрів, звісно, не можуть дорівнювати нулю, проте вони повинні бути набагато меншими за опори ділянок, на яких за їхньою допомогою вимірюють струм.

Вольтметр – прилад для вимірювання напруги. Важливо розуміти, що вольтметр завжди показує різницю потенціалів на своїх клеммах, тому його завжди підключають **паралельно** до тієї ділянки кола, на якій вимірюється напруга. Вольтметр – теж суто вимірювальний прилад, тому *внесення вольтметра до кола повинно не змінювати параметрів кола.*

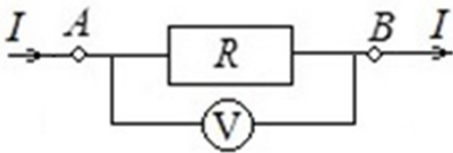


Рис. 1.5

Наприклад, нехай маємо ділянку AB загальним опором R , через яку тече струм I (див. рис. 1.5). Нехай для вимірювання напруги підключено вольтметр паралельно до ділянки AB . Тоді це внесення вольтметра має не змінити ні струм, ні напругу на ділянці, тобто

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R'} \Rightarrow R' = R, \quad (1.24)$$

де R' – загальний опір ділянки та вольтметра. На основі (1.22) маємо, що

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \Rightarrow R' = \frac{RR_V}{R + R_V}, \quad (1.25)$$

звідки на основі (1.24) та (1.25) бачимо, що $R_V \rightarrow \infty$, тому що

$$\lim_{R_V \rightarrow \infty} \frac{RR_V}{R + R_V} = R. \quad (1.26)$$

Тож опір ідеального вольтметра дорівнює нескінченності. На практиці, звісно, не існує вольтметрів з нескінченними опорами, проте опір реального вольтметра має бути набагато більшим за опір ділянки, на якій за його допомогою вимірюється напруга.

1.5. Закон Ома для повного кола. Джерела напруги та струму і схеми їх заміщення

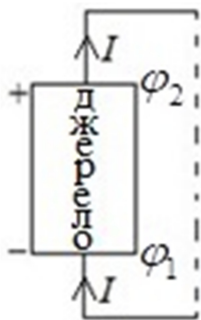


Рис. 1.6

Для того щоб у колі йшов струм, необхідно, щоб у ньому обов'язково було **джерело струму** або **джерело ЕРС**. На рис. 1.6 пунктиром схематично зображено зовнішнє коло, до якого підключено джерело. Клеми джерела позначаються як «плюс» і «мінус». Потенціал «плюса» джерела позначимо як φ_2 , а «мінуса» – як φ_1 . Оскільки зовнішнім колом струм іде від «плюса» джерела до «мінуса», то $\varphi_2 > \varphi_1$, бо струм у колі

завжди йде від більшого потенціалу до меншого. Але, відповідно, очевидно, що всередині джерела струм має йти від «мінуса» до «плюса». Електричне поле не може таким чином «пересувати» заряди всередині джерела, звідки можна зробити висновок, що за рух зарядів всередині джерела відповідальні сили неелектричної природи. Цей рух може мати місце за рахунок механічних або хімічних процесів, або магнітних полів, або за рахунок світлової енергії в фотоелементах, або за рахунок інших причин – проте не за рахунок впливу електричного поля.

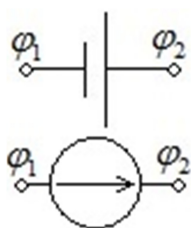


Рис. 1.7

Ідеальне джерело напруги (ідеальне джерело ЕРС) підтримує на своїх кінцях постійну різницю потенціалів, яка є характеристикою лише самого джерела й не залежить від параметрів кола, до якого підключене джерело. **ЕРС**

(електрорушійна сила) джерела напруги – робота, яку виконує джерело, щоб «прогнати» колом одиничний позитивний заряд. Можливі умовно-графічні позначення ідеального джерела ЕРС наведені на рис. 1.7. Різниця потенціалів на кінцях ідеального джерела напруги дорівнює ЕРС джерела (див. рис. 1.7):

$$\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (1.27)$$

де ε – ЕРС джерела, фактично є паспортним даним джерела.

Різниця потенціалів (напряга) на кінцях реального джерела ЕРС залежить від параметрів кола, до якого джерело підключене. Найпростішою моделлю

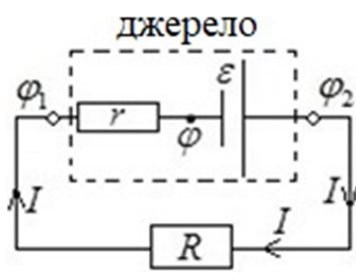


Рис. 1.8

реального джерела ЕРС є так звана **послідовна схема заміщення**, в рамках якої джерело описується як послідовне з'єднання ідеального джерела ЕРС та резистора, фізичний зміст якого – **внутрішній опір** джерела ЕРС, див. рис. 1.8.

Розглянемо реальне джерело на основі послідовної схеми заміщення. Нехай зовнішнє коло, до якого підключене джерело, має загальний опір R , колом тече струм I . За законом Ома для ділянки кола без джерел та згідно різниці потенціалів на клеммах ідеального джерела ЕРС маємо

$$\varphi_1 - \varphi = Ir, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = IR, \quad \varphi_2 - \varphi = \varepsilon, \quad (1.28)$$

Оскільки

$$\varphi_2 - \varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi), \quad (1.29)$$

то на основі (1.29) і (1.28) отримуємо

$$\varepsilon = I(R + r). \quad (1.30)$$

Вираз (1.30) носить назву **закону Ома для повного кола**. На основі (1.30) маємо, що напруга на клеммах реального джерела ЕРС є такою:

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = IR = \frac{\varepsilon R}{R + r}, \quad (1.31)$$

тобто ця напруга залежить не лише від параметрів джерела ε та r , а ще й від загального опору кола R . Проте у випадку $r = 0$ матимемо $U = \varepsilon = \text{const}$, тобто напруга на клеммах джерела дорівнює ЕРС джерела та не залежить від параметрів зовнішнього кола – джерело є ідеальним. Тож приходимо до висновку, що *внутрішній опір ідеального джерела ЕРС дорівнює нулю*. Зрозуміло, що внутрішній опір реальних джерел ЕРС не дорівнює нулю, проте реальне джерело є близьким за своїми характеристиками до ідеального, якщо

його внутрішній опір набагато менший за загальний опір зовнішнього кола, до якого підключене це джерело.

Ідеальне джерело струму підтримує струм через себе постійним. Цей струм є характеристикою лише самого джерела та не залежить від параметрів кола, до якого підключене це джерело. Умовно-графічне позначення ідеального джерела струму наведено на рис. 1.9.

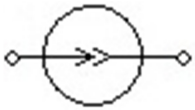


Рис. 1.9 треба спрямувати ε та r до нескінченності, та вимагати виконання такої математичної умови:

$$\lim_{\varepsilon, r \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{r} = J > 0, \quad (1.32)$$

де J – деяка *скінченна* постійна величина розмірності ампер. Тоді на основі (1.30) та (1.32) маємо таку поведінку струму через джерело:

$$\lim_{\varepsilon, r \rightarrow \infty} I = \lim_{\varepsilon, r \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{R + r} = \lim_{\varepsilon, r \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{r} \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{R}{r}} = J \cdot 1 = J = \text{const}, \quad (1.33)$$

тобто дійсно в такій границі струм через джерело є постійним та не залежить від параметрів кола, тож джерело веде себе як ідеальне джерело струму. Зауважимо, що *внутрішній опір ідеального джерела струму нескінченно великий*.

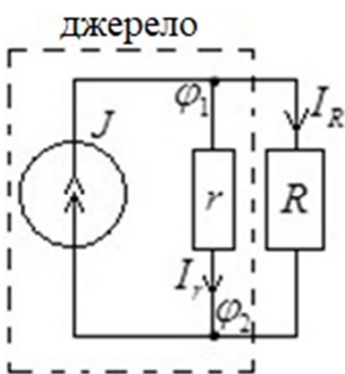


Рис. 1.10

Паралельною схемою заміщення є модель реального джерела, в якій джерело представляється як паралельне з'єднання ідеального джерела струму та резистора, що має фізичний зміст внутрішнього опору джерела, див. рис. 1.10.

Спочатку реалізуємо ідеальне джерело струму. Як бачимо з рис. 1.10, внутрішній опір джерела і зовнішнє коло з загальним опором R з'єднані паралельно та

загальний струм через з'єднання дорівнює струму J через відповідне ідеальне джерело, тож

$$J = I_R + I_r, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = I_R R = I_r r, \quad (1.34)$$

розглядаючи (1.34) як систему рівнянь відносно I_r та I_R , отримуємо

$$I_R = \frac{r}{R+r} J. \quad (1.35)$$

Зауважимо, що струм через зовнішнє коло I_R є також струмом через джерело.

Оскільки

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_R = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{R+r} J = J = \text{const}, \quad (1.36)$$

то при нескінченно великому внутрішньому опорі джерело є ідеальним джерелом струму.

Тепер реалізуємо ідеальне джерело ЕРС на схемі з рис. 1.10. Для цього спрямуємо J до нескінченності та r до нуля і будемо вимагати виконання такої математичної умови:

$$\lim_{J \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} Jr = \varepsilon > 0, \quad (1.37)$$

де ε – деяка *скінченна* постійна величина розмірності вольт. Тоді напруга на клеммах джерела згідно з (1.35)

$$U = I_R R = \frac{R}{R+r} rJ, \quad (1.38)$$

та

$$\lim_{J \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} U = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R}{R+r} \cdot \lim_{J \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} rJ = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon = \text{const}, \quad (1.39)$$

тож джерело вестиме себе як ідеальне джерело ЕРС.

1.6. Потужність струму. Умова передачі максимальної потужності від джерела в коло

Нехай маємо ділянку кола, напруга на якій дорівнює U . Нехай за час dt цією ділянкою пройшов заряд dq . Тоді, відповідно, було виконано роботу

$$dA = dq \cdot U \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot U. \quad (1.40)$$

Оскільки потужність є похідною від роботи за часом, а струм – похідною від заряду за часом, то вираз для **потужності струму** є таким:

$$P = I \cdot U, \quad (1.41)$$

де P – потужність струму на відповідній ділянці.

Нехай у нас є реальне джерело, підключене до кола, з фіксованими параметрами ε та r , див. рис. 1.8. Виникає питання: при якому загальному опорі кола R таке джерело передає в коло максимально можливу потужність?

Згідно з (1.41), (1.30) та (1.31) маємо

$$P = \varepsilon^2 \frac{R}{(R+r)^2} = P(R), \quad (1.42)$$

та, фактично, треба знайти максимально можливе значення функції $P(R)$ на інтервалі $R \in (0, \infty)$. Очевидно, що

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P(R) = \lim_{R \rightarrow 0} P(R) = 0, \quad (1.43)$$

та похідна

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}, \quad (1.44)$$

тобто похідна дорівнює нулю лише при $R = r$, та

$$\left. \frac{dP}{dR} \right|_{R < r} > 0, \quad \left. \frac{dP}{dR} \right|_{R > r} < 0, \quad (1.45)$$

тож точка $R = r$ є точкою максимуму функції $P(R)$. Відповідне максимальне значення

$$P_{\max} = P(r) = \frac{\varepsilon^2}{4r}. \quad (1.46)$$

Тож максимально можлива потужність, яку реальне джерело може передати у коло, дорівнює $0,25\varepsilon^2/r$ та досягається у випадку, коли загальний опір кола дорівнює внутрішньому опору джерела. Слід зауважити, що в такому випадку джерело не може вважатись ідеальним.

1.7. Закон Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС

Розглянемо ділянку кола, що містить ідеальне джерело ЕРС, див. рис. 1.11 та

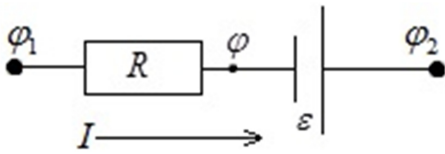


Рис. 1.11

рис. 1.12. Нехай $\varphi_1 > \varphi_2$. На основі закону Ома для ділянки кола, що не містить джерел, та того факту, що джерело ЕРС є ідеальним, маємо для рис. 1.11

$$\varphi_1 - \varphi = IR, \quad \varphi - \varphi_2 = -\varepsilon, \quad (1.47)$$

звідки для ділянки кола на рис. 1.11 маємо, що напруга на ділянці

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = IR - \varepsilon. \quad (1.48)$$

Для ділянки кола, зображеної на рис. 1.12, маємо

$$\varphi_1 - \varphi = IR, \quad \varphi - \varphi_2 = \varepsilon, \quad (1.49)$$

звідки напруга

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = IR + \varepsilon. \quad (1.50)$$

Вирази (1.48) та (1.50) є законами Ома для ділянки кола, що містить співнапрявлене та протинапрявлене до струму ідеальне джерело ЕРС, відповідно.

1.8. Резюме

Сила струму через провідник є похідною від заряду, що проходить через провідник, за часом:

$$I \equiv \frac{dq}{dt}, \quad (1.51)$$

де I – сила струму, q – заряд. Напруга між довільними точками кола є різницею потенціалів між цими точками:

$$U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C, \quad (1.52)$$

де U_{BC} – напруга між точками B і C кола, φ_B та φ_C – потенціали точок B , C відповідно.

Амперметр – прилад для вимірювання електричного струму, в ідеальному випадку має опір, що дорівнює нулю. Амперметр підключається послідовно до ділянки, на якій вимірюється струм. Вольтметр – прилад для вимірювання напруги, в ідеальному випадку має нескінченно великий опір. Вольтметр підключається паралельно до ділянки, на якій вимірюється напруга.

Закон Ома для резистивної ділянки кола, що не містить ЕРС, є таким:

$$U = IR, \quad (1.53)$$

де R – опір даної ділянки, U – напруга на даній ділянці та R – опір даної ділянки. У цьому розділі виведено закон Ома для повного кола:

$$\varepsilon = I(R + r), \quad (1.54)$$

де I – загальний струм через коло, R – загальний опір кола, r – внутрішній опір джерела ЕРС та ε – значення ЕРС джерела. Показано, що умовою максимальної передачі потужності від джерела в коло є

$$R = r. \quad (1.55)$$

Виведені закони Ома для ділянки кола, що містить співнапрявлене до струму ідеальне джерело ЕРС:

$$U = IR - \varepsilon, \quad (1.56)$$

та для ділянки кола, що містить протинапрявлене до струму ідеальне джерело ЕРС:

$$U = IR + \varepsilon. \quad (1.57)$$

Виведено, що для паралельного з'єднання N резисторів справедливими є такі формули:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N, \quad U = U_1 = U_2 = \dots = U_N, \quad (1.58)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N},$$

а для послідовного з'єднання резисторів такі:

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_N, \quad U = U_1 + U_2 + \dots + U_N, \quad (1.59)$$

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N.$$

Наведено послідовну (див. рис. 1.8) та паралельну (див. рис. 1.10) схеми заміщення реальних джерел та розглянуто параметри таких схем, при яких вони працюють як ідеальні джерела струму або напруги. Зокрема, показано, що внутрішній опір ідеального джерела ЕРС дорівнює нулю, а внутрішній опір ідеального джерела струму є нескінченно великим.

1.9. Питання для самоконтролю

1. Дати визначення сили електричного струму, напруги, потенціалу та опору. Виразити розмірності цих величин через базові розмірності СІ.
2. Вивести формули для загальних струму, напруги та опору для послідовного та паралельного з'єднань резисторів.
3. Дати визначення амперметра та вольтметра. Яким є опір цих приладів в ідеальному випадку? Чому саме таким?
4. Дати визначення ідеального джерела ЕРС та ідеального джерела струму.
5. Навести схеми заміщення (послідовну та паралельну) реальних джерел струму та ЕРС. При яких параметрах цих схем відповідні джерела є ідеальними? Яким є внутрішній опір ідеального джерела струму та ідеального джерела ЕРС, і чому саме таким?
6. Навести закон Ома для ділянки кола, що не містить ЕРС. Вивести закон Ома для повного кола та для ділянки кола, що містить джерело ЕРС.
7. Вивести вираз для потужності струму, а також співвідношення між зовнішнім загальним опором кола та внутрішнім опором джерела, при якому має місце максимальна передача потужності від джерела в коло.

2. Закони Кірхгофа та потенціальна діаграма

2.1. Анотація

Детально описані такі методи опису кіл постійного струму, як потенціальна діаграма та закони Кірхгофа, наведено фізичне пояснення походження законів Кірхгофа.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Знати визначення гілки, вузла та контуру в електричному колі.
- Знати перший закон Кірхгофа та уміти пояснити його фізичний зміст.
- Знати другий закон Кірхгофа та уміти його виводити.
- Уміти будувати потенціальну діаграму для замкненого контуру у резистивному колі постійного струму.
- Уміти пояснювати фізичний зміст ділянок потенціальної діаграми.
- Уміти за потенціальною діаграмою визначати струм та напругу на елементах контуру та опір цих елементів.

2.2. Закони Кірхгофа

Гілка електричного кола – ділянка кола з одним і тим же струмом. Гілка може складатись з одного чи декількох послідовно з'єднаних елементів кола.

Вузол електричного кола – точка з'єднання трьох і більше гілок.

Контур – будь-який замкнений шлях у електричному колі, що проходить по декількох гілках.

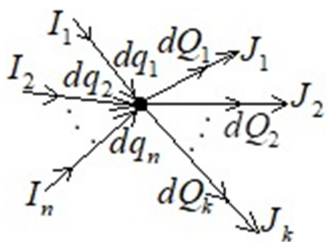


Рис. 2.1

Розглянемо деякий вузол кола, див. рис. 2.1. Нехай за час dt різними провідниками в цей вузол зайшли заряди dq_1 (відповідний струм I_1), dq_2 (відповідний струм I_2), ..., dq_n (відповідний струм I_n), та за цей же час з цього вузла вийшли заряди dQ_1 (відповідний струм J_1), dQ_2

(відповідний струм J_2), ..., dQ_k (відповідний струм J_k). Як відомо, *заряд не накопичується у вузлі*, тобто сума зарядів, які зайшли у вузол за час dt , повинна дорівнювати сумі зарядів, що вийшли з вузла за той же самий час:

$$\sum_{i=1}^n dq_i = \sum_{j=1}^k dQ_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^k \frac{dQ_j}{dt} \Rightarrow \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{j=1}^k J_j, \quad (2.1)$$

отримане твердження носить назву **першого закону Кірхгофа**: сума струмів, що входять в будь-який вузол, дорівнює сумі струмів, що виходять з даного вузла.

Другий закон Кірхгофа стверджує, що вздовж будь-якого контуру алгебраїчна сума ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруг на елементах кола, що не містять джерел. При застосуванні другого закону Кірхгофа довільним чином обирають напрям обходу контуру, при цьому струм або ЕРС, що є співнапрямленими з напрямом обходу контуру, беруться зі знаком «+», а протинапрямлені – зі знаком «-». Другий закон Кірхгофа можна вивести, послідовно записуючи різницю потенціалів на кожному елементі контуру, а потім підсумувавши отримані вирази.

Пояснимо вищенаведені поняття, а також виведення другого закону Кірхгофа, на прикладі схеми на рис. 2.2.

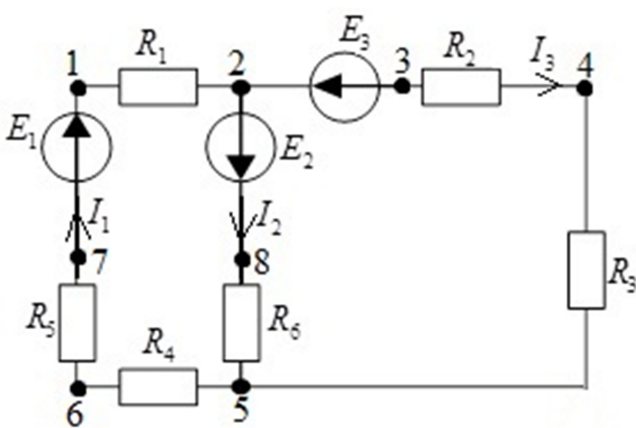


Рис. 2.2

Гілками цієї схеми є 56712, 285 та 2345. Вузлами цієї схеми є точки 2 і 5. Контурами цієї схеми є замкнені шляхи 1285671, 12345671 та 234582.

При описі схеми напрями струмів у гілках обираються довільно. Виберемо напрями струмів так, як вказано на рис. 2.2. При цьому якщо внаслідок математичного

розв'язання рівнянь, що описують схему, деякий струм виявиться додатним, то його напрям співпадає з обраним на рисунку, а якщо від'ємним, то його напрям

є протилежним до обраного на рисунку (а модуль, тобто абсолютна величина, співпадає з отриманою). Наприклад, якщо ми отримаємо, що $I_1 = 1$ А, то це означатиме, що напрям струму I_1 такий самий, як на рисунку, а значення цього струму дорівнює 1 А; якщо ж ми отримаємо, що $I_1 = -1$ А, то це означатиме, що напрям струму I_1 протилежний обраному на рисунку, а значення цього струму дорівнює 1 А.

Перший закон Кірхгофа для вузла 2:

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad (2.2)$$

бо у вузол 2 входить струм I_1 , а виходять струми I_2 та I_3 . Перший закон Кірхгофа для вузла 5:

$$I_2 + I_3 = I_1, \quad (2.3)$$

бо у вузол 5 входять струми I_2 та I_3 , а з цього вузла виходить струм I_1 .

