

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИГНАЛІВ І КІЛ КУРС ЛЕКЦІЙ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за
спеціальністю 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»

Укладачі: Ю.М. Туз, Ю.С. Шумков, О.В. Козир

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти

Артюхов В.Г., канд. техн. наук, доц., доцент кафедри системного проектування навчально-наукового інституту прикладного системного аналізу, КПІ ім. Ігоря Сікорського
Токовенко С.О., канд. техн. наук, доц., директор ТОВ «РОСТОК-ПРИЛАД ЛТД»

Відповідальний редактор

Самарцев Ю.М., канд. техн. наук, доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 01.12.2022 р.)
за поданням Вченої ради Приладобудівного факультету
(протокол № 12/22 від 28.11.2022 р.)*

В навчальному посібнику викладено ключові положення аналізу лінійних інваріантних у часі електричних кіл у часовій області на основі розв'язку систем диференціальних рівнянь, перетворення Лапласа, інтегралів згортки. Наведено частотний аналіз лінійних кіл, дослідження частотних властивостей типових електричних кіл, дослідження резонансних кіл, дослідження впливу від'ємного зворотного зв'язку на динамічні характеристики підсилювачів та дослідження їх стійкості. Розглянуто спектральний аналіз і синтез періодичних сигналів, спектральний метод аналізу реакції кіл на дію періодичних сигналів довільної форми. Наведено аналіз вузлів та пристроїв, характерних для вимірювальної техніки, що мають нелінійні компоненти та інерційні ланки, на основі опису системами нелінійних диференціальних рівнянь та їх розв'язку в середовищі систем комп'ютерної математики. Наведено синтез активних фільтрів за заданою апроксимацією АЧХ. Наведено велику кількість прикладів аналізу електричних кіл у середовищі системи комп'ютерної математики Mathcad і системи схемотехнічного моделювання Micro-CAP.

Призначений для здобувачів вищої освіти за спеціальністю «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка». Може бути корисним для студентів інших технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Реєстр. № НП 22/23-271. Обсяг 23,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

Вступ	8
Розділ 1. Аналіз лінійних електричних кіл у часовій області	10
Тема 1. Математичні моделі електричних кіл та задачі досліджень	10
Лекція 1. Основні співвідношення (моделі) елементів лінійних електричних кіл (компонентні рівняння). Лінійні моделі. Моделі простих двополюсників. Ідеальні двополюсні елементи. Лінійні елементи. Пасивні елементи. Активні елементи. Ідеальні керовані джерела. Ідеальний операційний підсилювач. Принцип суперпозиції та інваріантності у часі лінійних кіл	10
Лекція 2. Моделі реальних компонентів електричних кіл (схеми заміщення із зосередженими параметрами). Математичні моделі компонентів електронних кіл. Моделі реальних компонентів електричних кіл (схеми заміщення із зосередженими параметрами). Нелінійні, параметричні елементи. Математичні моделі компонентів електронних кіл. Математична модель діода в режимі великого сигналу. Біполярний транзистор. Нелінійна макромодель операційного підсилювача. Задачі досліджень електричних кіл	23
Тема 2. Динамічні рівняння та методи їх розв'язку для простих електричних кіл	39
Лекція 3. Класичний метод. Лінійні кола першого порядку. Класичний метод аналізу перехідних процесів. Перехідні процеси в колах першого порядку. Інтегруючі і диференціюючі кола. Аналіз кіл на операційних підсилювачах. Аналіз у середовищі програми Micro-CAP	39
Лекція 4. Класичний метод аналізу. Лінійні кола другого порядку. Класичний метод. Перехідні процеси в колах другого порядку. Послідовний коливальний контур. Підключення до джерела постійної напруги. Метод Ейлера. Вимушена складова. Вільна складова. Повний розв'язок ЛНДР. Підключення до джерела гармонічної напруги. Вимушена складова. Повний розв'язок. Паралельний коливальний контур. Зведення одиночного диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи n ЗДР першого порядку. Приклади аналізу у середовищі Mathcad. Розв'язок одиночних диференціальних рівнянь n -го порядку, систем n диференціальних рівнянь першого порядку в Mathcad. Контрольні запитання та завдання.....	63
Лекція 5. Метод змінних стану. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Вступ. Метод змінних стану. Стандартні процедури чисельного інтегрування. Зведення одиночного диференціального рівняння до нормальної системи ЗДР першого порядку у формі Коші. Дослідження послідовного коливального контуру. Лінійні кола третього порядку. Побудова системи рівнянь стану за методом еквівалентних джерел у середовищі системи Mathcad. Аналіз динамічних процесів у типових колах на операційних підсилювачах за методикою змінних стану. Аналіз у середовищі Micro-CAP. Робоче завдання. Контрольні запитання та завдання	91

Тема 3. Операторний метод	112
Лекція 6. Аналіз лінійних кіл з використанням одностороннього перетворення Лапласа. Одностороннє перетворення Лапласа (\mathcal{L} -перетворення). Компонентні і топологічні рівняння в операторній формі. Аналіз електричних кіл операторним методом. Динамічні рівняння. Імпеданс, адмітанс, імітанс. Операторна схема заміщення. Операторні зображення типових сигналів. Аналіз електричних кіл операторним методом, імпедансний метод. Теорема розкладання Хевісайда. Приклади аналізу в середовищі Mathcad. Аналіз у середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання	112
Лекція 7. Системні функції. Формула суперпозиції. Формула суперпозиції для ЛПЧ-кіл. Системна функція. Основна, додаткові передатні функції. Загальні властивості системної функції. Визначення системної функції електричних кіл на операційних підсилювачах. З'єднання каскадів. Буферизація. Приклади аналізу кіл операторним методом в середовищі Mathcad. Робоче завдання. Контрольні запитання та завдання	137
Тема 4. Метод інтегралів згортки	154
Лекція 8. Часові динамічні характеристики кіл. Визначення перехідних характеристик електричних кіл за допомогою тестових сигналів. Ефект "згладжування", створюючий фізичними системами. Вступ. Часові динамічні характеристики електричних кіл. Розмірність характеристик $h(t)$ і $h_{\delta}(t)$. Визначення $\delta(t)$ – функції у якості ідеального одиничного імпульсу та її основні властивості. Ефект "згладжування", створюваний фізичними системами. Сигнали у вигляді $\delta(t)$ – функції. Дослідження ефекту "згладжування" в середовищі Mathcad. Аналіз у середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання	154
Лекція 9. Дослідження електричних кіл за допомогою інтегралів згортки. Динамічне зображення сигналу. Інтеграл згортки за методом імпульсних перехідних характеристик. Інтегратор з кінцевим часом інтегрування. Інтеграл згортки за методом перехідних характеристик. Інтеграл Дюамеля. Розрахунок кіл при дії одиночних імпульсів. Врахування доданків у вигляді $\delta(t)$ – функцій у підінтегральних множниках. Розрахунок реакції кіл, коли дія не має простого аналітичного опису. Дослідження реакції кіл у часовій області в середовищі Mathcad. Аналіз у середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання	176
Розділ 2. Аналіз нелінійних інерційних електричних кіл у часовій області	192
Тема 5. Метод змінних стану. Моделювання динамічних процесів у нелінійних колах, що мають інерційні елементи	192
Лекція 10. Амплітудний детектор з відкритим входом. Система нелінійних диференціальних рівнянь – математична модель детектору. Амплітудний детектор з відкритим входом. Математична модель діода в режимі великого сигналу. Моделювання амплітудного детектора за допомогою диференціальних рівнянь стану. Перетворення характеристик нелінійних елементів при їх з'єднаннях. Врахування нелінійної ємності $p-n$ переходу. Аналіз нелінійних кіл в середовищі Mathcad. Аналіз в середовищі Micro-CAP	192

Лекція 11. Амплітудний детектор з закритим входом. Система нелінійних диференціальних рівнянь – математична модель детектору. Амплітудний детектор з відкритим входом. Система нелінійних диференціальних рівнянь – математична модель детектору. Моделювання амплітудного детектора з закритим входом. Лінеаризація характеристики перетворення за малих рівнях вхідної напруги. Метод взаємно-зворотних перетворень. Схема Андерсона. Моделювання ідеального амплітудного детектору на операційному підсилювачі. Приклади аналізу нелінійних кіл в середовищі Mathcad. Контрольні запитання та завдання	218
Лекція 12. Дослідження динаміки перетворювачів середньоквадратичних значень змінної напруги. Вступ. Метод взаємно-зворотних перетворень. Динамічна модель перетворювач середньоквадратичних значень змінної напруги. Моделювання методу заглушення пульсацій на низьких та інфранизьких частотах за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь. Операція "ковзного" інтегрування (як модель вольтметра інтегруючого типу з кінцевим часом інтегрування). Приклади аналізу нелінійних кіл в середовищі Mathcad. Аналіз в середовищі програми Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання	233
Розділ 3. Аналіз лінійних електричних кіл у частотній області	258
Тема 6. Аналіз лінійних електричних кіл у частотній області	258
Лекція 13. Частотний аналіз лінійних кіл. Метод асимптотичних діаграм Боде. Частотні характеристики кіл. Нуль-полосне зображення комплексної частотної функції (КЧФ). Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ). Логарифмічна фазочастотна характеристика (ЛФЧХ). Метод асимптотичних діаграм Боде. Частотний годограф. Дослідження кіл у частотній області в середовищі Mathcad. Частотний аналіз в середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання	258
Лекція 14. Дослідження частотних властивостей типових електричних кіл другого порядку. Типові моделі електричних кіл. Схеми активних фільтрів першого порядку. Схеми активних фільтрів другого порядку з додатним зворотним зв'язком (структура Саллена і Кея). Схеми активних фільтрів другого порядку з складним (багатопетльовим) від'ємним зворотним зв'язком (структура Рауха). Дослідження типових схем кіл другого порядку у частотній області в середовищі Mathcad. Частотний аналіз в середовищі Micro-CAP. Моделювання лінійних аналогових пристроїв, заданих передатними функціями з використанням перетворення Лапласу. Контрольні запитання та завдання	281
Лекція 15. Дослідження резонансних кіл у частотній області. Частотні характеристики резонансних систем. Діаграма полюсів і нулів резонансної системи з великим Q . Резонансна крива. Послідовний коливальний контур. Резонанс у послідовному контурі. Паралельний коливальний контур. Резонанс у паралельному контурі. Схемні моделі пасивних коливальних контурів, які враховують втрати. Дослідження резонансних кіл у частотній області в середовищі Mathcad. Частотний аналіз резонансних кіл в середовищі Micro-CAP. Лінеаризована схема заміщення (режим малого сигналу) транзисторного підсилювача за схемою "спільний емітер", навантаженням якого є паралельний	

коливальний контур. Контрольні запитання та завдання	296
Тема 7. Динаміка систем зі зворотним зв'язком	326
Лекція 16. Дослідження впливу від'ємного зворотного зв'язку на частотні характеристики підсилювачів. Від'ємний зворотний зв'язок. Інверсні системи. Неінвертуючий підсилювач. Інвертуючий підсилювач. Розширення смуги пропускання. Дослідження впливу від'ємного зворотного зв'язку в середовищі Mathcad. Зменшення вихідного імпеданса підсилювачів з від'ємним зворотним зв'язком. Метод зменшення впливу ємності вхідного кабелю у вимірювальних приладах. Аналіз в середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання	326
Тема 8. Стійкість систем зі зворотним зв'язком	353
Лекція 17. Дослідження стійкості активних систем на підсилювачах з від'ємним зворотним зв'язком. Частотний критерій Найквіста. Поняття стійкості систем зі зворотним зв'язком. Частотний критерій Найквіста. Логарифмічний частотний критерій стійкості Боде. Умови стійкості системи зі зворотним зв'язком. Запас стійкості за амплітудою. Запас стійкості за фазою. Аналіз стійкості в середовищі Micro-CAP. Моделювання самозбудження нестійкого кола із замкненим зворотним зв'язком. Контрольні запитання та завдання	353
Тема 9. Спектральний метод аналізу сигналів	367
Лекція 18. Спектральний аналіз і синтез сигналів. Ряди Фур'є. Спектральна діаграма. Рівність Парсеваля. Ряди Фур'є. Спектральний аналіз і синтез періодичних сигналів довільної форми. Умови Діріхле. Тригонометрична форма ряду Фур'є. Амплітудно-фазова (косинусоїдальна) форма ряду Фур'є. Часткові суми ряду Фур'є. Явище Гіббса. Експоненціальна (комплексна) форма ряду Фур'є. Спектральна діаграма. Рівність Парсеваля. Дослідження спектра сигналів у середовищі Mathcad. Контрольні запитання та завдання	367
Лекція 19. Спектральний метод. Визначення реакції кіл на дію періодичних сигналів довільної форми. Загальна характеристика частотного (спектрального) методу аналізу кіл. Визначення усталеної реакції кіл на дію періодичних сигналів довільної форми. Дослідження реакції кола спектральним методом у середовищі Mathcad. Розрахунок усталеної реакції послідовного коливального контуру. Розрахунок усталеної реакції ФНЧ Баттерворта на сигнал типу «випрямлена синусоїда». Аналіз в середовищі Micro-CAP. Робоче завдання. Контрольні запитання та завдання	381
Додатки	402
Додаток А. Синтез активних фільтрів за заданою апроксимацією АЧХ. Етапи синтезу фільтрів. Функція квадрата АЧХ. Вимоги до АЧХ. Нормування частот і характеристик фільтрів. Нормований ФНЧ-прототип. Вимоги до АЧХ нормованого ФНЧ-прототипу	402
Додаток Б. Синтез активних фільтрів Баттерворта. Фільтри Баттерворта (Butterworth filter). Вибір порядку фільтра. Полюси та нормована передатна функція прототипу. Порядок розрахунку фільтрів Баттерворта. Денормування за	

частотою. Розрахунок електричної схеми фільтра. Розрахунок елементів електричної схеми фільтра за параметрами синтезованої моделі в середовищі Mathcad. Основні властивості фільтрів Баттерворта. Контрольні запитання та завдання	408
Додаток В. Синтез активних фільтрів Чебишева. Поліноміальні фільтри Чебишева 1-го роду (Chebyshev type 1 filter). Вибір порядку фільтра. Полюси та нормована передатна функція прототипу. Порядок розрахунку фільтрів Чебишева 1-го роду. Денормування за частотою. Розрахунок електричної схеми фільтра. Розрахунок елементів електричної схеми фільтра за параметрами синтезованої моделі в середовищі Mathcad. Основні властивості фільтрів Чебишева 1-го роду. Контрольні запитання та завдання	420
Додаток Д. Синтез ФНЧ n – порядку. Перетворення типу фільтрів. Синтез ФНЧ n -порядку. Денормування (масштабування) за частотою та перетворення типу фільтрів. Перетворення НЧ-прототипу в ФВЧ. Перетворення НЧ-прототипу в СФ. Перетворення НЧ-прототипу в ЗФ. Перетворення в середовищі Mathcad. Визначення граничних частот Ω_c , Ω_s нормованого НЧ-прототипу за частотами фільтрів, які синтезуються. Моделювання фільтрів n -порядку в середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання	434
Список рекомендованої літератури	453

ВСТУП

Кредитний модуль «Теорія електричних сигналів і кіл» є нормативним освітнім компонентом освітньої програми «Інформаційні вимірювальні технології» спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» і належить до циклу дисциплін професійної підготовки.

