

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ КУРС ЛЕКЦІЙ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Електронні компоненти та системи», «Електронні прилади та
пристрої»
спеціальності 171 Електроніка

Укладачі: Т.А. Хижняк

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент *Гармаш О.В.*, доцент, кандидат технічних наук,
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Ямненко Ю.С.*, професор, доктор технічних наук

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради факультету електроніки
(протокол № 06/22 від 14.06.2022 р.)*

В посібнику викладено основні поняття, закони та методи розрахунку кіл постійного струму та ряд прикладів застосування цих методів при розгляді реальних схем. Даний посібник є частиною курсу лекцій з дисципліни Теорія електричних кіл і призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 171 Електроніка. Загалом матеріал посібника буде корисним для всіх студентів, що вивчають споріднені дисципліни електротехніка, теорія електронних кіл, аналіз електронних схем та інші, для успішного засвоєння яких потрібне розуміння процесів в електричних колах та знання методів розрахунків струмів і напруг в них

Реєстр. № НП **XX/XX-XXX**. Обсяг **X,X** авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ВСТУП

Дисципліна «Теорія електричних кіл» закладає основи розуміння основних енергетичних процесів в електричних колах, дає поняття про представлення реальних електротехнічних пристроїв їх спрощеними моделями – електричними схемами, надає знання щодо основних методів розрахунку електричних кіл постійного та змінного струму, особливостей застосування цих методів та доцільності їх використання для конкретної топології схеми.

Дисципліна формує наступні **компетентності**:

- 1) здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- 2) здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями;
- 3) здатність працювати в команді – всі лабораторні роботи виконуються в складі бригад з декількох чоловік;
- 4) здатність інтегрувати знання фундаментальних розділів фізики та хімії для розуміння процесів твердотільної, функціональної, квантової та енергетичної електроніки, електротехніки, теорії поля;
- 5) здатність застосовувати відповідні математичні, наукові й технічні методи, сучасні інформаційні технології і комп'ютерне програмне забезпечення, навички роботи з комп'ютерними мережами, базами даних та Інтернет ресурсами для вирішення інженерних задач в галузі електроніки;
- 6) здатність ідентифікувати, класифікувати, оцінювати і описувати процеси у приладах, пристроях, компонентах та системах електроніки за допомогою аналітичних методів, засобів моделювання, дослідних зразків та результатів експериментальних досліджень.

В результаті вивчення дисципліни студенти досягають наступних **програмних результатів**:

- 1) застосовувати знання і розуміння диференційного та інтегрального числення, алгебри, функціонального аналізу дійсних і комплексних змінних, векторів та матриць, векторного числення, диференційних рівнянь в звичайних та часткових похідних, ряду Фур'є, статистичного аналізу, теорії інформації, чисельних методів, основ теорії автоматичного регулювання для вирішення теоретичних і прикладних задач електроніки;
- 2) оцінювати характеристики та параметри матеріалів електронної техніки, розуміти основи твердотільної, функціональної, квантової та енергетичної електроніки, електротехніки, аналогової та цифрової схемотехніки, перетворювальної та мікропроцесорної техніки;

3) використовувати інформаційні та комунікаційні технології, прикладні та спеціалізовані програмні продукти для вирішення задач проектування та налагодження електронних систем, демонструвати навички програмування, аналізу та відображення результатів вимірювання та контролю;

4) застосовувати експериментальні навички (знання експериментальних методів та порядку проведення експериментів) для перевірки гіпотез та дослідження явищ електроніки, вміння використовувати стандартне обладнання, планувати, складати схеми; аналізувати, моделювати та критично оцінювати отримані результати;

5) виявляти навички самостійної та колективної роботи, лідерські якості, організувати роботу за умов обмеженого часу з наголосом на професійну сумлінність;

б) демонструвати навички проведення експериментальних досліджень, пов'язаних з професійною діяльністю; вдосконалювати методики вимірювання; контролювати достовірність отриманих результатів; систематизувати та аналізувати дані, отримані експериментальним шляхом

Базовими знаннями для вивчення даної дисципліни є знання, отримані за результатами вивчення математичного аналізу, фізики, техніки вимірювань. В свою чергу, знання, отримані при вивченні теорії електричних кіл є основою для вивчення таких дисциплін як «Нелінійні електричні кола та перехідні процеси», «Аналіз та розрахунок електронних схем».

Дисципліна охоплює теоретичний та практичний матеріал наступних розділів і тем:

Розділ 1. Лінійні кола постійного струму

Тема 1.1. Основні поняття теорії електричних кіл. Еквівалентні схеми. Джерела та приймачі електричної енергії.

Тема 1.2. Основні структурні елементи електричних схем. Закони Ома та Кірхгофа. Потенціальна діаграма. Енергетичний баланс

Тема 1.3. Еквівалентні перетворення віток з пасивними та активними елементами. Основні властивості кіл постійного струму.

Тема 1.4. Основні методи розрахунку електричних кіл.

Розділ 2. Лінійні кола змінного струму

Тема 2.1. Основні характеристики однофазного синусоїдального струму, способи представлення функцій. R , L , C елементи в колах синусоїдального струму.

Тема 2.2. Потужності в колах синусоїдального струму. Експериментальне визначення енергетичних параметрів.

Тема 2.3. Методи розрахунку кіл синусоїдального струму. Векторні діаграми як спосіб розрахунку кола.

Тема 2.4. Магнітно (індуктивно) зв'язані елементи електричного кола. Трансформатор.

Тема 2.5. Методи розрахунку кіл з індуктивно зв'язаними елементами.

Тема 2.6. Резонансні явища в колах синусоїдального струму.

Розділ 3. Трифазні кола

Тема 3.1. Багатофазні кола –структура, основні параметри, характеристики та співвідношення.

Тема 3.2. Розрахунок трифазних кіл при різних умовах.

Розділ 4. Чотиріполюсники

Тема 4.1. Чотиріполюсники - загальна характеристика, класифікація, форми запису.

Тема 4.2. Еквівалентні схеми заміщення чотиріполюсників. Параметри активних та пасивних чотиріполюсників.

В даному посібнику представлено перший розділ і розглянути методи аналізу лінійних кіл постійного струму.

ЛЕКЦІЯ 1.

Поняття електричного кола та його елементів. Еквівалентні схеми реальних пристроїв – монтажна, принципова, схема заміщення з ідеалізованими елементами. Поняття електричного струму, електричної напруги, миттєвої потужності, енергії. Джерела та приймачі електричної енергії – визначення, види (джерело ЕРС, джерело струму), ідеальні та реальні джерела – відмінності, особливості роботи з ними. Зовнішня характеристика джерела живлення – вигляд, основні ділянки. Електричний опір, провідність, індуктивність, ємність – визначення понять, особливості роботи з даними параметрами, основні характеристики резисторів, котушок індуктивності та конденсаторів. Схеми заміщення пасивних елементів кола залежно від умов роботи.

В загальному випадку, можливі два способи опису електричних та магнітних кіл: за допомогою понять теорії кіл або теорії поля. Все залежить від умов задачі, яка розв'язується.

Теорія кіл виходить з наближеної заміни реального електротехнічного пристрою ідеальною схемою заміщення і дозволяє визначити безпосередньо напругу між кінцями ділянки кола, що розглядається, без її розрахунку у проміжних точках даної ділянки. Струми знаходяться без обчислення їх густини у різних точках перерізу провідника.

Теорія поля вивчає зміни електричних та магнітних величин від точки до точки у просторі та часі, досліджує напруженості електричного та магнітного полів і такі явища як випромінювання електромагнітної енергії, розподіл об'ємних зарядів, густин струмів.

1.1. Електричне коло та його елементи

Електричним колом (ланцюгом) називають сукупність пристроїв та об'єктів, що утворюють шлях для протікання електричного струму. Це, по суті, деякий розрахунковий еквівалент, яким в теорії електричних кіл заміняють реальний електромагнітний пристрій з фізичними процесами, що відбуваються всередині та поза ним.

Електричне коло - це, по суті, деякий розрахунковий еквівалент, яким в теорії електричних кіл заміняють реальний електромагнітний пристрій з фізичними процесами, що відбуваються всередині та поза ним.

Склад реальних електричних кіл, які існують в побуті та на виробництві, та зв'язки елементів в них є дуже різноманітними, тому для їх представлення використовують набір символів, що мають різний ступінь абстракції та називаються схемами.

Елементи електричного кола – ідеалізовані моделі реальних складових частин електротехнічних пристроїв, що наближено відтворюють явища, які відбуваються у реальних пристроях.

Розрізняють активні (джерела ЕРС та струму) та пасивні (резистори, котушки індуктивності, конденсатори) елементи. Пасивні елементи фактично є приймачами енергії, що надходить від джерел.

З'єднані між собою джерела та приймачі електричної енергії, через які може протікати електричний струм, і формують електричне коло.

Джерела електричної енергії – хімічні джерела струму, термоелементи, акумулятори, генератори, у яких відбувається перетворення хімічної, молекулярно-кінетичної, теплової, механічної енергії в електричну.

Приймачі електричної енергії (навантаження) – електричні лампи, електронагрівальні прилади, електродвигуни, у яких електрична енергія перетворюється у світлову, теплову, механічну енергію.

1.2. Основні поняття та параметри, за допомогою яких описують електричне коло і елементи в ньому

Електромагнітні процеси в електричному колі описуються за допомогою понять «напруга», «струм», «електрорушійна сила», «опір», «провідність», «індуктивність», «ємність».

Напругою або **різницею потенціалів** U_{12} між точками 1 та 2 називають роботу, яка здійснюється силами електричного поля при перенесенні заряду q в 1 Кл із точки 1 в точку 2, незалежно від траєкторії переносу:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} dl, \quad (1.1)$$

де φ_1, φ_2 – потенціали електричного поля в точках 1 та 2 відповідно, \vec{E} – напруженість електричного поля, dl – відстань між точками 1 та 2.

Позитивний напрям напруги обирається від точки кола з більшим потенціалом до точки кола з меншим потенціалом і зазвичай співпадає з позитивним напрямом струму (рис. 1.1).

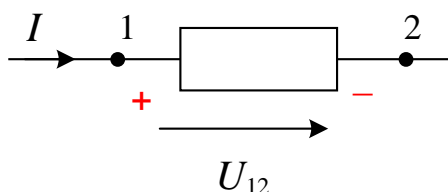


Рис. 1.1. Визначення напрямку напруги на елементі електричного кола

Під **електричним струмом** розуміють спрямований (упорядкований) рух електричних зарядів. Однією з характеристик електричного струму є його густина в певній точці електричного поля. При розрахунку електричних кіл методами теорії електричних кіл вважається, що густина струму в усіх точках є однаковою.

Основним видом струму, який буде розглядатись при розрахунках, є **струм провідності**, який протікає під дією електричного поля. Його густина пропорційна напруженості електричного поля. В металах та напівпровідниках струм провідності обумовлений рухом вільних електронів.

Струм провідності буває постійним та змінним.

Постійним струмом називають струм, незмінний у часі. Постійний струм є спрямованим упорядкованим рухом часток, що несуть електричні заряди. Носіями зарядів у металах є вільні електрони, а в рідинах – іони. Упорядкований рух носіїв зарядів у провідниках викликається електричним полем, створеним в них джерелами електричної енергії.

Постійний струм прийнято позначати літерою I . У Міжнародній системі одиниць (СІ) за одиницю вимірювання струму прийнято ампер (А).

Позитивний напрямок струму обирається довільно і характеризується знаком. На схемі напрям струму позначається стрілочкою від більшого потенціалу до меншого (див. рис. 1.1). Якщо при розрахунках значення струму отримується з позитивним знаком – його напрям співпадає з обраним на схемі, якщо з негативним – дійсний напрям струму є протилежним обраному.

Змінний струм – електричний струм, сила якого періодично змінюється з часом. Здебільшого, коливання струму відбуваються за гармонічним законом.

Особливістю змінного струму є те, що деякі елементи електричного кола впливають не лише на амплітуду струму, але й на його фазу. Тому для розрахунків електричних кіл змінного струму замість активних опорів використовуються комплексні опори – імпеданси, а всі розрахунки виконуються з використанням комплексних чисел.

1.3. Джерела електричної енергії – їх основні види та способи представлення при розрахунках

Джерело електричної енергії характеризується значенням і напрямком електрорушійної сили (ЕРС), а також значенням внутрішнього опору $R_{вн}$.

ЕРС джерела в колах постійного струму позначається символом E .

Якщо через ділянку електричного кола під дією прикладеної напруги $u(t)$ проходить електричний заряд q , то при цьому здійснюється елементарна робота

$$dw = u(t) \cdot dq = u(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

Швидкість, з якою електрична енергія надходить в коло в цю мить, називається *миттєвою потужністю*:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = u(t) \cdot \frac{dq}{dt} = u(t) \cdot i(t)$$

Миттєва потужність є величиною алгебраїчною ($p(t) > 0$, якщо $u(t)$ та $i(t)$ мають однакові знаки).

Якщо $p(t) > 0$ енергія надходить до приймача, при $p(t) < 0$ – енергія повертається від ділянки кола, що розглядається, до джерела.

Енергія, що надходить до приймача за проміжок часу від t_1 до t_2 , виражається інтегралом:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

На відміну від миттєвої потужності, енергія, яка надходить до приймача, не може бути негативною (у протилежному випадку це буде не приймач, а джерело).

Робота та енергія вимірюються в джоулях (Дж), а потужність – у ватах (Вт).

Якщо через внутрішній опір джерела під дією ЕРС E протікає струм I , то напруга на зовнішніх затискачах джерела визначається за формулою

$$U = E - IR_{BH}$$

і при збільшенні струму I зменшується. Залежність напруги U на виводах реального джерела від струму I зображена на рис. 1.2.а. Тангенс кута нахилу прямої $tg\alpha$ пропорційний внутрішньому опору джерела живлення:

$$tg\alpha = \frac{R_{BH} m_i}{m_u},$$

де m_u – масштаб по осі U , m_i – масштаб по осі I .

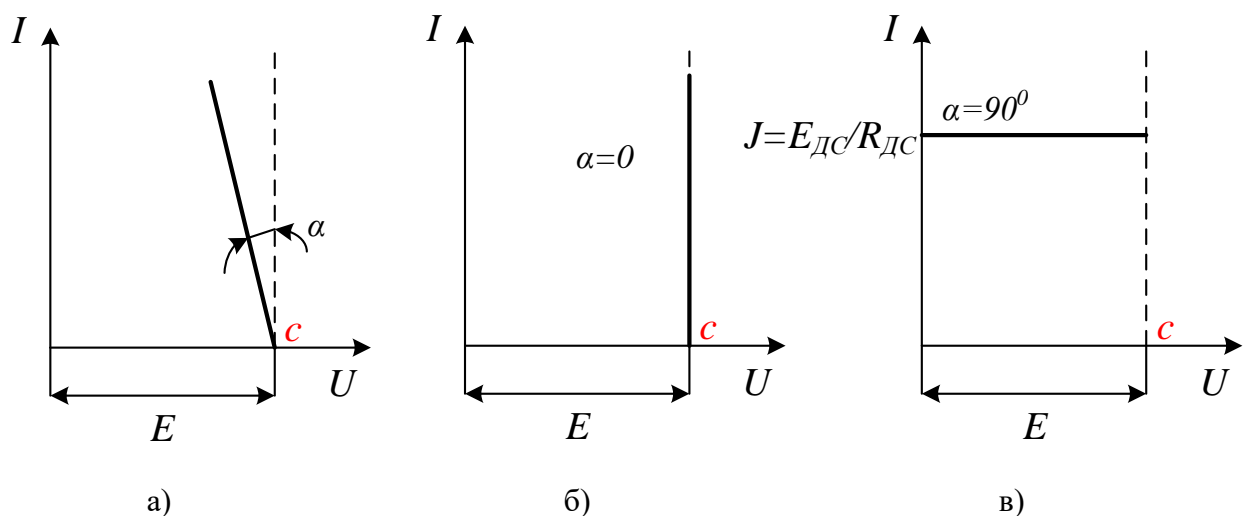


Рис. 1.2. ВАХ реального джерела енергії (а), ідеального джерела ЕРС (б), ідеального джерела струму (в)

Залежно від значення кута нахилу вольт-амперної характеристики (ВАХ) джерела живлення можливі два крайні випадки, які визначають тип джерела:

1) якщо в деякого джерела внутрішній опір $R_{BH} = 0$, то його ВАХ буде прямою вертикальною лінією, що виходить з точки c на осі напруг і відповідає значенню $U = E$ (рис. 1.2.б). Така характеристика відповідає *ідеальному джерелу ЕРС*.

2) якщо в деякому джерелі нескінченно збільшувати ЕРС E і внутрішній опір R_{BH} , то точка c (рис. 1.2.а) зміщується по осі абсцис у нескінченність, а кут нахилу ВАХ прямує до 90° відносно осі струмів (рис. 1.2.в). Таке джерело живлення називають *ідеальним джерелом струму*.

Ідеальне джерело ЕРС – це ідеалізоване джерело живлення, напруга на виходах якого є постійною, не залежить від струму, і дорівнює ЕРС, а внутрішній опір дорівнює нулеві.

Ідеальне джерело струму є ідеалізованим джерелом живлення, що створює постійний струм $I=J$, який не залежить від опору навантаження, під'єданого до нього, а ЕРС $E_{ДС}$ і внутрішній опір $R_{ДС}$ є нескінченно великими. Відношення двох нескінченно великих величин $E_{ДС} / R_{ДС}$ дорівнює кінцевій величині – струму J джерела.

При розрахунку та аналізі електричних кіл *реальне джерело* електричної енергії з кінцевим значенням R_{BH} заміняють *розрахунковим еквівалентом*. Еквівалентом може бути:

а) джерело ЕРС E з послідовно увімкненим опором R_{BH} , рівним внутрішньому опору реального джерела (рис. 1.3.а; стрілка в позначенні джерела ЕРС вказує напрямок зростання потенціалу всередині джерела);

б) джерело струму зі струмом $J=E/R_{BH}$ і увімкненим паралельно з ним опором R_{BH} (рис. 1.3.б; стрілки в позначенні джерела струму вказують позитивний напрямок струму, розрив між стрілками відображає нескінченно великий внутрішній опір ідеального джерела струму).

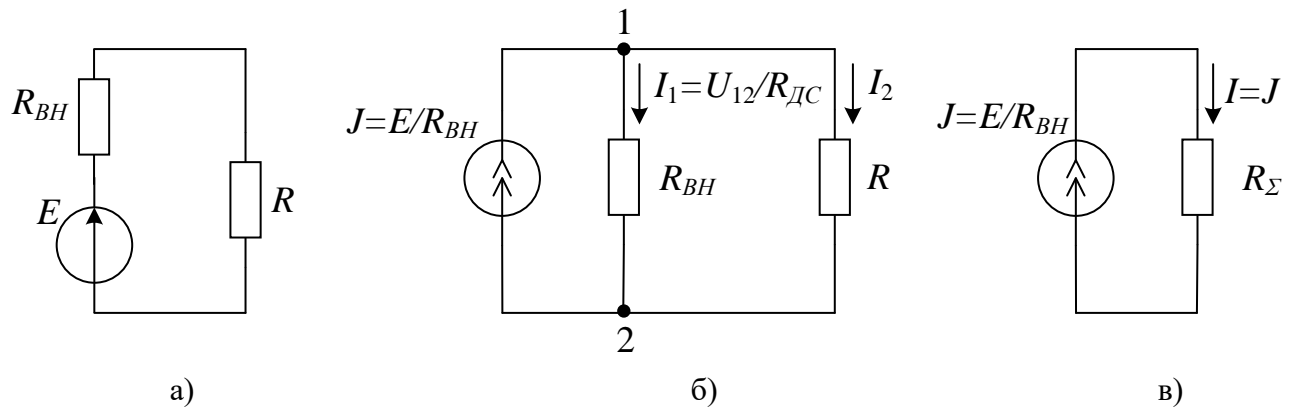


Рис. 1.3. Схеми заміщення реальних джерел енергії джерелом ЕРС (а) та джерелом струму (б, в)

Еквівалентні джерела є рівноправними в застосуванні при відображенні реального джерела енергії. Однак є певні нюанси:

1) у випадку якщо реальне джерело заміщується ідеальним джерелом ЕРС чи джерелом струму втрачається інформація щодо реальних процесів втрат енергії на внутрішньому опорі джерела, який ніколи не буде ні нульовим, ні нескінченно великим – тобто це ідеалізовані джерела, фізично реалізувати які неможливо;

2) схема рис. 1.3.б еквівалента схемі рис. 1.3.а лише з позиції енергії, що виділяється в опорі приймача (навантаження схеми) R , і не еквівалентна з позиції енергії, що виділяється у внутрішньому опорі джерела живлення R_{BH} ;

3) ідеальне джерело ЕРС без послідовно з'єднаного з ним опору R_{BH} не можна замінити ідеальним джерелом струму.