На прикладі контуру 12345671 покажемо, як можна вивести другий закон Кірхгофа. Послідовно записуємо закони Ома для ділянок кола без джерела користуючись різницями потенціалів на клеммах ідеальних ЕРС (усі ЕРС на колі вважаються ідеальними):

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 = I_1 R_1, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = E_3, \quad \varphi_3 - \varphi_4 = I_3 R_2, \quad \varphi_4 - \varphi_5 = I_3 R_3, \quad \varphi_5 - \varphi_6 = I_1 R_4, \\ \varphi_6 - \varphi_7 = I_1 R_5, \quad \varphi_7 - \varphi_1 = -E_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Підсумувавши всі рівняння з (2.4), отримуємо, що всі потенціали в лівих частинах скоротяться:

$$0 = I_1 R_1 + E_3 + I_3 R_2 + I_3 R_3 + I_1 R_4 + I_1 R_5 - E_1, \quad (2.5)$$

і перенісши всі ЕРС вліво, матимемо

$$E_1 - E_3 = I_1 R_1 + I_3 R_2 + I_3 R_3 + I_1 R_4 + I_1 R_5, \quad (2.6)$$

що є записом другого закону Кірхгофа для цього контуру (обхід за годинниковою стрілкою, усі струми співнапрямлені з напрямом обходу контуру, E_1 співнапрямлена з напрямом обходу контуру, E_3 протинапрямлена до напрямку обходу контуру). Для контуру 1285671 (обхід за годинниковою стрілкою) другий закон Кірхгофа має вигляд

$$E_1 + E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_6 + I_1 R_4 + I_1 R_5, \quad (2.7)$$

а для контуру 234582 (обхід за годинниковою стрілкою), відповідно, маємо

$$-E_3 - E_2 = I_3 R_2 + I_3 R_3 - I_2 R_6. \quad (2.8)$$

Найчастіше в задачах теорії резистивних кіл постійного струму всі значення опорів резисторів та ЕРС джерел вважаються відомими, а невідомими величинами, які треба знайти, є струми через резистори. Для схеми, що розглядається, невідомими величинами є струми I_1 , I_2 , I_3 (усього три величини), а на них маємо аж п'ять рівнянь: (2.2), (2.3), (2.6), (2.7), (2.8). Проте, як виявляється, не всі ці рівняння є незалежними. По-перше, очевидно, що рівняння (2.2) та (2.3) є однаковими. Також рівняння (2.6) отримується додаванням рівнянь (2.7) та (2.8), тож це рівняння не містить нової інформації порівняно з сукупністю рівнянь (2.7) і (2.8). Відповідно, задача пошуку струмів для цієї схеми зводиться до системи лінійних рівнянь з трьома невідомими I_1 , I_2 , I_3 та трьома рівняннями (2.2), (2.7) і (2.8). Слід зауважити, що й у загальному випадку можна показати, що задача пошуку струмів у резистивних колах постійного струму зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь з однаковою кількістю рівнянь та невідомих.

Слід зауважити, що в загальному випадку аналітичні викладки при розв'язанні таких систем рівнянь можуть бути вельми громіздкими, та зазвичай слід шукати числові розв'язки таких систем за допомогою математичних пакетів. Випишемо аналітичний розв'язок системи рівнянь (2.2), (2.7), (2.8) у простому випадку, коли значення опорів усіх резисторів та значення ЕРС усіх джерел однакові. Позначимо відповідні параметри як R та E відповідно. Тоді ця система рівнянь набуде вигляду

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad 2E = 3RI_1 + RI_2, \quad -2E = 2RI_3 - I_2R, \quad (2.9)$$

та її розв'язком буде

$$I_1 = \frac{4E}{11R}, \quad I_2 = \frac{10E}{11R}, \quad I_3 = -\frac{6E}{11R}. \quad (2.10)$$

Оскільки $I_1 > 0$ та $I_2 > 0$, то напрям струмів I_1 та I_2 точно такий же, як вказано на рис. 2.2, а значення цих струмів задані виразами (2.10). Оскільки струм $I_3 < 0$, то його значення дорівнює $6E/11R$, а напрям є протилежним до напрямку, вказаному на рис. 2.2.

2.3. Потенціальна діаграма

Потенціальна діаграма – графічне зображення розподілу потенціалу вздовж замкненого контуру в залежності від опору ділянок, що входять до контуру. За віссю абсцис на потенціальній діаграмі відкладають опори ділянок, а за віссю ординат – потенціали вздовж контуру.

Наприклад, побудуємо потенціальну діаграму для контуру 1285671 для кола на рис. 2.2 у випадку, коли всі ЕРС однакові й дорівнюють 11 В та опори всіх резисторів однакові і дорівнюють 1 Ом при умові, що точка 1 є заземленою. Для цього випадку згідно з (2.10) маємо

$$I_1 = 4\text{А}, \quad I_2 = 10\text{А}. \quad (2.11)$$

Оскільки точка 1 є заземленою, то $\varphi_1 = 0$. Робимо з точки 1 обхід за годинниковою стрілкою, перераховуємо потенціали:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 = I_1 R_1 &\Rightarrow \varphi_2 = -4\text{В}, & \varphi_2 - \varphi_8 = -E_2 &\Rightarrow \varphi_8 = 7\text{В}, \\ \varphi_8 - \varphi_5 = I_2 R_6 &\Rightarrow \varphi_5 = -3\text{В}, & \varphi_5 - \varphi_6 = I_1 R_4 &\Rightarrow \varphi_6 = -7\text{В}, \\ \varphi_6 - \varphi_7 = I_1 R_5 &\Rightarrow \varphi_7 = -11\text{В}, & \varphi_7 - \varphi_1 = -E_1 &\Rightarrow \varphi_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

пройшовши повний обхід вздовж контуру, прийшли до того, з чого стартували, тобто до виразу $\varphi_1 = 0$. Це свідчить про те, що ми, скоріш за все, не помилились при розрахунку потенціалів.

Діаграма будується так. Починаємо обхід за годинниковою стрілкою з початку координат на діаграмі. Переходимо з точки 1 до точки 2, нову точку будуємо так: відмічаємо потенціал «нової» точки 2 $\varphi_2 = -4\text{В}$ як ординату нової точки, а абсциса «нової» точки – це абсциса попередньої точки плюс опір відповідного відрізка. «Нова» та «попередня» точка з'єднуються прямим відрізком, і так далі. Побудовану діаграму зображено на рис. 2.3.

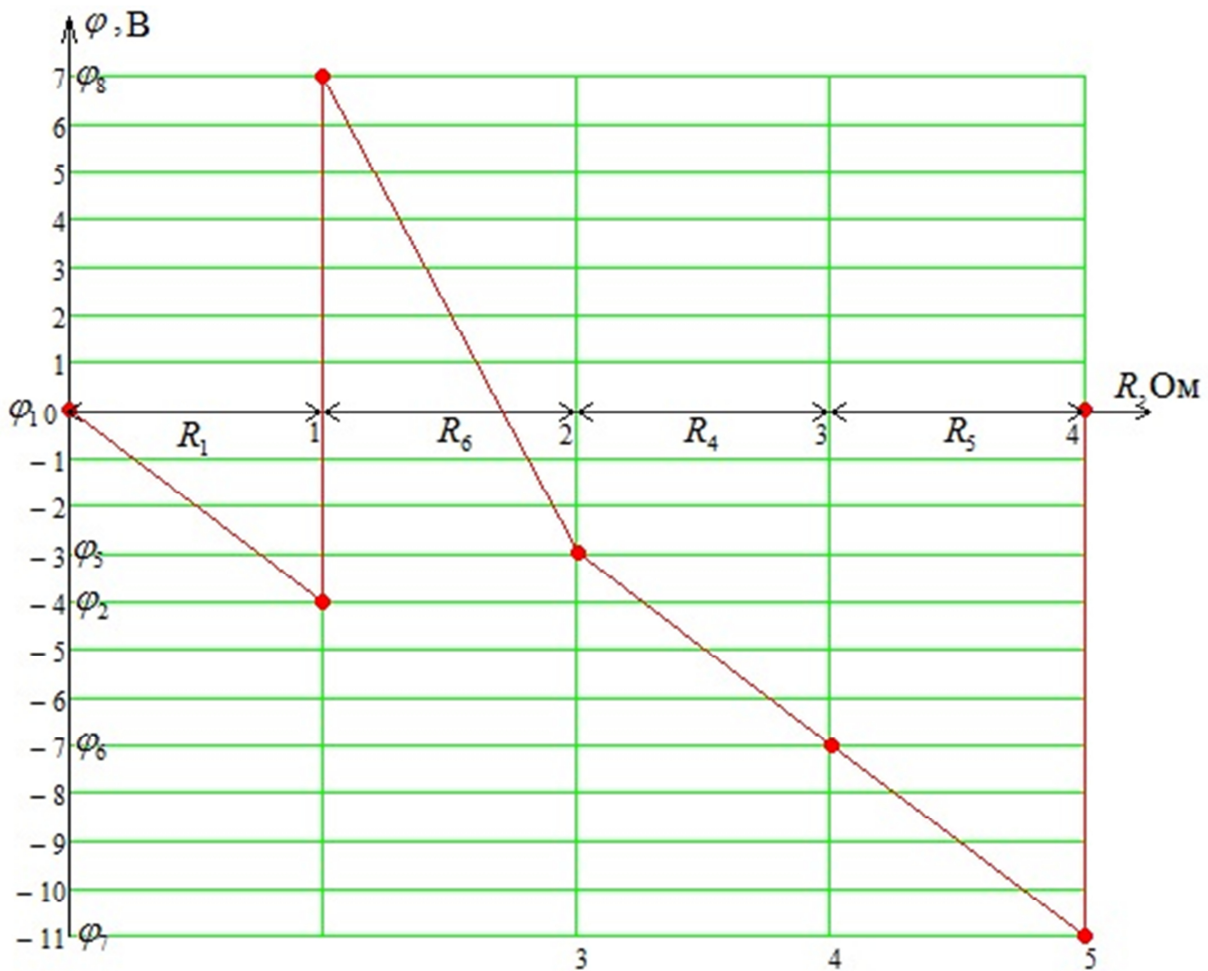
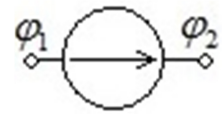
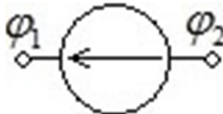
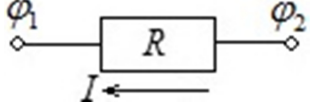
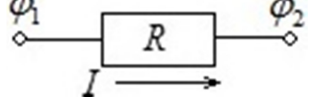


Рис. 2.3

Слід зауважити, що ділянки з «голими» ЕРС є вертикальними, бо ЕРС вважаються ідеальними, а опір ідеального джерела ЕРС є нульовим. Потенціальна діаграма дає повну інформацію про контур: на її основі можна побачити напрям струму на кожній резистивній ділянці, напрями всіх ЕРС, значення опорів усіх резисторів та ЕРС усіх джерел, а також можна порахувати абсолютні величини струмів на всіх ділянках. Тлумачення ділянок потенціальної діаграми наведено в Таблиці 2.1.

За нахилом потенціальної діаграми абсолютну величину струму через резистивну ділянку визначають таким чином: *абсолютна величина струму через резистивну ділянку є модулем тангенса кута нахилу відповідної ділянки діаграми.*

Таблиця 2.1 – Глумачення ділянок потенціальної діаграми між точками 1 і 2

| | |
|--|---|
| <p>Якщо ділянка діаграми йде вертикально вгору, то відповідна фізична ділянка кола – ідеальне джерело ЕРС, співнапрявлене з напрямом обходу контуру. $\varphi_2 > \varphi_1$, «стрибок» вгору.</p> | <p>$\varphi_2 - \varphi_1 = E > 0$, $r = 0$</p>  |
| <p>Якщо ділянка діаграми йде вертикально вниз, то відповідна фізична ділянка кола – ідеальне джерело ЕРС, протинапрявлене з напрямом обходу контуру. $\varphi_2 < \varphi_1$, «стрибок» вниз.</p> | <p>$\varphi_2 - \varphi_1 = -E < 0$, $r = 0$</p>  |
| <p>Якщо ділянка діаграми має додатний нахил (не вертикальний), то струм на ділянці йде проти напрямку обходу контуру. $\varphi_2 > \varphi_1$, тобто нахил додатний.</p> | <p> $\varphi_2 - \varphi_1 = IR > 0$</p> |
| <p>Якщо ділянка діаграми має від'ємний нахил (не вертикальний), то струм на ділянці йде за напрямом обходу контуру. $\varphi_2 < \varphi_1$, тобто нахил від'ємний.</p> | <p> $\varphi_2 - \varphi_1 = -IR < 0$</p> |

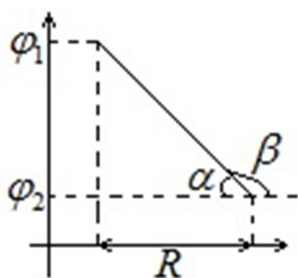


Рис. 2.4

Покажемо, чому так; див. рис 2.4. Розглянемо випадок від'ємного нахилу ділянки. Тоді кутовий нахил ділянки – це $\text{tg}\beta$, очевидно, що

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}(\pi - \beta) = -\text{tg}\beta \Rightarrow |\text{tg}\beta| = \text{tg}\alpha. \quad (2.13)$$

Очевидно, що

$$\text{tg}\alpha = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R} = I, \quad (2.14)$$

тож на основі (2.13) і (2.14) бачимо, що

$$I = |\text{tg}\beta|, \quad (2.15)$$

що й треба було довести. У випадку додатного нахилу ділянки доведення є аналогічним.

Оскільки величина струму однозначно задається нахилом ділянки діаграми, то нахил ділянок з однаковим струмом має бути однаковим. Тож *нахил ділянок потенціальної діаграми для всіх резисторів, що належать одній гілці, має бути однаковим*. Наприклад, на рис. 2.3 однаковим є нахил для ділянок усіх резисторів, що належать гілці 56712.

2.4. Резюме

Перший закон Кірхгофа стверджує, що сума струмів, що входять в будь-який вузол, дорівнює сумі струмів, що виходять з даного вузла. Фізичною причиною цього закону є той факт, що заряд не накопичується у вузлі.

Другий закон Кірхгофа стверджує, що вздовж будь-якого контуру алгебраїчна сума ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруг на елементах кола, що не містять джерел. Його можна вивести, записавши різницю потенціалів для кожного елемента контуру і підсумувавши результати.

Потенціальна діаграма – графічне зображення розподілу потенціалу вздовж замкненого контуру в залежності від опору ділянок, що входять до контуру. За віссю абсцис на потенціальній діаграмі відкладають опори ділянок, а за віссю ординат – потенціали вздовж контуру. Фізичний сенс ділянок потенціальної діаграми детально розкрито у таблиці 2.1. За модулем струм через резистивну ділянку контуру можна виміряти як тангенс кута нахилу відповідної ділянки діаграми.

2.5. Питання для самоконтролю

1. Дати визначення гілки, вузла та контуру в електричному колі.
2. Навести перший закон Кірхгофа та пояснити його фізичний зміст.
3. Вивести другий закон Кірхгофа.
4. Описати принцип побудови потенціальної діаграми.
5. Описати фізичний зміст ділянок потенціальної діаграми (вертикальної вниз або вгору, з додатним нахилом, з від'ємним нахилом).
6. Як за потенціальною діаграмою можна виміряти струм та напругу на елементах контуру та опір цих елементів? Відповіді аргументувати.

3. Конденсатор та котушка індуктивності в колах ЕРС постійної напруги

3.1. Анотація

Описано перехідні процеси на конденсаторі та на котушці індуктивності в колах з постійними ЕРС. Отримано точні аналітичні часові залежності напруги й струму на конденсаторі в задачах зарядження й розрядження конденсатора, наведено вирази для енергії електричного поля в конденсаторі та енергії магнітного поля в котушці, описано закони комутації та наведено приклади їх застосування.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Знати одиниці вимірювання ємності та індуктивності і уміти їх виводити через базові одиниці СІ.
- Знати співвідношення між напругою на конденсаторі та зарядом конденсатора. Уміти виводити співвідношення між струмом через конденсатор та напругою на конденсаторі.
- Знати вираз для ЕРС самоіндукції котушки. Уміти пояснювати, як отримується співвідношення між напругою на котушці та струмом через котушку.
- Уміти виводити та розв'язувати диференційні рівняння для заряду конденсатора та струму через котушку в колах з постійними ЕРС.
- Знати, що таке стала часу RC–ланцюжка та оцінки на тривалість перехідних процесів в RC–ланцюжку.
- Знати закони комутації та уміти застосовувати їх на практиці.

3.2. Конденсатор. Ємність конденсатора

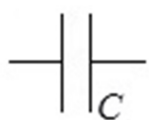


Рис. 3.1

Конденсатор – пристрій, що являє собою систему з двох провідних обкладинок, розділених шаром діелектрика; відстань між обкладинками є набагато меншою за розміри самих обкладинок. Одним з призначень конденсатора є накопичувати заряд. Напруга

на конденсаторі є різницею потенціалів між його обкладинками, напруга U на конденсаторі та заряд конденсатора q пов'язані між собою співвідношенням

$$q = CU, \quad (3.1)$$

де C – ємність конденсатора. Зазвичай ємність конденсатора залежить від його геометрії та внутрішньої будови (матеріалу діелектрика, що заповнює простір між обкладинками), проте не від напруги. Іншими словами, *ємність C є властивістю суто самого конденсатора, а не параметрів кола, та є постійною величиною*. Можна показати, що енергія електричного поля всередині конденсатора задається виразом

$$W = \frac{CU^2}{2}. \quad (3.2)$$

Струм через конденсатор завжди є похідною від заряду цього конденсатора за часом. На основі цього факту можна отримати зв'язок струму через конденсатор та напруги на конденсаторі. Продиференціюємо вираз (3.1) за часом:

$$\dot{q} = C\dot{U}, \quad (3.3)$$

тут і надалі похідну за часом позначатимемо крапкою; при диференціюванні враховано, що ємність конденсатора є постійною величиною. Очевидно, що ліва частина рівності (3.3) є струмом через конденсатор, тож маємо таку *залежність струму через конденсатор від напруги на конденсаторі*:

$$I(t) = C\dot{U}(t) = C \frac{dU(t)}{dt}. \quad (3.4)$$

Умовно-графічне зображення конденсатора зображено на рис. 3.1.

Ємність конденсатора вимірюється у фарадах: $[C] = \Phi$. Вираз для фарада в термінах базових одиниць СІ можна отримати на основі виразів (3.1), (1.4) та (1.2):

$$\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^3}} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}. \quad (3.5)$$

3.3. Процес розрядження конденсатора



Рис. 3.2

Розглянемо послідовно з'єднані конденсатор та резистор (так званий RC -ланцюжок), замкнені самі на себе (див. рис. 3.2). Розглянемо випадок,

що перш ніж цей ланцюжок замкнеться сам на себе, конденсатор накопичив деякий заряд q_0 , іншими словами, початковий заряд конденсатора дорівнює q_0 .
Стоїть задача знайти залежність заряду конденсатора від часу.

Згідно з другим законом Кірхгофа, для ланцюжка на рис. 3.2. має місце рівняння

$$U_C(t) + U_R(t) = 0, \quad (3.6)$$

бо ЕРС у цьому колі відсутні; U_C – напруга на конденсаторі, U_R – напруга на резисторі. Оскільки конденсатор та резистор з'єднані послідовно, то через конденсатор та резистор іде однаковий струм, і цей струм дорівнює похідній від заряду конденсатора за часом. Тоді виразимо обидві напруги через заряд конденсатора q :

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad U_R(t) = I(t)R = \dot{q}(t)R, \quad (3.7)$$

та на основі (3.7) і (3.6) отримаємо рівняння для заряду конденсатора $q(t)$:

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC}q(t) = 0. \quad (3.8)$$

Рівняння (3.8) є диференціальним рівнянням (тобто рівнянням, що містить похідну від невідомої функції), з якого треба знайти невідому функцію $q(t)$.

Перенесемо другий доданок у ліву частину рівняння (3.8), «перегрупуємо» члени «хрест-нахрест»:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}, \quad (3.9)$$

і «навісимо» невизначений інтеграл на обидві частини:

$$\int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dt}{RC} + B, \quad (3.10)$$

де B – так звана «константа інтегрування», що виникає внаслідок урахування того факту, що невизначений інтеграл завжди визначено з точністю до плюс константи. Узявши інтеграли в обидвох частинах рівняння (3.10), приходимо до такого виразу:

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + B, \quad (3.11)$$

пропотенціювавши вираз (3.11), маємо

$$q = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^B, \quad (3.12)$$

оскільки $A = e^B$ теж є константою, то перепишемо (3.12) як

$$q(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3.13)$$

Вираз (3.13), де A – довільна константа, є **загальним** розв'язком диференціального рівняння (3.8), тобто функція (3.13) при будь-якій константі A є розв'язком рівняння (3.8). Проте на практиці реалізовується не будь-яка константа, а та, що відповідає так званим **початковим умовам**. За умовою задачі, що розглядається, заряд у початковий момент часу дорівнює q_0 , тобто

$$q(t=0) = q_0. \quad (3.14)$$

Підставляючи (3.14) до (3.13), отримуємо значення константи A :

$$q(t=0) = A \cdot e^{-\frac{0}{RC}} \Rightarrow A = q_0, \quad (3.15)$$

тож маємо **частинний** розв'язок рівняння (3.8):

$$q(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3.16)$$

Введемо параметр

$$\tau = RC, \quad (3.17)$$

який називається **сталюю часу** ланцюжка. Тоді вираз (3.16) перепишеться у вигляді

$$q(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.18)$$

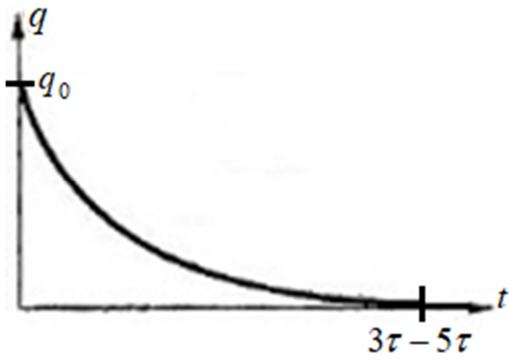


Рис. 3.3

Вираз (3.18) є залежністю заряду конденсатора від часу в рамках задачі, що розглядається. Схематично цю залежність зображено на рис. 3.3. Як бачимо, заряд конденсатора спадає за експонентою в рамках цієї задачі. Це є дуже відомим в електротехніці результатом.