Дисципліна дозволить освоїти фундаментальні основи, терміни та поняття теорії електричних сигналів і кіл пристроїв інформаційно-вимірювальної техніки в часовій та у частотній області.

Метою дисципліни є формування у студентів здатностей:

- аналізувати електричні сигнали та кола пристроїв інформаційно-вимірювальної техніки (ІВТ), здійснювати їх дослідження, побудову математичних та схемотехнічних моделей;

- використовувати сучасні інженерні та математичні програми для створення моделей сигналів і кіл пристроїв ІВТ та математичного аналізу;

- проектувати засоби ІВТ, описувати принцип їх роботи.

Після засвоєння дисципліни «Теорія електричних сигналів і кіл» студенти мають мати знання за наступними розділи та темами курсу.

Методи аналізу лінійних електричних кіл у часовій області на основі диференціальних рівнянь та їх розв'язку. Класичний метод аналізу. Метод змінних стану. Аналіз лінійних електричних кіл на основі операторного методу з використанням одностороннього перетворення Лапласа. Методи дослідження лінійних електричних кіл за допомогою інтегралів згортки. Знати методи аналізу нелінійних інерційних кіл в часовій області на основі їх опису системами нелінійних диференціальних рівнянь та розв'язку на прикладі типових схем пристроїв ІВТ. Частотний аналіз лінійних кіл. Метод асимптотичних діаграм Боде. Частотні характеристики типових електричних пристроїв ІВТ. Частотні характеристики резонансних систем. Знати вплив від'ємного зворотного зв'язку на динамічні характеристики пристроїв ІВТ, стійкість систем з від'ємним зворотним зв'язком. Спектральний аналіз і синтез сигналів на основі рядів Фур'є. Спектральний метод аналізу електричних кіл.

Синтез активних фільтрів за заданою апроксимацією амплитудно-частотної характеристики.

Студент повинен вміти використовувати наведені вище методи на практиці; застосовувати сучасні інформаційні технології, проводити розрахунки з використанням матричних, чисельних методів в середовищі системи комп'ютерної математики Mathcad; проводити дослідження на комп'ютерних моделях в середовищі програми схемотехнічного моделювання Micro-CAP.

Впровадження у навчальний процес комп'ютерних технологій навчання, систем комп'ютерної математики, *SPICE*- подібної програми схемотехнічного моделювання Micro-CAP (*Microcomputer Circuit Analysis Program*), сумісне використання цих програм у курсі «Теорія електричних сигналів і кіл» дає значні переваги в порівнянні з традиційним підходом щодо подання навчального матеріалу: дає можливість більш ефективного розв'язання задач аналізу; розширити коло завдань, що розв'язуються, посилити їх складність та різноманітність; збільшити об'єм навчального матеріалу; позитивно впливає на якість засвоєння навчального матеріалу та формування навичок використання комп'ютерної техніки.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ У ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕНЬ

Лекція 1. Основні співвідношення (моделі) елементів електричних кіл (компонентні рівняння)

Визначення. Моделі простих двополюсників. Ідеальні двополюсні елементи. Пасивні елементи (лінійні та нелінійні моделі). Активні елементи. Ідеальні керовані джерела. Принцип суперпозиції та інваріантності у часі лінійних кіл. Контрольні запитання та завдання.

ВИЗНАЧЕННЯ

Визначення 1. Електричні кола (або схеми) є сукупністю взаємно з'єднаних електро- радіоелементів.

Слово «коло» може характеризувати як *реальну структуру*, яку ми створюємо з резисторів, конденсаторів і транзисторів, з'єднаних за допомогою проводів або друкованих шин, так і *ідеалізовану модель*, яка створюється на основі абстракцій.

В основному будемо розглядати кола в *останньому сенсі* – як моделі. При цьому слід пам'ятати, що моделі кіл цікаві в переважно лише як засіб для розуміння і розробки реальних систем.

Визначення 2. Модель кола (власне коло) являє собою графічне зображення системи динамічних рівнянь, що описують поведінку цього кола.

Однак при такому опису характеристики кола виражені, як правило, в неявній формі. Розв'язуючи динамічні рівняння отримуємо точні характеристики реакції кола на стимулюючі впливи.

Визначення 3. У моделях електричних кіл елементи або гілки характеризуються рівняннями (називаються основними співвідношеннями), що зв'язують напруги і струми в гілках¹.

1. Моделі простих двополюсників. Ідеальні двополюсні елементи

Найпростішими ідеалізаціями елементів електричних кіл є лінійні опір, ємність, індуктивність та ідеальні джерела, основні властивості яких ілюструються на рис. 1.

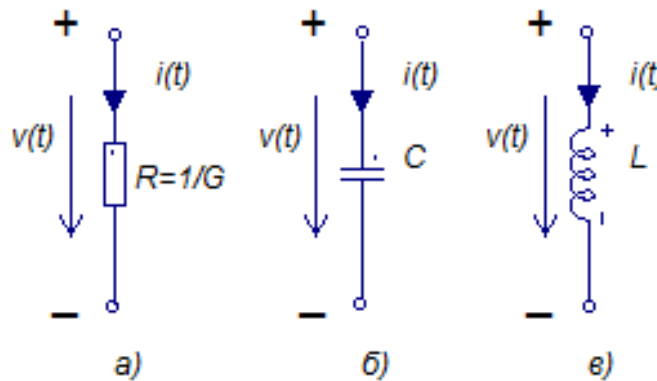


Рис. 1. Прості лінійні двополюсні електричні елементи із зосередженими параметрами (графічні моделі елементів):
а – резистор; б – конденсатор; в – котушка індуктивності

Елементи електричного кола, що здійснюють перетворення різних видів енергії в електромагнітну, що витрачається і запасається в інших елементах, називаються джерелами (генераторами) або активними елементами кола.

Елементи, які здійснюють необоротне споживання електромагнітної енергії або її накопичення, є пасивними елементами. Найпростіші елементи кола, пов'язані з іншими двома виводами, називають двополюсником.

¹) Опис досліджуваних об'єктів за допомогою систем динамічних рівнянь може бути застосовано також і інших випадках, коли основними динамічними змінними не є напруги і струми (наприклад, це можуть бути механічні сили і швидкості, температури і потоки тепла, хімічні потенціали і швидкості реакцій) (Siebert, W. McC. *Circuits, Signals, and Systems*. Cambridge, Mass. : MIT Press ; New York : McGraw-Hill Book Company, 1986).

1.1. Пасивні елементи (лінійні та нелінійні моделі)

a – **Резистор** (рис. 1,а) – елемент, необоротно перетворює енергію в тепло.

Математична модель:

$$v(t) = Ri(t) \quad \text{або} \quad i(t) = Gv(t);$$

Одиниці виміру R – Оми (Ом). Необоротне споживання енергії здійснюється в *резистивному елементі* R . При узгоджених напрямках відліку струму і напруги, зазначених на малюнку, зв'язок між ними виражається *законом Ома*: $v_R = R \cdot i$, де R – опір елемента – параметр, що визначає інтенсивність споживання енергії. Часто використовується і зворотне співвідношення $i_R = Gv$, де $G = 1/R$ – провідність елемента.

Споживана резистором потужність і енергія додатні:

$$p = vi = i^2 R \geq 0; \quad W_R = \int vi \, dt = \int i^2 R \, dt \geq 0$$

б – **Конденсатор** (рис. 1,б): елемент, який накопичує та розходує *електричну енергію*. Властивість – ємність. Одиниці виміру C – Фаради (Ф).

$q(t)$, $v_C(t)$ – зміни стану.

Математична модель:

Лінійна модель:

$$C = \frac{q(t)}{v_C(t)} = \text{const}, \quad q(t) = C \cdot v_C(t).$$

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

або
$$v_C(t) - v_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau,$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau.$$

або в режимі, що встановився

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt .$$

Миттєва потужність процесів, що відбуваються в ємності, обчислюється за формулою:

$$p_C(t) = v_C(t) \cdot i(t) = v_C(t) C \frac{dv_C(t)}{dt} .$$

Енергія електричного поля ємності для заданого моменту часу визначається виразом

$$W_C = \int_0^t p_C(t) dt = \int_0^t C v_C(t) dv_C = \frac{C v_C^2}{2} .$$

Нелінійна модель:

$C_d(v) = \frac{dq(v)}{dv}$ – динамічна ємність, залежить від напруги на обкладках.

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(v)}{dv} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} = C_d(v) \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Закон комутації:

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(\tau) d\tau = v_C(0_-) = v_C(0)$$

$$0_+ = 0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0;$$

$$0_- = 0 - \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Процес накопичення енергії в електричному полі здійснюється в *ємнісному елементі* C , струм якого $i = dq/dt$ визначається швидкістю зміни заряду на обкладинках елемента, пов'язаного з напругою між обкладинками виразом $q = C v_C$, де C – *ємність* елемента, яка визначає інтенсивність накопичення енергії. Елемент споживає енергію

$$W_C = \int v i dt = \int v dq$$

при $dW_C = v dq > 0$ і віддає її при $v dq < 0$.

ν – **Котушка індуктивності** (рис. 1,в): Елемент, який накопичує та розходує *магнітну енергію*. Властивість – *індуктивність*. Одиниці виміру L – генри (Гн).

$\Psi(t)$, $i_L(t)$ – зміні стану.

Математична модель:

Лінійна модель:

$$L = \frac{d\Psi_L(i)}{di} = \text{const}, \quad \Psi(t) = L \cdot i_L(t).$$

Швидкість зміни потокозчеплення Ψ самоіндукції визначає ЕРС самоіндукції $e_L(t)$. Якщо значення індуктивності L не залежить від струму, то:

$$e_L(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt}.$$

Згідно із законом Ленца ЕРС самоіндукції протидіє зміні потокозчеплення, що і враховується знаком мінус у виразі для $e_L(t)$.

Зв'язок між струмом і напругою на індуктивності визначається наступними виразами:

$$v_L(t) = -e_L(t) = L \frac{di(t)}{dt};$$

Отже

$$v_L(t) = \frac{d\Psi_L(t)}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

$$i_L(t) - i_L(0) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(\tau) d\tau,$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v_L(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(\tau) d\tau = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(\tau) d\tau$$

або у сталому режимі

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt .$$

Миттєва потужність електромагнітних процесів, що відбуваються в котушці індуктивності, обчислюється за формулою:

$$p_L(t) = v_L(t) \cdot i(t) = i(t) L \frac{di(t)}{dt}.$$

Енергія магнітного поля котушки індуктивності для заданого моменту часу визначається виразом

$$W_L = \int_0^t p_L(t) dt = \int_0^t Li(t) di = \frac{Li^2}{2}.$$

Нелінійна модель:

$L_d(i) = \frac{d\Psi_L(i)}{di_L}$ – динамічна індуктивність, залежить від струму через котушку.

$$v_L(t) = \frac{d\Psi_L(t)}{dt} = \frac{d\Psi_L(i)}{di_L} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L_d(i) \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

Закон комутації:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} v_L(\tau) d\tau = i_L(0_-) = i_L(0)$$

Накопичення енергії в магнітному полі здійснюється в індуктивному елементі L , в якому при протіканні струму i , що змінюється у часі, змінюється потокозчеплення $\Psi = Li$ і наводиться ЕРС ($e = -d\Psi/dt$). Параметр L – індуктивність – визначає інтенсивність накопичення енергії. Для подолання ЕРС e до затискачів елемента від зовнішніх джерел має бути докладено напруга $v_L = d\Psi/dt$. Індуктивний елемент споживає енергію при додатних значеннях $dW_L = vi dt = i d\Psi$, коли енергія магнітного поля

$$W_L = \int_0^\Psi i d\Psi$$

збільшується, і віддає її при $dW = i d\Psi < 0$.

Залежності $u(i)$ резистора, $\Psi(i)$ індуктивної котушки, $q(u)$ конденсатора – *характеристики елементів* – в загальному випадку нелінійні. Елементи, що володіють такими характеристиками, називаються нелінійними.

При лінійності відповідної характеристики параметри R , L або C постійні, і елементи називаються лінійними. Коло, складене цілком з лінійних елементів, називається лінійним. Диференціальні рівняння або рівняння алгебри, що описують його, є лінійними.

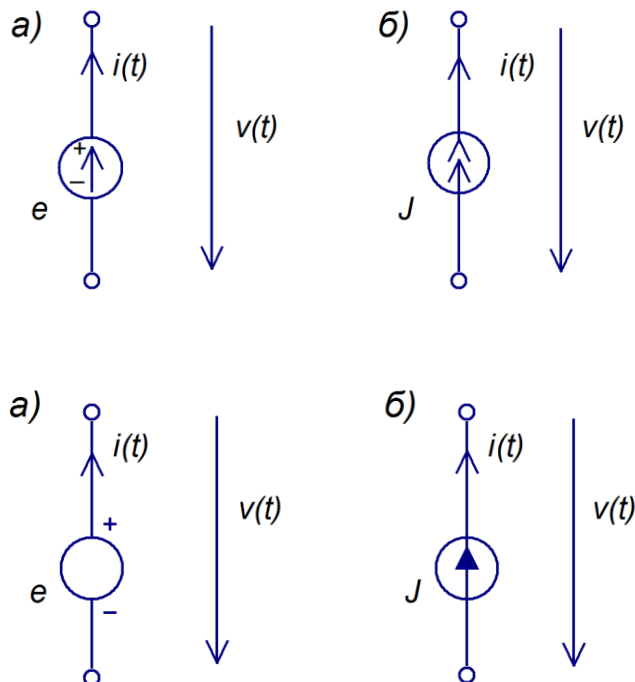
Базові напрямки для струму $i(t)$ і напруги $v(t)$ в основних співвідношеннях пасивних елементів завжди вибираються такими, як показано на рисунку – для струму додатним вважається напрямок від додатного полюса через елемент, а для напруги $v(t)$ – від додатного полюса до від'ємного.