Вольт-амперна характеристика джерел енергії називається **зовнішньою характеристикою** джерела, оскільки описує залежність вихідної напруги джерела (напруги на його зовнішніх виводах) від струму, що віддається джерелом у навантаження. Джерела можуть бути лінійними і нелінійними, що впливає на вигляд зовнішньої характеристики.

В загальному випадку вольт-амперні характеристики джерела виглядають як показано на рис. 1.4.

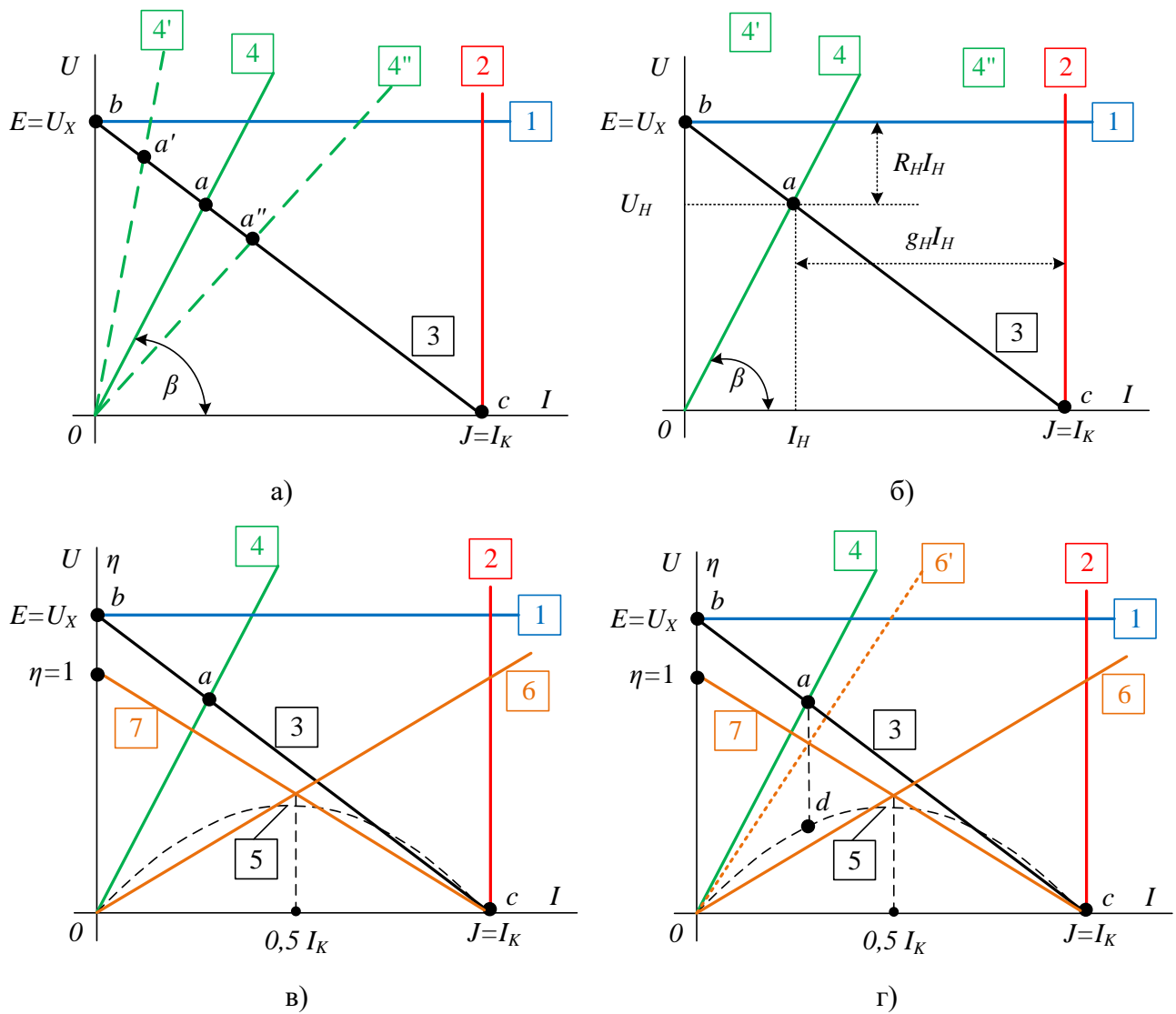


Рис. 1.4. Характеристики реального джерела енергії

Зовнішня характеристика ідеального джерела ЕРС на рис. 1.4.а показана прямою 1, а для ідеального джерела струму – прямою 2. Пряма 3 відображає характеристику реального джерела, в якому не компенсуються втрати енергії всередині самого джерела, і відповідає рівнянню напруги на навантаженні:

$$U_H = E - R_{BH}I_H, \quad (1.2)$$

де U_H – напруга на виводах джерела, R_{BH} – внутрішній опір джерела, I_H – струм навантаження.

Рівняння для напруги на навантаженні:

$$U_H = R_H I_H, \quad (1.3)$$

де R_H – опір навантаження.

Розв'язуючи два рівняння (1.2) і (1.3) спільно, визначається струм в колі:

$$I_H = \frac{E}{R_{BH} + R_H}. \quad (1.4)$$

Графічно цей розв'язок представлений точкою a на рис. 1.4.а,б, де пряма 4 – це ВАХ навантаження (див. рівняння (1.4)). На рис.1.4.б показано параметри робочої точки – напругу на навантаженні U_H , струм навантаження I_H та відповідні інтервали по осі напруг і струмів - $R_H I_H$ та $g_H U_H$, які представляють напругу, записану через опір навантаження та його струм, і струм як добуток провідності навантаження та напруги на ньому.

При зміні опору навантаження змінюється кут нахилу β ВАХ і точка a зміщується зовнішньою характеристикою вгору a' чи вниз a'' (навантажувальні прямі 4' та 4'' на рис. 1.4.а), визначаючи режим роботи джерела: якщо опір навантаження дорівнює нескінченності, точка a суміщається з точкою b і створюються умови холостого ходу (в цьому режимі напруга на виводах джерела дорівнює його ЕРС); якщо опір навантаження дорівнює 0, утворюється режим короткого замикання, і точка a суміщається з точкою c (це дуже небезпечний режим, оскільки струм в колі $I_K = J$ обмежується лише внутрішнім опором джерела, а оскільки цей опір зазвичай дуже малий, то струм може досягти значень, критичних для справності джерела).

При зміщенні точки a в межах точок b та c можливі два режими, які називаються номінальний та узгоджений.

Номінальний режим – це режим, за якого елементи електричного кола працюють в умовах, що відповідають проектним. Номінальними параметрами є струм, напруга та потужність.

Узгоджений режим – це режим, за якого джерело віддає у навантаження максимально можливу потужність.

Потужність, що розсіюється в навантаженні описується наступним рівнянням:

$$P_H = R_H I_H^2 = R_H \frac{E^2}{(R_{BH} + R_H)^2} = EI_H \left(1 - \frac{I_H}{I_K} \right), \quad (1.5)$$

де I_K – струм короткого замикання

$$I_K = E / R_{вн}.$$

Функція, описана рівнянням (1.5) має вигляд кривої 5 на рис.1.4.в з максимумом при $R_{вн}=R_H$. При цьому, струм в навантаженні буде дорівнювати половині струму короткого замикання, що є недопустимим. Крім того, в цьому режимі коефіцієнт корисної дії (ККД) кола становить лише 50%. Пряма 6 відповідає зміні потужності джерела живлення від струму для випадку $R_{вн}=R_H$, а пряма 7 – коефіцієнту корисної дії.

Для підвищення ККД рекомендовано працювати в режимах, коли опір джерела набагато менший за опір навантаження (зменшення внутрішнього опору джерела веде до збільшення напруги на його виводах, а отже і до збільшення потужності – пряма б' на рис.1.4.г), тобто лівіше від точки максимуму – на рис. 1.4.г це точка d .

В реальному джерелі енергії при збільшенні струму від 0 до I_1 (рис. 1.5) напруга на виводах джерела спадає за лінійним законом, відповідно до рівняння $U=E-IR_{вн}$. При подальшому зростанні струму пропорційність між його величиною та спадом напруги порушується. Характеристика стає нелінійною. В одних джерелах енергії це пов'язано зі спадом ЕРС, в інших – зі зростанням опору, а у третіх – з обома цими факторами.

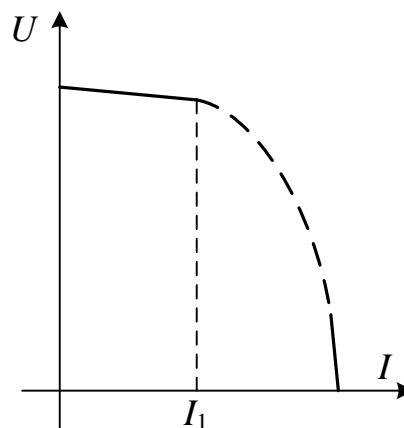


Рис. 1.5. Зовнішня характеристика реального джерела енергії

1.4. Пасивні елементи електричного кола (приймачі енергії)

1.4.1. Електричним опором називається протидія електричного кола проходженню електричного струму. Електричний опір позначається літерою R і на схемах позначається так, як це показано на рис. 1.6.а. Одиницею вимірювання опору згідно з системою СІ є Ом. Електричний опір лінійного провідника, в якому при незмінній різниці потенціалів в 1 В проходить струм в 1 А, є рівним 1 Ом.

Пристрої, які вмикаються в електричне коло і мають опір, називаються **резисторами**.

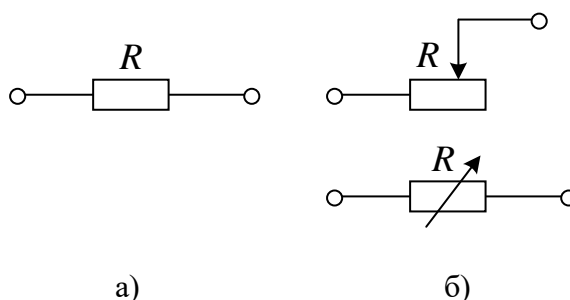


Рис.1.6. Постійний резистор (а) та реостати (б)

Опір провідника залежить від матеріалу, з якого він виготовлений, а також від довжини та площі поперечного перетину. Для оцінки електричних властивостей матеріалу провідника при постійному струмі використовується **питомий опір** – опір провідника довжиною в 1 м і площиною поперечного перетину в 1 мм².

Зв'язок питомого опору та опору провідника в цілому виражається наступною залежністю:

$$R = \frac{\rho l}{s},$$

де ρ – питомий опір, l – довжина провідника в метрах, s – площа поперечного перетину в квадратних міліметрах.

У широких межах залежність питомого опору від температури майже прямолінійна. Для металів – зростає з підвищенням температури, а для неметалічних провідників (наприклад, вугільних) та для електролітів – спадає.

Для кожного металу існує певний, так званий *температурний, коефіцієнт опору* (ТКО) α , який виражає збільшення опору провідника при зміні температури на $1\text{ }^{\circ}\text{C}$, віднесене до 1 Ом початкового опору.

Співвідношення між опорами R_1 та R_2 , що відповідають різним температурам T_1 та T_2 в межах до $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, записується наступним чином:

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha (T_2 - T_1)]$$

Поняття опору безпосередньо пов'язане з втратами енергії – незворотнім процесом поглинання електромагнітної енергії та перетворення її на теплову.

Кількість тепла, що виділяється при проходженні струму будь-яким провідником, залежить, в тому числі, і від частоти струму (для випадку змінного струму).

На низьких частотах змінного струму опір провідника мало відрізняється від опору на постійному струмі і є постійною величиною.

З підвищенням частоти струм розподіляється по перерізу провідника нерівномірно: всередині провідника густина струму зменшується, і він витісняється до поверхні, що призводить до зменшення струмопровідного перерізу провідника, а отже і до підвищення його опору. Це явище має назву *поверхневого ефекту (скін-ефекту)*. Нерівномірність розподілу струму по перерізу провідника може бути також спричинена впливом струму, що проходить по сусідньому провіднику – *ефект близькості*. Нерівномірне розподілення струму в провіднику призводить до зростання теплових втрат і є небажаним, але часто невідворотним процесом.

При розрахунках електричних кіл в рамках теорії кіл вважається, що струми в провідниках розподіляються рівномірно і вказаними ефектами та їх наслідками нехтують.

Змінне магнітне поле наводить у провідному середовищі провідника вихрові струми, що також призводять до додаткових втрат енергії на нагріванні.

Крім того, на високих частотах відбувається випромінювання у простір електричної енергії, що викликає додаткове зростання опору.

Зважаючи на ці фактори, опір елементів, які являють собою множину намотаних щільно витків провідника (котушка індуктивності, обмотки трансформатора), на високих частотах може підвищуватись до десятків разів, порівняно з низькими частотами.

Внаслідок присутності електричного і магнітного полів, провідник крім опору має певні індуктивності і ємності, які в переважній більшості випадків розглядаються як паразитні (шкідливі) фактори. Для зменшення власної індуктивності та ємності, резистори виконуються у вигляді пластинчатих або плетених елементів. Широко застосовують також недротяні резистори.

Обчислення опору, індуктивності та ємності провідника з урахуванням вказаних вище факторів відноситься до задач теорії поля.

Резистори, в яких передбачено зміну опору, називаються *реостатами* і виготовляються з провідників з великим питомим опором. Опір реостатів (рис. 1.6.б) може змінюватися плавно або дискретно.

Провідність є величиною, оберненою до опору і характеризує здатність провідника пропускати електричний струм. Провідність в схемах позначається літерами G (g). Одиницею вимірювання провідності є сіменс (См).

Відношення між опором і провідністю виражаються наступними виразами:

$$g = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{1}{g}. \quad (1.6)$$

Вольт-амперна характеристика лінійного резистора наведена на рис. 1.7.

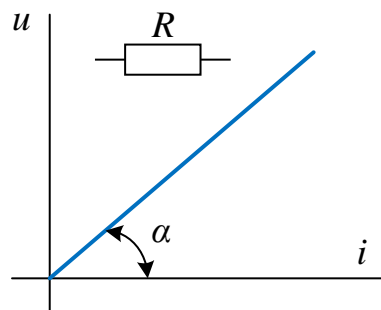


Рис. 1.7. ВАХ лінійного резистора

Відповідно до рис.1.7, опір резистора можна визначити як тангенс кута нахилу характеристики:

$$R = \frac{u}{i} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \alpha$$

де m_u, m_i – масштаби осей напруги та струму.

Потужність, що розсіюється на резисторі при протіканні через нього постійного струму, описується наступним рівнянням:

$$P = U \cdot I = I^2 R = U^2 / R .$$

1.4.2. Індуктивність. Якщо через будь-який замкнений електричний контур протікає струм, під його впливом довкола провідника створюється магнітне поле, і контур буде пронизуватися магнітним потоком. При цьому виникає потокозчеплення контуру Ψ , яке пропорційне струму i :

$$\Psi = L \cdot i ,$$

де L – коефіцієнт пропорційності між Ψ та i , який називають **індуктивністю**:

$$L = \frac{\Psi}{i} . \tag{1.7}$$

Індуктивність L вимірюється в Генрі (Гн) і залежить від геометричних розмірів контуру (катушки), числа його витків і від магнітних властивостей осердя, на якому намотана катушка.

Якщо струм i є змінним, за законом електромагнітної індукції в катушці наводиться ЕРС e_L , яку називають **ЕРС самоіндукції**:

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} . \tag{1.8}$$

Позитивні напрямки відліку для i та e_L збігаються (e_L пропорційна швидкості зміни струму i).

У магнітному полі відокремленої катушки з індуктивністю L , по якій тече струм i , запасається магнітна енергія

$$W_m = \int_0^I i d\Psi = \int_0^I Li di = \frac{LI^2}{2} \quad (1.9)$$

Таким чином, для індуктивності можна записати:

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

Схематичне позначення котушки з індуктивністю L наведено на рис.1.8.



Рис. 1.8.Схематичне зображення котушки індуктивності

Зв'язок потокозчеплення зі струмом індуктивного елемента називається вебер-амперною характеристикою (ВбАХ). У випадку лінійної залежності між цими величинами, індуктивний елемент буде лінійним і індуктивність може бути визначена як тангенс кута нахилу β ВбАХ (рис.1.9):

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{m_\Psi}{m_i} \operatorname{tg} \beta$$

де m_Ψ , m_i – масштаби по осях потокозчеплення та струму.

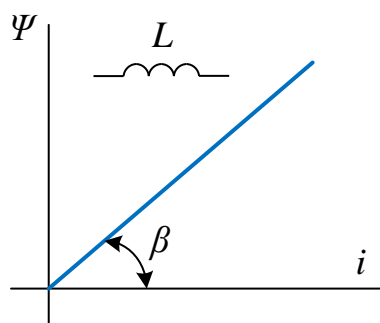


Рис. 1.9. Вебер-амперна характеристика індуктивного елемента

На рис. 1.10 зображені два контури – по першому тече струм i_1 , по другому i_2 . Потік Φ_1 , що створюється першим контуром, частково замикається пронизуючи тільки перший контур, оминаючи другий (складова Φ_{11}), а частково пронизує і другий контур (складова Φ_{12}):

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}.$$

Аналогічно визначається і потік Φ_2 другого контуру:

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}.$$

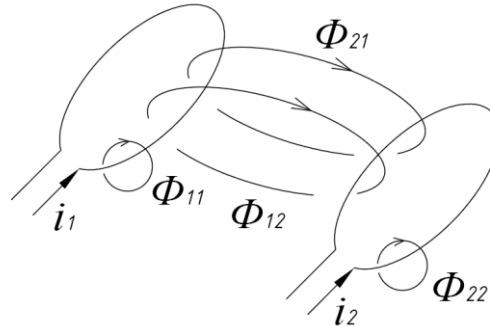


Рис. 1.10. Потокозчеплення двох контурів зі струмами

Якщо перший контур має w_1 витків, то потокозчеплення першого контуру

$$w_1(\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = w_1\Phi_1 \pm w_1\Phi_{21} = \Psi_1 \pm \Psi_{21}, \quad (1.10)$$

а потокозчеплення другого контуру з числом витків w_2 :

$$w_2(\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \Psi_2 \pm \Psi_{12}. \quad (1.11)$$

Знаки „+” у виразах (1.10) та (1.11) відповідають узгодженому напрямку потоку від свого струму і потоку, створюваного струмом у сусідньому контурі, а знаки „-” – зустрічному напрямкові потоків (для цього один зі струмів повинен змінити напрямок).

Потокозчеплення Ψ_{21} пропорційне струму i_2 , а Ψ_{12} – струму i_1 :

$$\Psi_{21} = w_1\Phi_{21} = Mi_2,$$

$$\Psi_{12} = w_2\Phi_{12} = Mi_1.$$

Коефіцієнт пропорційності M (Гн) називають **взаємною індуктивністю**:

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}. \quad (1.12)$$

Взаємна індуктивність залежить від взаємного розташування, числа витків, геометричних розмірів контурів (катушок) і від магнітної проникності μ_a осердь, на яких вони намотані. Якщо $\mu_a = const$, то від величини струмів M не залежить.