З'ясуємо фізичний зміст сталої часу ланцюжка. У момент часу $t = \tau$ маємо

$$q(t = \tau) = q_0 \cdot e^{-1} = \frac{q_0}{e}, \quad (3.19)$$

тобто стала часу RC -ланцюжка є часом, за який заряд конденсатора падає в e разів.

Описаний процес розрядження конденсатора називають **перехідним** (або релаксаційним) процесом. Цю назву можна пояснити так. Після розрядження конденсатора система переходить в усталений стан з нульовим струмом та зарядом конденсатора; очевидно, що початковий стан та усталений кінцевий стан системи не співпадають. Тож даний процес розрядження конденсатора є перехідним між початковим станом системи та усталеним кінцевим станом. Слід зауважити, що з рівняння (3.18) формально випливає, що

$$\forall t \quad q(t) > 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0, \quad (3.20)$$

тобто лише при нескінченно великих часах заряд конденсатора є нульовим. Однак експоненційне згасання є дуже швидким процесом, та існує «домовленість» вважати такий процес скінченним у часі. У літературі є домовленість вважати тривалість перехідного процесу рівною від 3τ до 5τ (див. рис. 3.3). Порахуємо заряд конденсатора в моменти часу 3τ та 5τ :

$$q(t = 3\tau) = \frac{q_0}{e^3} \approx \frac{q_0}{20}, \quad q(t = 5\tau) = \frac{q_0}{e^5} \approx \frac{q_0}{148}, \quad (3.21)$$

тож у момент часу 3τ заряд приблизно у 20 разів менше за початковий, а у момент часу 5τ заряд приблизно у 148 разів менше за початковий. Тобто

фактично така домовленість означає, що заряд конденсатора починає вважатись нехтовно малим при його спаданні в десятки-сотні разів.

На основі виразів (3.7) та (3.18) отримуємо струм через ланцюжок та напруги на конденсаторі та резисторі в рамках цієї задачі:

$$I(t) = \dot{q} = -\frac{q_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad U_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad U_R(t) = I(t)R = -\frac{q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.22)$$

тобто ці величини теж спадають за експонентою.

3.4. Процес зарядження конденсатора

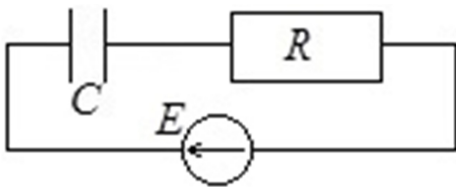


Рис. 3.4

Розглянемо RC -ланцюжок, до якого підключено джерело постійної ЕРС. (див. рис. 3.4). Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу конденсатор не заряджений, тобто початковий заряд конденсатора дорівнює нулю:

$$q(t=0) = 0. \quad (3.23)$$

За законом Кірхгофа маємо

$$U_C(t) + U_R(t) = E, \quad (3.24)$$

що на основі (3.7) приводить до такого диференційного рівняння для заряду конденсатора:

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{E}{R}. \quad (3.25)$$

Таке рівняння називають неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами, на відміну від однорідного рівняння (3.8) його права частина є ненульовою. Його можна розв'язати так званим методом варіації сталої. Спочатку записуємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (3.8), він вже отриманий раніше (вираз (3.13)), та розв'язок рівняння (3.25) шукаємо у вигляді

$$q(t) = A(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (3.26)$$

тобто в цьому загальному розв'язку замість константи пишеться невідома функція від часу, яку треба знайти. Підставляємо (3.26) у (3.25), отримуємо:

$$\frac{dA(t)}{dt} \cdot e^{\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC} A(t) \cdot e^{\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} A(t) \cdot e^{\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R}, \quad (3.27)$$

звідки

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow A(t) = \frac{E}{R} \int e^{\frac{t}{RC}} dt + B = ECe^{\frac{t}{RC}} + B, \quad (3.28)$$

де B – константа інтегрування. Тоді загальним розв'язком рівняння (3.25) є

$$q(t) = \left(ECe^{\frac{t}{RC}} + B \right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = EC + Be^{-\frac{t}{RC}}, \quad (3.29)$$

а константу B знаходимо з початкової умови (3.23):

$$0 = EC + B \Rightarrow B = -EC, \quad (3.30)$$

та шуканою залежністю заряду конденсатора від часу є

$$q(t) = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (3.31)$$

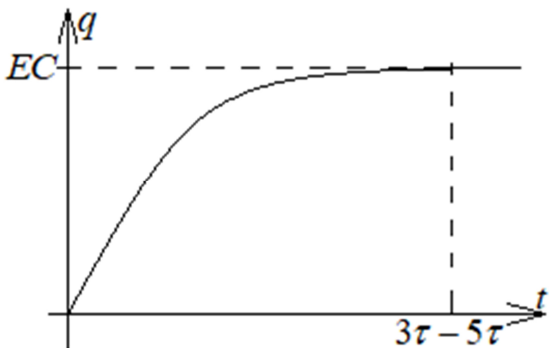


Рис. 3.5

тут використано значення сталої часу ланцюжка (3.17). Схематично залежність (3.31) зображено на рис. 3.5. Конденсатор заряджається, заряд конденсатора збільшується від нуля до свого максимального значення EC , цей процес є перехідним процесом між початковим

станом та фінальним усталеним станом, в якому заряд конденсатора не змінюється. Аналогічно до процесу розрядження конденсатора, описаного в попередньому підрозділі, *тривалість такого перехідного процесу у літературі оцінюється від 3τ до 5τ .*

На основі (3.7) та (3.31) отримуємо залежності від часу для струму через ланцюжок та напруги на обох елементах ланцюжка:

$$I(t) = \dot{q} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, U_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), U_R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.32)$$

зауважимо, що струм через ланцюжок падає за експонентою.

Як бачимо на основі виразів (3.32) та (3.22), неважливо, чи є ланцюжок замкненим сам на себе, чи на джерело постійної ЕРС, струм у ланцюжку падає за експонентою, та після проходження часу перехідного процесу струм у ланцюжку фактично падає до нуля. При цьому такий ефект має місце через наявність саме конденсатора у такому ланцюжку; очевидно, що струм через резистор, підключений до джерела постійної ЕРС, був би постійним і не спадав би. Тому кажуть, що *конденсатор не пропускає постійний струм*.

3.5. Котушка індуктивності. Індуктивність котушки. Перехідні процеси на котушці індуктивності.



Рис. 3.6

Котушка індуктивності – пристрій, що складається з великої кількості витків намотаного провідника. Умовно-графічне зображення котушки наведено на рис. 3.6. Як

відомо, при проходженні струму через котушку індуктивності в ній виникає ЕРС самоіндукції, що дорівнює

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad (3.33)$$

де L – коефіцієнт пропорційності, що *залежить лише від будови котушки, а не від параметрів кола*, і має назву **індуктивності** котушки.

Індуктивність котушки можна вважати постійною величиною, вона вимірюється у генрі: $[L] = \text{Гн}$. На основі (3.33) та (1.4) можна отримати вираз для генрі в термінах базових одиниць СІ:

$$\text{Гн} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^3} \cdot \frac{\text{с}}{\text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}. \quad (3.34)$$

Можна показати, що енергія магнітного поля всередині котушки індуктивності дорівнює

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.35)$$

Зауважимо, що математично котушку зручніше описувати не в термінах ЕРС самоіндукції, а в термінах напруги, та вважати, що залежність напруги на котушці від струму є такою:

$$U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (3.36)$$

Покажемо, чому це так. Нехай котушка є частиною якогось контуру для якого записано другий закон Кірхгофа. Якщо котушку описувати як ЕРС самоіндукції, то матимемо

$$\sum U_{\text{НаІншихЕлементах}} = \varepsilon_L + \sum \text{ІншихЕРС}. \quad (3.37)$$

Підставляючи (3.33) у (3.37), та переносячи доданок $L \cdot dI/dt$ у ліву частину рівності, матимемо

$$\sum U_{\text{НаІншихЕлементах}} + L \frac{dI}{dt} = \sum \text{ІншихЕРС}, \quad (3.38)$$

тобто котушку описано в термінах напруги згідно з виразом (3.36).

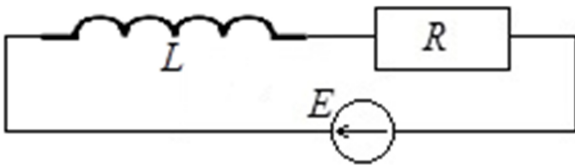


Рис. 3.7



Рис. 3.8

Розглянемо послідовно з'єднані резистор та котушку (RL -ланцюжок), під'єднані до джерела постійної ЕРС (рис. 3.7). Розглянемо випадок, коли початковий струм через ланцюжок є нульовим:

$$I(t=0) = 0. \quad (3.39)$$

За законом Кірхгофа

$$U_L(t) + U_R(t) = E, \quad (3.40)$$

звідки на основі (3.36) отримуємо таке диференціальне рівняння для струму:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + I(t)R = E. \quad (3.41)$$

Аналогічно з розв'язанням схожих рівнянь для RC –ланцюжка, можна показати, що розв'язком рівняння (3.41) за початкової умови (3.39) є

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right), \quad \tau_L = \frac{L}{R}; \quad (3.42)$$

читачам пропонується самостійно отримати розв'язок (3.42). Величина τ_L є сталою часу RL –ланцюжка. Отримаємо також залежності напруги на резисторі та котушці від часу:

$$U_R(t) = I(t)R = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right), \quad U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = E e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (3.43)$$

Бачимо, що після завершення відповідного перехідного процесу струм у ланцюжку буде дорівнювати E/R , тобто не буде відрізнятися від струму через резистор у випадку, якщо резистор без котушки замкнути на джерело постійної ЕРС. Також після завершення перехідного процесу напруга на котушці є нульовою, а напруга на резисторі співпадає з ЕРС, тобто не відрізняється від напруги на резисторі у випадку відсутності котушки. Тобто *катушка пропускає постійний струм, та після завершення перехідного процесу в колах з джерелами постійних ЕРС система веде себе так, нібито катушка відсутня, а наявний лише резистор.*

Розглянемо RL –ланцюжок, замкнений сам на себе (див. рис. 3.8); нехай у початковий момент часу струм через ланцюжок дорівнював I_0 :

$$I(t=0) = I_0. \quad (3.44)$$

Тоді на основі другого закону Кірхгофа та виразу (3.36) можна отримати таке диференціальне рівняння для струму через ланцюжок:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + I(t)R = 0. \quad (3.45)$$

Читачам самостійно пропонується показати, що розв'язком рівняння (3.45) за додаткової умови (3.44) є

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}, \quad (3.46)$$

тобто струм згасатиме за експоненціальним законом та після перехідного процесу впаде до нуля. Відповідно, після завершення перехідного процесу до нуля спадуть і напруги на елементах ланцюжка (читачам це пропонується показати самостійно). Тож також приходимо до висновку, що *після завершення перехідного процесу поведінка системи не відрізнятиметься від поведінки системи, в якій наявний лише резистор без котушки.*

Тривалість обох вищеописаних перехідних процесів у RL -ланцюжках у літературі оцінюється від 3τ до 5τ .

Тож у системах лише з джерелами постійних ЕРС після завершення перехідного процесу котушка поводить себе просто як ідеальний провідник та не впливає на параметри системи. Зауважимо, що річ йде про так звану ідеальну котушку, резистивний опір якої вважається нульовим. При описі реальних котушок подекуди враховують їхній резистивний опір, що перевищує опір проводів, бо довжина намотаного на котушку проводу є досить великою, а опір проводу є пропорційним до його довжини. Але зазвичай резистивний опір котушки все одно є набагато меншим за опір резисторів та його врахування не вплине суттєво на опис системи.

Також зауважимо, що в колах змінного струму вплив котушки на параметри системи є суттєвим, проте річ про це піде у наступних розділах.

3.6. Закони комутації

Перший закон комутації: струм через котушку індуктивності не може змінюватись стрибкоподібно. Іншими словами, *струм через котушку індуктивності є неперервною функцією часу.*

Другий закон комутації: заряд конденсатора не може змінюватись стрибкоподібно. Іншими словами, *заряд конденсатора є неперервною функцією часу.*

Для прикладу проілюструємо дію другого закону комутації для кола, зображеного на рис. 3.9.

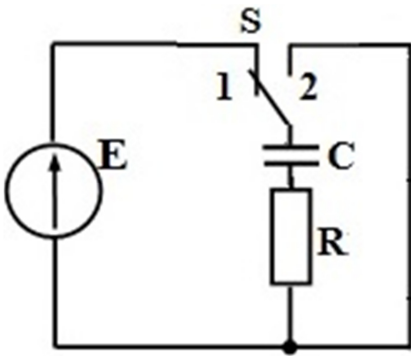


Рис. 3.9

Нехай у початковий момент часу ключ S замкнено в положенні 1 та початковий заряд конденсатора дорівнює нулю. Тоді конденсатор буде заряджатись за законом (3.31), а струм через конденсатор описуватиметься законом (3.32). Після проходження часу перехідного процесу заряд конденсатора стане рівним EC , а струм через RC -ланцюжок впаде до нуля. Нехай після встановлення усталеного режиму ключ перемкнули у праве положення. Тоді заряд та струм конденсатора будуть залежати від часу за законами (3.18) та (3.22) відповідно, де час відраховується від моменту перемикавання ключа. Схематично ці залежності зображено на рис. 3.10.

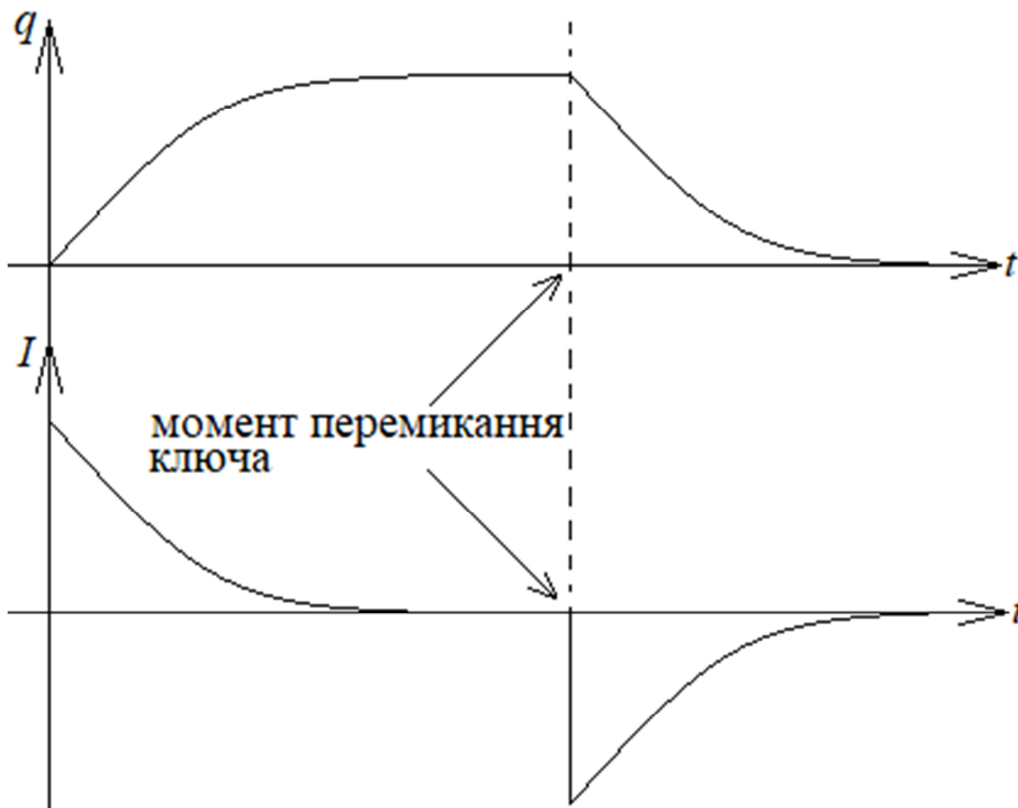


Рис. 3.10

Як бачимо, у момент перемикавання ключа струм через конденсатор змінюється стрибкоподібно, але заряд конденсатора стрибкоподібно не

змінюється, він є неперервною функцією. Яким заряд конденсатора був за мить до перемикання ключа, таким же він буде й через мить після перемикання ключа.

3.7. Резюме

Зв'язок між напругою на конденсаторі, ємністю конденсатора та зарядом конденсатора є таким:

$$q = CU, \quad (3.47)$$

де q – заряд конденсатора, C – ємність конденсатора та U – напруга на конденсаторі. На котушці виникає ЕРС самоіндукції, що дорівнює

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad (3.48)$$

де L – індуктивність котушки та I – струм через котушку.

Зв'язок між струмом та напругою на конденсаторі і котушці є таким:

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}, \quad U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}, \quad (3.49)$$

де перший з цих виразів справедливий для конденсатора, другий – для котушки.

У RC–ланцюжку, замкненому самому на себе, конденсатор розряджається за експоненціальним законом

$$q(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (3.50)$$

де $q(t)$ – залежність заряду конденсатора від часу, q_0 – початковий заряд конденсатора. Стала часу RC–ланцюжка визначається як

$$\tau_C = RC, \quad (3.51)$$

вона є часом, за який заряд конденсатора падає в e разів. У RC–ланцюжку, підключеному до джерела постійної ЕРС, у випадку нульового початкового заряду конденсатора конденсатор заряджається за експоненціальним законом

$$q(t) = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \quad (3.52)$$

E – значення відповідної ЕРС.

У RL–ланцюжку, замкненому самому на себе, струм згасає з часом за експоненціальним законом

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad (3.53)$$

I_0 – початкове значення струму. Стала часу RL–ланцюжка визначається як

$$\tau_L = \frac{L}{R}, \quad (3.54)$$

вона є часом, за який струм впаде в e разів. У RL–ланцюжку, підключеному до джерела постійної ЕРС, у випадку нульового початкового струму струм зростає за експоненціальним законом

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right). \quad (3.55)$$

Перший закон комутації стверджує, що струм через котушку індуктивності є неперервною функцією часу. Другий закон комутації стверджує, що заряд конденсатора є неперервною функцією часу.

3.8. Питання для самоконтролю

1. Якими є одиниці вимірювання ємності та індуктивності? Вивести ці одиниці через базові одиниці СІ.
2. Навести співвідношення між напругою на конденсаторі та зарядом конденсатора. Вивести співвідношення між струмом через конденсатор та напругою на конденсаторі.
3. Навести вираз для ЕРС самоіндукції котушки. Пояснити, як отримується співвідношення між напругою на котушці та струмом через котушку.
4. Навести визначення сталої часу RC– та RL–ланцюжків та вказати оцінки на тривалість перехідних процесів у конденсаторі та котушці в колах з постійними ЕРС.

5. Вивести диференційні рівняння для заряду конденсатора в задачах зарядження та розрядження конденсатора в RC–ланцюжках. Розв’язати ці рівняння та отримати залежності від часу напруги на конденсаторі і струму через конденсатор у цих задачах. Що таке стала часу RC–ланцюжка? Навести оцінки на тривалість перехідних процесів в RC–ланцюжку.

6. Вивести формули (3.42) та (3.46).

7. Навести закони комутації та на прикладі пояснити їхній фізичний зміст.

4. Кола змінного синусоїдального струму

4.1. Анотація

Описано базові результати для кіл змінного синусоїдального струму. Описано співвідношення між амплітудами й фазами напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці, на основі розв'язання відповідних диференціальних рівнянь отримано результати для опору послідовного RLC-контурі та провідності паралельного RLC-контурі, а також для зсуву фаз між загальним струмом та загальною напругою на цих контурах. Наведено вирази для активної, реактивної та повної потужності, та розкрито фізичний зміст цих величин.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Знати залежність змінного синусоїдального струму від часу, знати визначення амплітуди, фази, періоду, частоти та кругової частоти.
- Уміти виводити співвідношення між діяльними та амплітудними значеннями величин у колах змінного синусоїдального струму.
- Уміти виводити співвідношення між амплітудою напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці в колах змінного струму. Уміти виводити співвідношення між фазами напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці в колах змінного струму. Знати вирази для реактивного опору конденсатора й котушки.
- Знати алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами.
- Уміти виводити диференціальне рівняння для заряду конденсатора в послідовному RLC-контурі, підключеному до генератора змінної синусоїдальної ЕРС. Знати, яка частина розв'язку цього рівняння відповідає за перехідний процес. Уміти розв'язувати це рівняння в усталеному режимі роботи кола, уміти виводити формули для опору

контурі та для зсуву фаз між загальною напругою та загальним струмом на контурі.

