

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою
««Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем»
зі спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2023

УДК: 621.3.011.7(075.8)

М54

Укладачі: *Грудська Валентина Павлівна*, канд. техн. наук, доц.
Чибеліс Валерій Іванович, канд. техн. наук, доц.
Зіменков Дмитро Костянтинович, ст. викладач
Ладік Наталія Антонівна

Рецензент *Будько В.І.*, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри відновлюваних джерел енергії ФЕА КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Лободзинський В.Ю.*, кандидат технічних наук, доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № від р.)
за поданням вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 4 від 27.11.2023 р.)*

Методи розрахунку лінійних кіл постійного струму [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавр за освіт. програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем» спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Грудська В.П. та ін. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 144 с.

Навчальний посібник для студентів спеціальності 174 – «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» освітньо-професійної програми «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем» призначений для засвоєння студентами навичок використання сучасних програмних продуктів комп'ютерного моделювання у вирішенні новітніх задач електромагнітної сумісності і буде використовуватись в лекційному курсі вивчення дисциплін «Основи електротехніки», «Електротехніка», «Основи електротехніки та електроніки», «Теорія електричних кіл та сигналів». Посібник буде також корисним студентам, що навчаються за іншими спеціальностями галузей знань 14 Електрична інженерія та 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації.

УДК: 621.3.011.7(075.8)

Реєстр. № НІП **XX/XX-XXX**. Обсяг **X,X** авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
1 ВИХІДНІ ЗАКОНИ І ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ	5
1.1. Закон Ома для пасивної ділянки кола.....	5
1.2. Закон Ома для активної ділянки кола.....	6
1.3. Закон Ома для нерозгалуженого кола	7
1.4 Закони Кірхгофа	8
1.5. Визначення напруги між точками електричного кола	10
1.6. Баланс потужностей в електричному колі.....	12
2 РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ З ОДНИМ ДЖЕРЕЛОМ ЕНЕРГІЇ	15
2.1. Загальні положення	15
2.2. Послідовне з'єднання елементів кола	16
2.3. Паралельне з'єднання елементів кола	17
2.4. Еквівалентне перетворення пасивних ділянок кола зі з'єднанням елементів трикутником та зіркою	19
2.5. Стислі відомості про вимірювальні прилади	21
2.6. Розв'язання задач до розділу 2.....	23
3 РОЗРАХУНОК СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	42
3.1. Метод рівнянь Кірхгофа	42
3.2. Метод контурних струмів.....	56
3.3. Метод вузлових потенціалів	66
3.4. Метод вузлової напруги	80
3.5. Метод накладання (суперпозиції)	89
3.6. Метод перетворення паралельних активних гілок електричного кола	107
3.7. Метод еквівалентного генератора ЕРС	117
4 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНЕ ЗАВДАННЯ	139
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	144

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник призначено для студентів, які вивчають дисципліни «Основи електротехніки», «Електротехніка», «Основи електротехніки та електроніки», «Теорія електричних кіл та сигналів».

Вказані дисципліни є нормативними, вони формують теоретичну базу і практичні навички, необхідні майбутнім фахівцям для грамотної експлуатації сучасного високотехнологічного електроустаткування промислових підприємств і наукових лабораторій. Успішне опанування складними теоретичними положеннями електротехніки можливе лише за умови набуття студентами вміння використовувати ці положення для розв'язання конкретних задач. У той же час у навчальних програмах певних спеціальностей практичні заняття з електротехніки не передбачені зовсім, або зведені до мінімуму.

Мета даного посібника – підсилити практичну складову електротехнічної підготовки майбутніх фахівців, а саме:

- показати використання законів і теоретичних положень електротехніки для моделювання електричних кіл, взятих з інженерної практики;
- допомогти студентам в опануванні традиційними і новітніми методами аналізу електричних кіл;
- висвітлити і опрацювати зі студентами критерії вибору оптимального методу аналізу конкретного електричного кола.

Матеріал посібника складається з розв'язаних задач за темами навчальної програми, які обрано з урахуваннями різної попередньої підготовки студентів і досвіду роботи «on-line». Кожна розв'язана задача подана з детальними коментарями і, за потреби, супроводжується проміжними роз'яснювальними схемами. Задачі розміщені у порядку зростання їх складності, що надає більшої гнучкої опрацюванню заданої теми студентами і сприяє задоволенню методичних потреб викладачів.

Контент посібника структуровано у чотири розділи.

У першому розділі викладено основні закони, теоретичні положення і

розрахункові співвідношення, які надалі використовуються при розв'язанні задач і перевірці розрахунків.

У другому розділі показано, як обчислювати параметри розгалужених електричних кіл з одним джерелом живлення – напруги або струму.

У третьому розділі розглянуті найбільш поширені методи розрахунку складних кіл: метод рівнянь Кірхгофа, контурних струмів, вузлових потенціалів, суперпозиції (накладання), перетворення активних гілок, еквівалентного генератора. До кожного методу наданий алгоритм розрахунку і декілька задач, що ілюструють варіації використання даного методу для розв'язування задач різного типу.

Четвертий розділ містить індивідуальне розрахункове завдання для студентів, яке сприяє розвитку у них самостійного мислення і формує вміння використовувати на практиці набуті знання теоретично-розрахункових положень.

Посібник може бути використаний як допоміжний засіб при проведенні лекційних та практичних занять і як базовий – при самостійному опрацюванні розділу «Лінійні електричні кола постійного струму».

1. ВИХІДНІ ЗАКОНИ І ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

1.1. Закон Ома для пасивної ділянки кола

Пасивною називають ділянку кола, яка не містить джерел енергії (рис.1.1).

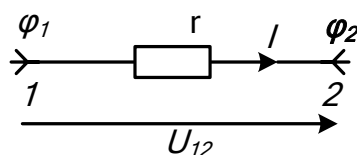


Рисунок 1.1

Закон Ома встановлює зв'язок між струмом і напругою на даній ділянці. Під напругою розуміють різницю потенціалів між крайніми точками цієї ділянки: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$

Слід пам'ятати: при індексації напруги першою записують точку з більшим потенціалом, зміна послідовності індексів у положенні напруги відповідає зміні знаку цієї напруги: $U_{21} = -U_{12}$, отже напруга може мати як додатне, так і від'ємне значення:

- струм через пасивну ділянку (резистор) завжди проходить від точки з більшим потенціалом (« + ») до точки з мінімальним потенціалом (« - »);

- напруга і струм резистора завжди, завжди мають однаковий напрямок.

Припустимо, що на рис.1.2 $\varphi_1 > \varphi_2$, тоді закон Ома має дві форми запису:

$$U_{12} = I \Sigma R \text{ та } I = \frac{U_{12}}{\Sigma R}.$$

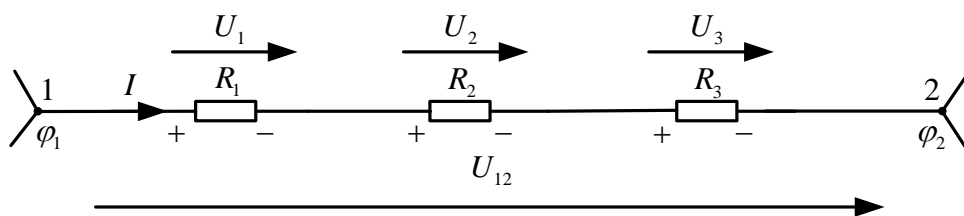


Рисунок 1.2

1.2. Закон Ома для активної ділянки кола.

Активною називають ділянку кола, яка містить одне або декілька джерел енергії (рис. 1.3).

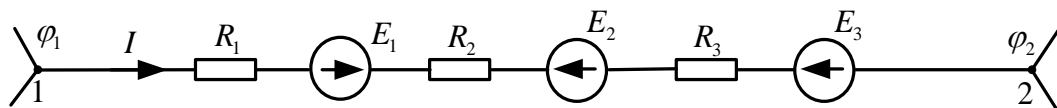


Рисунок 1.3

Джерело енергії характеризується електрорушійною силою (ЕРС) E , яку можна визначити як роботу сторонніх (неелектричних) сил, притаманних джерелу, що витрачається на переміщення одиниці додатного заряду всередині джерела від затискача з меншим потенціалом «-» до затискача з більшим потенціалом «+».

Слід пам'ятати:

- на схемах напрямок дії E позначається стрілкою, направленою від затискача з потенціалом «-» до затискача з потенціалом «+» незалежно від напрямку струму через ділянку;
- струм через активну ділянку залежить не тільки від різниці потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ на її затискачах ділянки, але й від значення і напрямку е.р.с, що входить до її складу.

Алгоритм розрахунку

1. Довільно вибрати додатній напрям струму.
2. При обчисленні струму врахувати його напрямок:

- якщо струм направлений від т.1 до т.2, то:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum \pm E}{\sum R} = \frac{U_{12} + \sum \pm E}{\sum R};$$

- якщо струм направлений від т.2 до т.1, то:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum \pm E}{\sum R} = \frac{U_{21} + \sum \pm E}{\sum R}.$$

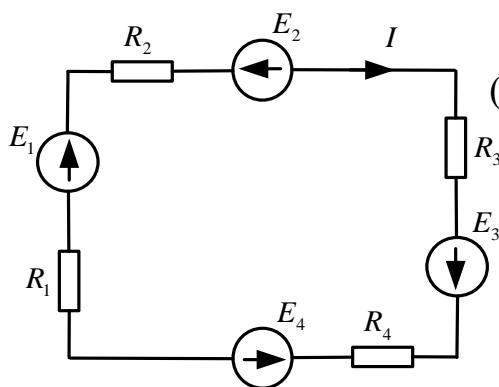
Зі знаком «+» враховують ЕРС, напрями яких збігається з вибраним напрямком струму; зі знаком «-» врахувати ЕРС, направлені протилежно струму.

Зауваження: струм може визначатися зі знаком «-». Це означає, що дійсний напрямок струму протилежний довільно обраному і не є помилкою.

Приклад 1.1: для ділянки кола на рис. 1.3

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

1.3. Закон Ома для нерозгалуженого кола



Нерозгалужене коло являє собою один контур (рис. 1.4) струм в якому описується законом Ома у вигляді:

$$I = \frac{\sum \pm E}{\sum R}.$$

Рисунок 1.4

Алгоритм розрахунку

1. Довільно задати додатній напрям струму.
2. Розрахувати струм за формулою:

$$I = \frac{\sum \pm E}{\sum R}.$$

Зі знаком «+» враховувати E , напрям яких збігається з вибраним напрямом струму; зі знаком «-» враховувати E , направленні протилежно струму.

Приклад 1.2: для схеми на рис. 1.4

$$I = \frac{E_1 - E_2 - E_3 - E_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

1.4 Закони Кірхгофа

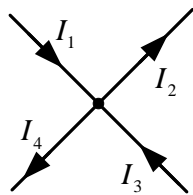
Перший закон Кірхгофа (для струмів у вузлі електричного кола) має двояке формулювання.

Формулювання перше: алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі електричного кола, дорівнює 0.

Скорочений запис: $\sum \pm I = 0$.

Правило: струми, які напрямлені у вузол, слід брати з одним знаком, а ті, що напрямленні від вузла, – з протилежним знаком.

Формулювання друге: сума струмів, що входять у вузол, дорівнює сумі струмів, що виходять з вузла. Скорочений запис: $\sum I_{\text{вх}} = \sum I_{\text{вих}}$



Так, наприклад, для вузла за першим формулюванням:

$$-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0;$$

за другим формулюванням:

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4.$$

Не зважаючи на те, що струми і напруги в окремих гілках складних

електричних кіл підпорядковуються закону Ома, визначити їх можливо лише за допомогою законів Кірхгофа.

Другий закон Кірхгофа (для напруг в окремо взятому замкненому контурі електричного кола).

Другий закон також формулюється дwoяко.

Формулювання перше: алгебраїчна сума ЕРС, які діють в будь-якому контурі електричного кола, дорівнює алгебраїчній сумі напруг на всіх опорах цього контуру.

Скорочений запис: $\sum \pm E = \sum \pm IR$.

Правило: довільно задати напрям обходу контуру; при складанні рівняння зі знаком «+» враховувати E, I , напрямом яких збігається з вибраним обходом контуру; зі знаком «-» враховувати E та I , напрямлені протилежно обходу.

Приклад 1.3 наведено на рис.1.5.

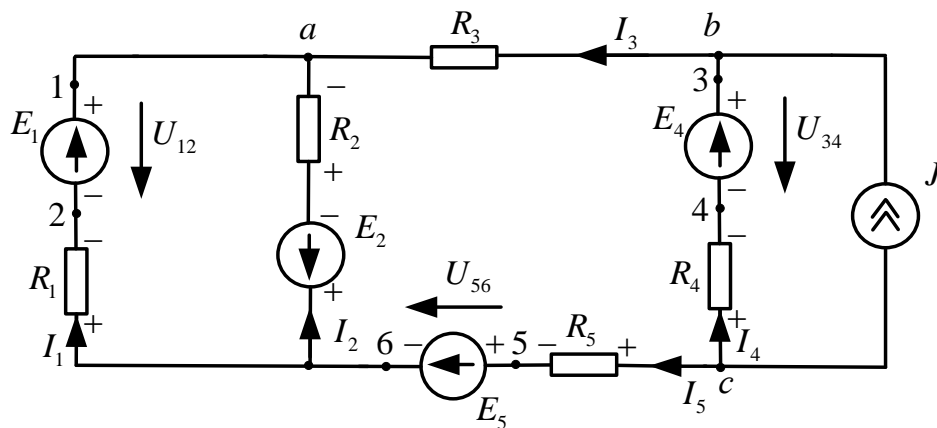


Рисунок 1.5.

Рівняння за першим формулюванням для зовнішнього контуру:

$$R_1 - E_1 - R_3 - E_4 - R_4 - R_5 - E_5 - R_1$$

при обході за обертанням годинникової стрілки:

$$E_1 - E_4 - E_5 = R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5$$

Формулювання друге: алгебраїчна сума напруг, що діють у будь-якому замкненому контурі електричного кола дорівнює нулю.

Скорочений запис: $\sum \pm U = 0$.

У цьому випадку при складанні рівняння замість ЕРС джерела записують напругу на його затискачах, що в деяких випадках буває зручніше.

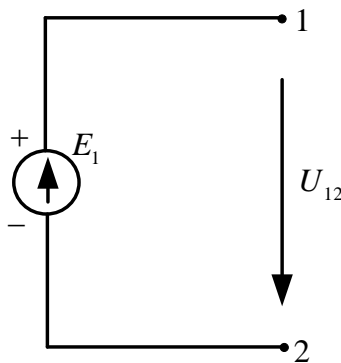
Слід пам'ятати:

- напрямок стрілки E завжди від затискача з меншим потенціалом « $-$ » до затискача з більшим потенціалом « $+$ » незалежно від напрямку струму через джерело ЕРС;

- напрямок напруги на затискачах (полюсах) джерела E завжди від точки з більшим потенціалом « $+$ » до точки з меншим потенціалом « $-$ ».

Для вибраного на рис. 1.5 контуру рівняння за другим формулюванням:

$$-U_{12} - R_3 I_3 + U_{34} - R_4 I_4 + R_5 I_5 + U_{56} + R_1 I_1 = 0.$$



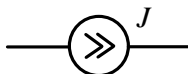
1.5. Визначення напруги між точками електричного кола

При розв'язанні багатьох задач виникає необхідність обчислення напруги між різними точками кола. Існують декілька прийомів такого розрахунку; автори рекомендують користуватися нижченаведеними правилами.

Правило: для визначення напруги між точками 1 і 2 слід пройти від точки 2 до точки 1 по гілкам кола, де відомі ЕРС, струми, опори і обчислити зміну потенціалів на вибраному шляху.

Слід пам'ятати:

- на шляху від точки 2 до точки 1 не повинно бути джерела струму, оскільки опір такого джерела вважається нескінченно великим.



- для запобігання помилок доцільно на кожному елементі вибраного шляху розставити знаки потенціалів « $-$ » до « $+$ » незалежно

від напрямку струму, а через резистор струм проходить від більшого потенціалу «+» до меншого «-».

У схемі на рис.1.5:

$$U_{bc} = -R_4 I_4 + E_4;$$

$$U_{ac} = -R_5 I_5 - E_5 - E_2 - R_2 I_2;$$

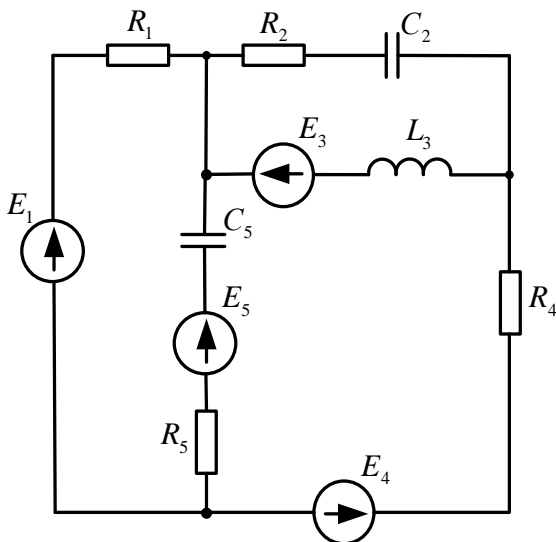
або

$$U_{ac} = -R_5 I_5 - E_5 - R_1 I_1 + E_1;$$

$$U_{ac} = -R_4 I_4 + E_4 - R_3 I_3.$$

Незалежно від вибраного шляху числове значення напруги буде однаковим.

Приклад 1.4 (рис.1.6).



Відомо: $E_1 = 80\text{В}$, $E_3 = 40\text{В}$,

$E_4 = 10\text{В}$, $E_5 = 70\text{В}$,

$R_1 = R_2 = 10\ \text{Ом}$,

$R_4 = R_5 = 20\ \text{Ом}$,

$C_2 = C_5 = 10\ \text{мкФ}$,

$L_3 = 20\ \text{мГн}$.

Рисунок 1.6

Визначити напругу на конденсаторах U_{C2} , U_{C5} .

Розв'язання. Беремо до уваги, що у колі діють джерела з постійними ЕРС, тому струми у колі постійні. Опір конденсаторів в постійному струму нескінченно великий, опір індуктивної котушки дорівнює нулю. Для постійного струму коло має вигляд, показаний на рис. 1.7.

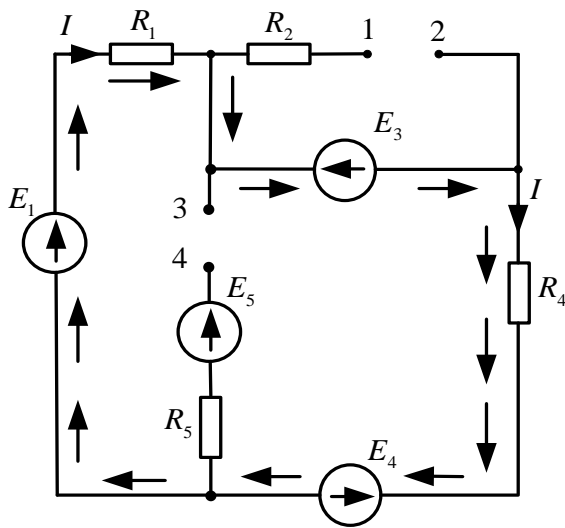


Рисунок 1.7

або

$$U_{c2} = -R_4 I - E_4 + E_1 - R_1 I = 40V;$$

$$U_{c5} = U_{34} = -E_5 + E_1 - R_1 I = 0,$$

або

$$U_{c5} = -E_5 + E_4 + R_4 I + E_3 = 0.$$

У колі працює один контур, відмічений пунктиром $I_2 = 0, I_5 = 0$.

За законом Ома визначаємо струм у контурі:

$$I = I_1 = I_4 = \frac{E_1 - E_3 - E_4}{R_1 + R_4} = 1 A.$$

Тоді напруги на конденсаторах:

$$U_{c2} = U_{12} = E_3 = 40V$$

1.6. Баланс потужностей в електричному колі

Правильність розрахунків перевіряють за балансом потужностей, який базується на законі збереження енергії, оскільки потужність – це зміна енергії в одиницю часу $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$.

Сутність балансу: сума потужностей, які генеруються джерелами енергії в колі, дорівнює сумі потужностей, які споживаються пасивними елементами до складу кола.

Рівняння балансу потужностей у колі постійного струму:

$$\sum \pm EI + \sum UJ = \sum RI^2,$$

де: $EI = P_E$ – потужність джерела напруги; $UJ = P_J$ – потужність струму (U – напруга на його затискачах).

Правило складання рівняння:

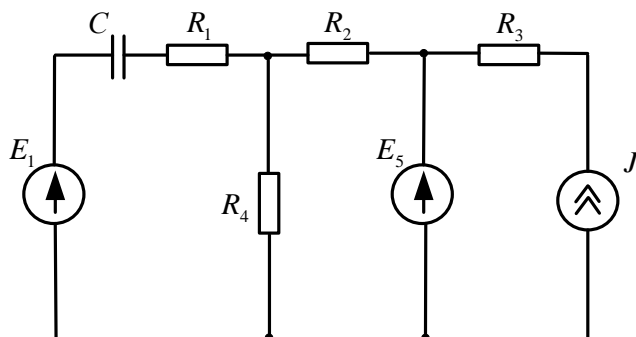
- доданок EI слід враховувати зі знаком «+» коли напрямки E та I у гілці збігаються, тобто джерело напруги працює як генератор;
- доданок EI слід враховувати зі знаком «-» коли напрямки E та I у гілці протилежні; в таких випадках джерело споживає енергію з кола, наприклад, зарядження акумулятора;
- джерело струму I у більшості випадків підключене безпосередньо до двох вузлів, припустимо 1,2, і виникає питання яку напругу U_{12} або U_{21} краще брати при визначенні потужності $P_J = UJ$; у таких випадках для запобігання помилок доцільно враховувати напрямок струму I джерела; якщо I напрямлений до вузла 1, то $P_J = U_{12}J$, якщо до вузла 2, то $P_J = U_{21}J$.

Так, для схеми на рис. 1.5 рівняння балансу має вигляд:

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_4 I_4 - E_5 I_5 + U_{вс} J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2,$$

де: $U_{вс} = -R_4 I_4 + E_4$.

Приклад 1.5 (рис.1.8).



Відомо:

$$\begin{aligned} E_1 &= 20 \text{ В}, E_5 = 60 \text{ В}, \\ J &= 3 \text{ А}, R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}, \\ R_3 &= R_4 = 50 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Рисунок 1.8

Визначити: потужності джерел живлення. Скласти баланс потужності.

Розв'язок. Враховуємо, що опір конденсатора постійному струму нескінченно великий і він еквівалентний розриву гілки. Розподілення струму у колі показано на рис.1.9.

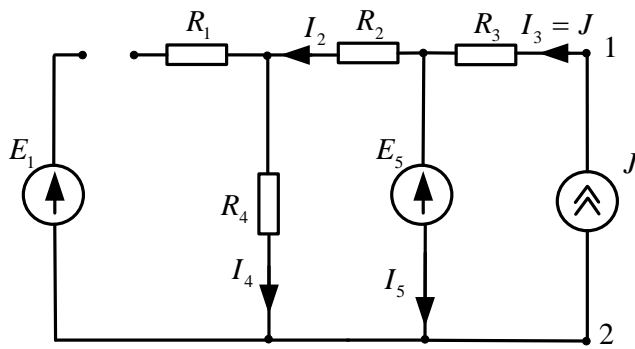


Рисунок 1.9

$$I_1 = 0,$$

$$I_2 = I_4 = \frac{E_5}{R_2 + R_4} = 1 \text{ A},$$

$$I_3 = J = 3 \text{ A}.$$

За першим законом Кірхгофа
визначаємо струм:

$$I_5 = I_3 - I_2 = 2 \text{ A}.$$

Обчислюємо потужності джерел:

$$P_{E_1} = E_1 I_1 = 0; P_{E_5} = -E_5 I_5 = -120 \text{ Вт};$$

$$P_J = U_{12} J = (E_5 + R_3 I_3) J = 630 \text{ Вт}.$$

Складаємо рівняння балансу потужностей:

$$P_{E_1} + P_{E_5} + P_J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2,$$

$$510 = 510 \text{ Вт}.$$

2. РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ З ОДНИМ ДЖЕРЕЛОМ ЕНЕРГІЇ

2.1. Загальні положення

Електричне коло, яке містить тільки одне джерело енергії (джерело напруги або джерело струму і будь – яку кількість споживачів енергії називають простим). Простому колу відповідає схема заміщення, що складається з одного джерела енергії і одного опору $R_{ек}$ еквівалентного опорам усіх елементів кола (рис. 2.1).

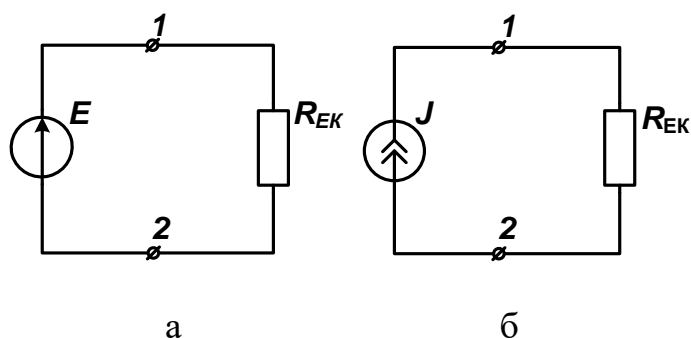
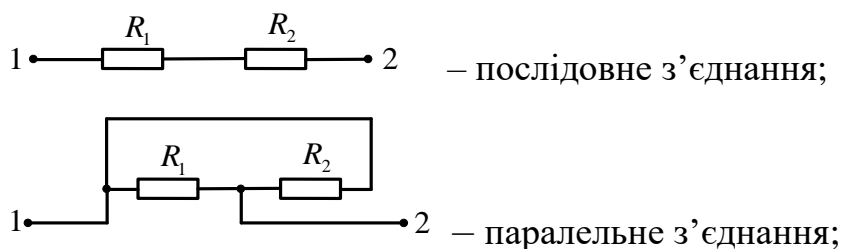


Рисунок 2.1

Споживачі енергії можуть бути з'єднані по-різному: послідовно, паралельно, змішано, трикутником, зіркою.

Слід пам'ятати:

- вид електричного з'єднання залежить від того, як з'єднані елементи кола провідниками і не залежить від їх розміщення на рисунку; наприклад, відносно точок 1, 2:



- опір з'єднувального проводу зазвичай вважають нехтовно малим, тоді за законом Ома $\varphi_1 - \varphi_2 = IR_{\text{пр}} = 0$ і, відповідно, $\varphi_1 = \varphi_2$; отже по всій довжині проводу має однаковий потенціал і його можна розглядати, як «розсунутий у просторі» один і той самий електричний вузол:



2.2. Послідовне з'єднання елементів кола

Умовний «початок» одного елемента підключений до умовного «кінця» іншого елемента, і у місці їх з'єднання ніякі додаткові елементи не підключені (рис. 2.2).

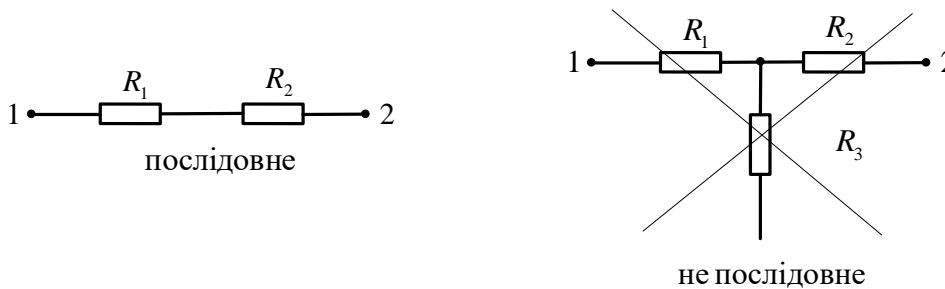


Рисунок 2.2

Характерна особливість: через усі елементи проходить один і той самий струм (рис.2.3).

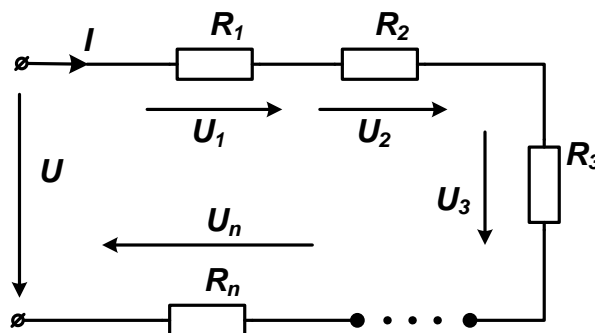


Рисунок 2.3

Алгоритм розрахунку

1. Обчислити еквівалентний опір кола.
2. Визначити струм за законом Ома: $I = \frac{U}{R_{\text{ек}}}$.

2.3. Паралельне з'єднання

Усі елементи одним кінцем з'єднані у спільний вузол 1 і другим кінцем також з'єднані у спільний вузол 2, інакше кажучи, підключені до однієї пари вузлів 1,2 (рис. 2.4).

Характерна особливість: до усіх елементів прикладена одна і та сама напруга.

Паралельне це таке з'єднання елементів, коли вони ввімкнені до однієї пари вузлів і, таким чином, знаходяться під однаковою напругою (рис.7).

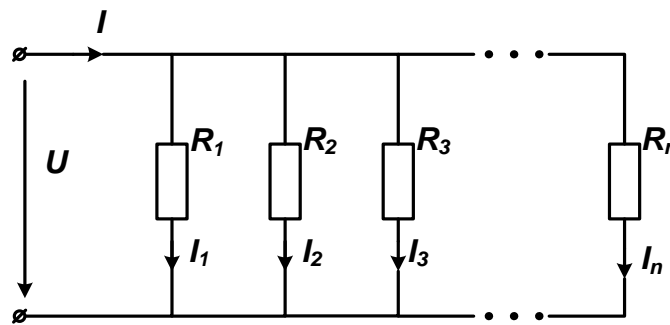


Рисунок 2.4

Алгоритм розрахунку

1. Розрахувати провідність кожного резистора окремо:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} \text{ См};$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} \text{ См};$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} \text{ См і т. д.}$$

2. Визначити еквівалентну провідність усіх резисторів:

$$G_{\text{ек}} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n = \sum_{k=1}^n G_k \text{ См.}$$

3. Перейти від еквівалентної провідності до еквівалентного опору кола

$$R_{\text{ек}} = 1/G_{\text{ек}}.$$

4. За законом Ома визначити струми:

$$I = \frac{U}{R_{\text{тр}}} = G_{\text{ек}} U; \quad I_1 = \frac{U}{R_1} = G_1 U; \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = G_2 U.$$

Слід пам'ятати: при паралельному з'єднанні до і після розгалуження відповідно до першого закону Кірхгофа проходить один і той самий струм (рис.2.4).

Окремий випадок

Полягає у паралельному з'єднанні мінімальної кількості елементів – двох. Найчастіше зображення такого з'єднання на схемах показано на рис. 2.5.

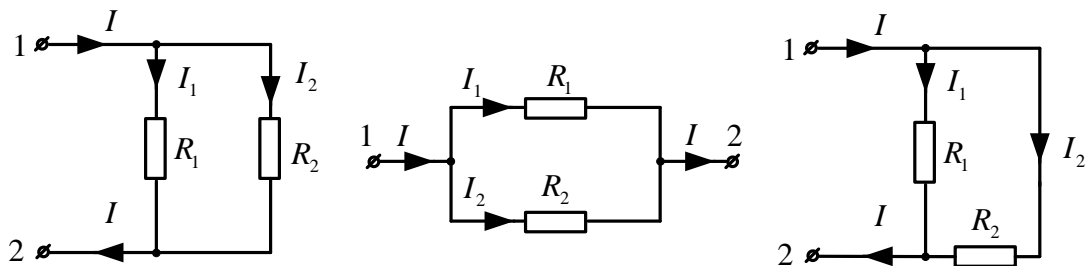


Рисунок 2.5

У такому випадку $R_{\text{ек}}$ розраховують за формулою

$$R_{\text{ек}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

а струми визначають за формулами «чужого» опору:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Якщо паралельно резистору підключений провід (рис. 2.6), то вищенаведені формули, з урахуванням $R_{\text{пр}} = 0$, набувають вигляду:

$$R_{\text{ек}} = \frac{R_{\text{пр}} \cdot R}{R_{\text{пр}} + R} = 0;$$

$$I_{\text{пр}} = \frac{I \cdot R}{R_{\text{пр}} + R} = I;$$

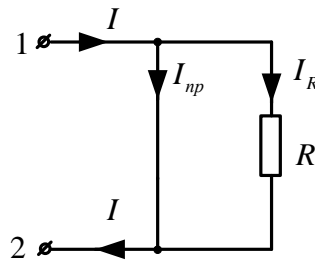


Рисунок 2.6

Оскільки увесь вхідний струм I замикається через провід, існує вислів «резистор закорочений».

Слід пам'ятати: формули «чужого опору» дійсні тільки для двох паралельно з'єднаних елементів.

2.4. Еквівалентне перетворення пасивних ділянок кола зі з'єднанням елементів трикутником та зіркою

Зазвичай в електричних колах елементи з'єднані змішано – на деяких ділянках послідовно, на деяких паралельно. Зведення опорів усіх елементів до одного виконується шляхом поступового перетворення ділянок, як показано в наведених далі задачах.

В інженерній практиці споживачі часто з'єднують трикутником або зіркою. Для визначення еквівалентного опору $R_{\text{ек}}$ кіл з таким з'єднанням виконують еквівалентне перетворення сполучення резисторів на зірку або навпаки. Умови еквівалентності перетворення: напруги і струми в неперетворених частинах кола повинні залишатися незмінними. Виходячи з цих умов, були визначені співвідношення між опорами і між струмами вихідної та еквівалентної схем.

Розрахунок струмів вихідної зірки за визначеними струмами трикутника виконується за першим законом Кірхгофа:

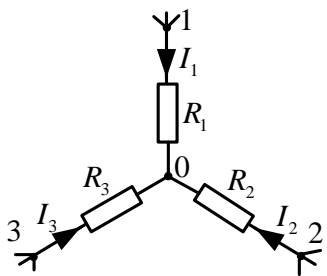
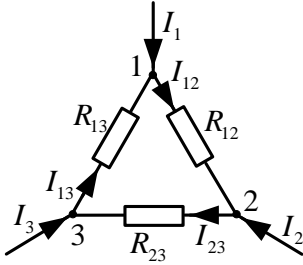
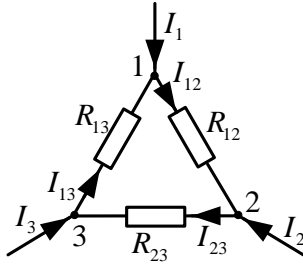
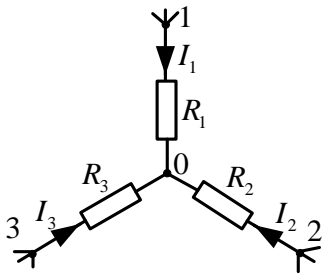
$$I_1 = I_{12} - I_{31}; \quad I_2 = I_{23} - I_{12}; \quad I_3 = I_{31} - I_{23}.$$

Розрахунок струмів вихідного трикутника за визначеними струмами зірки виконується за другим законом Кірхгофа і законом Ома:

$$I_{12} = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{R_{12}};$$

$$I_{23} = \frac{I_2 R_2 - I_3 R_3}{R_{23}};$$

$$I_{31} = \frac{I_3 R_3 - I_1 R_1}{R_{31}}.$$

Вихідна схема	Формули перетворення	Еквівалентна схема
	$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$ $R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$ $R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$	
	$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$ $R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$ $R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	

Приклад перетворення наведено у задачі, наведеній у підрозділі 2.6.

2.5. Стислі відомості про вимірювальні прилади у колах постійного струму

У розрахункових колах часто зустрічаються наступні вимірювальні прилади.

1. *Амперметр* призначений для вимірювання струму через досліджувану ділянку кола.

Слід пам'ятати:

- амперметр завжди підключають послідовно з елементами досліджуваної ділянки;
- при розрахунках опір амперметра зазвичай вважають нехтовно малим.

2. *Вольтметр* призначений для вимірювання напруги на окремому елементі кола або на певній ділянці кола.

Слід пам'ятати:

- вольтметр підключають паралельно елементу або досліджуваній ділянці кола;
- при розрахунках опір вольтметра зазвичай вважають нескінченно великим, тому він не утворює додаткового контуру у схемі;
- показ вольтметра розраховують як, значення напруги між точками кола, до яких він підключений.




3. *Ватметр* призначений для вимірювання потужності окремого елементу кола або певної ділянки кола. Має дві обмотки – струмову і напруги. Струмова обмотка є аналогом амперметра, підключається послідовно елементам кола і позначається * (початок), I (кінець). Обмотка напруги є аналогом вольтметра, підключається паралельно досліджуваному елементу або ділянці кола і позначається * (початок), U (кінець). Показ ватметра описується формулою $P_W = U_W I_W$, де U_W , I_W відповідно напруга та струм на досліджуваній частині кола.

Слід пам'ятати:

- опір обмотки струму (*, I) вважають нехтовно малим;

- опір обмотки напруги (*, U) вважають нескінченно великим;
- при обчисленні U_W слід враховувати, до якої точки підключений початок (*) обмотки напруги.

Вимірювальні прилади бувають аналогові та цифрові. В аналогових приладах покази є неперервними функціями зміни вимірюваної величини (напруги, струму, потужності). У цифрових приладах покази є функціями дискретних сигналів вимірювальної інформації, які подані у цифровій формі. За принципом дії розрізняють наступні системи електровимірювальних приладів: магнітоелектричну, електромагнітну, електродинамічну, індукційну та ін. На лицевій стороні приладу зображено умовне позначення його системи,

наприклад,  – магнітоелектрична,  – електромагнітна,  – електродинамічна і т.д..

У колах постійного струму зазвичай використовують магнітоелектричні амперметри і вольтметри, у принцип роботи яких закладено дію магнітного поля нерухомого постійного магніту на рухому котушку зі струмом. Зазвичай котушку виготовляють у вигляді алюмінієвої рамки з обмоткою з тонкого ізолюваного проводу. Вісь рухомої котушки жорстко зв'язана зі стрілкою або іншим вказівним пристроєм (світловим проміаном, цифровим лічильним механізмом). У результаті взаємодії магнітного поля і струму в обмотці рамки виникає обертовий момент, під дією якого рамка повертається відносно нейтрального положення і струму відхиляється на певний кут α . Кут повороту стрілки пропорційний значенню струму, тому у приладів магнітоелектричної системи шкала рівномірна.

Вимірювати струми, напруги і потужності у колах постійного струму можна також приладами електродинамічної системи (ЕД).

У такому механізмі, так само, як у магнітоелектричному є рухома котушка зі струмом I_1 , на осі якої закріплена стрілка. Але на відміну від МЕ – механізмів поле створюється не постійним нерухомим магнітом, а другою

(нерухомою) котушкою зі струмом I_2 . Обертний момент, що повертає рухому котушку зі стрілкою, пропорційний добутку обох струмів $M \approx I_1, I_2$.

Оскільки магнітне поле, створене не рухомою котушкою ЕД – механізму, значно слабше, ніж поле нерухомого магніту МЕ – механізму, то чутливість електродинамічних приладів менша порівняно з магнітоелектричним.

2.6. Розв’язання задач до розділу 2

Задача 2.1 (рис.2.7)

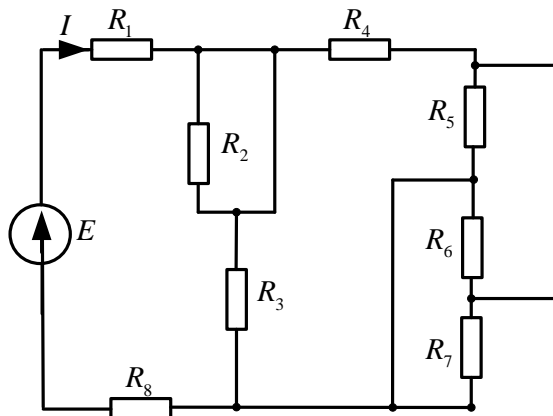


Рисунок 2.7

Відомо:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, \quad R_2 = 40 \text{ Ом},$$

$$R_3 = 20 \text{ Ом}, \quad R_4 = 10 \text{ Ом},$$

$$R_5 = 30 \text{ Ом}, \quad R_6 = 60 \text{ Ом},$$

$$R_7 = 20 \text{ Ом}, \quad R_8 = 30 \text{ Ом}, \quad E = 120 \text{ В}.$$

Визначити: еквівалентний опір кола $R_{ек}$ і вхідний струм I .

Розв’язання. Зважаємо на загально прийняте припущення, що опір проволу $R_{пр} = 0$ і вздовж проволу зберігається один і той самий електричний потенціал. Тоді схему можна подати у вигляді, показаному на рис.2.8

Враховуємо опори окремих ділянок кола:

$$R_{ек1} = \frac{R_2 \cdot R_{пр}}{R_2 + R_{пр}} = 0;$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = 0,033 \text{ См}, \quad G_6 = \frac{1}{R_6} = 0,017 \text{ См}, \quad G_7 = \frac{1}{R_7} = 0,05 \text{ См};$$

$$G_{ек} = G_5 + G_6 + G_7 = 0,1 \text{ См}, \quad R_{ек2} = \frac{1}{G_{ек}} = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{ек3} = R_4 + R_{ек2} = 20 \text{ Ом}.$$

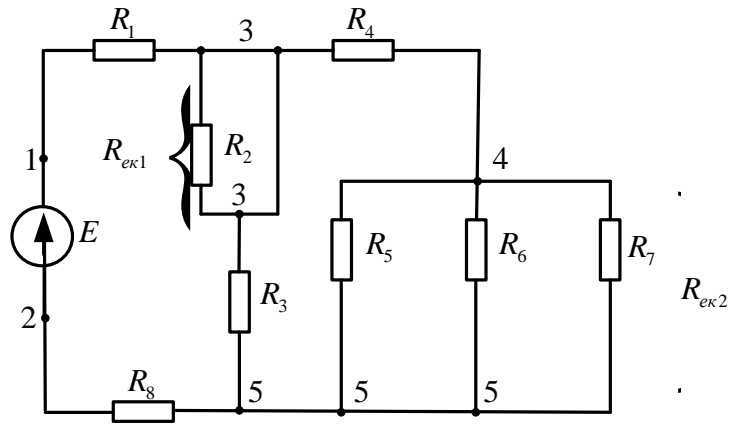


Рисунок 2.8

Схема на рис.2.8 набуває вигляду, показаного на рис. 2.9.

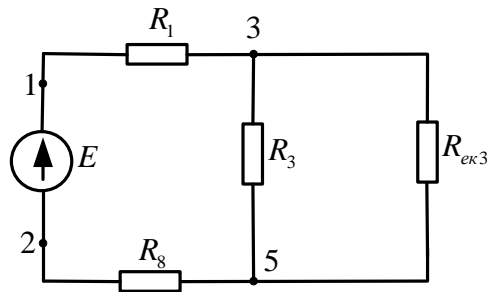


Рисунок 2.9

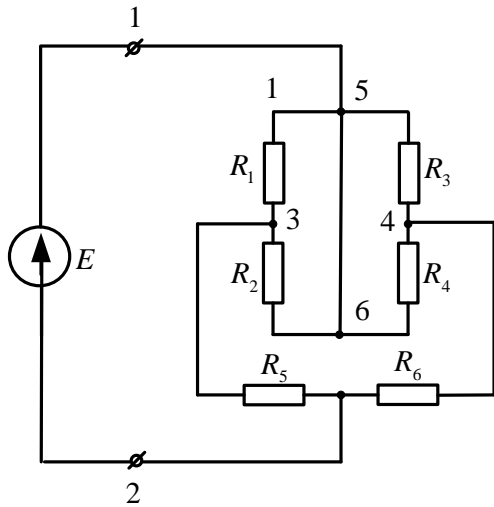
Знаходимо опір кола відносно затискачів 1 – 2 джерела:

$$R_{ек} = R_4 + \frac{R_3 * R_{ек3}}{R_3 + R_{ек3}} + R_8 = 50 \text{ Ом.}$$

За законом Ома обчислюємо вхідний струм:

$$I = \frac{E}{R_{ек}} = 2,4 \text{ А.}$$

Задача 2.2 (рис. 2.10).