Явищем взаємодукції називають наведення ЕРС в одному контурі при зміні струму в іншому. Наведену ЕРС називають **ЕРС взаємодукції** і позначають e_M .

Для рис. 1.10 повна ЕРС, що наводиться в першому контурі:

$$e_1 = -\frac{d}{dt}(\Psi_1 \pm \Psi_{21}) = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 \pm M i_2) = -L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} \pm e_{1M},$$

і в другому:

$$e_2 = -\frac{d}{dt}(\Psi_2 \pm \Psi_{12}) = -\frac{d}{dt}(L_2 i_2 \pm M i_1) = -L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} \pm e_{2M}.$$

У останніх формулах прийнято, що $M > 0$. У той же час у літературі можна зустрітися з тим, що знак мінус у e_M в цих формулах відносять не до ЕРС взаємодукції, а до M , тобто записують формули у виді

$$e_1 = e_{1L} + e_{1M}, \quad e_2 = e_{2L} + e_{2M}.$$

Під **коефіцієнтом зв'язку** двох магнітозв'язаних котушок розуміють відношення M до квадратного кореня з добутку $L_1 L_2$ цих котушок

$$k_{зв} = M / \sqrt{L_1 L_2}.$$

Завжди $k_{зв} \leq 1$. Якщо весь магнітний потік, створюваний першою котушкою, пронизує і другу, а весь потік, що генерується другою котушкою, пронизує і першу, то $k_{зв} = 1$.

Магнітна енергія двох магнітозв'язаних котушок зі струмами I_1 і I_2 дорівнює:

$$W_M = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} \pm M I_1 I_2. \quad (1.13)$$

У виразі (1.13) знак „+” відповідає узгодженому, „-” – зустрічному напрямку потоків.

Котушка індуктивності належить до реактивних елементів, які найбільш повно проявляють свої властивості в колах змінного струму. В колах постійного струму розглядається лише внутрішній опір котушки (фактично опір провідника, з якого сформовані її витки). Часто в задачах вважається, що цей опір дорівнює нулю і сама котушка розглядається як коротке замикання на певній ділянці електричного кола.

1.4.3. Ємність. Між двома будь-якими провідними тілами, розділеними непровідним середовищем (діелектриком, наприклад), існує електрична ємність. Для створення визначеного значення ємності служать пристрої, які називаються **конденсатори**.

Якщо заряд на одній обкладці (електроді) конденсатора $+q$, на іншій $-q$, то в просторі між обкладками існує електричне поле і між обкладками наявна напруга U . Заряд q пропорційний напрузі U :

$$q = C \cdot U \quad (1.14)$$

Коефіцієнт пропорційності C називають **ємністю**:

$$C = \frac{q}{U} \quad (1.15)$$

Ємність залежить від геометричних розмірів конденсатора і від властивостей діелектрика між обкладками. Від величини напруги U ємність, як правило, не залежить. Винятком є конденсатори, у яких між обкладками знаходиться сегнетодіелектрик.

Одиницею ємності є фарад (Φ) та величини похідні від нього – мікрофарад (1 мкФ=10⁻⁶ Ф), нанофарад (1 нФ=10⁻⁹ Ф), піко-фарад (1 пФ=10⁻¹² Ф).

В конденсаторі ємністю C , між обкладками якого існує напруга U , накопичується електрична енергія, рівна:

$$W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \quad (1.16)$$

При зміні заряду у часі $q(t)$ через діелектрик в конденсаторі протікає струм зміщення (струм конденсатора):

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.17)$$

Позитивний напрямок відліку струму $i(t)$ збігається з позитивним напрямком відліку напруги $u(t)$, а отже можна записати

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (1.18)$$

Схематичне позначення конденсатора з ємністю C наведено на рис. 1.11.

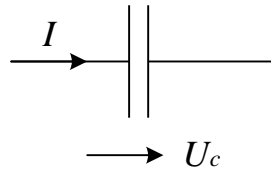


Рис. 1.11. Схематичне зображення конденсатора

Зв'язок заряду з напругою на ємнісному елементі називається кулон-вольтовою характеристикою (КВХ). У випадку лінійної залежності між цими величинами ємнісний елемент буде лінійним і ємність можна визначити як тангенс кута γ нахилу КВХ (рис. 1.12):

$$C = \frac{q}{u} = \frac{m_q}{m_u} \operatorname{tg} \gamma,$$

де m_q, m_u – масштаби по осях заряду та напруги.

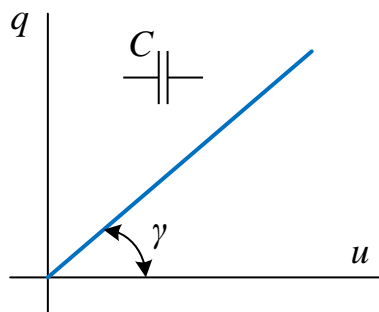
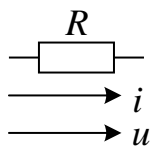
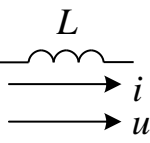
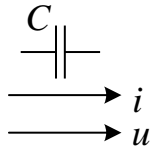


Рис. 1.12. Кулон-вольтна характеристика конденсатора

Так само, як і котушка індуктивності, конденсатор належить до реактивних елементів і найбільший вплив на процеси в електричному колі спричиняє у випадку протікання в колі змінного електричного струму. В колах постійного струму конденсатор є розривом кола (має великий внутрішній опір).

В табл.1.1 зведено всі основні пасивні елементи електричних кіл.

Таблиця 1.1. Пасивні елементи електричного кола

Тип ідеального елемента кола	Параметр елемента	Умовне позначення	Формула для розрахунку струму	Формула для розрахунку напруги
Резистивний	Опір, R [Ом]		$i = U/R$	$U = Ri$
Індуктивний	Індуктивність, L [Гн]		$i = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i(0)$	$u = L \frac{di}{dt}$
Ємнісний	Ємність, C [Ф]		$i = C \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0)$

1.5. Заміщення фізичних пристроїв ідеальними елементами кола

Склад та зв'язки електричних кіл є дуже різноманітними, тому для їх представлення використовують набір символів, що мають різний ступінь абстракції та називаються схемами.

Більш за все реальному об'єкту (рис.1.13.а) відповідає *монтажна схема* (рис. 1.13.б). Вона зручна для монтажу та ремонту, зображеного на ній пристрою.

На *принциповій схемі* (рис. 1.13.в) показують умовні позначення елементів кола та їх з'єднання. Ці схеми зручні для вивчення принципів роботи.

Найбільш абстрактне уявлення про електричні кола дають *схеми заміщення* (рис. 1.13.г). Вони призначені для дослідження електромагнітних процесів та є розрахунковою моделлю відповідного пристрою. Реальні елементи електричного кола замінюють на схемі заміщення розрахунковими моделями, в яких враховують лише суттєві параметри та властивості. Наприклад, хімічне джерело (акумулятор A_c) заміняють ідеальним джерелом ЕРС E і вмикають послідовно з ним резистор $R_{вн}$, що відповідає втратам енергії всередині акумулятора, тобто є внутрішнім опором джерела (рис. 1.13.г). Амперметр та вольтметр замінюють їх вхідними

опорами (R_A , R_V). З'єднувальні провідники вважають ідеальними провідниками без втрат, тобто такими, що мають нульовий опір.

Якщо вхідний опір амперметра R_A є суттєво меншим за опір лампи R_L , а вхідний опір вольтметра R_V суттєво більшим, то їх виключають зі схеми заміщення (рис.1.13.д).

Якщо параметри всіх елементів схеми заміщені відомі, то, користуючись законами електротехніки, можна визначити їх стан в будь-який момент часу.

В елементах реальних електротехнічних пристроїв (електричних колах) відбуваються достатньо складні процеси протікання струмів провідності, струмів зміщення, виділення теплової енергії, наведення ЕРС, накопичення та перерозподілу електричного та магнітного полів і т.п. Для математичного опису цих процесів, в теорії кіл використовують розрахункові схеми (схеми заміщення), шляхом введення в них резистивних, індуктивних та ємнісних елементів.

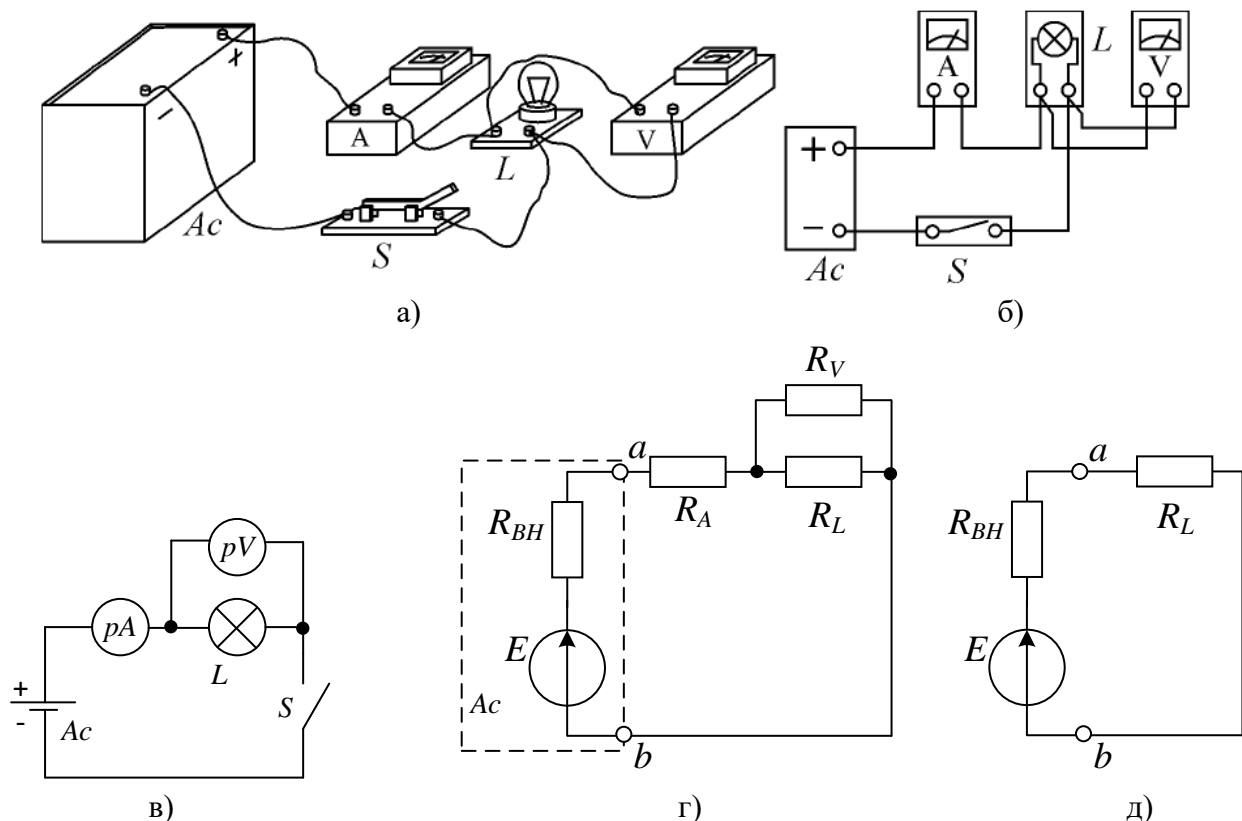


Рис. 1.13. Різні способи представлення реального електротехнічного пристрою (а): монтажна схема (б), принципова схема (в), схема заміщення (г) та її спрощена версія без врахування опорів вимірювальних приладів (д)

За допомогою резистивного елемента враховують виділення теплоти в реальному елементі, за допомогою індуктивного – наведення ЕРС та накопичення енергії в магнітному полі, за допомогою ємнісного елемента – протікання струмів зміщення та накопичення енергії в електричному полі.

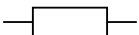
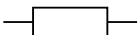
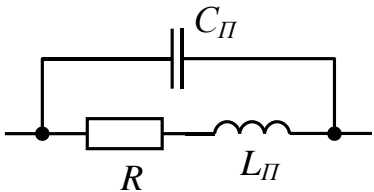
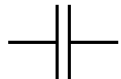
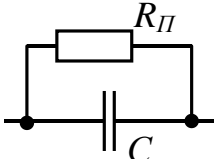
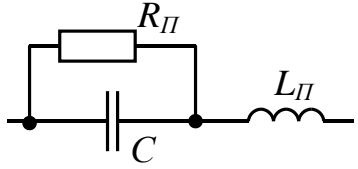
Кожен елемент реального електричного кола на схемі заміщення можна представити тією чи іншою сукупністю ідеалізованих схемних елементів (табл. 1.2).

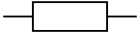

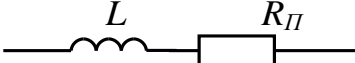
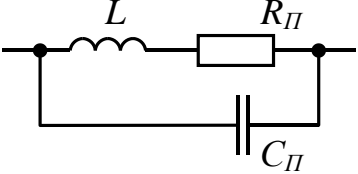
Паразитні елементи L_{Π} та C_{Π} в схемі заміщення резистора на високих частотах (ВЧ) враховують явища виникнення магнітного потоку, зчепленого з резистором (L_{Π}) та протікання струму зміщення між затискачами резистора (C_{Π}).

Для конденсатора на ВЧ паразитний елемент R_{Π} враховує втрати в неідеальному діелектрику конденсатора, а L_{Π} – це паразитна індуктивність зовнішніх контактів конденсатора.

Паразитні елементи в схемі заміщення котушки індуктивності враховують теплові втрати в опорі обмотки та осерді (R_{Π}) та струми зміщення між витками котушки (C_{Π}).

Таблиця 1.2. Схеми заміщення елементів електричного кола

Елемент кола	Спосіб представлення		
	Постійний струм	Низькі частоти (НЧ), змінний струм	Високі частоти (ВЧ), змінний струм
Резистор			
Конденсатор	Розрив кола	Ідеальний діелектрик без втрат:  Реальний діелектрик: 	

Котушка індуктивності		<p>Ідеальний елемент без втрат: </p> <p>Реальний елемент з втратами в провідниках: </p>	
-----------------------	---	--	---

Узагальнено можна сказати, що при складанні схеми заміщення в неї вводять ті ідеальні елементи, які описують основні процеси та властивості реальних елементів електричного кола, важливих для вирішення конкретної задачі аналізу в конкретній смузі частот, а вторинними для цієї задачі параметрами нехтують.

Контрольні запитання до Лекції 1

1. З якою метою вводяться ідеалізовані моделі складових реальних електротехнічних пристроїв?
2. Від чого залежить складність схеми заміщення реальних електротехнічних елементів?
3. Яка зі схем є найбільш абстрактною: монтажна, принципова чи схема заміщення?
4. Джерело енергії є активним чи пасивним елементом кола?
5. Резистори, котушки індуктивності, конденсатори належать до активних чи пасивних елементів кола?
6. Які елементи електричного кола здатні перетворювати електричну енергію в інші види енергії?
7. Як визначається напруга U_{12} на ділянці кола між точками 1 і 2?
8. Як спрямований електричний струм в колі?
9. Які з перерахованих елементів впливають на початкову фазу струму i /або напруги в колах змінного струму – резистор, котушка індуктивності, конденсатор?
10. Чи є помилкою отримання при розрахунках струмів у вітках з від'ємним знаком?
11. Як при розрахунку електричних схем обираються напрями струмів у вітках?
12. Як визначається миттєва потужність?
13. Чи може бути негативною миттєва потужність?
14. Чи може бути негативною енергія, що надходить до приймача?
15. Яке з джерел енергії має нульовий внутрішній опір?
16. Яке з джерел енергії має нескінченно великий внутрішній опір?
17. За яких умов можливий при еквівалентних перетвореннях джерел живлення перехід від одного типу джерела до іншого?
18. Для якого типу джерела енергії в схемі заміщення внутрішній опір джерела вмикається послідовно з ідеальним джерелом?
19. Для якого типу джерела енергії в схемі заміщення внутрішній опір джерела вмикається паралельно з ідеальним джерелом?

20. Якою є вольт-амперна характеристика реального джерела енергії з втратами на внутрішньому опорі?
21. Як будується навантажувальна характеристика джерела енергії та який вигляд вона має?
22. Як називається режим роботи пристрою, за якого елементи електричного кола працюють в умовах, що відповідають проектним?
23. Що описує вебер-амперна характеристика?
24. Що описує кулон-вольтна характеристика?
25. Чим відрізняються котушка індуктивності та індуктивність (конденсатор і ємність)?
26. Охарактеризуйте ідеальні джерела ЕРС та струму, в чому їх особливість?

ЛЕКЦІЯ 2.

Основні структурні елементи електричних схем – вітка, вузол, контур. Види з'єднань елементів – послідовні, паралельні, трикутником, зіркою. Граф схеми – вітки дерева, хорди. Система незалежних контурів. Закони Ома та Кірхгофа. Потенціальна діаграма. Еквівалентні перетворення схем – перетворення послідовного, паралельного, послідовно-паралельного з'єднання елементів, взаємне перетворення з'єднання трикутник-зірка. Перетворення віток з джерелами живлення.

2.1. Основні визначення

Електрична схема – це графічне зображення електричного кола. Вона показує як з'єднані між собою ідеальні елементи схем заміщення.

«Електричними» елементами схеми є активні та пасивні елементи кола.

«Геометричними» елементами схеми є вітки та вузли.

Вітка електричного кола – це ділянка кола, вздовж якої проходить один і той же струм. Вітка утворюється одним (вітки з елементами R_1 , R_2 , R_3 та R_4 на рис. 2.1) або декількома елементами кола, з'єднаними послідовно (вітка з елементами R_5 , R_6 на рис. 2.1).

Вузол – це місце з'єднання трьох або більше віток (на рис. 2.1 вузли показані цифрами 1-3). Точка А на рис. 2.1, розміщена на одній вітці між послідовно з'єднаними елементами називається *усувним вузлом*.

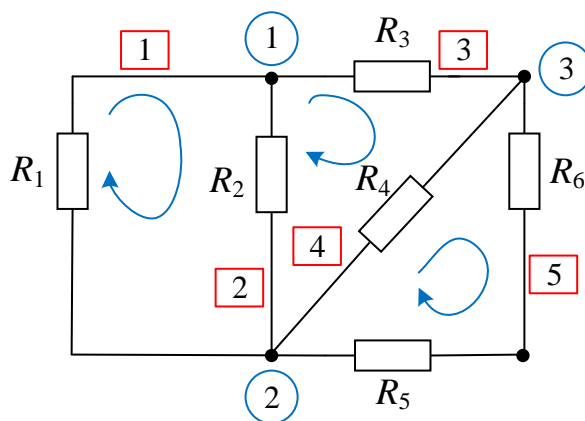


Рис.2.1. Схема розгалуженого електричного кола з 5 вітками та 3 вузлами

Лінії, що з'єднують опори у схемі мають нульові опори (таке припущення застосовується в переважній більшості розрахункових задач).

Вітки, що під'єднанні до однієї пари вузлів, називають **паралельними вітками** (на рис. 2.1 це вітки 1 та 2).

Окрім паралельного з'єднання віток існує також з'єднання трикутником та зіркою.

З'єднання зіркою – це з'єднання трьох віток, що мають один спільний вузол (рис. 2.2.а).

З'єднання трикутником – це з'єднання трьох віток, яке має вид трикутника, сторонами якого є вітки, а вершинами – вузли (рис. 2.2.б).