- Знати, що таке явище резонансу напруг у послідовному RLC–контурі та уміти виводити співвідношення між параметрами кола, при якому воно виникає.
- Уміти виводити співвідношення між струмами у паралельному RLC–контурі, підключеному до генератора змінної синусоїдальної ЕРС. Уміти виводити диференціальне рівняння для струму через котушку, знати, який параметр кола є відповідальним за перехідний процес, та уміти розв’язувати це рівняння в усталеному режимі роботи кола у випадку, коли реактивний опір котушки є набагато більшим за резистивний опір котушки. Уміти виводити формули для провідності контуру та для зсуву фаз між загальною напругою та загальним струмом на контурі.
- Знати, що таке явище резонансу струмів у паралельному RLC–контурі та уміти виводити співвідношення між параметрами кола, при якому воно виникає.
- Уміти виводити залежність від часу миттєвої потужності в колі змінного струму. Знати, як пов’язаний період миттєвої потужності з періодом струму.
- Уміти виводити вираз для активної потужності.
- Знати вираз для реактивної потужності й на прикладі послідовного RLC–контуру уміти проілюструвати фізичний зміст цієї величини.
- Знати вираз для повної потужності змінного струму

4.2. Синусоїдальний змінний струм. Діяльні значення

Змінний електричний струм – електричний струм, величина або напрям якого змінюються у часі: $I = I(t)$. Струм називають періодичним, якщо функція $I(t)$ є періодичною. Дуже часто у електричних колах реалізовується випадок

періодичного синусоїдального струму. У такому випадку залежність струму від часу задається законом

$$I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.1)$$

Оскільки $|\sin(\omega t + \varphi)| \leq 1$, то I_m є *максимально можливим миттєвим значенням струму*. Цю величину назвали **амплітудою** синусоїдального струму. Фазою струму назвали аргумент синуса у виразі (4.1):

$$\text{Фаза}(I) = \omega t + \varphi. \quad (4.2)$$

Константа ω є **кутовою частотою**, а константа φ є різницею фаз між струмом, що задається виразом (4.1), та струмом, що залежить від часу за «чистим синусом», тобто законом $I(t) = I_m \sin(\omega t)$.

Оскільки синус є періодичною функцією з головним періодом 2π , то

$$I\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = I_m \sin(\omega t + 2\pi + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \varphi) = I(t). \quad (4.3)$$

Тож головним **періодом** (надалі в тексті для зручності слово «головним» буде опускатися) синусоїдального змінного струму є величина

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.4)$$

За визначенням, **частота** струму є величиною, оберненою до періоду:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (4.5)$$

З виразів (4.5) і (4.4) можна отримати зв'язок частоти та кутової частоти:

$$\omega = 2\pi f. \quad (4.6)$$

Розмірності вищезгаданих величин є такими: $[\omega] = [f] = \text{с}^{-1}$, $[I_m] = \text{А}$, $[\varphi] = 1$. Часто частоту вимірюють у герцах: $[f] = \text{Гц} = \text{с}^{-1}$. Фаза є безрозмірною.

Очевидно, що середнє за період значення синусоїдального змінного струму дорівнює нулю. **Діяльним значенням** синусоїдального струму за визначенням є корінь квадратний з середньоквадратичного значення струму за період:

$$I_d = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle}, \quad (4.7)$$

де трикутними дужками позначено середнє значення.

Виведемо зв'язок амплітудного та діяльного значень синусоїдального струму. Як відомо, середнє значення функції $f(x)$ на проміжку $x \in [a, b]$ за визначенням є

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad (4.8)$$

тож середньоквадратичне за період значення синусоїдального струму

$$\begin{aligned} \langle I^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)) dt = \\ &= \frac{I_m^2}{2T} (T - 0) = \frac{I_m^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

тож на основі (4.9) та (4.7) отримуємо

$$I_d = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad (4.10)$$

тобто діяльне значення синусоїдального струму у $\sqrt{2}$ разів менше за його амплітуду.

Аналогічним чином вводять ці поняття для напруги та ЕРС у колах змінного синусоїдального струму:

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \psi), \quad E(t) = E_m \sin(\omega t + \delta), \quad U_d = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E_d = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.11)$$

Слід зауважити, що в усталеному режимі роботи кіл синусоїдального змінного струму амплітуди та фази різних величин на різних елементах кола можуть відрізнятись, проте не частота. В усталеному режимі роботи кіл синусоїдального змінного струму частота напруги й струму та ЕРС для всіх елементів кола є одною й тою ж.

Також слід мати на увазі, що у колах синусоїдального струму закони Кірхгофа можна писати лише для миттєвих значень струмів, напруг та ЕРС. Ці закони не можна писати для діяльних значень!

4.3. Поведінка резистора, конденсатора та котушки індуктивності в колі синусоїдального змінного струму

Як відомо, напруга на резисторі та струм через резистор пов'язані співвідношенням

$$U_R(t) = I_R(t) \cdot R, \quad (4.12)$$

тож на резисторі миттєві значення напруги та струму є прямо пропорційними. Резистор є єдиним елементом кіл, що має таку властивість. Відповідно, нехай струм через резистор залежить від часу за законом

$$I_R(t) = I_{Rm} \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.13)$$

тоді відповідна залежність напруги від часу

$$U_R(t) = I_{Rm} R \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.14)$$

звідки маємо такі співвідношення для амплітуд, діяльних значень і фаз напруги та струму на резисторі:

$$U_{Rm} = I_{Rm} R, \quad U_{Rд} = I_{Rд} R, \quad \text{Фаза}(I_R) = \text{Фаза}(U_R). \quad (4.15)$$

Як бачимо, на резисторі фази амплітуди та струму є однаковими.

Розглянемо тепер поведінку конденсатора в колах змінного синусоїдального струму. Нехай напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом

$$U_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.16)$$

Тоді згідно з (3.4) струм через конденсатор матиме вигляд

$$I_C(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} = \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi) = \omega C U_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.17)$$

маємо такі співвідношення для амплітуд, діяльних значень і фаз напруги та струму на конденсаторі:

$$I_{Cm} = \omega C U_{Cm}, \quad I_{Cд} = \omega C U_{Cд}, \quad \text{Фаза}(I_C) - \text{Фаза}(U_C) = \frac{\pi}{2}, \quad (4.18)$$

тож на конденсаторі струм випереджає за фазою напругу на $\pi/2$.

Перепишемо отримане співвідношення між діяльними значеннями таким чином:

$$\frac{U_{Cд}}{I_{Cд}} = X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad (4.19)$$

звідки за аналогією із законом Ома бачимо, що *величина X_C має фізичний зміст опору конденсатора*. Цю величину назвали **реактивним опором** конденсатора, $[X_C] = \text{Ом}$. Як бачимо, реактивний опір конденсатора є обернено пропорційним до частоти. У граничному випадку $\omega \rightarrow 0$, що відповідає переходу від синусоїдальних до постійних величин, матимемо $X_C \rightarrow \infty$, тож у цьому випадку реактивний опір конденсатора прямуватиме до нескінченності, що підкреслює вищеописаний факт, що в усталеному режимі роботи кіл конденсатор не пропускає постійний струм.

Розглянемо тепер поведінку котушки індуктивності в колах синусоїдального струму. Нехай струм через котушку індуктивності залежить від часу за законом

$$I_L(t) = I_{Lm} \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.20)$$

Тоді згідно з (3.36) матимемо залежність напруги на котушці від часу:

$$U_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt} = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \varphi) = \omega L I_{Lm} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.21)$$

звідки маємо такі *співвідношення для амплітуд, діяльних значень і фаз напруги та струму на котушці*:

$$U_{Lm} = \omega L I_{Lm}, \quad U_{Lд} = \omega L I_{Lд}, \quad \text{Фаза}(U_L) - \text{Фаза}(I_L) = \frac{\pi}{2}, \quad (4.22)$$

тож *на котушці напруга випереджає за фазою струм на $\pi/2$* . Перепишемо отримане співвідношення між діяльними значеннями таким чином:

$$\frac{U_{Lд}}{I_{Lд}} = X_L = \omega L, \quad (4.23)$$

звідки за аналогією із законом Ома бачимо, що *величина X_L має фізичний зміст опору котушки*, $[X_L] = \text{Ом}$. Цю величину назвали **реактивним опором** котушки. Як бачимо, реактивний опір котушки є прямо пропорційним до частоти. У граничному випадку $\omega \rightarrow 0$ матимемо $X_L \rightarrow 0$, що підтверджує

вищеописаний факт, що в усталеному режимі роботи кіл постійного струму ідеальна котушка просто веде себе як ідеальний провідник.

4.4. Відомості про диференційні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Розглянемо таке диференційне рівняння для невідомої функції $x(t)$:

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0; \quad a, b, c = \text{const}. \quad (4.24)$$

Таке рівняння носить назву однорідного диференційного рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Нагадаємо, що крапка означає першу похідну за часом, дві крапки – другу похідну за часом. Щоб отримати розв'язок такого рівняння, спершу складають його так зване характеристичне рівняння

$$ak^2 + bk + c = 0, \quad (4.25)$$

та розв'язують його. Усього можливі три випадки:

1. Корені рівняння (4.25) дійсні та не дорівнюють один одному. Тоді загальним розв'язком рівняння (4.24) є

$$x(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t}, \quad (4.26)$$

де $k_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння (4.25) та A, B – довільні константи.

2. Рівняння (4.25) має два однакові дійсні корені $k_1 = k_2 = k$. Тоді загальним розв'язком рівняння (4.24) є

$$x(t) = Ate^{kt} + Be^{kt}, \quad (4.27)$$

A, B – довільні константи.

3. Корені рівняння (4.25) є комплексно-спряженими: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$. Тоді загальним розв'язком рівняння (4.24) є

$$x(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), \quad (4.28)$$

A, B – довільні константи.

Диференційне рівняння для невідомої функції $x(t)$ вигляду

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t); \quad a, b, c = \text{const}, \quad (4.29)$$

де $f(t)$ – відома функція, носить назву неоднорідного диференційного рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Загальним розв’язком рівняння (4.29) є сума загального розв’язку відповідного однорідного рівняння (4.24) та частинного розв’язку рівняння (4.29). Тобто, щоб знайти загальний розв’язок рівняння (4.29), треба вгадати якусь одну конкретну функцію, що є його розв’язком (вгадати частинний розв’язок), та додати до неї загальний розв’язок рівняння (4.24), що знаходиться за вищеписаним алгоритмом. Для деяких типів функцій $f(t)$ існує алгоритм «вгадування» частинних розв’язків, зокрема такий алгоритм існує у випадку, коли $f(t)$ є синусоїдальною.

4.5. Послідовний RLC-контур. Резонанс напруг.

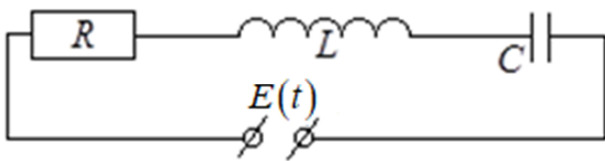


Рис. 4.1

Розглянемо послідовно з’єднані резистор, конденсатор і котушку (послідовний RLC-контур), що підключені до генератора змінної синусоїдальної ЕРС. Нехай ЕРС залежить від часу за законом

$$E(t) = E_m \cos(\omega t). \quad (4.30)$$

За другим законом Кірхгофа маємо

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = E(t). \quad (4.31)$$

Виразимо всі величини в лівій частині цього рівняння через заряд конденсатора $q(t)$. Оскільки всі елементи з’єднано послідовно, то через них тече однаковий струм, який є похідною від заряду конденсатора за часом. Тоді

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad U_R(t) = I(t)R = \dot{q}(t)R, \quad U_L(t) = L\dot{I}(t) = L\ddot{q}(t), \quad (4.32)$$

та на основі (4.30), (4.31) та (4.32) отримуємо диференційне рівняння для заряду конденсатора

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{E_m}{L}\cos(\omega t). \quad (4.33)$$

Введемо для зручності такі позначення:

$$a = \frac{R}{L} > 0, \quad b = \frac{1}{LC} > 0, \quad \gamma = \frac{E_m}{L}, \quad (4.34)$$

та перепишемо отримане неоднорідне рівняння (4.33):

$$\ddot{q}(t) + a\dot{q}(t) + bq(t) = \gamma \cos(\omega t). \quad (4.35)$$

Його розв'язок є сумою частинного розв'язку рівняння (4.35) та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Розберемося спочатку з поведінкою загального розв'язку однорідного рівняння. Складемо характеристичне рівняння та випишемо його корені:

$$k^2 + ak + b = 0, \quad k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. \quad (4.36)$$

Можливі три випадки:

1. $a^2 > 4b$. Тоді обидва корені $k_{1,2} < 0$ та згідно з (4.26) відповідний загальний розв'язок є експоненційно згасаючим.

2. $a^2 = 4b$. Тоді $k = k_1 = k_2 < 0$ і відповідний загальний розв'язок (4.27) теж є згасаючим, бо при k

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{kt} = 0. \quad (4.37)$$

Хоча формально границю взято при $t \rightarrow \infty$, на практиці відповідний розв'язок (4.27) можна вважати нехтовно малим після проходження скінченної тривалості відповідного перехідного процесу.

3. $a^2 < 4b$. Тоді

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}, \quad (4.38)$$

та відповідний розв'язок (4.28) теж є згасаючим, бо при $a > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}t\right) \cdot e^{-\frac{a}{2}t} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}t\right) \cdot e^{-\frac{a}{2}t} \right) = 0. \quad (4.39)$$

Тож у будь-якому випадку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння є згасаючим, після завершення відповідного перехідного процесу стане нехтовно малим та не дасть внеску до розв'язку рівняння (4.35).

Тож в усталеному режимі роботи кола матиме місце лише частинний розв'язок рівняння (4.35), який шукатимемо у вигляді

$$q(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t), \quad (4.40)$$

α , β – невідомі константи, які треба знайти. Беремо перші дві похідні від виразу (4.40):

$$\dot{q}(t) = -\alpha\omega \sin(\omega t) + \beta\omega \cos(\omega t), \quad \ddot{q}(t) = -\alpha\omega^2 \cos(\omega t) - \beta\omega^2 \sin(\omega t), \quad (4.41)$$

та підставляємо (4.40) і (4.41) у (4.35), окремо збираючи члени при $\sin(\omega t)$ та при $\cos(\omega t)$:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) [-\alpha\omega^2 + a\beta\omega + \alpha b] + \sin(\omega t) [-\beta\omega^2 - a\alpha\omega + b\beta] = \\ = \gamma \cdot \cos(\omega t) + 0 \cdot \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (4.42)$$

прирівнюючи члени при $\sin(\omega t)$ та при $\cos(\omega t)$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно α і β :

$$(b - \omega^2) \cdot \alpha + a\omega \cdot \beta = \gamma, \quad -a\omega \cdot \alpha + (b - \omega^2) \cdot \beta = 0, \quad (4.43)$$

розв'язком якої є

$$\alpha = \gamma \frac{(b - \omega^2)}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}, \quad \beta = \gamma \frac{a\omega}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}. \quad (4.44)$$

Тож в усталеному режимі роботи кола залежністю заряду конденсатора від часу є вираз (4.40), де константи α , β мають вигляд (4.44) з урахуванням позначень (4.34). Перейдемо тепер до опису струму в цьому контурі:

$$\begin{aligned} I(t) = \dot{q}(t) = -\alpha\omega \sin(\omega t) + \beta\omega \cos(\omega t) = \\ = \gamma\omega \left(-\frac{(b - \omega^2)}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} \sin(\omega t) + \frac{a\omega}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} \cos(\omega t) \right) = \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$= \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}} (-\psi \cdot \sin(\omega t) + \delta \cdot \cos(\omega t)),$$

де

$$\psi = \frac{(b-\omega^2)}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}}, \quad \delta = \frac{a\omega}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}}. \quad (4.46)$$

Оскільки

$$\psi^2 + \delta^2 = 1, \quad |\psi| \leq 1, \quad \delta \in [0,1], \quad (4.47)$$

то можна вважати, що ψ і δ є відповідно синусом та косинусом деякого кута:

$$\psi = \sin \varphi, \quad \delta = \cos \varphi \geq 0, \quad (4.48)$$

та згідно з (4.45)

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}} (-\sin \varphi \cdot \sin(\omega t) + \cos \varphi \cdot \cos(\omega t)) = \\ &= \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Підставивши позначення (4.34) в отриманий вираз, матимемо

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\frac{E_m}{L} \omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{\frac{E_m}{L} \omega}{\frac{\omega}{L} \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_m}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (4.50)$$

тут використано вирази (4.23) та (4.19) для реактивних опорів котушки та конденсатора відповідно. Загальною напругою на контурі є сума напруг на резисторі, конденсаторі та котушці, бо з'єднання є послідовним. Тоді згідно з рівнянням (4.31) приходимо до висновку, що загальна напруга на контурі співпадає зі змінною ЕРС. Відповідно, амплітудне та діяльне значення струму і загальної напруги є такими:

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}}, U_m = E_m, I_d = \frac{E_d}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}}, U_d = E_d, \quad (4.51)$$

тут використано той факт, що діяльні значення в $\sqrt{2}$ разів менші за амплітудні.
Тоді

$$\frac{U_d}{I_d} = Z = \sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}, \quad (4.52)$$

звідки приходимо до висновку, що величина Z , що задається виразом (4.52), має фізичний зміст опору послідовного RLC -контуру. Це є дуже відомим в електротехніці результатом.

На основі (4.50), (4.30) та того факту, що загальна напруга на контурі співпадає зі змінною ЕРС, приходимо до висновку, що

$$\varphi = \text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U), \quad (4.53)$$

а на основі (4.46), (4.48), (4.34), (4.23) та (4.19) отримуємо

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b - \omega^2}{a\omega} = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\frac{R}{L}\omega} = \frac{\omega \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)}{\frac{R}{L}\omega} = \frac{X_C - X_L}{R}, \quad (4.54)$$

тож на основі (4.53) та (4.54) отримуємо такий відомий результат для зсуву фаз між струмом та напругою:

$$\text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U) = \operatorname{arctg} \left(\frac{X_C - X_L}{R} \right). \quad (4.55)$$

Слід зауважити, що в загальному випадку розв'язком рівняння $\operatorname{tg} x = a$ є не лише $\operatorname{arctg} a$, але оскільки косинус відповідного зсуву фаз невід'ємний (див. (4.48)), то реалізується лише випадок (4.55).

Введемо параметр

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (4.56)$$

що має назву **резонансної кутової частоти**. Як бачимо з (4.55), при $X_C > X_L \Leftrightarrow \omega < \omega_p$ струм через контур випереджає загальну напругу на контурі

за фазою й кажуть, що коло має ємнісний характер. Якщо $X_C < X_L \Leftrightarrow \omega > \omega_p$, то напруга на контурі випереджає струм за фазою й кажуть, що коло має індуктивний характер.

У випадку $X_C = X_L \Leftrightarrow \omega = \omega_p$ струм і напруга на контурі знаходяться в одній фазі. Такий випадок називають **резонансом напруг**. На основі (4.52) бачимо, що у випадку резонансу напруг опір контуру є мінімально можливим та співпадає за величиною з опором резистору. Відповідно, діяльне значення струму через контур є максимально можливим у резонансному випадку.

Виведемо також залежності напруги на конденсаторі та на котушці від часу. Спочатку перепишемо (4.50) з урахуванням (4.51):

$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.57)$$

та оскільки струм є похідною від заряду конденсатора за часом, то заряд

$$q(t) = \int_0^t I(t) dt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.58)$$

та

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi) = I_m X_C \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.59)$$

Напруга на котушці

$$U_L(t) = L\dot{I}(t) = -I_m L \omega \sin(\omega t + \varphi) = -I_m X_L \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.60)$$

Тоді на основі (4.60) та (4.59) бачимо, що в резонансному випадку виконується рівність $U_L(t) + U_C(t) = 0$, тобто миттєві значення напруги на конденсаторі і котушці одне одного компенсують, і миттєве значення напруги на контурі співпадатиме з миттєвим значенням напруги на резисторі.

З усього вищесказаного можна зробити висновок, що у випадку резонансу напруг поведінка послідовного RLC -контур, підключеного до синусоїдальної ЕРС, є ідентичною до поведінки резистора.

4.6. Паралельний RLC-контур. Резонанс струмів.