1.2. Активні елементи

Реальні джерела енергії часто працюють в одному з наступних режимів:

1) У всьому діапазоні допустимих значень струму напруга на затискачах мало залежить від струму, що протікає;

2) Навпаки, в робочому діапазоні струм, що генерується джерелом, мало залежить від напруги на його полюсах.



або позначення²

Рис. 2

² Для ідеальних джерел напруги та струму використано позначення, прийняті у програмі схемотехнічного моделювання Мікро-САР та в інших системах схемотехнічного моделювання.

Ідеалізація властивостей джерел 1-го типу призводить до джерела ЕРС – елемента, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через це джерело. Стрілка всередині кружка, схематично зображує джерело ЕРС (рис. 2, а), показує напрямок дії ЕРС – напрямком, в якому за рахунок перетворення енергії здійснюється переміщення додатних зарядів всередині джерела. В результаті поза джерела між його затискачами виникає напруга.

Для зображеного стрілкою на рис. 2,а напрямку відліку напруги маємо $v(t) = e$. Іноді³ ідеальне незалежне джерело напруги позначають просто напругою, наприклад, $v_0(t)$ на його полюсах, яке воно створює: напруга на полюсах $v(t) = v_0(t)$ та не залежить від $i(t)$.

Прийнятий напрямок відліку $v(t)$ відповідає напрямку ліній напруженості електричного поля, що виникає в навколишньому до джерела просторі. Якщо до затискачів джерела приєднати пасивний елемент, то це електричне поле викличе рух додатних зарядів у зовнішньому колі – електричний струм $i(t)$ в напрямку стрілки.

Внутрішній опір ідеального джерела напруги $r_0 = 0$,

$$r_d = \frac{dv(t)}{di(t)} = \frac{\Delta v}{\Delta i} = 0, \quad \Delta v = 0$$

Ідеалізація властивостей джерела 2-го типу – це джерело струму (рис. 2,б), струм якого J не залежить від напруги $v(t)$ на його полюсах.

Ідеальне незалежне джерело струму позначають просто $i_0(t)$, тоді струм $i(t) = i_0(t)$ не залежить від $v(t)$ на його полюсах або від опору зовнішніх кіл (навантаження).

Внутрішній опір ідеального джерела струму $r_0 = \infty$,

$$r_d = \frac{dv(t)}{di(t)} = \frac{\Delta v}{\Delta i} = \infty, \quad \Delta i = 0.$$

Одиницями виміру $i(t)$ і $v(t)$ є відповідно ампер і вольти.

³ Siebert, W. McC. *Circuits, Signals, and Systems*. Cambridge, Mass. : MIT Press ; New York: McGraw-Hill Book Company, 1986.

Зверніть увагу на відмінність джерел струму від джерел напруги;

Орієнтація стрілки або знаків «+» і «-» всередині символу визначає додатний напрям для даного джерела.

2. Ідеальні керовані джерела

Елементи кіл можуть мати більше двох полюсів (терміналів). З ідеальних багатополісних елементів до найбільш важливих відноситься *ідеальне кероване* (або *залежне*) джерело. *Ідеальні керовані джерела* – це, як правило, результат ідеалізації активних елементів, таких як *транзистори* та *операційні підсилювачі* в їх лінійної області.

На рис. 3 показані чотири основні типи таких джерел⁴

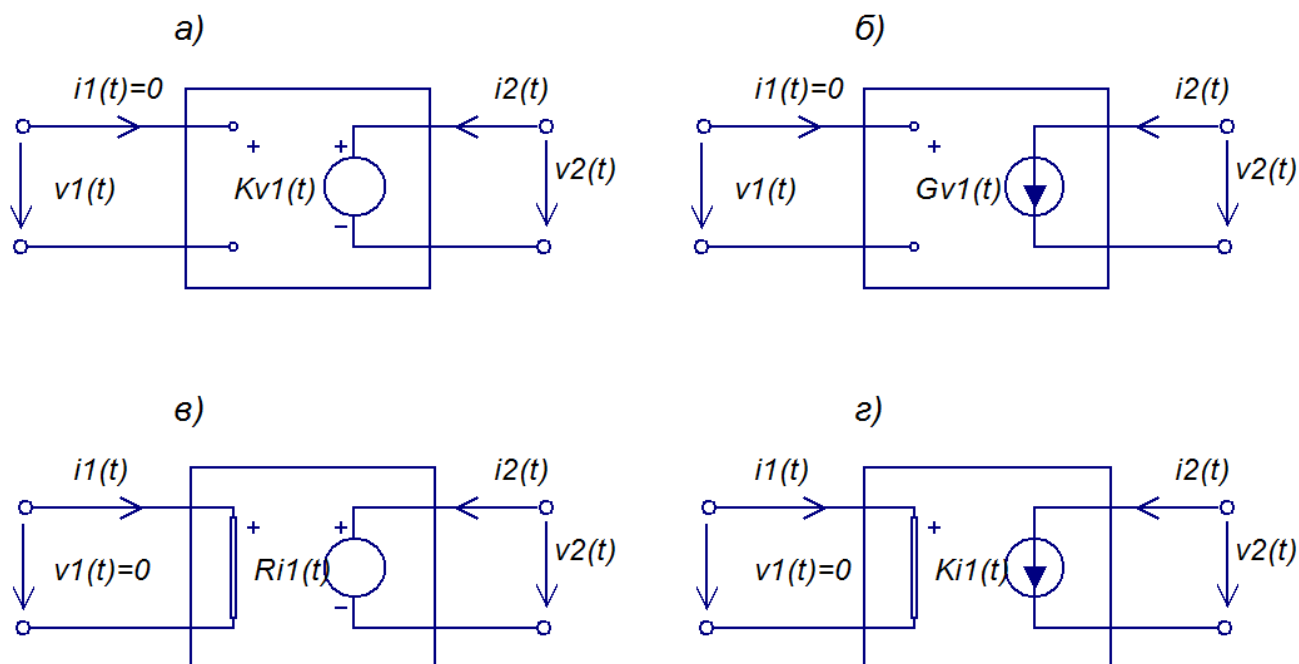


Рис. 3. Ідеальні керовані (залежні) джерела та основні співвідношення для них:

а) – джерело напруги, керований напругою, $v_2(t) = K v_1(t)$ і не залежить від $i_2(t)$;

б) – джерело струму, кероване напругою, $i_2(t) = G v_1(t)$ і не залежить від $v_2(t)$;

⁴ Використано позначення, прийняті у програмі схемотехнічного моделювання Micro-CAP. Відзначимо, що звичайно для позначення керованих джерел використовуються ромби, а незалежних – кружки. (*Micro-CAP 9 Electronic Circuit Analysis Program Reference Manual*. Copyright 1982-2008 by Spectrum Software 1021 South Wolfe Road Sunnyvale, CA 94088. – 916 p.)

в) – джерело напруги, кероване струмом, $v_2(t) = Ri_1(t)$ і не залежить від $i_2(t)$;

г) – джерело струму, кероване струмом, $i_2(t) = Ki_1(t)$ і не залежить від $v_2(t)$.

3. Ідеальний операційний підсилювач

Різновидом підсилювача напруги є операційний підсилювач (ОП). Він підсилює різницю напруг $v_{ab} = v_a - v_b$, прикладених до входних вузлів. Зокрема, ідеальний операційний підсилювач є важливим особливим випадком ідеального керованого напругою джерела напруги, коли коефіцієнт посилення K стає дуже великим. Він має своє власне спеціальне позначення, показане на рис. 4.

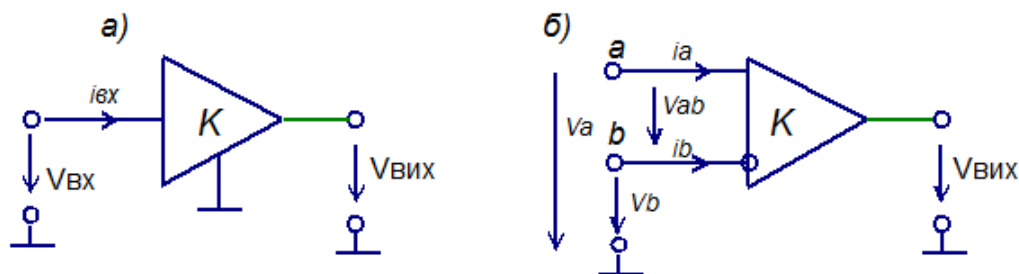


Рис. 4. Ідеальний операційний підсилювач

Ідеальний операційний підсилювач завжди використовується з колом зворотного зв'язку, яке встановлює кінцеве значення вихідної напруги шляхом зведення практично до нуля різниці напруг $\Delta v(t)$ на вході.

Вхід b , полярність напруги якого змінюється підсилювачем, називається *інвертуючим*, вхід a – *неінвертуючим*. Вихідна напруга такого підсилювача дорівнює $v_{\text{вих}} = K(v_a - v_b)$. З урахуванням того, що коефіцієнт посилення K операційних підсилювачів досягає значень $10^4 - 10^6$, часто приймається ідеалізація, пов'язана з *припущенням про нескінченне значення коефіцієнта посилення операційного підсилювача*. Однак, оскільки при $K \rightarrow \infty$ вихідна напруга залишається обмеженою, прийнята ідеалізація веде до вимоги *рівності напруг входних вузлів a і b* . Таким чином, для ідеального ОП з $K \rightarrow \infty$ маємо наступні умови: $u_a = u_b$; $i_a = 0$; $i_b = 0$.

Розглянуті типи елементів є ідеалізованими моделями компонентів електричних кіл – резистора, котушки індуктивності, конденсатора, джерела

енергії. З їх допомогою можна також відобразити другорядні, або, як іноді кажуть, "паразитні" явища, які відбуваються в інших компонентах реальних електромагнітних пристроїв і в оточуючому просторі. Більш повну модель можна побудувати, шляхом з'єднання окремих елементів в так звану схему заміщення розглянутого пристрою.

Відзначимо, що введений набір трьох ідеальних пасивних елементів, а також незалежних і керованих джерел дозволяє створювати схемні моделі практично будь-яких електромагнітних приладів і пристроїв, з якими ми зустрічаємося на практиці.

4. Принцип суперпозиції та інваріантності

Ідеальні двополюсні елементи (рис. 1), за винятком незалежних джерел, є лінійними, тобто їх динамічні змінні задовольняють ПРИНЦИПУ СУПЕРПОЗИЦІЇ або ЛІНІЙНОСТІ. Якщо $i'(t)$ і $v'(t)$ - довільна пара функцій, що задовольняють основним співвідношенням елемента, а $i''(t)$ і $v''(t)$ - будь-яка інша пара, яка задовольнить тим же основним співвідношенням, то кажуть, що елемент підпорядковується принципу суперпозиції (або, що еквівалентно, є лінійним), якщо пара функцій $i(t) = ai'(t) + bi''(t)$ і $v(t) = av'(t) + bv''(t)$ також задовольняє основним співвідношенням для будь-яких значень констант a і b .

Двополюсні елементи (рис. 1), за винятком незалежних джерел, задовольняють також ПРИНЦИПУ ІНВАРІАНТНОСТУ У ЧАСІ. Якщо $i(t)$ і $v(t)$ - довільна пара функцій, що задовольняють основним співвідношенням елемента, то елемент є інваріантні в часі, якщо $i(t-T)$ і $v(t-T)$ також задовольняють основним співвідношенням при будь-якому значенні T . Такі системи називаються стаціонарними.

Ці визначення поширюються безпосередньо і на багатопольусні елементи

Кола, що складаються цілком (крім незалежних джерел) з лінійних інваріантних в часі елементів, є прикладами лінійних інваріантних в часі ЛІЧ-систем.

Контрольні запитання та завдання

1. *Що таке електричне коло (схема кола), модель кола, компонентні співвідношення елементів кола?*
2. *Поясніть, що таке пасивні елементи, реактивні елементи кола. Наведіть приклади.*
3. *Наведіть модель резистору. Поясніть, що зветься активним опором.*
4. *За якими формулами обчислюють споживані резистором потужність і енергія?*
5. *Наведіть математичні моделі конденсатора. Запишіть інтегральну та диференціальну форми моделі. Чим вони відрізняються?*
6. *Наведіть математичні моделі котушки індуктивності. Запишіть інтегральну та диференціальну форми моделі. Чим вони відрізняються?*
7. *Наведіть зв'язок між струмом і напругою на котушці індуктивності.*
8. *Наведіть зв'язок між струмом і напругою на конденсаторі.*
9. *Що таке динамічна індуктивність, динамічна ємність?*
10. *Дайте визначення нелінійного кола та поясніть фізичний зміст. Наведіть приклади.*
11. *Дайте визначення лінійного кола та поясніть фізичний зміст.*
12. *За якою формулою обчислюють енергію електричного поля ємності?*
13. *За якою формулою обчислюють миттєву потужність процесів, що відбуваються в ємності?*
14. *За якою формулою обчислюють енергію магнітного поля котушці індуктивності?*
15. *За якою формулою обчислюють миттєву потужність електромагнітних процесів, що відбуваються в котушці індуктивності?*
16. *Поясніть, що таке ідеальне незалежне джерело напруги і чим воно характеризується.*
17. *Поясніть, що таке ідеальне незалежне джерело струму і чим воно характеризується.*
18. *Назвіть основні моделі ідеальних керованих джерел.*

19. *Наведіть приклади, де використовуються моделі ідеальних керованих джерел.*

20. *Що таке ідеальний операційний підсилювач? Яку модель має ідеальний операційний підсилювач?*

21. *Поясніть, в чому полягає принцип суперпозиції або лінійності.*

22. *Поясніть, в чому полягає принцип інваріантності.*

Лекція 2. Моделі реальних компонентів електричних кіл (схеми заміщення із зосередженими параметрами). Математичні моделі компонентів електронних кіл

Моделі реальних компонентів електричних кіл (схеми заміщення із зосередженими параметрами). Нелінійні, параметричні елементи. Математичні моделі компонентів електронних кіл. Математична модель діода в режимі великого сигналу. Біполярний транзистор. Нелінійна макромодель операційного підсилювача. Задачі досліджень електричних кіл. Контрольні запитання та завдання.