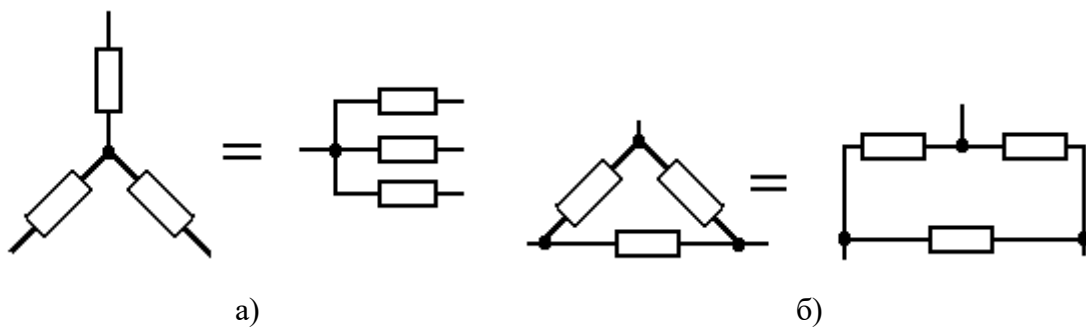


Рис.2.2. З'єднання віток зіркою (а) та трикутником (б)

Контуром називається будь-який замкнений шлях, що проходить по декількох вітках.

На рис. 2.1 зображено схему, що містить п'ять віток і три вузли. В цій схемі можна виділити наступні контури: $R_1-R_3-R_6-R_5$, R_1-R_2 , $R_2-R_3-R_4$, $R_2-R_3-R_6-R_5$, $R_4-R_6-R_5$, $R_1-R_3-R_4$. Загалом 6 контурів. Але при застосуванні деяких методів розрахунку розглядаються не всі контури, а лише головні та/або незалежні. Вони обираються, виходячи з наступних передумов.

Схема, зображена таким чином, що на ній відображено сукупність віток та вузлів без конкретизації елементів, називається **топологічною схемою** або **графом схеми** чи просто **графом** (рис. 2.3.а).

Сукупність віток, що з'єднують всі вузли, але не утворюють замкнених контурів, називаються **деревом графа**. Згідно рис. 2.1, можна виділити декілька дерев графа (рис.2.3.б-г). В загальному випадку можна обрати декілька дерев графа в структурі електричної схеми.

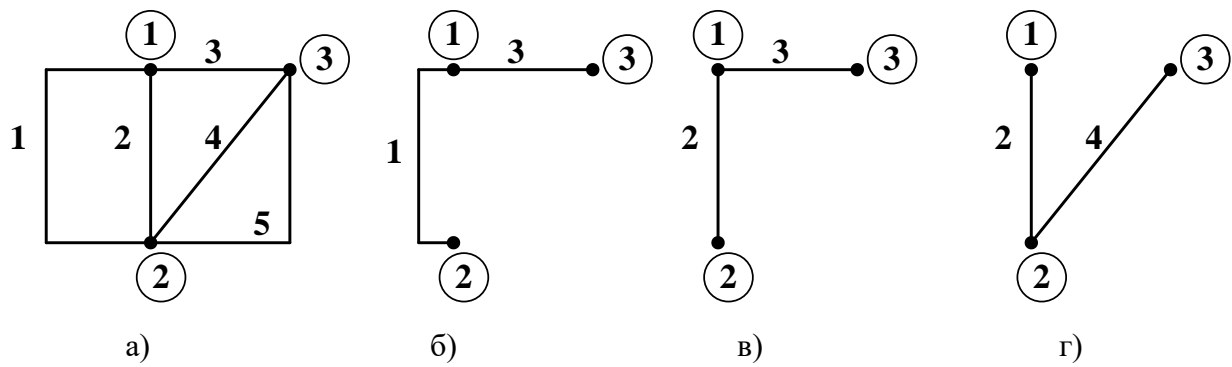


Рис.2.3. Граф схеми без деталізації елементного складу (а), різні варіанти дерев графа (б-г)

Вітки графа, що увійшли у дерево, називають *вітками дерева*, а інші – *хордами*. Наприклад, якщо на рис. 2.3.а вітки 2, 4 – вітки дерева, то вітки 1,3,5 будуть хордами.

Контур, який утворений деякою сукупністю віток дерева та однією з хорд, називається *головним контуром*. Головні контури утворюють систему незалежних контурів.

Незалежний контур – це контур, в який входить хоча б одна нова вітка, не задіяна у формуванні інших контурів. На рис. 2.1 показані головні контури, кожен з яких є незалежним. В даній системі контурів контур, сформований вітками 1,3,5 (сформований елементами $R_1-R_3-R_6-R_5$) вже буде залежним, оскільки міститиме вітки, вже використані при формуванні інших контурів.

Якщо в схемі n – кількість вузлів, а l – кількість віток, то схема містить $m=n-1$ віток дерева та $s=l-m=l-n+1$ хорд, причому остання цифра відповідає кількості незалежних контурів.

Залежно від кількості вузлів у схем електричне коло може бути нерозгалуженим (рис. 2.4.а) або розгалуженим (рис. 2.4.б). В першому випадку, в усіх елементах схеми протікає один і той же струм, і сама схема є одним контуром без вузлів. В другому випадку, схема містить певну кількість віток, під'єднаних до вузлів, причому в кожній вітці протікає свій власний струм.

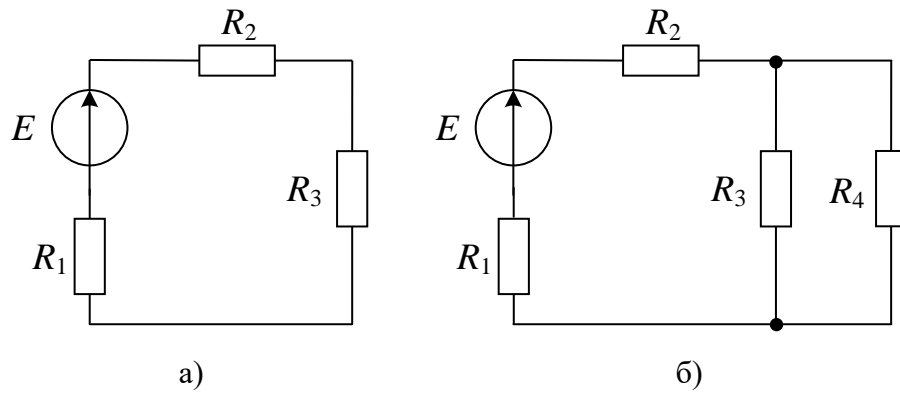


Рис.2.4. Схема нерозгалуженого (а) та розгалуженого електричного кола

2.2. Закон Ома для ділянки кола без джерела ЕРС та з джерелом ЕРС

На рис. 2.5 зображена ділянка кола, крайні точки якої позначені літерами a і b .

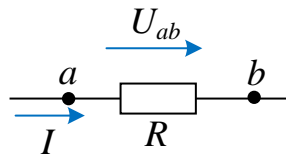


Рис. 2.5. Ділянка електричного кола без джерела ЕРС

Нехай на ділянці a - b струм I тече від точки a до точки b – від більш високого потенціалу до більш низького. Отже, потенціал точки a φ_a вище потенціалу точки b φ_b на значення, рівне добутку струму I на опір R :

$$\varphi_a = \varphi_b + IR. \quad (2.1)$$

Напруга між точками a і b визначається як різниця потенціалів:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (2.2)$$

З виразів (2.1) та (2.2) слідує, що

$$U_{ab} = IR, \quad (2.3)$$

тобто напруга на опорі дорівнює добутку струму, що протікає через опір, на значення цього опору.

В електротехніці різницю потенціалів на виводах опору називають або **напругою на опорі** або **падінням напруги**.

В тому випадку, коли коло містить не лише резистор, але й джерело ЕРС, як це показано на рис. 2.6, напруга між точками a і c також визначається різницею потенціалів в цих точках:

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c. \quad (2.4)$$

Для знаходження напруги, необхідно виразити потенціал точки a через потенціал точки c . При русі ділянкою кола від точки c до точки b зустрічно напрямкові ЕРС E та напрямку протікання струму I (як на рис. 2.6.а), потенціал точки b є меншим за потенціал точки c на значення ЕРС джерела E (стрілочка в позначенні джерела ЕРС вказує напрям зростання потенціалу): $\varphi_b = \varphi_c - E$.

При русі від точки c до точки b узгоджено з напрямом ЕРС E (як для випадку рис. 2.6.б), потенціал точки b виявляється більшим за потенціал точки c на значення ЕРС джерела E : $\varphi_b = \varphi_c + E$.

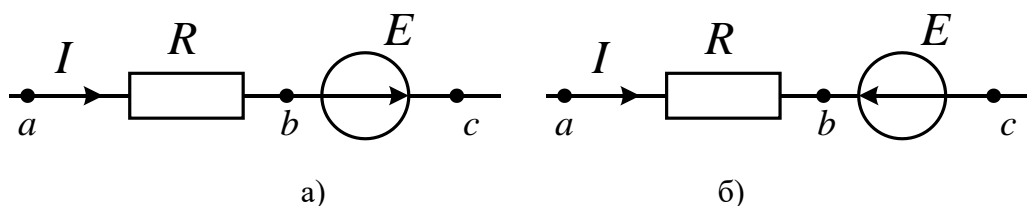


Рис. 2.6. Ділянки електричного кола з джерелом ЕРС (ЕРС в джерелах спрямована в різних напрямках)

Оскільки по ділянці кола без джерела ЕРС струм тече від більш високого потенціалу до більш низького, то при вибраному напрямі струму в обох ділянках схеми на рис. 2.6 потенціал точки a є вищим за потенціал точки b на значення падіння напруги на опорі R : $\varphi_a = \varphi_b + IR$. Таким чином, для рис. 2.6.а :

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_c - E + IR, \\ U_{ac} &= \varphi_a - \varphi_c = IR - E, \end{aligned} \quad (2.5)$$

для рис. 2.6.б:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_c + E + IR, \\ U_{ac} &= \varphi_a - \varphi_c = IR + E. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Позитивний напрямок напруги U_{ac} показують стрілкою від a до c . Відповідно до визначення, $U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a$, тому $U_{ca} = -U_{ac}$, тобто зміна послідовності індексів еквівалентна зміні знаку напруги. Зважаючи на це, напруга може бути і позитивною, і негативною величиною.

Закон (правило) Ома для ділянки кола, що не містить джерела ЕРС, встановлює зв'язок між струмом і напругою на цій ділянці. Згідно рис. 2.5 та формул (2.1)-(2.3):

$$U_{ab} = IR, \quad I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{(\varphi_a - \varphi_b)}{R}. \quad (2.7)$$

Закон (правило) Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС, дозволяє знайти струм цієї ділянки за відомою різницею потенціалів ($\varphi_a - \varphi_c$) на кінцях ділянки кола і наявною на цій ділянці ЕРС E . Так, для схеми рис. 2.6.а

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c + E)}{R} = \frac{U_{ac} + E}{R},$$

а для схеми рис. 2.6.б

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c - E)}{R} = \frac{U_{ac} - E}{R}.$$

В загальному випадку закон Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС, записується наступним чином:

$$I = \frac{U_{ac} + \sum_k E_k}{\sum_m R_m}, \quad (2.8)$$

де U_{ac} – напруга на ділянці кола між крайніми точками a і c (з урахуванням позитивного напрямку струму від точки a до точки c), $\sum E_k$ – алгебраїчна сума ЕРС, що діють на ділянці кола (якщо напрям ЕРС співпадає з напрямом струму, в рівняння ця ЕРС входить зі знаком „+”, якщо напрями протилежні – зі знаком „-”), $\sum R_m$ – сумарний опір ділянки кола.

В окремому випадку при всіх $E_k = 0$ рівняння (2.8) переходить у рівняння (2.7).

Як приклад використання рівнянь за законом Ома розглянемо фрагмент схеми, наведений на рис. 2.7.

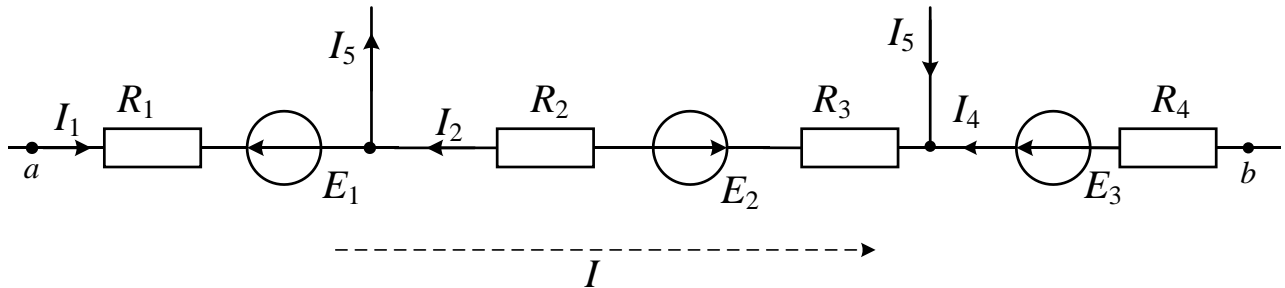


Рис. 2.7. Напрями струмів в розгалуженому колі (суцільні лінії) та нерозгалуженому (пунктирна лінія)

Напруга між точками a та b у випадку розгалуженого кола визначається наступним чином:

$$U_{ab} = I_1 R_1 + E_1 - I_2 R_2 - E_2 - I_2 R_3 + E_3 - I_4 R_4.$$

Знаючи потенціали вузлів можна знаходити струми у вітках схеми, або навпаки – за струмами визначати потенціали вузлів.

Якщо коло на рис. 2.7 було б нерозгалуженим, і через всі його елементи протікав один струм I (на рис. 2.7 він показаний пунктиром), то, згідно закону Ома, він визначався б наступним чином:

$$I = \frac{U_{ab} + (-E_1 + E_2 - E_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

2.3. Потенціальна діаграма

Під *потенціальною діаграмою* розуміють графік розподілу потенціалу вздовж якої-небудь ділянки кола або замкнутого контуру. По осі абсцис на графіку відкладають опори вздовж контуру, починаючи з довільної точки, по осі ординат – потенціали точок ділянки кола або замкнутого контуру, що розміщуються між елементами електричної схеми.

Для побудови потенціальної діаграми необхідно здійснити заземлення однієї з точок схеми. Заземлення будь-якої точки схеми свідчить про те, що потенціал цієї точки прийнятий рівним нулеві. При цьому, розподіл струмів в схемі не змінюється, оскільки ніяких нових віток, через які могли б протікати струми, не утворюється. Якщо здійснити заземлення двох або більшої кількості точок схеми, що мають різні потенціали, сама схема стає відмінною від початкової за своєю структурою і, відповідно, розподіл струмів в ній також зміниться.

Особливості побудови потенціальної діаграми наступні:

- при проходженні контуру по осі абсцис відкладається сумарний опір елементів, що містяться між крайніми точками ділянки, яка вже пройдена;

- при проходженні джерела ЕРС вважається, що внутрішній опір джерела є рівним нулю, і потенціал відповідної точки відкладається вертикально по осі ординат вгору або вниз;

- якщо розглядається замкнений контур, то потенціальна діаграма має вид замкненої кривої, що сходиться в нульовий потенціал, зміщений по осі абсцис на величину сумарного опору контуру;

- для побудови потенціальної діаграми потрібно знати струми у всіх вітках схеми, ЕРС джерел та опори резисторів;

- при обранні контуру, для якого будується потенціальна діаграма, до нього не включають вітки з джерелами струму, оскільки у ідеального джерела внутрішній опір дорівнює нескінченності і визначити потенціал буде проблематично.

Послідовність побудови потенціальної діаграми розглядається на прикладі схеми рис. 2.8.а для контура *abcea*. Номінали опорів, що входять до даного контуру та значення струмів у вітках задані наступними:

$$R_2 = 4\text{Ом}; R_4 = 1\text{Ом}; R_3 = 3\text{Ом}; I_2 = -15\text{А}; I_3 = -1\text{А}; E_1 = 80\text{В}; E_2 = 64\text{В}.$$

Потенціал точки *a* приймається рівним нулю: $\varphi_a=0$. Ця точка на потенціальній діаграмі рис. 2.8.б суміщається з початком координат.

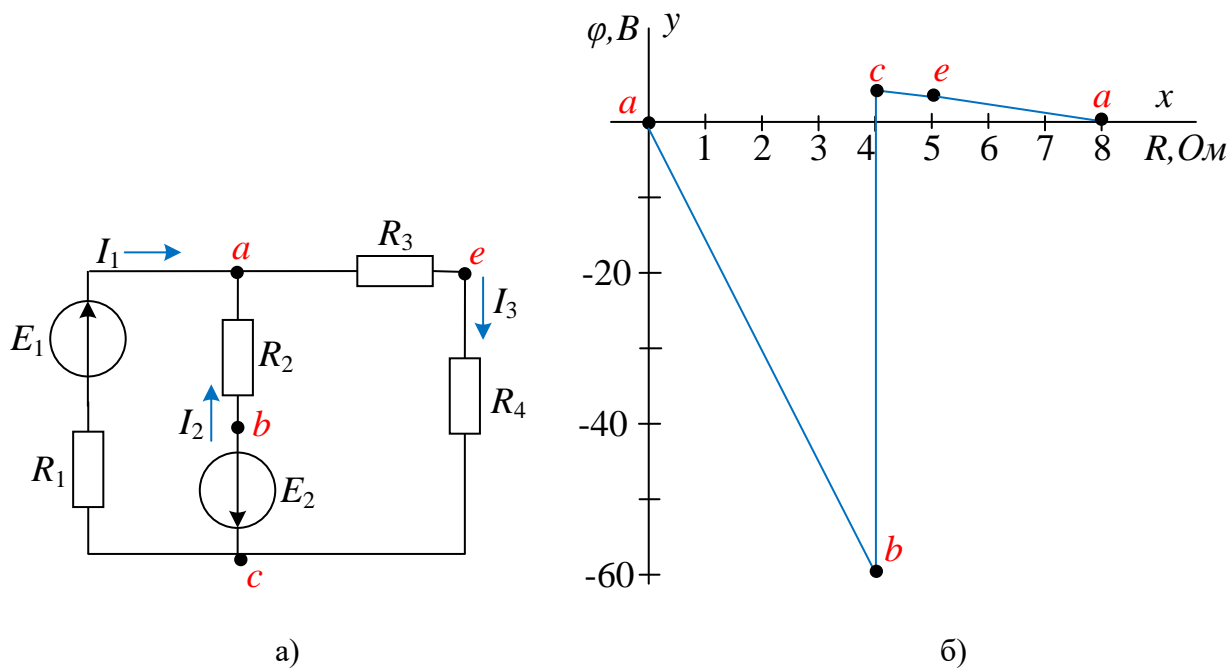


Рис. 2.8. Електрична схема (а) та потенціальна діаграма для контуру $abcea$ (б)

Рухаємось від точки a до наступної точки за годинниковою стрілкою чи проти неї – в даному випадку рухаємось проти годинникової стрілки в точку b .

Потенціал точки b більший за потенціал точки a , оскільки струм іде від b до a , а отже:

$$\varphi_b = \varphi_a + I_2 \cdot R_2 = 0 - 15 \cdot 4 = -60 \text{ В.}$$

Координати отриманої точки на потенціальній діаграмі відповідно будуть:

$$x = 4 \text{ Ом}; y = -60 \text{ В.}$$

Потенціал точки c більший за потенціал точки a , оскільки джерело ЕРС спрямовано від c до a :

$$\varphi_c = \varphi_b + E_2 = 4 \text{ В}$$

при $E_2=64\text{В}$, а її координати – $x = 4+0 = 4 \text{ Ом}$, $y = 4 \text{ В}$.

Потенціал точки e більший за потенціал точки c відповідно до напрямку струму I_3 :

$$\varphi_e = \varphi_c + I_3 R_4 = 4 - 1 = 3 \text{ В}$$

при $I_3=1\text{А}$, а її координати $x=4+1=5\text{Ом}$; $y=3\text{В}$.

Потенціал точки a через потенціал точки e визначається наступним чином:

$$\varphi_a = \varphi_e + I_3 R_3 = 3 - 3 = 0 \text{ В.}$$

Оскільки розглянутий контур є замкненим, то і потенціальна діаграма представляє собою замкнену криву. Для повернення в початкову точку необхідно визначити її координати шляхом підсумовування всіх опорів на шляху обходу контуру $x=4+1+3=8\text{Ом}$ та $y=\varphi_a=0\text{В}$ (рис. 2.8.б).