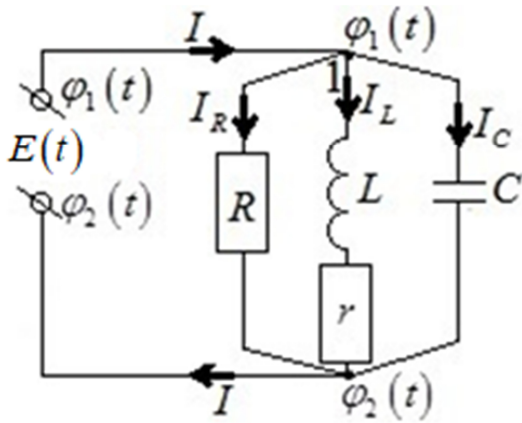


Рис. 4.2

Розглянемо паралельно з'єднані резистор, конденсатор та котушку (паралельний RLC -контур), підключені до генератора синусоїдальної ЕРС, див. рис. 4.2. Зауважимо, що на рис. 4.2 враховано резистивний опір котушки, котушка представлена як послідовне з'єднання ідеальної котушки індуктивності та

резистора r , фізичний зміст якого – резистивний опір котушки. Нехай ЕРС залежить від часу за законом (4.30). Закон Кірхгофа для вузла 1:

$$I(t) = I_R(t) + I_L(t) + I_C(t). \quad (4.61)$$

Розставимо потенціали на вузлах і клеммах, пам'ятаючи про те, що точки, що з'єднані «голим» проводом, мають однаковий потенціал. Тоді згідно з (4.30) та рис. 4.2

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = E_m \cos(\omega t) = U_R(t) = U_L(t) + U_r(t) = U_C(t), \quad (4.62)$$

Також згідно з (3.36) та (3.4) маємо

$$U_R(t) = R \cdot I_R(t), \quad U_L(t) + U_r(t) = L \cdot \dot{I}_L(t) + r I_L(t), \quad I_C(t) = C \cdot \dot{U}_C(t). \quad (4.63)$$

На основі (4.63) та (4.62) виразимо всі струми через $I_L(t)$:

$$\begin{aligned} U_R(t) = U_L(t) + U_r(t) &\Rightarrow R I_R(t) = L \dot{I}_L(t) + r I_L(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_R(t) = \frac{L}{R} \dot{I}_L(t) + \frac{r}{R} I_L(t), \end{aligned} \quad (4.64)$$

та

$$\begin{aligned} U_C(t) = U_L(t) + U_r(t) &\Rightarrow C \dot{U}_C(t) = C \dot{U}_L(t) + C \dot{U}_r(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_C(t) = L C \ddot{I}_L(t) + r C \dot{I}_L(t). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Також на основі (4.62) та (4.63) бачимо, що $I_L(t)$ є розв'язком такого диференційного рівняння:

$$L \dot{I}_L(t) + r I_L(t) = E_m \cos(\omega t). \quad (4.66)$$

Тож для того, щоб знайти залежності від часу всіх струмів у колі, треба знайти $I_L(t)$ на основі диференційного рівняння (4.66), а $I_R(t)$ та $I_C(t)$ знайти за допомогою отриманої залежності $I_L(t)$ на основі рівнянь (4.64) та (4.65), відповідно.

Рівняння (4.66) будемо розв'язувати методом варіації сталої. Спочатку випишемо відповідне однорідне рівняння та його загальний розв'язок:

$$L\dot{I}_L(t) + rI_L(t) = 0, \quad I_L(t) = Ae^{-\frac{r}{L}t}, \quad (4.67)$$

A – довільна константа; цей загальний розв'язок читачам пропонується вивести самостійно (див. аналогічні викладки в підрозділі 3.2). Надалі шукаємо розв'язок рівняння (4.66) у вигляді

$$I_L(t) = A(t)e^{-\frac{r}{L}t}, \quad (4.68)$$

підставляємо (4.68) у (4.66):

$$\begin{aligned} L\dot{A}(t)e^{-\frac{r}{L}t} - rA(t)e^{-\frac{r}{L}t} + A(t)e^{-\frac{r}{L}t} &= E_m \cos(\omega t) \Rightarrow \\ \Rightarrow A(t) &= \frac{E_m}{L} \int \cos(\omega t) e^{\frac{r}{L}t} dt + B, \end{aligned} \quad (4.69)$$

B – довільна константа. Згідно з табличним інтегралом

$$\int dt e^{at} \cos(\omega t) = e^{at} \frac{a \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{a^2 + \omega^2} \quad (4.70)$$

маємо

$$A(t) = E_m e^{\frac{r}{L}t} \frac{r \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)}{r^2 + \omega^2 L^2} + B, \quad (4.71)$$

та на основі (4.68) отримуємо загальний розв'язок рівняння (4.66):

$$I_L(t) = E_m \frac{r \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)}{r^2 + \omega^2 L^2} + B e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (4.72)$$

Як бачимо, другий доданок у (4.72) є експоненційно згасаючим, і після завершення перехідного процесу в усталеному режимі роботи кола цей доданок буде відсутнім. Проте тут проілюстровано важливість врахування резистивного

опору котушки – саме резистивний опір котушки «відповідає» за наявність перехідного процесу у системі! В усталеному режимі роботи кола

$$I_L(t) = E_m \frac{r \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)}{r^2 + \omega^2 L^2}, \quad (4.73)$$

та на основі (4.64) і (4.65) знаходимо струми через резистор та конденсатор:

$$I_R(t) = E_m \omega \frac{L - r \sin(\omega t) + \omega L \cos(\omega t)}{R(r^2 + \omega^2 L^2)} + \frac{r}{R} E_m \frac{r \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)}{r^2 + \omega^2 L^2}, \quad (4.74)$$

$$I_C(t) = -LC\omega^2 E_m \frac{r \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)}{r^2 + \omega^2 L^2} + rC\omega E_m \frac{\omega L \cos(\omega t) - r \sin(\omega t)}{r^2 + \omega^2 L^2}.$$

Якщо котушка є близькою до ідеальної, то її резистивний опір має бути набагато менше за реактивний опір, інакше котушка вестиме себе більше як резистор, ніж як котушка. Тоді введемо безрозмірний малий параметр

$$\xi = \frac{r}{\omega L} \ll 1, \quad (4.75)$$

та перепишемо результати (4.73) і (4.74):

$$I_L(t) = \frac{E_m}{\omega L} \frac{\xi \cos(\omega t) + \sin(\omega t)}{1 + \xi^2},$$

$$I_R(t) = \frac{E_m}{R} \frac{-\xi \sin(\omega t) + \cos(\omega t)}{1 + \xi^2} + \xi \frac{E_m}{R} \frac{\xi \cos(\omega t) + \sin(\omega t)}{1 + \xi^2}, \quad (4.76)$$

$$I_C(t) = -\omega C E_m \frac{\xi \cos(\omega t) + \sin(\omega t)}{1 + \xi^2} + \xi \omega C E_m \frac{\cos(\omega t) - \xi \sin(\omega t)}{1 + \xi^2}.$$

Розвинувши результати (4.76) за малим параметром ξ в околі точки $\xi = 0$ у ряд Тейлора, отримаємо

$$I_L(t) = \frac{E_m}{\omega L} \sin(\omega t) + O(\xi), \quad I_R(t) = \frac{E_m}{R} \cos(\omega t) + O(\xi), \quad (4.77)$$

$$I_C(t) = -\omega C E_m \sin(\omega t) + O(\xi),$$

у (4.77) пораховано лише головний порядок, оцінки $O(\xi)$ тут є апіорними, тобто розрахунок першого порядку малості за ξ не проводився.

Введемо параметри, що є оберненими до опору резистора та реактивних опорів елементів:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}, \quad B_R = \frac{1}{R}, \quad B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C, \quad (4.78)$$

ці величини носять назву **провідностей** відповідних елементів, $[B_L] = [B_R] = [B_C] = \text{Ом}^{-1}$. Перепишемо (4.77), врахувавши лише головний порядок за ξ і знехтувавши членами першого й вищих порядків:

$$I_L(t) = E_m B_L \sin(\omega t), \quad I_R(t) = E_m B_R \cos(\omega t), \quad I_C(t) = -E_m B_C \sin(\omega t). \quad (4.79)$$

Тоді згідно з (4.61) загальний струм через послідовний RLC -контур є таким:

$$\begin{aligned} I(t) &= E_m (B_R \cos(\omega t) - (B_C - B_L) \sin(\omega t)) = \\ &= E_m \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2} (\psi \cos(\omega t) - \delta \sin(\omega t)), \end{aligned} \quad (4.80)$$

де

$$\psi = \frac{B_R}{\sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2}}, \quad \delta = \frac{B_C - B_L}{\sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2}}. \quad (4.81)$$

Оскільки

$$\psi \in [0, 1], \quad |\delta| \leq 1, \quad \psi^2 + \delta^2 = 1, \quad (4.82)$$

то можна вважати, що ψ та δ – косинус та синус деякого кута:

$$\psi = \cos \varphi \geq 0, \quad \delta = \sin \varphi, \quad (4.83)$$

і на основі (4.80) бачимо, що

$$I(t) = E_m \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2} \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.84)$$

З рис. 4.2. очевидно, що загальна напруга на послідовному контурі $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = E(t)$, тож загальна напруга на контурі співпадає з ЕРС. Тоді на основі (4.84) та (4.30) маємо такі амплітудні та діяльні значення загального струму і загальної напруги на контурі:

$$I_m = E_m \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2}, \quad U_m = E_m, \quad I_d = E_d \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2}, \quad U_d = E_d, \quad (4.85)$$

Та звідси маємо, що **провідність усього контуру**

$$B = \frac{I_d}{U_d} = \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2}, \quad (4.86)$$

цей результат є дуже відомим в електротехніці.

Поговоримо тепер про зсув фаз між струмом та напругою. На основі (4.84), (4.30), (4.81), (4.83) та того факту, що загальна напруга співпадає з ЕРС, маємо

$$\text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U) = \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B_C - B_L}{B_R}, \quad (4.87)$$

і оскільки $\cos \varphi \geq 0$, то реалізовується випадок

$$\text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U) = \operatorname{arctg} \left(\frac{B_C - B_L}{B_R} \right). \quad (4.88)$$

Результат (4.88) для зсуву фаз між загальними струмом та напругою на паралельному RLC -контурі теж є дуже відомим в електротехніці.

Резонансна кутова частота для паралельного контуру вводиться таким же чином, як і для послідовного, див. (4.56). Відповідно, на основі (4.88) та (4.78) бачимо, що при $B_C > B_L \Leftrightarrow \omega > \omega_p$ струм випереджає напругу за фазою, коло має ємнісний характер, а при $B_C < B_L \Leftrightarrow \omega < \omega_p$ напруга випереджає струм за фазою, коло має індуктивний характер. У випадку, $B_C = B_L \Leftrightarrow \omega = \omega_p$, тобто коли частота співпадає з резонансною, струм і напруга на контурі знаходяться в однаковій фазі, цей випадок називають **резонансом струмів**.

Згідно з (4.86) у випадку резонансу струмів провідність контуру співпадає з провідністю резистора. Також на основі (4.79) і (4.80) бачимо, що у випадку резонансу струмів струми через котушку та конденсатор компенсують один одного й загальний струм через контур буде співпадати зі струмом через резистор. Тобто у випадку резонансу струмів поведінка контуру є фактично ідентичною до поведінки резистора.

4.7. Потужність змінного синусоїдального струму

Нехай на деякому елементі чи ділянці кола синусоїдального струму напруга та струм залежать від часу таким чином:

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi + \delta), \quad I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.89)$$

$$\delta = \text{Фаза}(U) - \text{Фаза}(I);$$

як відомо, в усталеному режимі роботи кола всі напруги та струми в колі змінюються з однаковою кутовою частотою. За визначенням, **миттєвою потужністю** струму називається така величина $P(t)$:

$$P(t) = U(t)I(t). \quad (4.90)$$

Підставляючи (4.89) до (4.90), отримуємо

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t)I(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi + \delta) \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m (\cos \delta - \cos(2\omega t + 2\varphi + \delta)) = \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \delta - \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(2\omega t + 2\varphi + \delta) = \\ &= U_d I_d \cos \delta - U_d I_d \cos(2\omega t + 2\varphi + \delta), \end{aligned} \quad (4.91)$$

тобто миттєва потужність є сумою двох внесків, один з яких є постійним, а другий змінюється в часі з частотою, в два рази більшою за частоту струму. *Тобто частота зміни миттєвої потужності є вдвічі більшою за частоту зміни струму.*

За визначенням, **активна потужність** (позначається як P) є середньою за період миттєвою потужністю. Отримаємо вираз для неї:

$$\begin{aligned} P &= \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{U_d I_d}{T} \int_0^T (\cos \delta - \cos(2\omega t + 2\varphi + \delta)) dt = \\ &= \frac{U_d I_d}{T} T \cos \delta = U_d I_d \cos \delta. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Фізично має реалізовуватись випадок $\delta \in [-\pi/2; \pi/2]$, тож активна потужність має бути невід'ємною.

Реактивною потужністю за визначенням є величина Q , що дорівнює

$$Q = U_d I_d \sin \delta. \quad (4.93)$$

Повною потужністю за визначенням є величина

$$S = \sqrt{Q^2 + P^2} = \sqrt{U_d^2 I_d^2 (\sin^2 \delta + \cos^2 \delta)} = U_d I_d. \quad (4.94)$$

Реактивна потужність, на відміну від активної, може бути від'ємною. Реактивна потужність є додатною, якщо на відповідному елементі або ділянці напруга випереджає струм за фазою, і від'ємною, якщо навпаки. Цей факт є наслідком (4.89), (4.93) та того факту, що $\delta \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Розглянемо, чому дорівнюють активна та реактивна потужності на резисторі, конденсаторі та котушці. На резисторі зсув фаз між напругою та струмом відсутній, тож на резисторі $\delta = 0$ і

$$P_R = U_d I_d \cos 0 = U_d I_d, \quad Q_R = U_d I_d \sin 0 = 0. \quad (4.95)$$

На котушці напруга випереджає струм за фазою на $\pi/2$, тож $\delta = \pi/2$ і

$$P_L = U_d I_d \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad Q_L = U_d I_d \sin \frac{\pi}{2} = U_d I_d > 0. \quad (4.96)$$

На конденсаторі струм випереджає напругу за фазою на $\pi/2$, тож $\delta = -\pi/2$ і

$$P_C = U_d I_d \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad Q_C = U_d I_d \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -U_d I_d < 0. \quad (4.97)$$

Тож бачимо, що на котушці та на конденсаторі не виділяється активна потужність; активна потужність виділяється лише на резисторах. Тож можна сказати, що *активна потужність є енергією, яка за одиницю часу виділяється на резисторах кола*. Ця енергія йде на нагрів резисторів. Також бачимо, що на «чистій» котушці $Q > 0$, а на «чистому» конденсаторі $Q < 0$. За аналогією кажуть, що якщо на деякій ділянці кола $Q > 0$, то ділянка має індуктивний характер, а якщо на цій ділянці $Q < 0$, то ділянка має ємнісний характер.

Фізичний зміст реактивної потужності є таким. *Реактивна потужність є з точністю до постійного розмірного множника енергією, що впродовж одного періоду віддається від джерела на виникнення змінної складової електричного поля в конденсаторах та магнітного поля в котушках. Протягом цього ж періоду ця енергія повертається назад до джерела*. Проілюструємо це на прикладі послідовного RLC-контурі, див. рис. 4.1. Розглядаємо усталений режим роботи кола, обираємо відлік часу так, щоб заряд конденсатора змінювався в часі за законом

$$q(t) = q_m \sin(\omega t). \quad (4.98)$$

Тоді напруга на конденсаторі та струм на конденсаторі (який через послідовність контуру є загальним струмом на контурі) змінюються за законами

$$U_C(t) = \frac{q_m}{C} \sin(\omega t), \quad I(t) = \dot{q}(t) = q_m \omega \cos(\omega t). \quad (4.99)$$

Тоді енергія електричного поля у конденсаторі дорівнює

$$W_e(t) = \frac{C \cdot U_C^2(t)}{2} = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega t) = \frac{q_m^2}{4C} (1 - \cos(2\omega t)), \quad (4.100)$$

див. (3.2), та енергія магнітного поля у котушці дорівнює

$$W_m(t) = \frac{L \cdot I^2(t)}{2} = \frac{L q_m^2 \omega^2}{2} \cos^2(\omega t) = \frac{L q_m^2 \omega^2}{4} (1 + \cos(2\omega t)), \quad (4.101)$$

див. (3.35). Тоді сумарна енергія полів

$$W(t) = W_e(t) + W_m(t) = \frac{q_m^2}{4C} + \frac{L q_m^2 \omega^2}{4} + \cos(2\omega t) \left(\frac{L q_m^2 \omega^2}{4} - \frac{q_m^2}{4C} \right), \quad (4.102)$$

є сумою постійного доданку та змінного, який змінюється з подвійною частотою струму. Розглянемо змінний внесок до (4.102):

$$W_{\sim}(t) = \frac{q_m^2 \omega}{4} \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(2\omega t) = \frac{q_m^2 \omega}{4} (X_L - X_C) \cos(2\omega t), \quad (4.103)$$

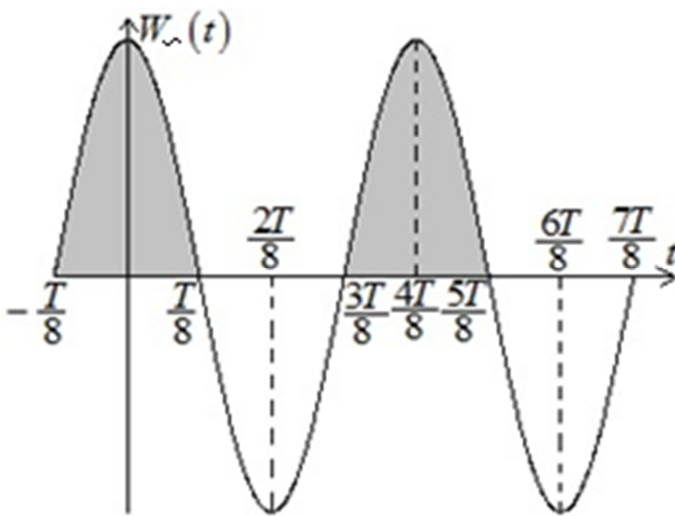


Рис. 4.3.

див. (4.23) та (4.19). Побудуємо графік функції $W_{\sim}(t)$ за один період струму у випадку $X_L > X_C$, див. рис. 4.3; тут T – період струму. Випадок $X_L < X_C$ може бути розглянутий аналогічно. Області, де $W_{\sim}(t) > 0$, є областями, де поля приймають енергію від джерела. Області, де

$W_{\sim}(t) < 0$ є областями, коли поля віддають енергію до джерела. Відповідно, середня енергія, прийнята полями при $t \in [-T/8; T/8]$, дорівнює

$$\begin{aligned} W_{\text{cp}} &= \frac{1}{2T/8} \int_{-T/8}^{T/8} W_2(t) dt = \frac{q_m^2 \omega}{T} (X_L - X_C) \int_{-T/8}^{T/8} \cos(2\omega t) dt = \\ &= \frac{q_m^2 \omega}{2\omega T} (X_L - X_C) \cdot 2 \sin\left(2\omega \frac{T}{8}\right), \end{aligned} \quad (4.104)$$

з урахуванням (4.4) матимемо

$$W_{\text{cp}} = \frac{q_m^2 \omega^2}{2\omega \cdot 2\pi} (X_L - X_C) \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{q_m \omega}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{\pi\omega} (X_L - X_C). \quad (4.105)$$

Оскільки згідно з (4.99) $q_m \omega$ є амплітудою струму, то використавши зв'язок амплітудного й діяльного значень матимемо, що (4.105) переписеться як

$$W_{\text{cp}} = \frac{I_d^2}{\pi\omega} (X_L - X_C). \quad (4.106)$$

Згідно з (4.52) перепишемо (4.106):

$$W_{\text{cp}} = \frac{I_d U_d}{\pi\omega} \frac{X_L - X_C}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}}. \quad (4.107)$$

Тепер розглянемо вираз для реактивної потужності на контурі:

$$\begin{aligned} Q &= U_d I_d \sin \delta = U_d I_d \sin(\text{Фаза}(U) - \text{Фаза}(I)) = \\ &= U_d I_d \sin\left(-\arctg\left(\frac{X_C - X_L}{R}\right)\right) = U_d I_d \frac{X_L - X_C}{\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}}, \end{aligned} \quad (4.108)$$

див. (4.55); тут використано відому тотожність

$$\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (4.109)$$

Порівнюючи (4.108) та (4.107), приходимо до висновку, що

$$W_{\text{cp}} = \frac{Q}{\pi\omega}, \quad (4.110)$$

тож середня енергія, що передалась полям від джерела за час $t \in [-T/8; T/8]$ дорівнює реактивній потужності з точністю до розмірного множника, що

дорівнює $1/(\pi\omega)$. За один період струму ця енергія двічі передається полям від джерела та двічі «повертається» назад джерелу, див. рис. 4.3. Тож фізичний зміст реактивної потужності проілюстровано.

4.8. Резюме

Явна залежність синусоїдального змінного струму від часу є такою:

$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.111)$$

де I_m – амплітуда струму, $\omega t + \varphi$ – фаза, φ – зсув фаз відносно «чистого» косинуса, ω – кругова частота. Частота та період струму задаються виразами

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T}, \quad (4.112)$$

де T – період, f – частота.

Діяльним значенням струму називають середньоквадратичне за період значення:

$$I_d = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.113)$$

У колах змінного синусоїдального струму на резисторі амплітуди і фази напруги і струму пов'язані співвідношеннями

$$U_{Rm} = I_{Rm} R, \quad \text{Фаза}(I_R) = \text{Фаза}(U_R), \quad (4.114)$$

на конденсаторі відповідні співвідношення мають такий вигляд:

$$I_{Cm} = \omega C U_{Cm}, \quad \text{Фаза}(I_C) - \text{Фаза}(U_C) = \frac{\pi}{2}, \quad (4.115)$$

а на котушці – такий:

$$U_{Lm} = \omega L I_{Lm}, \quad \text{Фаза}(U_L) - \text{Фаза}(I_L) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.116)$$

Реактивні опори конденсатора та котушки визначаються, відповідно, як

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (4.117)$$

Опір послідовного RLC–контур, підключеного до джерела змінної ЕРС, та співвідношення між фазами загального струму і напруги на послідовному RLC–контурі задаються виразами

$$Z = \sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}, \quad \text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U) = \arctg\left(\frac{X_C - X_L}{R}\right), \quad (4.118)$$

про виведення цих результатів слід зазначити, що вони є наслідками розв’язку відповідного диференційного рівняння в усталеному режимі роботи кола. При рівності реактивних опорів конденсатору та котушки виникає явище резонансу напруг, коли миттєві значення напруги на конденсаторі і котушці одне одного компенсують, і миттєве значення напруги на контурі співпадатиме з миттєвим значенням напруги на резисторі.