Відомо: $E = 24 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 8 \text{ Ом}$,

$R_3 = R_4 = 4 \text{ Ом}$, $R_5 = R_6 = 2 \text{ Ом}$.

Розв'язання. Точки 1, 5, 6 з'єднані проводом, тому вони мають однаковий потенціал. Їх можна об'єднати і накреслити більш наочну розрахункову схему відносно затискачів 1, 2 джерела E (рис. 2.11).

Рисунок 2.10

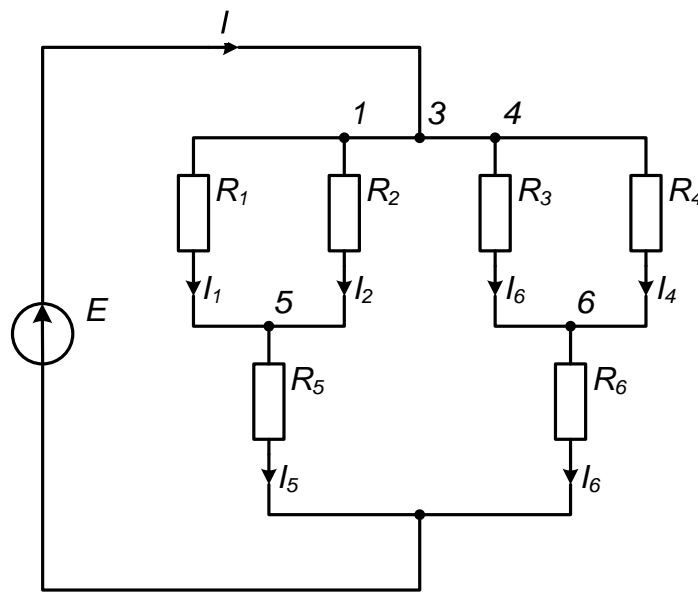


Рисунок 2.11

Поступовим перетворенням зведено усі опори до одного еквівалентного (рис.2.12, а – в).

$$R_{\text{ек1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4 \text{ Ом}; \quad R_{\text{ек2}} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 2 \text{ Ом};$$

$$R_{\text{ек3}} = R_{\text{ек1}} + R_5 = 6 \text{ Ом}; \quad = 4 \text{ Ом};$$

$$R_{\text{ек4}} = 2 + 2 = 4 \text{ Ом}; \quad R_{\text{ек5}} = \frac{R_{\text{ек3}} \cdot R_{\text{ек4}}}{R_{\text{ек3}} + R_{\text{ек4}}} = 2,4 \text{ Ом}.$$

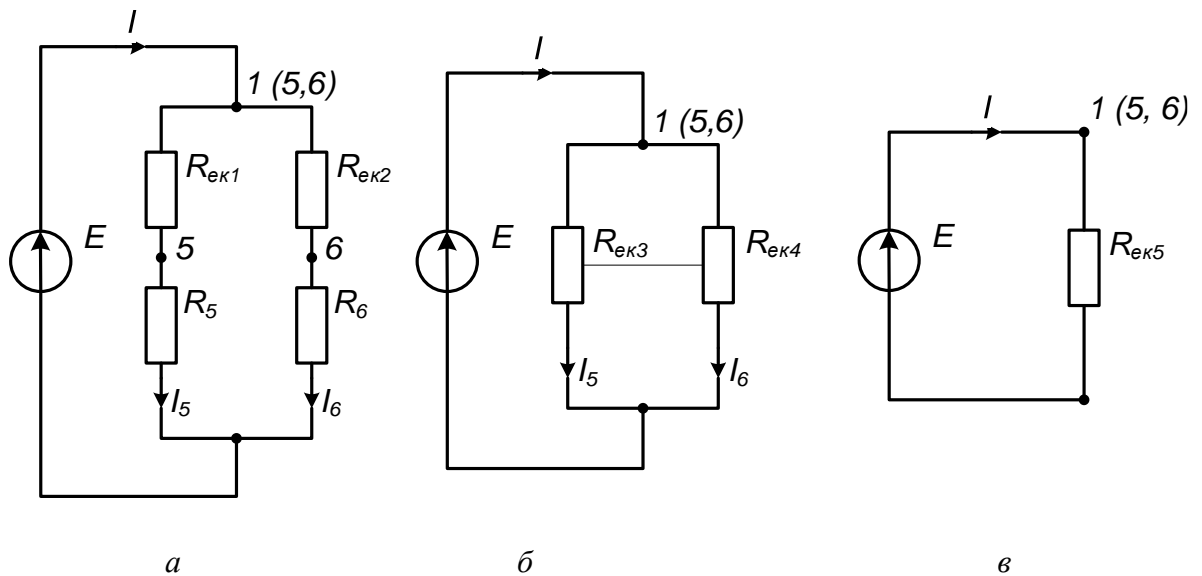


Рисунок 2.12

За законом Ома для схеми на рис. 2.12, в, обчислюємо струм джерела I :

$$I = \frac{E}{R_{\text{ек}5}} = 10 \text{ A.}$$

Користуючись формулами «чужого опору», розрахуємо спочатку I_5, I_6 (рис. 2.12, б):

$$I_5 = \frac{R_{\text{ек}4}}{R_{\text{ек}3} + R_{\text{ек}4}} = 4 \text{ A}; \quad I_6 = I \cdot \frac{R_{\text{ек}3}}{R_{\text{ек}3} + R_{\text{ек}4}} = 6 \text{ A,}$$

а потім I_1, I_2, I_3, I_4 (рис. 2.11):

$$I_1 = I_5 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2 \text{ A}; \quad I_2 = I_5 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2 \text{ A};$$

$$I_3 = I_6 \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 3 \text{ A}; \quad I_4 = I_6 \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 3 \text{ A.}$$

Задача 2.3 (рис. 2.13)

Відомо:

$$J = 3,2 \text{ A}; R_1 = 10 \text{ Ом}; R_2 = 25 \text{ Ом}; R_3 = 50 \text{ Ом}.$$

Визначити: покази амперметрів.

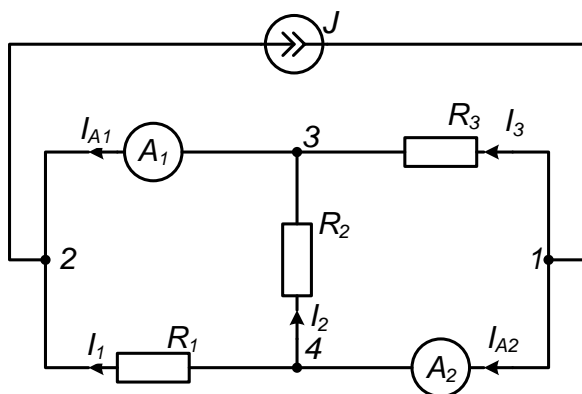


Рисунок 2.13

Розв'язання. Опори амперметрів значно менші за опори резисторів і можна вважати $R_A \approx 0$. Беручи до уваги, що опори між точками 1 і 3, а також 2 і 4 приблизно дорівнюють 0, ці вузли доцільно з'єднати парами і накреслити нову розрахункову схему відносно затискачів 1 – 2 джерела

(рис. 2.14, а). Три паралельно з'єднані опори замінюємо одним еквівалентним (рис. 2.14, б).

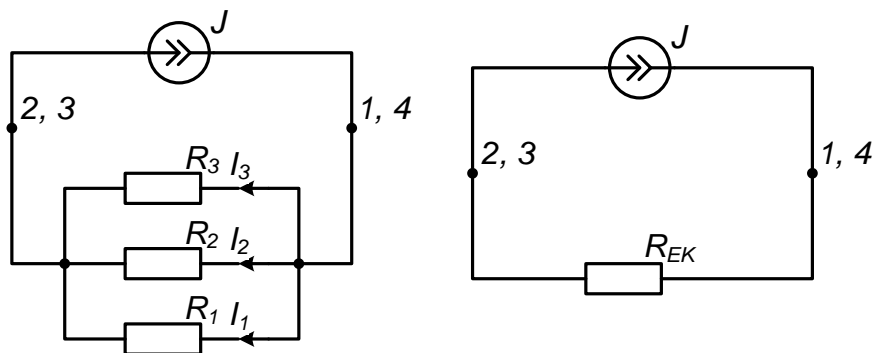


Рисунок 2.14

Спочатку обчислюємо провідність кожного резистора:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = 0,1 \text{ См}; G_2 = \frac{1}{R_2} = 0,04 \text{ См}; G_3 = \frac{1}{R_3} = 0,02 \text{ См};$$

потім еквівалентну провідність усіх резисторів:

$$G_{EK} = G_1 + G_2 + G_3 = 0,1 + 0,04 + 0,02 = 0,16 \text{ См};$$

і, нарешті, еквівалентний опір кола:

$$R_{EK} = \frac{1}{G_{EK}} = \frac{1}{0,16} = 6,25 \text{ Ом.}$$

За законом Ома визначаємо напругу на затискачах джерела (див. рис. 2.14, б):

$$U_{12} = R_{EK} \cdot J = 6,25 \cdot 3,2 = 20 \text{ В.}$$

і струми в резисторах (рис. 2.14, а):

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{20}{10} = 2 \text{ А}; I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{20}{25} = 0,8 \text{ А}; I_3 = \frac{U_{12}}{R_3} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ А.}$$

За першим законом Кірхгофа розраховуємо струми через амперметри:

$$I_{A1} = J - I_1 = 3,2 - 2 = 1,2 \text{ А}; I_{A2} = J - I_3 = 3,2 - 0,4 = 2,8 \text{ А.}$$

Задача 2.4 (рис. 2.15)

Відомо: $E = 30 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 80 \text{ Ом}$, R_3 – невідоме,
 $R_4 = 14 \text{ Ом}$.

Визначити показ амперметрів.

$E = 30 \text{ В}$; $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 80 \text{ Ом}$; R_3 – невідоме; $R_4 = 14 \text{ Ом}$.

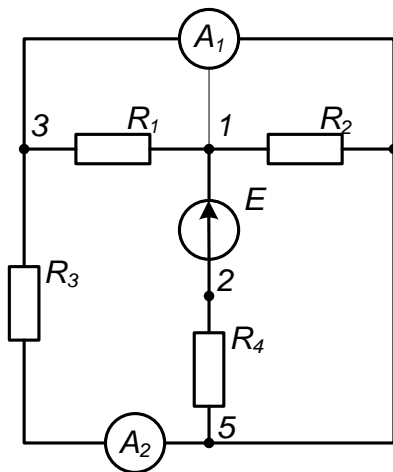


Рисунок 2.15

Розв'язання. Можна вважати, що опори амперметрів приблизно дорівнюють 0, тому точки 3, 4, 5 мають однаковий потенціал $\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5$ і їх доцільно з'єднати в один вузол. Беручи до уваги, що напруга на резисторі R_3 $U_{35} = \varphi_3 - \varphi_5 = 0$ і струм через R_3 не проходить,

гілку з резистором R_3 можна вилучити і накреслити

нову спрощену розрахункову схему відносно затискачів джерела (рис. 2.16).

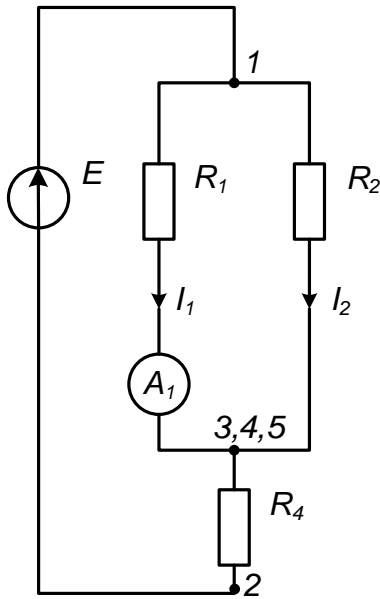


Рисунок 2.16

Обчислюємо еквівалентний опір кола:

$$R_{EK} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_4 = \frac{20 \cdot 80}{100} + 14 = 16 + 14 = 30 \text{ Ом.}$$

За законом Ома визначаємо струм джерела:

$$I = \frac{E}{R_{EK}} = \frac{30}{30} = 1 \text{ А.}$$

Користуючись формулою «чужого опору», розраховуємо струм через амперметр A_1 :

$$I_{A_1} = I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1 \cdot \frac{80}{20 + 80} = 0,8 \text{ А.}$$

Струм через амперметр A_2 відсутній, оскільки $U_{35} = 0$.

Задача 2.5 (рис. 2.17)

Відомо:

$$J = 12 \text{ А ; } R_1 = 30 \text{ Ом ; } R_2 = 60 \text{ Ом ; } R_3 = 40 \text{ Ом ;}$$

$$R_4 = 20 \text{ Ом ; } R_5 \text{ — невідоме .}$$

Визначити покази амперметрів.

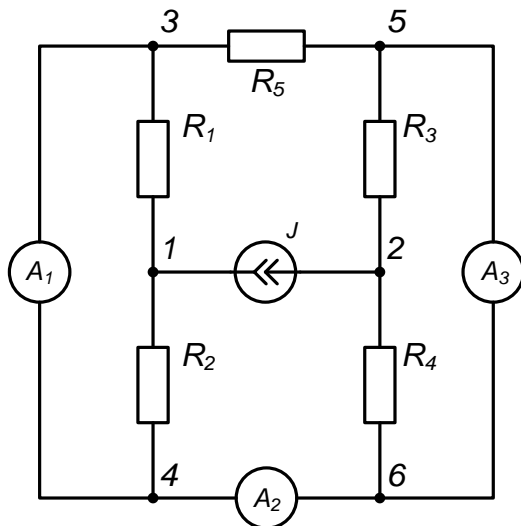
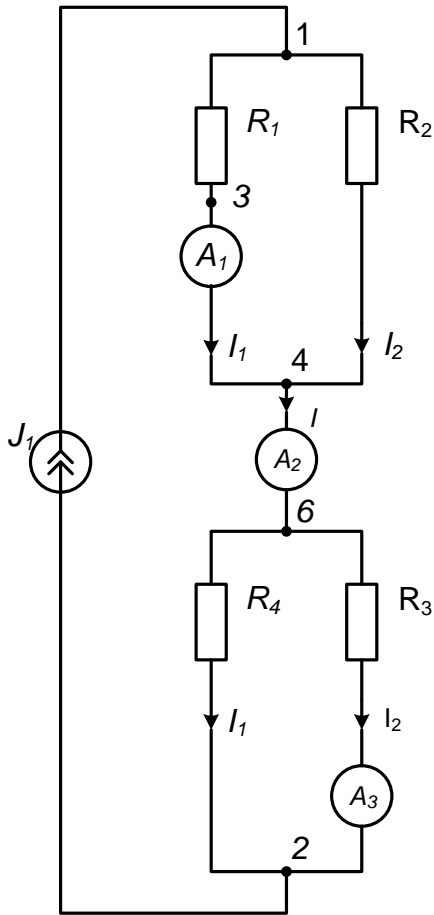


Рисунок 2.17

Розв'язання. Вважаємо, що опори амперметрів дорівнюють 0, звідки впливає $\varphi_3 \approx \varphi_4 \approx \varphi_6 \approx \varphi_5$. Напруга на резисторі R_5 $U_{35} = \varphi_3 - \varphi_5 = 0$ і він не бере участі у струморозподілі. Зважаючи на те, що струм через резистор R_5 не проходить, гілку з цим резистором можна вилучити і накреслити спрощену схему відносно затискачів 1–2 джерела (рис. 2.18).

Використовуючи формули «чужого опору», обчислюємо струми через амперметри.

Амперметр A_2 показує струм джерела:



$$I_{A_2} = 12 \text{ A};$$

$$I_{A_1} = I_1 = J \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{60}{90} = 8 \text{ A};$$

$$I_{A_3} = I_3 = J \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 12 \cdot \frac{20}{60} = 4 \text{ A}.$$

Задача 2.6 (рис. 2.19)

Відомо: $E = 120 \text{ В}$; при вимкненому ключі амперметр показує 10 А , при ввімкненому – 12 А . Значення опорів не дано.

Визначити: опір резистора R_1 .

Розв'язання. Задача легко вирішується порівнянням двох схем: при ввімкненому ключі (рис. 2.20, а) і при вимкненому ключі (рис. 2.20, б).

Рисунок 2.19

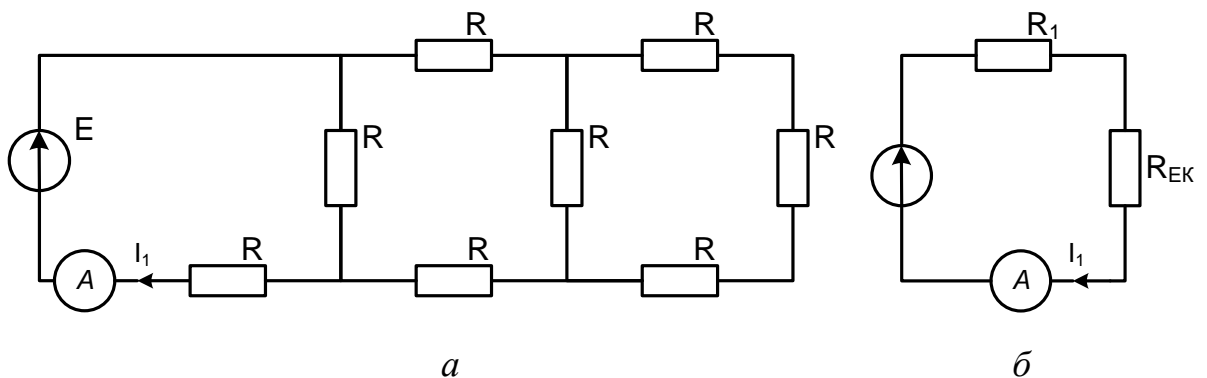


Рисунок 2.20

Згідно з рис. 2.20, а:

$$R_{\text{ек}} = \frac{E}{I_1} = 10 \text{ Ом};$$

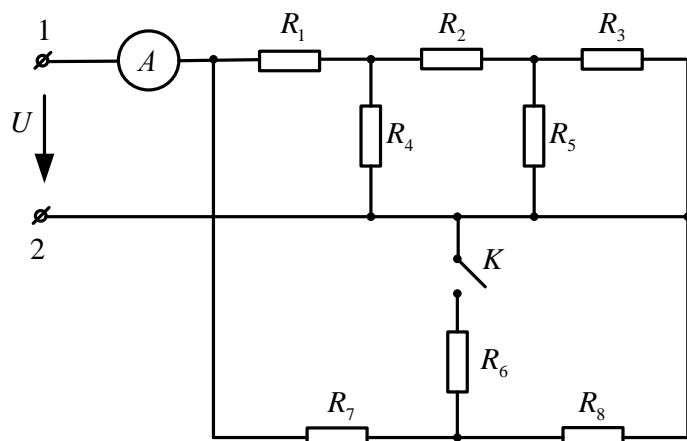
згідно з рис. 2.20, б:

$$R_{\text{ЕК}} + R_1 = \frac{E}{I_2} = 12 \text{ Ом.}$$

Отже,

$$R_1 = 12 - R_{\text{ЕК}} = 12 \text{ Ом.}$$

Задача 2.7 (рис. 2.21)



Відомо:

$$R_1 = 18 \text{ Ом, } R_2 = 30 \text{ Ом,}$$

$$R_3 = 60 \text{ Ом, } R_4 = 30 \text{ Ом,}$$

$$R_5 = 20 \text{ Ом, } R_6 = 10 \text{ Ом,}$$

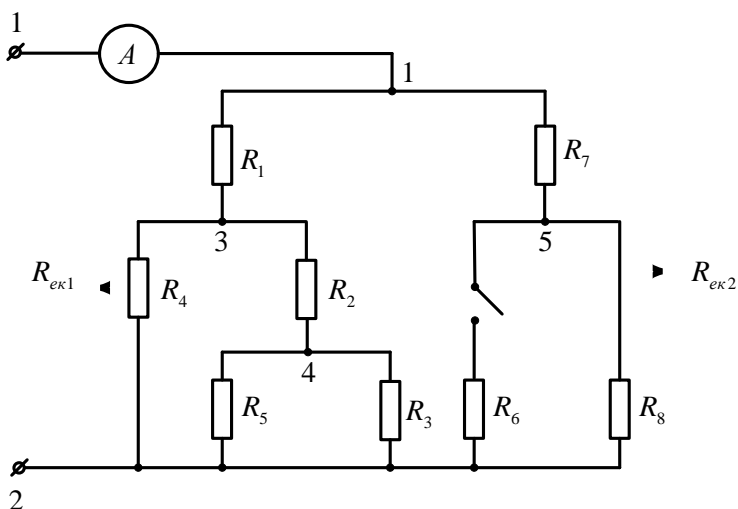
$$R_7 = 16 \text{ Ом, } R_8 = 40 \text{ Ом.}$$

При замкненому ключі амперметр показує 2,5 А.

Рисунок 2.21

Визначити: показ амперметру при розімкненому ключі за незмінної напруги на вході кола.

Розв'язання. Для зручності розрахунку еквівалентного опору кола R_{12} доцільно задану схему накреслити у вигляді, показаному на рис. 2.22.



Розраховуємо еквівалентний опір лівої частини кола

$$R_{42} = \frac{R_3 * R_5}{R_3 + R_5} = 10 \text{ Ом;}$$

$$R_{32} = \frac{R_4 (R_2 + R_{42})}{R_4 + R_2 + R_{42}} = 180 \text{ Ом;}$$

$$R_{\text{ЕК}} = R_1 + R_{32} = 36 \text{ Ом.}$$

Рисунок 2.22

Розраховуємо еквівалентний опір правої частини кола R_{EK2} при замкненому ключі:

$$R_{52} = \frac{R_6 \cdot R_8}{R_6 + R_8} = 8 \text{ Ом}; \quad R_{EK2} = R_7 + R_{52} = 24 \text{ Ом}.$$

Знаходимо еквівалентний опір кола відносно вхідних затискачів R_{12} при замкненому ключі:

$$R_{12} = \frac{R_{EK1} \cdot R_{EK2}}{R_{EK1} + R_{EK2}} = 14,4 \text{ Ом}.$$

За законом Ома визначаємо вхідну напругу:

$$U = R_{12} \cdot I = 36 \text{ В}.$$

При розімкненому ключі еквівалентний опір лівої частини залишається таким самим, а опір правої частини змінюється, оскільки резистор R_6 виключений з кола (див. рис. 2.22):

$$R'_{EK2} = R_7 + R_8 = 56 \text{ Ом}.$$

Відповідно змінюється вхідний опір кола:

$$R'_{12} = \frac{R_{EK1} \cdot R'_{EK2}}{R_{EK1} + R'_{EK2}} = 21,9 \text{ Ом}.$$

Показ амперметра при розімкненому ключі:

$$I'_A = \frac{U}{R'_{12}} = 1,64 \text{ А}.$$

Можна знайти цей струм інакше, скориставшись зворотною залежністю між струмом і опором. Оскільки при розімкненому ключі опір кола збільшився у $21,9/14,4 = 1,52$ рази, то струм у 1,52 рази зменшився: $2,5/1,52 = 1,64 \text{ А}$.

Тоді значення вхідної напруги не потрібне.

Задача 2.8 (рис.2.23)

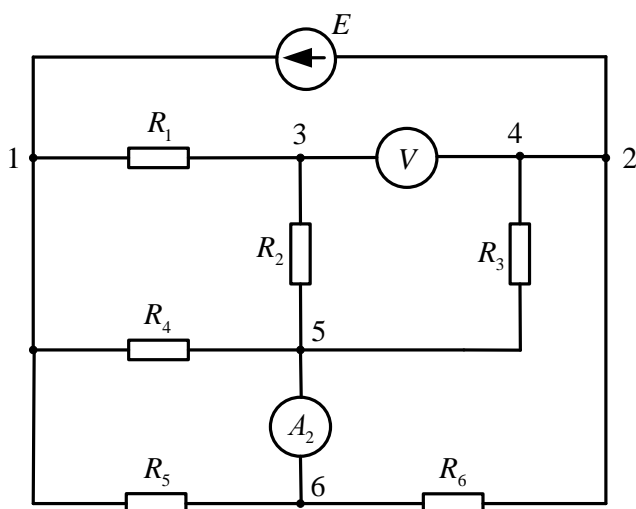


Рисунок 2.23

Відомо: $E = 300 \text{ В}$, $R_1 = 40 \text{ Ом}$,
 $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$,
 $R_4 = 30 \text{ Ом}$, $R_5 = 5 \text{ Ом}$,
 $R_6 = 80 \text{ Ом}$.

Визначити: струм і покази приладів.

Розв'язання. Враховуємо, що опір вважається нескінченно великим, отже між точками 3 – 4 розрив;

опір амперметра нехтовно малий, тому точки 5 і 6 можна об'єднати в одну; точки 4 і 2 з'єднує провід і їх також можна об'єднати. Тоді схема набуває вигляду, показаного на рис. 2.24.

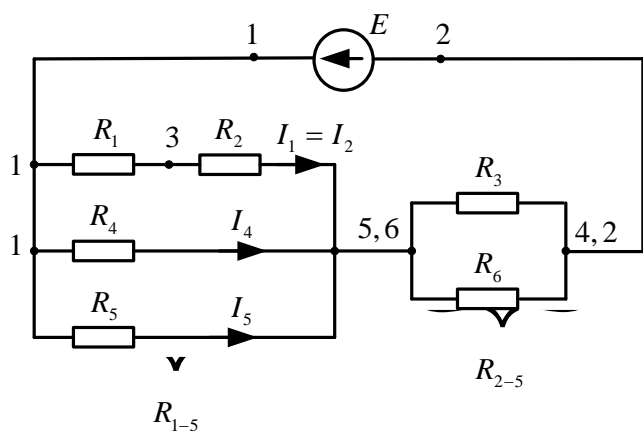


Рисунок 2.24

Розраховуємо еквівалентні опори на окремих ділянках кола між точками 1 – 5 і між точками 5 – 2, а тоді повний опір кола:

$$G_{12} = \frac{1}{R_1 + R_2} = 0,017 \text{ См};$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = 0,033 \text{ См};$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = 0,2 \text{ См}; \quad G_{15} = G_{12} + G_4 + G_5 = 0,25 \text{ См};$$

$$R_{15} = \frac{1}{G_{15}} = 4 \text{ Ом}; \quad R_{52} = \frac{R_3 \cdot R_6}{R_3 + R_6} = 16 \text{ Ом}; \quad R_{\text{ЕК}} = R_{15} + R_{52} = 20 \text{ Ом}.$$

За законом Ома обчислюємо вхідний струм у кожному резисторі:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ЕК}}} = 15 \text{ А}; \quad U_{15} = I \cdot R_{15} = 60 \text{ В}; \quad U_{52} = I \cdot R_{52} = 240 \text{ В};$$

$$I_1 = I_2 = \frac{U_{15}}{(R_1 + R_2)} = 1 \text{ A}; \quad I_3 = \frac{U_{52}}{R_3} = 12 \text{ A}; \quad I_4 = \frac{U_{15}}{R_4} = 2 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{U_{15}}{R_5} = 12 \text{ A}; \quad I_6 = \frac{U_{52}}{R_6} = 3 \text{ A}.$$

За першим законом Кірхгофа визначаємо показ амперметра (дивись вихідну схему):

$$I_A = I_5 - I_6 = 9 \text{ A}.$$

Знаходимо показ вольтметра, тобто напруги між точками 3 і 4 (2):

$$U_{34} = E - R_1 I_1 = 260 \text{ В},$$

або

$$U_{34} = I_3 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2 = 260 \text{ В}.$$

Задача 2.9 (рис.2.25)

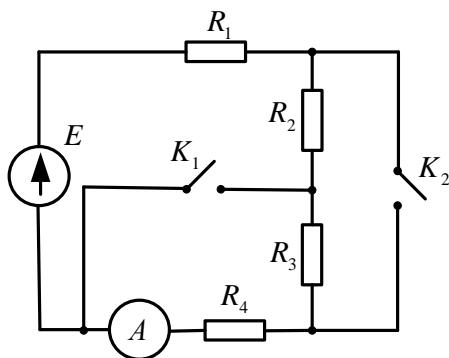


Рисунок 2.25

Відомо:

$$R_1 = 30 \text{ Ом}, \quad R_2 = 20 \text{ Ом}, \quad R_3 = 60 \text{ Ом}, \quad R_4 = 30 \text{ Ом}.$$

Потужність, яку споживає резистор R_4 при замкнених ключах K_1, K_2 , $P_4 = 30 \text{ Вт}$.

Визначити: E і показ амперметра при розімкнених ключах.

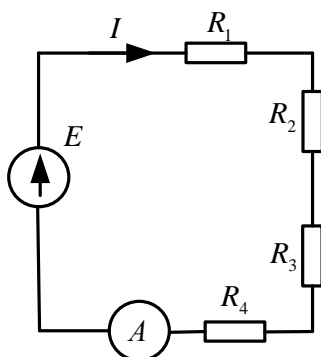


Рисунок 2.26

Розв'язання. При розімкнених ключах у схемі тільки один контур (рис.2.26), тому через усі резистори проходить один і той самий струм I , який можна розрахувати за законом Ома для одно контурного кола:

$$I_A = I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{E}{140} \text{ А}.$$

Для визначення E розглядаємо схему при замкнених ключах, яку зручно представити у вигляді, показаному на рис. 2.27.

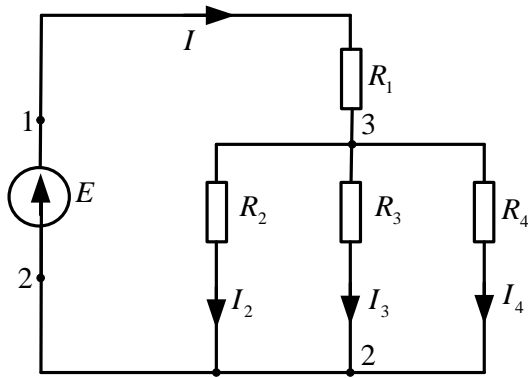


Рисунок 2.27

Оскільки потужність резистора R_4 при замкнених ключах відома, обчислюємо струм I_4 :

$$I_4 = \sqrt{P_4/R_4}; I_4 = \sqrt{P_4/R_4} = 1 \text{ A.}$$

Тоді за законом Ома:

$$U_{32} = R_4 \cdot I_4 = 30 \text{ В;}$$

$$I_2 = U_{32}/R_3 = 0,5 \text{ A;}$$

за першим законом Кірхгофа:

$$I = I_2 + I_3 + I_4 = 3 \text{ A;}$$

за другим законом Кірхгофа:

$$E = I \cdot R_1 + U_{23} = 120 \text{ В.}$$

Повертаємось до схеми з розімкненими ключами:

$$I_A = I = \frac{E}{140} = \frac{120}{140} = 0,86 \text{ A.}$$

Задача 2.10 (рис. 2.28)

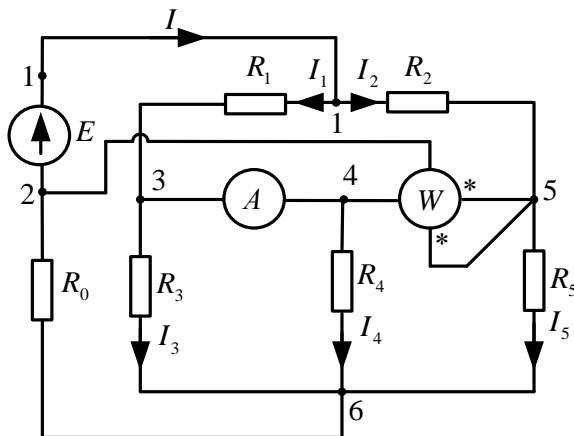


Рисунок 2.28

Відомо:

$$E = 180 \text{ В, } R_0 = 10 \text{ Ом, } R_1 = 20 \text{ Ом,}$$

$$R_2 = 30 \text{ Ом, } R_3 = 30 \text{ Ом,}$$

$$R_4 = 15 \text{ Ом, } R_5 = 40 \text{ Ом.}$$

Визначити: усі струми і покази приладів.

Розв'язання. Нехтуємо опорами з'єднувальних проводів амперметра і

струмової обмотки ватметра, тоді схему можна представити у вигляді, показаному на рис.2.29, а, б.

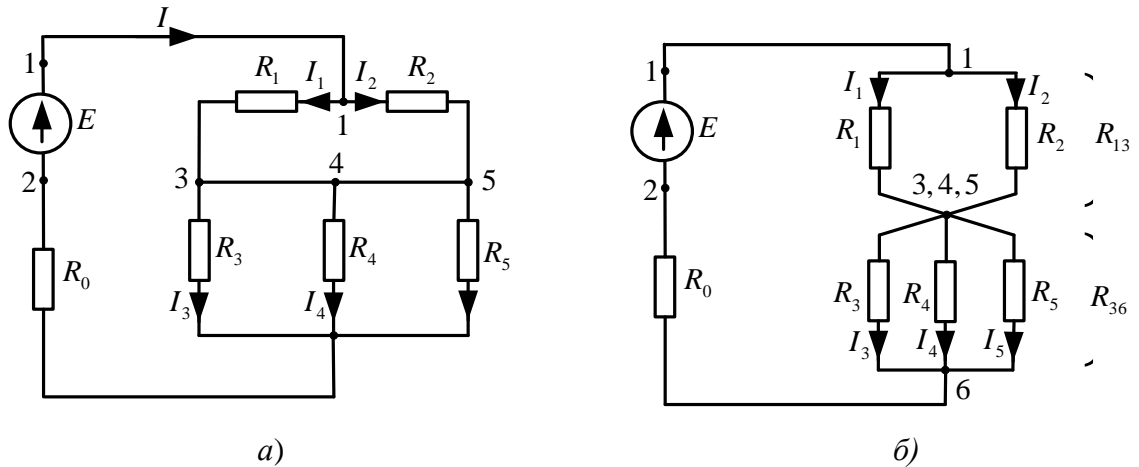


Рисунок 2.29

Обчислюємо еквівалентні опори на ділянках 1 – 3 і 3 – 6:

$$R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 120 \text{ Ом}; \quad G_3 = \frac{1}{R_3} = 0,033 \text{ См}; \quad R_4 = \frac{1}{R_4} = 0,067 \text{ Ом};$$

$$R_5 = \frac{1}{R_5} = 0,025 \text{ Ом}; \quad G_{36} = G_3 + G_4 + G_5 = 0,125 \text{ См}; \quad R_{36} = \frac{1}{G_{36}} = 8 \text{ Ом}.$$

Знаходимо вхідний струм і напруги U_{13} , U_{36} на ділянках кола:

$$I = \frac{E}{R_0 + R_{13} + R_{36}} = 6 \text{ А};$$

$$U_{13} = I \cdot R_{13} = 72 \text{ В}, \quad U_{36} = I \cdot R_{36} = 48 \text{ В}.$$

За законом Ома розраховуємо струм у резисторах:

$$I_1 = \frac{U_{13}}{R_1} = 3,6 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U_{13}}{R_2} = 2,4 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{36}}{R_3} = 1,6 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{U_{36}}{R_4} = 3,2 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{U_{36}}{R_5} = 1,2 \text{ А}.$$

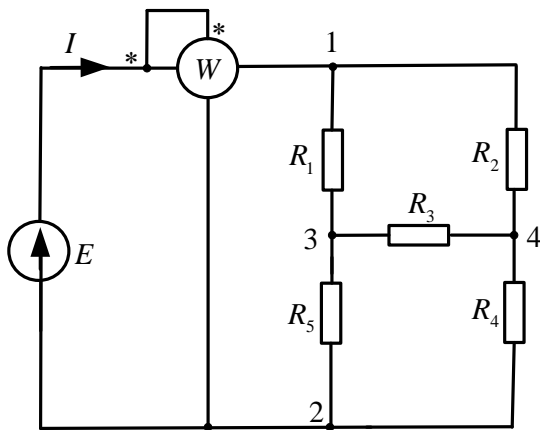
За першим законом Кірхгофа обчислюємо струм через амперметр і через струмову обмотку ватметру:

$$I_A = I_1 - I_3 = 2 \text{ А}; \quad I_W = I_2 - I_5 = 1,2 \text{ А}.$$

Визначаємо показ ватметру:

$$P = U_W \cdot I_W = U_{52} \cdot I_W = (E - R_2 \cdot I_2) \cdot 1,2 = 130 \text{ Вт}.$$

Задача 2.11 (рис. 2.30).



Відомо:

$$E = 30 \text{ В}, R_1 = 180 \text{ Ом}, R_2 = 60 \text{ Ом}, \\ R_3 = 120 \text{ Ом}, R_4 = 120 \text{ Ом}, R_5 = 80 \text{ Ом}.$$

Визначити: показ ватметра P_W .

Розв'язання. Показ ватметра визначається за формулою:

$$P_W = U_W \cdot I_W.$$

Рисунок 2.30

Обмотка напруги приладу підключена до ЕРС

джерела, через обмотку струму проходить вхідний струм I , тому $P_W = E \cdot I$. Отже, слід розрахувати значення струму I на вході кола. Існує 2 варіанти розрахунку.

Варіант 1. Задану схему можна розглядати як сукупність двох трикутників: верхній трикутник утворений резисторами $R_1 - R_2 - R_3$ нижній – резисторами $R_3 - R_4 - R_5$. Будь-який з них можна перетворити на еквівалентну зірку. Вибираємо нижній. Сторони трикутника $R_3 - R_4 - R_5$ підключені до вузлів 3, 4, 2, тому промені еквівалентної зірки R_6, R_7, R_8 , також мають бути підключені до вузлів 3, 4, 2 (рис. 2.31).

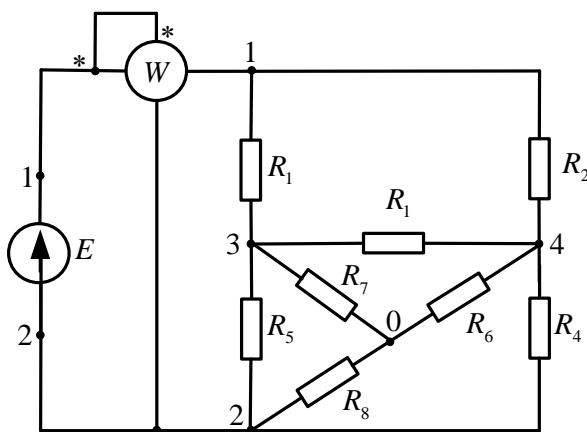


Рисунок 2.31

Розраховуємо опори еквівалентної зірки:

$$R_6 = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = 45 \text{ Ом};$$

$$R_7 = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 30 \text{ Ом};$$

$$R_8 = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 30 \text{ Ом}.$$

Після вилучення зі схеми на рис.2.31 резисторів трикутника R_3, R_4, R_5 , вона набуває вигляду, показаного на рис. 2.32.

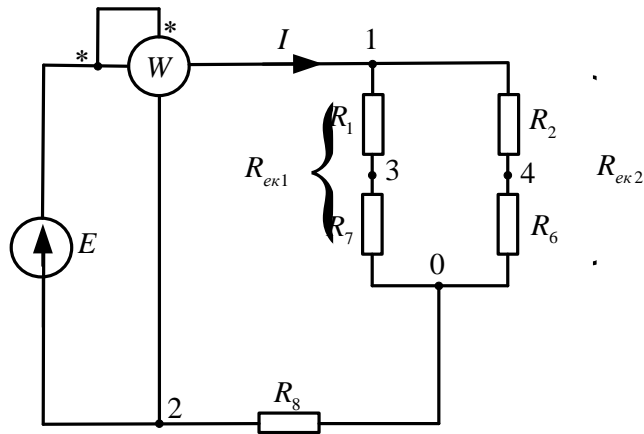


Рисунок 2.32

Визначаємо еквівалентний опір

кола R_{12} :

$$R_{EK1} = R_1 + R_7 = 210 \text{ Ом};$$

$$R_{EK2} = R_2 + R_6 = 105 \text{ Ом};$$

$$R_{EK3} = \frac{R_{EK1} \cdot R_{EK2}}{R_{EK1} + R_{EK2}} = 70 \text{ Ом};$$

$$R_{12} = R_{EK3} + R_8 = 100 \text{ Ом}.$$

Розраховуємо вхідний струм та показ ватметра:

$$I = \frac{E}{R_{12}} = 0,3 \text{ А}; P_W = E \cdot I = 9 \text{ Вт}.$$

Варіант 2. Задану схему на рис. 2.30 можна розглядати як сукупність двох зірок: ліва зірка утворена резисторами R_1, R_3, R_5 , права – резисторами R_2, R_3, R_4 .

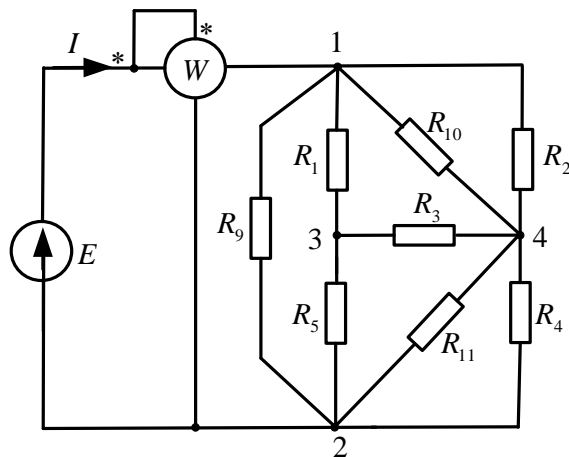


Рисунок 2.33

Перетворимо ліву зірку на трикутник.

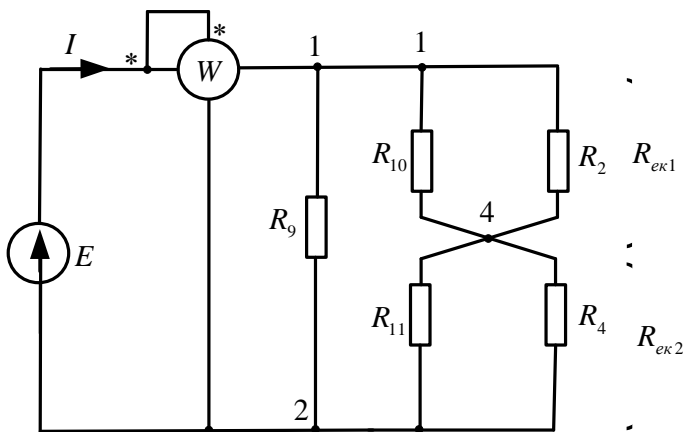
Оскільки промені лівої зірки R_1, R_3, R_5 підключені до вузлів 1, 4, 2, то сторони R_9, R_{10}, R_{11} еквівалентного трикутника також мають бути підключені до вузлів 1, 4, 2 (рис. 2.33).

Розраховуємо опори еквівалентного трикутника:

$$R_9 = R_1 + R_5 + \frac{R_1 \cdot R_5}{R_3} = 380 \text{ Ом};$$

$$R_{10} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_5} = 570 \text{ Ом};$$

$$R_{11} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 \cdot R_5}{R_1} = 253 \text{ Ом.}$$



Після вилучення із схеми опорів R_1, R_3, R_5 перетвореної зірки схема набуває вигляду на рис. 2.34.

Визначаємо еквівалентний опір кола:

$$R_{EK1} = \frac{R_2 \cdot R_{10}}{R_2 + R_{10}} = 54,3 \text{ Ом;}$$

Рисунок 2.34

$$R_{EK2} = \frac{R_4 \cdot R_{11}}{R_4 + R_{11}} = 81,4 \text{ Ом;}$$

$$R_{EK3} = R_{EK1} + R_{EK2} = 135,7 \text{ Ом;}$$

$$R_{EK4} = \frac{R_{EK3} \cdot R_9}{R_{EK3} + R_9} = 100 \text{ Ом.}$$

Обчислюємо вхідний струм I та показ ватметра:

$$I = \frac{E}{R_{12}} = 0,3 \text{ А; } P_W = E \cdot I = 9 \text{ Вт.}$$

Отримані такі самі результати, як у першому варіанті розрахунку.

Задача 2.12 (рис. 2.35).