В тому випадку, якщо в контурі, для якого будується потенціальна діаграма, протікає один струм, нахил прямих на діаграмі буде однаковим, а для розгалужених кіл – різним.

Існує зворотна процедура відновлення складу схеми за потенціальною діаграмою, складеною для однієї або декількох контурів.

Процедура відновлення елементного складу для контуру, що був розглянутий вище в схемі рис.2.8 буде виглядати наступним чином.

На ділянці $a-b$ потенціальної діаграми рис. 2.8.б спостерігається лінійне зменшення потенціалу, отже на цій ділянці в схемі розміщено резистор, оскільки лише на ньому відбувається падіння напруги. Значення опору цього резистора визначається по осі абсцис як відповідні координати точок a і b і є рівним 4Ом . Оскільки потенціал точки a на цій ділянці є більшим за потенціал точки b , то струм протікає від точки a до точки b . Значення струму визначається за законом Ома: напруга на цій ділянці $U_{ab}=0-(-60)=60\text{В}$, опір $R_{ab}=4\text{Ом}$, отже струм $I_{ab}=15\text{А}$.

На ділянці $b-c$ (рис. 2.8.б) спостерігається зростання потенціалу без зміни опору, отже на цій ділянці розміщене джерело ЕРС, оскільки лише для нього внутрішній опір є нульовим. Потенціал точки c є більшим за потенціал точки b , отже ЕРС спрямована від c до b . Величина ЕРС E_{cb} розраховується як різниця потенціалів $E_{cb}=\varphi_c-\varphi_b=4-(-60)=64\text{В}$.

Ділянка $c-e$ характеризується лінійним зменшенням потенціалу, тобто тут розміщено резистор: його опір визначається як $(5-4)=1\text{Ом}$ (по осі абсцис), струм протікає від точки c до точки e . Величина струму: $(4-3)/1=1\text{А}$.

Ділянка $e-a$ також відповідає резистору з опором $(8-5)=3\text{Ом}$, струм протікає від точки e до точки a , його значення $(3-0)/3=1\text{А}$. Це той же струм, що і на попередній ділянці, тобто два резистори увімкнені послідовно.

Якщо потенціальна діаграма будується для деякого замкненого контуру, обраного в розгалуженому колі, де кожна вітка має власний електричний струм, то кути нахилу прямих по даігоналі на діаграмі також будуть різними.

2.4. Закони Кірхгофа та їх застосування для розрахунку розгалужених кіл

Всі електричні кола підпорядковуються першому і другому законам Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа формулюється двома способами:

1) алгебраїчна сума струмів, що сходяться в будь-якому вузлі схеми, дорівнює нулю (враховується напрям струму – якщо струм входить у вузол, він записується в суму зі знаком «+», якщо виходить – зі знаком «-»):

$$\sum_k I_k = 0; \quad (2.9)$$

2) сума струмів, що входять до будь-якого вузла, дорівнює сумі струмів, що виходять з цього вузла.

Фізично перший закон Кірхгофа означає, що рух зарядів у колі відбувається так, що в жодному з вузлів вони не накопичуються.

Другий закон Кірхгофа також має два формулювання:

1) алгебраїчна сума падінь напруги в будь-якому замкнутому контурі дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють в цьому контурі:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_m E_m. \quad (2.10)$$

У кожному із сум відповідні доданки входять зі знаком «+», якщо напрям струму/ЕРС збігається з напрямом обходу контуру, і зі знаком «-», якщо не збігається з ним.

2) алгебраїчна сума напруг уздовж будь-якого замкненого контуру дорівнює нулю:

$$\sum U_{kl} = 0. \quad (2.11)$$

Закони Кірхгофа справедливі для лінійних і нелінійних кіл при будь-якому характері зміни в часі струмів і напруг.

Закони Кірхгофа використовують для визначення струмів у вітках схеми.

Алгоритм складання рівнянь за законами Кірхгофа:

1) довільно обираються позитивні напрями струмів у вітках і позначаються на схемі;

2) довільно обираються позитивні напрями обходу контурів і також наносяться на схему;

3) за першим законом Кірхгофа складають рівняння, кількість яких дорівнює числу вузлів в схемі без одиниці, тобто $(n - 1)$, де n – кількість вузлів. Рівняння для останнього n -го вузла не складають, оскільки воно співпадає з рівнянням, отриманим при підсумовуванні вже складених рівнянь для $(n - 1)$ вузлів;

4) за другим законом Кірхгофа складають рівняння, число яких дорівнює числу віток без джерел струму $(l - x)$, за винятком рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа, тобто $(l - x) - (n - 1) = l - x - n + 1$, де n – кількість вузлів, l – кількість всіх віток, x – кількість віток з джерелами струму. Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа, варто охопити всі вітки схеми, за винятком віток з джерелами струму. При цьому, рівняння бажано записувати для незалежних контурів, тобто для контурів, в кожен з яких входить хоча б одна нова вітка, що не увійшла в попередні контури.

Вимога, щоб у кожен новий контур входила хоча б одна нова вітка, є достатньою, але не необхідною, а тому її не завжди виконують. У таких випадках частину рівнянь за другим законом Кірхгофа складають для контурів, усі вітки яких уже увійшли в попередні контури.

Для схеми рис. 2.9 рівняння за законами Кірхгофа записуються наступним чином.

І закон записується для одного вузла:

$$I_1 + I_2 = I_3, \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

II закон записується для двох контурів, напрям обходу обрано за годинниковою стрілкою:

$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2, \quad E_2 = I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4).$$

При записі II закону за формулою (2.14) отримуються наступні рівняння для обраних контурів:

$$U_{da} + U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = 0, \quad U_{ae} + U_{ec} + U_{cb} + U_{ba} = 0.$$

Розрахунок напруг:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = -I_2 R_2 \quad (\varphi_a = \varphi_b - I_2 R_2),$$

$$U_{cd} = \varphi_c - \varphi_d = I_1 R_1 \quad (\varphi_d = \varphi_c - I_1 R_1),$$

$$U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c = -E_2 \quad (\varphi_c = \varphi_b + E_2),$$

$$U_{da} = \varphi_d - \varphi_a = -E_1 \quad (\varphi_a = \varphi_d + E_1).$$

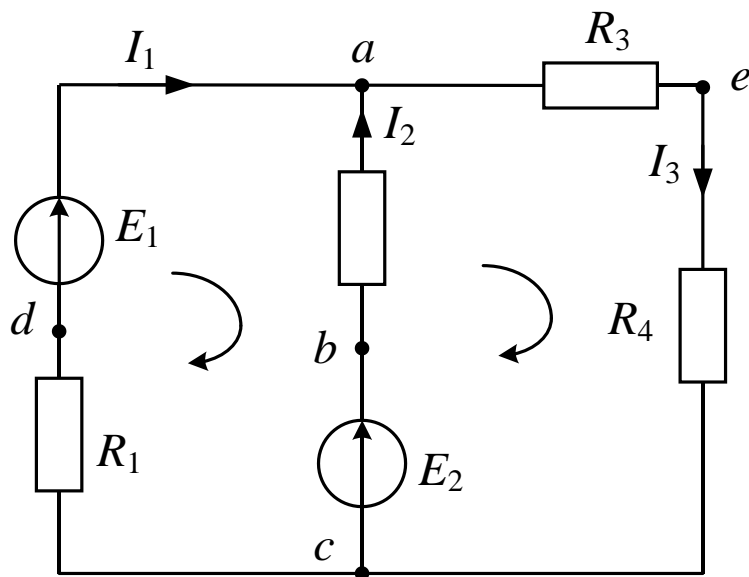


Рис. 2.9. Електрична схема із вказаними напрямками струмів у вітках

У випадку, якщо в схемі наявне джерело струму, його величина враховується при складанні рівнянь лише за першим законом Кірхгофа, причому струм джерела струму розглядається як струм відповідної вітки.

2.5. Еквівалентні перетворення в електричних колах

Метою еквівалентних перетворень в електричних колах є спрощення їх структури – зменшення кількості віток, вузлів, контурів, а отже і спрощення розрахунку струмів в колі.

Найбільш часто застосовуються перетворення паралельних та послідовних з'єднань, перетворення типу "зірка" - "трикутник", "трикутник" - "зірка" та перетворення віток з активними елементами – джерелами ЕРС та струму.

2.5.1. Перетворення віток з пасивними елементами. Найпростішими перетвореннями є заміна паралельно або послідовно з'єднаних опорів одним еквівалентним (рис.2.10).

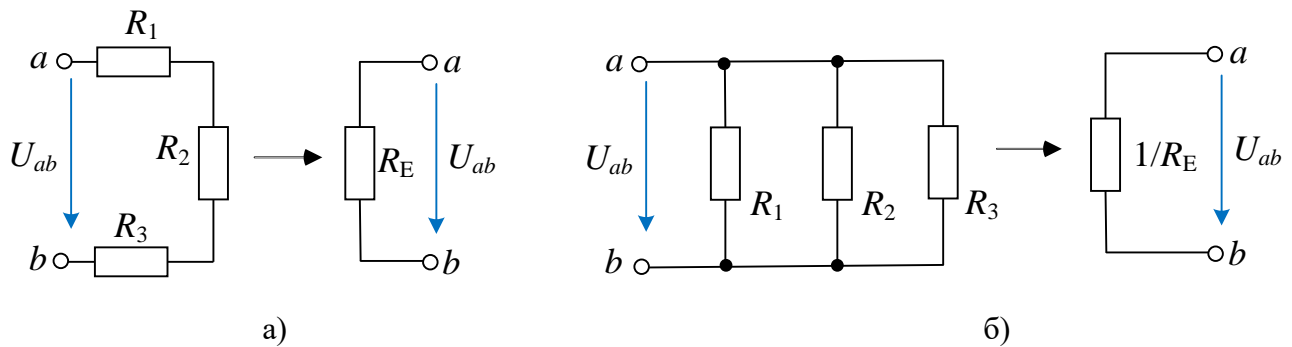


Рис. 2.10. Послідовне з'єднання опорів та еквівалентний опір (а), паралельне з'єднання опорів та еквівалентний опір (б)

Еквівалентний опір *послідовно з'єднаних резисторів* визначається як сума їх опорів:

$$R_E = \sum_k R_k. \quad (2.12)$$

Послідовне з'єднання резисторів є фактично ділянком напруги:

$$U_1 = \frac{U_{ab} R_1}{R_E}; \quad U_2 = \frac{U_{ab} R_2}{R_E}; \dots$$

Еквівалентна провідність паралельно з'єднаних резисторів визначається як сума їх провідностей:

$$G_E = \sum_k G_k, \quad \frac{1}{R_E} = \sum_k \frac{1}{R_k}. \quad (2.13)$$

Паралельно з'єднані елементи є дільниками струму:

$$I_i = I \frac{G_i}{G_E} = I \frac{R_E}{R_i}$$

При паралельному з'єднанні струми віток можна визначити через відомий струм в нерозгалуженій частині схеми та опори віток – правило чужого плеча (рис. 2.11):

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2.14)$$

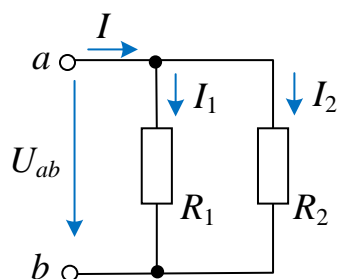


Рис.2.11. Паралельне з'єднання резисторів із вказаними струмами у вітках та нерозгалуженій частині схеми

Якщо в схемі наявне змішане – послідовно-паралельне – з'єднання елементів (рис.2.12), то при перетворенні схеми спершу перетворюють паралельні вітки, а потім працюють із послідовно з'єднаними елементами.

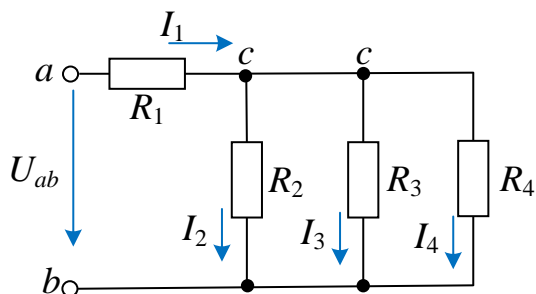


Рис.2.12. Схема із змішаним типом з'єднання елементів

Еквівалентні перетворення для схеми рис.2.12 виконуються наступним чином – знаходяться еквівалентна провідність G_{E1} та еквівалентний опір R_{E1} паралельно з'єднаних віток, а потім загальний еквівалентний опір R_E :

$$G_{E1} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}; R_{E1} = \frac{1}{G_{E1}}; R_E = R_1 + R_{E1}.$$

Звівши схему до вхідної напруги та еквівалентного опору знаходиться струм I_1 , а потім напруга на еквівалентному опорі R_{E1} , і вже через неї знаходяться струми паралельних віток:

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_E}; U_{cb} = I_1 R_{E1}; I_2 = \frac{U_{cb}}{R_2}; I_3 = \frac{U_{cb}}{R_3}; I_4 = \frac{U_{cb}}{R_4}.$$

З'єднання трьох опорів, що має вид трипроменевої зірки (рис. 2.13.а), може бути перетворене на трикутник (рис.2.13.б) з урахуванням того, що у вузлах 1, 2, 3 (потенціали їх φ_1, φ_2 і φ_3) трикутник і зірка з'єднуються з іншою частиною схеми (не показано на рисунках), яка не зазнає перетворень, а отже струми, які втікають в ці точки, залишаються незмінними.

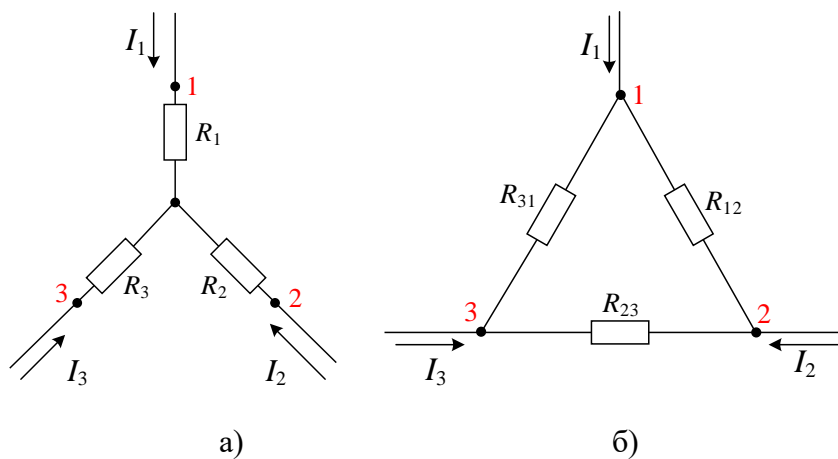


Рис. 2.13. З'єднання зіркою (а) та трикутником (б)

Розглянемо перехід від трикутника (рис. 2.14.а) до зірки.

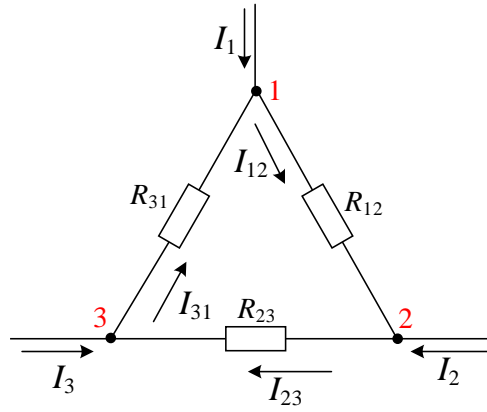


Рис. 2.14. З'єднання трикутником із вказанням напрямів струмів у вітках
В трикутнику (рис. 2.14.а) за другим законом Кірхгофа:

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0 \quad (2.15)$$

За першим законом Кірхгофа:

$$I_{31} = I_{12} - I_1; \quad I_{23} = I_{12} + I_2 \quad (2.16)$$

Після підстановки (2.16) в (2.15)

$$I_{12} = \frac{R_{13}I_1 - R_{23}I_2}{R_{12} + R_{31} + R_{23}} \quad (2.17)$$

Напруга між виводами 1 та 2 трикутника:

$$U_{12} = R_{12}I_{12} = \frac{R_{12}R_{13}I_1 - R_{12}R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}I_2 \quad (2.18)$$

Напруга між виводами 1 та 2 для зірки (рис.2.13.а):

$$U_{12} = R_1I_1 - R_2I_2 \quad (2.19)$$

З умови однаковості напруги між однойменними виводами для трикутника та зірки:

$$\frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}I_2 = R_1I_1 - R_2I_2 \quad (2.20)$$

З рівняння (2.20) слідує рівність коефіцієнтів при однакових струмах:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \quad R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (2.21)$$

Формули (2.21) є формулами переходу від трикутника до зірки. Для опору R_3 застосовані викладки, схожі до застосованих для знаходження R_1 та R_2 .

Перехід від зірки до трикутника здійснюється через систему рівнянь:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23}}{R_{12}}; \quad \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_{13}}{R_{12}} \Rightarrow R_{23} = \frac{R_3}{R_1} R_{12}; \quad R_{13} = \frac{R_3}{R_2} R_{12} \quad (2.22)$$

З рівняння (2.22) отримуємо

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \frac{R_3}{R_2} R_{12}}{R_{12} + \frac{R_3}{R_1} R_{12} + \frac{R_3}{R_2} R_{12}} = \frac{R_3 R_{12} R_1 R_2}{R_2 (R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1)}$$

$$R_1 (R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1) = R_{12} R_1 R_3$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{R_1 R_2}{R_3} + R_2 + R_1 \quad (2.23)$$

Формула (2.23) встановлює зв'язок між опором трикутника через опори променів зірки. Аналогічно виводяться залежності і для інших двох опорів:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}, \quad R_{23} = R_3 + R_2 + \frac{R_3 R_2}{R_1}. \quad (2.24)$$

Якщо записати рівняння переходу зірка-трикутник (2.24) через провідності, то отримаємо вирази дуже схожі на (2.21):

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_3 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Рисунки 2.15 та 2.16 показують приклади застосування розглянутих перетворень та демонструють спрощення схеми при застосуванні перетворень.