1. Моделі реальних компонентів електричних кіл (схеми заміщення із зосередженими параметрами)

Побудова моделей – *схем заміщення реальних компонентів електричних кіл*, що відображають досить повно зв'язки між струмами і напругами на його затискачах, є неоднозначною задачею⁵.

При достатньої ясності фізичних процесів в об'єкті моделювання схема заміщення може повно виражати співвідношення, що відображають його внутрішню структуру. Однак подібна *фізична модель* – навіть для порівняно простих об'єктів зазвичай містить велику кількість елементів.

Більш прості моделі – так звані *макромоделі* – можна отримати моделюванням співвідношень між струмами і напругами на окремих виводах об'єкта, що визначаються експериментально. Це найбільш зручно при побудові статичних моделей компонентів при незмінних у часі струмах і напругах.

Для обліку динамічних властивостей об'єкта, що визначають співвідношення між змінними в часі струмами і напругами, до такої макромоделі додають паразитні ємності між окремими виводами модельованого об'єкта і індуктивності виводів. Характер подібної *динамічної моделі* і число елементів, що до нею входять, істотно залежать від швидкості зміни струмів і напруг (при періодичних процесах – від діапазону частот). Так, для правильного опису поведінки елементів при високих частотах може знадобитися модель з розподіленими параметрами.

⁵ http://eelib.narod.ru/toe/Novg_2.01/index.htm

Іншим важливим аспектом вибору схеми заміщення є рівень або діапазон зміни струмів і напруг, для якого призначена модель. *Глобальна модель* описує поведінку об'єкта при будь-яких можливих струмах і напругах на його затискачах. Вона, як правило, містить нелінійні елементи.

Локальну модель використовують для опису роботи об'єкта в обмеженому діапазоні зміни струмів і напруг, коли можлива лінеаризація характеристик нелінійних елементів – заміна їх дотичними у робочій точці. Така модель містить тільки лінійні елементи.

Подібний режим роботи, при якому складові струмів і напруг, що змінюються в часі, малі в порівнянні з їх постійними значеннями у робочій точці (*малосигнальний режим*), часто спеціально забезпечується у колах з нелінійними елементами, у яких необхідно зберегти форму змінної складової сигналу при його перетворенні у колі.

Однак при виборі схеми заміщення не слід прагнути врахувати всі чинники (включаючи і малоістотні в даних конкретних умовах). У ряді випадків використання моделі, побудованої з урахуванням малоістотних факторів, не просто ускладнює проблему аналізу, але і призводить до принципових ускладнень при отриманні рішення.

Тому при моделюванні компонентів кола доцільно обмежуватися найпростішою схемою заміщення, що відображає лише найбільш істотні сторони досліджуваного процесу.

Проілюструємо сказане на прикладі побудови моделі індуктивної котушки. Так, її схема заміщення на постійному струмі містить лише активний опір проводу, з якого вона виконана (рис. 1,а). При низьких частотах (малій швидкості зміни струму і напруги) необхідно враховувати індуктивність котушки, і її схема заміщення приведена на рис. 1,б. Такий опис не є вичерпним, оскільки при високих частотах стають істотними струми, що замикаються по діелектрику між окремими витками. Їх моделює схема заміщення з паразитної ємністю (рис. 1,в).

При ще більш високих частотах необхідно враховувати *розподілений характер опору, індуктивності і ємності* (рис. 1,г). Такий підхід має загальний

характер – схеми заміщення компонентів електричного кола з розподіленими параметрами складаються шляхом з'єднання фрагментів з зосередженими параметрами, кожен з яких моделює ділянку компонента, наприклад, групу витків або один виток котушки, що має параметри R'' , L'' , C'' .

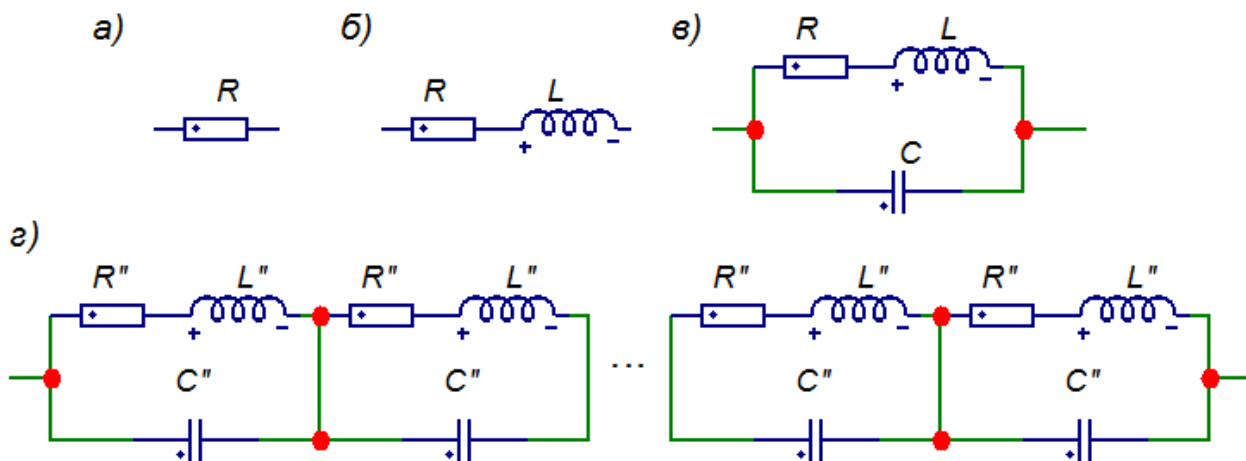


Рис. 1

Аналогічно будуються моделі резисторів і конденсаторів, які в найпростішому випадку можуть включати один елемент R або C , або додатково враховувати паразитні індуктивності компонентів, втрати в діелектрику конденсатора, або відображати розподілений характер параметрів компонента.

Як вже зазначалося, реальні джерела енергії відрізняються від ідеальних джерел тим, що напруга на їх затискачах і струм залежать один від одного, тобто залежать від навантаження джерела. Найпростіший варіант схеми заміщення джерела, що враховує це, включає ідеальне джерело ЕРС e і його внутрішній опір R_0 (рис. 2,а). Зовнішня характеристика - залежність $v(t)$ - такого джерела описується рівнянням $v = e - R_0 i$. Та ж залежність може бути змодельована джерелом струму J і внутрішньої провідністю G_0 (рис. 2,б), зовнішня характеристика якого виражається співвідношенням $i = J - G_0 v$.

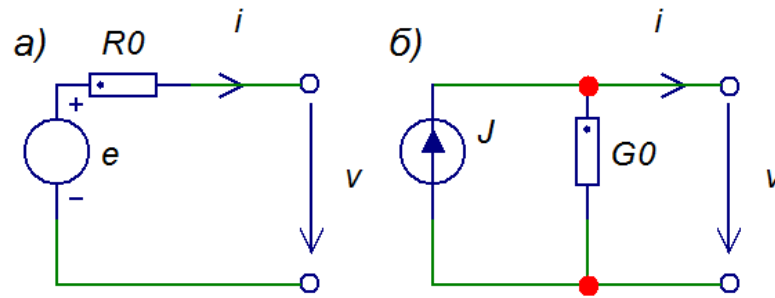


Рис. 2

Порівняння обох зовнішніх характеристик показує, що обидві схеми еквівалентні один одному при виконанні умов:

$$J = e/R_0; \quad G_0 = 1/R_0.$$

Ці співвідношення дозволяють здійснити заміну ідеального джерела ЕРС e і опору R_0 (рис. 2,а) еквівалентним з'єднанням ідеального джерела струму $J = e/R_0$ і того ж опору R_0 (рис. 2,б). Можливий також і зворотний перехід від з'єднання елементів J і G_0 до еквівалентних e і R_0 .

Ідеальні джерела ЕРС, що володіють нульовим внутрішнім опором, і джерела струму з нульовою внутрішньою провідністю (або нескінченним внутрішнім опором) не можуть бути еквівалентно перетворені один в один. Надалі будемо вважати, що вихідною для аналізу кола є її схема заміщення, тобто етап моделювання реальних компонентів кола вже виконано.

Схема електричного кола – її графічне зображення – містить інформацію двоякого роду: про склад елементів кола і про спосіб їх з'єднань (про структуру кола).

2. Нелінійні, параметричні елементи

Найбільш поширеним *нелінійним елементом* є діод, ідеалізовані основні співвідношення для якого наведені на рис. 3.

На тому ж малюнку представлені основні співвідношення для ключа, який, безумовно, є найбільш важливим з елементів з параметрами, що змінюються в часі (*параметричні елементи*).

Кола, що містять нелінійні елементи, а також елементи зі змінними у часі параметрами (параметричні кола), є надзвичайно корисними. Однак аналіз

таких кіл найчастіше досить важкий. Існує відносно небагато загальних принципів або методів для дослідження поведінки нелінійних кіл; але кожна з них породжує свої аналітичні проблеми. Теорія ж ЛПЧ-систем, навпаки, містить багатий набір теорем, принципів і методів, які дають потужні засоби для дослідження та розробки. В результаті нелінійності, які є властивістю реальних електронних кіл, часто локалізують у вигляді окремих комірок, що з'єднуються за допомогою ЛПЧ-систем. Такий підхід значно спрощує аналіз, забезпечуючи при цьому свободу в проектуванні, достатню для отримання необхідних динамічних характеристик.

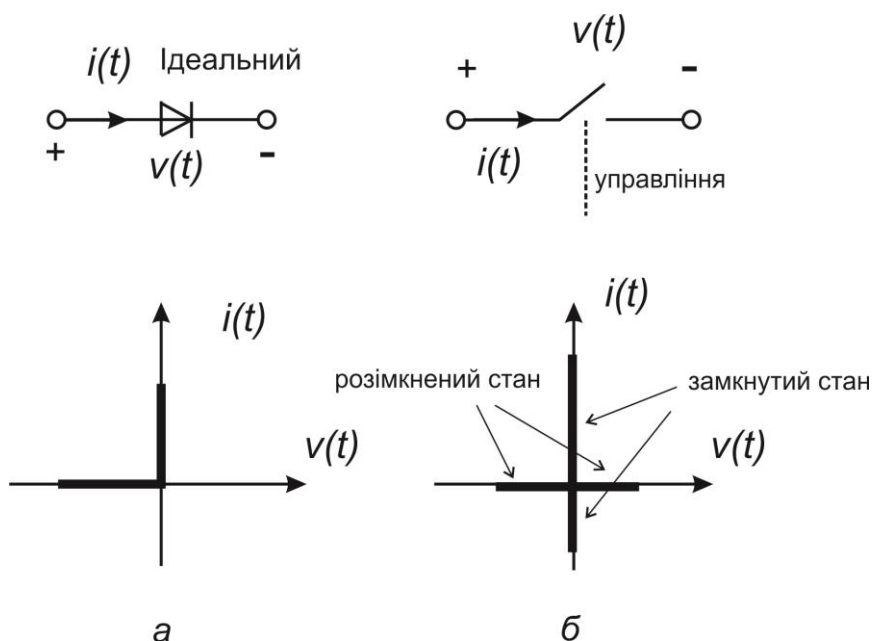


Рис. 3. Нелінійні елементи, та елементи із змінними у часі параметрами:

- а* – ідеальний діод, $i(t) = 0$ для $v(t) \leq 0$, $v(t) = 0$ для $i(t) \geq 0$;
б – ідеальний ключ; управління – незалежна функція часу, що має два стани: «розімкнено» $i(t) = 0$ і «замкнено» $v(t) = 0$.

У тих випадках, коли така ізоляція або локалізація неможлива, як, наприклад, в разі деяких швидкодіючих інтегральних схем, процес проектування може привести до використання чисельних методів для дослідження поведінки приладу при систематичній зміні різних його параметрів. Для цієї мети були розроблені *машинні програми моделювання кіл*. Однак велике поширення подібних програм моделювання не усунуло необхідності в розумінні математичних основ ЛПЧ-систем, оскільки ця

математика є потужним мовою, в термінах якої може обговорюватися поведінка складних систем.

3. Математичні моделі компонентів електронних кіл

Розглянемо *глобальні нелінійні моделі* таких елементів, як діоди, транзистори та операційні підсилювачі, що дозволяють здійснювати аналіз електронних кіл з цими елементами в динамічних режимах при зміні в широких межах струмів і напруг⁶.

Лінеаризація параметрів цих моделей в околиці робочої точки приводить до лінійних моделей, які використовуються під час аналізу в малосигнальному режимі.

3.1. Математична модель діода в режимі великого сигналу

Схему заміщення діода в режимі великого сигналу зображено на рис. 4.

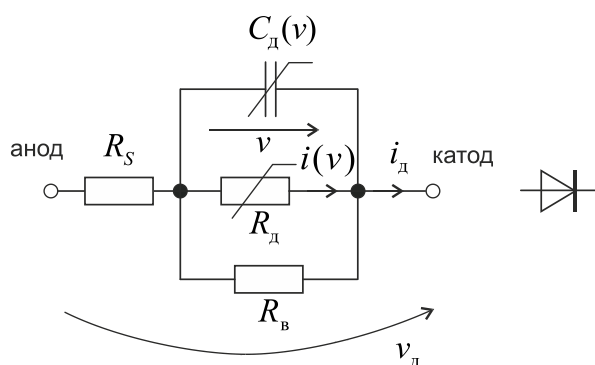


Рис. 4. Схема заміщення діода в режимі великого сигналу

Вона включає нелінійний опір $p-n$ переходу R_d , характеристика якого описується залежністю

$$i(v) = I_S \left(e^{\frac{v}{n \cdot \Phi_T}} - 1 \right);$$

нелінійну диференціальну ємність $p-n$ переходу C_d , яка має бар'єрну $C_{бар}$ і дифузійну $C_{диф}$ складові:

⁶ http://eelib.narod.ru/toe/Novg_2.01/index.htm

$$C_d = C_{\text{бар}} + C_{\text{диф}} = \frac{C_{\text{б0}}}{(1 - v/\varphi_k)^m} + \frac{I_S \tau}{n \varphi_T} \cdot e^{\frac{v}{n \varphi_T}};$$

опір витоку переходу R_b (RL) ≥ 1 МОм та об'ємний опір матеріалу напівпровідника в нейтральних зонах, що примикають до збідненого слою з обох сторін, і опір контактів R_s (RS)⁷⁾.