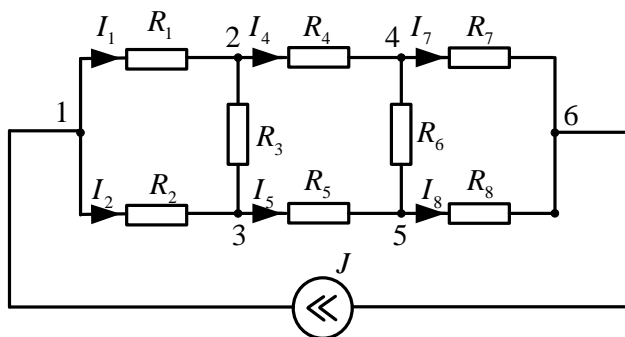


Рисунок 2.35

Відомо:

$$R_1 = 30 \text{ Ом, } R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом,}$$

$$R_4 = 26 \text{ Ом, } R_5 = 12 \text{ Ом,}$$

$$R_6 = 10 \text{ Ом; } R_7 = 40 \text{ Ом;}$$

$$R_8 = 50 \text{ Ом; } J = 3 \text{ А.}$$

Визначити: напругу на вході кола і усі струми.

Розв'язання. Для визначення еквівалентного опору кола відносно точок 1, 6 замінюємо трикутники опорів між вузлами 1 – 2 – 3 і вузлами 4 – 5 – 6 – на еквівалентні зірки (рис. 2.36). У перетвореній схемі з'являються нові вузли 7, 8; струми I_4, I_5 зберігають своє значення, оскільки ділянки кола між вузлами 2 – 4 і 3 – 5 не піддавалися перетворенню.

Опори променів еквівалентної зірки між вузлами 1 – 2 – 3:

$$R_{10} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{20} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{30} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \text{ Ом}.$$

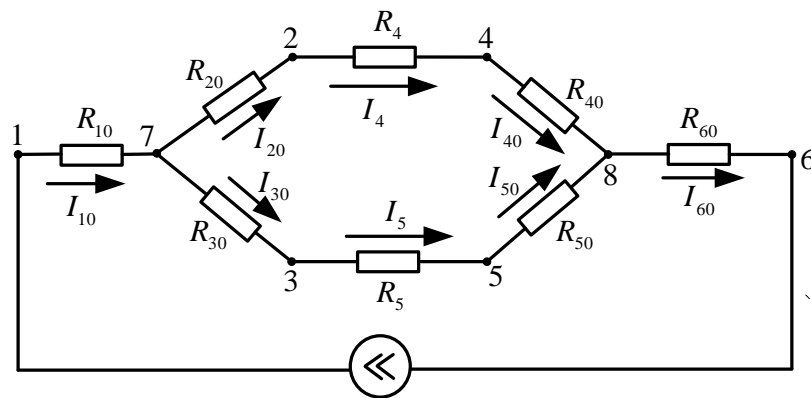


Рисунок 2.36

Опори променів еквівалентної зірки між вузлами 4 – 5 – 6:

$$R_{40} = \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7 + R_8} = 4 \text{ Ом}; \quad R_{50} = \frac{R_6 \cdot R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = 5 \text{ Ом};$$

$$R_{60} = \frac{R_7 \cdot R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = 20 \text{ Ом}.$$

Опори паралельних гілок:

$$R_{EK1} = R_{20} + R_4 + R_{40} = 36 \text{ Ом};$$

$$R_{EK2} = R_{30} + R_5 + R_{50} = 18 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір кола:

$$R_{16} = R_{10} + \frac{R_{EK1} \cdot R_{EK2}}{R_{EK1} + R_{EK2}} + R_{60} = 38 \text{ Ом.}$$

Вхідна напруга:

$$U_{16} = R_{16}J = 114 \text{ В.}$$

Струми у перетвореному колі:

$$I_{10} = J = 3 \text{ А}; I_{20} = I_4 = I_{40} = J \frac{R_{EK2}}{R_{EK1} + R_{EK2}} = 1 \text{ А};$$

$$I_{30} = I_5 = I_{50} = J \frac{R_{EK1}}{R_{EK1} + R_{EK2}} = 2 \text{ А}; I_{60} = J = 3 \text{ А.}$$

Струми у гілках вихідної схеми:

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{R_{10}I_{10} + R_{20}I_{20}}{R_1} = 0,8 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{13}}{R_2} = \frac{R_{10}I_{10} + R_{30}I_{30}}{R_2} = \frac{22}{10} = 2,2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{32}}{R_3} = \frac{R_{20}I_{20} - R_{30}I_{30}}{R_3} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ А};$$

$$I_4 = 1 \text{ А}; I_5 = 2 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{U_{54}}{R_6} = \frac{R_{50}I_{50} - R_{40}I_{40}}{R_6} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ А};$$

$$I_7 = \frac{U_{46}}{R_7} = \frac{R_{40}I_{40} + R_{60}I_{60}}{R_7} = \frac{64}{40} = 1,6 \text{ А};$$

$$I_8 = \frac{U_{56}}{R_8} = \frac{R_{50}I_{50} + R_{60}I_{60}}{R_8} = \frac{70}{50} = 1,4 \text{ А.}$$

3. РОЗРАХУНОК СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

До складних електричних кіл належать розгалужені кола, що мають більше одного джерела енергії. Розраховують їх, використовуючи закони Кірхгофа або спеціальні методи розрахунку, з яких найбільш поширені:

- метод контурних струмів;
- метод вузлових потенціалів;
- метод вузлової напруги;
- метод накладання (суперпозиції);
- метод еквівалентного генератора;
- методи перетворень активних гілок.

3.1. Метод рівнянь Кірхгофа

Алгоритм розрахунку

За цим алгоритмом можна розрахувати різні електричні величини: струми, ЕРС, напруги, опори.

1. Обчислити кількість гілок, вузлів та незалежних контурів у заданій схемі.

2. Визначити загальну кількість рівнянь, які потрібно скласти за законами Кірхгофа для розв'язання задачі.

Слід пам'ятати: загальна кількість рівнянь має бути такою, як число невідомих величин у колі, незалежно від того, які з них підлягають визначенню.

3. Довільно вибрати додатній напрямок невідомих величин (струмів, ЕРС). Їх індекс доцільно узгоджувати з індексом елементів гілки.

Скласти $n - 1$ незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа.

Слід пам'ятати: складати рівняння для усіх n вузлів не можна, оскільки вони будуть залежними, що призведе до неможливості розв'язання системи складних рівнянь.

4. Записати рівняння за другим законом Кірхгофа, кількість яких визначається за формулою: $m - n + 1$, якщо у колі немає джерел з відомими струмами; або $(m - n + 1) - k$, якщо у колі є k джерел з відомими струмами.

При складанні таких рівнянь доцільно подумки вилучити зі схеми джерело струму і скористатися незалежними контурами (комірками), які залишаються у схемі.

5. Перевірити, чи задовольняє складена система рівнянь умові пункту 2, розв'язати і знайти величина, вказані у задачі.

Слід пам'ятати:

- деякі величини (струми, ЕРС) можуть визначитися зі знаком « \leftarrow », це означає, що їх дійсний напрямок протилежний довільно вибраному і не є помилкою;
- в таких випадках для запобігання помилок краще на вихідній схемі нічого не міняти і надалі використовувати числові значення величин з отриманим знаком;
- опір резистора, визначений зі знаком « \leftarrow » означає помилку в розрахунках.

Задача 3.1 (рис. 3.1)

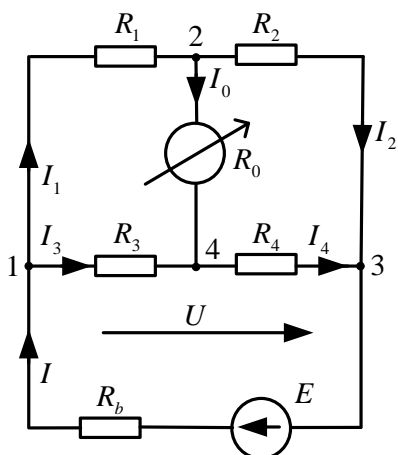


Рисунок 3.2

Використавши закони Кірхгофа, записати вираз струму I_0 через гальванометр і визначити співвідношення між опорами, за якого $I_0 = 0$ у двох випадках:

- 1) коло живиться від джерела напруги U з відомими E і внутрішнім опором R_b (рис. 3.1);
- 2) коло живиться від джерела з відомим струмом J (рис. 3.2).

Розв'язання.

Випадок 1 (рис. 3.1).

Дотримуємося вищенаведеного алгоритму.

1. Обчислюємо кількість гілок, вузлів, незалежних контурів – 3.

2. Визначаємо кількість рівнянь, які потрібно скласти: у колі 6 гілок з невідомими струмами, отже для розв'язання необхідно мати 5 рівнянь.

3. Довільно задаємо додатні напрями струмів (рис.3.1) і складаємо рівняння за першим законом. З чотирьох вузлів довільно вибираємо три:

$$\text{вузол 1: } I_1 + I_3 - I = 0; \quad (3.1)$$

$$\text{вузол 2: } I_2 + I_0 - I_1 = 0; \quad (3.2)$$

$$\text{вузол 3: } I - I_2 - I_4 = 0; \quad (3.3)$$

4. Складаємо рівняння за другим законом кількістю

$$m - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

для незалежних контурів (комірок), обходячи їх за годинниковою стрілкою (рис.3.1):

$$\text{контур 1 - 2 - 4 - 1: } R_1 I_1 + R_0 I_0 - R_3 I_3 = 0; \quad (3.4)$$

$$\text{контур 2 - 3 - 4 - 2: } R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_0 I_0 = 0; \quad (3.5)$$

$$\text{контур 1 - 4 - 3 - 1: } R_3 I_3 + R_4 I_4 = E - R_B I = U; \quad (3.6)$$

5. Розв'язуємо складену систему рівнянь і отримуємо вираз струму через гальванометр:

$$I_0 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) U}{R_0 (R_1 + R_2) (R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}$$

звідки випливає, що $I_0 = 0$ за умови $R_2 R_3 = R_1 R_4$.

Випадок 2 (рис. 3.2).

1. Кількість гілок і вузлів не змінилася: $m = 6, n = 4$.

2. У схемі, так само, як у випадку 1, проходять 6 струмів, але вхідний струм J вже відомий, тому потрібно скласти не 6, а 5 рівнянь.

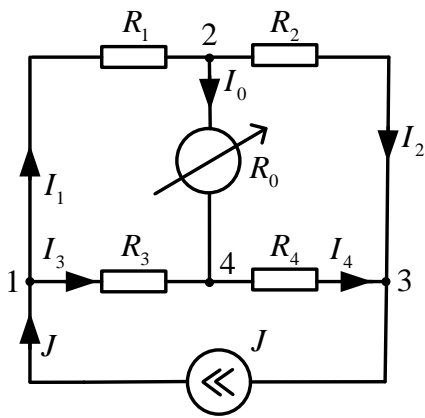


Рисунок 3.2

3. Кількість рівнянь за першим законом $n - 1 = 4 - 1 = 3$ залишається незмінною і доцільно скористатися (3.1) – (3.3).

4. Кількість рівнянь за другим законом зменшилася $(m - n + 1) - 1 = 2$ рівняння. З трьох рівнянь, складених для випадку 1, нам потрібні (3.4) і (3.5).

5. Розраховуємо систему рівнянь і знаходимо вираз струмів:

$$I_0 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) J}{R_0 (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

Як видно з отриманого виразу, $I_0 = 0$ за умови $R_2 R_3 = R_1 R_4$.

Висновок: умова $I_0 = 0$ забезпечується співвідношенням опорів $R_2 R_3 = R_1 R_4$ і не залежить від виду джерела живлення.

Задача 3.2 (рис. 3.3)

Скласти рівняння для визначення струмів у гілках кола.

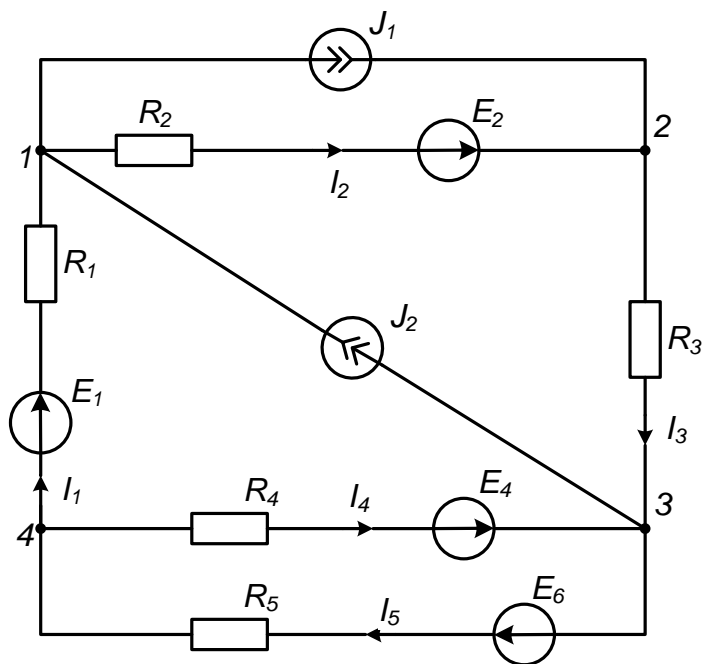


Рисунок 3.3

Розв'язання:

1. Аналізуючи схему, підраховуємо кількість гілок ($m = 7$) і вузлів ($n = 4$).
2. Беручи до уваги наявність двох гілок з відомими струмами J_1 і J_2 визначаємо, що для обчислення струмів в інших гілках треба скласти 5 незалежних рівнянь.

3. Довільно вибираємо додатний напрямок струмів I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 , як показано на рис. 3.3, і складаємо $n - 1 = 4 - 1 = 3$ рівняння за першим законом Кірхгофа:

$$\text{вузол 1: } -I_1 + I_2 + J_1 - J_2 = 0;$$

$$\text{вузол 2: } -I_2 + I_3 + J_1 = 0;$$

$$\text{вузол 3: } -I_3 - I_4 + I_5 + J_2 = 0.$$

4. Складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа. Оскільки у схемі 2 відомих джерела струму ($k = 2$), то кількість таких рівнянь визначаємо за формулою $(m - n + 1) - k = (7 - 4 + 1) - 2 = 2$. Для запобігання помилок при складанні цих рівнянь вилучаємо із схеми джерела струму (рис. 3.4) і використовуємо незалежні контури (комірки), які залишилися у схемі, обходячи їх за ходом годинникової стрілки.

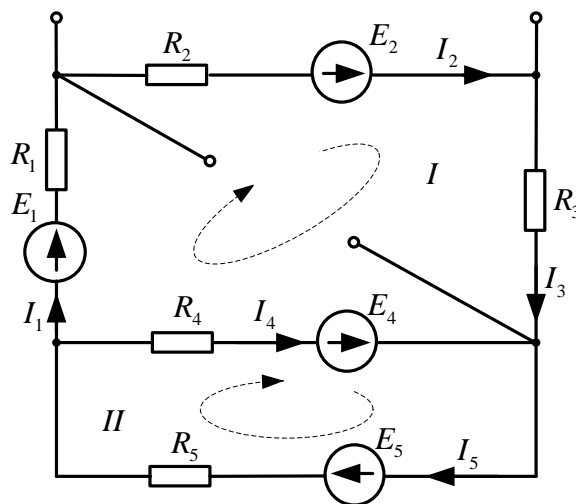


Рисунок 3.4

$$\text{I контур: } E_1 + E_2 - E_4 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4;$$

$$\text{II контур: } E_4 + E_5 = R_4 I_4 + R_5 I_5.$$

Задача 3.3 (рис. 3.5).

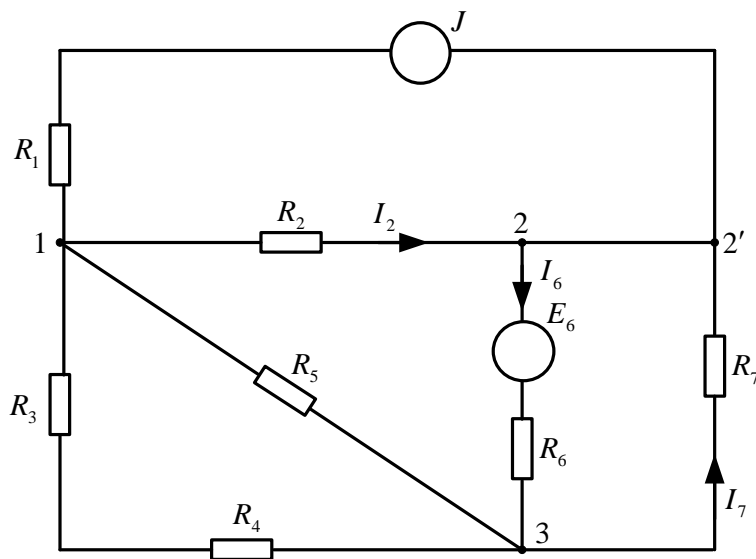


Рисунок 3.5

Відомо: $R_1 = 10 \text{ Ом}$,
 $R_3 = R_4 = R_5 = 30 \text{ Ом}$,
 $R_6 = 100 \text{ Ом}$, $R_7 = 40 \text{ Ом}$,
 $I_2 = 5 \text{ А}$, $I_6 = 1 \text{ А}$, $I_7 = 2 \text{ А}$.
 Визначити: J , E_6 , R_2 , I_3 , I_5 .

Розв'язання.

1. Обчислюємо кількість гілок $m = 6$ і число вузлів $n = 3$, беручи до уваги, що

точки 2 і 2' рівно-потенціальні,

тому їх можна вважати за один вузол 2.

2. Визначаємо загальну кількість рівнянь, потрібну для розв'язання: у схемі 5 невідомих величин, тому слід скласти 5 рівнянь.

3. Довільно вибираємо напрямки невідомих J , E_6 , R_2 , I_3 , I_5 (рис. 3.6) і складаємо $n - 1 = 3 - 1 = 2$ рівняння за першим законом:

$$\text{вузол 1: } -J + I_2 + I_3 + I_5 = 0; \quad (3.7)$$

$$\text{вузол 2: } J - I_2 + I_6 - I_7 = 0. \quad (3.8)$$

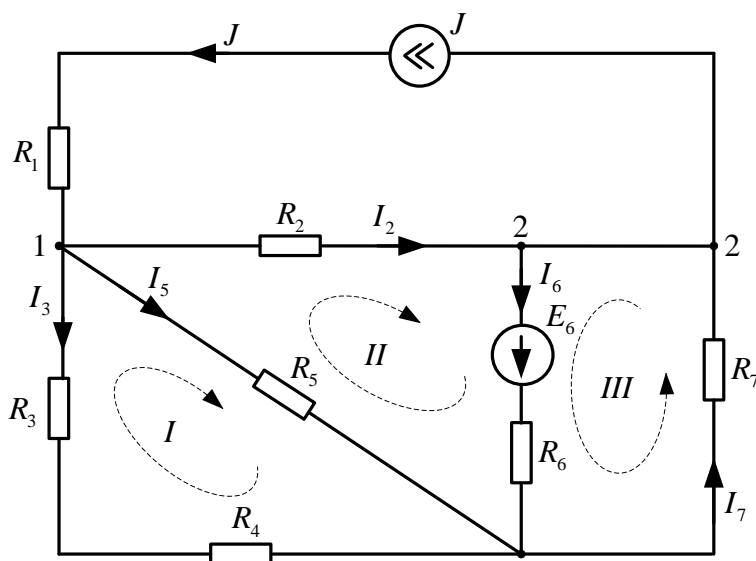


Рисунок 3.6

4. Складаємо 3 рівняння за другим законом Кірхгофа, для незалежних контурів I, II, III, обхід яких показано на рис. 3.6.

$$\text{I контур: } R_5 I_5 - (R_3 + R_4) I_3 = 0; \quad (3.9)$$

$$\text{II контур: } E_6 = I_6 I_6 - R_5 I_5 + R_2 I_2; \quad (3.10)$$

$$\text{III контур: } E_6 = R_6 I_6 + R_7 I_7.$$

(3.11)

5. Розв'язуємо систему рівнянь (3.7) – (3.11):

$$\text{з (3.8): } J = I_2 - I_6 + I_7 = 6 \text{ А};$$

$$\text{з (3.11): } E_6 = 180 \text{ В};$$

$$\text{з (3.7) та (3.9): } I_3 = 0,33 \text{ А}; \quad I_5 = 0,66 \text{ А};$$

з (3.10):

$$R_2 = \frac{E_6 - R_6 I_6 + R_5 I_5}{I_2} = 20 \text{ Ом.}$$

Перевіряємо розрахунки за балансом потужностей:

$$E_6 I_6 + (R_2 I_2 + R_1 J) = R_1 J^2 + R_2 I_2^2 + (R_3 + R_4) I_3^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 + R_7 I_7^2, \\ 1140 = 1140 \text{ Вт.}$$

Задача 3.4 (рис.3.7)

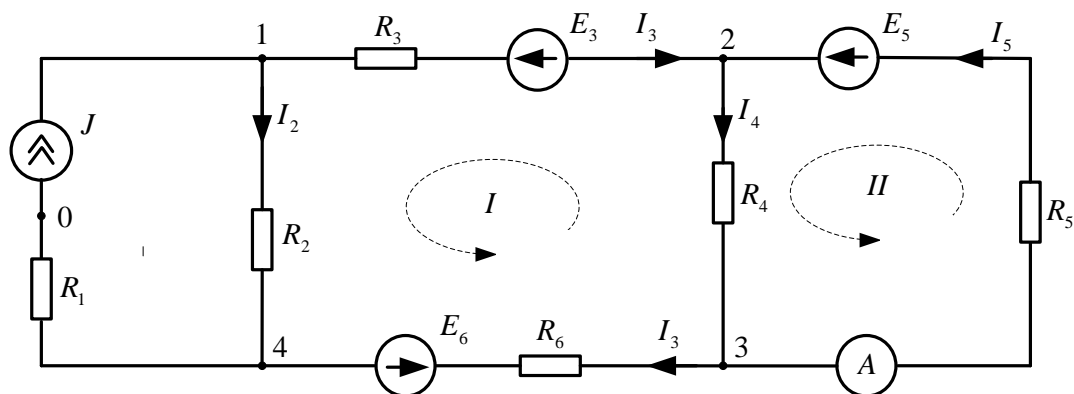


Рисунок 3.7

Відомо: $R_2 = 60 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$, $R_5 = 60 \text{ Ом}$, $R_6 = 30 \text{ Ом}$,
 $E_3 = 50 \text{ В}$, $E_5 = 80 \text{ В}$, $E_6 = 10 \text{ В}$.

Потужність джерела струму $P_j = 531 \text{ Вт}$. Амперметр показує $0,8 \text{ А}$.

Визначити: J, R_1 .

Розв'язання:

1. Обчислюємо кількість гілок $m = 6$ і число вузлів $n = 4$.

2. Визначаємо загальну кількість рівнянь, потрібних для розв'язання задачі. Оскільки значення R_1 легко обчислити за відомою потужністю P_j , то для розрахунку невідомих струмів J, I_2, I_3, I_4 слід скласти 4 рівняння.

3. Довільно вибираємо додатній напрямок шуканих струмів (рис. 3.7) і складаємо рівняння за першим законом Кірхгофа, беручи до уваги, що за даної конфігурації схема по гілках 1 – 2 та 3 – 4 проходить один і той самий струм I_3 . Внаслідок цього рівняння, складені для вузлів 1 і 4 будуть однаковими; це стосується також вузлів 2 і 3. Тому для заданої схеми можна скласти тільки два незалежних рівняння:

$$\text{вузол 1: } -J + I_2 + I_3 + I_5 = 0; \quad (3.12)$$

$$\text{вузол 2: } I_4 - I_3 - I_5 = 0. \quad (3.13)$$

4. Складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа кількістю $(m - n + 1) - k = (6 + 4 + 1) - 1 = 2$ рівняння. Напрямок обходу незалежних контурів показано на рис. 3.7.

$$\text{I контур: } E_3 + E_6 = -R_3 I_3 + R_2 I_2 - R_6 I_3 - R_4 I_4; \quad (3.14)$$

$$\text{II контур: } E_5 = R_4 I_4 + R_5 I_5. \quad (3.15)$$

5. Розв'язуємо систему рівнянь (3.12) – (3.15):

$$\text{з (3.15): } I_4 = \frac{E_5 - R_5 I_5}{R_4} = 1,6 \text{ A};$$

$$\text{з (3.13): } I_3 = I_4 - I_5 = 0,8 \text{ A};$$

$$\text{з (3.14): } I_2 = \frac{E_3 + E_6 + (R_3 + R_6) I_3 + R_4 I_4}{R_2} = 2,2 \text{ A};$$

$$\text{з (3.12): } J = I_2 + I_3 = 3 \text{ A}.$$

6. Обчислюємо опір резистора R_1 : потужність джерела струму $P_j = U_{10} J$, звідки напруга між точками 1 – 0

$$U_{10} = \frac{P_j}{J} = 177 \text{ В};$$

з іншого боку, $U_{10} = R_1 J + R_2 I_2$, отже:

$$R_1 = \frac{U_{10} - R_2 I_2}{J} = 15 \text{ Ом.}$$

Перевіряємо розрахунки за балансом потужностей:

$$P_j - E_3 I_3 - E_6 I_3 + E_5 I_5 = R_1 I^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2;$$

$$547 = 547 \text{ Вт.}$$

Задача 3.5 (рис. 3.8)

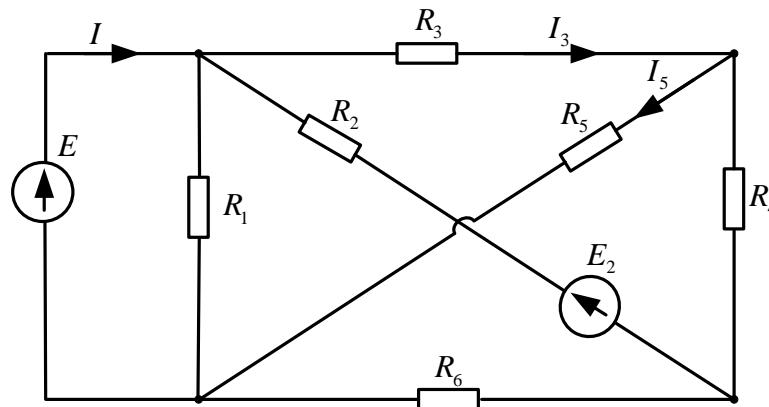


Рисунок 3.8

Відомо: $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_6 = 5 \text{ Ом}$; $I_3 = 2 \text{ А}$;

$I_5 = 1 \text{ А}$.

Потужність яка споживається резистором R_4 , $P_4 = 20 \text{ Вт}$.

Визначити: E , E_2 , R_1 , R_4 .

Розв'язання.

Для більшої зручності розрахунків задану схему накреслимо у вигляді, показаному на рис. 3.9.

1. Обчислюємо кількість гілок $m = 7$, число вузлів $n = 4$, незалежних контурів – 4.

2. Визначаємо загальну кількість рівнянь, які потрібно скласти; вона має бути такою, як кількість невідомих у схемі: $E, I, I_1, R_1, E_2, I_2, R_4, I_4, I_6$. Опір R_4 легко розрахувати за даною потужністю P_4 , але для обчислення інших невідомих величин потрібно більше 7 рівнянь, які можна скласти за законами

Кірхгофа (за першим $n - 1 = 3$ рівняння, за другим $m - n + 1 = 4$ рівняння). Тому якась з вказаних в умові задачі шуканих величин залишаються не визначеною.

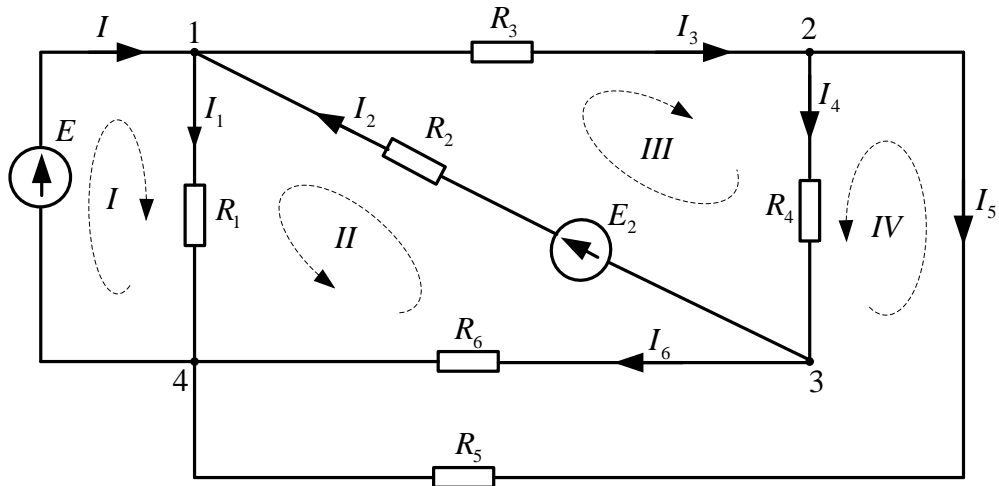


Рисунок 3.9

3. Довільно вибираємо додатний напрям невідомих ЕРС та струмів і складаємо 3 рівняння за першим законом (рис.3.9):

$$\text{вузол 1: } -I + I_1 - I_2 + I_3 = 0; \quad (3.16)$$

$$\text{вузол 2: } -I_3 + I_4 + I_5 = 0; \quad (3.17)$$

$$\text{вузол 3: } -I_4 + I_2 + I_6 = 0. \quad (3.18)$$

4. Складаємо 4 рівняння за другим законом для незалежних контурів, напрям обходу яких показано на рис. 3.9:

$$\text{I контур: } E = R_1 I_1; \quad (3.19)$$

$$\text{II контур: } E_2 = R_2 I_2 + R_1 I_1 - R_6 I_6 = R_2 I_2 + E - R_6 I_6; \quad (3.20)$$

$$\text{III контур: } E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4; \quad (3.21)$$

$$\text{IV контур: } R_4 I_4 + R_6 I_6 - R_5 I_5 = 0. \quad (3.22)$$

5. Розв'язуємо систему складених рівнянь:

$$\text{з (3.17): } I_4 = I_3 - I_5 = 1 \text{ A,}$$

тоді з формули потужності $P_4 = R_4 I_4^2$ обчислюємо:

$$R_4 = \frac{P_4}{I_4^2} = 20 \text{ Ом;}$$

$$\text{з (3.22):} \quad I_6 = \frac{R_5 I_5 - R_4 I_4}{R_6} = 0 \text{ A};$$

$$\text{з (3.18):} \quad I_2 = I_4 - I_6 = 1 \text{ A};$$

$$\text{з (3.21):} \quad E_2 = 44 \text{ В};$$

$$\text{з (3.20):} \quad E = E_2 - R_2 I_2 + R_6 I_6 = 40 \text{ В}.$$

Визначити опір R_1 неможливо.

Задача 3.6 (рис. 3.10).

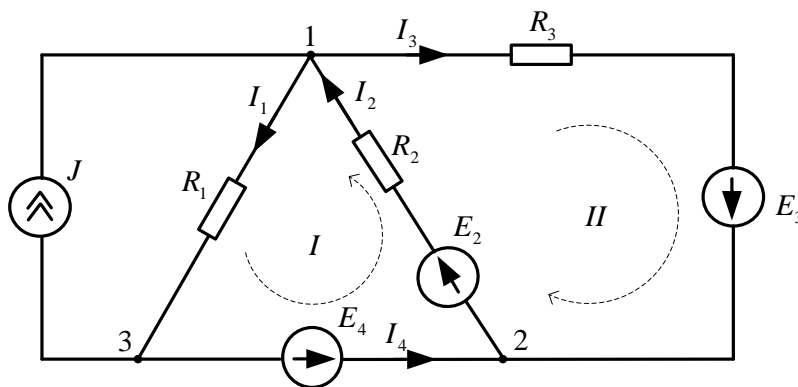


Рисунок 3.10

Відомо: $R_1 = 10 \text{ Ом}$,

$R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$;

$E_2 = 100 \text{ В}$, $E_4 = 40 \text{ В}$,

$J = 6 \text{ А}$.

Потужність джерела струму $P_J = 120 \text{ Вт}$.

Визначити: E_3 перевірити розрахунки за балансом потужностей.

Розв'язання.

За відомою потужністю P_J обчислюємо напругу U_{13} , потім за законом Ома струм I_1 :

$$U_{13} = \frac{P_J}{J} = 20 \text{ В}; \quad I_1 = \frac{U_{13}}{R_1} = 2 \text{ А}.$$

Залишається 4 невідомих: I_2 , I_3 , I_4 , E_3 , отже для їх визначення слід скласти 4 рівняння.

За першим законом Кірхгофа складаємо $n - 1 = 3 - 1 = 2$ рівняння, задавши напрями струмів як показано на рис. 3.10:

$$\text{вузол 2: } -I_2 + I_3 + I_4 = 0; \quad (3.23)$$

$$\text{вузол 3: } -J + I_1 - I_4 = 0. \quad (3.24)$$

Довільно задаємо додатний напрям E_3 , напрями обходу контурів I, II і складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$\text{I контур: } E_2 + E_4 = R_1 I_1 + R_2 I_2; \quad (3.25)$$

$$\text{II контур: } E_2 + E_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3. \quad (3.26)$$

Розв'язуємо складену систему рівнянь:

$$\text{з (3.25): } I_2 = \frac{E_2 + E_4 - R_1 I_1}{R_2} = 6 \text{ A};$$

$$\text{з (3.24): } I_4 = -J + I_1 = -4 \text{ A};$$

$$\text{з (3.23): } I_3 = I_2 - I_4 = 6 - (-4) = 10 \text{ A};$$

$$\text{з (3.26): } E_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3 - E_2 = 220 \text{ В}.$$

Баланс потужностей:

$$P_j + E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2;$$

$$120 + 600 + 2200 + 40(-4) = 2760 \text{ Вт} \quad \sum R I^2 = 2760.$$

Задача 3.7 (рис.3.11)

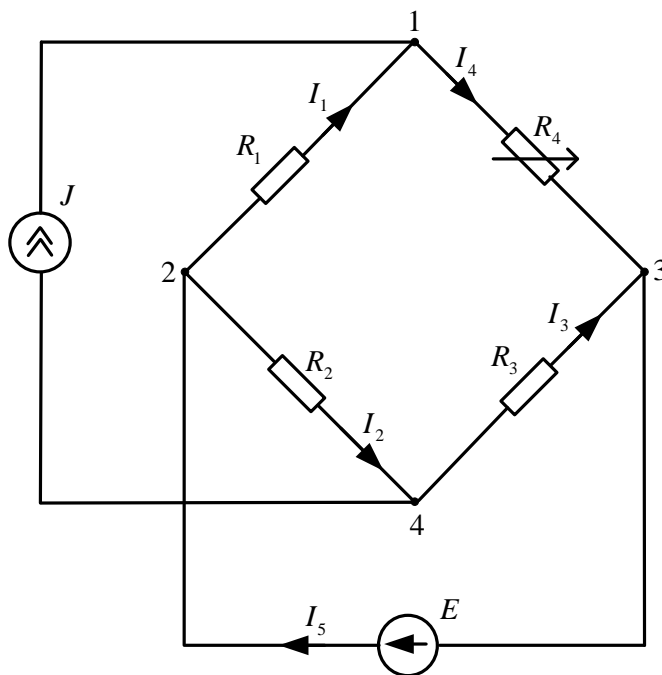


Рисунок 3.11

Відомо: $E = 5 \text{ В}$; $J = 1 \text{ А}$;

$R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$; $R_3 = 5 \text{ Ом}$.

Опір R_4 змінюється від 0 до ∞ .

Визначити:

- 1) зв'язок між напругою і струмом резистора R_4 ;
- 2) залежність усіх струмів кола від опору R_4 і проілюструвати цю залежність графічно.

Розв'язання.

1. Обчислюємо кількість гілок $m = 6$, число вузлів $n = 4$ і незалежних контурів $- 2$.

2. Для невідомих струмів $I_1 \div I_5$ складаємо 5 рівнянь за законами Кірхгофа: за першим: $n - 1 = 3$ рівняння, за другим: $(m - n + 1) - k = (6 - 4 + 1) - 1 = 2$.

$$\text{вузол 1: } -J - I_1 + I_4 = 0; \quad (3.27)$$

$$\text{вузол 2: } -I_5 + I_1 + I_2 = 0; \quad (3.28)$$

$$\text{вузол 3: } -I_2 + J + I_3 = 0; \quad (3.29)$$

$$E = R_2 I_2 + R_2 I; \quad (3.30)$$

$$E = R_1 I_1 + U_4. \quad (3.31)$$

Знаходимо зв'язок між I_4 та U_4 , тобто вольт-амперметру характеристику (ВАХ) резистора R_4 , яку можна подати дwoяко:

1. $I_4 = f(U_4)$ – струм I_4 є функцією напруги U_4 ;

2. $U_4 = f(I_4)$ – напруга U_4 є функцією струму I_4 .

В обох випадках рівняння ВАХ легко визначити, якщо вираз струму I_1 з (3.27) $I_1 = I_4 - J$ підставити у (3.31), звідки:

ВАХ у вигляді

$$I_4 = f(U_4) = \frac{E_1 + R_1 J - U_4}{R_1} = 3,5 - 0,5U_4,$$

ВАХ у вигляді

$$U_4 = f(I_4) = E - R_1(I_4 - J) = 7 - 2I_4.$$

Отримані вирази ВАХ є рівняннями прямих ліній, тому їх графіки можна побудувати за двома точками:

перша точка – прирівняти U_4 до 0 і обчислити I_4 ,

друга точка – прирівняти I_4 до 0 і обчислити U_4 .

Реперні точки для ВАХ $I_4 = 3,5 - 0,5U_4$:

$U_4 = 0$, тоді $I_4 = 3,5$ А;

$I_4 = 0$, тоді $U_4 = 7$ В.

Реперні точки для ВАХ $U_4 = 7 - 2I_4$:

$U_4 = 0$, тоді $I_4 = 3,5$ А;

$I_4 = 0$, тоді $U_4 = 7$ В.

Графіки ВАХ зображено на рис. 3.12.

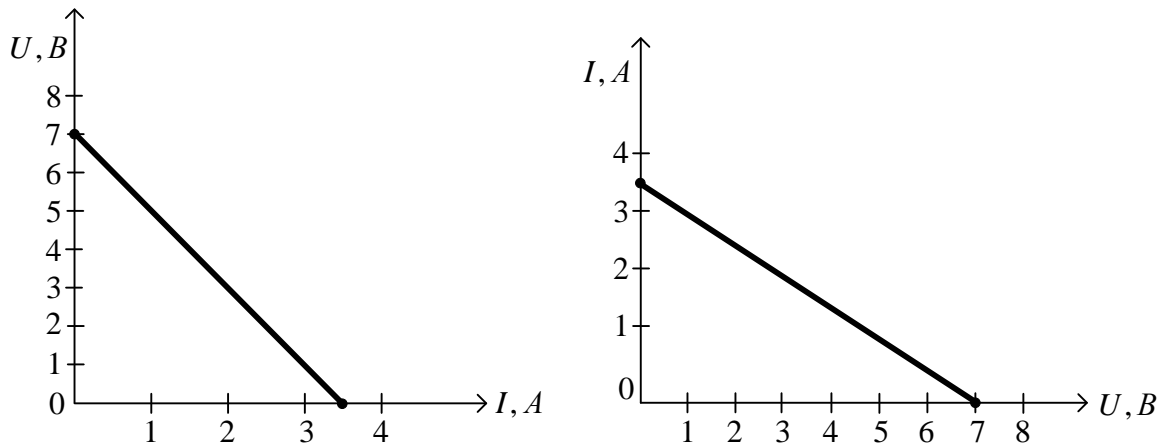


Рисунок 3.12

Очевидно, що обидва способи подачі ВАХ рівноцінні і залежать виключно від зручності розрахунків.

Визначаємо і ілюструємо графіками залежність струмів від опору R_4 (рис. 3.13).

Струм I_1 : вираз I_1 з (3.27) $I_1 = I_4 - J = I_1 - 1$ А;

при $R_4 = 0$, $U_4 = 0$, $I_4 = 3,5$ (рис. 3.12), $I_1 = 2,5$ А;

при $R_4 = \infty$, $I_4 = 0$, $U_4 = 7$ В (рис. 3.12), $I_1 = -1$ А.

Струми I_2 , I_3 не залежать від R_4 , що наочно видно з рівнянь (3.29) і (3.30), сумісне розв'язання яких дає значення:

$$I_2 = \frac{E + R_3 J}{R_2 + R_3} = 1,25 \text{ А,}$$

$$I_3 = I_2 - J = 0,25 \text{ А.}$$

Струм I_4 : відповідно ВАХ $I_4 = 3,5 - 0,5U_4$;

при $R_4 = 0$, $U_4 = 0$, $I_4 = 3,5$ А (рис. 3.12);

при $R_4 = \infty$, $I_4 = 0$.

Струм I_5 : вираз I_5 з (3.28) $I_5 = I_1 + I_2$;

при $R_4 = 0$, $I_1 = 2,5$ А, $I_2 = 1,25$ А; $I_5 = 3,75$ А;

при $R_4 = \infty$, $I_1 = -1$ А, $I_2 = 1,25$ А; $I_5 = 0,25$ А.

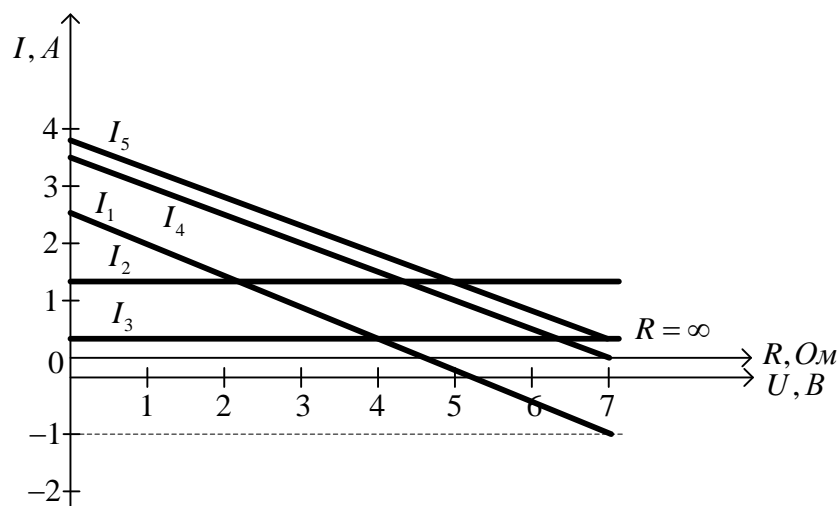


Рисунок 3.13

3.2. Метод контурних струмів

Метод контурних струмів базується на другому законі Кірхгофа. Суть методу легше зрозуміти, скориставшись схемою на рис. 3.14, яка складається з трьох незалежних контури (комірок). Перший незалежний контур утворений трьома гілками, в яких проходять струми I_2 , I_4 , I_5 відповідно. Припускають, що в усіх гілках цього контуру проходить один і той самий струм $J_{1к}$. Аналогічно припускають, що в усіх гілках другого незалежного контуру проходить контурний струм $J_{2к}$, а в усіх гілках третього контуру - $J_{3к}$. В дійсності контурні струми ніде не проходять, це розрахункові величини. Кількість невідомих контурних струмів дорівнює кількості незалежних контурів у схемі. Для їх визначення складають рівняння тільки за другим законом Кірхгофа, оскільки перший закон виконується автоматично: один і той самий контурний струм в одній гілці спрямований до вузла, а в другій – від вузла. Обчисливши контурні струми, переходять до дійсних струмів у гілках кола.

Переваги: зменшується трудомісткість розрахунків порівняно з методом Кірхгофа, оскільки рівняння складають тільки за другим законом.

Алгоритм розрахунку

1. Визначити кількість незалежних контурів (комірок) у схемі.

2. Довільно вибрати умовно-додатні напрямки контурних струмів (доцільно вибрати їх однаковими – усі за напрямком обертання годинникової стрілки або навпаки).