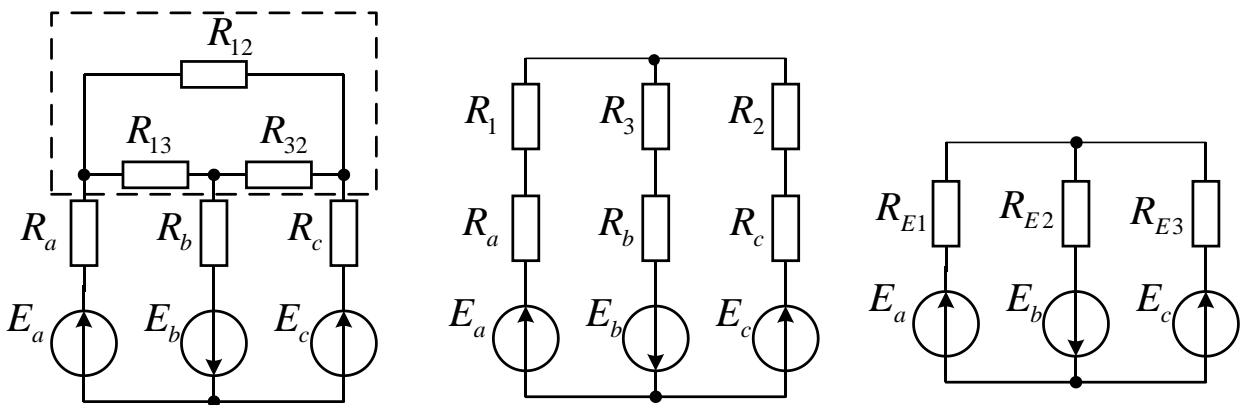


Рис.2.15. Перетворення трикутник-зірка – схема з триконтурної перетворилась на двоконтурну з двома вузлами

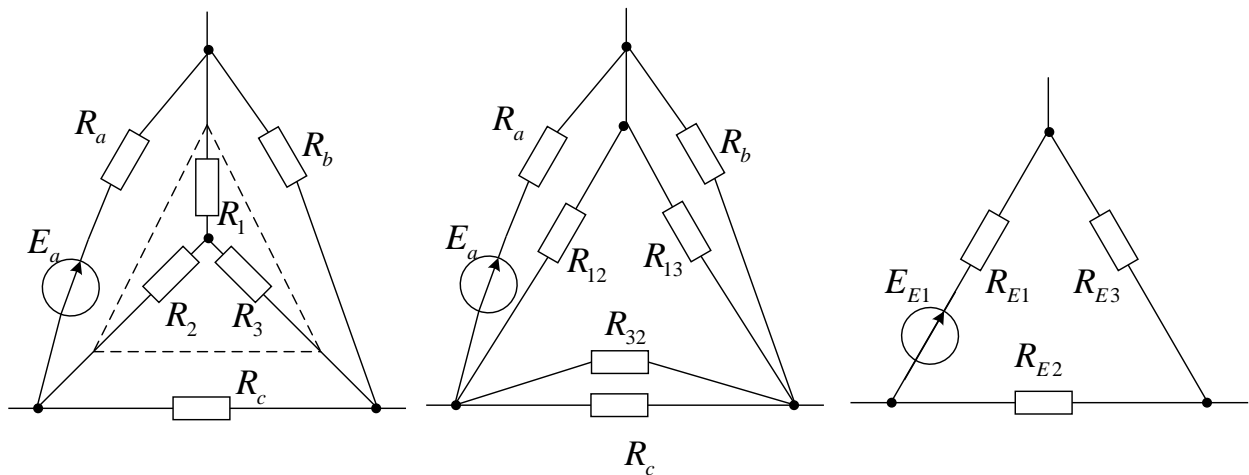


Рис.2.16 Перетворення зірка-трикутник дозволило сформувати множину паралельних віток і далі їх попарно об'єднати

2.5.2. Перетворення віток з активними елементами - об'єднання віток з джерелами живлення. Розрахунок складних схем спрощується при заміні декількох паралельно включених віток, що містять джерела ЕРС, джерела струму і опору, однією еквівалентною віткою.

Ділянка кола рис.2.17.б еквівалентна ділянці кола рис. 2.17.а, якщо при будь-яких значеннях струму I , що підтікає з усієї іншої, не показаної на рисунку частини схеми, напруга на виводах a і b (U_{ab}) в обох схемах однакова.

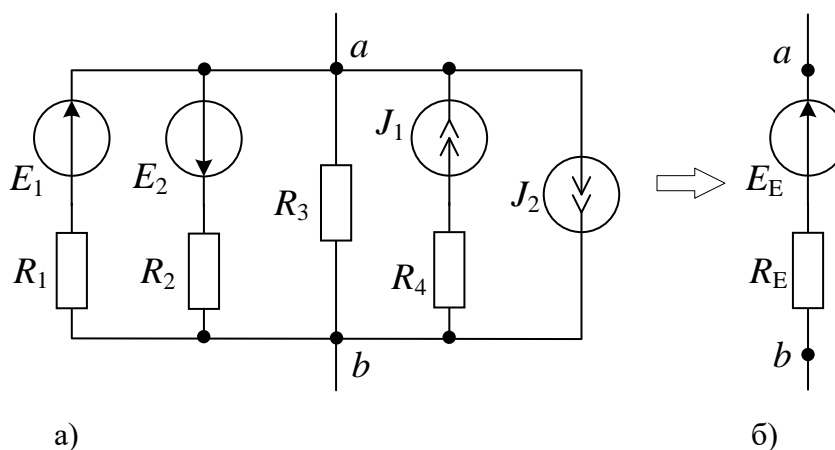


Рис. 2.17. Початкова схема (а), еквівалентна схема для віток з джерелами ЕРС (б)

Еквівалентні параметри R_E і E_E розраховуються наступним чином:

$$g_E = \sum_{k=1}^n g_k, \quad E_E = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q J_k}{\sum_{k=1}^n g_k}, \quad (2.25)$$

де g_k – провідність k -ї вітки, E_k – ЕРС джерела, що діє в k -й вітці, J_k – струм джерела, що діє в k -й вітці.

При підрахунках за формулою (2.25) варто мати на увазі наступне:

1) якщо в якійсь вітці схеми ЕРС відсутня, то і відповідний доданок у чисельнику випадає, але провідність цієї вітки в знаменнику залишається;

2) якщо ЕРС у початковій схемі співнапрявлена зі струмом, то і відповідний доданок ввійде в чисельник формули зі знаком "+", якщо ЕРС та струм мають різні напрямки, то зі знаком "-".

Вітки схеми рис. 2.17.а,б еквівалентні тільки з позиції поведіння їх стосовно всієї іншої частини схеми, не показаної на рисунку, але вони не еквівалентні у відношенні потужності, що виділяється в них.

Об'єднувати можна не лише паралельні вітки з джерелами ЕРС, але і послідовно з'єднані джерела ЕРС також (рис.2.18).

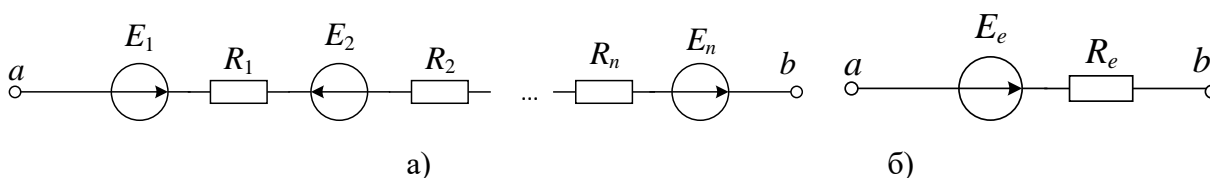


Рис.2.18. Послідовне з'єднання джерел ЕРС і опорів (а) та еквівалентна схема для них (б)

Параметри еквівалентної ділянки на рис.2.18.б розраховуються наступним чином:

$$R_e = \sum_{i=1}^n R_i; \quad E_e = \sum_{i=1}^n E_i = E_1 - E_2 + \dots + E_n. \quad (2.26)$$

Джерела струму з паралельно підключеними опорами (рис.2.19.а) також можуть бути еквівалентно перетворені на одне джерело з відповідним еквівалентним опором (рис.2.19.б).

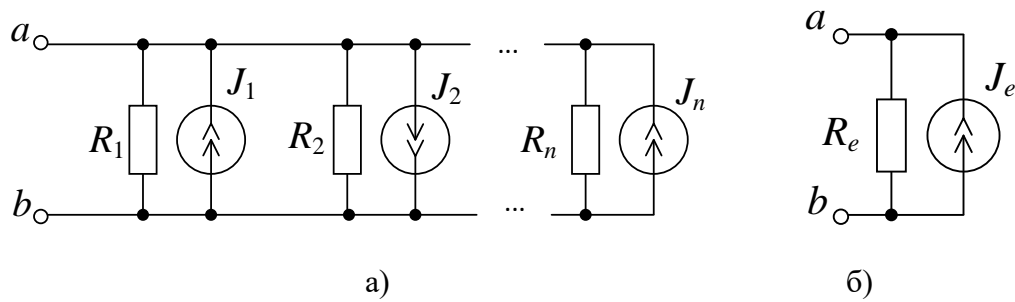


Рис.2.19. Паралельно з'єднані джерела струму (а) та еквівалентна їм ділянка (б)

Параметри еквівалентної схеми рис.2.19.б:

$$G_e = \sum_{i=1}^n G_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}; \quad J_e = \sum_{i=1}^n J_i = J_1 - J_2 + \dots + J_n \quad (2.27)$$

2.5.3. Перетворення віток з активними елементами – перенесення джерел живлення. Цей підхід також дозволяє спростити розрахунок схем.

Струми у вітках визначаються сумою ЕРС, які діють в контурі, незалежно від того, в яких вітках контуру ці ЕРС розміщені. Тому можна перенести джерело ЕРС з однієї вітки у інші, не змінюючи величини ЕРС, але забезпечивши незмінність суми напруг у контурах до та після перенесення (рис.2.20).

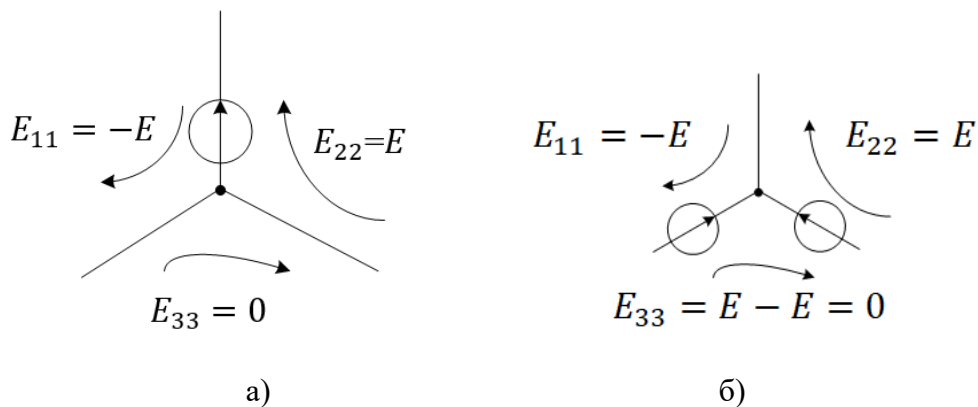


Рис.2.20. Перенесення джерела ЕРС

Варіант перенесення джерел ЕРС з декількох віток в одну, показаний на рис.2.21, можливий лише за умови співпадіння значення та напрямку ЕРС у вітках.

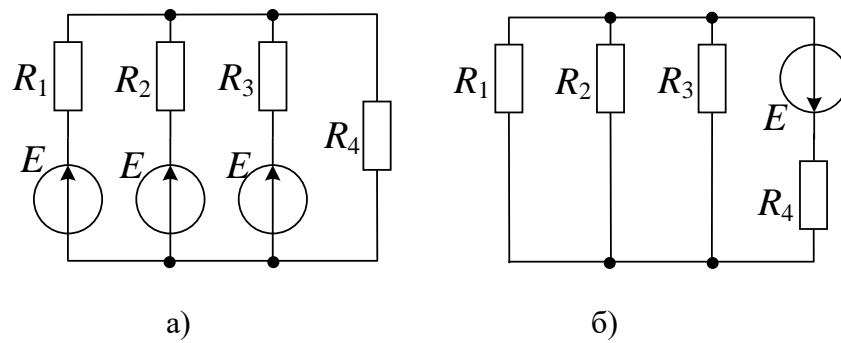


Рис.2.21. Перенесення джерел ЕРС з декількох віток в одну

Оскільки напруги на вітках визначаються заданими сумарними струмами джерела струму у вузлах, то можливо перенести джерело струму так, як це показано на рис.2.22. Джерело струму може бути перенесене паралельно всім віткам, які складали контур з цим джерелом струму.

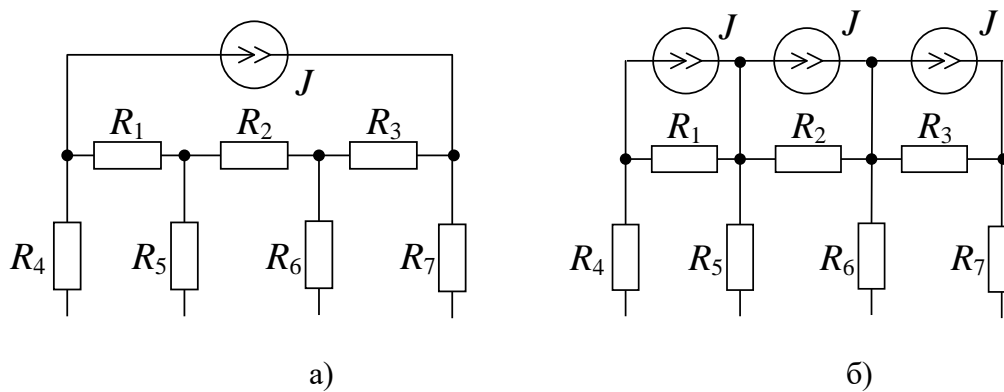


Рис.2.22. Перенесення джерела струму

Для джерел струму потрібно забезпечити незмінність струму у вузлах схеми. Зміна розташування у схемі джерел струму, для якої сумарні струми у всіх вузлах залишаються незмінними, не впливає на напруги на елементах кола.

Контрольні питання до Лекції 2

1. Чи може бути в одній вітці електричного кола, яка містить більше одного елемента, більше одного струму?
2. Що таке вузол в електричній схемі?
3. Що таке контур і які типи контурів використовуються при розрахунках?
4. В чому особливості формування рівнянь закону Ома для ділянок кіл, що містять джерела ЕРС?
5. Як формується система незалежних контурів?
6. Що таке граф схеми і як він застосовується?
7. Чи можна складати рівняння за другим законом Кірхгофа для контурів, що містять джерела струму?

8. Як обираються напрями обходу контурів при складанні рівняння за другим законом Кірхгофа?
9. Чому в рівняннях за першим законом Кірхгофа струми можуть бути з різними знаками?
10. Як при побудові потенціальної діаграми визначаються напруги?
11. З якої точки починається розрахунок напруг при побудові потенціальної діаграми?
12. Як визначити скільки рівнянь за першим законом Кірхгофа потрібно скласти для конкретної схеми?
13. Як за потенціальною діаграмою відновлюється елементний склад схеми?
14. З якою метою застосовуються еквівалентні перетворення в електричних схемах?
15. Як здійснюється перехід від з'єднання трикутником до з'єднання зіркою?
16. Яке з'єднання елементів можна розглядати як дільник струмів?
17. Яке з'єднання елементів можна розглядати як дільник напруг?
18. В чому суть методу чужого плеча при розрахунку струмів у вітках?
19. Як розраховуються параметри еквівалентної вітки при перетворенні паралельних віток з джерелами ЕРС та струму?
20. Які умови мають бути виконані для коректного перенесення джерел ЕРС та струму?

ЛЕКЦІЯ 3.

Розрахунок електричних кіл методом контурних струмів, двох вузлів та вузлових потенціалів. Складання рівнянь енергетичного балансу.

3.1. Метод контурних струмів

При розрахунку кіл *методом контурних струмів* приймають, що в кожному незалежному контурі схеми тече свій контурний струм. Рівняння складають щодо контурних струмів, після чого через них визначають струми віток. Число невідомих у цьому методі дорівнює числу рівнянь, які необхідно було б скласти для схеми за другим законом Кірхгофа.

Алгоритм складання рівнянь для розрахунку кіл за даним методом має наступні кроки:

1) обрати множину незалежних контурів та визначити для них напрями обходу (бажано обирати однакові напрями контурних струмів для всіх контурів);

2) задатися контурними струмами в обраних контурах – контурні струми позначаються подвійними індексами I_{kk} , де k – номер контуру;

3) визначити повні опори контурів R_{kk} та опори віток, що є суміжними для двох контурів, R_{kj} . Повний опір k -го контуру R_{kk} визначається як сума всіх опорів, що входять в даний контур. Повні опори входять до рівнянь зі знаком «+». Опір суміжної вітки R_{kj} визначається як сума опорів вітки, що є спільною для контурів k та j , і входить в рівняння зі знаком «-»;

4) для кожного контуру розраховуються контурні ЕРС E_{kk} як алгебраїчна сума ЕРС джерел, що діють в даному контурі – значення ЕРС входить до суми зі знаком «+», якщо його напрям співпадає з напрямом обходу контуру, інакше входить зі знаком «-»;

5) для кола складаються рівняння наступного виду:

$$\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \dots + R_{1n}I_{nn} &= E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + \dots + R_{2n}I_{nn} &= E_{22} \\ \dots & \\ R_{n1}I_{11} + R_{n2}I_{22} + \dots + R_{nn}I_{nn} &= E_{nn} \end{aligned}, \quad (3.1)$$

де n – кількість незалежних контурів.

б) з отриманої системи рівнянь визначаються контурні струми алгебраїчними методами або за узагальненою формулою

$$I_{kk} = E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{k3}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}, \quad (3.2)$$

де $\Delta = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{n1} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{n2} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}$ – визначник системи, Δ_{km} – алгебраїчне

доповнення, отримане з визначника Δ шляхом викреслювання k -ї колонки і m -го рядка і множення отриманого визначника на $(-1)^{k+m}$, E_{nn} – контурна ЕРС n -го контуру, R_{nn} – повний опір n -го контуру, R_{nj} – опір вітки, суміжної для n та j контурів.

7) розраховуються струми віток за наступними правилами:

- якщо вітка, струм в якій необхідно визначити, входить лише в один контур, то її струм буде дорівнювати контурному струму зі знаком «+», якщо струм вітки та контурний струм співпадають за напрямом, та зі знаком «-», якщо напрями протилежні,

- струм вітки, що є спільною для двох контурів, визначається як алгебраїчна сума контурних струмів – якщо напрям контурних струмів у вітці співпадають, вони додаються, якщо є протилежними – віднімаються.

8) якщо коло містить вітки з джерелами струму, вважається, що кожна така вітка входить лише в один контур, що замикається через інші вітки з джерелами ЕРС та опорами, і контурний струм цього контуру вважається відомим та рівним струму джерела струму. Для таких контурів рівняння не складається, і загальна кількість рівнянь в системі (3.1) зменшується на число віток з джерелами струму. Але в рівняннях враховуються опори суміжних віток і контурний струм контуру з джерелом струму.

Якщо з лівого верхнього кута визначника провести діагональ у його правий нижній кут (головна діагональ) і врахувати, що $R_{kn} = R_{mk}$, можна переконатися в тому, що визначник ділиться на дві частини, що є дзеркальним відображенням одна одної. Цю властивість визначника називають *симетрією щодо головної діагоналі*. У силу симетрії визначника щодо головної діагоналі справедлива наступна рівність $\Delta_{kn} = \Delta_{mk}$.

Формула (3.2) у ряді випадків використовується як вихідна при розгляді таких важливих питань теорії лінійних електричних кіл, як визначення вхідних і взаємних провідностей віток, принципу взаємності, методу накладання і лінійних співвідношень в електричних колах.

Виведення основних розрахункових рівнянь для схеми рис. 3.1.

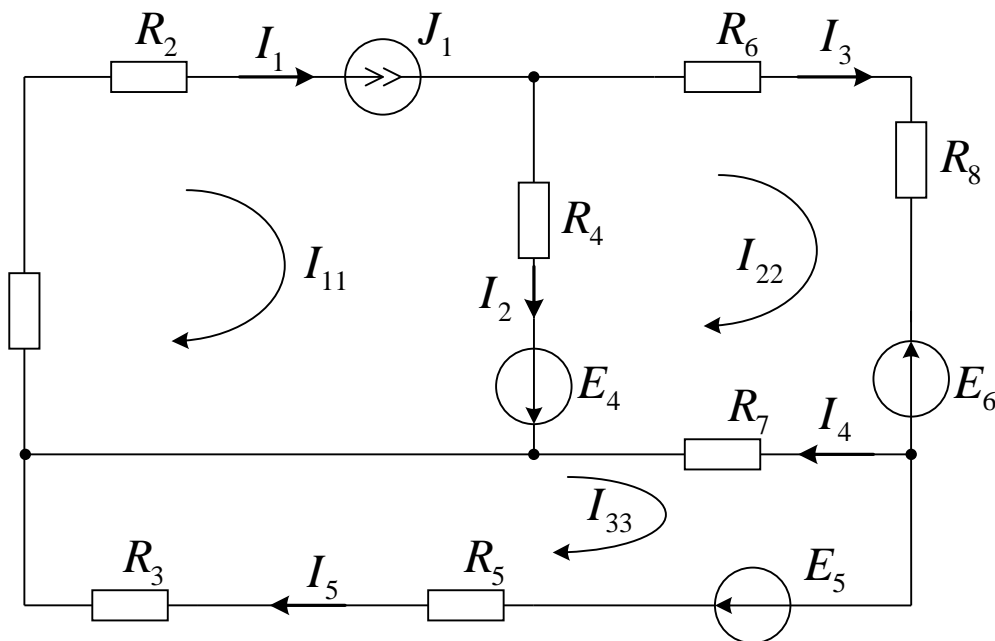


Рис. 3.1. Електрична схема із вказаними напрямками контурних струмів

На першому етапі розрахунків, доволньо задаємося напрямками струмів у вітках та обираємо систему незалежних контурів.