Параметри, які входять до складу вище зображеної моделі мають наступний сенс: I_S (IS) – зворотний струм, або струм насичення (має велику залежність від температури, тому називають ще тепловим струмом); φ_T (VT) – тепловий потенціал, $\varphi_T = kT/q$, де $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона; $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; T – абсолютна температура за Кельвіном $T \text{ } ^\circ\text{K} = 273 \text{ } ^\circ + T \text{ } ^\circ\text{C}$ (так при температурі $T = 27 \text{ } ^\circ\text{C} = 300 \text{ } ^\circ\text{K} \rightarrow \varphi_T = 25,854 \text{ мВ}$); $n = 1,0 \div 2,5$ (N) – поправочний коефіцієнт, що враховує відхилення характеристики діода від ідеальної моделі (коефіцієнт неідеальності); $C_{\text{б0}}$ (CJO) – бар'єрна ємність за нульового зміщення $p-n$ переходу, має значення декількох пФ; φ_k (VJ) – контактна різниця потенціалів (бар'єрний потенціал), яка $\varphi_k \approx 0,2 \div 0,4$ В для германієвих і $\varphi_k \approx 0,5 \div 0,8$ В для кремнієвих діодів; $m = 1/2 \div 1/3$ (M) – коефіцієнт плавності переходу; τ (TT) – час переносу заряду (*Transit Time*). Типові значення струму насичення I_S складають $10^{-2} \div 10^{-8}$ А – для германієвих і $10^{-6} \div 10^{-12}$ А – для кремнієвих діодів. Опір R_s малопотужних діодів, які працюють з невеликими за значеннями напругою і струмом, складає $\approx 0,1 \div 0,2$ Ом.

Ємність діода $C_d = C_d(v_d) = \Delta Q_d / \Delta v_d$ – визначається, як відношення зміни заряду, який накопичений у переході, до напруги, яка обумовлює цю зміну. Тобто ємність визначена, як диференціальна (чи динамічна), при цьому вона ще залежить від напруги v_d на $p-n$ переході (нелінійна). Ємність діода має дві

⁷⁾ В дужках наводяться позначення відповідного параметра моделі діода в стандарті PSpice, який використовується в Micro-CAP [13,14] та в інших системах схемотехнічного моделювання.

складові $C_d = C_{\text{бар}} + C_{\text{диф}}$. Бар'єрна ємність $C_{\text{бар}}$ – ємність закритого $p-n$ переходу (працює, як звичайній конденсатор) і залежить від величини зворотної напруги, має значення 1-20 пФ. Бар'єрна ємність визначається системою рівнянь:

$$C_{\text{бар}} = \frac{C_{\text{б0}}}{(1 - v/\varphi_k)^m}, \text{ якщо } v \leq FC \cdot \varphi_k;$$

$$C_{\text{бар}} = \frac{C_{\text{б0}}}{(1 - FC)^{(1+m)}} \cdot \left[1 - FC \cdot (1 + m) + m \cdot \frac{v}{\varphi_k}\right], \text{ якщо } v > FC \cdot \varphi_k,$$

де FC - коефіцієнт нелінійності бар'єрної ємності прямо зміщеного переходу [15]. Діоди з електрично-керованою ємністю при зворотній напрузі отримали назву *варикапи*.

Пряме включення $p-n$ переходу додає до бар'єрної ємності ще дифузійну ємність $C_{\text{диф}}$ – ємність прямо зміщеного $p-n$ переходу, яка залежить від величини прямого струму та часу життя нерівноважних носіїв τ (ще називають час переносу заряду *Transit Time*). Порядок $C_{\text{диф}}$ – десятки і сотні пФ.

Диференціальна провідність $p-n$ переходу

Опір характеризує роботу діода на постійному і на змінному струмі. Оскільки вольт-амперна характеристика $p-n$ переходу є нелінійною функцією, то опір на постійному струмі R_0 буде відмінним від опору на змінному струмі R_d . Опір на змінному струмі називається *диференціальним* (чи *динамічним*).

Якщо здиференціювати рівняння $i(v) = I_S(e^{\frac{v}{n \cdot \varphi_T}} - 1)$, то дістанемо значення диференціального опору в заданій точці вольт-амперної характеристики:

$$G_d(v) = R_d^{-1}(v) = \frac{di(v)}{dv} = \frac{I_S}{n \cdot \varphi_T} e^{\frac{v}{n \cdot \varphi_T}} \approx \frac{I_{\text{ПР}}}{n \cdot \varphi_T} \text{ або } R_d \approx \frac{n \cdot \varphi_T}{I_{\text{ПР}}} \text{ (Ом)},$$

де G_d – диференціальна провідність $p-n$ переходу в заданій точці характеристики.

Опір на постійному струмі R_0 визначається відношенням напруги до струму в заданій точці (v_0, i_0) вольт-амперної характеристики.

Нагадуємо, що наведена вище модель – це модель ідеального діода⁸⁾.

Для переходу до статичної моделі зі схеми рис. 4 виключається конденсатор, і вона стає чисто резистивною.

При аналізі електронних кіл у *режимі малого сигналу* характеристики нелінійних елементів лінеаризують у межах робочої точки, що призводить до лінійних моделей і в наслідок цього – до розрахунку лінійного кола, в якому нелінійні елементи представлені їх диференціальними параметрами у робочій точці.

3.2. Біполярний транзистор

Модель *Еберса-Молла* (рис. 5,а) – нелінійна *глобальна* модель біполярного транзистора, що має два *p-n*-переходу, використовує для кожного з переходів модель діода, розглянуту вище, і додатково враховує ефект передачі струму через базу в прямому і зворотному напрямках за допомогою двох керованих джерел.

Для транзистора типу *p-n-p* розглянута модель наведена на рис. 5,б. Для *n-p-n*-транзистора все позитивні напрямки діодів, джерел і зазначені напрями струмів замінюють на протилежні.

⁸⁾ Модель задовольняє багатьом практичним задачам при аналізі електронних схем (випрямляючі, імпульсні, високочастотні, детекторні діоди), які працюють при невеликих за значенням струмах і напругах. Дійсні параметри моделі визначають вимірюваннями для конкретного діода.

Модель ідеального діода не враховує деякі фізичні процеси, які мають місце у напівпровідникових структурах (генерації та рекомбінації носіїв заряду в приконтактній області, вплив заряду інжекттованих носіїв та електричного поля, створюваного цими зарядами, явище електричного пробоя при зворотній напрузі тощо). Наприклад, явище електричного пробоя є головним для деяких типів діодів (стабілітрони, тунельні діоди).

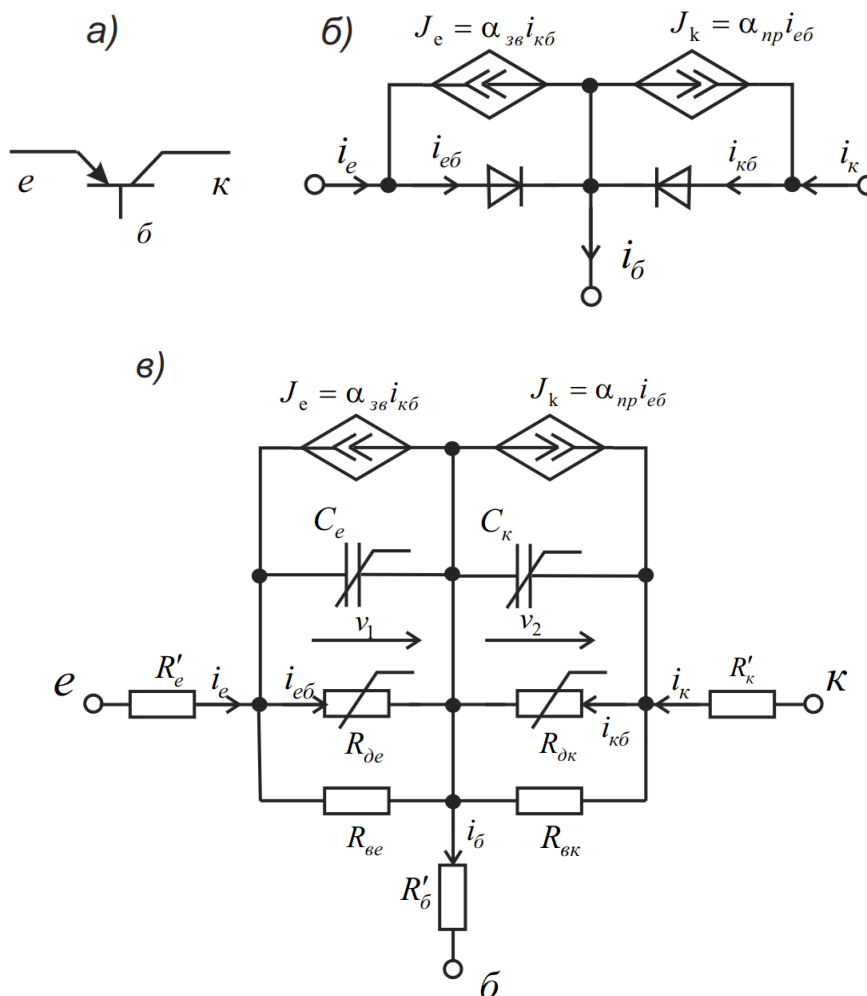


Рис. 5. Модель Еберса-Молла біполярного транзистора

Для даної схеми маємо:

$$i_e = i_{eб} - \alpha_{зв} i_{кб}, \quad i_k = i_{кб} - \alpha_{np} i_{eб},$$

де α_{np} – коефіцієнт передачі струму в прямому напрямку в схемі із загальною базою, $\alpha_{np} \approx 0,99$; $\alpha_{зв}$ – коефіцієнт передачі струму в зворотному напрямку, $\alpha_{зв} \approx 0,5$.

При використанні для опису p - n -переходів розглянутої вище моделі діода можна отримати схему заміщення p - n - p -транзистора, зображену на рис. 5,в. Вона містить об'ємні опору нейтральних областей $R'_e, R'_к, R'_б$ і опори активних і пасивних областей бази, опори витoku переходів $R_{еe}, R_{ек}$, нелінійні опори $R_{де}, R_{дк}$, вольт-амперні характеристики яких визначаються наведеної вище

експоненціальної залежністю $i(v) = I_S(e^{\frac{v}{n\Phi_T}} - 1)$ для діода, і нелінійні ємності C_e і C_k , які аналогічно описуються наведеними вище залежностями для діода.

Параметри, що описують характеристики нелінійних елементів схеми заміщення, різні для моделей обох переходів. Їх значення не наводяться в довідковій літературі і тому їх визначають серією вимірювань на даному приладі. Зауважимо, що розглянута модель Еберса-Молла включає 22 параметра, так що для їх знаходження потрібно значний обсяг вимірювань.

При використанні транзистора в активній області, коли емітерний p - n -перехід зміщений в пряму, а колекторний перехід - в зворотному напрямках, можна знехтувати струмом $i_{k\bar{o}}$ і відповідно струмом керованого джерела J_e . Якщо при цьому транзистор працює в мало сигнальному режимі, то можна здійснити лінеаризацію характеристик нелінійних елементів в околиці робочої точки і прийти, по суті, до Т-образної схемою заміщення з одним керованим джерелом J_k .

Схема спрощується також при аналізі на постійному струмі, коли після виключення ємнісних елементів вона стає чисто резистивною⁹.

3.3. Нелінійна макромодель операційного підсилювача

Побудова макромоделі будь-якого складного пристрою є неоднозначним, так як воно істотно залежить від фізичних факторів, що враховуються при моделюванні. Для операційних підсилювачів до таких належать, в першу чергу:

- 1) частотна залежність коефіцієнта підсилення;
- 2) обмеження амплітуди вихідної напруги рівнем напруги живлення;
- 3) обмеження швидкості наростання вихідної напруги.

Перераховані моменти враховує найпростіша макромодель підсилювача, зображена на рис. 6,а. Вона містить вхідний блок – вхідний опір R_{ex} і нелінійне

⁹ http://eelib.narod.ru/toe/Novg_2.01/14/Ct14-2.htm#fg14-4

джерело струму $J = f(v_{ex})$, кероване входною напругою підсилювача v_{ex} . Характеристика нелінійного джерела наведена на рис. 6,б.

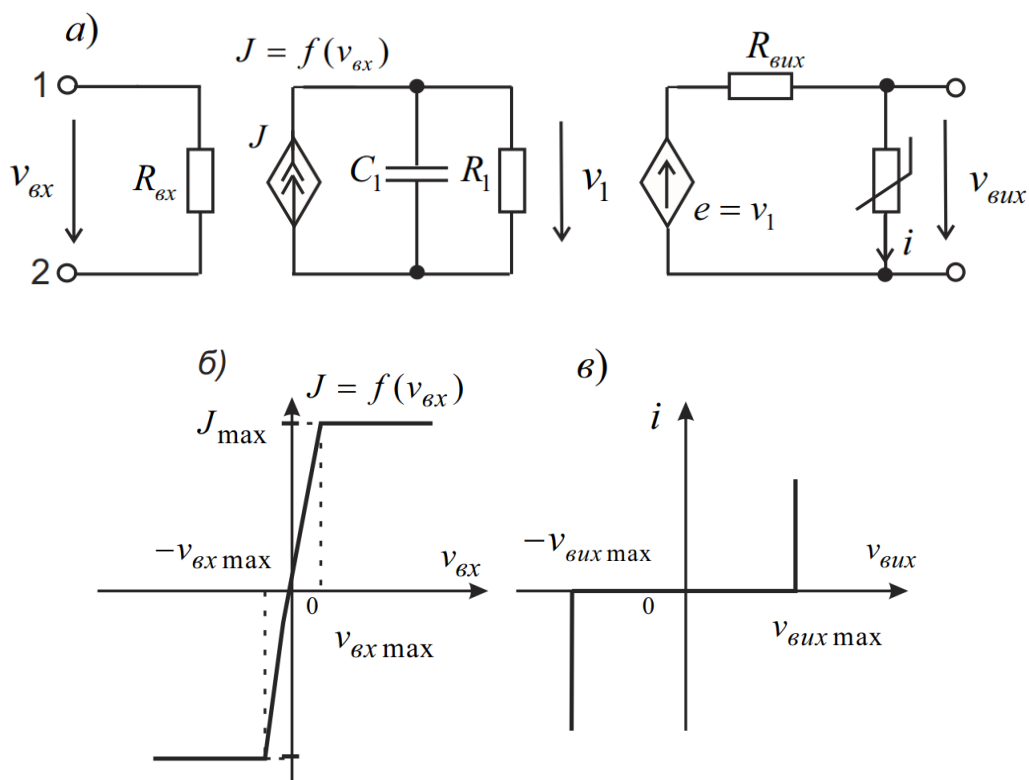


Рис. 6

Оскільки максимальний струм через конденсатор C_1 не перевищує значення I_m , то швидкість наростання напруги на його затискачах не може перевищити величини $\frac{dv_1}{dt} = \frac{I_m}{C_1}$. Ланка, що включає паралельно з'єднані елементи C_1, R_1 , моделює обмежену смугу пропускання операційного підсилювача. Так як відношення вихідної напруги v_1 на частоті ω до його значенням на нульовій частоті дорівнює $\frac{V_1(j\omega)}{V_1(0)} = \frac{1}{(1 + j\omega R_1 C_1)}$, то вибір параметрів макромоделі C_1, R_1 визначається значенням граничної частоти смуги пропускання ω_{gp} . При завданні цієї частоти за рівнем ослаблення 3 дБ маємо $\omega_{gp} R_1 C_1 = 1$.