Провідність паралельного RLC–контур, підключеного до джерела змінної ЕРС, та співвідношення між фазами загального струму і напруги на паралельному RLC–контурі задаються виразами

$$B = \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2}, \quad \text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U) = \arctg\left(\frac{B_C - B_L}{B_R}\right), \quad (4.119)$$

де провідності елементів визначено як

$$B_R = \frac{1}{R}, \quad B_C = \frac{1}{X_C}, \quad B_L = \frac{1}{X_L}. \quad (4.120)$$

Дані результати є наслідками розв’язку відповідного диференційного рівняння в усталеному режимі роботи кола з урахуванням малості відношення резистивного до реактивного опорів котушки. При цьому слід зазначити, що наявність резистивного опору котушки забезпечує наявність перехідного процесу в такому контурі.

Показано, що миттєва потужність на ділянці кола синусоїдального змінного струму, на якій напруга і струм задані як

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi + \delta), \quad I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.121)$$

здається виразом

$$P(t) = U_{\text{д}} I_{\text{д}} \cos \delta - U_{\text{д}} I_{\text{д}} \cos(2\omega t + 2\varphi + \delta), \quad (4.122)$$

де U_d та I_d – діяльні значення напруги та струму на цій ділянці. Частота зміни миттєвої потужності є вдвічі більшою за частоту зміни струму. Явні вирази для активної, реактивної і повної потужності синусоїдального змінного струму є такими:

$$P = U_d I_d \cos \delta, \quad Q = U_d I_d \sin \delta, \quad S = U_d I_d, \quad (4.123)$$

де P – активна потужність, Q – реактивна потужність, S – повна потужність. Активна потужність є середньою за період миттєвою потужністю, реактивна потужність є з точністю до постійного розмірного множника енергією, що впродовж одного періоду віддається від джерела на виникнення змінної складової електричного поля в конденсаторах та магнітного поля в котушках. Протягом цього ж періоду ця енергія повертається назад до джерела.

4.9. Питання для самоконтролю

1. Виписати залежність змінного синусоїдального струму від часу, дати визначення амплітуди, фази, періоду, частоти та кругової частоти.
2. Вивести співвідношення між діяльними та амплітудними значеннями величин у колах змінного синусоїдального струму.
3. Вивести співвідношення між амплітудою напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці в колах змінного струму. Вивести співвідношення між фазами напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці в колах змінного струму. Навести вирази для реактивного опору конденсатора й котушки.
4. Навести алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами.
5. Вивести диференціальне рівняння для заряду конденсатора в послідовному RLC-контурі, підключеному до генератора змінної синусоїдальної ЕРС. Вказати, яка частина розв'язку цього рівняння відповідає за перехідний процес. Отримати розв'язок цього рівняння в усталеному режимі

роботи кола, вивести формули для опору контуру та для зсуву фаз між загальною напругою та загальним струмом на контурі.

6. Описати явище резонансу напруг у послідовному RLC–контурі та вивести співвідношення між параметрами кола, при якому воно виникає.

7. Вивести співвідношення між струмами у паралельному RLC–контурі, підключеному до генератора змінної синусоїдальної ЕРС. Вивести диференціальне рівняння для струму через котушку, вказати, який параметр кола є відповідальним за перехідний процес, та отримати розв’язок цього рівняння в усталеному режимі роботи кола у випадку, коли реактивний опір котушки є набагато більшим за резистивний опір котушки. Вивести формули для провідності контуру та для зсуву фаз між загальною напругою та загальним струмом на контурі.

8. Описати явище резонансу струмів у паралельному RLC–контурі та вивести співвідношення між параметрами кола, при якому воно виникає.

9. Вивести залежність від часу миттєвої потужності в колі змінного струму. Вказати, як пов’язаний період миттєвої потужності з періодом струму.

10. Вивести вираз для активної потужності.

11. Навести вираз для реактивної потужності й на прикладі послідовного RLC–контуру проілюструвати фізичний зміст цієї величини. Навести вираз для повної потужності.

5. Метод комплексних амплітуд

5.1. Анотація

Викладено такі методи опису кіл змінного струму, як векторна діаграма та символічний метод, що базуються на понятті комплексної амплітуди. Наведено основні поняття про комплексні числа, описано алгебраїчні операції з комплексними числами та наведено визначення модуля та аргументу комплексного числа. Наведено закони Кірхгофа для комплексних амплітуд та пояснено їхнє походження. Наведено прості приклади застосування символічного методу.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Знати визначення комплексного числа, дійсної та уявної частин комплексного числа, модуля та аргументу комплексного числа. Уміти виводити співвідношення, що пов'язують модуль, аргумент, дійсну та уявну частини комплексного числа.
- Уміти виконувати арифметичні дії між комплексними числами (додавання, віднімання, множення, ділення).
- Знати визначення та фізичний зміст комплексної амплітуди.
- Знати методи підсумовування синусоїд (метод допоміжного кута та метод комплексних амплітуд).
- Знати закони Кірхгофа для комплексних амплітуд та уміти пояснити їхнє походження.
- За допомогою символічного методу та векторної діаграми виводити результати для провідності паралельного RLC-контурі й опору послідовного RLC-контурі, а також результати для зсуву фаз між загальним струмом та напругою на цих контурах.
- Знати принцип побудови векторної діаграми та фізичний зміст довжини векторів та кута між векторами на векторній діаграмі.

5.2. Комплексні числа

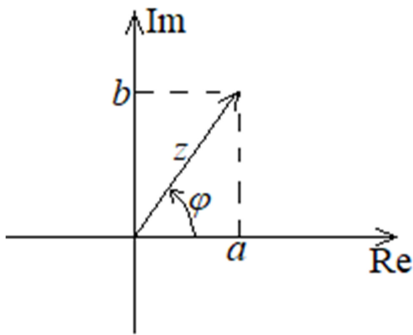


Рис. 5.1

Комплексним числом називається число z , що має вигляд

$$z = a + bi, \quad i = \sqrt{-1}, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

величину i називають **уявною одиницею**. Дійсні числа a й b є, відповідно, **дійсною та уявною частинами** комплексного числа z :

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z. \quad (5.2)$$

Очевидно, що комплексне число з нульовою уявною частиною є дійсним числом. Комплексне число з нульовою дійсною частиною називається суто уявним.

Комплексне число можна зобразити у вигляді вектора на так званій комплексній площині, де по осі абсцис відкладається дійсна частина комплексного числа, а по осі ординат – уявна (див. рис. 5.1). **Модулем** комплексного числа називається довжина відповідного вектора. Відповідно, за теоремою Піфагора з рис. 5.1 бачимо, що модуль комплексного числа пов'язаний з дійсною та уявною частинами співвідношенням

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (5.3)$$

де $|z|$ – модуль комплексного числа.

Аргументом комплексного числа (позначення $\operatorname{Arg} z$) є кут, що відкладено проти годинникової стрілки від осі абсцис до вектора відповідного комплексного числа (кут φ , див. рис. 5.1). З рис. 5.1. бачимо, що виконуються такі співвідношення між аргументом, модулем, дійсною та уявною частинами комплексного числа:

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \quad (5.4)$$

Фізично аргументи, що відрізняються на 2π , є еквівалентними. Головним значенням аргументу комплексного числа (позначення $\operatorname{arg} z$) є значення

аргументу, визначене на проміжку $(-\pi, \pi]$. Головне значення аргументу комплексного числа пов'язане з дійсною й уявною частинами таким співвідношенням:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg(b/a), a > 0 \\ \pi + \arctg(b/a), a < 0, b > 0 \\ -\pi + \arctg(b/a), a < 0, b < 0, \\ \pi/2, a = 0, b > 0 \\ -\pi/2, a = 0, b < 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

у випадку $a = b = 0$ (тобто $z = 0$) аргумент є невизначеним.

Запис комплексного числа у вигляді (5.1) носить назву **алгебраїчного запису** комплексного числа. Окрім алгебраїчного запису, використовується також **експоненціальний запис** комплексного числа:

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arg z. \quad (5.6)$$

Покажемо, чому представлення комплексного числа у вигляді (5.6) та (5.1) є однаковими. Скористаємося відомою формулою Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (5.7)$$

На її основі матимемо з (5.6):

$$z = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = a + bi, \quad (5.8)$$

друга рівність у (5.8) є наслідком співвідношень (5.4).

Комплексно-спряженим числом до комплексного числа $z = a + bi$ є число

$$z^* = a - bi = |z|e^{-i\varphi}, \quad (5.9)$$

зірочка позначає комплексне спряження. Друга рівність у (5.9) є наслідком формул (5.3), (5.4), (5.7), та того факту, що косинус є парною функцією свого аргументу, а синус – непарною.

Нехай маємо два комплексних числа $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Операції додавання та віднімання комплексних чисел проводяться таким чином:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \\ z_1 - z_2 &= a_1 + ib_1 - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Операція множення комплексних чисел виконується так:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2), \end{aligned} \quad (5.11)$$

тут враховано те, що $i^2 = -1$, див. (5.1). Операція ділення комплексних чисел виконується за допомогою множення та ділення на комплексно-спряжене:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 - ia_1 b_2 + ib_1 a_2 - i^2 b_1 b_2}{a_2^2 - ia_2 b_2 + ib_2 a_2 - i^2 b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 - ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.3. Комплексна амплітуда

Розглянемо усталений режим роботи кола змінного струму. Тоді всі напруги, струми та ЕРС у колі змінюються за синусоїдальними законами з однаковою кутовою частотою ω . Розглянемо деяку фізичну величину, що змінюється за таким синусоїдальним законом:

$$A(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.13)$$

Поставимо такій величині комплексний аналог у вигляді

$$\tilde{A}(t) = A_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}, \quad (5.14)$$

вимагаючи, щоб між реальною «живою» фізичною величиною та її комплексним аналогом виконувалось співвідношення

$$A(t) = \operatorname{Re}(\tilde{A}(t)). \quad (5.15)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tilde{A}(t)) &= \operatorname{Re}(A_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(A_m e^{i(\omega t + \varphi)}) = \\ &= \operatorname{Re}(A_m \cos(\omega t + \varphi) + iA_m \sin(\omega t + \varphi)) = A_m \cos(\omega t + \varphi) = A(t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

див. (5.7), (5.1) та (5.2).

Ту частину комплексного аналога $\tilde{A}(t)$, яка множитья на $e^{i\omega t}$ (іншими словами, яка не залежить від часу), назвали **комплексною амплітудою** величини A :

$$\tilde{A}(t) = \tilde{A}_m e^{i\omega t}, \quad (5.17)$$

де \tilde{A}_m – комплексна амплітуда:

$$\tilde{A}_m = A_m e^{i\varphi}. \quad (5.18)$$

Розглянемо фізичний зміст комплексної амплітуди. З виразу (5.18) бачимо, що

$$|\tilde{A}_m| = A_m, \quad \arg \tilde{A}_m = \varphi, \quad (5.19)$$

співставляючи (5.19) з (5.13), приходимо до висновку, що *модуль комплексної амплітуди є амплітудою відповідної реальної «живої» фізичної величини, а аргумент комплексної амплітуди є зсувом фаз відповідної реальної «живої» фізичної величини відносно «чистого косинуса», тобто залежності, пропорційної до $\cos(\omega t)$.*

5.4. Підсумовування синусоїд однакової частоти. Векторна діаграма

Нехай маємо величини $A_1(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$, $A_2(t) = A_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$, ..., $A_n(t) = A_{mn} \cos(\omega t + \varphi_n)$, та треба знайти їхню суму. Зауважу, що в усіх цих величин можуть бути різними амплітуди і фази, проте їхня частота має бути однаковою. Прикладами таких задач може бути пошук миттєвого значення напруги на послідовному з'єднанні або миттєвого значення струму на паралельному з'єднанні у колах синусоїдального змінного струму.

Можна діяти «в лоб» таким чином:

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{j=1}^n A_{mj} \cos(\omega t + \varphi_j) = \sum_{j=1}^n A_{mj} (\cos(\omega t) \cos \varphi_j - \sin(\omega t) \sin \varphi_j) =, \\ &= a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t), \quad a = \sum_{j=1}^n A_{mj} \cos \varphi_j, \quad b = \sum_{j=1}^n A_{mj} \sin \varphi_j, \end{aligned} \quad (5.20)$$

та застосувати метод допоміжного кута:

$$A(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t) - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t) \right). \quad (5.21)$$

Вводимо параметри:

$$\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \xi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad |\psi| \leq 1, \quad |\xi| \leq 1, \quad \psi^2 + \xi^2 = 1, \quad (5.22)$$

що дає змогу стверджувати, що ψ та ξ є відповідно косинусом і синусом деякого кута φ :

$$\psi = \cos \varphi, \quad \xi = \sin \varphi, \quad (5.23)$$

та на основі (5.21), (5.22) та (5.23) маємо

$$A(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.24)$$

Тож чітко виділено амплітуду та фазу даної суми синусоїд.

Проте вищеописаний метод є дещо громіздким. Дещо простішою є ідея підсумовування синусоїд на основі комплексних амплітуд за таким правилом: *комплексна амплітуда суми синусоїд є сумою комплексних амплітуд цих синусоїд*. Покажемо, чому вираз для суми синусоїд, що описують реальні «живі» фізичні величини, є наслідком цього правила. Нехай

$$A(t) = \sum_{j=1}^n A_j(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.25)$$

Запишемо це правило:

$$\tilde{A}_m = \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{mj}, \quad (5.26)$$

Помножимо обидві частини (5.26) на $e^{i\omega t}$, та візьмемо дійсну частину від обох частин рівності:

$$\operatorname{Re}(\tilde{A}_m e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^n \tilde{A}_{mj} e^{i\omega t}\right) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(\tilde{A}_{mj} e^{i\omega t}), \quad (5.27)$$

що згідно з (5.15) та (5.17) є аналогом рівності (5.25).

Тож замість досить громіздких виразів при роботі з синусоїдами достатньо просто додати декілька комплексних величин для отримання комплексної

амплітуда суми синусоїд. Надалі згідно з (5.13) та (5.18) залежність $A(t)$ легко записується:

$$A(t) = |\tilde{A}_m| \cos(\omega t + \arg \tilde{A}_m). \quad (5.28)$$

Як відомо з геометрії, вектори $\vec{a} = (a_x, a_y)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y)$ підпорядковуються таким правилам додавання та віднімання:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y), \quad (5.29)$$

тобто відповідні координати векторів додаються або віднімаються. Згідно з бачимо, що дійсна й уявна частини комплексних чисел ведуть себе за такою ж закономірністю при їх додаванні та відніманні. Тобто закони додавання та віднімання комплексних чисел та векторів є ідентичними. Більш того, як зазначено вище, комплексні числа можуть бути представлені у вигляді векторів на комплексній площині. З усього цього можна зробити висновок, що *комплексні числа можна геометрично додавати як вектори на комплексній площині*. Графічне зображення такого додавання комплексних амплітуд величин на комплексній площині носить назву **векторної діаграми**. Як відомо, для того щоб підсумувати вектори, треба їх паралельно переносити таким чином, щоб початок кожного наступного вектора співставлявся з кінцем попереднього. Тоді початок суми векторів співпаде з початком першого з векторів, що підсумовуються, а кінець суми векторів співпаде з кінцем останнього вектора.

5.5. Векторна діаграма послідовного RLC-контур

Розглянемо послідовний RLC-контур. У ньому струм через усі елементи є однаковим, а миттєве значення загальної напруги на контурі є сумою миттєвих значень напруг на резисторі, конденсаторі та котушці, тобто для розрахунку комплексної амплітуди загальної напруги на контурі треба додати комплексні амплітуди напруг на резисторі, конденсаторі та котушці. Розглянемо усталений режим роботи кола, оберемо відлік часу так, щоб заряд конденсатора залежав

від часу за законом (4.98). Тоді струм через контур та напруга на конденсаторі описуються залежностями (4.99), детальніше перепишемо вираз для напруги на конденсаторі та співставимо йому комплексну амплітуду:

$$U_C(t) = \frac{q_m}{C} \sin(\omega t) = \frac{q_m}{C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \tilde{U}_{Cm} = \frac{q_m}{C} e^{-i\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{q_m}{C} \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{q_m}{C} i. \quad (5.30)$$

Відповідно, напруга на резисторі та її комплексна амплітуда:

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = q_m \omega R \cos(\omega t + 0) \Leftrightarrow \tilde{U}_{Rm} = q_m \omega R \cdot e^{i0} = q_m \omega R \quad (5.31)$$

та напруга на котушці і її комплексна амплітуда:

$$U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t) = -q_m \omega^2 L \sin(\omega t) = q_m \omega^2 L \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{U}_{Lm} = q_m \omega^2 L e^{i\frac{\pi}{2}} = q_m \omega^2 L \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i q_m \omega^2 L. \quad (5.32)$$

Також запишемо комплексну амплітуду струму:

$$I(t) = q_m \omega \cos(\omega t + 0) \Leftrightarrow \tilde{I}_m = q_m \omega e^{i0} = q_m \omega. \quad (5.33)$$

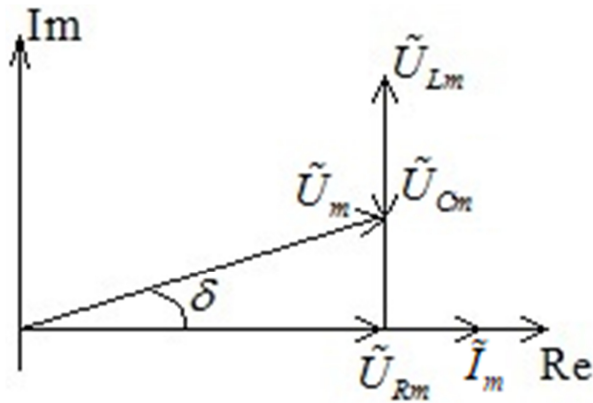


Рис. 5.2

Співставляючи результати (5.30)–(5.33) з представленням комплексного числа як вектора на комплексній площині (див. рис. 5.1), переконуємо, що на комплексній площині вектори \tilde{I}_m та \tilde{U}_{Rm} напрямлені вправо, вектор \tilde{U}_{Lm} напрямлений вгору та вектор \tilde{U}_{Cm}

направлений униз. Відповідно, оскільки комплексна амплітуда загальної напруги \tilde{U}_m

$$\tilde{U}_m = \tilde{U}_{Rm} + \tilde{U}_{Lm} + \tilde{U}_{Cm}, \quad (5.34)$$

то геометрично додаємо вектори: спочатку проводимо від початку координат вектор \tilde{U}_{Rm} , надалі від кінця вектора \tilde{U}_{Rm} проводимо вектор \tilde{U}_{Lm} та від кінця

вектора \tilde{U}_{Lm} проводимо вектор \tilde{U}_{Cm} . Тоді початок вектора \tilde{U}_m співпадає з початком вектору \tilde{U}_{Rm} , а кінець – з кінцем вектора \tilde{U}_{Cm} , див. рис. 5.2. Модуль комплексного числа – це довжина відповідного вектора на комплексній площині. Модулі комплексних амплітуд згідно з (5.3) та (5.30)–(5.32) є такими:

$$\begin{aligned} |\tilde{U}_{Cm}| &= \sqrt{0^2 + (-q_m/C)^2} = q_m/C, \quad |\tilde{U}_{Rm}| = \sqrt{(q_m\omega R)^2 + 0^2} = q_m\omega R, \\ |\tilde{U}_{Lm}| &= \sqrt{0^2 + (q_m\omega^2 L)^2} = q_m\omega^2 L, \end{aligned} \quad (5.35)$$

та за теоремою Піфагора з рис. 5.2. маємо

$$\begin{aligned} |\tilde{U}_m| &= \sqrt{|\tilde{U}_{Rm}|^2 + (|\tilde{U}_{Lm}| - |\tilde{U}_{Cm}|)^2} = \sqrt{(q_m\omega R)^2 + \left(q_m\omega^2 L - \frac{q_m}{C}\right)^2} = \\ &= q_m\omega\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_m\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

тут використано вирази для реактивних опорів котушки та конденсатора (4.23) та (4.19) і той факт, що амплітуда струму дорівнює $q_m\omega$, див. (5.33). Оскільки модуль комплексної амплітуди є амплітудою реальної «живої» фізичної величини, то на основі (5.36) матимемо

$$U_m = I_m\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (5.37)$$

та перейшовши до діяльних значень отримуємо відомий вираз для загального опору контуру:

$$Z = U_d/I_d = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (5.38)$$

що співпадає з виразом (4.52), отриманим на основі диференціальних рівнянь.

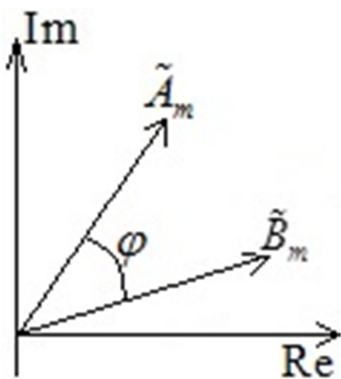


Рис. 5.3

Перш ніж говорити про зсув фаз між струмом та напругою, звернемо увагу на такий факт: якщо на векторній діаграмі кут між векторами \tilde{A}_m та \tilde{B}_m дорівнює φ , то величина $A(t)$ випереджає величину $B(t)$ за фазою на φ , див. рис. 5.3. Покажемо, чому це так. Співставляючи рис. 5.3 та рис. 5.1 бачимо, що

$$\arg \tilde{A}_m = \varphi + \arg \tilde{B}_m, \quad (5.39)$$

та залежності реальних «живих» величин від часу:

$$A(t) = |\tilde{A}_m| \cos(\omega t + \arg \tilde{A}_m) = |\tilde{A}_m| \cos(\omega t + \varphi + \arg \tilde{B}_m), \quad (5.40)$$

$$B(t) = |\tilde{B}_m| \cos(\omega t + \varphi + \arg \tilde{B}_m),$$

звідки

$$\text{Фаза}(A) - \text{Фаза}(B) = \varphi, \quad (5.41)$$

що й треба було показати.