Загалом схема рис. 3.1 містить три незалежні контури, але один з них містить джерело струму, і тому його контурний струм вважається відомим. Контурні струми двох інших контурів позначаємо відповідно I_{22} та I_{33} .

Напрями контурних струмів в усіх контурах обираємо за годинниковою стрілкою. Напрямок контурного струму I_{11} співпадає з напрямом струму джерела J_1 , тому $I_{11}=J_1$.

Розраховуємо повні опори контурів та опори суміжних віток:

$$R_{12} = -R_4; R_{13} = 0;$$

$$R_{22} = R_4 + R_6 + R_7 + R_8; R_{21} = R_{12}; R_{23} = -R_7;$$

$$R_{33} = R_3 + R_5 + R_7; R_{31} = R_{13}; R_{32} = R_{23}.$$

При розрахунку опорів, враховуємо, що для першого контуру рівняння не складається і відповідно його повний опір R_{11} не розраховується.

Розраховуємо контурні ЕРС для другого та третього контурів:

$$E_{22} = -E_4 - E_6; E_{33} = E_5.$$

При розрахунку контурних ЕРС враховано, що напрями ЕРС E_4 та E_6 є протилежними до напрямку контурного струму I_{22} , а напрямок ЕРС E_5 співпадає з напрямом струму I_{33} .

Для розрахунку контурних струмів в другому та третьому контурах складаємо систему рівнянь виду (3.1), враховуючи, що для першого контуру рівняння складати вже непотрібно – його контурний струм вже відомий:

$$R_{21}J_1 + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}$$

$$R_{31}J_1 + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}$$

З отриманої системи рівнянь визначаються алгебраїчними методами контурні струми I_{22} та I_{33} , після чого знаходяться струми віток:

$$I_1 = I_{11} = J_1; I_2 = I_{11} - I_{22}; I_3 = I_{22}; I_4 = I_{22} - I_{33}; I_5 = I_{33}.$$

Розрахунок струмів віток є завершальним етапом розрахунку електричного кола за методом контурних струмів.

3.2. Метод вузлових потенціалів

Методом вузлових потенціалів називається метод розрахунку електричних кіл, у якому за невідомі приймають потенціали вузлів схеми. Знаючи потенціали

- якщо до k -вузла підтікає струм від джерела струму, то він повинен бути введений у J_{kk} зі знаком плюс, якщо цей струм від джерела струму витікає, то він повинен входити в J_{kk} зі знаком мінус.

Після розв'язання системи (3.3) щодо потенціалів, визначають струми у вітках за законом Ома для ділянки кола, що містить ЕРС.

Система рівнянь (3.3) може бути представлена в матричній формі запису:

$$[G][\varphi] = [J_{kk}], \quad [G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1,n-1} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n-1,1} & G_{n-1,2} & \dots & G_{n-1,n-1} \end{bmatrix}; \quad (3.4)$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{n-1} \end{bmatrix}; \quad [J_{kk}] = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ \dots \\ J_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Її розв'язок:

$$[\varphi] = [G]^{-1} [J_{kk}]. \quad (3.5)$$

Кількість віток у схемі рис. 3.2 становить 10, а кількість вузлів – 4, тому для розрахунку струмів у вітках доцільно застосувати метод вузлових потенціалів. Перш за все, в схемі довільно задаються напрямками струмів у вітках та позначають ці струми.

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{11} = \frac{1}{R_{41}} + \frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{31}} = 2,2 \text{ См}; \\ G_{22} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{24}} + \frac{1}{R_{32}} + \frac{1}{R_{23}} = 1,2 \text{ См}; \\ G_{33} = \frac{1}{R_{32}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{31}} + \frac{1}{R_{43}} = 1,75 \text{ См}; \\ G_{12} = G_{21} = -\left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}}\right) = -0,2 \text{ См}; \\ G_{13} = G_{31} = -\frac{1}{R_{31}} = -0,5 \text{ См}; \\ G_{23} = G_{32} = -\left(\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{32}}\right) = -(0,25 + 0,5) = -0,75 \text{ См}. \end{array} \right.$$

При розрахунку провідностей G_{22} , G_{33} , G_{23} враховано, що провідність вітки з джерелом струму дорівнює нулю (опір джерела струму дорівнює нескінченності).

Вузлові струми:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{11} = \frac{E_{41}}{R_{41}} - \frac{E_{14}}{R_{14}} + \frac{E_{31}}{R_{31}} - \frac{E_{12}}{R_{12}} + \frac{E_{21}}{R_{21}} = 15 \text{ А}; \\ J_{22} = \frac{E_{32}}{R_{32}} - \frac{E_{23}}{R_{23}} + \frac{E_{12}}{R_{12}} - \frac{E_{21}}{R_{21}} - \frac{E_{24}}{R_{24}} + J_{23} = -1,5 \text{ А}; \\ J_{33} = \frac{E_{43}}{R_{43}} - \frac{E_{31}}{R_{31}} + \frac{E_{23}}{R_{23}} - \frac{E_{32}}{R_{32}} - J_{23} = -3,5 + 3 - 7 + 4 - 1,5 = -5 \text{ А}. \end{array} \right.$$

Система рівнянь в числовому виді:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2,2\varphi_1 - 0,2\varphi_2 - 0,5\varphi_3 = 15 \\ -0,2\varphi_1 + 1,2\varphi_2 - 0,75\varphi_3 = -1,5 \\ -0,5\varphi_1 - 0,75\varphi_2 + 1,75\varphi_3 = -5 \end{array} \right.$$

Дана система має наступні розв'язки:

$$\varphi_1 = 6,37 \text{ В}, \quad \varphi_2 = -1,14 \text{ В}, \quad \varphi_3 = -1,53 \text{ В} .$$

Заключний етап полягає в розрахунку струмів за законом Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС:

$$I_{21} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_{21}}{R_{21}} = 2,25 \text{ A}; I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}}{R_{12}} = 2,75 \text{ A};$$

$$I_{41} = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_{41}}{R_{41}} = 3,63 \text{ A}; I_{14} = \frac{\varphi_1 - \varphi_4 + E_{14}}{R_{14}} = 6,2 \text{ A};$$

$$I_{24} = \frac{\varphi_2 - \varphi_4 + E_{24}}{R_{24}} = 2,22 \text{ A}; I_{31} = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_{31}}{R_{31}} = 3,05 \text{ A};$$

$$I_{32} = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_{32}}{R_{32}} = 3,31 \text{ A}; I_{23} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_{23}}{R_{23}} = 3,1 \text{ A};$$

$$I_{43} = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_{43}}{R_{43}} = 4,77 \text{ A}.$$

Для перевірки правильності розрахунків, складається рівняння балансу потужностей:

1) загальна потужність навантажень

$$P_H = R_{41}I_{41}^2 + R_{14}I_{14}^2 + R_{24}I_{24}^2 + R_{31}I_{31}^2 + R_{43}I_{43}^2 + R_{21}I_{21}^2 + R_{12}I_{12}^2 + R_{23}I_{23}^2 + R_{32}I_{32}^2$$

$$P_H = 360,13 \text{ Вт}$$

2) загальна потужність джерел

$$P_D = E_{41}I_{41} + E_{14}I_{14} + E_{24}I_{24} + E_{31}I_{31} + E_{43}I_{43} + E_{21}I_{21} + E_{12}I_{12} + E_{23}I_{23} + E_{32}I_{32} + J_{32}U_{23}$$

$$U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 = 1,13 \text{ В}$$

$$P_D = 360,02 \text{ Вт}$$

3) похибка розрахунку балансу потужностей

$$\delta_P = \frac{\left| \frac{P_D - P_H}{\left(\frac{P_D + P_H}{2} \right)} \right|}{\left(\frac{P_D + P_H}{2} \right)} \cdot 100\% = 0,13\% .$$

Таким чином, розрахунок струмів в схемі рис. 3.2 виконаний вірно.

3.3. Метод двох вузлів

Під *методом двох вузлів* розуміють метод розрахунку електричних кіл, у якому за шукане (за його допомогою визначають потім струми віток) приймають напругу між двома вузлами схеми. Даний метод застосовується самостійно для розрахунку електричних кіл, що мають лише 2 вузли та

декілька паралельних віток, під'єднаних для них. Крім того основні положення даного методу застосовуються при розрахунках більш складних кіл методом вузлових потенціалів.

Розрахункові формули цього методу одержують на основі рівнянь, складених за законом Ома для ділянки кола, що містить джерела ЕРС

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = (E_1 - U_{ab}) g_1, \\
 I_2 &= (E_2 - U_{ab}) g_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 I_n &= (E_n - U_{ab}) g_n
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

та за першим законом Кірхгофа

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q J_k - U_{ab} \sum_{k=1}^n g_k \tag{3.7}$$

Якщо у формулі (3.7) прийняти $I = 0$, то з неї може бути знайдена напруга між двома вузлами:

$$U_{ab} = \frac{\sum_k E_k g_k + \sum_k J_k}{\sum_k g_k} \tag{3.8}$$

Після визначення напруги U_{ab} знаходять струм у будь-який n -й вітці за формулою:

$$I_n = (E_n - U_{ab}) g_n \tag{3.9}$$

Розрахунок електричного кола методом двох вузлів розглядається на прикладі схеми рис. 3.3.

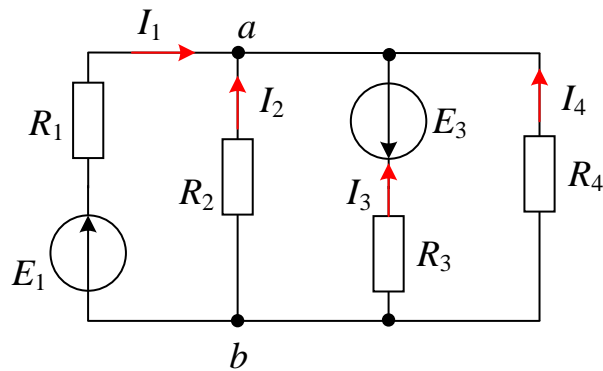


Рис. 3.3. Електрична схема, що містить 2 вузла і 4 вітки

Відповідно до схеми та законів Ома та Кірхгофа напруга між вузлами a та b розраховується наступним чином:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b;$$

$$\varphi_a = \varphi_b + E_1 - R_1 I_1; I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = E_1 g_1 - U_{ab} g_1;$$

$$\varphi_a = \varphi_b - R_2 I_2; I_2 = \frac{-U_{ab}}{R_2} = -U_{ab} g_2;$$

$$\varphi_a = \varphi_b - R_3 I_3 - E_3; I_3 = \frac{-U_{ab} - E_3}{R_3} = -U_{ab} g_3 - E_3 g_3;$$

$$\varphi_a = \varphi_b - R_4 I_4; I_4 = \frac{-U_{ab}}{R_4} = -U_{ab} g_4;$$

$$U_{ab} = \frac{E_1 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 - E_3 \cdot g_3 + 0 \cdot g_4}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}.$$

Необхідно звернути увагу, що ЕРС джерел, які спрямовані до вузла a входять в рівняння напруги зі знаком «+», а ті, що спрямовані від вузла a – зі знаком «-».

3.4. Рівняння енергетичного балансу

При протіканні струмів через опори, в останніх виділяється енергія у вигляді теплоти. На підставі закону збереження енергії об'єм енергії, що виділяється в одиницю часу в опорах схеми, повинен дорівнювати енергії, що віддається за той же час джерелами живлення. Це положення покладено в основу рівняння, що відображає *енергетичний баланс* в електричних колах.

При складанні *рівняння енергетичного балансу*, необхідно враховувати наступне:

- якщо напрямок струму I , що протікає через джерело ЕРС E , збігається з напрямком ЕРС, то джерело ЕРС віддає в коло за одиницю часу енергію (миттєву потужність), рівну $(E \cdot I)$, і цей добуток входить у рівняння енергетичного балансу з позитивним знаком;

- якщо напрямок струму I зустрічний напрямкові ЕРС E , то джерело ЕРС споживає енергію (наприклад, заряджається акумулятор), і добуток $(E \cdot I)$ ввійде в рівняння енергетичного балансу з негативним знаком.

Рівняння енергетичного балансу при живленні електричного кола тільки від джерел ЕРС має вигляд:

$$\sum_k I_k^2 R_k = \sum_m E_m I_m. \quad (3.10)$$

Коли схема живиться не тільки від джерел ЕРС, але і від джерел струму, при складанні рівняння енергетичного балансу необхідно врахувати і енергію, що віддається джерелами струму. Для цього розраховується різниця потенціалів на виводах джерела струму, і енергія розраховується як добуток знайденої напруги та струму джерела.

Припустімо, що до вузла a схеми підтікає струм J від джерела струму, а з вузла b цей струм витікає. Тоді енергія, яка віддається джерелом струму, знаходиться як $U_{ab} \cdot J$. Напруга U_{ab} і струми у вітках схеми повинні бути підраховані з урахуванням струму, що витікає з джерела струму. Останнє найпростіше зробити за методом вузлових потенціалів. Загальний вид рівняння енергетичного балансу:

$$\sum_k I_k^2 R_k = \sum_m E_m I_m + \sum_l J_l U_l. \quad (3.11)$$

Баланс потужностей використовується для оцінки вірності виконаних розрахунків або вимірювань. Похибка балансу визначається за формулою:

$$\delta_P = \frac{\left| \frac{P_D - P_H}{P_D + P_H} \right|}{2} \cdot 100\% \leq (3...5)\%, \quad (3.12)$$

де P_D – потужність джерел, P_H – потужність навантажень.

Ці потужності визначаються наступним чином:

$$P_D = \sum_m E_m I_m + \sum_l J_l U_l, \quad P_H = \sum_k I_k^2 R_k.$$

Контрольні запитання до Лекції 3

1. Які особливості є при формуванні рівнянь за методом контурних струмів?
2. Які особливості є при формуванні рівнянь за методом вузлових потенціалів?
3. Коли доцільно застосовувати метод двох вузлів?
4. Чи можна включати в два різні контури вітку, що містить джерело струму, при формуванні розрахункових рівнянь за методом контурних струмів?
5. Чи можна заземляти більше одного вузла при використанні методу вузлових потенціалів?
6. Як розраховується провідність вітки, що містить декілька послідовно з'єднаних резисторів?
7. Як визначаються струми віток в методі контурних струмів?
8. Як визначаються струми віток в методі вузлових потенціалів?
9. Від чого залежить знак ЕРС та струмів джерел при складанні рівнянь за методами контурних струмів, вузлових потенціалів та двох вузлів?

ЛЕКЦІЯ 4.

Метод накладання. Метод еквівалентного генератора. Метод пропорційного перерахунку (пропорційних величин). Лінійні співвідношення між струмами/напругами.

4.1. Метод накладання

Щоб скласти загальне рівняння для струму в k -вітці складної схеми, складається рівняння за методом контурних струмів, вибравши контури так, щоб k -вітка входила тільки в один k -контур (це завжди можливо). Тоді згідно струм у k -вітці буде дорівнює контурному струму I_{kk} :

$$I_{kk} = E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{k3}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}. \quad (4.1)$$

Кожен доданок правої частини (4.1) є струмом, викликаним у k -вітці відповідною контурною ЕРС. Наприклад, $E_{11} \Delta_{k1} / \Delta$ є складовою струму k -вітки, яка спричинена дією контурної ЕРС E_{11} . Кожну з контурних ЕРС можна виразити через ЕРС віток $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k, \dots, E_n$, згрупувати коефіцієнти при цих ЕРС і одержати рівняння наступного виду:

$$I_k = E_1 g_{k1} + E_2 g_{k2} + \dots + E_k g_{kk} + \dots + E_n g_{kn}. \quad (4.2)$$

Якщо контури обрані таким чином, що яка-небудь з ЕРС, наприклад E_m , входить тільки в один m -контур, а в інші контури не входить, то $g_{km} = \Delta_{km} / \Delta$.

Рівняння (4.2) виражає собою *принцип накладання*.

Принцип накладання формулюється в такий спосіб: струм у k -вітці дорівнює алгебраїчній сумі струмів, спричинених дією кожної з ЕРС схеми окремо. Цей принцип справедливий для всіх лінійних електричних ланцюгів.

Принцип накладання покладений в основу методу розрахунку, що одержав назву *методу накладання*.

При розрахунку кіл методом накладання діють наступним чином: по черзі розраховують струми, що виникають під дією кожної з ЕРС, умовно видаляючи інші джерела зі схеми, але залишаючи в схемі внутрішні опори джерел, і потім знаходять струми у вітках шляхом алгебраїчного додавання часткових струмів.

Необхідно відмітити, що методом накладання не можна користуватися для підрахунку потужностей, що виділяються в опорах, як суми потужностей від часткових струмів, оскільки потужність є квадратичною функцією струму $P = RI^2$.

Якщо через деякий опір R протікають узгоджено спрямовані часткові струми I_1 і I_2 , то потужність, що виділяється на ньому, визначається як $P = R(I_1 + I_2)^2$ і не дорівнює сумі потужностей від часткових струмів: $P \neq RI_1^2 + RI_2^2$.

Розглянемо застосування принципу накладання для конкретної схеми рис. 4.1.а.

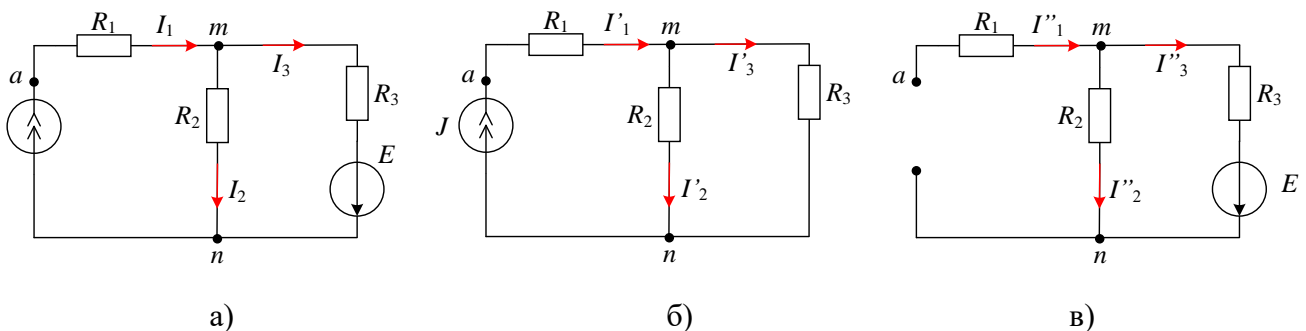


Рис. 4.1. Електричне коло з джерелом струму та джерелом ЕРС (а), еквівалентна схема з видаленим джерелом ЕРС (б), еквівалентна схема з видаленим джерелом струму (в)

Задамося номіналами елементів схеми:

$$R_1 = 20\text{М}, R_2 = 40\text{М}, R_3 = 60\text{М}$$

$$J = 5\text{А}, E = 20\text{В}$$

На рис. 4.1.б зображена еквівалентна схема з видаленим джерелом ЕРС. Оскільки у схемі діє джерело струму, то в першому контурі протікає струм $I'_1 = J = 5\text{А}$. Для знаходження струмів в двох інших вітках скористаємось паралельно увімкнені опори R_2, R_3 розглядаємо як один опір $R_\Sigma = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$, через який протікає струм J . Напряга на еквівалентному резисторі:

$$U_{mn} = JR_\Sigma = I'_1 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Знаючи напругу на паралельних вітках, розраховуються часткові струми а законом Ома:

$$I_2' = \frac{U_{mn}}{R_2} = I_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 5 \frac{6}{6+4} = 3A, \quad I_3' = I_1' - I_2' = 5 - 3 = 2A.$$

На рис. 4.1.в наведено схему з видаленим джерелом струму. Оскільки ідеальне джерело струм має нескінченний внутрішній опір, то при видаленні джерела на його місці в схемі утворюється розрив. Зважаючи на це, часткові струми розраховуються за наступними рівняннями:

$$I_1'' = 0, \quad I_2'' = I_3'' = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{20}{4+6} = 2A.$$

Реальні струми у вітках знаходяться як алгебраїчна сума часткових з урахуванням їх напрямів в часткових схемах:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'' = 5 + 0 = 5A, \\ I_2 &= I_2' - I_2'' = 3 - 2 = 1A, \\ I_3 &= I_3' + I_3'' = 2 + 2 = 4A. \end{aligned}$$

Для знаходження потужностей в елементах схеми та потужностей джерел живлення, розраховується напруга:

$$U_{ab} = U_{am} + U_{mn} = I_1 R_1 + I_2 R_2 = 10 + 4 = 14V.$$

Тоді потужності джерела струму: $P_{ДС} = U_{ab} \cdot J = 14 \cdot 5 = 40W$ та джерела ЕРС:

$$P_{ДН} = E \cdot I_3 = 20 \cdot 4 = 80W.$$

Рівняння балансу потужностей в даній схемі має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 &= P_{ДС} + P_{ДН} \\ 2 \cdot 25 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 16 &= 70 + 80 \\ 150 &= 150 \end{aligned}$$

Оскільки баланс потужностей виконується, отже всі розрахунки в схемі виконані вірно.