3. Скласти систему рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} R_{11}J_{1к} \pm R_{12}J_{2к} \pm R_{13}J_{3к} \pm \dots \pm R_{1n}J_{нк} = E_{1к} \\ \pm R_{21}J_{1к} + R_{22}J_{2к} \pm R_{23}J_{3к} \pm \dots \pm R_{2n}J_{нк} = E_{2к} \\ \pm R_{31}J_{1к} \pm R_{32}J_{2к} + R_{33}J_{3к} \pm \dots \pm R_{3n}J_{нк} = E_{3к} \\ \dots \\ \pm R_{n1}J_{1к} \pm R_{n2}J_{2к} \pm R_{n3}J_{3к} \pm \dots + R_{nn}J_{нк} = E_{нк} \end{array} \right\}$$

де $R_{11}, R_{22}, R_{33}, \dots, R_{nn}$ – власний опір I, II, III, ..., n контурів відповідно (сума усіх опорів у контурі, що розглядається);

$R_{12} = R_{21}$ – опір гілки, спільної для I і II контурів;

$R_{13} = R_{31}$ – опір гілки, спільної для I і III контурів;

$R_{23} = R_{32}$ – опір гілки, спільної для II і III контурів і т.д.;

$E_{1к}, E_{2к}, E_{3к}, E_{нк}$ – контурні ЕРС (алгебраїчна сума ЕРС у контурі, що розглядається).

Слід пам'ятати:

- напругу на власних опорах контурів $R_{11}J_{1к}, R_{22}J_{2к}, R_{nn}J_{нк}$ завжди враховують з «+» (виділено жирним в системі рівнянь);
- напругу на опорі гілки, спільної для двох контурів $R_{нк}J_{к}$, враховують з «+», коли обидва контурних струми обтікають цю гілку в одному напрямку, і з «−» – коли в протилежному (якщо контурні струми напрямлені однаково, всі ці напруги будуть від'ємними);
- при обчисленні контурних $E_{1к}, E_{2к}, E_{3к}, \dots, E_{нк}$, гілкові ЕРС, напрямком яких збігається з напрямком контурного струму, враховують зі знаком «+»; гілкові ЕРС, напрямлені протилежно, – зі знаком «−».

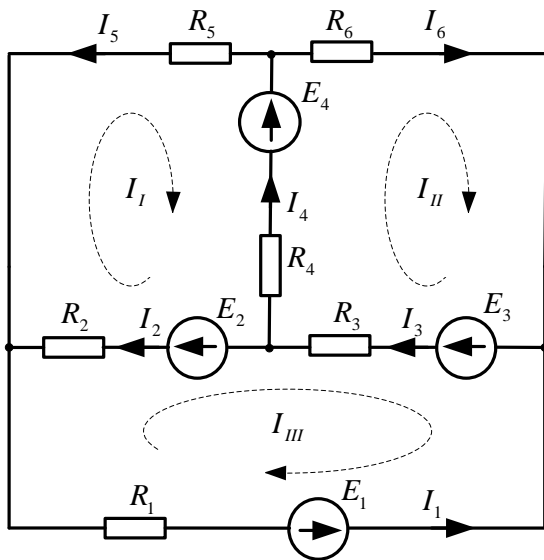
4. Розв'язуючи складену систему рівнянь, знайти контурні струми.

5. Перейти від розрахункових контурних до дійсних струмів у гілках.

Якщо гілка входить лише до одного незалежного контуру, то вона обтікається одним контурним струмом і дійсний струм дорівнює контурному.

Дійсний струм у спільній гілці двох контурів обчислюють, як алгебраїчну суму відповідних контурних струмів.

Задача 3.8 (рис. 3.14)



Відомо: $E_1 = 40$ В, $E_2 = 80$ В, $E_3 =$

20 В,

$E_4 = 120$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 10$ Ом,

$R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 10$ Ом, $R_5 = 40$ Ом,

$R_6 = 60$ Ом.

Визначити всі струми.

Розв'язання.

1. Визначаємо, що у заданій схемі три незалежних контури (комірки)

(рис. 3.14).

Рисунок 3.14

2. Вибираємо умовно-додатні напрямки контурних струмів $J_{1к}$, $J_{2к}$, $J_{3к}$ за обертанням годинникової стрілки.

3. Складаємо систему рівнянь, маючи на увазі, що за однакового напрямку контурних струмів, напруги на опорах гілок, спільних для двох суміжних контурів, від'ємні:

$$(R_5 + R_4 + R_2)J_{1к} - R_4J_{2к} - R_2J_{3к} = E_2 - E_4;$$

$$-R_4J_{1к} + (R_6 + R_3 + R_4)J_{2к} - R_3J_{3к} = E_3 + E_4;$$

$$-R_2J_{1к} - R_3J_{2к} + (R_2 + R_3 + R_1)J_{3к} = -E_2 - E_3 - E_1.$$

Підставимо числові значення опорів і ЕРС, маємо:

$$\left. \begin{aligned} 60J_{1к} - 10J_{2к} - 10J_{3к} &= -40; \\ -10J_{1к} + 80J_{2к} - 10J_{3к} &= 140; \\ 60J_{1к} - 10J_{2к} + 40J_{3к} &= -140; \end{aligned} \right\} \text{або} \left. \begin{aligned} 6J_{1к} - 1J_{2к} - 1J_{3к} &= -4; \\ -1J_{1к} + 8J_{2к} - 1J_{3к} &= 14; \\ -1J_{1к} - 1J_{2к} + 4J_{3к} &= -14 \end{aligned} \right\}.$$

4. Розв'язуємо систему за допомогою визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 192 - 1 - 1 - 8 - 4 - 6 = 172;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 14 & 8 & -1 \\ -14 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -128 - 4 - 14 - 14 - 16 - 84 = -180;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -14 & 4 \end{vmatrix} = 336 - 14 + 14 - 112 + 56 + 4 = 204;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 14 & 8 & 14 \\ -1 & -1 & -14 \end{vmatrix} = -672 + 14 - 4 - 32 + 14 + 84 = -596;$$

$$J_{1к} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-180}{172} = -1,05A;$$

$$J_{2к} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{204}{172} = 1,19A;$$

$$J_{3к} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-596}{172} = -3,47A$$

5. Обчислюємо дійсні струми:

$$I_1 = -J_{3к} = -(-3,47) = 3,47A;$$

$$I_2 = J_{1к} - J_{3к} = -1,05 - (-3,47) = 2,42 A;$$

$$I_3 = J_{2к} - J_{3к} = 1,19 + 3,47 = 4,66 A;$$

$$I_4 = J_{2к} - J_{1к} = 1,19 + 1,05 = 2,24 A;$$

$$I_5 = -J_{1к} = 1,05 A;$$

$$I_6 = J_{2к} = 1,19 A.$$

6. Перевіряємо правильність розрахунків за балансом потужностей:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2;$$

$$138,8 + 193,6 + 93,2 + 268,8 =$$

$$= 240,8 + 58,56 + 217,15 + 50,176 + 44,1 + 84,9;$$

$$694,4 \approx 695,8 \text{ Вт.}$$

Задача 3.9 (рис. 3.15)

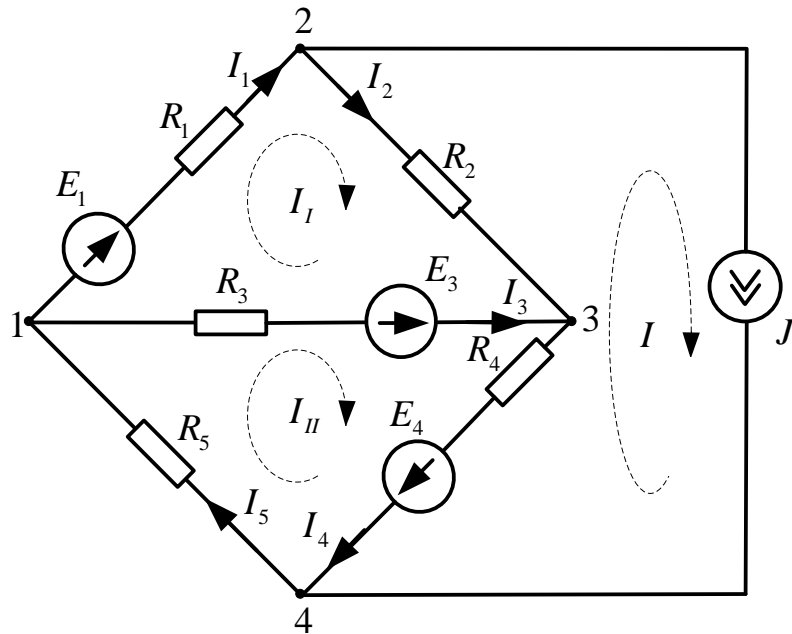


Рисунок 3.15

Відомо: $J = 1 \text{ A}$, $E_1 = 120 \text{ В}$, $E_3 = 40 \text{ В}$, $E_4 = 20 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$,
 $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 50 \text{ Ом}$, $R_4 = 40 \text{ Ом}$, $R_5 = 10 \text{ Ом}$.

Визначити усі струми.

Розв'язання.

1. Указуємо контур, по якому проходить струм джерела J . Можна уявити, що струм J замикається по будь-якому з 4-х контурів:

$$J - E_4 - R_4 - R_2 - J, \text{ або } J - R_5 - E_1 - R_1 - J, \text{ або } J - R_5 - R_3 - E_3 - R_2 - J, \\ \text{або } J - E_4 - R_4 - E_3 - R_3 - E_1 - R_1.$$

Вважаємо, що струм J проходить по контуру $J - E_4 - R_4 - R_2 - J$.

2. Вилучаємо гілку з джерелом струму J і визначаємо незалежні контури:

$$\text{I контур: } E_1 - R_1 - R_2 - E_3 - R_3 - E_1;$$

$$\text{II контур: } R_3 - E_3 - R_4 - E_4 - R_5 - R_3.$$

Довільно вибираємо напрямки контурних струмів $J_{1к}$ і $J_{2к}$ (див. рис. 3.15).

3. Складаємо рівняння для визначення $J_{1к}$ і $J_{2к}$:

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_3)J_{1к} - R_3J_{2к} - R_2J &= E_1 - E_3; \\ -R_3J_{1к} + (R_3 + R_4 + R_5)J_{2к} - R_4J &= E_3 + E_4. \end{aligned} \right\}$$

Підставивши числові значення, маємо:

$$\left. \begin{aligned} 110J_{1к} - 50J_{2к} &= 40 + 120 - 40; \\ -50J_{1к} + 100J_{2к} &= 40 + 20 + 40 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 11J_{1к} - 5J_{2к} &= 12; \\ -5J_{1к} + 10J_{2к} &= 10. \end{aligned} \right\}$$

4. Розв'язуємо складні рівняння і отримуємо значення контурних струмів:

$$J_{1к} = 2 \text{ А}; \quad J_{2к} = 2 \text{ А}.$$

5. Знаходимо дійсні струми:

$$I_1 = J_{1к} = 2 \text{ А}; \quad I_2 = J_{1к} - J = 1 \text{ А}; \quad I_3 = J_{2к} - J_{1к} = 0 \text{ А}; \quad I_4 = J_{2к} - J = 1 \text{ А};$$

$$I_5 = J_{2к} = 2 \text{ А}.$$

6. Перевіряємо правильність розрахунків за балансом потужностей:

$$E_1 I_1 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + U_{42} J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2,$$

де:

$$\begin{aligned} U_{42} &= -R_2 I_2 - R_4 I_4 + E_4 = -60 \text{ В}, \\ 240 + 0 + 20 - 60 &= 80 + 40 + 0 + 40 + 40, \\ 200 &= 200 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Задача 3.10 (рис. 3.16)

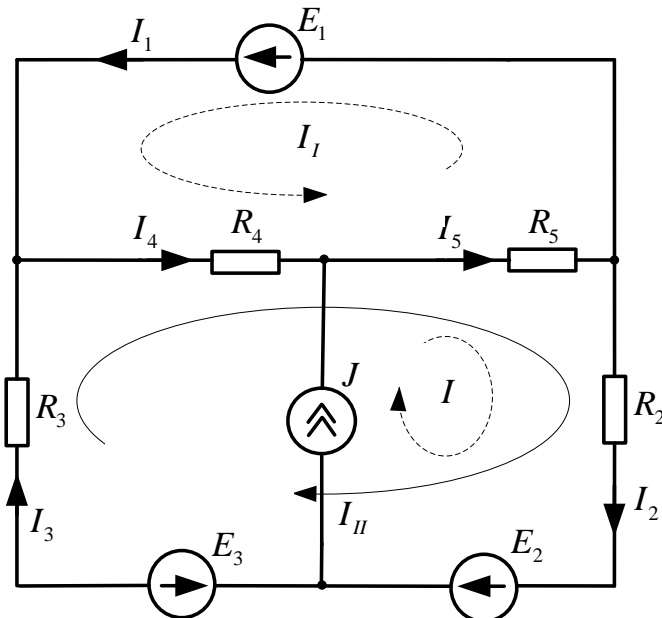


Рисунок 3.16

Відомо: $E_1 = 100 \text{ В}, E_2 = 150 \text{ В}, E_3 = 28 \text{ В}, J = 2 \text{ А},$
 $R_2 = 2 \text{ Ом}, R_3 = 4 \text{ Ом}, R_4 = 6 \text{ Ом}, R_5 = 8 \text{ Ом}.$

Визначити всі струми.

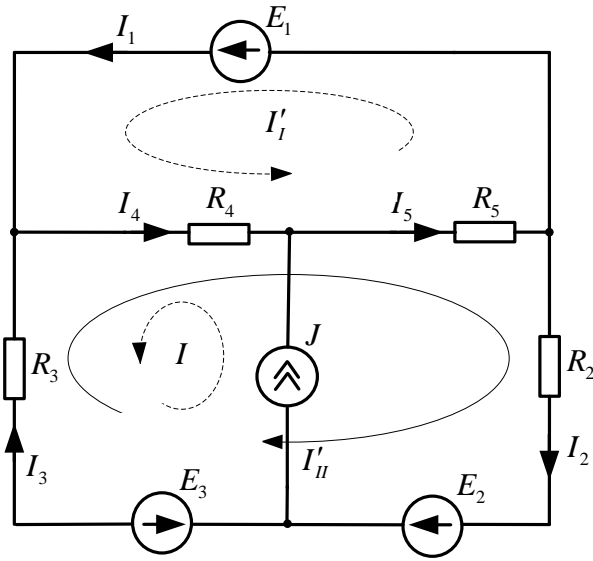


Рисунок 3.17

Розв'язання.

1. Припустимо, що струм джерела J замикається по контуру:

$$J - R_5 - R_2 - E_2 - J.$$

2. Подумки вилучивши гілку з джерелом струму, маємо два незалежних контури:

$$\text{I контур: } E_1 - R_4 - R_5 - E_1;$$

$$\text{II контур: } R_4 - R_5 - R_2 - E_2 - E_3 - R_3 - R_4.$$

Задаємо умовно-додатний напрямок невідомих контурних струмів $J_{1к}$ і $J_{2к}$.

Складаємо 2 рівняння для невідомих $J_{1к}$ і $J_{2к}$, беручи до уваги, що спільною для струмів $J_{1к}$ і J є гілка з опором R_5 ; спільними для струмів J і $J_{2к}$ – гілки з опорами R_5 і R_2 .

$$\left. \begin{aligned} (R_4 + R_5)J_{1к} + (R_4 + R_5)J_{2к} + R_5J &= E_1; \\ (R_4 + R_5)J_{1к} + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5)J_{2к} + (R_2 + R_5)J &= E_2 - E_3. \end{aligned} \right\}$$

Після підстановки числових значень R і E маємо :

$$\left. \begin{aligned} 14J_{1к} + 14J_{2к} + 8 \cdot 2 &= 10 \\ 14J_{1к} + 20J_{2к} + 10 \cdot 2 &= 122 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 14J_{1к} + 14J_{2к} &= 84 \\ 14J_{1к} + 20J_{2к} &= 102 \end{aligned} \right\}$$

5. Розв'язуємо систему і отримуємо:

$$J_{1к} = 3 \text{ А}, J_{2к} = 3 \text{ А}.$$

6. Визначаємо дійсні струми у гілках:

$$I_1 = J_{1к} = 3 \text{ А}; I_2 = J_{2к} + J = 5 \text{ А}; I_3 = J_{2к} = 3 \text{ А};$$

$$I_4 = J_{1к} + J_{2к} = 6 \text{ А}; I_5 = J_{1к} + J + J_{2к} = 8 \text{ А}.$$

Якщо для струму джерела вибрати контур J - R_4 - R_3 - E_3 - J (рис. 3.17), а напрямок контурних струмів залишити незмінним, то рівняння матимуть вигляд:

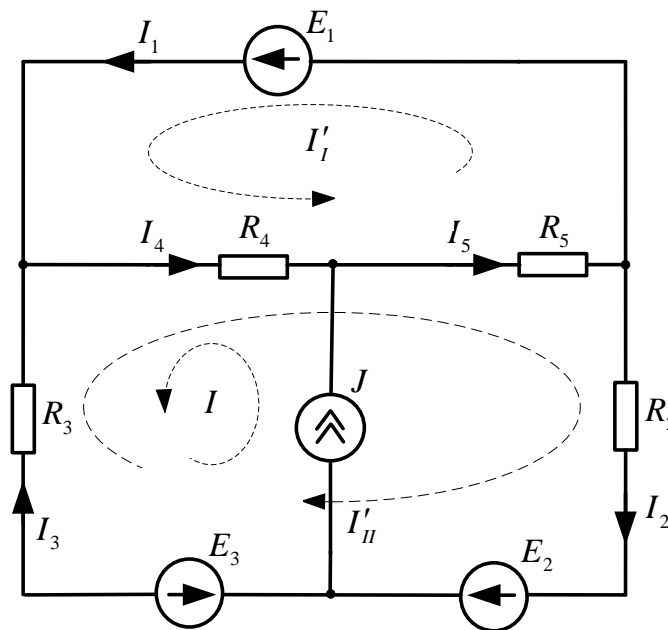


Рисунок 3.17

$$\left. \begin{aligned} (R_4 + R_5)J'_{1к} + (R_4 + R_5)J'_{2к} - R_4J &= E_1; \\ (R_4 + R_5)J'_{1к} + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5)J'_{2к} - (R_3 + R_4)J &= E_2 - E_3. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 14J'_{1к} + 14J'_{2к} - 6 \cdot 2 &= 100; \\ 14J'_{1к} + 20J'_{2к} - 10 \cdot 2 &= 122 \end{aligned} \right\}' \quad \left. \begin{aligned} 14J'_{1к} + 14J'_{2к} &= 122; \\ 14J'_{1к} + 20J'_{2к} &= 142. \end{aligned} \right\}$$

7. Обчислюємо контурні струми:

$$(20 - 14)J'_{2к} = 142 - 112, \text{ звідки } J'_{2к} = 30/6 = 5 \text{ А};$$

$$J'_{1к} = \frac{142 - 20J'_{2к}}{14} = \frac{42}{14} = 3 \text{ А.}$$

8. Незважаючи на те, що контурний струм $J'_{2к}$ відрізняється від визначеного раніше $J_{2к}$, дійсні струми у гілках мають ті ж самі значення:

$$I_1 = J'_{1к} = 3 \text{ А; } I_2 = J'_{2к} = 5 \text{ А; } I_3 = J'_{2к} - J = 3 \text{ А;}$$

$$I_4 = J'_{1к} - J + J'_{2к} = 6 \text{ А; } I_5 = J'_{1к} + J'_{2к} = 8 \text{ А.}$$

Задача 3.11 (рис. 3.18)

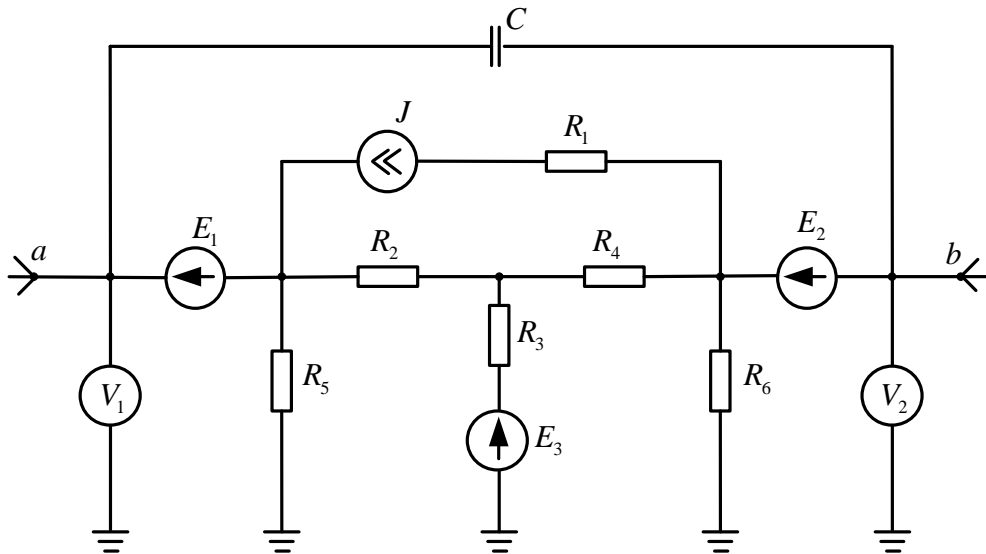


Рисунок 3.18

Відомо: $J = 2 \text{ А; } E_1 = E_2 = 20 \text{ В; } E_3 = 90 \text{ В; } R_1 = 10 \text{ Ом; } R_2 = 20 \text{ Ом; } R_3 = 10 \text{ Ом; } R_4 = 10 \text{ Ом; } R_5 = 10 \text{ Ом; } R_6 = 20 \text{ Ом; } C = 50 \text{ мкФ.}$

Визначити покази вольтметрів V_1 , V_2 і заряд конденсатора.

Для визначення показів вольтметрів слід обчислити струми через резистори R_5 і R_6 .

Щоб розрахунки були наочними, спочатку окремо розрахуємо центральну частину кола і з'єднаємо точки з однаковим потенціалом «земля» (рис. 3.19).

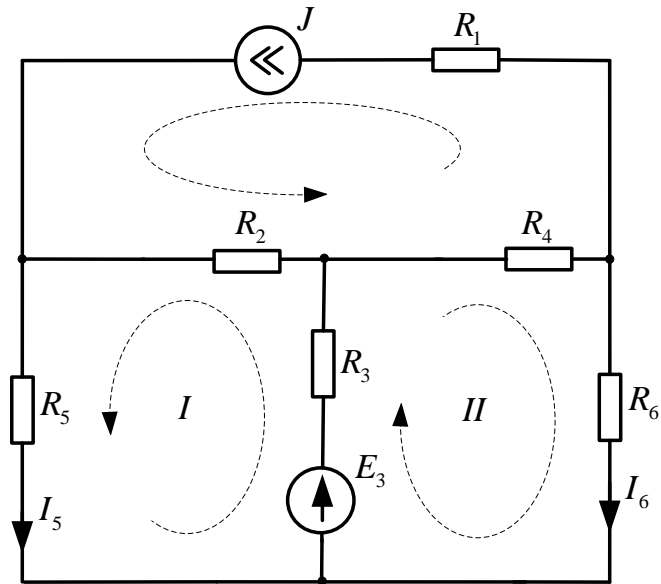


Рисунок 3.19

Вважаємо що струм джерела J замикається через контур $J - R_2 - R_4 - J$. Подумки вилучаємо гілку з джерелом струму і для двох незалежних контурів I, II, довільно задаємо напрямки контурних струмів $J_{1к}$, $J_{2к}$ (див. рис. 3.18). Складаємо 2 рівняння, розв'язуємо їх і отримуємо значення $J_{1к}$, $J_{2к}$:

$$\left. \begin{aligned} -R_2 J + (R_2 + R_3 + R_5) J_{1к} + R_3 J_{2к} &= E_3; \\ +R_4 J + R_3 J_{1к} + (R_3 + R_4 + R_6) J_{2к} &= E_3. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 40 J_{1к} + 10 J_{2к} &= 130; \\ 10 J_{1к} + 40 J_{2к} &= 70 \end{aligned} \right\}'$$

звідки $J_{1к} = 3$ А, $J_{2к} = 1$ А.

Тоді дійсні струми $J_5 = J_{1к} = 3$ А, $J_6 = J_{2к} = 1$ А.

Визначаємо покази вольтметрів:

$$U_{V1} = E_1 + R_5 I_5 = 50 \text{ В};$$

$$U_{V2} = R_6 I_6 - E_2 = 0.$$

Розраховуємо заряд конденсатора:

$$Q = C U_C = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

3.3. Метод вузлових потенціалів

Базується на першому законі Кірхгофа і законі Ома.

Визначають кількість вузлів у схемі n і довільно вибирають вузол, потенціал якого прирівнюють до нуля. Це не приводить до утворення додаткової гілки і струморозподіл у схемі залишається незмінним (одночасно прирівнювати до нуля потенціали двох вузлів не рекомендується, оскільки у схемі може з'явитися нова гілка, що змінить струми в усіх інших гілках). За нульовий можна вважати потенціал будь-якого вузла тому, що струм залежить не від абсолютних значень потенціалів, а від їх різниці на затискачах гілки. Після прирівнювання до нуля одного потенціалу залишається $n - 1$ невідомих потенціалів. Для їх визначення складають $n - 1$ незалежне рівняння за першим законом Кірхгофа. Обчисливши потенціали усіх вузлів відносно нульового, за законом Ома знаходять струми у гілках.

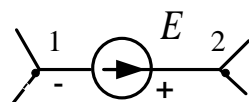
Переваги: зменшується кількість розрахункових рівнянь порівняно з методом законів Кірхгофа, оскільки їх потрібно складати тільки за першим законом. Алгоритм розрахунку.

Алгоритм розрахунку

1. Обчислити кількість n вузлів у схемі.
2. Проаналізувати схему і вибрати вузол потенціал якого доцільніше прийняти за нульовий.

Слід пам'ятати:

- якщо у колі є гілка, утворена тільки ідеальним джерелом E ($R_0 = 0$), то через відсутність резисторів опір цієї гілки $R = 0$, провідність $G = 1/R = \infty$, в системі складених рівнянь з'явиться невизначений доданок і розв'язання буде неможливим. У такому випадку за нульовий слід приймати потенціал одного з вузлів вказаної гілки



Припустимо $\varphi_1 = 0$, тоді $\varphi_2 = E$;

припустимо $\varphi_2 = 0$, тоді $\varphi_1 = -E$;

• за наявності у схемі двох і більше вказаних гілок розв'язання можливе за умови, що джерела мають спільний вузол, в іншому випадку для використання методу вузлових потенціалів потрібно виконати попередні перетворення (приклад – задача 3.20).

3. Скласти систему рівнянь:

$$G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 - \dots - G_{1n}\varphi_n = \sum_{1 \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{1 \text{ вуз}} \pm J;$$

$$\sum_{1 \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{1 \text{ вуз}} \pm J = J_{11};$$

$$-G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 - \dots - G_{2n}\varphi_n = \sum_{2 \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{2 \text{ вуз}} \pm J;$$

$$\sum_{2 \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{2 \text{ вуз}} \pm J = J_{22};$$

$$G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 - \dots - G_{3n}\varphi_n = \sum_{3 \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{3 \text{ вуз}} \pm J;$$

$$\sum_{3 \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{3 \text{ вуз}} \pm J = J_{33};$$

.....

$$-G_{n1}\varphi_1 - G_{n2}\varphi_2 - G_{n3}\varphi_3 + \dots + G_{nn}\varphi_n = \sum_{n \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{n \text{ вуз}} \pm J;$$

$$\sum_{n \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{n \text{ вуз}} \pm J = J_{nn}.$$

де: $G_{11}, G_{22}, \dots, G_{nn}$ – власні провідності 1, 2, 3, ..., n вузлів відповідно (сума провідностей гілок у вузлі, що розглядається);

$G_{12} = G_{21}$ – сума провідностей гілок, які безпосередньо з'єднують 1 і 2 вузли;

$G_{13} = G_{31}$ – сума провідностей гілок, які з'єднують 1 і 3 вузли;

$G_{23} = G_{32}$ – сума провідностей гілок, які з'єднують 2 і 3 вузли і т.д.

Правило складання рівнянь:

При складанні рівнянь слід пам'ятати:

а) додатки $G_{11}\varphi_1, G_{22}\varphi_2, \dots, G_{nn}\varphi_n$ завжди враховують з «+»;

б) додатки $G_{mk}\varphi_k$ завжди враховують з «-»;

в) при обчисленні $\sum EG$ і $\sum J$ зі знаком «+» враховують ЕРС E і струми J , спрямовані до вузла, що розглядається; зі знаком «-» – спрямовані від цього вузла.

4. Розв'язати складену систему рівнянь і визначити потенціали вузлів відносно нульового.

5. Обчислити струми у гілках, де є резистори, користуючись законом Ома:

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum \pm E}{\sum R}.$$

6. За першим законом Кірхгофа знайти струми у гілках, де резисторів немає.

Задача 3.12 (рис. 3 20)

Відомо: $E_1 = 80$ В, $E_3 = 20$ В, $E_4 = 10$ В, $E_6 = 60$ В, $J = 3$ А,

$R'_1 = 8$ Ом, $R''_1 = 12$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 10$ Ом.

$R_7 = 5$ Ом

Визначити усі струми.

Розв'язання.

1. Визначаємо кількість вузлів у схемі: $n = 4$.

2. Припустимо, що $\varphi_4 = 0$.

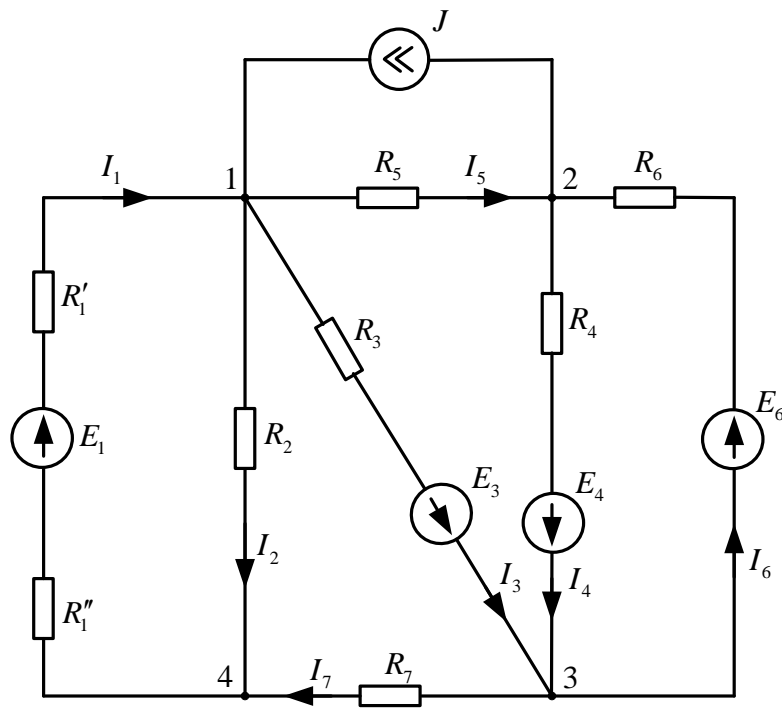


Рисунок 3.20

3. Складаємо систему рівнянь для обчислення $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 &= \sum_1 EG + \sum_1 J; \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 &= \sum_2 EG + \sum_2 J; \\ -G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 &= \sum_3 EG + \sum_3 J. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1' + R_1''} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) \cdot \varphi_1 - \frac{1}{R_5} \varphi_2 - \frac{1}{R_3} \varphi_3 &= E_1 \cdot \frac{1}{R_1' + R_1''} - E_3 \cdot \frac{1}{R_3} + J; \\ -\frac{1}{R_5} \varphi_1 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) \cdot \varphi_2 - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) \cdot \varphi_3 &= -E_4 \cdot \frac{1}{R_4} + E_6 \cdot \frac{1}{R_6} - J; \\ -\frac{1}{R_3} \varphi_1 - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) \cdot \varphi_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) \cdot \varphi_3 &= E_3 \cdot \frac{1}{R_3} + E_4 \cdot \frac{1}{R_4} - E_6 \cdot \frac{1}{R_6}. \end{aligned} \right\}$$

Підставивши числові значення, маємо:

$$\left. \begin{aligned} (0,05 + 0,25 + 0,1 + 0,1) \varphi_1 - 0,1 \varphi_2 - 0,1 \varphi_3 &= 4 - 2 + 3; \\ -0,1 \varphi_1 + (0,1 + 0,1 + 0,1) \varphi_2 - 0,2 \varphi_3 &= -1 + 6 - 3; \\ -0,1 \varphi_1 - 0,2 \varphi_2 + (0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,2) \varphi_3 &= 2 + 1 - 6. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 0,5\varphi_1 - 0,1\varphi_2 - 0,1\varphi_3 &= 5; \\ -0,1\varphi_1 + 0,3\varphi_2 - 0,2\varphi_3 &= 2; \\ -0,1\varphi_1 - 0,2\varphi_2 + 0,5\varphi_3 &= -3. \end{aligned} \right\}$$

4. Розв'язуємо систему за допомогою визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,043; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,5 & 5 & -0,1 \\ -0,1 & 2 & -0,2 \\ -0,1 & -3 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,54;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -0,1 & -0,1 \\ 2 & 0,3 & -0,2 \\ -3 & -0,2 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,543; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 & 5 \\ -0,1 & 0,3 & 2 \\ -0,1 & -0,2 & -3 \end{vmatrix} = 0,053.$$

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 12,56 \text{ В}; \quad \varphi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 11,63 \text{ В}; \quad \varphi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1,16 \text{ В}.$$

5. Користуючись законом Ома для активної або пасивної ділянки кола, обчислюємо дійсні струми у гілках:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1}{R'_1 + R'_2} = 3,37 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_2} = 3,14 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = 3,14 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_4}{R_4} = 2,04 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = 0,093 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_6}{R_6} = 4,95 \text{ А};$$

$$I_7 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_7} = 0,23 \text{ А}.$$

6. Перевіряємо правильність розрахунків за балансом потужностей:

$$\begin{aligned} E_1 I_1 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + E_6 I_6 + U_{12} J &= \\ &= (R'_1 + R'_2) I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 + R_7 I_7^2, \end{aligned}$$

де $U_{12} = R_5 I_5 = 10 \cdot 0,093 = 0,93 \text{ В}$.

$$\begin{aligned} &80 \cdot 3,37 + 20 \cdot 3,14 + 10 \cdot 2,05 + 60 \cdot 4,95 + 3 \cdot 0,93 = \\ &= 20 \cdot 3,37^2 + 4 \cdot 3,14^2 + 10 \cdot 3,14^2 + 10 \cdot 2,04^2 + 10 \cdot 0,093^2 + 10 \cdot 4,95^2; \\ &653,02 \approx 652,93 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Задача 3.13 (рис. 3.21)

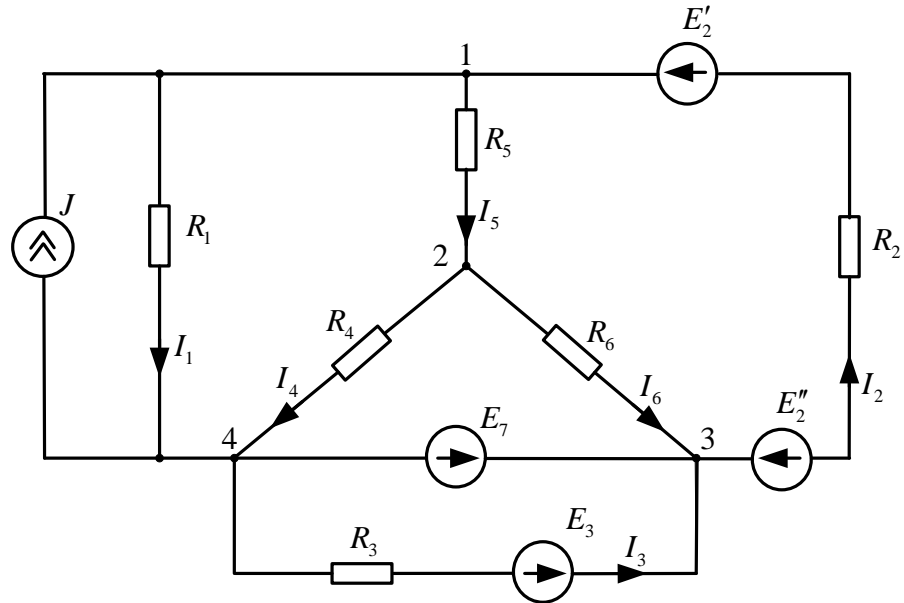


Рисунок 3.21

Відомо: $J = 10 \text{ A}$, $E_2' = 110 \text{ В}$, $E_2'' = 20 \text{ В}$, $E_3 = 5 \text{ В}$, $E_7 = 12 \text{ В}$, $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_6 = 4 \text{ Ом}$, $R_1 = R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$.

Визначити усі струми.

Розв'язання.

1. Обчислюємо кількість вузлів у схемі: $n = 4$.

2. Гілка між вузлами 3 і 4, яка містить тільки ідеальне джерело напруги E_7 , має опір $R = 0$ і відповідну провідність $G_7 = 1/R_7 = \infty$, тому за нульовий потенціал слід прийняти або φ_4 , або φ_3 . Припустимо, що $\varphi_4 = 0$, тоді $\varphi_3 = E_7$.

Залишаються лише два невідомих потенціали φ_1 і φ_2 , для обчислення яких потрібно скласти 2 рівняння.

3. Складаємо розрахункові рівняння:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 &= \sum_{1 \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{1 \text{ вуз}} \pm J; \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 &= \sum_{2 \text{ вуз}} \pm EG + \sum_{2 \text{ вуз}} \pm J. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2}\right) \varphi_1 - \left(\frac{1}{R_5}\right) \varphi_2 - \left(\frac{1}{R_2}\right) \varphi_3 &= \frac{E_2' - E_2''}{R_2} + J; \\ -\left(\frac{1}{R_5}\right) \varphi_1 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) \varphi_2 - \left(\frac{1}{R_6}\right) \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Після підстановки числових значень R, E, I визначасмо:

$$\left. \begin{aligned} (0,125 + 0,1 + 0,1) \varphi_1 - 0,1 \varphi_2 - 0,1 \cdot (12) &= 90 \cdot \frac{1}{10} + 10; \\ -0,1 \varphi_1 + (0,1 + 0,1 + 0,25) \varphi_2 - 0,125 \cdot (12) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 0,325 \varphi_1 - 0,1 \varphi_2 &= 20,2; \\ -0,1 \varphi_1 + 0,45 \varphi_2 &= 3. \end{aligned} \right\}$$

4. Розв'язуючи систему, знаходимо невідомі потенціали $\varphi_1 = 69$ В;
 $\varphi_2 = 22$ В.

5. Розраховуємо струми:

- за законом Ома у гілках з резисторами:

$$I_1 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R_1} = 8,61 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{(\varphi_3 - \varphi_1 + E_2' - E_2'')}{R_2} = 3,3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{(\varphi_4 - \varphi_3 + E_3)}{R_3} = -0,7 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_4)}{R_4} = 2,2 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R_5} = 4,7 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)}{R_6} = 2,5 \text{ А};$$

- за першим законом Кірхгофа у гілці з джерелом E_7 , де немає опору:

$$I_7 = I_2 - I_6 - I_3 - J = 1,5 \text{ А}.$$

6. Складаємо рівняння балансу потужностей в перевіряємо правильність розрахунків:

$$E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_7 I_7 + U_{14} J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2,$$

де

$$\begin{aligned} U_{14} &= R_1 I_1 = 8 \cdot 8,61 = 68,8 \text{ В}, \\ 90 \cdot 3,3 + 5 \cdot (-0,7) + 12 \cdot 1,5 + 68,8 \cdot 10 &= \\ = 8 \cdot 8,61^2 + 10 \cdot 3,3^2 + 10 \cdot (-0,7)^2 + 10 \cdot 2,2^2 + 10 \cdot 4,7^2 + 4 \cdot 2,5^2; \\ &1001,59 \approx 1001,66 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Задача 3.14 (рис. 3.22)

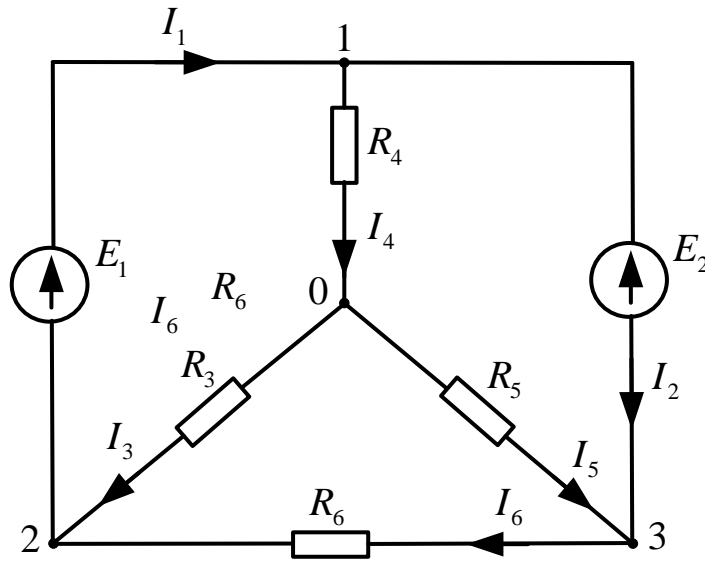


Рисунок 3.22

Відомо: $E_1 = 160 \text{ В}$, $E_2 = 100 \text{ В}$, $R_3 = R_4 = 100 \text{ Ом}$, $R_5 = 150 \text{ Ом}$,
 $R_6 = 40 \text{ Ом}$.

Визначити всі струми.

Розв'язання.

1. Обчислюємо кількість вузлів у схемі: $n = 4$.

2. Вибираємо вузол, потенціал якого приймаємо за 0. Відмічаємо, що у схемі між вузлами 1 – 2 та 1 – 3 підключені гілки, утворені ідеальними джерелами E та E_2 відповідно. Оскільки резисторів у цих гілках немає, їх опір $R = 0$, а провідність $G = \infty$. Незважаючи на те, що у схемі дві такі гілки, методом вузлових потенціалів дозволяє скористатися та обставина, що вони з'єднані у спільному вузлі 1.

Для заданої схеми існують 3 варіанти вибору нульового потенціалу:

1 варіант: припустимо $\varphi_1 = 0$,

$$\text{тоді } \varphi_2 = -E_1 = -160 \text{ В}; \varphi_3 = -100 \text{ В}; \varphi_0 = ?$$

2 варіант: припустимо $\varphi_2 = 0$,

$$\text{тоді } \varphi_1 = E_1 = 160 \text{ В}; \varphi_3 = E_1 - E_2 = 60 \text{ В}; \varphi_0 = ?$$

3 варіант: припустимо $\varphi_3 = 0$,

$$\text{тоді } \varphi_1 = E_2 = 100 \text{ В; } \varphi_2 = E_2 - E_1 = -60 \text{ В; } \varphi_0 = ?$$

Трудомісткість розрахунків за кожним з цих варіантів однакова, оскільки потрібно визначити тільки φ_0 .

Вибираємо 1 варіант:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = -160 \text{ В; } \varphi_3 = -100 \text{ В.}$$

3. Складаємо рівняння для обчислення φ_0 :

$$G_{00}\varphi_0 - G_{02}\varphi_2 - G_{03}\varphi_3 = 0;$$

$$\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) \varphi_0 - \frac{1}{R_3} \varphi_2 - \frac{1}{R_5} \varphi_3 = 0;$$

$$(0,01 + 0,01 + 0,0067)\varphi_0 - 0,01 \cdot (-160) - 0,0067 \cdot (-100) = 0;$$

$$0,0267\varphi_0 = -2,27.$$

звідки
$$\varphi_0 = -\frac{2,27}{0,0267} = -85 \text{ В.}$$

4. Знаходимо струми:

- за законом Ома у гілках з резисторами:

$$I_3 = \frac{(\varphi_0 - \varphi_2)}{R_3} = 0,75 \text{ А; } I_4 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)}{R_4} = 0,85 \text{ А;}$$

$$I_5 = \frac{(\varphi_0 - \varphi_3)}{R_5} = 0,1 \text{ А; } I_6 = \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)}{R_6} = 1,5 \text{ А.}$$

- за першим законом Кірхгофа у гілках з джерелами E_1 і E_2 :

$$I_3 = I_3 + I_6 = 2,25 \text{ А; } I_2 = I_6 - I_5 = 1,4 \text{ А.}$$

Перевіряємо правильність розрахунків за балансом потужностей:

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 = r_3 I_3^2 + r_4 I_4^2 + r_5 I_5^2 + r_6 I_6^2;$$

$$160 \cdot 2,25 - 100 \cdot 1,4 = 100 \cdot 0,75^2 + 100 \cdot 0,85^2 + 150 \cdot 0,1^2 + 40 \cdot 1,5^2;$$

$$220 = 220 \text{ Вт.}$$

Задача 3.15 (рис.3.23)

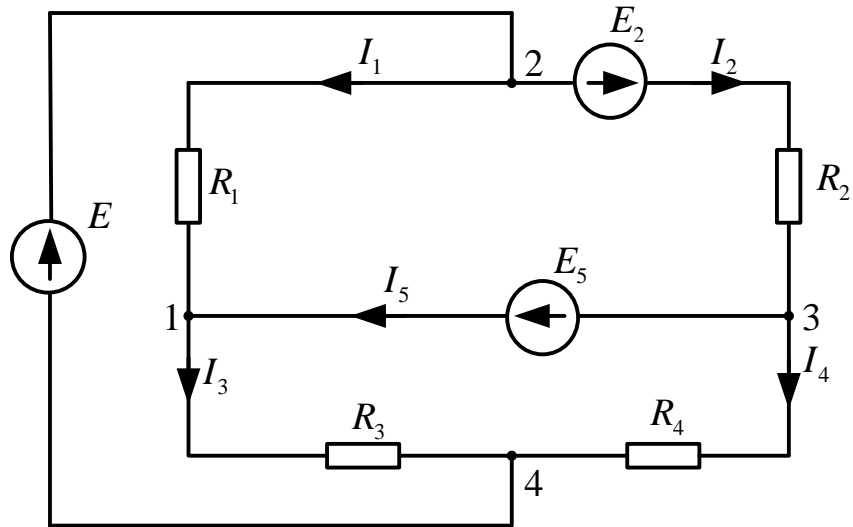


Рисунок 3.23

Відомо: $E = 100$ В; $E_2 = 10$ В; $E_5 = 40$ В; $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 30$ Ом;
 $R_3 = 20$ Ом; $R_4 = 10$ Ом.