При необхідності макромодель може враховувати і більш складний вид амплітудно-частотної характеристики підсилювача шляхом каскадного

підключення додаткових RC -ланок, аналогічних зображеному на рис. 6, що дозволяють врахувати інші полюси передавальної функції підсилювача $K(j\omega)$.

Вихідний блок крім лінійного вихідного опору $R_{вих}$ містить нелінійне опір. Його характеристика має вигляд, зображений на рис. 6,в. Це веде до обмеження рівня вихідної напруги заданими межами.

* * *

Кола, що містять нелінійні елементи, а також елементи зі змінними у часі параметрами (параметричні кола), є надзвичайно корисними. Однак аналіз таких кіл найчастіше досить важкий. Існує відносно небагато загальних принципів або методів для дослідження поведінки нелінійних кіл; але кожна з них породжує свої аналітичні проблеми.

Теорія ж ЛПЧ-систем, навпаки, містить багатий набір теорем, принципів і методів, які дають потужні засоби для дослідження та розробки. В результаті нелінійності, які є властивістю реальних електронних кіл, часто локалізують у вигляді окремих ланок, що з'єднуються за допомогою ЛПЧ-систем. Такий підхід значно спрощує аналіз, достатній для отримання необхідних динамічних характеристик.

4. Задачі досліджень електричних кіл

Задача визначення струмів і напруг кола з заданими структурою і параметрами, яке знаходиться під дією зовнішніх джерел, називається задачею аналізу кола. При аналізі кола іноді потрібно провести повний розрахунок – визначити всі струми і напруги на всіх її елементах.

У більшості випадків необхідно визначити лише частину струмів і напруг – так званих вихідних величин або реакцій кола на прикладені вхідні впливи, зумовлені діючими зовнішніми незалежними джерелами ЕРС і струму.

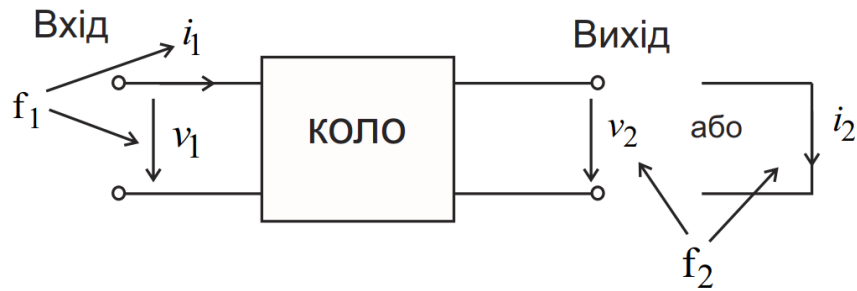


Рис. 7

Така постановка задачі носить назву аналізу по входу і виходу. У загальному випадку в колі може діяти декілька вхідних джерел і визначатися декілька вихідних величин.

Однак найбільш часто при аналізі визначають одну вихідну величину f_2 , обумовлену дією одного вхідного джерела (рис. 7). У цьому випадку саме джерело на схемі кола часто не зображують, а вказують лише викликані їм напруга v_1 або струм i_1 на вході кола. Також і вихідна величина може бути як напругою v_2 на вихідних затискачах кола, так і струмом i_2 в виділеній вихідній гілці.

Інший характер має задача діагностики кола – визначення його параметрів за результатами вимірювань струмів і напруг на окремих ділянках кола. Цей спосіб особливо актуальний при дослідженні складних кіл з високим рівнем інтеграції елементів, при якому полюса (затискачі) окремих елементів недоступні для вимірювань.

У цьому випадку задача діагностики *не завжди має однозначне рішення*, тому необхідно побудувати розрахункову модель, що дозволяє за результатами вимірювань струмів і напруг в частинних режимах роботи кола (наприклад, при подачі напруги лише на окремі його входи) отримати максимально повний і точний опис кола.

Зворотною по відношенню до задачі аналізу є задача синтезу кола – визначення структури і параметрів елементів кола, що забезпечують заданий характер перетворення вхідного сигналу f_1 в вихідний f_2 . Неважко зрозуміти, що задача синтезу є основною при проектуванні електромагнітних систем, що забезпечують ті чи інші робочі функції в системах енергетики або інформатики.

Для розглянутого класу задач характерна можливість відсутності розв'язку - поставлені вимоги до закону перетворення сигналу можуть носити характер, який не може бути реалізований. Тому окремим етапом розв'язку задачі синтезу є перевірка умов реалізованості початкових даних.

Наступною особливістю завдань синтезу є неоднозначність їх розв'язку – одержане рішення, як правило, виявляється не єдиним, і для остаточного вибору оптимального варіанту доводиться враховувати вимоги до проєктованого пристрою, що виходять за рамки теорії кіл (наприклад, технологічні або експлуатаційні)

До цього ж типу належать і задачі оптимізації кіл – визначення параметрів елементів, за яких забезпечується найкраще в певному сенсі наближення до необхідних властивостей кола або характеристикам перетворення сигналів. Таке завдання зазвичай розв'язують на основі порівняння результатів послідовно розв'язуваних завдань аналізу варіантів кола з фіксованими параметрами.

Цей шлях перебору варіантів поряд із загальною трудомісткістю розв'язку викликає особливі труднощі за прагненні отримати уявлення про можливості розв'язання задачі синтезу, однозначності його розв'язку або досяжному наближенні до ідеального розв'язання. Більш ефективними є спеціальні методи синтезу, розроблені для окремих класів таких задач.

Контрольні запитання та завдання

1. *Що таке глобальна модель і локальна модель, фізична модель, макромодель, модель у малосигнальному режимі?*
2. *Що таке схема заміщення? Наведіть приклади схем заміщення реальних елементів на постійному струмі і на високих частотах. Чим вони відрізняються?*
3. *Що таке параметричний елемент?*
4. *Наведіть математичну модель діода в режимі великого сигналу Чим вона відрізняється від моделі в режимі малого сигналу?*
5. *Поясніть, що таке глобальна і локальна моделі?*
6. *Поясніть, що таке модель Еберса-Молла біполярного транзистора?*
7. *Поясніть, що таке нелінійна макромодель операційного підсилювача і чим вона характеризується?*
8. *Поясніть, що таке задача аналізу кола, задача діагностики.*
9. *Що таке задача синтезу кола, задача оптимізації?*

ТЕМА 2. ДИНАМІЧНІ РІВНЯННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ПРОСТИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Лекція 3. Класичний метод. Лінійні кола першого порядку

Класичний метод аналізу перехідних процесів. Перехідні процеси в колах першого порядку. Інтегруючі і диференціюючі кола. Аналіз кіл на операційних підсилювачах. Приклади аналізу у середовищі Mathcad. Аналіз у середовищі програми Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання.

1. Класичний метод аналізу перехідних процесів

Реакцію лінійного інваріантного в часі кола (ЛІЧ-кола) можна знайти шляхом розв'язання диференціальних рівнянь (одного диференціального рівняння n -го порядку або системи з n диференціальних рівнянь *першого* порядку), які описують процеси (напруги та струми) в електричному колі на деякому ($t \geq t_0$) інтервалі часу. Відомо, що процеси в ЛІЧ-колах описуються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. При зовнішніх діях одержуємо лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР).

З математики відомо, що повний розв'язок ЛНДР (системи) складається із його *часткового* розв'язку, який характеризує усталену реакцію кола (так звана вимушена складова, що обумовлена дією зовнішніх джерел, яка з часом залишається по закінченні перехідних процесів), та *повного* розв'язку лінійного однорідного диференційного рівняння (ЛОДР) (системи), котрий визначає *вільну* складову реакції кола (струмів та напруг) під час перехідного процесу, що з часом згасає. При цьому значення констант (так звані сталі інтегрування), які виникають під час розв'язання однорідних диференційних рівнянь (системи), розраховують таким чином, щоб знайдений повний розв'язок ЛНДР відповідав стану кола при $t = t_0$. Зазвичай, якщо немає інших вимог, *початковий момент часу* вважають $t = 0$, а стан динамічного кола, що йому відповідає, називають *початковим станом*.

Реально початковим є момент часу, в який відбулася деяка комутація (підключення або відключення джерел сигналів¹⁰⁾, підключення або відключення деяких елементів кола, раптова зміна параметрів, закорочування елементів або частин схеми тощо). Вважаємо, що комутація відбувається у часі миттєво.

Перехідні процеси в колах першого порядку

Розгляньмо основні положення класичного методу на прикладі електричного RC -кола (рис. 1,а), до якого стрибком підключається деяке джерело сигналу (момент $t = 0$).

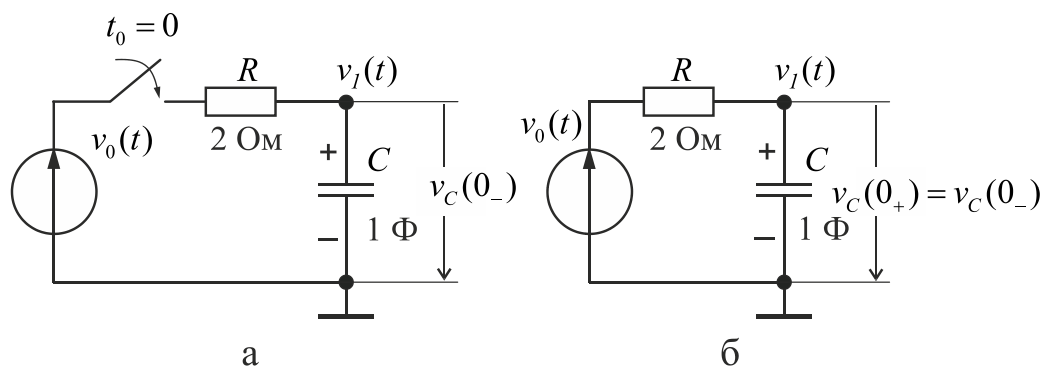


Рис. 1. Формування післякомутаційної схеми

Нехай безпосередньо до комутації, тобто у момент часу $t = 0_-$ ¹¹⁾, конденсатор з ємністю C вже був заряджений до деякої напруги $v_C(0_-)$. В момент комутації напруга (чи заряд $q_C = C \cdot v_C$) на ємнісному елементі не можуть змінитися стрибком (закон комутації), тобто у момент часу безпосередньо після комутації $t = 0_+$ матимемо $v_C(0_+) = v_C(0_-) = v_C(0)$. Після комутації відбувається перехідний процес – перехід кола з одного усталеного стану до іншого. При цьому напруга на конденсаторі змінюється, починаючи з $v_C(0_+) = v_C(0_-)$.

¹⁰⁾ Комутація вихідних сигналів датчиків фізичних величин, що досліджуються, є основним режимом роботи в багатоканальних вимірювальних системах з комутатором.

¹¹⁾ Знакові індекси означають наближення до нульового моменту часу зліва ($t = 0_-$) чи справа ($t = 0_+$).

Схема кола після комутації зображена на рис. 1,б. Стан кола після комутації описується диференціальним рівнянням, яке може бути складене, наприклад, за першим законом Кірхгофа для струмів у вузлі $v_1(t)$:

$$\frac{v_0(t) - v_1(t)}{R} = C \frac{dv_1(t)}{dt},$$

$$\frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_1(t) = \frac{1}{RC} v_0(t), \quad (1)$$

де враховано те, що $v_1(t) \triangleq v_C(t)$ і $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$.

Для лінійних кіл діє принцип накладання (суперпозиції). Повний розв'язок ЛНДР (1) (тобто, перехідна реакція кола) дорівнює сумі його часткового розв'язку та повного розв'язку ЛОДР, знайденого шляхом заміни правої частини (1) на нуль, та може бути представлений у вигляді суми двох процесів:

$$v_1(t) = v_1^{(\text{вим})}(t) + v_1^{(\text{в})}(t) \quad (2)$$

де $v_1^{(\text{вим})}(t)$ – *вимушена* складова перехідного процесу (*частковий* розв'язок ЛНДР); $v_1^{(\text{в})}(t)$ – *вільна* складова (*повний* розв'язок ЛОДР).

Знайдемо вільну складову. Для цього розглянемо ЛОДР:

$$\frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_1(t) = 0 \quad (3)$$

Розв'язок ЛОДР зі сталими коефіцієнтами, згідно з *методом Ейлера*, шукатимемо у вигляді:

$$v_1(t) = A e^{st}, \quad (4)$$

де A – стала інтегрування. Після підстановки (4) в рівняння (3), матимемо:

$$A s e^{st} + \frac{1}{RC} A e^{st} = 0, \quad A e^{st} \cdot \left(s + \frac{1}{RC}\right) = 0. \quad (5)$$

Звідси, якщо $A e^{st} \neq 0$, то

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \quad (6)$$

– характеристичне рівняння кола. Корінь рівняння

$$s = -1/RC \quad (7)$$

– зветься ще характеристичною або власною частотою кола.

З (5) випливає, що вираз (4) є розв'язком (3), якщо величина s в ньому дорівнює кореню характеристичного рівняння (6). Отже, розв'язок (3) буде:

$$v_1^{(B)}(t) = A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (8)$$

У загальному випадку, повна перехідна реакція кола першого порядку завжди матиме вигляд:

$$v_1(t) = v_1^{(ВИМ)}(t) + A \cdot e^{-\alpha t} \quad (9)$$

де α – коефіцієнт загасання (визначається коренем характеристичного рівняння), має розмірність частоти: $[\alpha] = \text{с}^{-1} = \text{Гц}$; величина $\tau = 1/\alpha$, що має розмірність часу, зветься сталою часу. Для RC -кола стала часу дорівнює $\tau = RC$ ($[\tau] = \text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{с}$).