4.2. Метод еквівалентного генератора

Метод еквівалентного генератора дозволяє розрахувати струм в довільній вітці електричного кола, розглядаючи частину схеми за межами даної вітки як деякий активний двополюсник (частина схеми, що має два зовнішні виводи і представляється на схемах у вигляді прямокутника без розкриття його внутрішньої структури).

Оскільки при розрахунку електричних кіл за цим методом розглядаються два режими роботи – холостий хід (розмикання вітки, де шукається струм) та короткого замикання (замикаються всі джерела ЕРС, що містяться в активному двополюснику), метод еквівалентного генератора часто називається в літературі також методом холостого ходу і короткого замикання. Надалі частіше використовується перша назва.

Рекомендується така послідовність розрахунку струму цим методом:

- а) обирається вітка ab в схемі, знаючи струм в якій можна розрахувати струми в усіх інших вітках;
- б) обрана вітка розмикається, а вся частина кола поза нею розглядається як активний двополюсник;
- в) знаходиться напруга на кінцях розімкненої вітки будь-яким з методів розрахунку електричних кіл;
- г) визначається вхідний опір R_{BX} усієї схеми відносно точок ab при закорочених джерелах ЕРС і розімкнутих вітках із джерелами струму;
- д) розраховується струм у вітці ab за формулою:

$$I = \frac{U_{ab-x}}{R + R_{BX}}. \quad (4.3)$$

Якщо опір вітки ab дорівнює нулеві ($R=0$), то для неї має місце режим короткого замикання, а струм, що протікає по ній, є струм *короткого* замикання (I_k). З (4.3) при $R=0$ знаходиться струм короткого замикання

$$I_k = \frac{U_{ab_x}}{R_{BX}} \quad (4.4)$$

або

$$R_{BX} = \frac{U_{ab_x}}{I_k}. \quad (4.5)$$

З формули (4.5) випливає простий метод експериментального визначення вхідного опору активного двополюсника. Для цього необхідно виміряти напругу холостого ходу на зажимах розімкнutoї вітки U_{ab_x} і струм короткого замикання I_k вітки, а потім знайти R_{BX} як частку від ділення U_{ab_x} на I_k .

Електричне коло, наведене на рис. 4.2 необхідно розрахувати із застосуванням методу еквівалентного генератора. Параметри елементів: $E_1 = E_4 = 50$ В; $U=100$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = 6$ Ом; $R_4 = R_5 = R_6 = 2$ Ом.

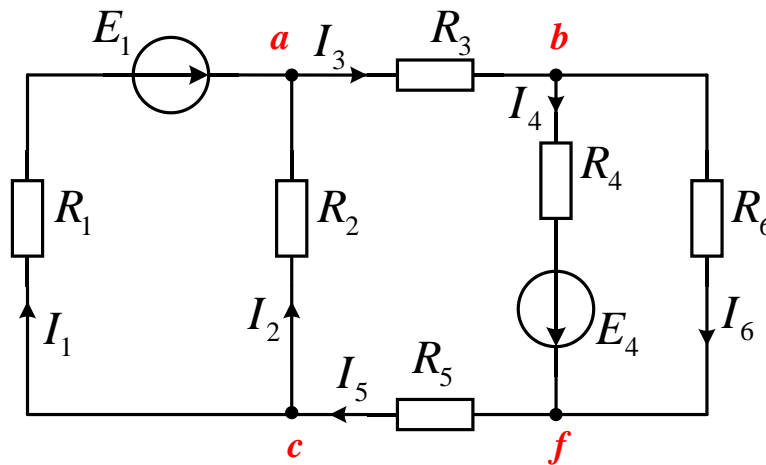


Рис. 4.2

Розглядаючи схему, обираємо як вітку, в якій будемо розраховувати струм, вітку з опором R_6 . Умовно розриваємо вітку з R_6 і визначаємо U_{bfxx} за другим законом Кірхгофа для умовно замкнутого контуру (див. рис. 4.3.а).

Струм в схемі рис. 4.3 позначено індексом “xx”, щоб відобразити, що даний струм відрізняється від струму в початковій схемі:

$$R_4 I_{4xx} + U_{bfxx} = E_4$$

або

$$U_{bfXX} = E_4 - R_4 \cdot I_{4XX} \cdot$$

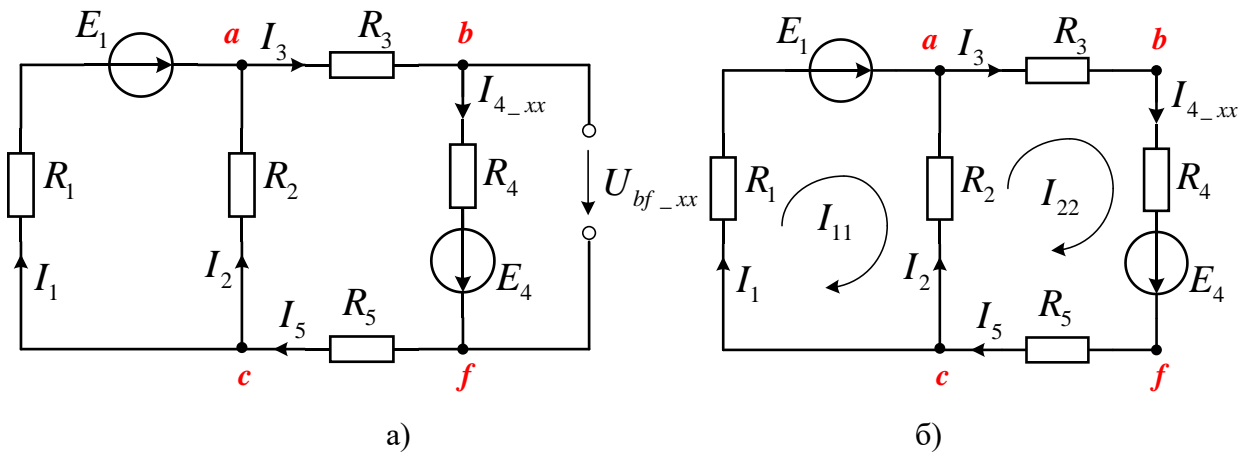


Рис. 4.3. Схема з розімкненою віткою, в якій шукається струм (а) та схема для розрахунку напруги холостого ходу (б)

Знайдемо струм I_{4XX} , методом контурних струмів (рис. 4.3.б), для чого запишемо систему рівнянь наступного виду:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = E_1 \\ -I_{11}R_2 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) = E_4 \end{cases} \cdot$$

Враховуючи параметри елементів, отримуємо:

$$\begin{cases} 12I_{11} - 6I_{22} = 50 \\ -6I_{11} + 16I_{22} = 50 \end{cases} \cdot$$

Контурні струми, відповідно:

$$I_{11} = 7,05 \text{ A}; I_{22} = 5,77 \text{ A} \cdot$$

Знаючи контурні струми I_{11} і I_{22} , знайдемо I_{4XX} :

$$I_{4XX} = I_{22} = 5,77 \text{ A} \cdot$$

Підставляючи значення I_{4XX} у вираз для напруги холостого ходу, отримуємо:

$$U_{bfXX} = E_4 - R_4 \cdot I_{4XX} = 50 - 2 \cdot 5,77 = 38,46 \text{ В} \cdot$$

Знайдемо вхідний опір відносно зажимів f і b розімкнутої вітки при замкнених джерелах ЕРС (рис. 4.4):

$$R_{124} = \frac{R_1 R_2 R_4}{R_1 R_2 + R_2 R_4 + R_4 R_1} = \frac{72}{36 + 12 + 12} = \frac{72}{60} = 1,2 \text{ Ом.}$$

$$R_{35} = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ Ом.}$$

$$R_{BX} = R_{124} + R_{35} = 2,7 \text{ Ом.}$$

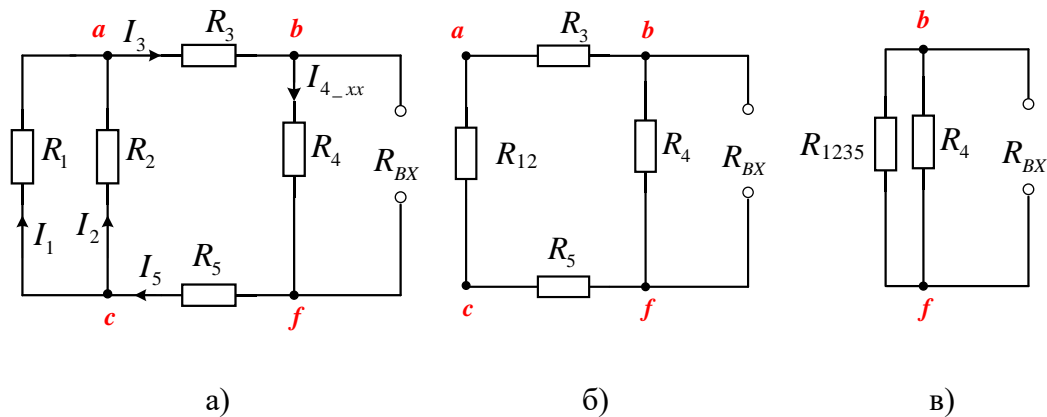


Рис. 4.4. Розрахункова схема з видаленими джерелам живлення (а) та її еквівалентні перетворення для знаходження опору відносно розімкненої вітки (б,в)

Знайдемо шуканий струм I_6 :

$$I_6 = \frac{U_{fbXX}}{R_{BX} + R_6} = \frac{38,46}{2 + 2,7} = 8,183 \text{ А.}$$

4.3. Метод пропорційних величин

Метод пропорційних величин використовується для безпосереднього розрахунку струмів в схемах, що містять одне джерело ЕРС та паралельно і послідовно з'єднані опори, або як складова розрахунку схем з декількома джерелами більш складними методами.

Відповідно до *методу пропорційних величин*, у самій віддаленій від джерела ЕРС вітці схеми довільно задаються струмом в 1 А.

Далі, просуваючись до вхідних зажимів схеми (точки m та n на рис. 4.5), розраховуються напруги на різних ділянках схеми та струми у вітках з

використання законів Ома та Кірхгофа. У результаті розрахунку, одержуються значення напруги U_{mn} на вході схеми (рис. 4.5) і струмів у вітках для випадку, якби у вітці, з якої почався розрахунок, протікав струм в 1 А.

Оскільки знайдене значення напруги U_{mn} у загальному випадку не дорівнює ЕРС джерела, то необхідно у всіх вітках змінити струми, помноживши їх на коефіцієнт, що дорівнює відношенню ЕРС джерела до знайденого значення напруги U_{mn} на вході схеми.

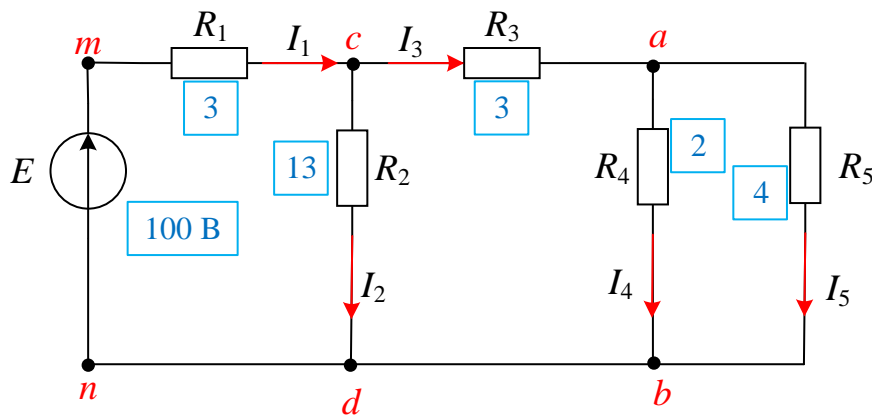


Рис. 4.5. Електрична схема

Розглянемо приклад застосування методу пропорційних величин для схеми рис. 4.5. На схемі точки n , d , b є одним вузлом, ознак для наочності розрахунків вони позначені по різному. Задаємося струмом $I_5 = 1$ А. За законом Ома напруга на резисторі $R_5 = 4$ Ом буде рівною $U_{ab} = R_5 I_5 = 4 \cdot 1 = 4$ В. Оскільки напруги на паралельно увімкнених елементах $R_4 = 2$ Ом та R_5 однакові, то струм через резистор R_4 визначатиметься як: $I_4 = U_{ab} / R_4 = 2$ А. За першим законом Кірхгофа струм $I_3 = I_4 + I_5 = 3$ А.

$$\text{Напруга } U_{cd} = U_{ca} + U_{ab} = I_3 R_3 + U_{ab} = 3 \cdot 3 + 4 = 13 \text{ В.}$$

$$\text{Струм } I_2 = U_{cd} / R_2 = 13 / 13 = 1 \text{ А.}$$

$$\text{Струм } I_1 = I_3 + I_2 = 4 \text{ А.}$$

$$\text{Напруга } U_{mn} = U_{mc} + U_{cd} = I_1 R_1 + U_{cd} = 3 \cdot 4 + 13 = 25 \text{ В.}$$

Коефіцієнт відношення отриманої напруги на вході схеми $U_{mn} = 25 \text{ В}$ та реальної ЕРС джерела живлення $E = 100 \text{ В}$ дорівнює $k = E/U_{mn} = 4$.

Для отримання реальних струмів у вітках необхідно домножити отримані раніше значення на коефіцієнт k :

$$I'_1 = 16 \text{ А}, I'_2 = 4 \text{ А}, I'_3 = 12 \text{ А}, I'_4 = 8 \text{ А}, I'_5 = 4 \text{ А}.$$

Контрольні запитання до Лекції 4

1. В чому зручність використання методу накладання?
2. Коли доцільно застосовувати метод еквівалентного генератора?
3. Як враховуються внутрішні опори джерел енергії при їх видаленні в процесі розрахунку схеми за методом накладання?
4. З чого починається розрахунок схеми за методом пропорційного перерахунку?
5. Як визначаються струми у вітках початкової схеми при використанні методу накладання?
6. Як обирають вітку, з якої починається розрахунок при застосуванні методу пропорційного перерахунку?
7. Чи враховується якоесь джерело ЕРС, розміщене у вітці, в якій розраховується струм за методом еквівалентного генератора?
8. Як знаходиться вхідний опір схеми при застосуванні методу еквівалентного генератора?
9. Як знаходиться напруга холостого ходу на розімкненій вітці в схемі при застосуванні методу еквівалентного генератора?
10. Як розраховуються реальні струми в схемі при застосуванні методу пропорційного перерахунку?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Теорія електричних кіл-1: Лабораторний практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т.А. Хижняк, А.В. Заграничний. – Електронні текстові дані (1 файл: 7,59 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 78 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41913>
2. Теорія електричних кіл: Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т.А. Хижняк, А.В. Заграничний. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,6 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 64 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41911>
3. Теорія електричних кіл. Методи аналізу лінійних електричних кіл постійного струму. Лекції та приклади розв'язування задач [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальності 171 «Електроніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: М. Ю. Артеменко, Л. М. Батрак, В. В. Рогаль. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,87 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 100 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/36753>
4. Теорія електричних кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму. Алгоритми й приклади розв'язування задач та самостійна робота студентів [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Акустичні електронні системи та технології обробки акустичної інформації» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: М. Ю. Артеменко, К. С. Дрозденко. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,34 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 99 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/35009>
5. Булашенко, А. В. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 809 Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 52 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/34935>
6. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки: навчальний посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів / Воробкевич А.Ю., Маляр В.С., Совин Р.Я., Соколовський М.О., П.Г. Стахів, О.І. Шегедина; за редакцією А.Ю. Воробкевича, О.І. Шегедина; Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". - Львів: Новий Світ-2000, 2020. - 223 сторінки: рисунки, таблиці. - (Серія "Вища освіта в Україні") (код для замовлення в бібліотеці 621.3 З-41)
7. Теоретичні основи електротехніки. Комп'ютерні розрахунки та моделювання лінійних електричних кіл: навчальний посібник / Ю.О. Карпов, С.Ш. Кацив, В.В. Кухарчук; Міністерство освіти і науки України, Вінницький національний технічний університет. - Херсон: ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. - 209 сторінок: рисунки, таблиці, схеми. (код для замовлення в бібліотеці 621.3 К26)
8. Електротехніка: підручник для студентів вищих закладів освіти / В.І. Коруд, О.Є. Гамола, С.М. Малинівський. - Львів: Видавництво "Магнолія 2006", 2019. - 447 сторінок: рисунки, таблиці. - (Вища освіта в Україні) (код для замовлення в бібліотеці 621.3 К69)

9. Електротехніка : підручник для студентів вищих закладів освіти / Коруд В.І., Гамола О.Є., Малинівський С.М. - Львів: Магнолія 2006, 2018. - 446 с.: рис. - (Вища освіта в Україні) (код для замовлення в бібліотеці 621.3 К69)
10. Основи електротехніки та електроніки: підручник / М.П. Матвієнко; Міністерство освіти і науки України, Конотопський інститут Сумського державного університету. - Київ: Видавництво Ліра-К, 2019. - 503 сторінки : рисунки, таблиці. (код для замовлення в бібліотеці 621.3 М33)
11. Нова електротехніка : лекції професора В. Чабана з теоретичної електротехніки / Василь Чабан. - Львів : Простір М, 2019. - 354 сторінки: рисунки, таблиці. (код для замовлення в бібліотеці 621.3 Ч12)
12. Теоретичні основи електротехніки: підручник для студентів спеціальностей: 141 "Електроенергетика, електротехніка і електромеханіка" та "Комп'ютерна інженерія" / В.С. Маляр ; Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018. - 414 сторінок: рисунки. (код для замовлення в бібліотеці 621.3 М21)
13. Теорія електричних кіл. Практикум: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / В.Ф. Синько, О.В. Вовна, І.С. Лактіонов ; Міністерство освіти і науки України, Державний вищий навчальний заклад "Донецький національний технічний університет". - Покровськ: ДВНЗ "ДонНТУ", 2018. - 214 с. : іл. (код для замовлення в бібліотеці 621.3 С31)
14. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки: навчальний посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів / А.Ю. Воробкевич [та ін.] ; за редакцією А.Ю. Воробкевича і О.І. Шегедина. - Львів: Магнолія 2006, 2018. - ч. - (Вища освіта в Україні) (код для замовлення в бібліотеці 621.3 З-41)