Визначити усі струми.

Розв'язання.

1. Обчислюємо кількість вузлів: $n = 4$.

2. При виборі вузла з нульовим потенціалом відмічаємо, що між вузлами 1 – 3 та вузлами 2 – 4 підключені гілки, утворені ідеальними джерелами E_5 і E відповідно. Оскільки вказані гілки мають провідність $G = \infty$ і не з'єднані, то за будь якого вибору вузла з нульовим потенціалом при складанні рівнянь отримуємо невизначеність. На перший погляд розв'язати задачу методом вузлових потенціалів не можливо, але обійти утруднення вдається за допомогою описаного нижче штучного прийому.

Відомо така властивість електричного кола: якщо у гілки, з'єднані у спільному вузлі, ввести однакові ЕРС, напрямлені до цього вузла або від нього, то струморозподіл у колі не зміниться. Це пояснюється тим, що в рівняннях, складених за другим законом Крхгофа для будь-якого контуру, введені ЕРС взаємно компенсуються.

За цією властивістю можна ввести додаткову ЕРС $E' = E_5$ у гілки, з'єднані або у вузлі 1 або у вузлі 3. В останньому випадку схема набуває вигляду, показаного на рис. 3.24, а.

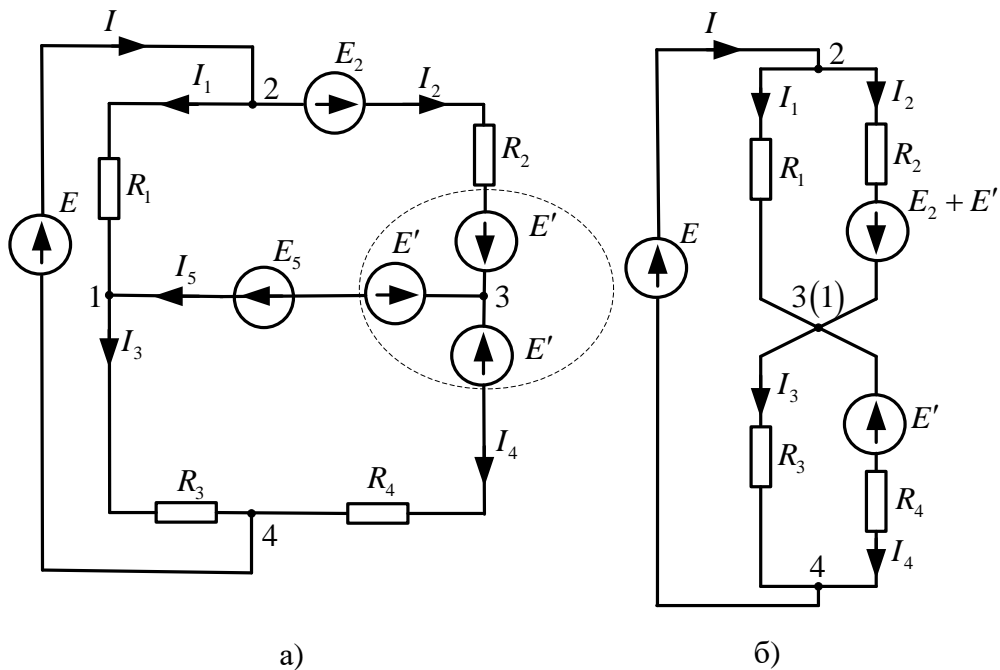


Рисунок 3.24

Тепер у цій гілці між вузлами 1 – 3 дві однакові і протилежно напрямлені ЕРС E_5 та E' . Оскільки $E_5 + E_5' = 0$, вузли 1 і 3 рівнопотенціальні, тому їх можна об'єднати. Схема набуває вигляду на рис. 3.24, б. Далі розрахунки виконуються за стандартним алгоритмом.

Прийmemo $\varphi_4 = 0$, тоді $\varphi_2 = E = 100\text{В}$, $\varphi_3 = ?$

Складаємо рівняння для невідомого φ_3 :

$$-G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 - G_{34}\varphi_4 = \sum_{3 \text{ вуз}} \pm EG;$$

$$-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)E + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\varphi_3 - 0 = \frac{E_2 + E_2'}{R_2} + \frac{E'}{R_4};$$

$$-8,9 + 0,233\varphi_3 = 1,7 + 4, \text{ звідки } \varphi_3 = 60 \text{ В.}$$

За законом Ома обчислюємо струми в гілках з резисторами:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_1} = 2 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_2 + E'}{R_2} = 3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_3} = 3 \text{ A}; \quad I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 - E'}{R_4} = 2 \text{ A}.$$

За першим законом Кірхгофа знаходимо струми у гілках з джерелами E , E_5 :

$$I = I_1 + I_2 = 5 \text{ A}; \quad I_5 = I_3 - I_1 = 1 \text{ A}.$$

Якщо ввести джерела і гілки, з'єднані у вузлі 1, то схема набуде вигляду, показаного на рис. 3.25.

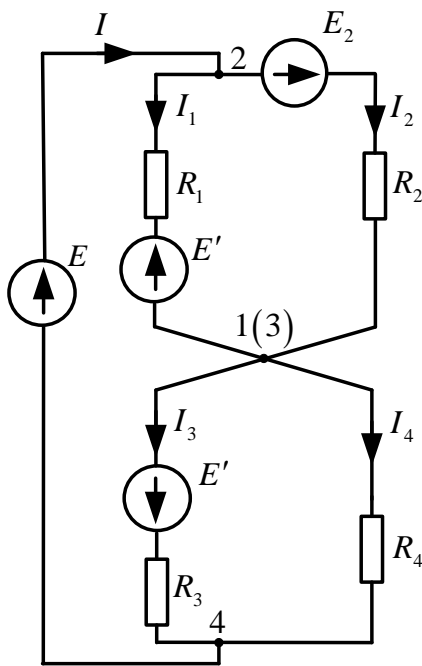


Рисунок 3.25

У такому випадку потенціал вузла 1(3) при $\varphi_4 = 0$, $\varphi_2 = E$ визначається з рівняння:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\varphi_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\varphi_2 = \\ = -\frac{E'}{R_1} - \frac{E'}{R_3} + \frac{E_2}{R_2}; \end{aligned}$$

$0,233\varphi_1 - 8,33 = -4 + 0,33$, звідки $\varphi_1 = \varphi_3 = 20 \text{ В}$.

Хоч потенціал точок 1,3 змінився, але струми у вихідній схемі такі самі:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - E'}{R_1} = 2 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_2}{R_2} = 3 \text{ A}; \quad I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 + E'}{R_3} = 3 \text{ A}; \quad I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_4} = 2 \text{ A};$$

$$I = I_1 + I_2 = 5 \text{ A}; \quad I_5 = I_3 - I_1 = 1 \text{ A}.$$

Можливий другий рівноцінний варіант розв'язання задачі: у вихідній схемі гілку між вузлами 1 – 3 залишити без змін, а у гілці між вузлами 2 – 4 ЕРС E скомпесувати шляхом введення трьох додаткових ЕРС $E' = E$ або у вузол 2, або у вузол 4. Наприклад, при введенні E' у вузол 2 схема набуде вигляду, показаного на рис. 3.26. Трудоміскість розрахунків однакова в обох варіантах

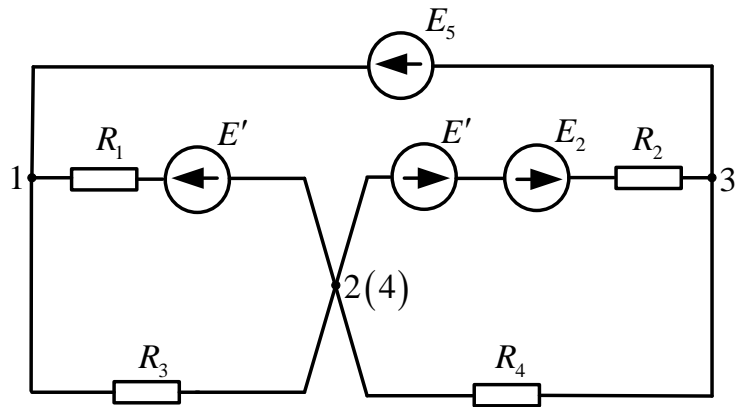


Рисунок 3.26

Задача 3.16 (рис .3.27)

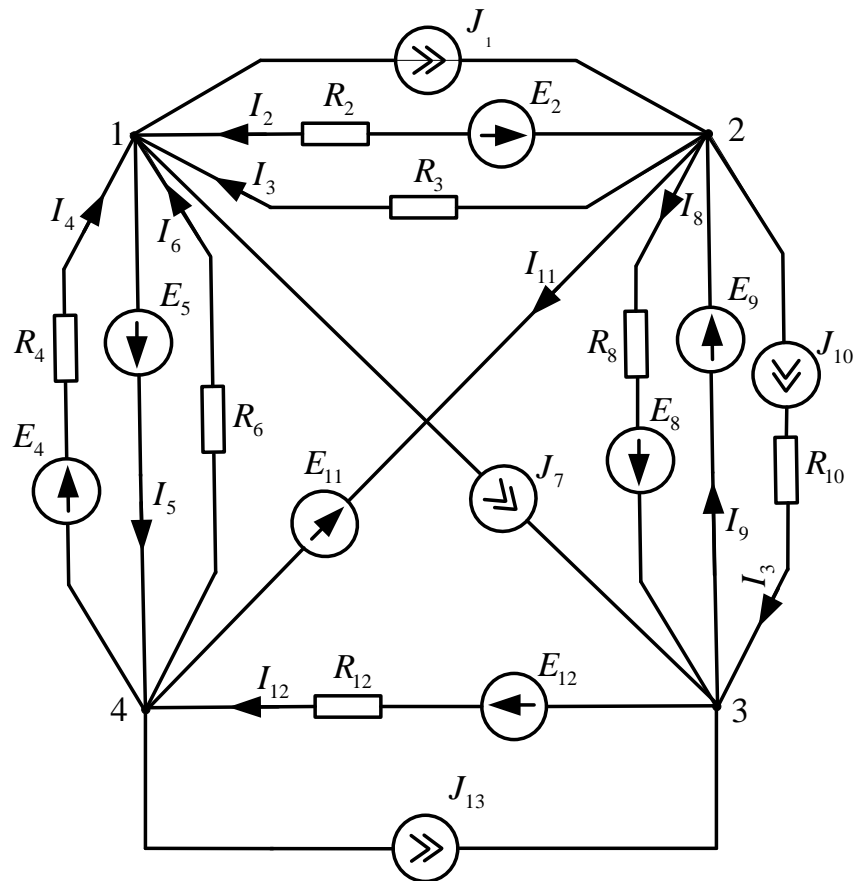


Рисунок 3.27

Відомо: $E_2 = 60 \text{ В}$, $E_4 = 20 \text{ В}$, $E_5 = 80 \text{ В}$, $E_8 = 30 \text{ В}$, $E_9 = 60 \text{ В}$,
 $E_{11} = 120 \text{ В}$, $E_{12} = 70 \text{ В}$, $J_1 = 3 \text{ А}$, $J_7 = 5 \text{ А}$, $J_{10} = 6 \text{ А}$, $J_{13} = 2 \text{ А}$,
 $R_2 = 70 \text{ Ом}$, $R_3 = 50 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$, $R_6 = 80 \text{ Ом}$, $R_8 = 30 \text{ Ом}$,
 $R_{10} = 10 \text{ Ом}$, $R_{12} = 65 \text{ Ом}$.

Визначити невідомі струми.

Розв'язання.

1. Обчислюємо кількість вузлів: $n = 4$.

2. При виборі вузла з нульвим потенціалом виділяємо три особливі гілки, які утворені ідеальними джерелами напруги (E_5, E_{11}, E_9) і мають провідність $G = \infty$. Ці гілки підключені до вузлів 1 – 4, 4 – 2, 2 – 3, отже потенціали вузлів 1 – 4 – 2 – 3 визначаються заданими ЕРС E_5, E_9, E_{11} . Приймаючи за нульовий потенціал будь-якого з цих чотирьох вузлів, ми без складання рівнянь отримаємо потенціали трьох інших вузлів. Можливі варіанти подані у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

$\varphi_1, \text{В}$	$\varphi_2, \text{В}$	$\varphi_3, \text{В}$	$\varphi_4, \text{В}$
0	$E_5 + E_1 = 200$	$E_5 + E_{11} - E_9 = 140$	$E_5 = 80$
$-E_{11} - E_5 = -200$	0	$-E_9 = -60$	$-E_{11} = -120$
$E_9 - E_{11} - E_5 = -140$	$E_9 = 60$	0	$E_9 - E_{11} = -60$
$-E_5 = -80$	$E_{11} = 120$	$E_{11} - E_9 = 60$	0

Як видно з таблиці, значення потенціалів вузлів залежать від того, потенціал якого вузла був прийнятий за нульовий, тобто від якого починається відлік.. На результати обчислень це не впливає, оскільки за будь-якого вибору різниця потенціалів між вузлами залишається однаковою, що ілюструє наведена таблиця.

Вибираємо за таблицею певний варіант, наприклад $\varphi_4 = 0$, і переходимо до розрахунку невідомих струмів. За законом Ома обчислюємо струми у гілках з резисторами:

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - E_2}{R_2} = 2 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_3} = 4 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_4}{R_4} = 5 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_6} = 1 \text{ А};$$

$$I_8 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_8}{R_8} = 3 \text{ A}; \quad I_{12} = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 + E_{12}}{R_{12}} = 2 \text{ A}.$$

За першим законом Кірхгофа визначаємо струми у гілках з ідеальними джерелами E_5, E_{11}, E_9 :

$$\text{вуз. 1: } -I_4 + I_5 - I_6 + J_7 - I_3 - I_2 + J_1 = 0 \Rightarrow I_5 = 2 \text{ A};$$

$$\text{вуз. 4: } I_4 - I_5 + I_6 - I_{11} - I_{12} + I_{13} = 0 \Rightarrow I_{11} = 2 \text{ A};$$

$$\text{вуз. 3: } -J_{13} + I_{12} - J_7 - I_8 + I_9 - J_{10} = 0 \Rightarrow I_9 = 14 \text{ A};$$

Правильність розрахунків можна перевірити, склавши рівняння для вузла 2:

$$\text{вуз. 2: } -J_1 + I_2 + I_3 + I_{11} + I_8 - I_9 + J_9 = 0;$$

$$-3 + 2 + 4 + 2 + 3 - 14 + 6 = 0.$$

3.4. Метод вузлової напруги

Цей метод є окремим випадком методу вузлових потенціалів і використовується для розрахунку струмів у колах, що мають тільки два вузли, причому кількість гілок поміж вузлами може бути довільною.

Перевага: немає потреби складати і розв'язувати систему рівнянь.

Алгоритм розрахунку

1. Визначити вузлову напругу (вузловою називають напругу між вузлами 1 і 2, причому вважається, що $\varphi_1 > \varphi_2$).

$$U_{11} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sum \pm EG + \sum \pm J}{\sum G}.$$

Слід пам'ятати: при обчисленні $\sum \pm EG$ і $\sum J$ зі знаком «+» враховують ЕРС E і струми J спрямовані до вузла 1; зі знаком «-» – від вузла 1.

2. За законом Ома розрахувати струми у гілках.

Задача 3.17 (рис. 3.28)

Відомо: $E_1 = 20 \text{ В}$, $E_2 = E_3 = 10 \text{ В}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = R_6 = 10 \text{ Ом}$,
 $R_3 = R_4 = 15 \text{ Ом}$, $R_5 = 5 \text{ Ом}$.

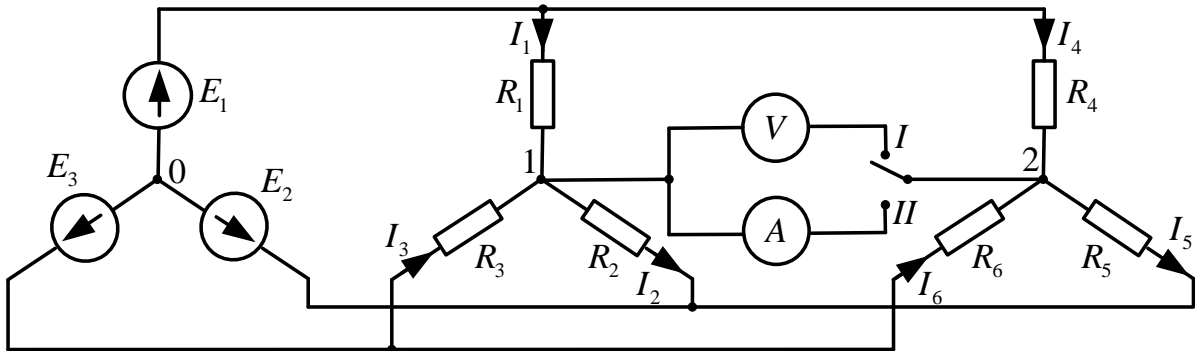


Рисунок 3.28

Визначити покази вимірювальних приладів у двох випадках:

- 1) перемикач II у положенні I;
- 2) перемикач II у положенні II.

Розв'язання.

1. Перемикач II у положенні I. Між вузлами 1–2 увімкнений вольтметр.

Розраховуємо вузлову напругу U_{10} :

$$U_{10} = \frac{\sum \pm EG + \sum \pm J}{\sum G} = \frac{E_1 \frac{1}{R_1} - E_2 \frac{1}{R_2} + E_3 \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 10 \text{ В.}$$

Розраховуємо вузлову напругу U_{20} :

$$U_{20} = \frac{\sum \pm EG + \sum \pm J}{\sum G} = \frac{E_1 \frac{1}{R_4} - E_2 \frac{1}{R_5} + E_3 \frac{1}{R_6}}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = 0,9 \text{ В.}$$

Вольтметр показує напругу між вузлами 1 і 2:

$$U_{12} = U_{10} - U_{20} = 10 - 0,9 = 9,1 \text{ В.}$$

2. Перемикач у положенні II. Між вузлами 1 – 2 ввімкнений амперметр, опір якого вважається нехтовно малим, тому вузли 1 і 2 мають однаковий потенціал. У такому випадку у схемі має місце паралельне з'єднання резисторів R_1 та R_4 , R_2 та R_5 , R_3 та R_6 .

$$R_{ек1} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} = 3,75 \text{ Ом};$$

$$R_{ек2} = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5} = 3,33 \text{ Ом};$$

$$R_{ек3} = \frac{R_3 \cdot R_6}{R_3 + R_6} = 6 \text{ Ом}.$$

Знаходимо вузлову напругу U_{10} і за законом Ома обчислюємо струми у гілках:

$$U_{10} = \frac{E_1 \frac{1}{R_{ек1}} - E_2 \frac{1}{R_{ек2}} + E_3 \frac{1}{R_{ек3}}}{\frac{1}{R_{ек1}} - \frac{1}{R_{ек2}} + \frac{1}{R_{ек3}}} = 5,46 \text{ В}.$$

Струм через амперметр розраховуємо за першим законом Кірхгофа для вузла 1, вибираючи додатний напрям цього струму від вузла 1.

$$I_1 = \frac{E_1 - V_{10}}{R_1} = 2,19 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{E_2 - V_{10}}{R_2} = 1,55 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{E_3 - V_{10}}{R_3} = 0,3 \text{ А}.$$

Струм через амперметр розраховуємо за першим законом Кірхгофа для вузла 1, вибираючи додатний напрям цього струму від вузла 1:

$$I_A + I_2 - I_1 - I_3 = 0,$$

звідки

$$I_A = I_1 - I_2 + I_3 = 1,66 \text{ А}.$$

Такий самий результат можна отримати якщо обчислити струми I_4, I_5, I_6 і скласти рівняння за першим законом Кірхгофа для вузла 2.

Задача 3.18 (рис. 3.29)

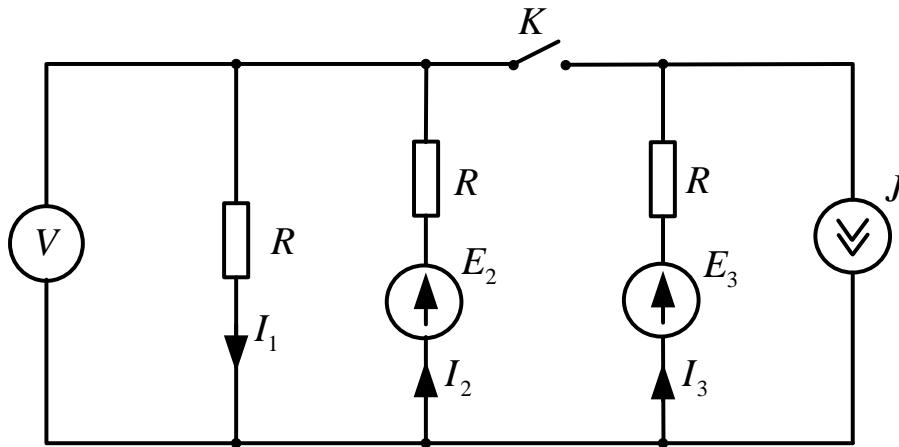


Рисунок 3.29

Відомо: $E_2 = 0,5 E_3$; при розімкненому ключі вольтметр показує 6 В, при замкненому 9 В. Потужність згенерована джерелами при замкненому ключі $P_{\text{ген}} = 157,5$ Вт.

Визначити R , струм джерела J .

Розв'язання.

При розімкненому ключі коло складається з двох окремих контурів з незалежним електричним станом (так званий «золотий переріз» кола). Складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа, для лівого контуру беручи до уваги, що за розімкненого ключа $I_1 = I_2$ і, відповідно,

$$RI_1 = RI_2 = RI = 6 \text{ В,}$$

$$E_2 = RI_1 + RI_2 = 2RI = 12 \text{ В, тоді } E_3 = 24 \text{ В.}$$

При замкненому ключі коло складається з чотирьох паралельних гілок, напруга на яких задана показом вольтметра: $U_V = U_{\text{вуз}} = 9 \text{ В.}$

Для визначення невідомих значень R, J треба скласти 2 рівняння. Перше рівняння отримуємо, склавши вираз $U_{\text{вуз}}$:

$$U_{\text{вуз}} = \frac{\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - J}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{36 - RJ}{3}.$$

Отже, $(36 - RJ)/3$ і перше рівняння має вигляд $RJ = 9$.

Друге рівняння отримуємо з виразу сумарної потужності $P_{\text{ген}}$, яка генерується усіма джерелами і відома з умови задачі.

$$P_{\text{ген}} = E_2 I_2 + E_3 I_3 - U_{\text{вуз}} J,$$

де

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{\text{вуз}}}{R} = \frac{3}{R};$$

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{\text{вуз}}}{R} = \frac{15}{R}.$$

Тоді

$$P_{\text{ген}} = 12 \cdot \frac{3}{R} + 24 \cdot \frac{15}{R} - 9J = \frac{396}{R} - 9J.$$

Друге рівняння записуємо у вигляді $396/R - 9J = 157,5$.

Розв'язання системи рівнянь

$$\left. \begin{array}{l} RJ = 9 \\ \frac{396}{R} - 9J = 157,5 \end{array} \right\}$$

дає значення

$$R = 2 \text{ Ом}; \quad J = 4,5 \text{ А}.$$

Перевірка за балансом потужностей:

$$P_{\text{ген}} = P_{\text{спож}} = RI_1^2 + RI_2^2 + RI_3^2 = R(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2);$$

$$157,5 = 2(4,5^2 + 1,5^2 + 7,5^2);$$

$$157,5 = 157,5 \text{ Вт}.$$

Задача 3.19 (рис. 3.30)

Відомо: $E_1 = E_2 = E_3 = 50 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 50 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$,
 $R_4 = 3 \text{ Ом}$.

Визначити струми і покази ватметрів у двох випадках:

- 1) ключ К розімкнений;
- 2) ключ К замкнений.

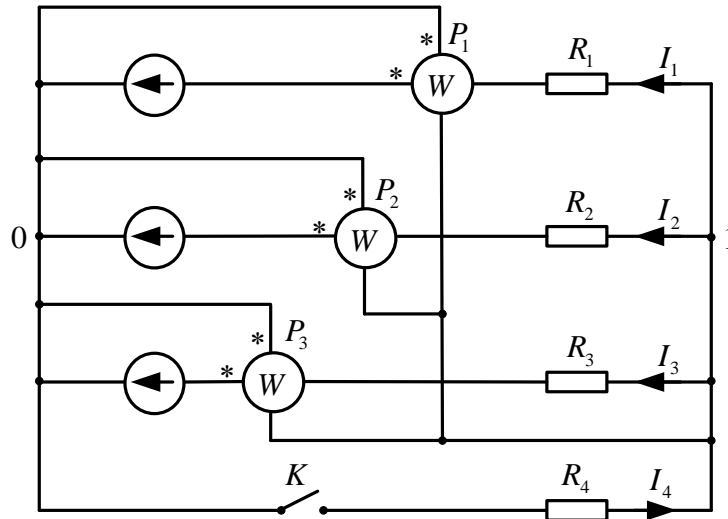


Рисунок 3.30

Розв'язання.

Випадок 1. Ключ розімкнений. Обчислюємо вузлову напругу U_{10} , а потім за законом Ома в узагальненій формі розраховуємо струми у гілках:

$$U_{10} = \frac{\sum \pm EG + \pm \sum J}{\sum G} = \frac{-\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = -50 \text{ В};$$

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1} = \frac{U_{10} + E_1}{R_1} = 0 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{U_{10} + E_2}{R_2} = 0 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_3}{R_3} = \frac{U_{10} + E_3}{R_3} = 0 \text{ А}.$$

Оскільки струм у струмовій обмотці кожного ватметра відсутній, то $P_1 = P_2 = P_3$.

Випадок 2. Ключ замкнений. Виконуємо такі самі розрахунки, як і випадку 1:

$$U'_{10} = \frac{\sum \pm EG + \pm \sum J}{\sum G} = \frac{-\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = -25,6 \text{ В};$$

$$I'_1 = \frac{U'_{10} + E_1}{R_1} = \frac{(-25,6 + 50)}{20} = 1,22 \text{ A};$$

$$I'_2 = \frac{U'_{10} + E_2}{R_2} = 4,88 \text{ A};$$

$$I'_3 = \frac{U'_{10} + E_3}{R_3} = 2,44 \text{ A};$$

$$I'_4 = \frac{U'_{01}}{R_4} = -\frac{U'_{01}}{R_4} = -\frac{(-25,6)}{3} = 8,53 \text{ A}.$$

Покази ватметрів визначаємо за формулою $P = U_{\text{обм}} I_{\text{обм}}$.

Враховуємо, що обмотка напруги кожного ватметра підключена до вузлів 0,1, причому початок цієї обмотки у вузлі 0, тому:

$$U_{\text{обм}} = U_{01} = -U_{10} = 25,6 \text{ В}.$$

$$P_1 = U'_{01} \cdot I'_1 = 31,23 \text{ Вт}; P_2 = U'_{01} \cdot I'_2 = 124,92 \text{ Вт}, P_3 = U'_{01} \cdot I'_3 = 62,46 \text{ Вт}.$$

Задача 3.20 (рис. 3.31)

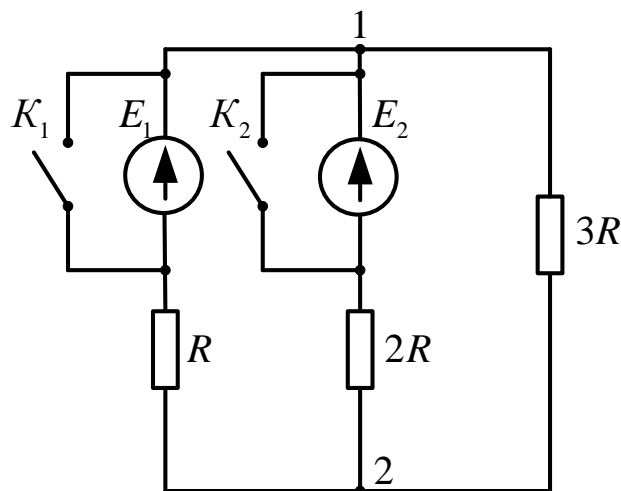


Рисунок 3.31

Відомо: коли ключ K_1 розімкнений, а ключ K_2 замкнений, резистори споживають потужність $P = 55$ Вт; коли ключ K_1 замкнений, K_2 розімкнений резистори споживають потужність $P = 176$ Вт.

Визначити потужність, споживану резисторами, якщо обидва ключі розімкнені.

Розв'язання.

Режим 1: працює джерело E_1 , джерело E_2 закорочене ключем K_2 . Знаходимо вираз потужності кожного резистора скориставшись методом вузлової напруги:

$$U_{12} = \frac{\frac{E_1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}} = 0,55 E, \text{ В};$$

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{12}}{R} = \frac{0,45E_1}{R} \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{2R} = \frac{0,27E_1}{R} \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{3R} = \frac{0,18E}{R} \text{ А};$$

$$P_1 = I_1^2 R = \frac{0,2E^2}{R} \text{ Вт}; P_2 = I_2^2 \cdot 2R = \frac{0,15E_1^2}{R} \text{ Вт};$$

$$P_3 = I_3^2 \cdot 3R = \frac{0,1E_1^2}{R} \text{ Вт}.$$

За умовою задачі задана сумарна потужність резисторів

$$P_1 + P_2 + P_3 = 55 \text{ Вт}; \frac{0,45E_1^2}{R} = 55,$$

звідки

$$E_1 = 11\sqrt{R} \text{ В}.$$

Режим 2: працює джерело E_2 , джерело E_1 закорочене ключем K_1 . Виконуємо такі самі розрахунки, як у попередньому випадку:

$$U_{12} = \frac{\frac{E_2}{2R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}} = 0,27E_2 \text{ В};$$

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R} = \frac{0,27E_2}{R} \text{ А}; I_2 = \frac{E_2 - U_{12}}{2R} = \frac{0,36E_2}{2e} \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{3R} = \frac{0,09E_2}{R} \text{ А};$$

$$P_1 + I_1^2 R = \frac{0,073E_2^2}{R} \text{ Вт};$$

$$P_2 = I_2^2 \cdot 2R = \frac{0,26E_2^2}{R} \text{ Вт};$$

$$P_3 = I_3^2 \cdot 3R = \frac{0,024E_2^2}{R} \text{ Вт};$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{0,36E_2^2}{R} \text{ Вт}.$$

За умовою задачі:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 176 \text{ Вт};$$

$$\frac{0,36E_2^2}{R} = 176 \Rightarrow E_2 = 22\sqrt{R}.$$

Режим 3: джерело E_1 – працює; джерело E_2 – працює.

$$U_{12} = \frac{\frac{E_1}{R} + \frac{E_2}{2R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}} = 0,55E_1 + 0,27E_2 = 12\sqrt{R} \text{ В};$$

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{12}}{R} = \frac{-\sqrt{R}}{R} \text{ А}; \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{12}}{2R} = \frac{5\sqrt{R}}{R} \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{3R} = \frac{4\sqrt{R}}{R} \text{ А};$$

$$P_1 + I_1^2 R = 1 \text{ Вт};$$

$$P_2 = I_2^2 \cdot 2R = 50 \text{ Вт};$$

$$P_3 = I_3^2 \cdot 3R = 49 \text{ Вт};$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 100 \text{ Вт}.$$

Перевірка за балансом потужностей:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = P_1 + P_2 + P_3;$$

$$11\sqrt{R} \left(-\frac{\sqrt{R}}{R} \right) + 22\sqrt{R} (5\sqrt{R}) = 99 \text{ Вт}.$$

Можна вважати, що баланс виконується.

3.5. Метод накладання (суперпозиції)

Ґрунтується на принципі накладання, згідно з яким струм у гілці складного кола вважають результатом накладання часткових струмів, що виникають у гілці від незалежної дії кожного джерела окремо.

Відповідно до цього складне коло з кількома джерелами енергії розглядають як сукупність простих кіл, які містять лише одне джерело. Розрахувавши прості кола, визначають за величиною і напрямком часткові струми, спричинені дією кожного джерела окремо. Дійсний струм у будь-якій гілці складного кола від одночасної дії всіх джерел обчислюють шляхом накладання, тобто алгебраїчного складання часткових струмів, що проходять цією гілкою.

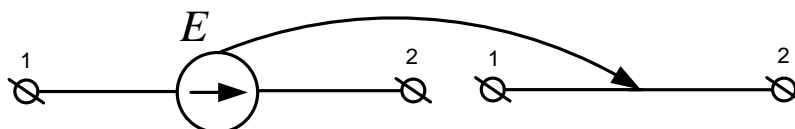
Переваги: спрощуються розрахунки, оскільки складне коло перетворюється на кілька простих кіл.

Слід пам'ятати:

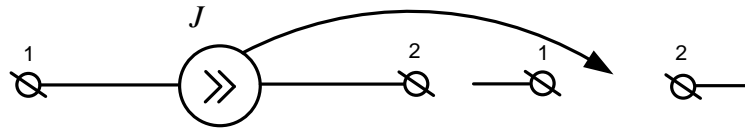
- метод накладання можна використовувати для обчислення струмів у тому числі контурних, та вузлових напруг тільки у лінійних колах;
- потужність визначити цим методом не можна, тому що вона є нелінійною функцією струму чи напруги;
- метод доцільно використовувати, якщо у колі не більше двох – трьох джерел.

Алгоритм розрахунку

1. Залишити у схемі лише одне джерело енергії, замінивши інші джерела їх внутрішніми опорами. У ідеального джерела напруги $R_0 = 0$ тому його слід замінити на відрізок проводу :



У ідеального джерела струму $R_0 = \infty$ і його затискачі потрібно розімкнути:



Обчислити часткові струми у гілках кола від дії залишеного джерела.

2. Розрахувати часткові струми, спричинені дією другого джерела енергії і т.д.

3. Після визначення часткових струмів у гілках кола від дії кожного джерела окремо, повернутися до вихідної схеми і знайти дійсні струми. Почергово розглянути кожну гілку: довільно задати додатний напрям дійсного струму і обчислити його значення як алгебраїчну суму часткових струмів, що проходять по цій гілці. Часткові струми, напрямом яких збігається з вибраним, враховувати зі знаком «+», напрямлені протилежно – враховувати зі знаком «-».

Задача 3.21 (рис. 3.32)

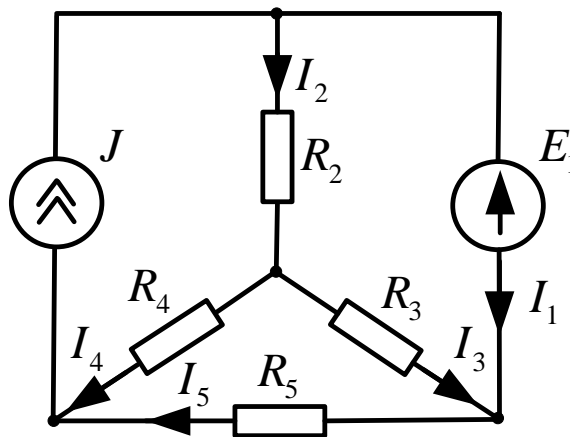


Рисунок 3.32

Відомо: $E_1 = 150 \text{ В}$; $J = 7,5 \text{ А}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$; $R_3 = 60 \text{ Ом}$; $R_4 = 100 \text{ Ом}$; $R_5 = 20 \text{ Ом}$.

Визначити струми.

Розв'язання.

1. У заданому колі струми створені двома ідеалізованими джерелами – джерелом напруги E_1 і джерелом струму J . Згідно з методом накладання, схему кола представляємо як сукупність двох схем: в одній діє тільки джерело струму J (рис. 3.33, а), у другій – тільки джерело напруги E_1 (рис. 3.33, б).

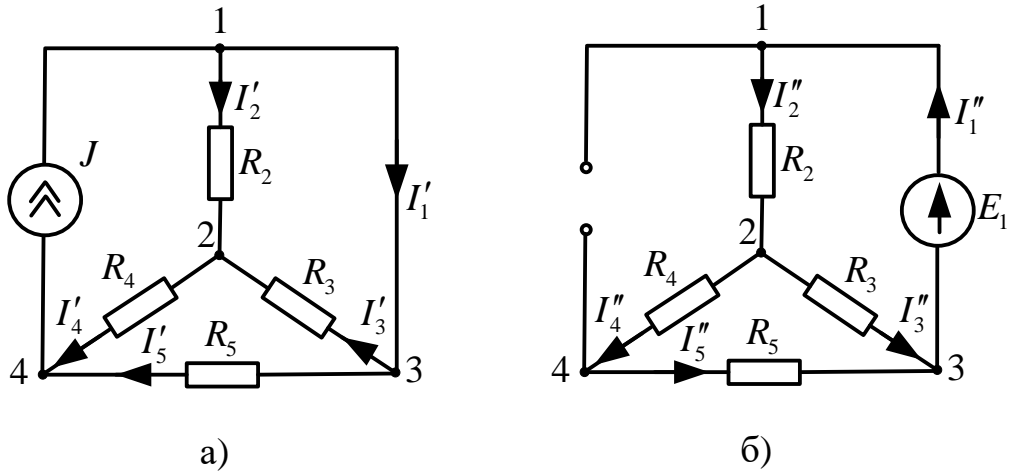


Рисунок 3.33

2. Обчислюємо часткові струми від дії J , замінивши ідеальне джерело напруги E_1 відрізком проводу (рис. 3.33, а). Визначаємо еквівалентний опір кола відносно затискачів 1, 4 джерела J , беручи до уваги, що точки 1 і 3 з'єднані проводом, тому мають однаковий потенціал і їх доцільно об'єднати (рис. 3.34, а).

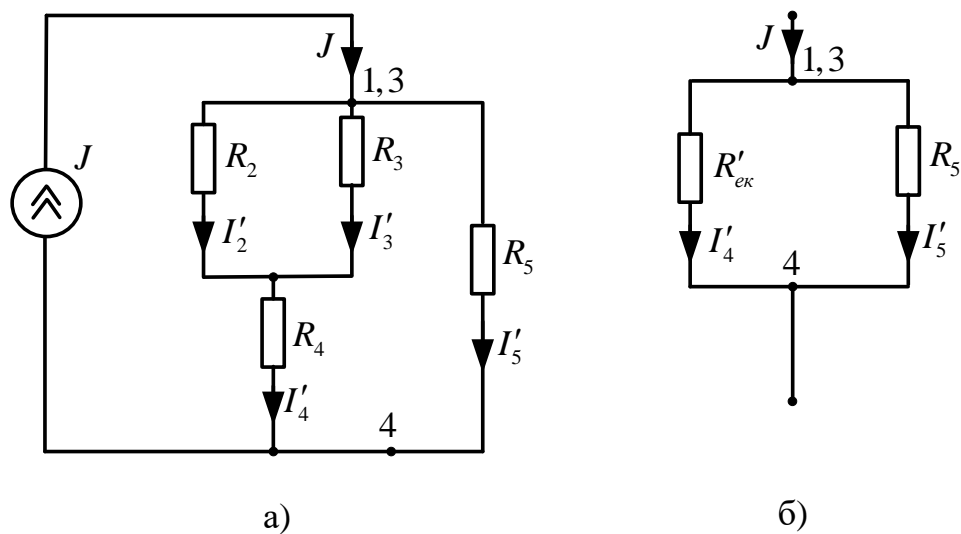


Рисунок 3.34

За формулою чужого опору, користуючись схемами на рис. 3.34, розраховуємо усі часткові струми:

$$R'_{ек} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = 30 \text{ Ом};$$

$$I'_4 = J \frac{R_5}{R'_{ек} + R_5} = 3 \text{ А};$$

$$I'_5 = \frac{R'_{ек}}{R'_{ек} + R_5} = 4,5;$$

$$I'_2 = I'_4 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ А};$$

$$I'_3 = I'_4 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1 \text{ А}.$$

За першим законом Кірхгофа знаходимо струм у проводі між точками 1 і 3:

$$I'_1 = J - I'_2 = 5,5 \text{ А}.$$

Підсумок: від дії джерела струму J маємо такі часткові струми у гілках кола:

$$I'_1 = 5,5 \text{ А}; \quad I'_2 = 2 \text{ А}; \quad I'_3 = 1 \text{ А}; \quad I'_4 = 3 \text{ А}; \quad I'_5 = 4,5 \text{ А}.$$

3. Обчислюємо часткові струми від дії джерела напруги E_1 вилучивши зі схеми ідеальне джерело струму J (рис. 3.33). Розраховуємо еквівалентний опір

кола відносно затискачів з джерела (рис. 3.35):

$$R''_{ек} = \frac{(R_4 + R_5)R_3}{R_4 + R_5 + R_3} + R_2 = 50 \text{ Ом}.$$

Часткові струми знаходимо за законом Ома:

$$I''_1 = I''_2 = \frac{E_1}{R''_{ек}} = 3 \text{ А}$$

і за формулами «чужого опору»:

$$I''_4 = I''_5 = I''_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R_5} = 2 \text{ А};$$

$$I''_3 = I''_2 \frac{R_4 + R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 1 \text{ А}.$$

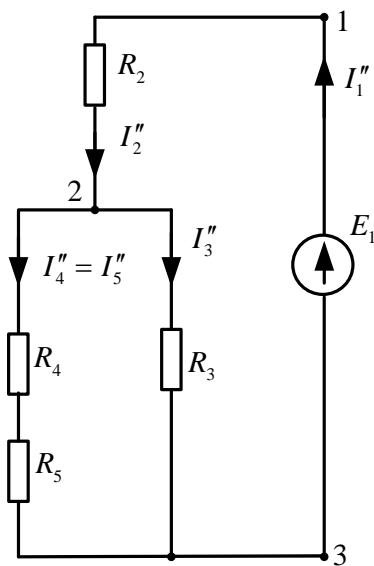


Рисунок 3.35

Підсумок: від дії джерела напруги часткові струми у гілках кола такі:

$$I_1'' = 3 \text{ A}, I_2'' = 3 \text{ A}, I_3'' = 1 \text{ A}, I_4'' = 2 \text{ A}, I_5'' = 2 \text{ A}.$$

4. Визначаємо дійсні струми за одночасної дії E_1 і J .