Вимушена складова. Згідно з методом невизначених коефіцієнтів для ЛНДР з правої частиною спеціального виду, вигляд $v_1^{(ВИМ)}(t)$ є таким, як вигляд діючої функції. Наприклад, якщо на деякому інтервалі часу вхідні сигнали ЛПЧ-кола пропорційні деякої експоненціальної функції часу e^{st} , $t \geq t_0$ (s може бути комплексним), то всі реакції (струми та/або напруги) кола на цьому інтервалі часу будуть мати ту ж форму (будуть пропорційними тій же функції часу e^{st} , $t \geq t_0$). Отже, якщо вхідний сигнал експоненціальний, то частковий розв'язок ЛНДР шукатимемо у вигляді $V_1 e^{st}$.

Підключення до джерела постійної напруги

Припустимо, що вхідний сигнал $v_0(t)$ – постійна напруга, тобто $v_0(t) = V_0 = \text{const}$, $t \geq 0$ ($v_0(t) = 0$ при $t < 0$). Такий сигнал можна розглядати як частковий випадок експоненціального сигналу:

$$v_0(t) = V_0 \cdot e^{st} \Big|_{s=0}, t \geq 0. \quad (10)$$

Як наслідок, реакцію кола також можна представити у вигляді:

$$v_1^{(\text{вим})}(t) = V_1 e^{st} \Big|_{s=0} = V_1 = \text{const}, t \geq 0. \quad (11)$$

Підставляючи (10) та (11) в (1), одержимо частковий розв'язок ЛНДР (вимушена складова або *усталена* реакція кола на вхідний сигнал):

$$v_1^{(\text{вим})}(t) = V_1 = V_0 = \text{const}, t \geq 0. \quad (12)$$

Тоді повний розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді:

$$v_1(t) = v_1^{(\text{вим})}(t) + v_1^{(\text{в})}(t) = V_0 + Ae^{-t/RC}, t \geq 0. \quad (13)$$

Нехай початкові умови не нульові – напруга на конденсаторі безпосередньо до комутації $v_C(0_-) \neq 0V$. Оскільки напруга на конденсаторі в момент підключення джерела сигналу (комутації) не може змінитися стрибком, то безпосередньо після комутації $v_C(0_+) = v_C(0_-)$. Отже, враховуючи те, що вихідна напруга це напруга на конденсаторі $v_1(t) \triangleq v_C(t)$, початкові умови наступні $v_1(0) = v_C(0_-)$. Підставляючи початкове значення напруги в (13) при $t = 0$, одержимо значення константи A :

$$A = v_C(0) - V_0. \quad (14)$$

Таким чином, повний розв'язок ЛНДУ (1) матиме вигляд:

$$v_1(t) = V_0 + [v_C(0) - V_0] \cdot e^{-t/RC}, t \geq 0. \quad (15)$$

Перша складова в (15) – *вимушена складова*, яка визначає усталене значення перехідної напруги, друга – *вільна складова* перехідної напруги, яка з часом затухає.

Вираз (15) можна записати в іншому вигляді:

$$v_1(t) = V_0 \cdot [1 - e^{-t/RC}] + v_C(0) \cdot e^{-t/RC} = v_{\text{CРНУ}}(t) + v_{\text{CРНД}}(t), t \geq 0.$$

Перший доданок – перехідна реакція кола на дію вхідного сигналу за *нульових початкових умов* (РНУ-реакція), а другий – реакція на *нульову зовнішню дію* (РНД-реакція), але за *ненульових початкових умов*.

Тривалість перехідного процесу. Напруга чи струм, якщо вони змінюються за експоненціальним законом, досягають рівня усталеного значення (стосовно до перепаду вихідної напруги) з відносною похибкою встановлення γ , тобто рівня, який відрізняється від усталеного значення перепаду на $\Delta_\gamma = \Delta_0 \cdot \gamma$, де Δ_0 – величина перепаду відносно початкового стану, наприклад, в виразі (15) це $\Delta_0 = [V_0 - v_C(0)]$, за час:

$$t_{\text{уст.}/\gamma=0,1} = -\tau \cdot \ln|\gamma|. \quad (16)$$

Отже, якщо $\gamma = 0,1$, то

$$t_{\text{уст.}/\gamma=0,1} = 2,3 \cdot \tau.$$

Аналіз у середовищі Mathcad

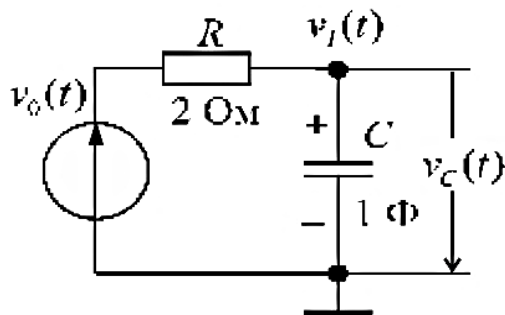
Фрагмент документа Mathcad з прикладом обчислення реакції $v_1(t)$ кола, що на рис. 1, на сигнал $v_0(t) = V_0 = \text{const}$, $t \geq 0$, $V_0 = 1\text{В}$ ($v_0(t) = 0$ при $t < 0$) за умови, що початкова напруга на конденсаторі $v_C(0) = -0,5\text{В}$, наведено на рис. 2.

В прикладі застосована функція чисельного розв'язку одиноких диференційних рівнянь `odesolve(x,b,[число кроків])`, яка повертає розв'язок диференційних рівнянь, описаних в блоці `Given`, за заданих початкових умов і кінці інтервалу інтегрування b . Функція `odesolve` використовується в складі обчислювального блоку, що відкривається директивою `Given`. В ньому перед функцією задаються початкові умови і саме рівняння. Хоч аналітичний вираз функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, не виводиться, з нею можна виконувати деякі математичні перетворення, наприклад, диференціювання.

Приклад 1

Реакція RC-кола на підключення до джерела постійної напруги

(розв'язок диференціального рівняння за допомогою блока Given і функції odesolve)



R := 2ohm

C := 1F

v0(t) := 1volt - вхідна напруга

Розв'язок

Given

$$v1(t) + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} v1(t) = v0(t) \quad \text{- рівняння}$$

$$v1(0) = -0.5 \quad \text{- початкові умови}$$

$$v1 := \text{odesolve}(t, 20, 2000) \quad \text{- розв'язок}$$

$$ic(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} v1(t) \right)$$

odesolve(x,b[,step]) - Returns a function of x which is the solution to a single ordinary differential equation. Odesolve must be preceded by the keyword "Given" followed by a differential equation and either initial value or boundary value constraints. b is the terminal point of the integration interval. step (optional) is the number of steps in the interval.

$$t := 0, 0.01 .. 20$$

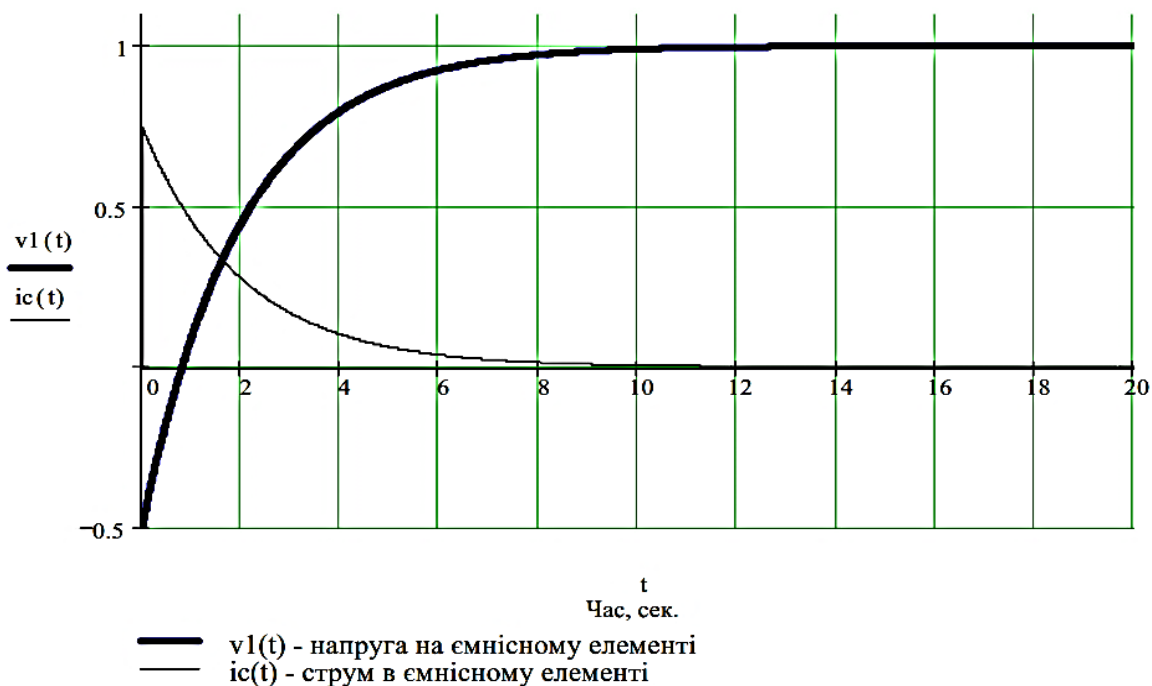


Рис. 2. Підключення RC-кола до джерела постійної напруги

Підключення до джерела гармонічної напруги. Припустимо, що вхідний сигнал $v_0(t) = V_0 \cos(\omega t)$, $t \geq 0$ ($v_0(t) = 0$ при $t < 0$).

Знайдемо вимушену складову. Не дивлячись на те, що такий сигнал зовні не має експоненціальний вигляд $v_0(t) = V_0 \cdot e^{st}$, його, згідно з формулою Ейлера, можна подати як суму двох експоненціальних функцій часу $V_0 \cos(\omega t) = \frac{V_0}{2} e^{j\omega t} + \frac{V_0}{2} e^{-j\omega t}$ та шукати розв'язок для них.

Можливий інший шлях. З урахуванням $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$, матимемо $\cos(\omega t) = \operatorname{Re}[e^{j\omega t}]$. Таким чином, оскільки коло на рис. 1 лінійне та інваріантне у часі, частковий розв'язок (1) можна знайти як реакцію кола на сигнал $v_0(t) = V_0 \cdot e^{j\omega t}$, а потім виділити дійсну частину реакції. Тобто, розглядатимемо рівняння, де замість $v_0(t) = V_0 \cos(\omega t)$ в правій частині стоїть $v_0(t) = V_0 \cdot e^{j\omega t}$:

$$\frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_1(t) = \frac{1}{RC} V_0 e^{j\omega t}. \quad (17)$$

Частковий розв'язок шукаємо у вигляді $v_1(t) = V_1 e^{j\omega t}$. Тоді маємо:

$$(j\omega)V_1 e^{j\omega t} + \frac{1}{RC} V_1 e^{j\omega t} = \frac{1}{RC} V_0 e^{j\omega t},$$

$$V_1 = \frac{V_0}{1 + j\omega RC}. \quad (18)$$

Як наслідок, реакцію $v_1(t)$ можна записати у вигляді:

$$v_1(t) = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{1 + j\omega RC} = H(j\omega) \cdot V_0 e^{j\omega t}, \quad (19)$$

де $H(j\omega) = 1/(1 + j\omega RC)$ – комплексна частотна характеристика (або комплексна частотна функція) кола.

Ураховуючи те, що $H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j \arg H(j\omega)}$, де $|H(j\omega)| = 1/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ – модуль частотної характеристики (АЧХ – амплітудно-частотна характеристика

кола); $\arg H(j\omega) = -\arctg(\omega RC)$ – аргумент частотної характеристики (ФЧХ – фазо-частотна характеристика кола), ustalена реакція кола на вхідний сигнал $v_0(t) = V_0 \cos(\omega t) = \operatorname{Re}[V_0 e^{j\omega t}]$, $t \geq 0$ (або вимушена складова) дорівнює:

$$\begin{aligned} v_1^{(\text{вим})}(t) &= \operatorname{Re}[H(j\omega)V_0 e^{j\omega t}] = \\ &= V_0 |H(j\omega)| \cos[\omega t + \arg H(j\omega)], t \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Повна реакція кола (повний розв'язок диференційного рівняння (1)) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_1^{(\text{вим})}(t) + v_1^{(\text{в})}(t) = \\ &= V_0 |H(j\omega)| \cos[\omega t + \arg H(j\omega)] + A e^{-t/RC} = \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos[\omega t - \arctg(\omega RC)] + A e^{-t/RC}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

У виразі (21) вільна складова має такий самий вигляд, як і в першому випадку – підключення до джерела постійної напруги. Значення константи A знаходиться із (21) з урахуванням початкових умов $v_1(t)_{/t=0} = v_C(0)$, отже матимемо:

$$A = v_C(0) - \frac{V_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos[-\arctg(\omega RC)] = v_C(0) - \frac{V_0}{1 + (RC\omega)^2}, \quad (22)$$

де враховано $\cos(\varphi) = 1/\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ (знак величини у правій частині рівності повинен збігатися з знаком функції у лівій частині). Повний розв'язок:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{V_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos[\omega t - \arctg(\omega RC)] + \\ &+ \left[v_C(0) - \frac{V_0}{1 + (RC\omega)^2} \right] e^{-t/RC}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Фрагмент документа Mathcad з прикладом обчислення реакції $v_1(t)$ кола (рис. 1) на сигнал $v_0(t) = V_0 \cos(\omega t)$, $t \geq 0$, де $V_0 = 1$ В, $\omega = 2\pi f$, $f = 1$ Гц (початкова напруга на конденсаторі $v_C(0) = -0,5$ В), з використанням функції `odesolve`, наведено на рис. 3.