Тоді з рис. 5.2 бачимо, що δ – зсув фаз між загальними напругою та струмом та контурі:

$$\text{Фаза}(U) - \text{Фаза}(I) = \delta. \quad (5.42)$$

Також на основі рис. 5.2 та виразів (4.23), (4.19) і (5.35) бачимо, що

$$\text{tg } \delta = \frac{|\tilde{U}_{Lm}| - |\tilde{U}_{Cm}|}{|\tilde{U}_{Rm}|} = \frac{q_m \omega^2 L - \frac{q_m}{C}}{q_m \omega R} = \frac{X_L - X_C}{R}; \quad (5.43)$$

δ – кут або з першої чверті (коли $X_L > X_C$), або з четвертої (коли $X_L < X_C$),

$$\delta = \text{Фаза}(U) - \text{Фаза}(I) = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}, \quad (5.44)$$

що співпадає з результатом (4.55), отриманим на основі диференційних рівнянь.

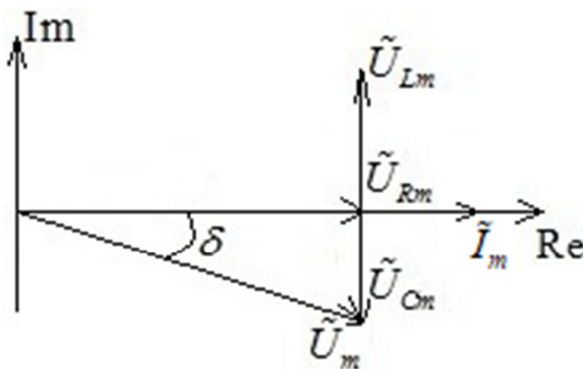


Рис. 5.4

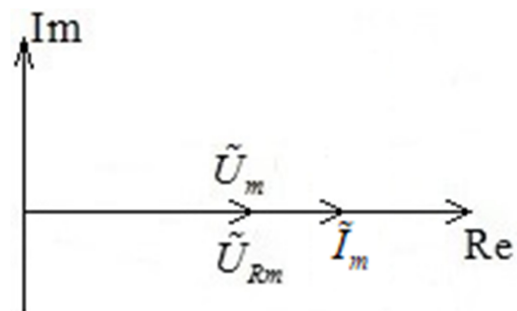


Рис. 5.5

Зауважимо також, що рис. 5.2 фактично нарисовано для випадку, коли $X_L > X_C$, або $|\tilde{U}_{Lm}| > |\tilde{U}_{Cm}|$, тобто коли напруга випереджає струм за фазою.

Випадок, коли $|\tilde{U}_{Lm}| < |\tilde{U}_{Cm}| \Leftrightarrow X_C < X_L$, тобто коли напруга відстає від струму за

фазою, зображено на рис. 5.4, та випадок резонансу напруг, коли вектори \tilde{U}_{Lm} та \tilde{U}_{Cm} мають однакову довжину й компенсують один одного, зображено на рис. 5.5. У випадку резонансу напруг загальна напруга на контурі співпадає з напругою на резисторі й має таку ж фазу, як і струм через контур.

Всі ці результати також отримані на основі диференціальних рівнянь, тобто *векторна діаграма та диференціальні рівняння – еквівалентні методи опису усталеного режиму роботи кіл*. Проте слід зазначити, що векторна діаграма, на відміну від підходу на основі диференціальних рівнянь, не описує експоненційно згасаючі перехідні процеси від початкового стану кола до усталеного режиму.

5.6. Векторна діаграма для паралельного RLC–контур

Розглянемо паралельний RLC–контур. У ньому напруга на всіх елементах є однаковою, а миттєве значення загального струму через контур є сумою миттєвих значень струмів через резистор, конденсатор і котушку, тобто для розрахунку комплексної амплітуди загального струму через контур треба додати комплексні амплітуди струмів через резистор, конденсатор і котушку:

$$\tilde{I}_m = \tilde{I}_{Rm} + \tilde{I}_{Cm} + \tilde{I}_{Lm}. \quad (5.45)$$

Розглянемо усталений режим роботи кола й оберемо відлік часу так, щоб струм через котушку залежав від часу за законом

$$I_L(t) = I_{Lm} \sin(\omega t), \quad (5.46)$$

тут і надалі резистивним опором котушки нехтуємо. Випишемо відповідну комплексну амплітуду струму через котушку:

$$I_L(t) = I_{Lm} \sin(\omega t) = I_{Lm} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \tilde{I}_{Lm} = I_{Lm} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -iI_{Lm}. \quad (5.47)$$

Оскільки напруги на резисторі й котушці є однаковими, то

$$U_R(t) = U_L(t) \Rightarrow R \cdot I_R(t) = L \cdot \dot{I}_L(t), \quad (5.48)$$

звідки на основі (5.46) матимемо вираз для струму через резистор та його комплексної амплітуди:

$$I_R(t) = \frac{L}{R} \cdot \dot{I}_L(t) = \frac{\omega L I_{Lm}}{R} \cos(\omega t + 0) \Leftrightarrow \tilde{I}_{Rm} = \frac{\omega L I_{Lm}}{R} e^{i \cdot 0} = \frac{\omega L I_{Lm}}{R}. \quad (5.49)$$

Як відомо, напруга й струм на конденсаторі пов'язані співвідношенням (3.4). Оскільки напруги на всіх елементах однакові, то матимемо на основі (5.46) такі вирази для струму через конденсатор та його комплексної амплітуди

$$\begin{aligned} I_C(t) &= C \cdot \dot{U}_C(t) = C \cdot \dot{U}_L(t) = CL \cdot \ddot{I}_L(t) = -CLI_{Lm} \omega^2 \sin(\omega t) = \\ &= CLI_{Lm} \omega^2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \tilde{I}_{Cm} = CLI_{Lm} \omega^2 e^{i \frac{\pi}{2}} = i CLI_{Lm} \omega^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Також випишемо комплексну амплітуду загальної напруги на контурі:

$$U(t) = U_L(t) = L \cdot \dot{I}_L(t) = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + 0) \Leftrightarrow \tilde{U}_m = \omega L I_{Lm} e^{i \cdot 0} = \omega L I_{Lm}. \quad (5.51)$$

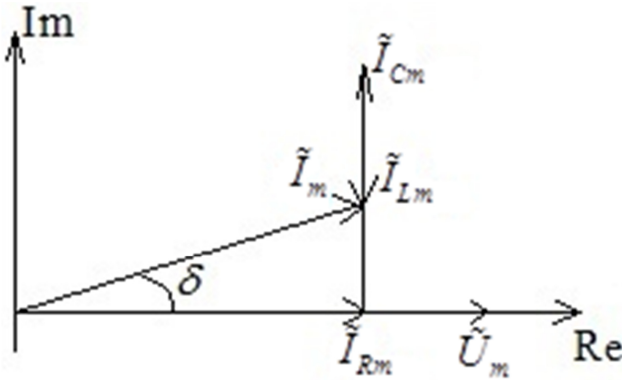


Рис. 5.6

Співставляючи результати (5.47), (5.49)–(5.51) з представленням комплексного числа як вектора на комплексній площині (див. рис. 5.1), переконуємось, що на комплексній площині вектори \tilde{U}_m та \tilde{I}_{Rm} напрямлені вправо, вектор \tilde{I}_{Cm}

напрявлений вгору та вектор \tilde{I}_{Lm} спрявлений вниз. Геометрично підсумовуємо вектори комплексних амплітуд струмів згідно з (5.45): спочатку проводимо від початку координат вектор \tilde{I}_{Rm} , надалі від кінця вектора \tilde{I}_{Rm} проводимо вектор \tilde{I}_{Cm} та від кінця вектора \tilde{I}_{Cm} проводимо вектор \tilde{I}_{Lm} . Тоді початок вектора \tilde{I}_m співпадає з початком вектора \tilde{I}_{Rm} , а кінець – з кінцем вектору \tilde{I}_{Lm} , див. рис. 5.6. Модулі комплексних амплітуд струмів:

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{Lm}| &= \sqrt{0^2 + (-I_{Lm})^2} = I_{Lm}, \quad |\tilde{I}_{Cm}| = \sqrt{0^2 + (CLI_{Lm} \omega^2)^2} = CLI_{Lm} \omega^2, \\ |\tilde{I}_{Rm}| &= \sqrt{\left(\frac{\omega L I_{Lm}}{R}\right)^2 + 0^2} = \frac{\omega L I_{Lm}}{R}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

і за теоремою Піфагора з рис. 5.6. матимемо

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_m| &= \sqrt{|\tilde{I}_{Rm}|^2 + (|\tilde{I}_{Lm}| - |\tilde{I}_{Cm}|)^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega L I_{Lm}}{R}\right)^2 + (I_{Lm} - C L I_{Lm} \omega^2)^2} = \\
&= I_{Lm} \omega L \sqrt{B_R^2 + (B_L - B_C)^2} = U_m \sqrt{B_R^2 + (B_L - B_C)^2},
\end{aligned}
\tag{5.53}$$

тут використано вирази для провідностей елементів (4.78) а також той факт, що амплітуда загальної напруги на контурі дорівнює $\omega L I_{Lm}$, див. (5.51). Оскільки модуль комплексної амплітуди є амплітудою реальної «живої» фізичної величини, то перейшовши до діяльних значень, отримуємо вираз для загальної провідності контуру:

$$B = \frac{I_d}{U_d} = \sqrt{B_R^2 + (B_L - B_C)^2}, \tag{5.54}$$

що співпадає з результатом (4.86), отриманим на основі диференціальних рівнянь. Розглянемо тепер фазовий зсув між струмом та напругою. На основі рис. 5.6 бачимо, що

$$\delta = \text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U), \quad \text{tg} \delta = \frac{|\tilde{I}_{Cm}| - |\tilde{I}_{Lm}|}{|\tilde{I}_{Rm}|} = \frac{B_C - B_L}{B_R}, \tag{5.55}$$

для отримання другої рівності з (5.55) слід використати вирази (5.52) і (4.78). Оскільки кут δ лежить або в першій, або в четвертій чверті, то на основі (5.55) маємо

$$\delta = \text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U) = \text{arctg} \left(\frac{B_C - B_L}{B_R} \right), \tag{5.56}$$

що співпадає з результатом (4.88), отриманим на основі диференціальних рівнянь.

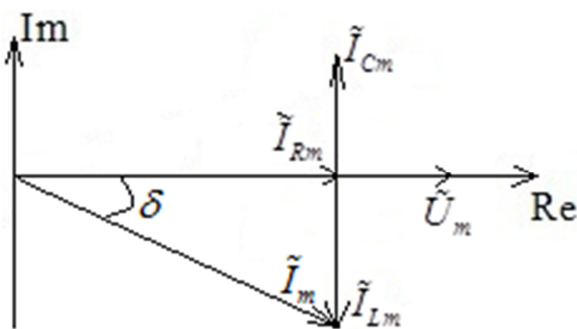


Рис. 5.7

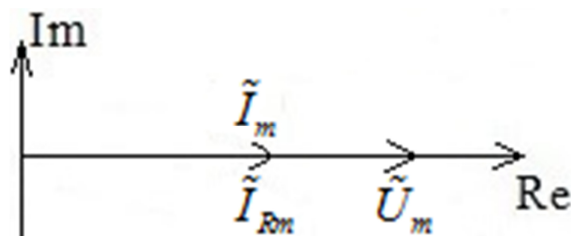


Рис. 5.8

Зауважимо також, що рис. 5.6 фактично нарисовано для випадку, коли $B_C > B_L$, або $|\tilde{I}_{Cm}| > |\tilde{I}_{Lm}|$, тобто коли струм випереджає напругу за фазою. Випадок, коли $|\tilde{I}_{Cm}| < |\tilde{I}_{Lm}| \Leftrightarrow B_C < B_L$, тобто коли струм відстає від напруги за фазою, зображено на рис. 5.7, та випадок резонансу струмів, коли вектори \tilde{I}_{Cm} та \tilde{I}_{Lm} мають однакову довжину й компенсують один одного, зображено на рис. 5.8. У випадку резонансу струмів загальний струм через контур співпадає зі струмом через резистор і має таку ж фазу, як і напруга на контурі.

5.7. Символічний метод

Символічний метод – метод опису усталеного режиму кіл синусоїдального змінного струму, що базується на законах Кірхгофа для комплексних амплітуд.

Перший закон Кірхгофа для комплексних амплітуд формулюється для кожного вузла кола таким чином: *сума комплексних амплітуд струмів, що входять до даного вузла, дорівнює сумі комплексних амплітуд струмів, що виходять з даного вузла.*

Покажемо, чому цей закон має місце. Як відомо, закони Кірхгофа, сформульовані у параграфі 2.1, є вірними для миттєвих значень величин у колах змінного струму.

Розглянемо деякий вузол кола, до якого входять струми $I_1(t), \dots, I_n(t)$ та з якого виходять струми $J_1(t), \dots, J_k(t)$. Запишемо перший закон Кірхгофа для комплексних амплітуд:

$$\sum_{\alpha=1}^n \tilde{I}_{\alpha m} = \sum_{\beta=1}^k \tilde{J}_{\beta m}. \quad (5.57)$$

Помножимо обидві частини рівності (5.57) на $e^{i\omega t}$ і візьмемо дійсну частину від обох частин рівності, скориставшись тим, що дійсна частина від суми є сумою дійсних частин:

$$\sum_{\alpha=1}^n \operatorname{Re}(\tilde{I}_{\alpha m} e^{i\omega t}) = \sum_{\beta=1}^k \operatorname{Re}(\tilde{J}_{\beta m} e^{i\omega t}). \quad (5.58)$$

Тоді згідно з відповідністю між часовою залежністю реальної «живої» фізичної величини (5.13) та її комплексного аналогу (5.17), (5.15) бачимо, що вираз (5.58) є еквівалентним до виразу

$$\sum_{\alpha=1}^n I_{\alpha}(t) = \sum_{\beta=1}^k J_{\beta}(t), \quad (5.59)$$

який є відомим законом Кірхгофа для миттєвих значень.

Другий закон Кірхгофа для комплексних амплітуд формулюється для кожного замкненого контуру таким чином: *алгебраїчна сума комплексних амплітуд напруг на елементах контуру є алгебраїчною сумою комплексних амплітуд ЕРС джерел на цьому контурі:*

$$\sum_{\alpha=1}^n \tilde{U}_{\alpha m} = \sum_{\beta=1}^k \tilde{E}_{\beta m}, \quad (5.60)$$

де комплексна амплітуда напруги на кожному елементі (мається на увазі резистор, конденсатор, котушка) виражається через комплексну амплітуду струму таким чином:

$$\tilde{U}_{\alpha m} = \tilde{Z}_{\alpha} \tilde{I}_{\alpha m}, \quad (5.61)$$

де в залежності від елемента

$$\tilde{Z}_{\alpha} = \begin{cases} R, \text{ резистор} \\ i\omega L, \text{ котушка} \\ -i/(\omega C), \text{ конденсатор} \end{cases}. \quad (5.62)$$

Комплексні амплітуди струмів та ЕРС у виразах (5.60)–(5.62) беруться зі знаком «+», якщо відповідні величини співнапрямлені з напрямком обходу контуру та зі знаком «−», якщо відповідні величини напрямлені проти напрямку обходу контуру.

Розберемось, чому другий закон Кірхгофа для комплексних амплітуд має місце. Помноживши обидві частини виразу (5.60) на $e^{i\omega t}$ і взявши дійсну частину від обох частин рівності, впевнимось, що другий закон Кірхгофа для

миттєвих значень є наслідком виразу (5.60). Залишилось розібратись, чому коефіцієнти пропорційності між комплексними амплітудами напруг та струмів мають вигляд (5.62).

Розглянемо спочатку резистор. Запишемо для резистора зв'язок амплітуд напруги й струму та зсув фаз між ними:

$$U_{Rm} = RI_{Rm}, \text{ Фаза}(U_R) = \text{Фаза}(I_R), \quad (5.63)$$

див. (4.15). Тож якщо часова залежність струму на резисторі є такою:

$$I_R(t) = I_{Rm} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.64)$$

то залежність напруги від часу є такою:

$$U_R(t) = RI_{Rm} \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.65)$$

Відповідні комплексні амплітуди:

$$\tilde{I}_{Rm} = I_{Rm} e^{i\varphi}, \tilde{U}_{Rm} = RI_{Rm} e^{i\varphi} = R\tilde{I}_{Rm}, \quad (5.66)$$

тобто для резистора вираз (5.62) є вірним.

Тепер розглянемо котушку. Запишемо для котушки зв'язок амплітуд напруги й струму та зсув фаз між ними:

$$U_{Lm} = \omega LI_{Lm}, \text{ Фаза}(U_L) = \text{Фаза}(I_L) + \frac{\pi}{2}, \quad (5.67)$$

див. (4.22). Тож якщо часова залежність струму на котушці є такою:

$$I_L(t) = I_{Lm} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.68)$$

то залежність напруги від часу є такою:

$$U_L(t) = \omega LI_{Lm} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.69)$$

Відповідні комплексні амплітуди:

$$\tilde{I}_{Lm} = I_{Lm} e^{i\varphi}, \tilde{U}_{Lm} = \omega LI_{Lm} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot I_{Lm} e^{i\varphi} = i\omega L \tilde{I}_{Lm}, \quad (5.70)$$

тобто для котушки вираз (5.62) є вірним.

Тепер розглянемо конденсатор. Запишемо для конденсатора зв'язок амплітуд напруги й струму та зсув фаз між ними:

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_{Cm}, \quad \text{Фаза}(U_C) = \text{Фаза}(I_C) - \frac{\pi}{2}, \quad (5.71)$$

див. (4.18). Тож якщо часова залежність струму на конденсаторі є такою:

$$I_C(t) = I_{Cm} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.72)$$

то залежність напруги від часу є такою:

$$U_C(t) = \frac{I_{Cm}}{\omega C} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.73)$$

Відповідні комплексні амплітуди:

$$\tilde{I}_{Lm} = I_{Lm} e^{i\varphi}, \quad \tilde{U}_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_{Cm} e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot I_{Cm} e^{i\varphi} = -\frac{i}{\omega C} \tilde{I}_{Cm}, \quad (5.74)$$

тобто для конденсатора вираз (5.62) є вірним.

Тобто вираз (5.62) є вірним для всіх трьох елементів.

5.8. Прості приклади застосування символічного методу

Застосуємо символічний метод до послідовного RLC-контурі, див. рис.

4.1. За другим законом Кірхгофа для комплексних амплітуд маємо

$$\tilde{E}_m = \tilde{I}_m R + i\omega L \tilde{I}_m - \frac{i}{\omega C} \tilde{I}_m, \quad (5.75)$$

де \tilde{I}_m – комплексна амплітуда струму через контур та \tilde{E}_m – комплексна амплітуда ЕРС на контурі. Очевидно, що загальна напруга на контурі співпадає з ЕРС контуру, тож (5.75) можна переписати як

$$\tilde{U}_m = \tilde{I}_m \left(R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) = \tilde{I}_m (R + i(X_L - X_C)). \quad (5.76)$$

Оберемо відлік часу так, щоб ЕРС (і, відповідно, загальна напруга) на контурі змінювалась за законом

$$E(t) = U(t) = U_m \cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t + 0), \quad (5.77)$$

тоді маємо комплексну амплітуду

$$\tilde{U}_m = U_m e^{i \cdot 0} = U_m, \quad (5.78)$$

та на основі (5.76) запишемо

$$\tilde{I}_m = \frac{U_m}{R + i(X_L - X_C)}. \quad (5.79)$$

Згідно з правилом ділення комплексних чисел (5.12) множимо й ділимо на комплексно-спряжене, отримуємо:

$$\tilde{I}_m = \frac{U_m (R - i(X_L - X_C))}{(R + i(X_L - X_C))(R - i(X_L - X_C))} = \text{Re} \tilde{I}_m + i \text{Im} \tilde{I}_m, \quad (5.80)$$

$$\text{Re} \tilde{I}_m = \frac{U_m R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} > 0, \quad \text{Im} \tilde{I}_m = -\frac{U_m (X_L - X_C)}{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Відповідно, згідно з (5.3) та (5.5) отримуємо звідси:

$$|\tilde{I}_m| = U_m / \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad \arg \tilde{I}_m = -\arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X_C - X_L}{R}. \quad (5.81)$$

звідки на основі відповідності (5.28) між реальною «живою» фізичною величиною та її комплексною амплітудою маємо

$$I_m(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cos\left(\omega t + \arctg \frac{X_C - X_L}{R}\right), \quad (5.82)$$

звідки з урахуванням (5.77)

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U_d}{I_d} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad \text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U) = \arctg \frac{X_C - X_L}{R}, \quad (5.83)$$

що співпадає з вищеотриманими результатами на основі диференціальних рівнянь або векторної діаграми. Тобто *диференційні рівняння, символічний метод та векторна діаграма – еквівалентні методи опису усталеного режиму роботи кіл синусоїдального змінного струму. Перевагою символічного методу над методом диференційних рівнянь є те, що замість диференційних рівнянь треба розв'язувати алгебраїчні рівняння.* Проте лише метод, що базується на диференційних рівняннях, здатний описати перехідний процес від початкового стану до усталеного режиму роботи кола.