Довільно вибираємо додатний напрямок струму в кожній гілці заданого складного кола (див. рис. 3.32) і обчислюємо його як суму часткових струмів з урахуванням їх напрямку через гілку, що розглядається:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 5,5 - 3 = 2,5 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 2 + 3 = 5 \text{ A};$$

$$I_3 = -I_3' + I_3'' = -1 + 1 = 0 \text{ A};$$

$$I_4 = I_4' + I_4'' = 3 + 2 = 5 \text{ A};$$

$$I_5 = I_5' - I_5'' = 4,5 - 2 = 2,5 \text{ A}.$$

Задача 3.22 (рис. 3.36)

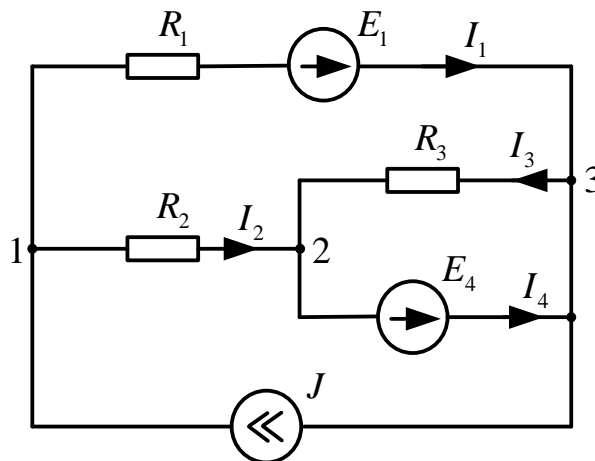


Рисунок 3.36

Відомо: $E_1 = 20 \text{ В}$, $E_2 = 40 \text{ В}$, $J = 6 \text{ А}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$,
 $R_3 = 20 \text{ Ом}$.

Визначити усі струми.

Розв'язання.

1. Згідно з методом накладання схему заданого складн розглядаємо як сукупність трьох (за кількістю джерел енергії) окремих часткових схем, кожна з яких містить одне джерело енергії (рис. 3.37, а, б, в), причому почерговість

вибору джерел довільна. Оскільки внутрішні опори джерел не задані, вважаємо їх ідеальними, тобто $R_{OE} = 0$, $R_{OJ} = \infty$.

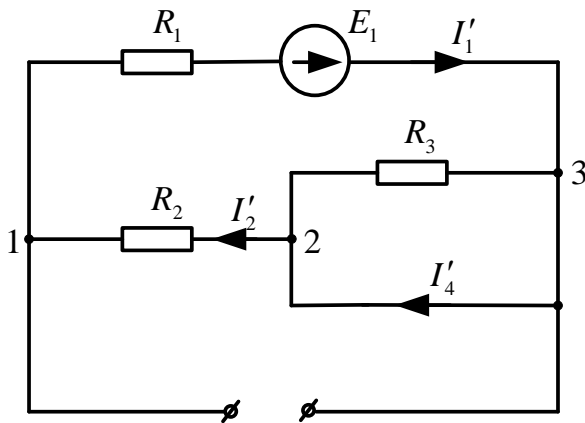


Рисунок 3.37, а

2. Розраховуємо часткові струми від дії джерела напруги E_1 , вилучивши зі схеми на рис. 3.36 джерела E_1 , J (рис. 3.37, а). У даному випадку резистор закорочений проводом, тому струм, створений, залишається по контуру $E_1 - \text{провід} - R_2 - R_1 - E_1$ (див. розділ 2.3).

Відповідні часткові струми такі:

$$I'_1 = I'_4 = I'_2 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = 1 \text{ А}, \quad I'_3 = 0.$$

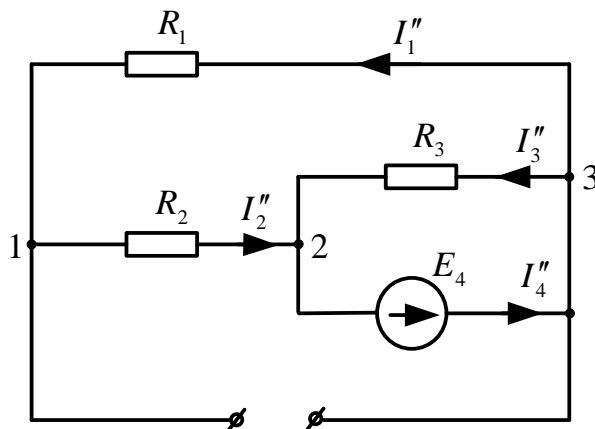


Рисунок 3.37, б

3. Розраховуємо часткові струми від дії джерела напруги E_4 , вилучивши з вихідної схеми на рис. 3.36 джерела E_1 , J (рис. 3.37, б).

Знаходимо еквівалентний опір кола відносно затискачів 2 – 3 джерела:

$$R_{23} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 10 \text{ Ом.}$$

Обчислюємо струми, скориставшись законом Ома і формулами чужого опору:

$$I''_4 = \frac{E_4}{R_{23}} = 4 \text{ А},$$

$$I''_1 = I''_2 = I''_4 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \text{ А},$$

$$I''_3 = I''_4 \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \text{ А}, \quad I''_3 = I''_4 - I''_1 = 2 \text{ А}.$$

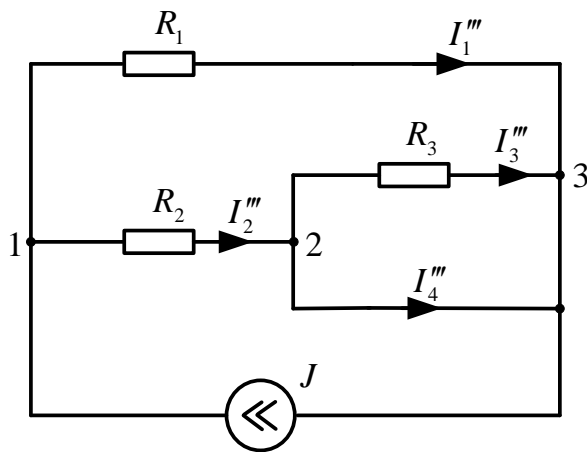


Рисунок 3.37, в

4. Розраховуємо часткові струми від дії джерела струму J (рис.3.37, в). Оскільки резистор R_3 закорочений проводом, то струм проходить повз нього через провід, тому $I_3''' = 0$. Інші струми обчислюємо за формулами «чужого опору».

$$I_1''' = J \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3 \text{ A};$$

$$I_2''' = I_4''' = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 3 \text{ A}.$$

5. Повертаємось до вихідної схеми на рис. 3.36. Почергово розглядаємо кожну гілку кола. Довільно задаємо умовно-додатний напрямок струму в гілці, що розглядається (див. рис. 3.36). Розраховуємо значення дійсного струму в цій шляхом алгебраїчного складання часткових струмів:

$$I_1 = I_1' - I_1'' + I_1''' = 2 \text{ A};$$

$$I_2 = -I_2' + I_2'' + I_2''' = 4 \text{ A};$$

$$I_3 = 0 + I_3'' + 0 = 2 \text{ A};$$

$$I_4 = -I_4' + I_4'' + I_4''' = 6 \text{ A}.$$

Перевіряємо виконання першого закону Кірхгофа для вузлів:

$$\text{вуз 1: } I_1 + I_2 - J = 0;$$

$$\text{вуз 2: } -I_2 - I_3 + I_4 = 0;$$

$$\text{вуз 3: } -I_1 - I_4 + I_3 + J = 0.$$

Задача 3.33 (рис. 3.38)

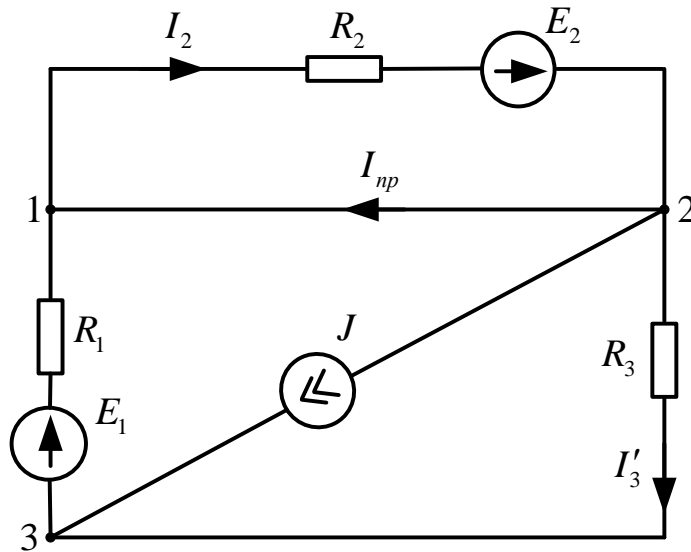


Рисунок 3.38

Відомо: $E_1 = 10 \text{ В}$; $E_2 = 36 \text{ В}$; $J = 1 \text{ А}$; $R_1 = 8 \text{ Ом}$; $R_2 = 6 \text{ Ом}$;
 $R_3 = 3 \text{ Ом}$.

Визначити усі струми.

Розв'язання.

1. У колі діють три джерела енергії E_1 , E_2 , J , тому його схему розглядаємо як сукупність трьох часткових схем, кожна з яких містить одне джерело енергії, (рис. 3.39, а, б, в). Оскільки внутрішні опори джерел не задані, вважаємо, що $R_{0E} = 0$, $R_{0J} = \infty$.

2. Розраховуємо часткові струми від дії джерела напруги E_1 , замінивши E_2 відрізком проводу, а джерело J – розімкненими затискачами (рис. 3.39, а).

У схемі резистор R_2 закорочений проводом (див. розділ 2.3), тому струм від дії E_1 замикається по контуру $E_1 - R_1 - \text{провід} - R_3 - E_1$. Відповідний струморозподіл:

$$I'_1 = I'_{\text{пр.}} = I'_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = 0,9 \text{ А}; \quad I'_2 = 0.$$

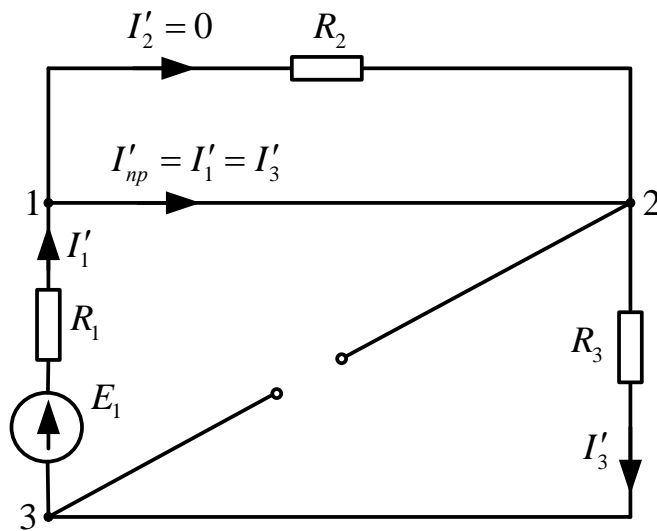


Рисунок 3.39, а

3. Розраховуємо часткові струми від дії E_2 (рис. 3.39, б).

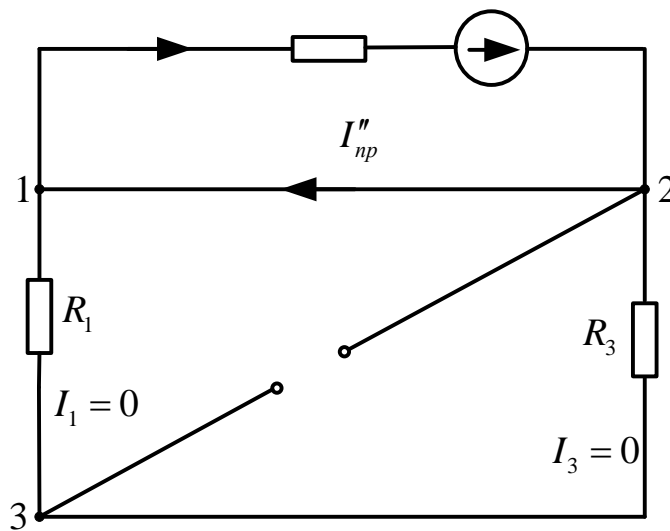


Рисунок 3.39, б

Провід закорочує гілку з послідовно з'єднаними резисторами R_1, R_3 , тому струм від дії E_2 замикається по контуру E_2 – провід – R_2 – E_2 :

$$I''_2 = I''_{np} = \frac{E_2}{R_2} = 6 \text{ А}; \quad I'_1 = I'_3 = 0.$$

4. Розраховуємо часткові струми від дії J (рис. 3.39, в).

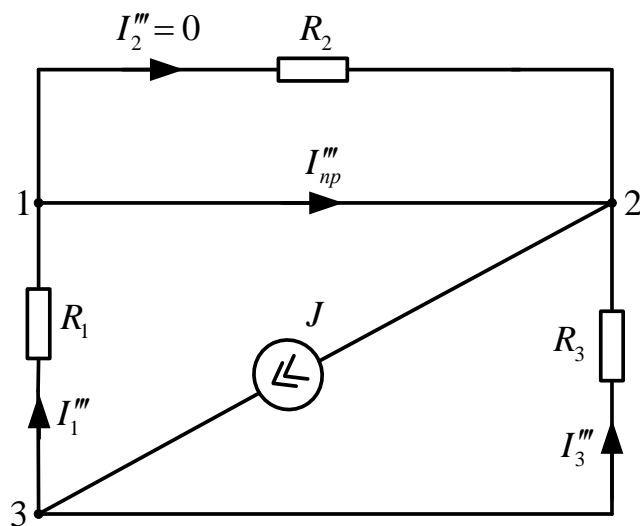


Рисунок 3.39, в

Резистор R_2 закорочений проводом; резистори R_1 і R_3 відносно затискачів 2 – 3 джерела J з'єднані паралельно, тому для обчислення струмів I_1''' , I_3''' використовуємо формули «чужого опору»:

$$I_2''' = 0; \quad I_1''' = I_{\text{пр.}}'' = J \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 0,27 \text{ A};$$

$$I_3''' = J \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 0,73 \text{ A}.$$

5. Повертаємось до вихідної схеми і визначаємо дійсні струми.

Довільно вибираємо умовно-додатний напрям струму в кожній гілці (рис. 3.38). Дійсний струм у певній гілці знаходимо з урахуванням напрямку часткових струмів, що в ній проходять.

$$I_1 = I_1' + 0 + I'' = 1,17 \text{ A};$$

$$I_2 = 0 + I_2'' + 0 = 6 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3' + 0 - I_3''' = 0,17 \text{ A};$$

$$I_{\text{пр}} = -I_{\text{пр}}' + I_{\text{пр}}'' - I_{\text{пр}}''' = 4,83 \text{ A}.$$

Перевіряємо виконання першого закону Кірхгофа для вузлів схеми:

$$\text{вуз. 1: } I_1 - I_2 + I_{\text{пр}} = 0; \quad 1,17 - 6 + 4,83 = 0;$$

$$\text{вуз. 2: } I_2 - J + I_{\text{пр}} - I_3 = 0; \quad 6 - 1 - 4,83 - 0,17 = 0;$$

$$\text{вуз 3: } -I_1 + J + I_3 = 0; \quad -1,17 + 1 + 0,17 = 0.$$

Задача 3.34 (рис. 3.40)

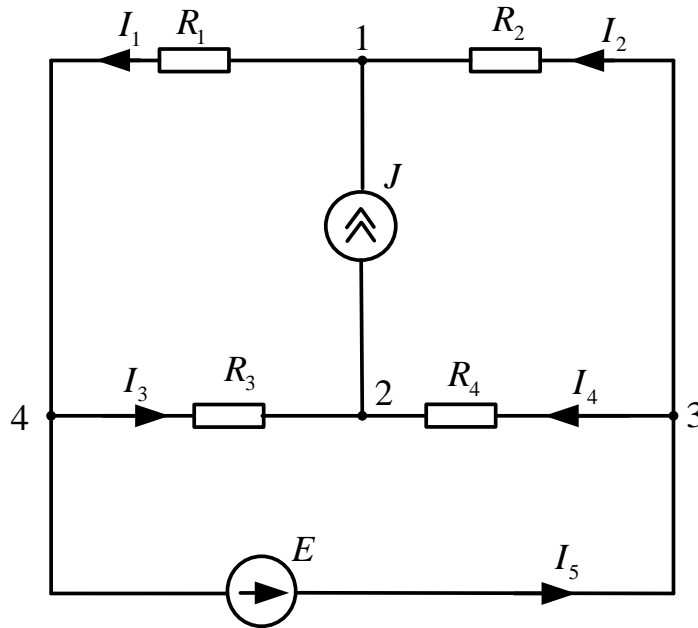


Рисунок 3.40

Відомо: $R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = 45 \text{ Ом}$, $R_3 = 60 \text{ Ом}$, $R_4 = 30 \text{ Ом}$,
 $E = 180 \text{ В}$, $J = 6 \text{ А}$.

Визначити усі струми.

Розв'язання.

1. Схему заданого складного кола з двома джерелами енергії E та J подаємо як сукупність двох часткових схем: в одній діє тільки джерело J , у другій – тільки E (рис. 3.41, а, б). Джерела вважаємо ідеальними ($R_{0E} = 0$, $R_{0J} = \infty$).

2. Розраховуємо часткові струми від джерела струму J (рис. 3.41, а).

Вузли 3, 4 з'єднані проводом, опір якого вважається рівним нулю, тому $\varphi_3 = \varphi_4$. По суті вузли 3, 4 – це один і той самий «розсунутий у просторі» електричний вузол (див. розділ 2.1). Звідки випливає, що резистори R_1 , R_2 відносно затискачів джерела з'єднані паралельно; те саме стосується резисторів R_3 , R_4 .

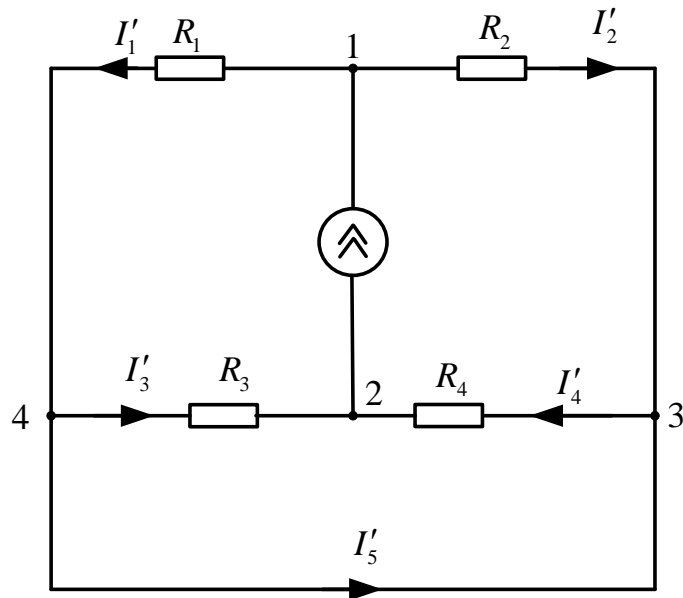


Рисунок 3.41, а

Для визначення струмів у резисторах використовуємо формули «чужого опору»:

$$I'_1 = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 4,5 \text{ A};$$

$$I'_2 = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 1,5 \text{ A};$$

$$I'_3 = J \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 2 \text{ A};$$

$$I'_4 = J \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 4 \text{ A}.$$

За першим законом Кірхгофа знаходимо струм у проводі:

$$I'_5 = I'_1 - I'_3 = 2,5 \text{ A};$$

або

$$I'_5 = I'_4 - I'_2 = 2,5 \text{ A}.$$

3. Розрахуємо часткові струми від дії джерела напруги (рис. 3.41, б).

$$I''_1 = I''_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 3 \text{ A};$$

$$I''_3 = I''_4 = \frac{E}{R_3 + R_4} = 2 \text{ A}.$$

$$I_5'' + I_2'' + I_4'' = 5 \text{ A}$$

або

$$I_5'' = I_1'' + I_3'' = 5 \text{ A.}$$

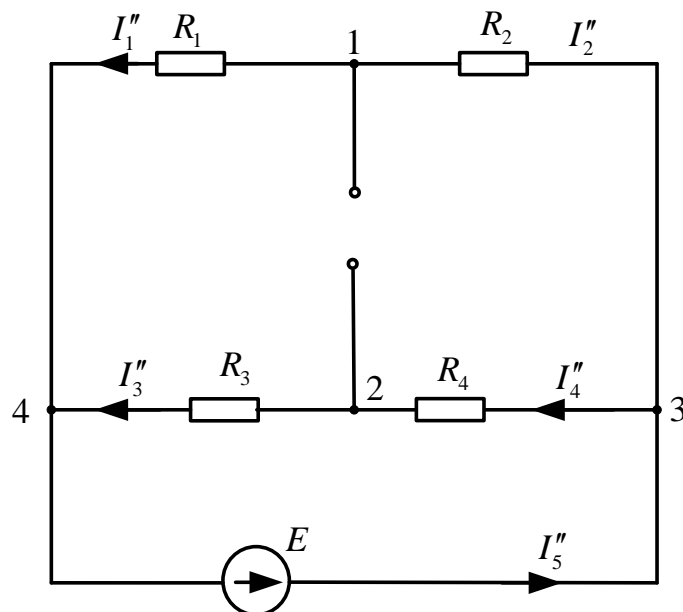


Рисунок 3.41, б

4. Повертаємось до вихідної схеми і довільно додаємо умовно-додатні напрями струмів у гілках кола. Знаходимо дійсний струм у кожній гілці за обчисленими частковими струмами з урахуванням їхнього напрямку відносно вибраного додатним:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 7,5 \text{ A}; \quad I_2 = -I_2' + I_2'' = 1,5 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3' = I_3'' = 0; \quad I_4 = I_4' + I_4'' = 6 \text{ A};$$

$$I_5 = I_5' + I_5'' = 7,5 \text{ A.}$$

Задача 3.35 (рис. 3.42)

Відомо: за дії окремо джерела струму $J = 6 \text{ A}$ ватметр показує 160 Вт. За одночасної дії обох джерел ватметр показує 40 Вт. Співвідношення опорів $R_1 = R_2$, $R_3 = 2R_2$.

Визначити значення і напрямки E_3 .

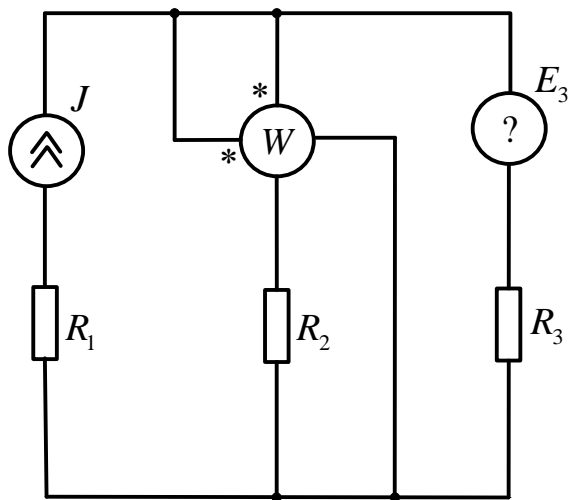


Рисунок 3.42

Розв'язання.

1. Представляємо схему заданого кола як сукупність двох часткових схем, в яких джерело струму J і джерело напруги E_3 діють окремо (рис. 3.43, а, б).

2. Аналізуємо схему за дії джерела (для більшої наочності вилучаємо ватметр (рис. 3.43, а): $I'_1 = J = 6 \text{ А}$.

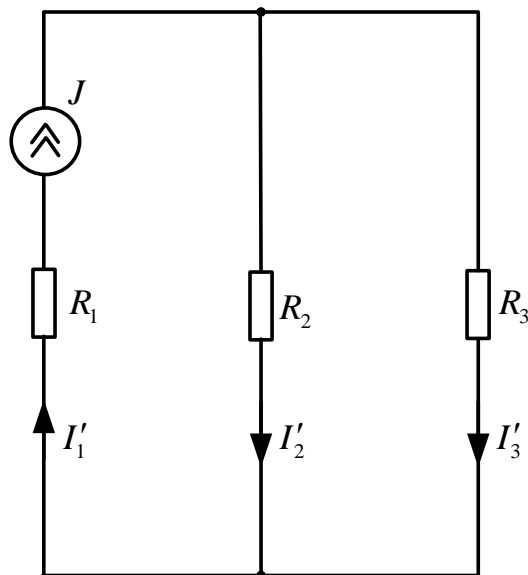


Рисунок 3.43, а

За формулами «чужого опору» обчислюємо струми у паралельних гілках:

$$I'_2 = J \frac{R_3}{R_2 + R_3} = J \frac{2R_2}{3R_2} = 4 \text{ А};$$

$$I'_3 = J \frac{R_2}{R_2 + R_3} = J \frac{R_2}{3R_2} = 2 \text{ A.}$$

Оскільки потужність резистора відома з умови задачі, можна розрахувати опори R_1 , R_2 , R_3 :

$$P_2 = R_2 (I'_2)^2 = 160 \text{ Вт,}$$

звідки

$$R_2 = 10 \text{ Ом;}$$

відповідно

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом; } R_3 = 2R_2 = 20 \text{ Ом.}$$

3. Аналізуємо кола за дії джерела E_3 (рис. 3.43, б).

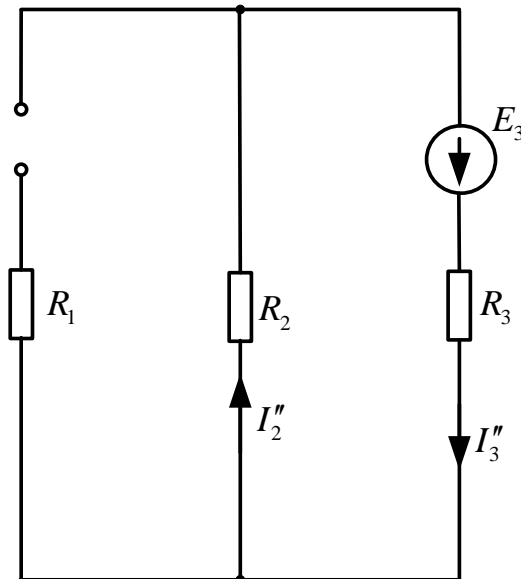


Рисунок 3.43, б

З умови задачі відома потужність P_2 при одночасній дії обох джерел, отже можна визначити дійсний струм I_2 :

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = 2 \text{ A.}$$

Оскільки значення дійсного струму $I_2 = 2 \text{ A}$ менше, ніж часткового $I_2 = 4 \text{ A}$, то це означає, що частковий струм I_2'' від дії E_3 напрямлений зустрічно I_2' :

$$I_2'' = I_2 - I_2' = 2 \text{ A; } I_3'' = I_2'' = 2 \text{ A.}$$

Тоді за другим законом Кірхгофа

$$E_3 = R_3 I_3'' + R_2 I_2'' = 60 \text{ В.}$$

Задача 3.36 (рис. 3.44)

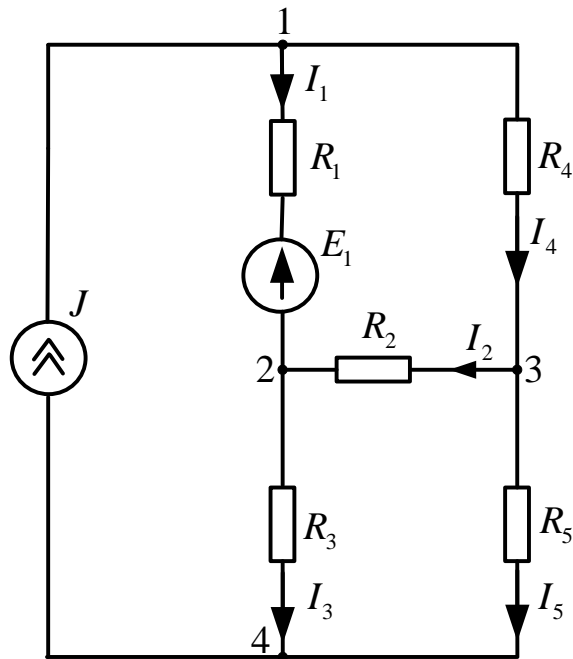


Рисунок 3.44

Відомо: $E_1 = 50 \text{ В}$, $J = 2 \text{ А}$, $R_1 = R_3 = R_5 = 200 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$,
 $R_4 = 30 \text{ Ом}$.

Визначити яку ЕРС слід ввімкнути послідовно з резистором R_3 , щоб струм I_3 став рівним нулю.

Розв'язання.

Записуємо вираз струму

$$I_1 = \frac{U_{12} - E_1}{R_1},$$

з якого випливає, що $I_1 = 0$ за умови $U_{12} = E_1 = 50 \text{ В}$, де $U_{12} = R_4 I_4 + R_2 I_2$.

При $I_1 = 0$ через резистор R_4 проходить струм джерела J , тому у виразі напруги $U_{12} = R_4 I_4 + R_2 I_2$ перший доданок $R_4 I_4 = R_4 J = 60 \text{ В}$ є незмінним, а в другому доданку шляхом введення у схему додаткової ЕРС можна змінювати і напрямок струму I_2 так, щоб виконувалась умова:

$$U_{12} = 60 - R_2 I_2 = 50 \text{ В.}$$

З останньої рівності видно, що додаткова ЕРС має забезпечити значення струму $I_2 = 1 \text{ А}$ і його напрямок від вузла 2 до вузла 3. Згідно з умовою задачі підключаємо послідовно до R_3 додаткову ЕРС $E_{\text{дод}}$, тоді схема набуває вигляду, показаного на рис. 3.45. Отриману схему можна розглядати як сукупність 2 часткових схем – в одній діє тільки джерело струму J , у другій – джерело напруги $E_{\text{дод}}$ (рис. 3.46, а, б).

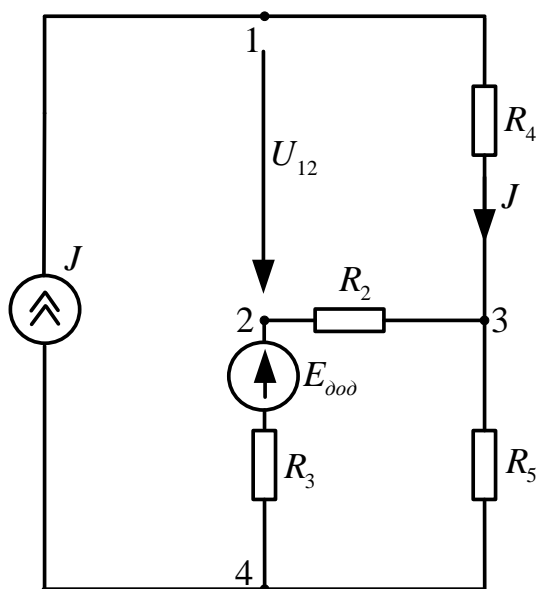


Рисунок 3.45

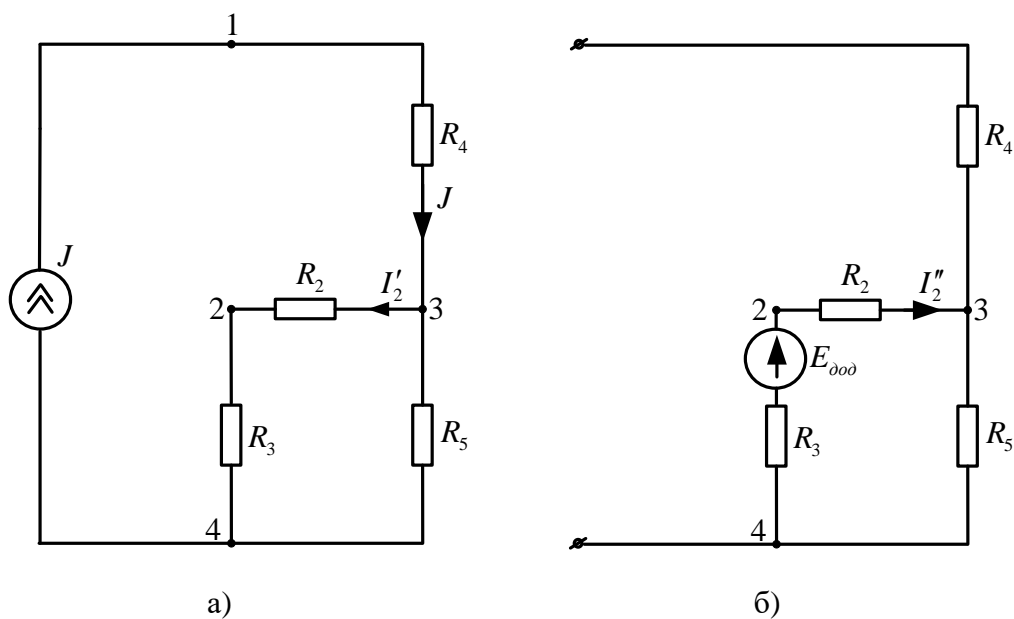


Рисунок 3.45, а, б

Частковий струм I_2 від дії джерела визначаємо за формулою «чужого опору»:

$$I_2' = J \frac{R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 0,8 \text{ A.}$$

Оскільки вище з'ясовано, що дійсне значення струму I_2 має бути рівним 1 А, то частковий струм I_2'' знаходимо із рівняння $I_2 = I_2'' - I_2'$, звідки $I_2'' = I_2 + I_2' = 1,8 \text{ A.}$

Тоді за законом Ома для другої часткової схеми обчислюємо значення $E_{\text{дод}}$:

$$E_{\text{дод}} = I_2''(R_2 + R_3 + R_5) = 90 \text{ В.}$$

Такий самий результат можна отримати, якщо для схеми на рис. 3.45 скласти рівняння за методом контурних струмів, враховуючи фактори:

$$1) J_{1к} = J = 2 \text{ A;}$$

$$2) \text{ дійсний струм } I_2 = J_{2к} - J_{1к} = J_{2к} - J = 1 \text{ A.}$$

Отже маємо:

$$\left. \begin{aligned} -(R_2 + R_3)J + (R_2 + R_3 + R_5)J_{2к} &= E_{\text{дод}} \\ J_{2к} - J &= 1 \end{aligned} \right\}$$

звідси:

$$E_{\text{дод}} = -30 \cdot 2 + 50 \cdot 3 = 90 \text{ В.}$$

3.6. Метод перетворення паралельних активних гілок електричного кола

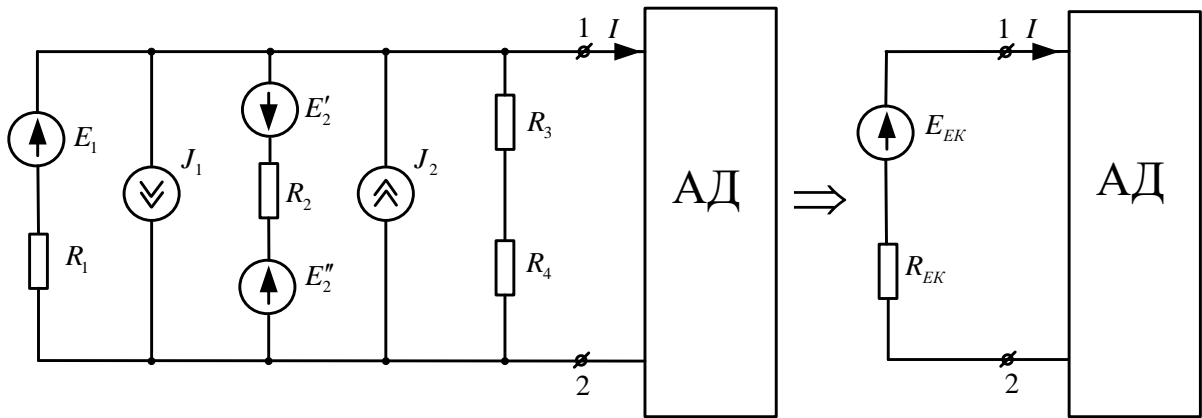


Рисунок 3.46

Алгоритм перетворення

1. Довільно задати напрям еквівалентної ЕРС і розрахувати її значення за формулою:

$$E_{ЕК} = \frac{\sum \pm E_k G_k + \sum \pm J_k}{\sum G_k}.$$

Слід пам'ятати:

- зі знаком «+» враховують E та J , напрямом яких збігається з довільно вибраним напрямком $E_{ЕК}$; зі знаком «-» враховують E та J , напрямлені протилежно $E_{ЕК}$;

- якщо у деякій гілці ЕРС відсутня, то відповідний доданок у чисельнику випадає, але провідність цієї гілки у знаменнику формули залишається.

2. Обчислити еквівалентний опір перетворюваних гілок за формулою:

$$R_{ЕК} = \frac{1}{\sum G}.$$

Приклад. Для схеми на рис. 3.46:

$$E_{ЕК} = \frac{E_1/R_1 + (E_2'' - E_2')/R_2 - J_1 + J_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/(R_3 + R_4)};$$

$$R_{ek} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/(R_3 + R_4)}.$$

Слід пам'ятати:

- гілки заданої схеми (рис. 3.46, а) і гілка перетвореної схеми (рис. 3.46, б) еквівалентні тільки в сенсі їх поведінки відносно усїєї іншої частини кола, зображеної у вигляді АД; однак вони не еквівалентні за потужністю.

Дійсно, у гілках схеми (рис. 3.46, а) струми можуть проходити навіть коли $I = 0$; у гілці 1 – 2 (рис. 3.46, б) при $I = 0$ струм і споживання енергії відсутні.

Окремі випадки

Еквівалентна заміна джерела струму на джерело напруги (рис. 3.47):

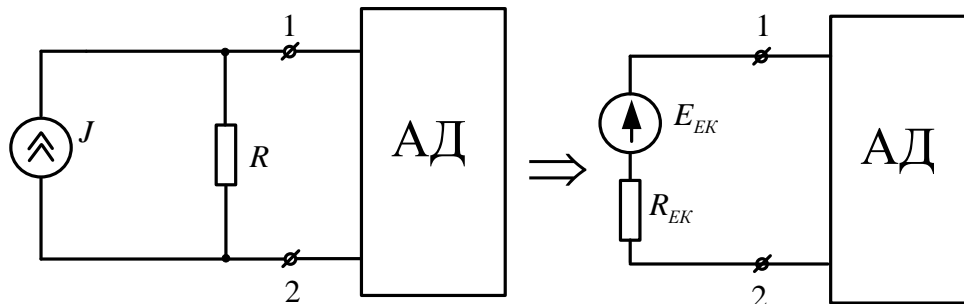


Рисунок 3.47

$$E_{EK} = RJ; \quad R_{EK} = R.$$

Приклад. На рис. 3.48, а зображено частину кола, в якому між вузлами 1 і 4 підключено джерело струму J . Перший закон Кірхгофа у вузлах 2 і 3 не порушиться, якщо в кожній з них додати два протилежно напрямлених струми зі значенням J (рис. 3.48, б). Тоді одне джерело струму між вузлами 1 – 4 можна замінити трьома джерелами струму: перше – між вузлами 1 – 2, друге – між вузлами 2 – 3, третє – між вузлами 3 – 4 (рис. 3.48, в). Після цього виконати заміну джерел струму еквівалентними джерелами ЕРС за вище наведеною формулою:

$$E_{EK} = R_1J; \quad E_{EK_2} = R_2J; \quad E_{EK_3} = R_3J.$$

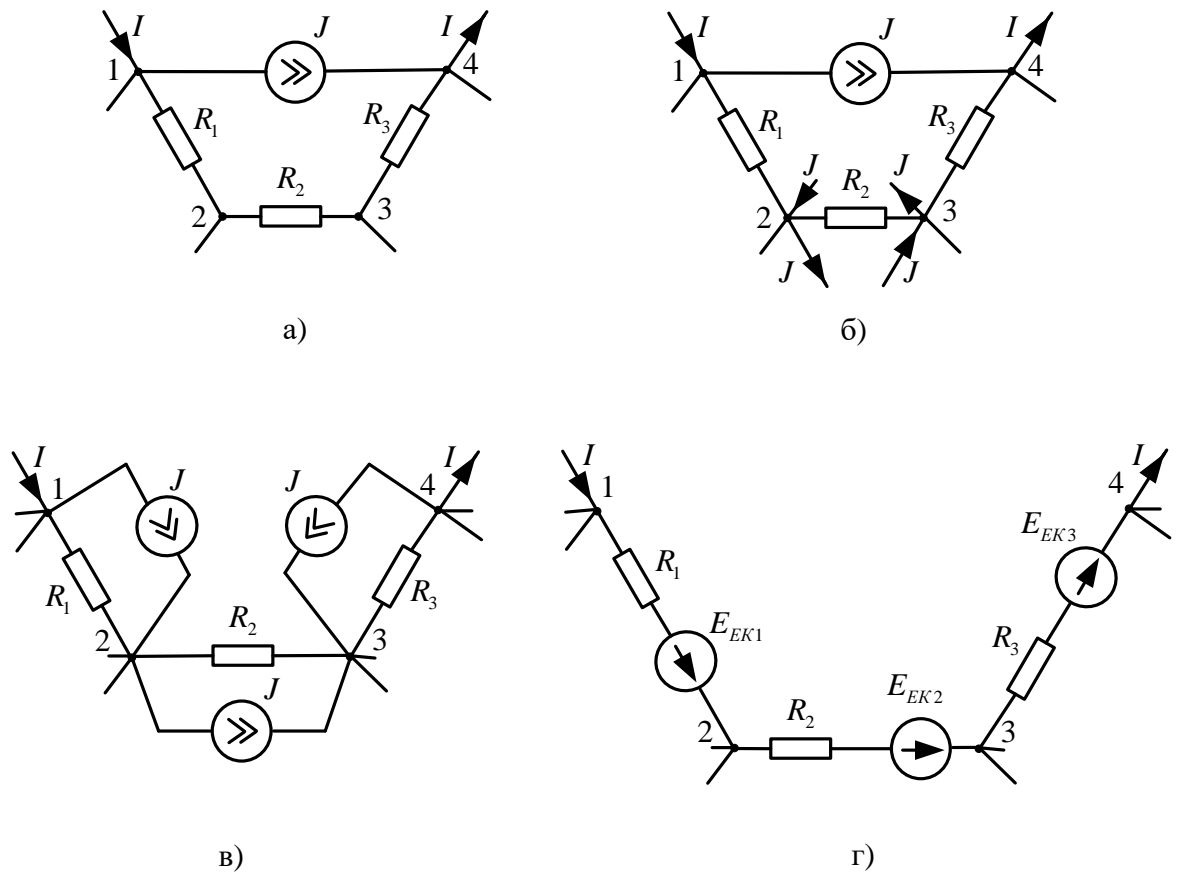


Рисунок 3.48

Еквівалентна заміна джерела ЕРС на джерело струму (рис. 3.49).

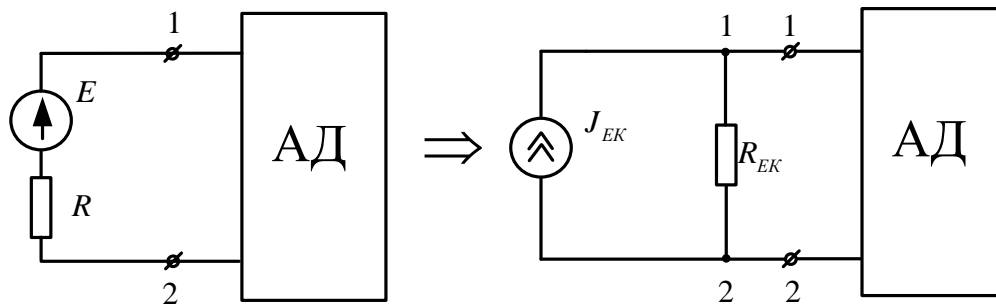


Рисунок 3.49

$$J_{EK} = \frac{E}{R}; \quad R_{EK} = R.$$

Приклад. На рис. 3.50, а, показано частину кола, яку відносно затискачів 1, 2 навантаження R_H можна розглядати як еквівалентний генератор струму J_{EK} з внутрішнім опором R_{EK} (рис. 3.50, б, в).

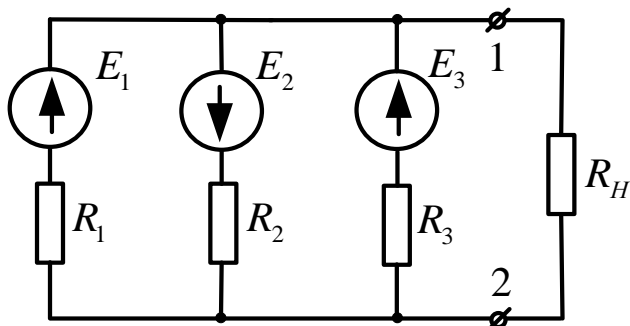


Рисунок 3.50, а

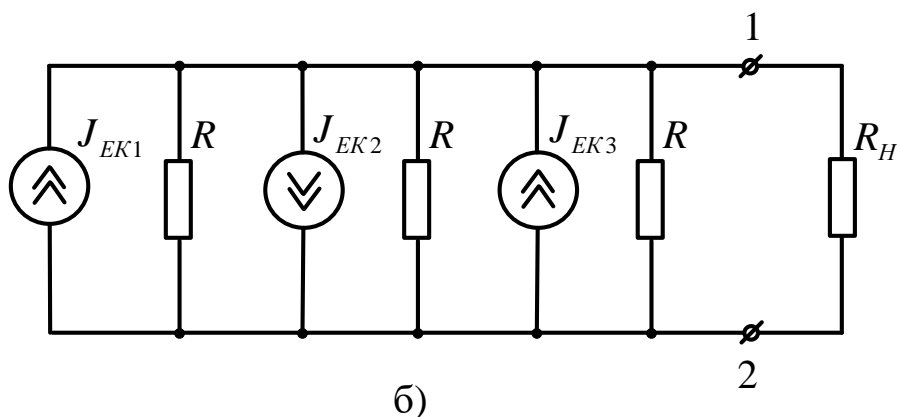


Рисунок 3.50, б

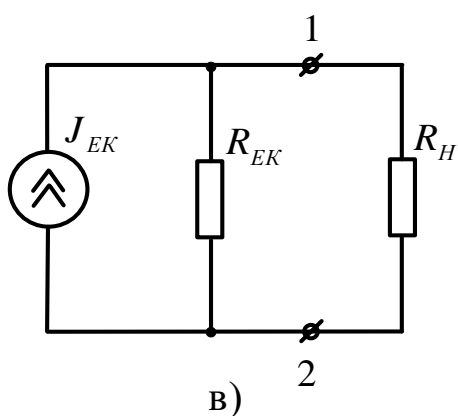


Рисунок 3.50, в

$$J_{EK_1} = \frac{E_1}{R_1}; \quad R_{EK_1} = R_1;$$

$$J_{E_2} = \frac{E_2}{R_2}; \quad R_{EK_2} = R_2;$$

$$J_{EK_3} = \frac{E_3}{R_3}; \quad R_{EK_3} = R_3.$$

$$J_{EK} = J_{EK_1} - J_{EK_2} + J_{EK_3};$$

$$R_{EK} = \frac{1}{\frac{1}{R_{EK_1}} + \frac{1}{R_{EK_2}} + \frac{1}{R_{EK_3}}}.$$

Задача 3.37 (рис. 3.51)

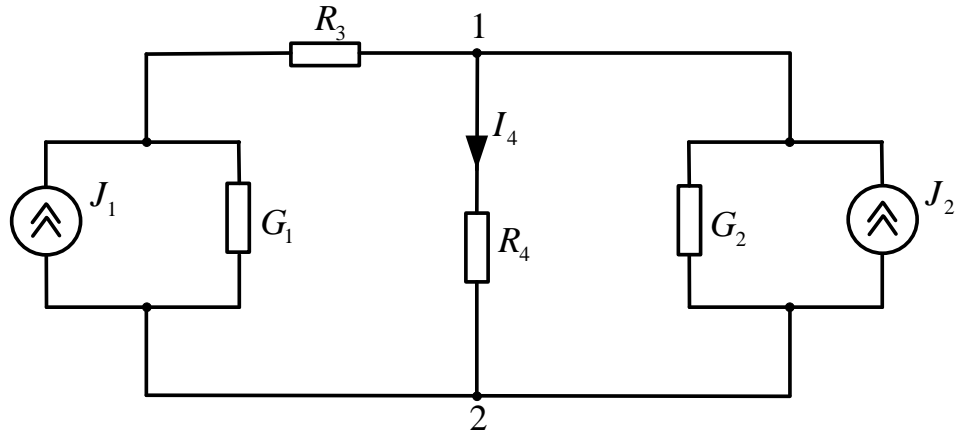


Рисунок 3.51

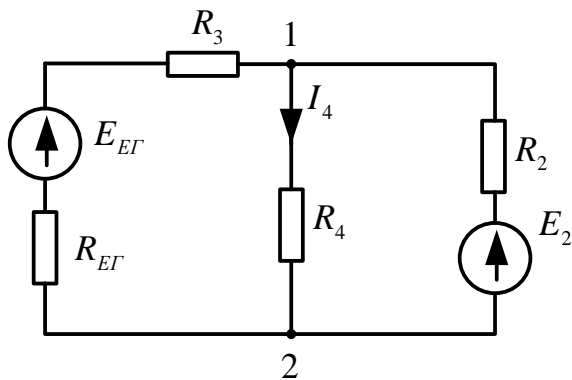


Рисунок 3.52

Відомо: у колі з'єднані два генератора струму $J_1 = 3 \text{ А}$, $J_2 = 2 \text{ А}$, їх внутрішні провідності відповідно $G_1 = 0,05 \text{ См}$, $G_2 = 0,01 \text{ См}$. Опори резисторів $R_3 = 5 \text{ Ом}$, $R_4 = 30 \text{ Ом}$.
Визначити струм I_4 .

Розв'язання.

Перетворюємо генератори струму в еквівалентні напруги (рис. 3.52).

$$E_1 = J_1 R_1 = \frac{J_1}{G_1} = 60 \text{ В}, \quad R_1 = \frac{1}{G_1} = 20 \text{ Ом},$$

$$E_2 = J_2 R_2 = \frac{J_2}{G_2} = 200 \text{ В}, \quad R_2 = \frac{1}{G_2} = 100 \text{ Ом}.$$

Обчислюємо вузлову напругу:

$$U_{12} = \frac{E_1 / (R_1 + R_3) + E_2 / R_2}{1 / (R_1 + R_2) + 1 / R_3 + 1 / R_4} = \frac{4,4}{0,083} = 53 \text{ В},$$

тоді за законом Ома:

$$I_4 = U_{12} / R_4 = 1,76 \text{ А}.$$

Задача 3.38 (рис. 3.53).

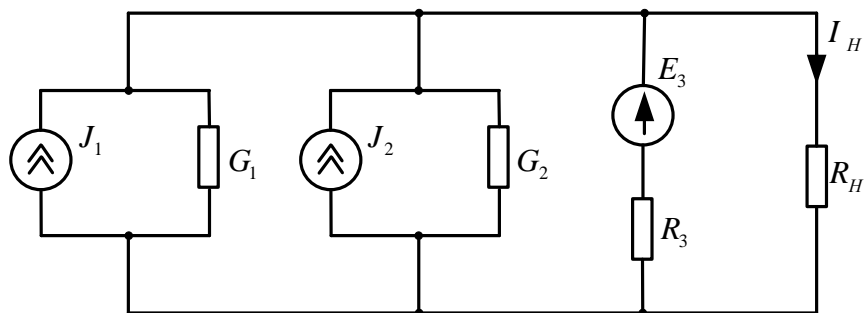


Рисунок 3.53

Відомо: два генератори струму $J_1 = 30$ мА, $G_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ См, $J_2 = 20$ мА, $G_2 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ См та генератор напруги $E_3 = 45$ В, $R_3 = 100$ Ом працюють на спільне навантаження $R_H = 20$ Ом.

Визначити струм у навантаженні.

Розв'язання.

Перетворюємо генератор напруга на еквівалентний генератор струму (рси.3.54):

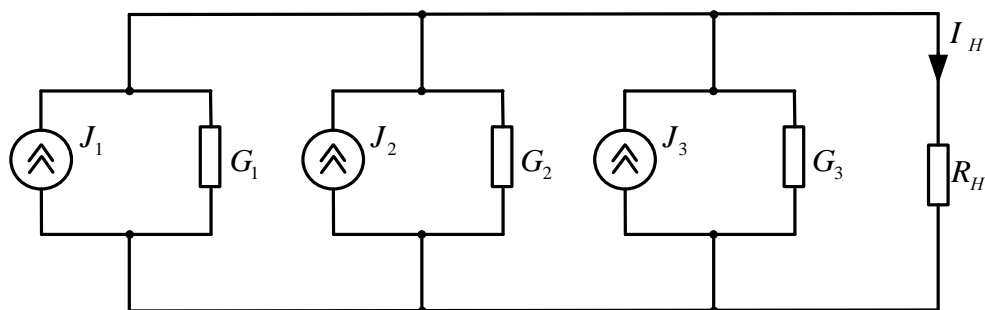


Рисунок 3.54

$$I_3 = \frac{E_3}{R_3} = 450 \text{ мА}, \quad G_3 = \frac{1}{R_3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

Розраховуємо параметри еквівалентного генератора струму:

$$J_{\text{ек}} = J_1 + J_2 + J_3 = 500 \text{ мА} = 0,5 \text{ А,}$$

$$G_{\text{ек}} = G + G_2 + G_3 = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

Відповідно

$$R_{ек} = \frac{1}{G_{ек}} = 80 \text{ Ом.}$$

Схема набуває вигляду, показаного на рис .3.55.

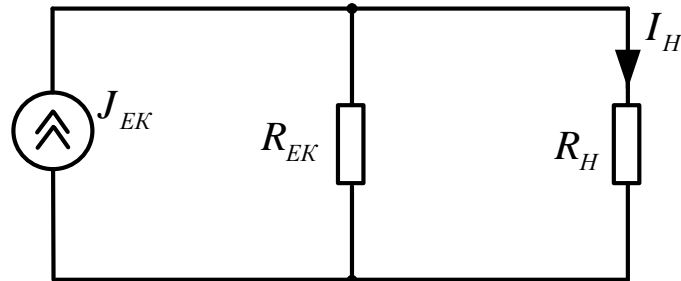


Рисунок 3.55

У навантаженні R_H проходить струм

$$I_H = J_{ек} \frac{R_{ек}}{R_{ек} + R_H} = 0,5 \frac{80}{100} = 0,4 \text{ А.}$$

Задача 3.39 (рис. 3.56)

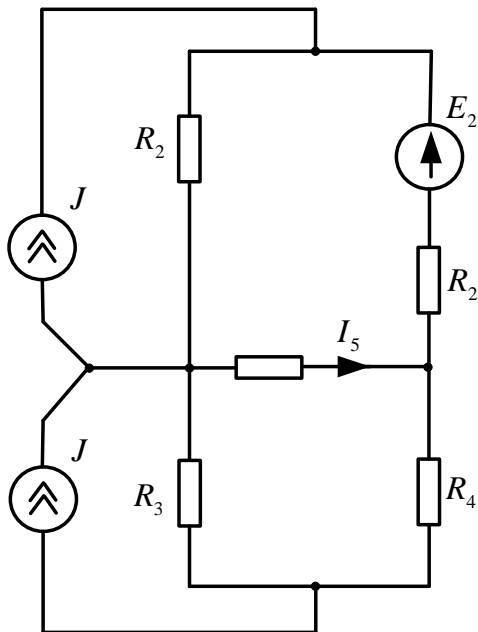


Рисунок 3.56

Відомо: $J = 50 \text{ мА}$, $E_2 = 60 \text{ В}$,

$R_1 = 5 \text{ кОм}$, $R_2 = 4 \text{ кОм}$, $R_3 = 16 \text{ кОм}$,

$R_4 = 2 \text{ кОм}$, $R_5 = 8 \text{ кОм}$.

Визначити струм I_5 .

Розв'язання.

Перетворюємо генератори струму J у генератори напруги з ЕРС E_1 , E_2 ;

$$E_1 = J \cdot R_1 = 250 \text{ В};$$

$$E_3 = J \cdot R_3 = 800 \text{ В.}$$

Знаходимо вузлову напругу U_{12} :

$$U_{12} = \frac{(E_2 - E_1)/(R_1 + R_2) + E_3/(R_3 + R_4)}{1/(R_1 + R_2) + 1/(R_3 + R_4) + 1/R_5} = \frac{-190/9 + 300/18}{1/9 + 1/18 + 1/8} = 80 \text{ В.}$$

За законом Ома:

$$I_5 = \frac{U_{12}}{R_5} = 10 \text{ мА.}$$

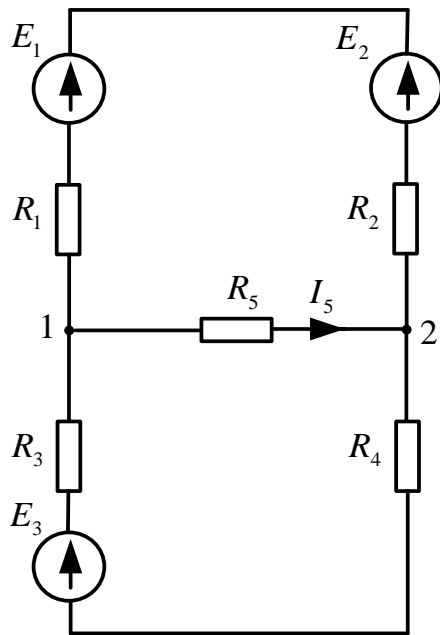


Рисунок 3.57

Є інший варіант розв'язання: на рис. 3.57 відносно затискачів 1, 2 навантаження верхню і нижню гілку можна замінити еквівалентними генераторами струму J_6, G_6 та J_7, G_7 , а тоді їх об'єднати в один (рис. 3.58, а, б).

$$J_6 = \frac{(E_2 - E_1)}{(R_1 + R_2)} = -\frac{190}{9} = -21,1 \text{ мА};$$

$$G_6 = \frac{1}{(R_1 + R_2)} = 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$J_7 = \frac{E_3}{(R_3 + R_4)} = 44,4 \text{ мА};$$

$$G_7 = \frac{1}{(R_3 + R_4)} = 0,056 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$J_{\text{ек}} = J_6 + J_7 = 23,3 \text{ мА};$$

$$G_{\text{ек}} = G_6 + G_7 = 0,166 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$R_{\text{ек}} = \frac{1}{G_{\text{ек}}} = 6 \text{ кОм.}$$

За формулою «чужого опору» розраховуємо I_5 :

$$I_5 = J_{\text{ек}} \cdot \frac{R_{\text{ек}}}{R_{\text{ек}} + R_H} = \frac{23,3 \cdot 6}{14 \cdot 10^3} = 10 \text{ мА.}$$

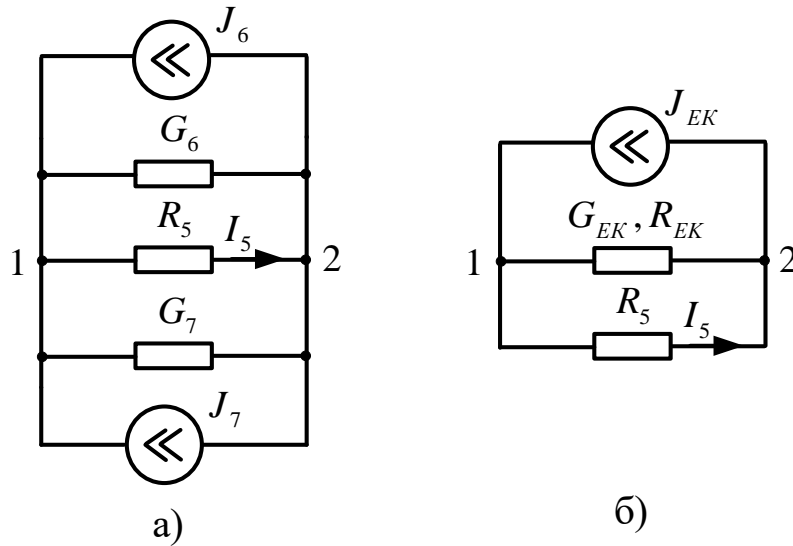


Рисунок 3.58

Задача 3.40 (рис. 3.59)

Відомо: $E_1 = 100$ В, $E_4 = 108$ В, $E_5 = 80$ В, $E_7 = 60$ В, $R_1 = 20$ Ом,
 $R_2 = 80$ Ом, $R_3 = 22$ Ом, $J = 3$ А, $R_4 = 17$ Ом, $R_5 = 10$ Ом, $R_6 = 30$ Ом,
 $R_7 = 15$ Ом.

Визначити усі струми.

Розв'язання.

Замінюємо три паралельні гілки між вузлами 1 – 2 однією еквівалентною:

$$E_{12} = \frac{E_1/R_1 - J}{1/R_1 + 1/R_2} = 32 \text{ В};$$

$$R_{12} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = 16 \text{ Ом}.$$

Так само замінюємо три паралельні гілки між вузлами 3 – 4 однією еквівалентною:

$$E_{34} = \frac{E_5/R_5 - E_7/R_7}{1/R_5 + 1/R_6 + 1/R_7} = 20 \text{ В};$$

$$R_{34} = \frac{1}{1/R_5 + 1/R_6 + 1/R_7} = 5 \text{ Ом}.$$

Схема набуває вигляду, приведеному на рис. 3.60.

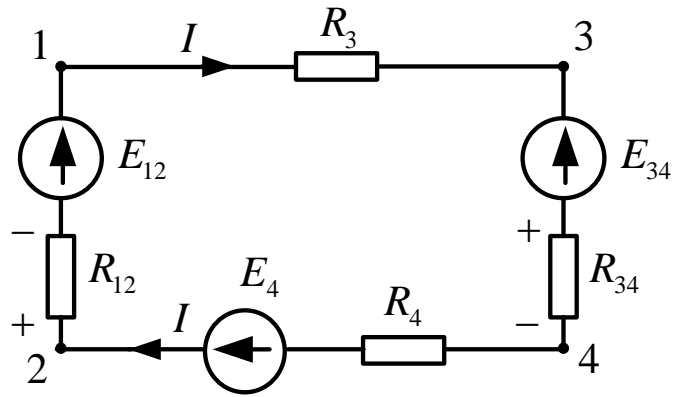


Рисунок 3.60

Розраховуємо струм в отриманому одно-контурному колі і напруги на ділянках U_{12} та U_{34} .

$$I = \frac{\Sigma \pm E}{\Sigma R} = \frac{E_{12} - E_{34} + E_4}{R_{12} + R_3 + R_{34} + R_4} = \frac{120}{60} = 2 \text{ A};$$

$$U_{12} = E_{12} - R_{12}I = 0;$$

$$U_{34} = E_{34} + R_{34}I = 30 \text{ V}.$$

Повертаємось до вихідної схеми (рис. 3.59) і за законом Ома обчислюємо струми в усіх гілках:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{12}}{R_1} = 5 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = 0;$$

$$I_3 = I_4 = I = 2 \text{ A}; \quad I_5 = \frac{E_5 - U_{34}}{R_5} = 5 \text{ A};$$

$$I_6 = \frac{U_{34}}{R_6} = 1 \text{ A}; \quad I_7 = \frac{U_{34} + E_7}{R_7} = 6 \text{ A}.$$

Перевіряємо виконання першого закону Кірхгофа для вузлів схеми:

вузол 1: $I_1 - J - I_3 = 0 \rightarrow 5 - 3 - 2 = 0;$

вузол 2: $J + I_4 - I_1 = 0 \rightarrow 3 + 2 - 5 = 0;$

вузол 3: $I_3 + I_5 - I_6 - I_7 = 0 \rightarrow 2 + 5 - 1 - 6 = 0;$

вузол 4: $-I_4 - I_5 + I_6 + I_7 = 0 \rightarrow -2 - 5 + 1 + 6 = 0.$

3.7. Метод еквівалентного генератора ЕРС

Метод використовується, коли необхідно обчислити струм тільки в одній гілці і базується на теоремі Тевена про еквівалентний генератор або активний двополюсник. Під активним двополюсником розуміють частину кола, що містить джерела енергії і з'єднується з іншими елементами кола двома затискачами (рис. 3.61).

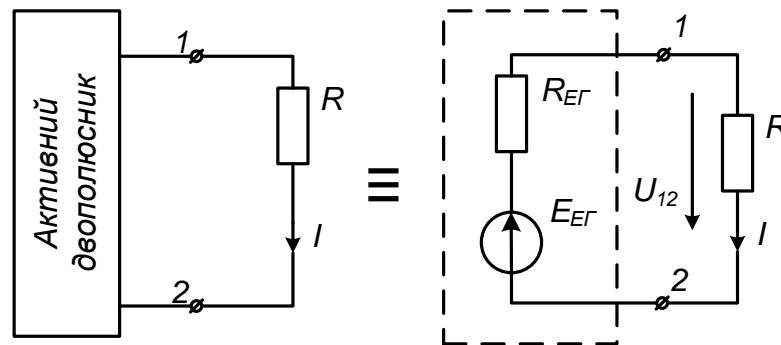


Рисунок 3.61

Згідно з теоремою, струм у гілці, що ввімкнена на затискачі 1–2, залишається незмінним, якщо активний двополюсник замінити еквівалентним генератором ЕРС $E_{ег}$ і його внутрішнім опором $R_{ег}$ (див. рис. 3.61). ЕРС $E_{ег}$ обчислюється як напруга U_{12} на затискачах 1-2 при вимкненій досліджуваній гілці (режим холостого ходу); величина $R_{ег}$ розраховується як еквівалентний опір двополюсника відносно затискачів 1-2 у тому ж режимі холостого ходу.

Після такої заміни складне коло можна зобразити одноконтурною схемою, струм в якій легко визначити за законом Ома.

Зауваження. Відносно досліджуваної гілки активний двополюсник можна подати також, як реальне джерело струму зі струмами $J = J_{кз}$ і внутрішнім опором $R_{г}$ (рис. 3.62). У цьому полягає сутність теореми про еквівалентне джерело струму (теореми Нортон). Одержати схему Нортон можна перетворенням гілки з джерелом напруги у колі (рис. 3.61) на еквівалентну гілку з джерелом струму (дивись 3.62).

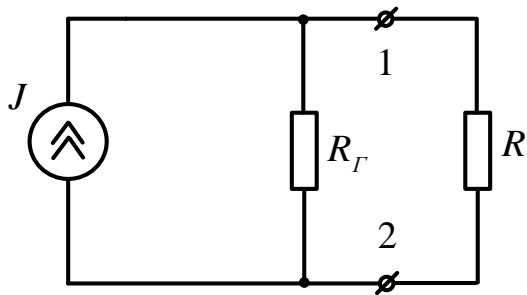


Рисунок 3.62

Алгоритм розрахунку.

1. Вилучити зі схеми гілку, електричний стан якої треба визначити. Розімкнені затискачі позначити будь-якими індексами, наприклад 1 – 2.

2. Схему з вилученою гілкою відносно розімкнених затискачів 1 – 2 подати як реальне джерело напруги з ЕРС $E_{ег}$ і внутрішнім опором $R_{ег}$. Для цього виконати такі операції:

- у схемі з вилученою гілкою найбільш раціональним способом обчислити напругу $U_{12нх}$ між розімкненими затискачами 1 – 2:

$$U_{12нх} = E_{ег};$$

- у схемі з вилученою гілкою розрахувати еквівалентний опір $R_{екв 1-2}$ відносно розімкнених затискачів 1 – 2, замінивши джерела енергії їх внутрішніми опорами (ідеальне джерело напруги замінити відрізком проводу, ідеальне джерело струму вимкнути)

$$R_{екв 1-2} = R_{ег}.$$

3. Скласти схему, еквівалентну вихідній (рис. 3.63).

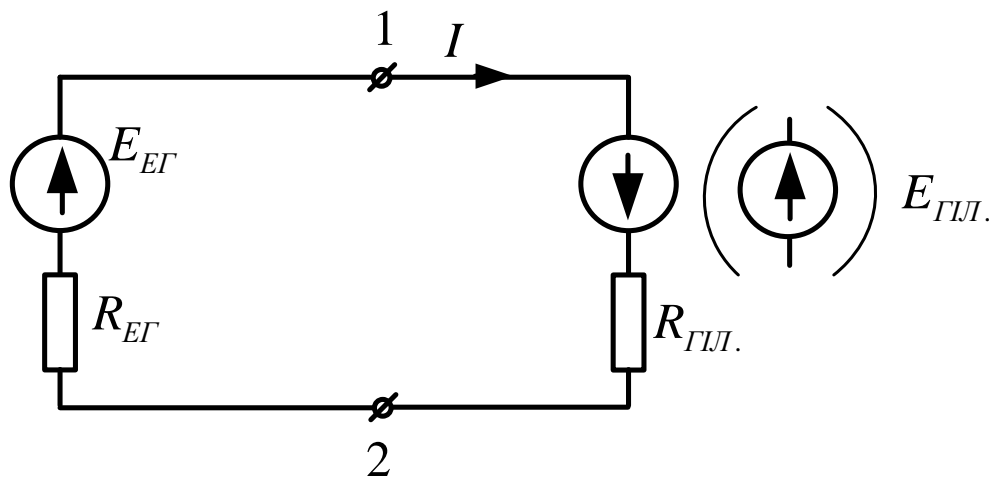


Рисунок 3.63

Обчислити струм за законом Ома:

$$I = \frac{E_{\text{ер}} \pm E_{\text{гїл}}}{R_{\text{ер}} + R_{\text{гїл}}}.$$

Слід пам'ятати:

- за умови $R_{\text{ер}} = R_{\text{гїл}}$ коло на рис. 3.63 перебуває у особливому «узгодженому» режимі роботи; у такому режимі в досліджуваній гілці виділяється максимальна потужність, яку визначають за формулою

$$P_{\text{max}} = \frac{E_{\text{ер}}^2}{4R_{\text{ер}}^2};$$

- якщо опір гілки $R_{\text{гїл}}$ невідомий, але сказано, що в ній виділяється максимальна потужність, то це означає, що $R_{\text{гїл}} = R_{\text{ер}}$.

Таку рівність легко встановити, склавши рівняння балансу потужностей для схеми на рис. 3.63:

$$E_{\text{ер}}I = R_{\text{ер}}I^2 + R_{\text{гїл}}I^2,$$

звідки

$$R_{\text{гїл}}I^2 = E_{\text{ер}}I - R_{\text{ер}}I^2.$$

З математики відомо, що $P = P_{\text{max}}$, коли $dP/dI = 0$,

$$\frac{dP_{\text{гїл}}}{dI} = E_{\text{ер}}I - 2R_{\text{ер}}I,$$

звідки

$$I = \frac{E_{\text{ер}}}{2R_{\text{ер}}}.$$

Порівнюючи два вирази одного струму

$$I = \frac{E_{\text{ер}}}{2R_{\text{ер}}} \quad \text{і} \quad I = \frac{E_{\text{ер}}}{R_{\text{ер}} + R_{\text{гїл}}},$$

доходимо, що умовою виділення максимальної потужності у гілці є $R_{\text{гїл}} = R_{\text{ер}}$.

Задача 3.37 (рис. 3.64)

Відомо: $E_1 = 120 \text{ В}$, $E_2 = 75 \text{ В}$, $E_3 = 10 \text{ В}$, $E_4 = 20 \text{ В}$, $J = 2 \text{ А}$,
 $R_1 = 60 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 40 \text{ Ом}$, $R_5 = 10 \text{ Ом}$.

Визначити струм I_3 .

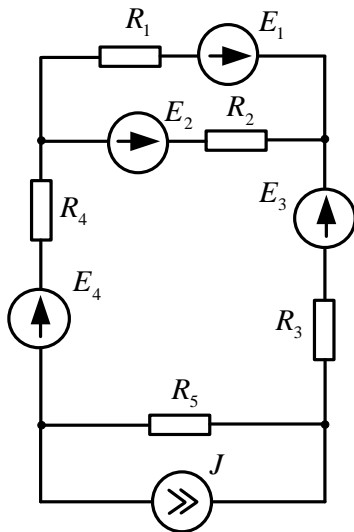


Рисунок 3.64

Розв'язання.

1. Вилучаємо зі схеми гілку $R_3 - E_3$. Позначаємо розімкнені затискачі як точки 1, 2 (рис. 3.65, а).
2. Схему з відключеною гілкою $R_3 - E_3$ замінюємо на джерело напруги E_{EF} , R_{EF} (рис. 3.65, б).

У схемі на рис. 3.65, а розраховуємо напругу U_{12HX} між розімкненими затискачами 1 – 2. Для цього спочатку визначаємо струми, які в ній проходять.

Оскільки схема складається з двох електрично незв'язаних контурів з незалежним перебігом процесів, то верхній і нижній контури розглядаємо окремо.

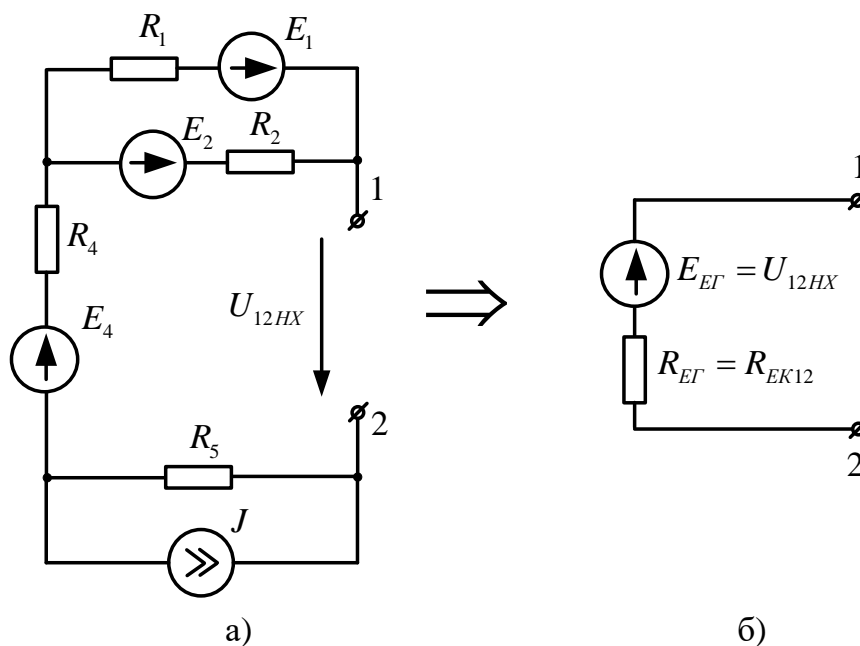


Рисунок 3.65

Верхній контур:

$$I_1 = I_2 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ A.}$$

Нижній контур: $I_5 = J = 2 \text{ A.}$

Через гілку $R_4 - E_4$ струм не проходить, оскільки для нього немає замкненого шляху (див. принцип неперервності електричного струму).

$$U_{12\text{нх}} = -R_5 I_5 + E_4 - R_1 I_1 + E_1 = 90 \text{ В,}$$

або

$$U_{12\text{нх}} = -R_5 I_5 + E_4 + E_2 + R_2 I_2 = 90 \text{ В.}$$

У схемі на рис. 3.65, а обчислюємо еквівалентний опір $R_{\text{ек}}$ між точками 1 – 2. Зважаючи на те, що внутрішні опори джерел не задані, E_1, E_2, E_4 замінюємо відрізком проводу, а джерело струму J вимикаємо (рис. 3.66).

$$R_{\text{ек } 1-2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_4 + R_5 = 70 \text{ Ом.}$$

3. Складаємо еквівалентну схему (рис. 3.67), в якій

$$E_{\text{ег}} = U_{12\text{нх}} = 90 \text{ В.}$$

За законом Ома для одноконтурного кола знаходимо шуканий струм I_3 :

$$I_3 = \frac{E_{\text{ег}} - E_3}{R_{\text{ег}} + R_3} = 1 \text{ A.}$$

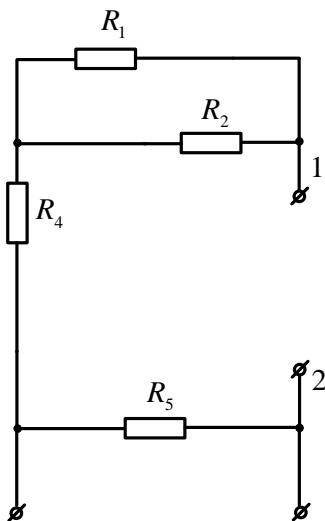


Рисунок 3.66

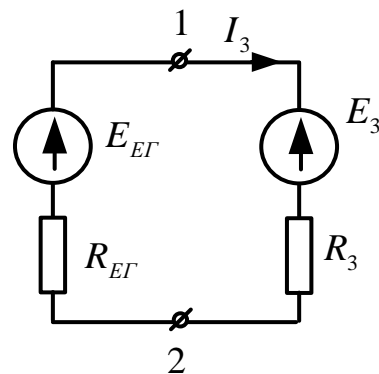


Рисунок 3.67

Задача 3.38 (рис. 3.68)

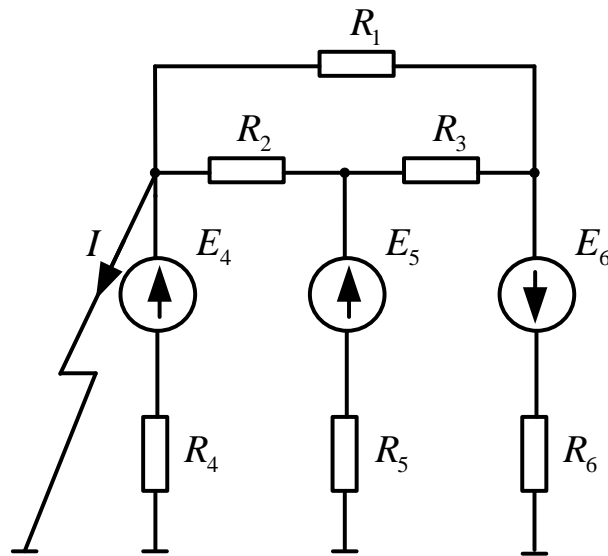


Рисунок 3.68

Відомо: $E_4 = 20$ В, $E_5 = 40$ В, $E_6 = 20$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 60$ Ом,
 $R_4 = 40$ Ом, $R_5 = 20$ Ом, $R_6 = 20$ Ом.

У колі виникло коротке замикання.

Визначити струм I короткого замикання.

Розв'язання.

1. Вимикаємо провід, який спричинив коротке замикання і позначаємо точки 1, 2 (рис.3.69, а).

2. Схему з вилученим проводом відносно точок 1,2 подаємо як еквівалентний генератор напруги з ЕРС $E_{ег}$ і внутрішнім опором $R_{ег}$ (рис. 3.69, б).

Для зручності подальших розрахунків на схемі рис.3.69, а трикутник опорів $R_1 - R_2 - R_3$ доцільно перетворити на зірку з опором кожного променя $R = 20$ Ом, а також з'єднати точки з однаковим потенціалом «земля» (рис.3.70).

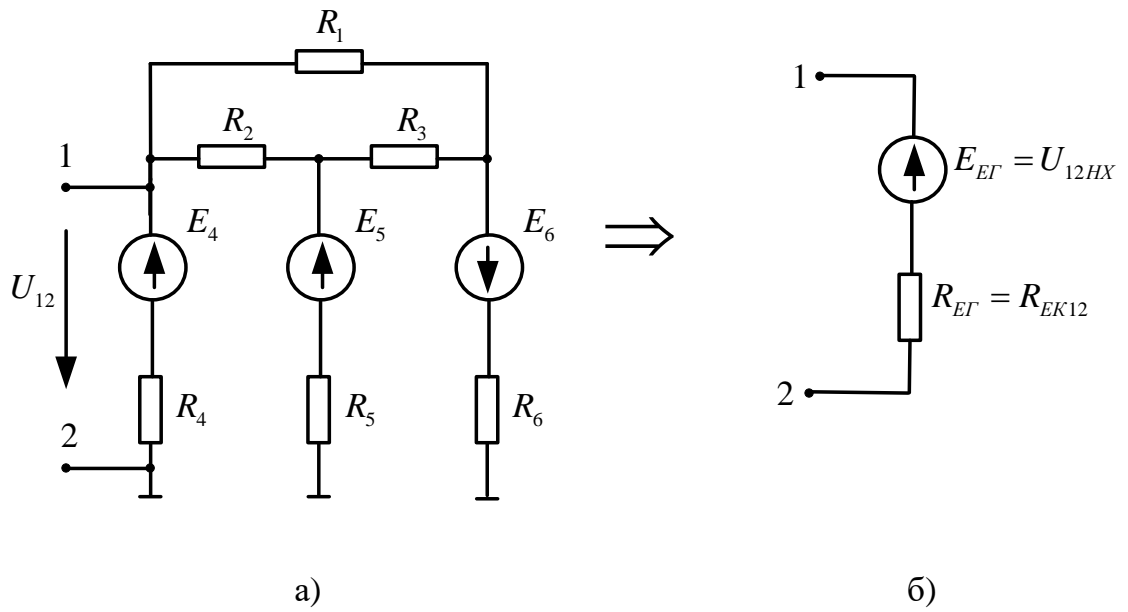


Рисунок 3.69

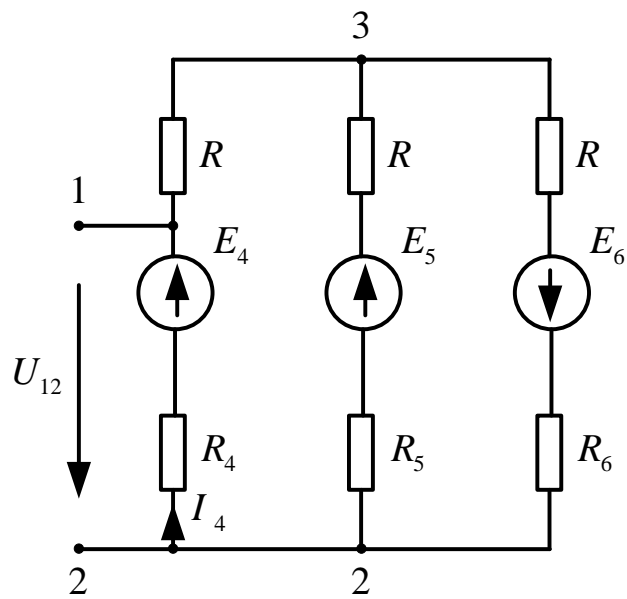


Рисунок 3.70

Обчислюємо напругу між затискачами 1, 2, яка має вираз

$$U_{12HX} = E_4 - R_4 I_4.$$

Струм I_4 легко знайти за методом вузлової напруги:

$$U_{32} = \frac{\frac{E_4}{R_4} + \frac{E_5}{R_5} + \frac{E_6}{R_6}}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = 12,4 \text{ В},$$

$$I_4 = \frac{E_4 - U_{32}}{R_4} = 0,126 \text{ A.}$$

Тоді

$$U_{12\text{нх}} = E_4 - R_4 I_4 = 15 \text{ В.}$$

Розраховуємо еквівалентний опір між вузлами 1–2. Оскільки внутрішні опори джерел не задані, замінюємо їх відрізками проводу (рис.3.71):

$$R'_{\text{ек}} = \frac{(R + R_5)(R + R_6)}{R + R_5 + R + R_6} + R = 40 \text{ Ом,}$$

$$R_{\text{ек}1-2} = \frac{R_4 \cdot R'_{\text{ек}}}{R_4 + R'_{\text{ек}}} = 20 \text{ Ом.}$$

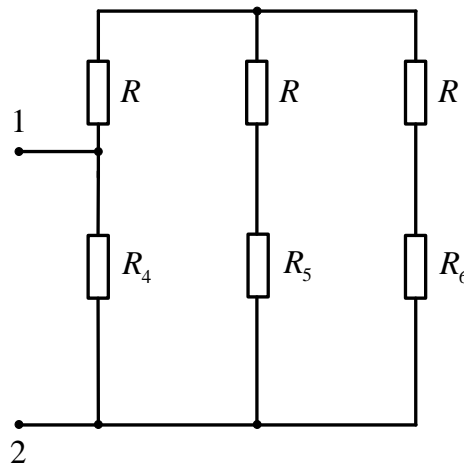


Рисунок 3.71

3. Складаємо еквівалентну схему (рис.3.72), в якій $E_{\text{ег}} = U = 15 \text{ В}$, $R_{\text{ег}} = R_{\text{ек}} = 20 \text{ Ом}$, опір проводу $R_{\text{пр}} = 0$, і за законом Ома визначаємо струм:

$$I = \frac{E_{\text{ег}}}{R_{\text{ег}}} = 0,75 \text{ А.}$$

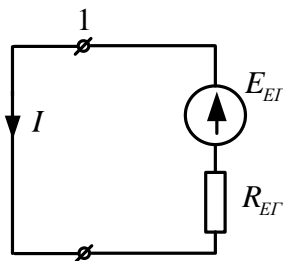


Рисунок 3.72

Задача 3.39 (рис. 3.73)

Відомо: $E_1 = 120$ В, $J = 2$ А, $R_1 = 35$ Ом, $R_2 = 120$ Ом, $R_3 = 200$ Ом,
 $R_4 = 200$ Ом, $R_5 = 80$ Ом.

Визначити показ ватметра.

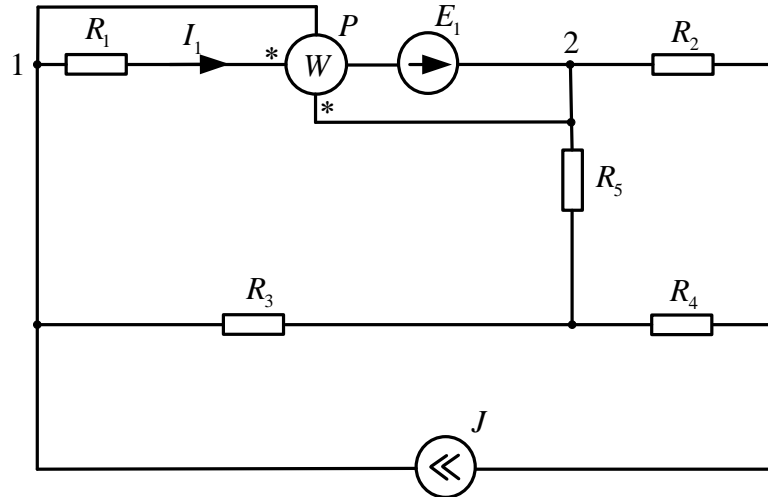


Рисунок 3.73

Розв'язання.

Показ ватметра обчислюється за формулою $P_w = U_{обм} I_{обм}$ у даному випадку

$$P_w = U_{21} I_1,$$

де $U_{21} = E_1 - R_1 I_1$.

Оскільки для визначення P_w потрібно знайти лише струм I_1 , то доцільно скористатися методом еквівалентного генератора.

1. Вилучаємо зі складу гілку з шуканим струмом I_1 (рис.3.74).

2. Схему з вилученою гілкою відносно розімкнених затискачів 1 – 2 подаємо як реальне джерело напруги з ЕРС E_{EG} і внутрішнім опором R_{EG} (рис. 3.74).