Застосуємо символічний метод до опису паралельного RLC-контур, див. рис. 4.2, нехтуємо резистивним опором котушки. Тоді згідно з другим законом Кірхгофа для комплексних амплітуд матимемо

$$\tilde{E}_m = R\tilde{I}_{Rm}, \quad \tilde{E}_m = i\omega L\tilde{I}_{Lm}, \quad \tilde{E}_m = -\frac{i}{\omega C}\tilde{I}_{Cm}, \quad (5.84)$$

перше з цих рівнянь написано для контуру через ЕРС та резистор, друге – для контуру через ЕРС та котушку, і третє – для контуру через ЕРС та конденсатор. Також для першого закону Кірхгофа у вузлах матимемо

$$\tilde{I}_m = \tilde{I}_{Rm} + \tilde{I}_{Lm} + \tilde{I}_{Cm}. \quad (5.85)$$

Виражаючи комплексні амплітуди струмів на основі (5.84) та того факту, що загальна напруга на контурі співпадає з ЕРС, і підставляючи їх у (5.85), отримуємо

$$\tilde{I}_m = \frac{\tilde{U}_m}{R} + \frac{\tilde{U}_m}{i\omega L} + \frac{\tilde{U}_m}{-\frac{i}{\omega C}} = \frac{\tilde{U}_m}{R} + \frac{i\tilde{U}_m}{i^2\omega L} + \frac{i\tilde{U}_m}{-\frac{i^2}{\omega C}} = \frac{\tilde{U}_m}{R} - i\frac{\tilde{U}_m}{\omega L} + i\omega C\tilde{U}_m. \quad (5.86)$$

Оберемо відлік часу так, щоб ЕРС (і, відповідно, загальна напруга) на контурі змінювалась за законом (5.77) з відповідною комплексною амплітудою (5.78).

Тоді комплексна амплітуда загального струму через контур

$$\tilde{I}_m = \frac{U_m}{R} + i\left(\omega C U_m - \frac{U_m}{\omega L}\right), \quad \operatorname{Re}\tilde{I}_m = \frac{U_m}{R} > 0, \quad \operatorname{Im}\tilde{I}_m = \omega C U_m - \frac{U_m}{\omega L}, \quad (5.87)$$

та, відповідно,

$$|\tilde{I}_m| = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = U_m \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2}, \quad (5.88)$$

$$\arg \tilde{I}_m = \operatorname{arctg} \frac{B_C - B_L}{B_R},$$

звідки

$$I(t) = U_m \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2} \cos\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{B_C - B_L}{B_R}\right). \quad (5.89)$$

З (5.89) та (5.77) бачимо, що

$$\frac{I_m}{U_m} = \frac{I_d}{U_d} = \sqrt{B_R^2 + (B_C - B_L)^2}, \quad \text{Фаза}(I) - \text{Фаза}(U) = \operatorname{arctg} \frac{B_C - B_L}{B_R}, \quad (5.90)$$

що співпадає з вищеотриманими результатами на основі диференціальних рівнянь або векторної діаграми.

Розглянемо трохи складніший приклад. Нехай задане коло на рис. 5.9 та відомо, що ЕРС джерела залежить від часу за законом

$$E(t) = E_m \cos(\omega t) \Leftrightarrow \tilde{E}_m = E_m. \quad (5.91)$$

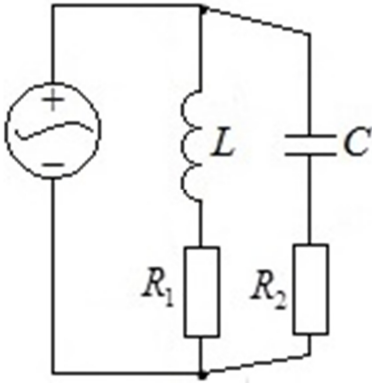


Рис. 5.9

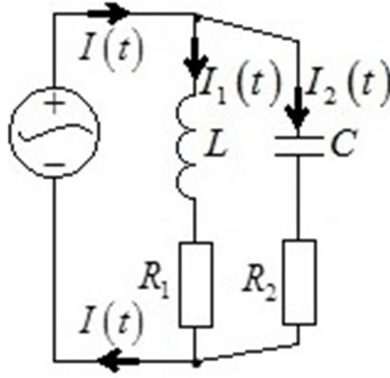


Рис. 5.10

Стоїть задача знайти явну залежність від часу для струму та напруги на всіх елементах кола та на всьому колі як цілому. Оберемо напрямки струмів згідно з рис. 5.10. З першого закону Кірхгофа для комплексних

амплітуд у вузлах маємо

$$\tilde{I}_m = \tilde{I}_{1m} + \tilde{I}_{2m}, \quad (5.92)$$

Для контуру через ЕРС, котушку та резистор R_1 маємо другий закон Кірхгофа:

$$i\omega L \tilde{I}_{1m} + R_1 \tilde{I}_{1m} = \tilde{E}_m, \quad (5.93)$$

звідки відразу знаходимо

$$\tilde{I}_{1m} = \frac{\tilde{E}_m}{i\omega L + R_1} = \frac{E_m}{i\omega L + R_1} = \frac{E_m R_1}{\omega^2 L^2 + R_1^2} - i \frac{E_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R_1^2}, \quad \text{Re} \tilde{I}_{1m} > 0. \quad (5.94)$$

Для отримання остаточного виразу до (5.94) слід застосувати правило ділення комплексних чисел (5.12). Тоді на основі алгебраїчного запису цієї комплексної амплітуди знаходимо її модуль та аргумент:

$$|\tilde{I}_{1m}| = \sqrt{\left(\frac{E_m R_1}{\omega^2 L^2 + R_1^2}\right)^2 + \left(\frac{E_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R_1^2}\right)^2} = \frac{E_m}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}}, \quad (5.95)$$

$$\arg \tilde{I}_{1m} = \arctg\left(-\frac{\omega L}{R_1}\right) = -\arctg\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)$$

та, відповідно, записуємо явну залежність $I_1(t)$:

$$I_1(t) = |\tilde{I}_{1m}| \cos(\omega t + \arg \tilde{I}_{1m}) = \frac{E_m}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)\right). \quad (5.96)$$

Оскільки струм через резистор R_1 дорівнює $I_1(t)$, то напруга на ньому

$$U_{R1}(t) = R_1 I_1(t) = \frac{E_m R_1}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)\right). \quad (5.97)$$

Струм через котушку дорівнює $I_1(t)$. Щоб виписати явну залежність $U_L(t)$, можна скористатись виразом (5.96) та тими фактами, що по-перше, амплітуда напруги на котушці є амплітудою струму через котушку, помноженою на реактивний опір котушки, та, по-друге, на котушці напруга випереджає струм на $\pi/2$ за фазою:

$$U_L(t) = \frac{E_m \omega L}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg\left(\frac{\omega L}{R_1}\right) + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.98)$$

Для контуру через ЕРС, конденсатор та резистор R_2 маємо другий закон Кірхгофа:

$$-\frac{i}{\omega C} \tilde{I}_{2m} + R \tilde{I}_{2m} = \tilde{E}_m. \quad (5.99)$$

Звідки аналогічно до виведення формули (5.94) можна отримати

$$\tilde{I}_{2m} = \frac{E_m R_2 \omega^2 C^2}{R_2^2 \omega^2 C^2 + 1} + i \frac{E_m \omega C}{R_2^2 \omega^2 C^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} \tilde{I}_{2m} > 0, \quad (5.100)$$

та, відповідно,

$$I_2(t) = |\tilde{I}_{2m}| \cos(\omega t + \arg \tilde{I}_{2m}) = \frac{E_m}{\sqrt{R_2^2 + \omega^{-2} C^{-2}}} \cos\left(\omega t + \arctg\left(\frac{1}{R_2 \omega C}\right)\right), \quad (5.101)$$

$$U_{R2}(t) = \frac{E_m R_2}{\sqrt{R_2^2 + \omega^{-2} C^{-2}}} \cos\left(\omega t + \arctg\left(\frac{1}{R_2 \omega C}\right)\right),$$

бо $I_2(t)$ – струм через резистор R_2 . Також цей струм проходить через конденсатор. Щоб виписати явну залежність $U_C(t)$, можна скористатись виразом (5.101) та тими фактами, що по-перше, амплітуда напруги на

конденсаторі є амплітудою струму через конденсатор, помноженою на реактивний опір конденсатора, та, по-друге, на конденсаторі напруга відстає від струму на $\pi/2$ за фазою:

$$U_c(t) = \frac{E_m \omega^{-1} C^{-1}}{\sqrt{R_2^2 + \omega^{-2} C^{-2}}} \cos\left(\omega t + \arctg\left(\frac{1}{R_2 \omega C}\right) - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.102)$$

Очевидно, що загальна напруга на даному колі є

$$U(t) = E(t) = E_m \cos(\omega t). \quad (5.103)$$

Комплексна амплітуда загального струму розраховується на основі формул (5.92), (5.94) та (5.100):

$$\tilde{I}_m = a + bi, \quad (5.104)$$

Де

$$a = \operatorname{Re} \tilde{I}_m = \frac{E_m R_1}{\omega^2 L^2 + R_1^2} + \frac{E_m R_2 \omega^2 C^2}{R_2^2 \omega^2 C^2 + 1} > 0, \quad (5.105)$$

$$b = \operatorname{Im} \tilde{I}_m = \frac{E_m \omega C}{R_2^2 \omega^2 C^2 + 1} - \frac{E_m \omega L}{\omega^2 L^2 + R_1^2}.$$

Тоді, відповідно, явна залежність загального струму у колі від часу

$$I(t) = |\tilde{I}_m| \cos(\omega t + \arg \tilde{I}_m), \quad |\tilde{I}_m| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg \tilde{I}_m = \arctg \frac{b}{a}. \quad (5.106)$$

5.9. Резюме

В усталеному режимі роботи кіл змінного струму фізичній величині взаємо-однозначно ставиться у відповідність комплексна амплітуда

$$A(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \tilde{A}_m = |\tilde{A}_m| e^{i\varphi}, \quad (5.107)$$

модуль комплексної амплітуди є амплітудою відповідної реальної «живої» фізичної величини, а аргумент комплексної амплітуди є зсувом фаз відповідної реальної «живої» фізичної величини відносно «чистого косинуса».

Методами підсумовування синусоїд є аналітичний метод допоміжного кута та метод комплексних амплітуд, який базується на тому факті, що комплексна амплітуда суми синусоїд є сумою комплексних амплітуд цих синусоїд.

Закон додавання комплексних чисел на комплексній площині є ідентичним до закону додавання векторів, та графічне зображення такого додавання комплексних амплітуд величин на комплексній площині носить назву векторної діаграми.

Символічний метод – метод опису усталеного режиму кіл синусоїдального змінного струму, що базується на законах Кірхгофа для комплексних амплітуд. Перший закон Кірхгофа для комплексних амплітуд формулюється для кожного вузла кола таким чином: сума комплексних амплітуд струмів, що входять до даного вузла, дорівнює сумі комплексних амплітуд струмів, що виходять з даного вузла. Другий закон Кірхгофа для комплексних амплітуд формулюється для кожного замкненого контуру таким чином: алгебраїчна сума комплексних амплітуд напруг на елементах контуру є алгебраїчною сумою комплексних амплітуд ЕРС джерел на цьому контурі:

$$\sum_{\alpha=1}^n \tilde{U}_{\alpha m} = \sum_{\beta=1}^k \tilde{E}_{\beta m}, \quad (5.108)$$

де комплексна амплітуда напруги на кожному елементі (мається на увазі резистор, конденсатор, котушка) виражається через комплексну амплітуду струму таким чином:

$$\tilde{U}_{\alpha m} = \tilde{Z}_{\alpha} \tilde{I}_{\alpha m}, \quad (5.109)$$

де в залежності від елемента

$$\tilde{Z}_{\alpha} = \begin{cases} R, \text{ резистор} \\ i\omega L, \text{ котушка} \\ -i/(\omega C), \text{ конденсатор} \end{cases}. \quad (5.110)$$

5.10. Питання для самоконтролю

1. Навести визначення комплексного числа, дійсної та уявної частин комплексного числа, модуля та аргументу комплексного числа. Навести співвідношення, що пов'язують модуль, аргумент, дійсну та уявну частини комплексного числа.

2. Вивести арифметичні дії між комплексними числами (додавання, віднімання, множення, ділення).

3. Навести визначення та фізичний зміст комплексної амплітуди.

4. Описати методи підсумовування синусоїд (метод допоміжного кута та метод комплексних амплітуд).

5. Навести закони Кірхгофа для комплексних амплітуд та пояснити їхнє походження.

6. За допомогою символічного методу вивести результати для провідності паралельного RLC–контурі й опору послідовного RLC–контурі, а також результати для зсуву фаз між загальним струмом та напругою на цих контурах.

7. Що таке векторна діаграма і чому комплексні числа можна додавати як вектори на комплексній площині? Яким є фізичний зміст довжини векторів та кута між векторами на векторній діаграмі?

8. За допомогою векторної діаграми вивести результати для провідності паралельного RLC–контурі й опору послідовного RLC–контурі, а також результати для зсуву фаз між загальним струмом та напругою на цих контурах.

Підсумки

Подано загальну анотацію змісту навчального посібника та вимоги до здатностей здобувача щодо використання навчального контенту.

У першій частині навчального посібника:

- Описано базові поняття кіл резистивного струму. Зокрема, надано визначення основних параметрів кіл, обґрунтовано властивості послідовного та паралельного з'єднань резисторів, описано схеми заміщення реальних джерел струму та напруги, описано умову максимальної передачі потужності від джерела в коло, виведено закони Ома для ділянки кола та для повного кола.
- Детально описані такі методи опису кіл постійного струму, як потенціальна діаграма та закони Кірхгофа, наведено фізичне пояснення походження законів Кірхгофа.
- Описано перехідні процеси на конденсаторі та на котушці індуктивності в колах з постійними ЕРС. Отримано точні аналітичні часові залежності напруги й струму на конденсаторі в задачах зарядження й розрядження конденсатора, наведено вирази для енергії електричного поля в конденсаторі та енергії магнітного поля в котушці, описано закони комутації та наведено приклади їх застосування.
- Описано базові результати для кіл змінного синусоїдального струму. Описано співвідношення між амплітудами й фазами напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці, на основі розв'язання відповідних диференціальних рівнянь отримано результати для опору послідовного RLC-контур та провідності паралельного RLC-контур, а також для зсуву фаз між загальним струмом та загальною напругою на цих контурах. Наведено вирази для активної, реактивної та повної потужності, та розкрито фізичний зміст цих величин.
- Викладено такі методи опису кіл змінного струму, як векторна діаграма та символічний метод, що базуються на понятті комплексної амплітуди.

Наведено основні поняття про комплексні числа, описано алгебраїчні операції з комплексними числами та наведено визначення модуля та аргументу комплексного числа. Наведено закони Кірхгофа для комплексних амплітуд та пояснено їхнє походження. Наведено прості приклади застосування символічного методу.

З опорою на матеріал першої частини навчального посібника студент повинен:

- Знати визначення сили електричного струму, напруги, потенціалу та опору. Уміти виражати розмірності цих величин через базові розмірності СІ.
- Уміти виводити формули для загальних струму, напруги та опору для послідовного та паралельного з'єднань резисторів.
- Знати визначення амперметра та вольтметра. Знати, яким є опір цих приладів в ідеальному випадку і уміти обґрунтувати, чому саме таким.
- Знати визначення ідеального джерела ЕРС та ідеального джерела струму.
- Знати схеми заміщення (послідовну та паралельну) реальних джерел струму та ЕРС. Уміти обґрунтувати, при яких параметрах цих схем відповідні джерела є ідеальними.
- Знати закон Ома для ділянки кола, що не містить ЕРС. Уміти виводити закон Ома для повного кола та для ділянки кола, що містить джерело ЕРС.
- Уміти виводити вираз для потужності струму, а також співвідношення між зовнішнім загальним опором кола та внутрішнім опором джерела, при якому має місце максимальна передача потужності від джерела в коло.
- Знати визначення гілки, вузла та контуру в електричному колі.
- Знати перший закон Кірхгофа та уміти пояснити його фізичний зміст.
- Знати другий закон Кірхгофа та уміти його виводити.

- Уміти будувати потенціальну діаграму для замкненого контуру у резистивному колі постійного струму.
- Уміти пояснювати фізичний зміст ділянок потенціальної діаграми.
- Уміти за потенціальною діаграмою визначати струм та напругу на елементах контуру та опір цих елементів.
- Знати одиниці вимірювання ємності та індуктивності і уміти їх виводити через базові одиниці СІ.
- Знати співвідношення між напругою на конденсаторі та зарядом конденсатора. Уміти виводити співвідношення між струмом через конденсатор та напругою на конденсаторі.
- Знати вираз для ЕРС самоіндукції котушки. Уміти пояснювати, як отримується співвідношення між напругою на котушці та струмом через котушку.
- Уміти виводити та розв'язувати диференційні рівняння для заряду конденсатора та струму через котушку в колах з постійними ЕРС.
- Знати, що таке стала часу RC–ланцюжка та оцінки на тривалість перехідних процесів в RC–ланцюжку.
- Знати закони комутації та уміти застосовувати їх на практиці.
- Знати залежність змінного синусоїдального струму від часу, знати визначення амплітуди, фази, періоду, частоти та кругової частоти.
- Уміти виводити співвідношення між діяльними та амплітудними значеннями величин у колах змінного синусоїдального струму.
- Уміти виводити співвідношення між амплітудою напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці в колах змінного струму. Уміти виводити співвідношення між фазами напруги та струму на резисторі, конденсаторі та котушці в колах змінного струму. Знати вирази для реактивного опору конденсатора й котушки.
- Знати алгоритм розв'язання диференційних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами.

- Уміти виводити диференційне рівняння для заряду конденсатора в послідовному RLC–контурі, підключеному до генератора змінної синусоїдальної ЕРС. Знати, яка частина розв’язку цього рівняння відповідає за перехідний процес. Уміти розв’язувати це рівняння в усталеному режимі роботи кола, уміти виводити формули для опору контуру та для зсуву фаз між загальною напругою та загальним струмом на контурі.
- Знати, що таке явище резонансу напруг у послідовному RLC–контурі та уміти виводити співвідношення між параметрами кола, при якому воно виникає.
- Уміти виводити співвідношення між струмами у паралельному RLC–контурі, підключеному до генератора змінної синусоїдальної ЕРС. Уміти виводити диференційне рівняння для струму через котушку, знати, який параметр кола є відповідальним за перехідний процес, та уміти розв’язувати це рівняння в усталеному режимі роботи кола у випадку, коли реактивний опір котушки є набагато більшим за резистивний опір котушки. Уміти виводити формули для провідності контуру та для зсуву фаз між загальною напругою та загальним струмом на контурі.
- Знати, що таке явище резонансу струмів у паралельному RLC–контурі та уміти виводити співвідношення між параметрами кола, при якому воно виникає.
- Уміти виводити залежність від часу миттєвої потужності в колі змінного струму. Знати, як пов’язаний період миттєвої потужності з періодом струму.
- Уміти виводити вираз для активної потужності.
- Знати вираз для реактивної потужності й на прикладі послідовного RLC–контуру уміти проілюструвати фізичний зміст цієї величини.
- Знати вираз для повної потужності змінного струму

- Знати визначення комплексного числа, дійсної та уявної частин комплексного числа, модуля та аргументу комплексного числа. Уміти виводити співвідношення, що пов'язують модуль, аргумент, дійсну та уявну частини комплексного числа.
- Уміти виконувати арифметичні дії між комплексними числами (додавання, віднімання, множення, ділення).
- Знати визначення та фізичний зміст комплексної амплітуди.
- Знати методи підсумовування синусоїд (метод допоміжного кута та метод комплексних амплітуд).
- Знати закони Кірхгофа для комплексних амплітуд та уміти пояснити їхнє походження.
- За допомогою символічного методу та векторної діаграми виводити результати для провідності паралельного RLC-контурі й опору послідовного RLC-контурі, а також результати для зсуву фаз між загальним струмом та напругою на цих контурах.
- Знати принцип побудови векторної діаграми та фізичний зміст довжини векторів та кута між векторами на векторній діаграмі.

Означені навчальні цілі дають об'єктивну можливість однозначно судити про ступінь досягнення їх як при самоконтролі, так і при зовнішньому контролі засвоєння навчального контенту.

Список рекомендованої літератури

1. Ю.О. Коваль, І.О. Милютченко, А.М. Олейніков, В.М. Шокало, «Основи теорії кіл, сигналів та процесів в системах технічного захисту інформації. Ч.1.», за загальною редакцією В.М. Шокала, Харків: НТМТ, 2011. – 544 с.
2. Л.А. Бессонов «Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Часть 1», М: Юрайт, 2018.– 364 с.
3. Л.А. Бессонов «Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Часть 2», М: Юрайт, 2018.– 346 с.
4. V.S. Khilov, “Theoretical fundamentals of electrical engineering”, Dnipro, National Miming University, 2018. – 467 p.
5. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Yu.V. Geronimus, M. Yu. Tseytlin and J. Alan, “Table of Integrals, Series, and Products”, edited by D. Zwillinger and V.H. Moll, Academic Press, 2014. – 1133 pages.

Навчальне видання

Горєв В'ячеслав Миколайович

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ

Частина I

Навчальний посібник

Видано в редакції автора.

Підписано до друку 27.09.2021. Формат 30x42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 5,8.
Обл.-вид. арк. 5,8. Тираж 10 пр. Зам. №__

Підготовлено до друку та видруковано
у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.

49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.