Обчислюємо напругу між розімкненими затискачами 1 – 2. Спочатку складаємо її вираз:

$$U_{12нх} = R_3 J + R_5 I_5,$$

з якого випливає необхідність розрахунку струму I_5 . Оскільки через резистор R_3 проходить відомий струм джерела J , то струм I_5 можна знайти за формулою «чужого опору»:

$$I_5 = J \frac{R_4}{R_5 + R_2 + R_4} = 1 \text{ A.}$$

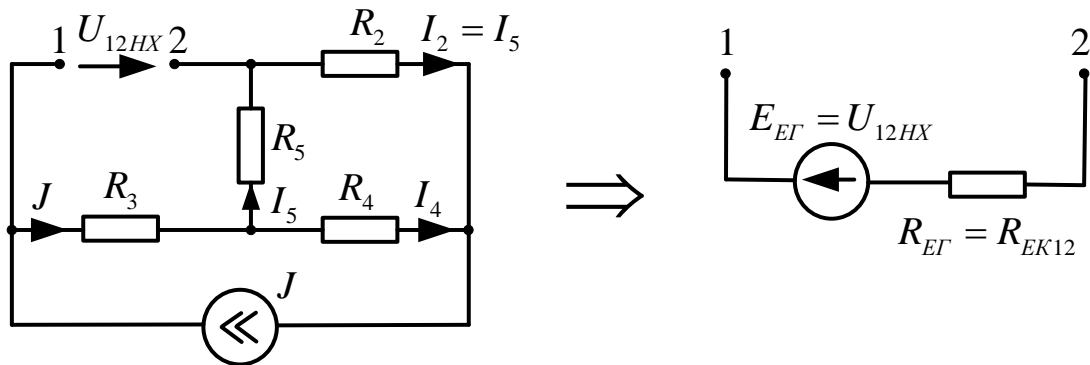


Рисунок 3.74

Тоді:

$$U_{12HX} = R_3 J + R_5 I_5 = 480 \text{ В}; \quad E_{EГ} = U_{12HX} = 480 \text{ В.}$$

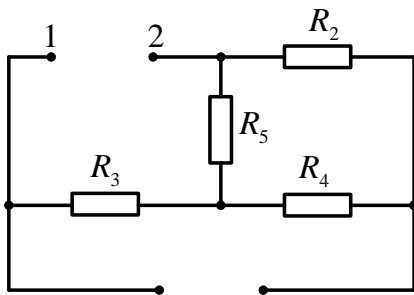


Рисунок 3.75

Обчислюємо еквівалентний опір резисторів у схемі на рис. 3.73 відносно затискачів 1 – 2, вважаючи джерела струму ідеальними, тобто $R_{0J} = \infty$ (рис. 3.75).

$$R_{EГ12} = \frac{R_5(R_2 + R_4)}{R_5 + R_2 + R_4} + R_3 = 264 \text{ Ом,}$$

$$R_{EГ} = R_{EГ12} = 264 \text{ Ом.}$$

3. Складаємо еквівалентну схему (рис. 3.76) і за законом Ома:

розраховуємо струм I_1 :

$$I_1 = \frac{E_{EГ} + E_1}{R_{EГ} + R_1} = 2 \text{ A.}$$

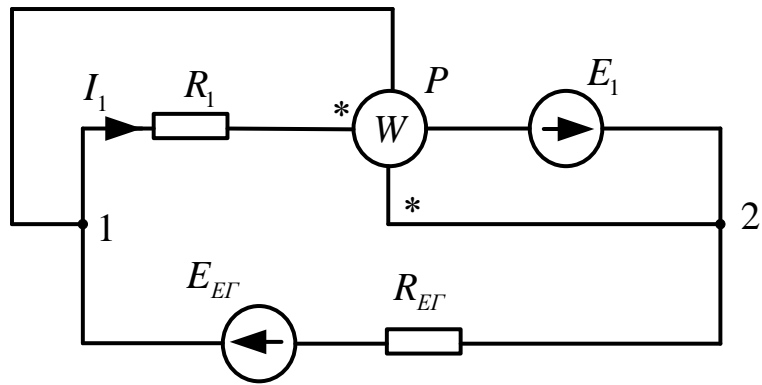


Рисунок 3.76

4. Визначаємо показ ватметра:

$$P_w = U_{21} I_1 = (E_1 - R_1 I_1) I_1 = 96 \text{ Вт.}$$

Задача: 3.40 (рис. 3.77)

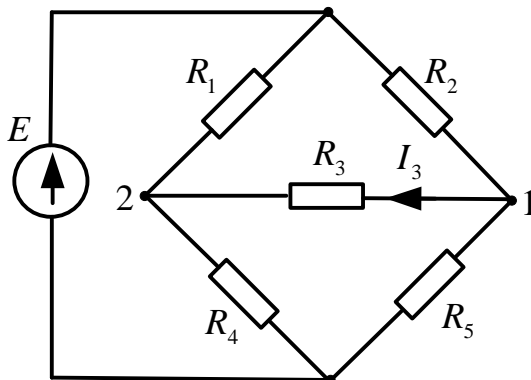


Рисунок 3.77

Відомо: $I_3 = 3 \text{ А}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$,

$R_1 = R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$, $R_5 = 60 \text{ Ом}$.

Визначити E .

Розв'язання.

Розв'язання цієї задачі має таку особливість: зазвичай зі схеми вилучають гілку з шуканою величиною –

струмом, опором чи ЕРС, але в даному випадку доцільно відключити гілку з відомим струмом, виконати розрахунки за стандартним алгоритмом і скласти одно контурну схему з відомим струмом і невідомою ЕРС, яку легко визначити за законом Ома.

1. Вилучаємо гілку з відомим струмом I_3 та замінюємо схему відносно затискачів 1 – 2 еквівалентним генератором напруги з параметрами $E_{\text{ер}} = U_{12\text{нх}}$, $R_{\text{ер}} = R_{\text{ер}1-2}$.

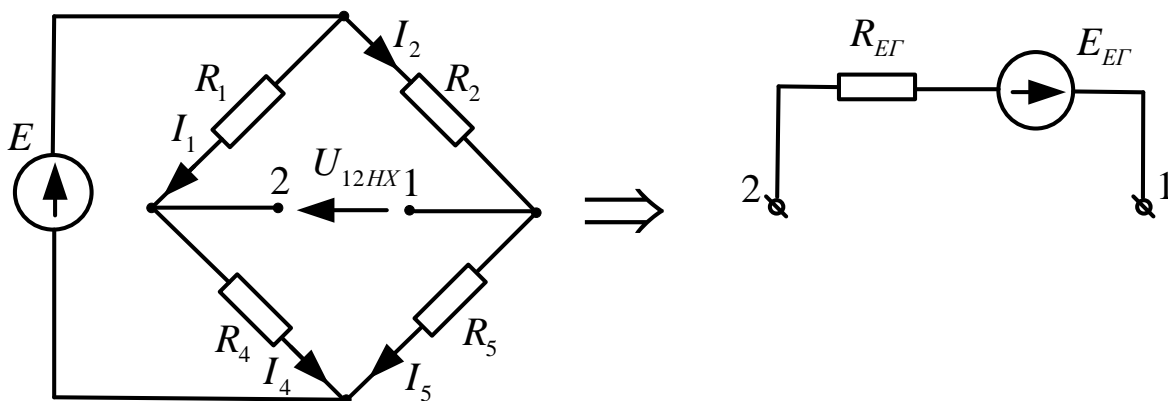


Рисунок 3.78

2. Запишемо вираз напруги U_{12HX} :

$$U_{12HX} = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

або

$$U_{12HX} = R_5 I_5 - R_4 I_4,$$

де

$$I_1 = I_4 = \frac{E}{R_1 + R_4} = \frac{E}{40}; \quad I_2 = I_5 = \frac{E}{R_2 + R_5} = \frac{E}{90}.$$

Отже

$$U_{12HX} = 60 \cdot \frac{E}{90} - 30 \frac{E}{90} = \frac{E}{6} \text{ В}$$

або

$$U_{12HX} = 60 \cdot \frac{E}{90} - \frac{20E}{40} = \frac{E}{6} \text{ В.}$$

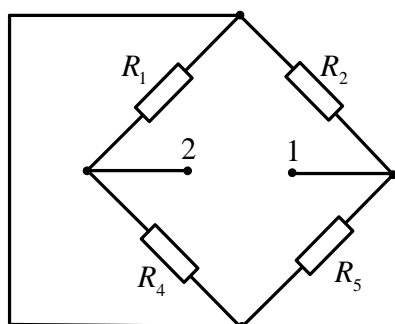


Рисунок 3.79

3. Обчислимо еквівалентний опір між розімкненими затискачами 1 – 2, залишивши джерело E відірваним від провідника (3.79):

$$R_{ек1-2} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5} = 30 \text{ Ом.}$$

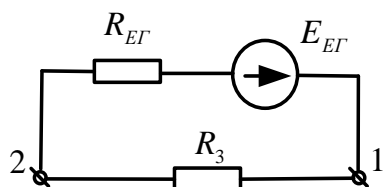


Рисунок 3.80

4. Складаємо еквівалентну схему (рис. 3.80), в якій

$$E_{ег} = U_{12нх} = \frac{E}{6} \text{ В}, \quad R_{ег} = R_{ек12} = 30 \text{ Ом},$$

і за законом Ома визначаємо E :

$$I_3 = \frac{E_{ег}}{R_{ег} + R_3} = \frac{E}{6(R_{ег} + R_3)} = 2,$$

звідки $E = 12(R_{ег} + R_3) = 600 \text{ В}$.

Задача 3.41 (рис. 3.81).

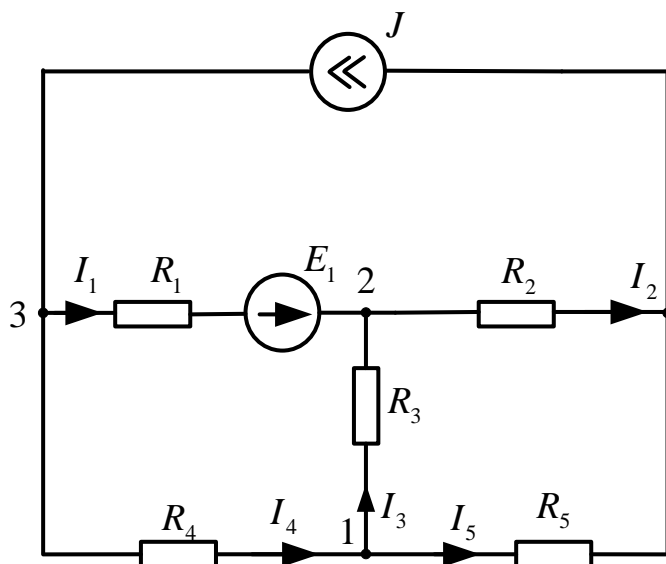


Рисунок 3.81

Відомо: $E_1 = 60 \text{ В}$, $J = 2 \text{ А}$,

$R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$,

$R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 30 \text{ Ом}$,

$R_5 = 20 \text{ Ом}$.

Визначити:

- 1) струм I_3 методом еквівалентного генератора;
- 2) значення $E_{дод}$ джерела напруги, яке потрібно підключити послідовно з E_1 , щоб струм I_1 став рівним нулю.

Розв'язання.

1. Визначаємо струм I_3 . Вимикаємо гілку з резистором R_3 і відносно розімкнених затискачів 1 – 2 подаємо схему як еквівалентний генератор напруги з ЕРС $E_{ег} = U_{12нх}$ і внутрішнім опором $R_{ег} = R_{ЕК 1-2}$ (рис. 3.82).

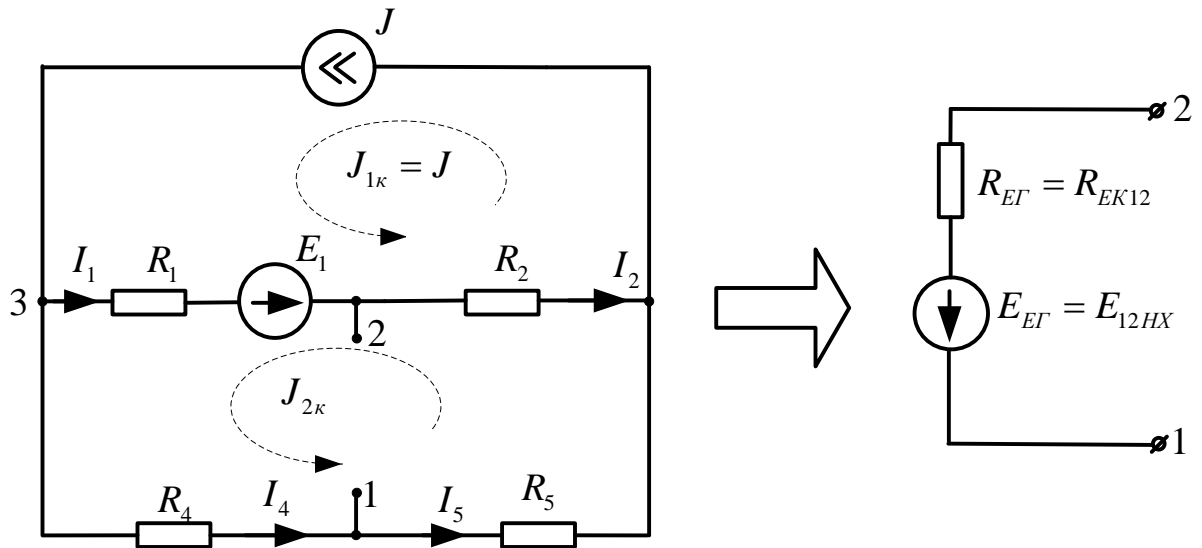


Рисунок 3.82

Складаємо вираз напруги U_{12HX} :

$$U_{12HX} = R_5 I_5 - R_2 I_2 \text{ або } U_{12HX} = -R_4 I_4 + R_1 I_1 + E_1,$$

з якого випливає необхідність розрахунку струмів у схемі на рис. 3.82. Скористаємось методом контурних струмів, оскільки за цим методом потрібно класти тільки одне рівняння:

$$-(R_1 + R_2)J + (R_1 + R_2 + R_4 + R_5)J_{2к} = E_1,$$

звідки $J_{2к} = 1,55 \text{ A}$;

дійсні струми

$$I_1 = I_2 = J - J_{2к} = 0,45 \text{ A}; \quad I_4 = I_5 = J_{2к} = 1,55 \text{ A}.$$

Тоді

$$U_{12HX} = R_5 I_5 - R_2 I_2 = 22 \text{ В}.$$

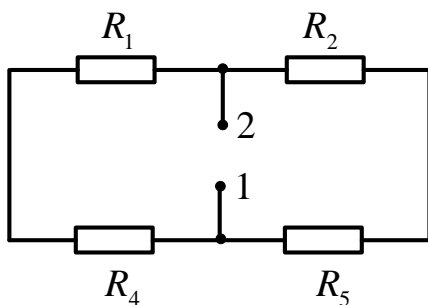


Рисунок 3.83

У схемі на рис. 3.82 розраховуємо еквівалентний опір між затискачами 1 – 2, замінивши джерело напруги E_1 проводом і вилучивши джерело струму J зі схеми (рис. 3.83)

$$R_{EK1-2} = \frac{(R_2 + R_4)(R_2 + R_5)}{R_1 + R_4 + R_2 + R_5} = 22,2 \text{ Ом}.$$

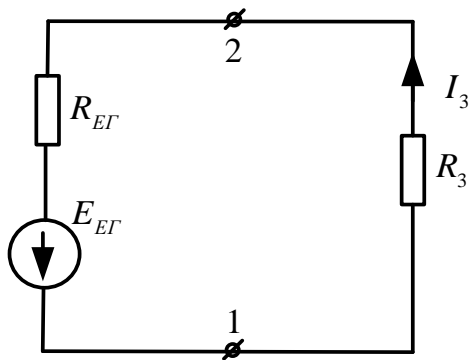


Рисунок 3.84

Складаємо еквівалентну схему, в якій $E_{ег} = U_{12нх} = 22 \text{ В}$, $R_{ег} = R_{ек13} = 22,2 \text{ Ом}$ і знаходимо шукане значення I_3 (рис. 3.84)

$$I_3 = \frac{E_{ег}}{R_{ег} + R_3} = 0,68 \text{ А.}$$

2. Визначаємо ЕРС додаткового джерела напруги, яке потрібно ввімкнути у першу гілку, щоб струм $I_1 = 0$.

Записуємо вираз струму $I_1 = 0$ за законом Ома (рис. 3.81):

$$I_1 = \frac{U_{32} - E_1 \pm E_{дод}}{R_1},$$

з якого випливає, що $I_1 = 0$, коли ЕРС у гілці компенсують напругу U_{32} (на її затискачах, тобто $U_{32} - E_1 \pm E_{дод} = 0$).

Отже, розраховуємо U_{32} , беручи до уваги наступне: якщо $I_1 = 0$, то через резистор R_4 проходить відомий струм джерела J ; резистори R_3 і R_2 з'єднані послідовно, тому I_3 можна визначити за формулою «чужого опору»:

$$I_3 = I_2 = J \frac{R_5}{R_3 + R_2 + R_5} = 0,8 \text{ А.}$$

Тоді:

$$U_{32} = R_3 I_3 + R_4 I_4 = 68 \text{ В.}$$

Повертаємось до рівняння $68 - 60 \pm E_{дод} = 0$, з якого очевидно, що $E_{дод} = 8$ і має бути напрямлена так само, як E_1 .

Задача 3.42 (рис. 3.85).

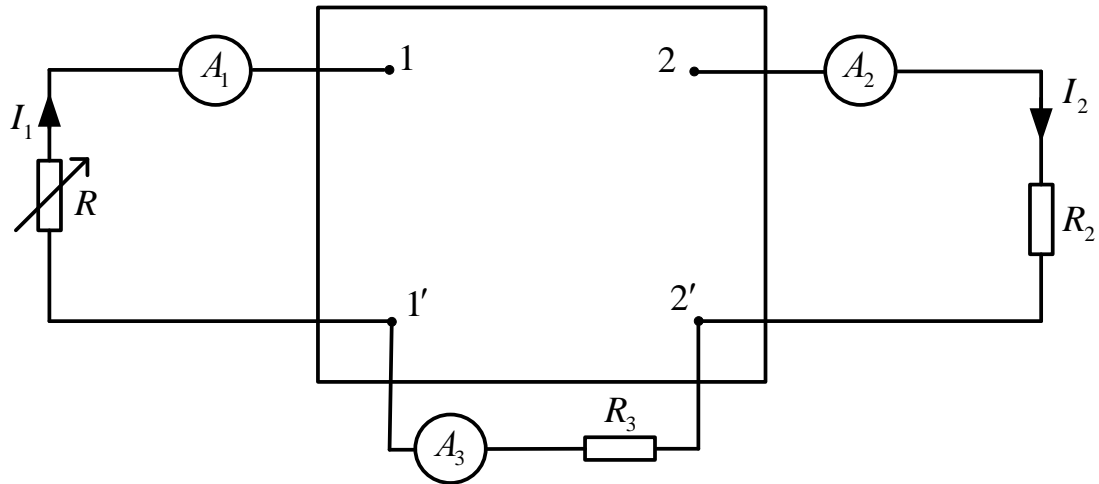


Рисунок 3.85

Відомо: у колі виміряні струми I_1 , I_2 , I_3 за двох значень опору R_1 .
Результати дослідів зведені у таблицю 3.2.

Таблиця 3.2

$R_1, \text{Ом}$	$I_1, \text{А}$	$I_2, \text{А}$	$I_3, \text{А}$
20	5	8,5	7,5
5	10	6,5	10,5

Струми зв'язані лінійними співвідношеннями $I_k = a + bI_n$.

Визначити: ЕРС E_1 джерела напруги, яке потрібно підключити послідовно з $R_1 = 5 \text{ Ом}$, щоб I_2 став рівним 0, а також значення I_1 , I_3 у такому випадку.

Розв'язання.

Згідно з методом еквівалентного генератора відносно затискачів $1 - 1'$ першої гілки всю іншу частину кола представляємо у вигляді еквівалентного генератора напруги з ЕРС $E_{\text{ег}}$ і внутрішнім опором $R_{\text{ег}}$ (рис. 3.86). Значення $E_{\text{ег}}$, $R_{\text{ег}}$ знаходимо за поданою у таблиці 3.2 залежністю струму I_1 від опору R_1 першої гілки.

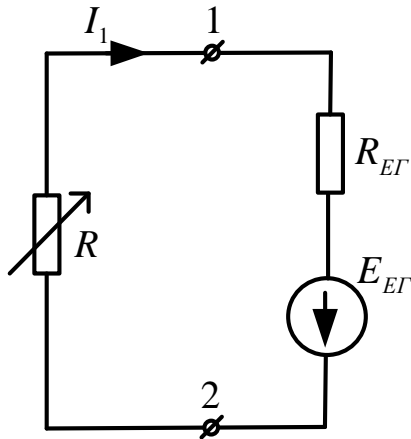


Рисунок 3.86

Користуючись загальним виразом струму

$$I_1 = \frac{E_{ег}}{R_{ег} + R},$$

складаємо два рівняння для двох відомих режимів:

$$\left. \begin{aligned} 5 &= \frac{E_{ег}}{R_{ег} + 20} \\ 10 &= \frac{E_{ег}}{R_{ег} + 5} \end{aligned} \right\},$$

звідки $E_{ег} = 150$, $R_{ег} = 10$ Ом.

За табличними даними визначаємо залежність струмів I_2 , I_3 від I_1 , беручи до уваги, що між ними існує вказане в умові задачі лінійне співвідношення:

Струм $I_2 = a_2 + b_2 I_1$:

$$\left. \begin{aligned} 8,5 &= a_2 + b_2 \cdot 5 \\ 6,5 &= a_2 + b_2 \cdot 10 \end{aligned} \right\}, \text{ звідки } a_2 = 10,5, b_2 = -0,4.$$

Отже, $I_2 = 0,05 - 0,4 \cdot I_1$ А.

Струм $I_3 = a_3 + b_3 I_1$:

$$\left. \begin{aligned} 7,5 &= a_3 + b_3 \cdot 5 \\ 10,5 &= a_3 + b_3 \cdot 10 \end{aligned} \right\}; \text{ звідки } a_3 = 4,5, b_3 = 0,6.$$

$I_3 = 4,5 + 0,6 \cdot I_1$ А.

Розраховуємо значення струмів I_1 , I_3 за умови $I_2 = 0$:

$0 = 10,5 - 0,4 I_1$, звідки $I_1 = 26,25$ А,

$I_3 = 4,5 + 0,6 \cdot 26,25 = 20,25$ А.

Знаходимо додаткову $E_{дод}$, яка забезпечить у контурі, на рис. 3.86 струми $I_1 = 26,25$ А при значенні опору $R_1 = 5$ Ом:

$$26,25 = \frac{E_{дод} + E_{ег}}{5 + R_{ег}},$$

звідки

$$E_{дод} = 26,25(5 + R_{ег}) - E_{ег} = 243,75 \text{ В.}$$

Задача 3.43 (рис. 3.87)

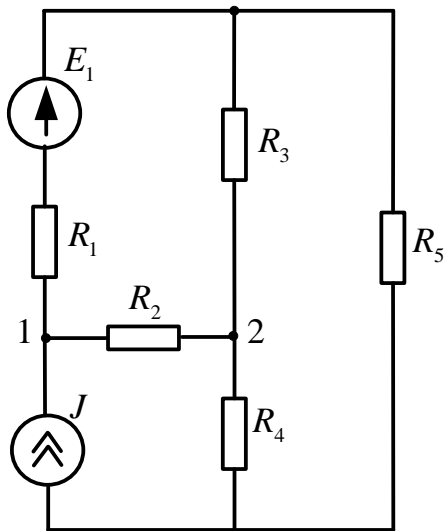


Рисунок 3.87

Відомо: $E_1 = 96 \text{ В}$, $J = 10 \text{ А}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $R_4 = 30 \text{ Ом}$, $R_5 = 50 \text{ Ом}$.

У гілці між вузлами 1 – 2 виділяється максимальна потужність P_{2max} .

Визначити: R_2, I_2, P_{2max} .

Розв'язання.

1. Вимикаємо досліджувану гілку з резистором R_2 і представляємо схему з вимкненою гілкою як еквівалентний генератор напруги з ЕРС $E_{ег}$ і внутрішнім опором $R_{ег}$ (рис. 3.88).

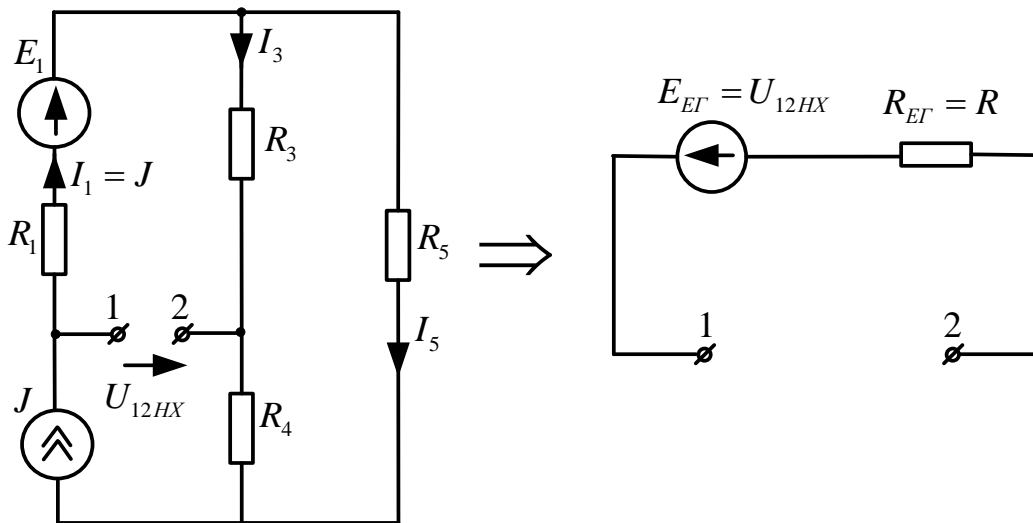


Рисунок 3.88

2. Складаємо вираз напруги

$$U_{12HX} = R_3 I_3 - E_1 + R_1 I_1,$$

з якого випливає, що для її обчислення потрібно знати струми I_1 , I_3 . Оскільки затискачі 1 – 2 розімкнені, джерело струму і резистор R_1 , з'єднані послідовно, тому $I_1 = J = 10 \text{ А}$; резистори R_3 і R_4 також з'єднані послідовно, і струм I_3 можна розрахувати за формулою «чужого опору»:

$$I_3 = J \frac{R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 5 \text{ A.}$$

Тоді $U_{12\text{нх}} = 20 \cdot 5 - 96 + 10 \cdot 10 = 104 \text{ В.}$

Знаходимо еквівалентний опір кола на рис. 3.88 відносно затискачів 1 – 2.

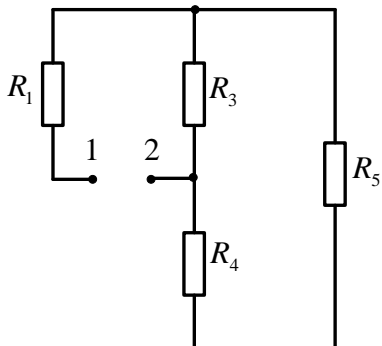


Рисунок 3.89

В умові задачі внутрішні опори джерел не вказані, тому джерела вважаємо ідеальними і відповідно джерело E_1 замінюємо проводом, джерело J вилучаємо із схеми (рис. 3.89).

$$R_{\text{ек}1-2} = R_1 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5} = 26 \text{ Ом.}$$

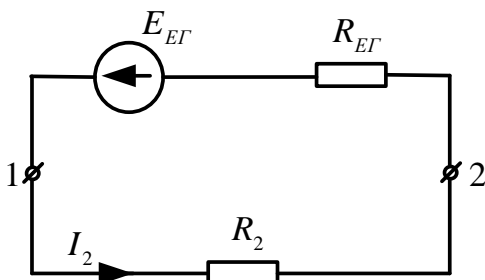


Рисунок 3.90

3. Складаємо схему, еквівалентну вихідній, (рис. 3.90) в якій

$$E_{\text{ег}} = U_{12\text{нх}} = 104 \text{ В, } R_{\text{ек}} = R_{\text{ек}12} = 26 \text{ Ом.}$$

Відомо, що максимальна потужність між точками 1 – 2 виділяється за умови

$$R_2 = R_{\text{ег}} = 26 \text{ Ом.}$$

Тоді:

$$I_2 = \frac{E_{\text{ег}}}{2R_{\text{ег}}} = 2 \text{ А, } P_{\text{max}} = R_2 I_2^2 = 104 \text{ Вт}$$

або

$$P_{\text{max}} = \frac{E_{\text{ег}}^2}{4R_{\text{ег}}} = 104 \text{ Вт.}$$

Задача 3.44 (рис. 3.91)

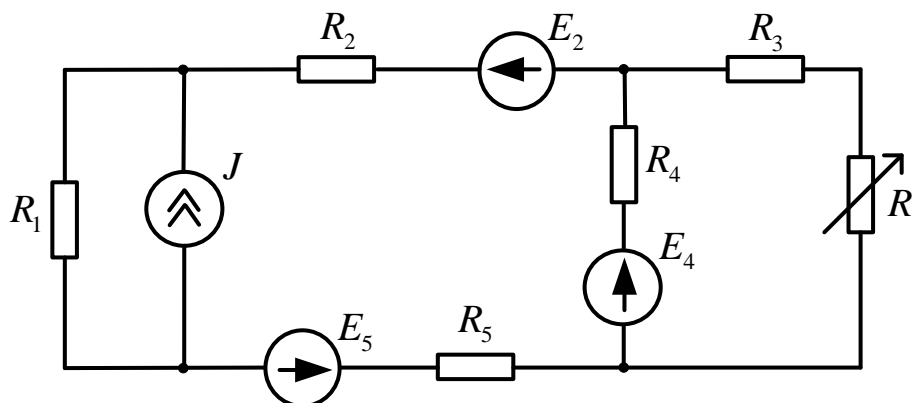


Рисунок 3.91

Відомо: $J = 8,5 \text{ A}$, $E_2 = 40 \text{ В}$, $E_4 = 10 \text{ В}$, $E_5 = 20 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$,
 $R_2 = 18 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$, $R_4 = 50 \text{ Ом}$, $R_5 = 12 \text{ Ом}$.

Визначити максимальну потужність, яка виділяється у змінному опорі R .

1. У правій гілці кола послідовно з досліджуваним резистором R ввімкнений резистор R_3 . У такому випадку вимикати зі схеми можна або повністю всю праву гілку або її частину з шуканою величиною. Оскільки за умовою задачі потрібно визначити максимальну потужність, яка виділяється не в усій гілці, а тільки в резисторі зі змінним опором, то зі схеми слід вилучити саме цей резистор, замінивши R_3 у складі еквівалентного генератора (рис. 3.92).

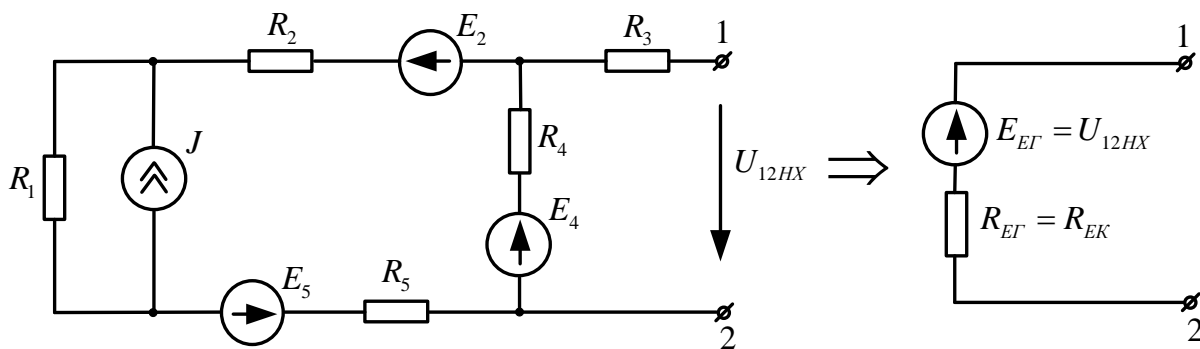


Рисунок 3.92

2. Складаємо вираз напруги між розімкненими затискачами 1 – 2 і обчислюємо її значення, беручи до уваги, що через резистор R_3 струм не проходить:

$$U_{12\text{нх}} = E_4 \pm R_4 I_4.$$

Для визначення I_4 зводимо схему до одноконтурної, користуючись перетворенням джерела струму J на джерело наруги $E_1 = J \cdot R_1 = 170 \text{ В}$ (рис. 3.93).

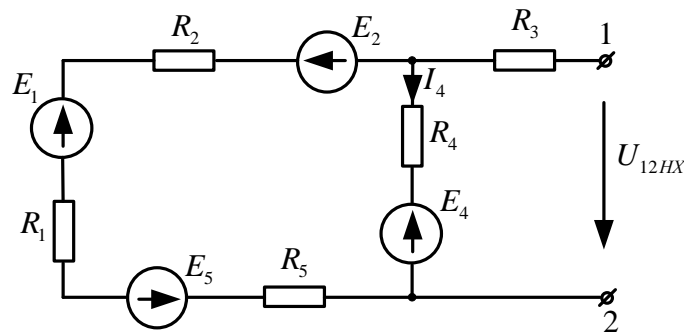


Рисунок 3.93

В отриманому контурі

$$I = I_4 = \frac{\Sigma \pm E}{\Sigma R} = \frac{E_1 - E_2 - E_4 - E_5}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = 1 \text{ А},$$

відповідно, $U_{12\text{нх}} = E_4 + R_4 I_4 = 60 \text{ В}$.

Розраховуємо еквівалентний опір кола на рис. 3.93 відносно затискачів 1 – 2, вважаючи джерела ідеальними, оскільки їх внутрішні опори в умові задачі не вказані (рис. 3.94).

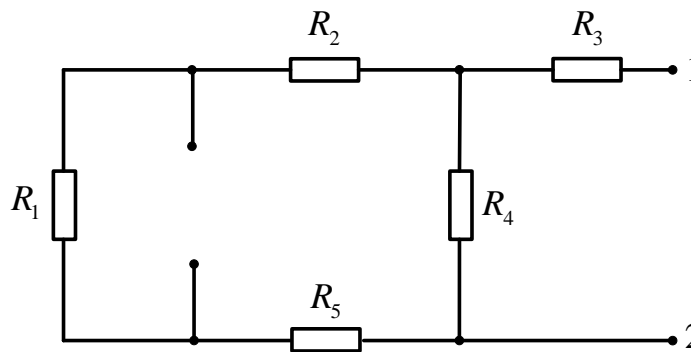


Рисунок 3.94

$$R_{\text{ек12}} = \frac{(R_1 + R_2 + R_5)R_4}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} + R_3 = 30 \text{ Ом.}$$

Отже

$$E_{\text{ер}} = U_{12\text{нх}} = 60 \text{ В, } R_{\text{ер}} = R_{\text{ек12}} = 30 \text{ Ом.}$$

Розрахованих значень $E_{\text{ер}}$, $R_{\text{ер}}$ достатньо для визначення максимальної потужності у резисторі зі змінним опором R :

$$P_{\text{max}} = \frac{E_{\text{ер}}^2}{4R_{\text{ер}}} = 30 \text{ Вт.}$$

4. РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНЕ ЗАВДАННЯ

1. Обчислити струми у гілках складного кола:
 - методом контурних струмів;
 - методом вузлових потенціалів.
2. Перевірити правильність розрахунків за балансом потужностей.
3. Спростити задане коло до двох незалежних контурів і розрахувати струми в перетвореному колі:
 - за законами Кірхгофа;
 - методом вузлової напруги;
 - методом накладання;
 - методом еквівалентного генератора струму тільки в одній гілці за вказівкою викладача.

Номер схеми та рядків у таблицях 1 і 2 задає викладач.

Таблиця 1

№	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
з/п	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	10	15	20	25	30	80
2	15	20	25	30	35	75
3	20	25	30	35	40	70
4	25	30	35	40	45	65
5	30	35	40	45	50	60
6	35	40	45	50	10	55
7	40	45	50	10	15	60
8	45	50	10	15	20	65
9	50	10	15	20	25	70
10	10	20	30	40	50	75

Таблица 2

№	E_1	E_2	E_3	J
з/п	B	B	B	A
1	50	100	200	5
2	100	150	250	10
3	150	200	100	15
4	200	250	50	20
5	250	300	300	25
6	50	150	250	5
7	100	200	250	15
8	150	300	100	25
9	300	100	150	10
10	200	50	100	20

Схеми до розрахунково-графічного завдання

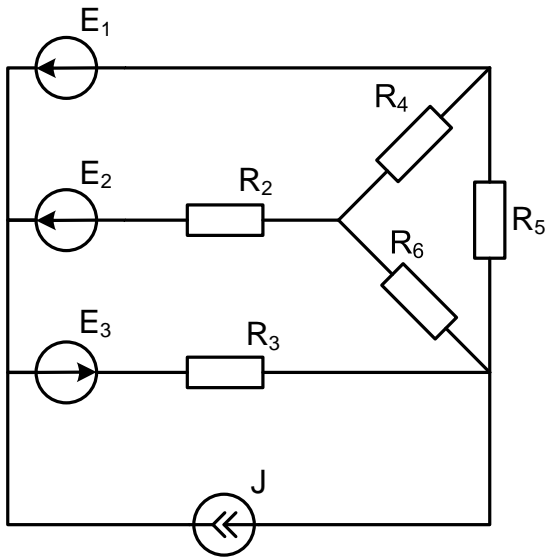


Схема 1

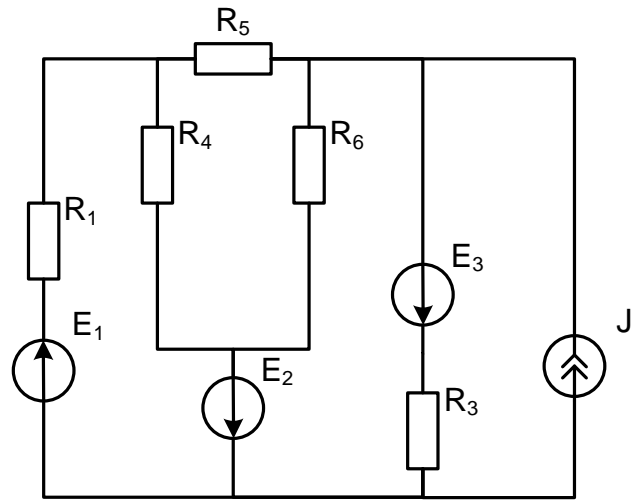


Схема 2

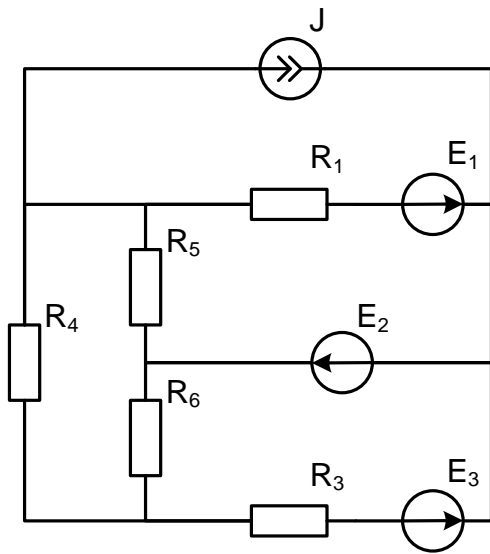


Схема 3

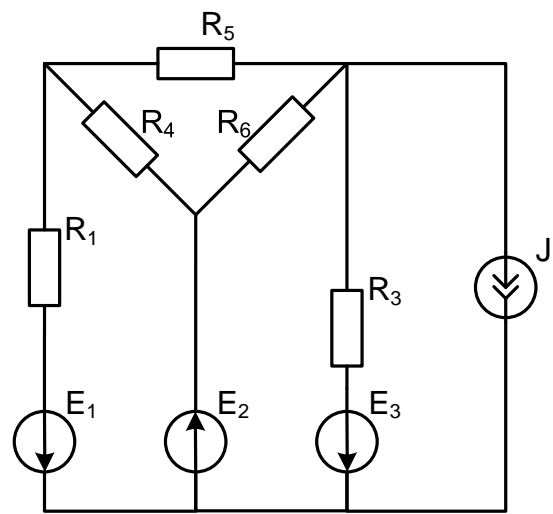


Схема 4

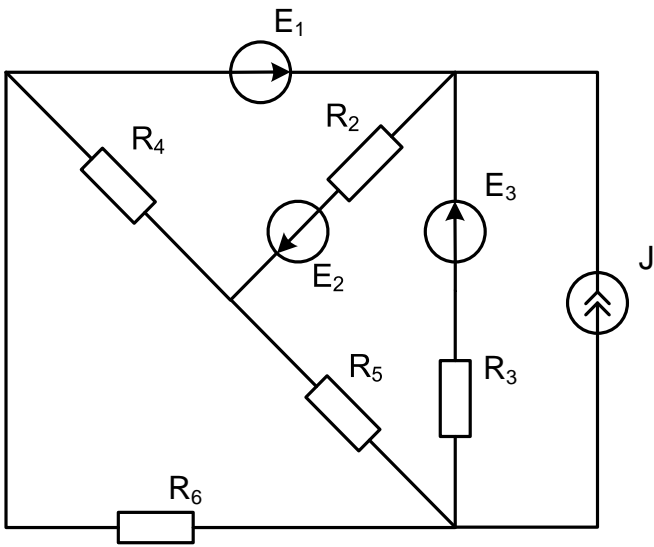


Схема 5

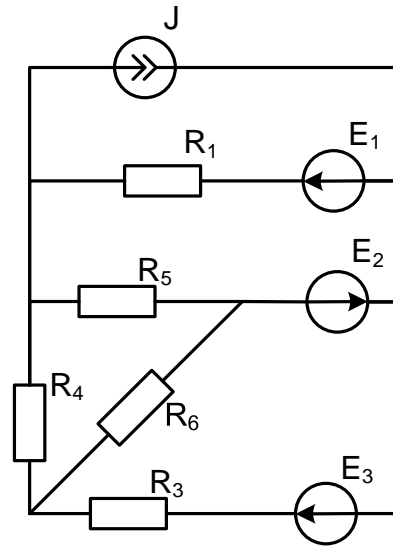


Схема 6

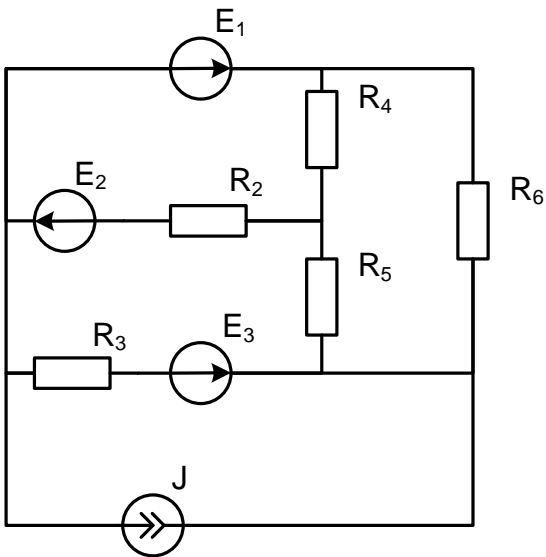


Схема 7

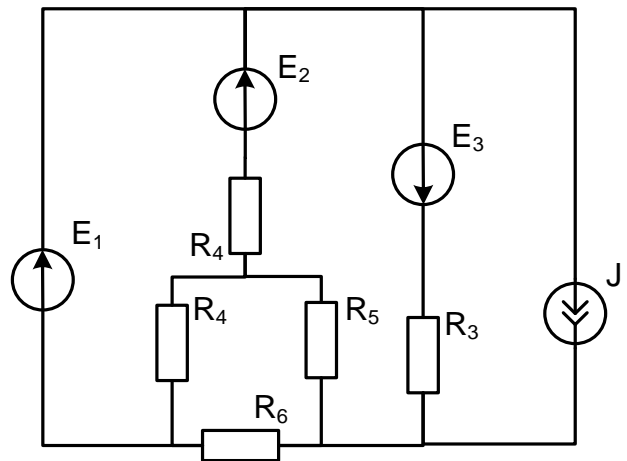


Схема 8

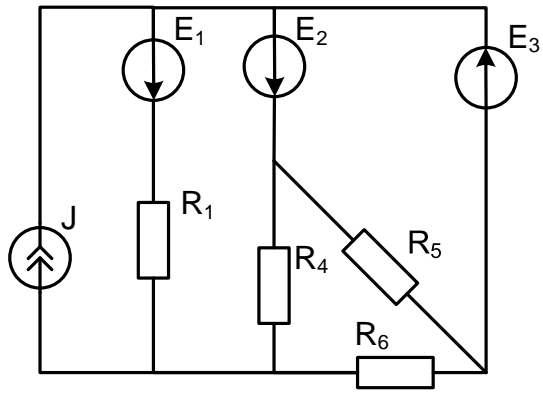


Схема 9

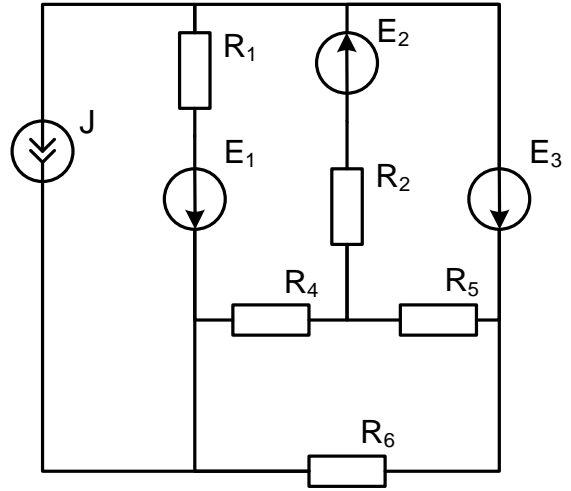


Схема 10

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Видолоб та ін.// За заг. ред. С. М. Чиженка, В. С. Бойка. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. – Т.1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272с.
2. Теоретичні основи електротехніки: Підручник у 3-х т./ В.С. Бойко, В.В.Бойко, Ю.Ф. Видолоб та ін.// За заг. ред. С. М. Чиженка, В. С. Бойка. – К: НТУУ «КПІ», 2008. – Т.2:Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола. – 224с.
3. Лябук М.Н. Електричні машини. – Луцьк, 2009. – 445с.