Приклад 2

Реакція RC-кола на підключення до джерела гармонічної напруги

(розв'язок диференціального рівняння за допомогою блока Given і функції odesolve)

$f := 1\text{Hz}$ $\omega := 2\pi \cdot f$ $V0 := 1\text{volt}$
 $R := 2\text{ohm}$ $C := 1\text{F}$

$v0(t) := V0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

Розв'язок

Given

$v1(t) + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} v1(t) = v0(t)$ - рівняння

$v1(0) = -0.5$ - початкові умови

$v1 := \text{odesolve}(t, 20, 2000)$ - розв'язок

$ic(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} v1(t) \right)$

$t := 0, 0.01 \dots 20$

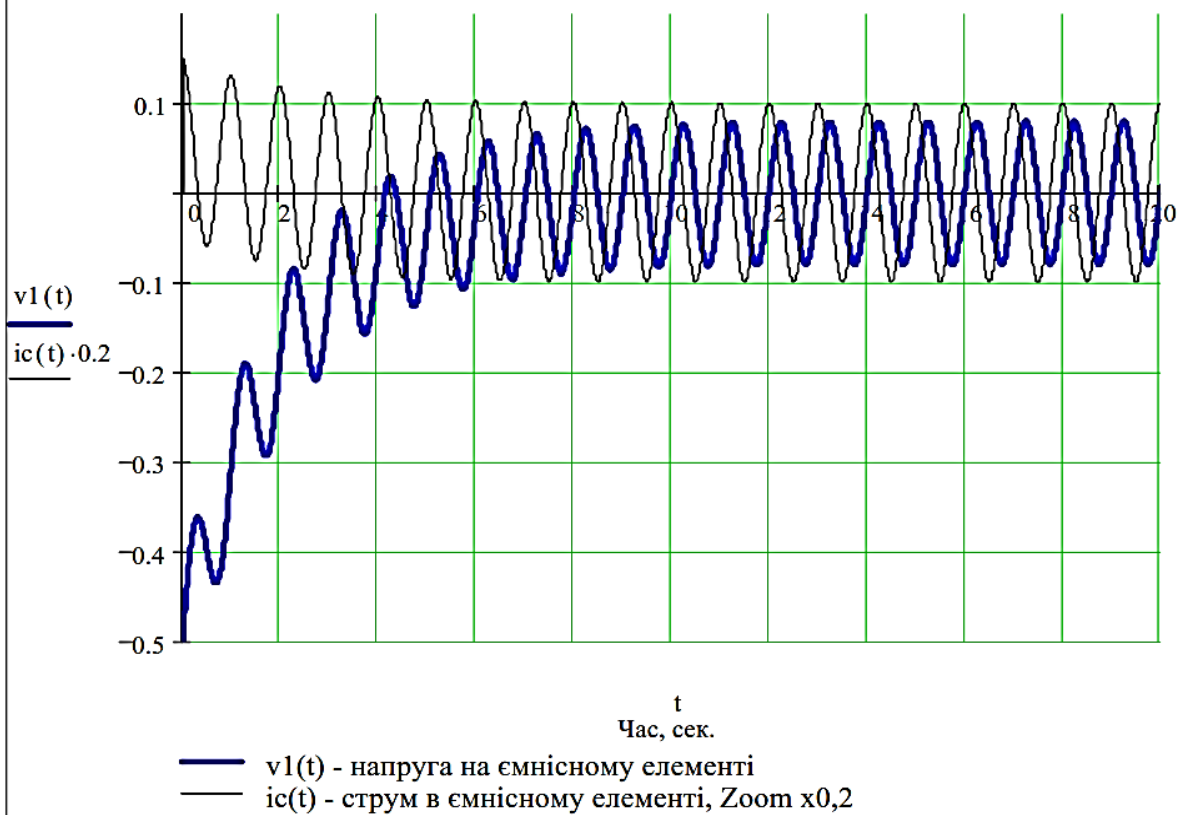


Рис. 3. Підключення RC-кола до джерела гармонічної напруги

Приклад 3

Реакція RC-кола на сигнал типу меандр

(розв'язок диференціального рівняння за допомогою блока Given і функції odesolve)

```
f := 0.5Hz  ω := 2π · f  V0 := 1volt
R := 2ohm  C := 1F
v0(t) := V0 · (sign(sin(ω · t)))  - вплив типу меандр
```

Розв'язок

Given

$v1(t) + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} v1(t) = v0(t)$ - рівняння

$v1(0) = -1$ - початкові умови

$v1 := \text{odesolve}(t, 10, 10000)$ - розв'язок

$ic(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} v1(t) \right)$

$t := 0, 0.01 .. 10$

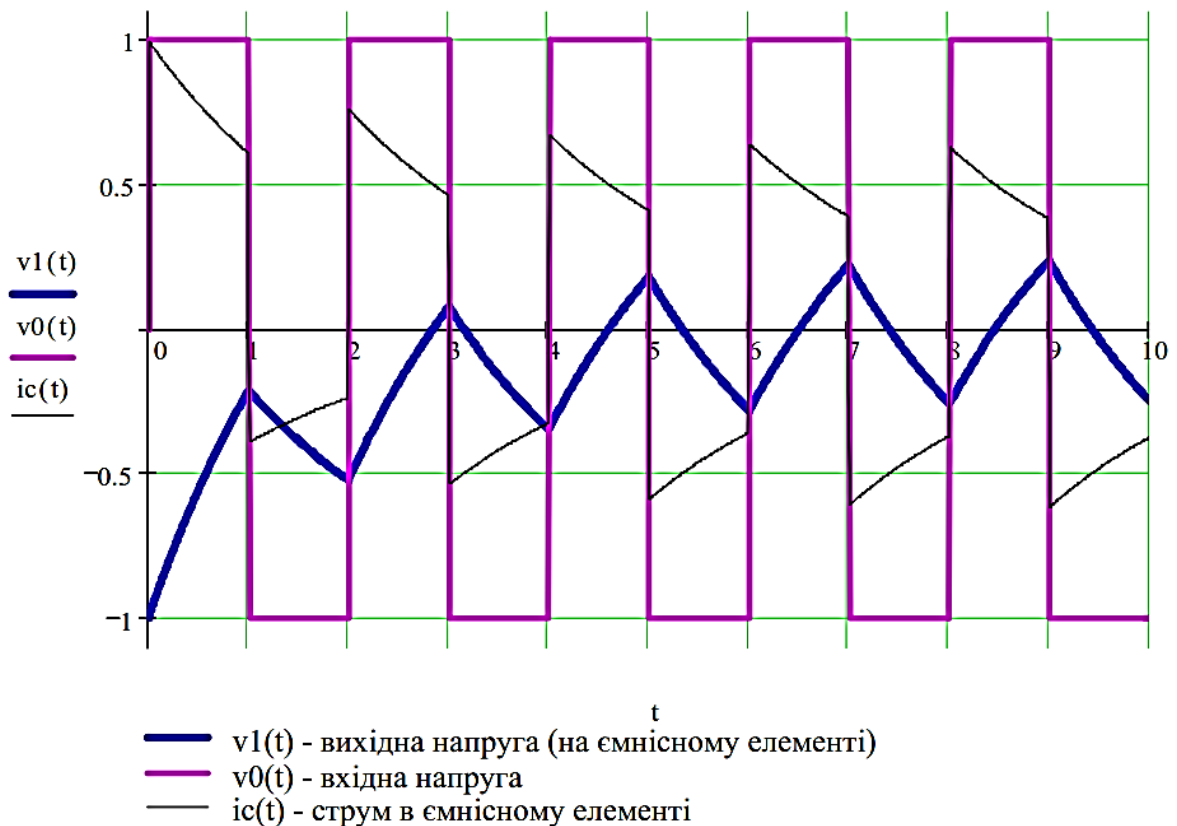


Рис. 4. Перехідна реакція RC-кола на сигнал типу меандр

Приклад 4

Реакція RC-кола на підключення до сигналу типу "модульована" синусоїда

(розв'язок диференціального рівняння за допомогою блока Given і функції odesolve)

$f := 0.5\text{Hz}$ $\omega := 2\pi \cdot f$ $V0 := 1\text{volt}$ $R := 2\text{ohm}$ $C := 1\text{F}$

$$v0(t) := V0 \cdot \text{sign}(\sin(\omega \cdot t)) \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{90 \cdot \pi}{180}\right)$$

Given

Розв'язок

$$v1(t) + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} v1(t) = v0(t) \quad \text{- рівняння}$$

$$v1(0) = -1 \quad \text{- початкові умови}$$

$$v1 := \text{odesolve}(t, 10, 10000) \quad \text{- розв'язок}$$

$$ic(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} v1(t) \right)$$

$$t := 0, 0.001 .. 10$$

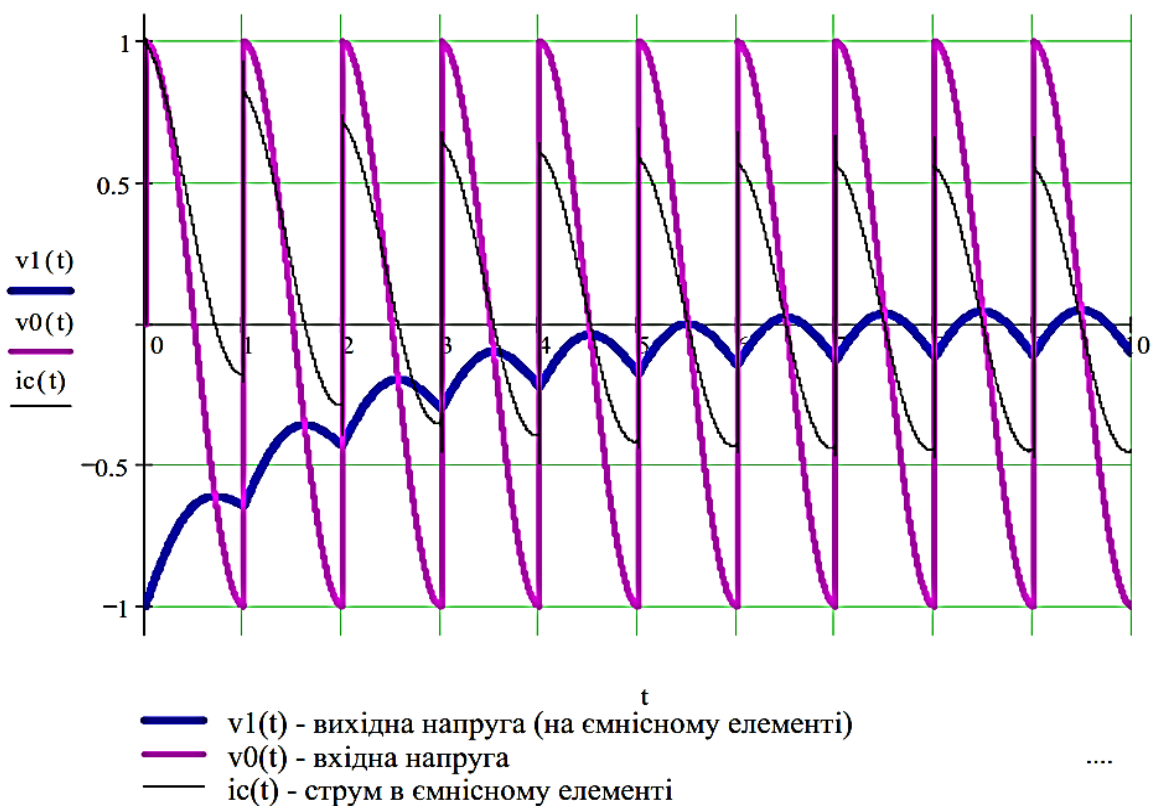


Рис. 5. Перехідна реакція RC-кола на сигнал типу "модульована синусоїда"

Застосування систем комп'ютерної математики, наприклад, таких як Mathcad, значно спрощує аналіз кіл на основі розв'язку диференціальних рівнянь в часовій області, який, зазвичай, виконується чисельними методами. Такий аналіз може бути виконаний для складних сигналів, у загальному випадку довільної форми, коли аналітичний розв'язок НЛДУ ускладнюється необхідністю пошуку вимушеної складової. При застосуванні чисельних методів ніяких обмежень на форму вхідного сигналу практично не існує.

Інтегруючі і диференціюючі кола

Лінійні кола широко використовуються для перетворення форми імпульсних сигналів. Розглянемо використання послідовного RC -кола в якості інтегруючого чи диференціюючого пристрою (рис. 6).

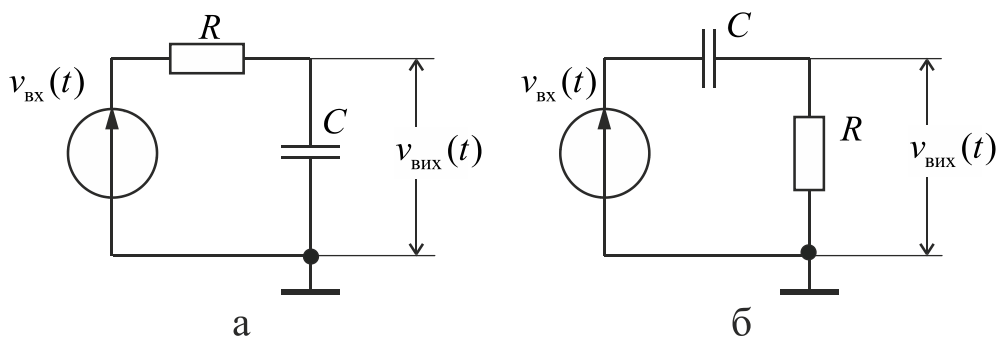


Рис. 6. Послідовне RC -коло для виконання:

а – операції інтегрування; *б* – диференціювання вхідного сигналу

В обох випадках коло описується диференціальним рівнянням першого порядку:

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_{\text{вх}}(t),$$

де $v_R(t) = R \cdot i_C(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt}$.

Інтегруюче коло

Якщо вихідна напруга (рис. 6,а) – це є напруга на конденсаторі $v_{\text{вих}}(t) = v_C(t)$, то одержимо інтегруюче коло. Якщо стала часу кола настільки

велика, що виконується $RC \left| \frac{dv_C(t)}{dt} \right| \gg |v_C(t)|$, то одержимо:

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} \approx v_{\text{вх}}(t), \Rightarrow v_{\text{вих}}(t) = v_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_{\text{вх}}(\lambda) d\lambda. \quad (24)$$

Коло з такими властивостями часто називають *інтегруючим* колом. Чим більша стала часу кола, тим якісніше виконується операція інтегрування.

Інтегруючі кола дають змогу перетворювати перепади напруги у вигляді стрибка в лінійно змінюючу напругу, а також заглушувати високочастотні складові в спектрі вхідного сигналу; тому їх часто використовують як згладжуючі фільтри.

Диференціююче коло

Інші властивості має коло, якщо вихідний сигнал – це є напруга на резисторі (рис. 6,б):

$$v_{\text{вих}}(t) = v_R(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{v_R(t)}{RC}.$$

Запишемо диференціальне рівняння кола декілька інакше:

$$v_R(t) + v_C(t) = v_{\text{вх}}(t); \quad \frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{dv_{\text{вх}}(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{v_R(t)}{RC} = \frac{dv_{\text{вх}}(t)}{dt} \Rightarrow RC \frac{dv_R(t)}{dt} + v_R(t) = RC \frac{dv_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Якщо стала часу настільки мала, що виконується $RC \left| \frac{dv_R(t)}{dt} \right| \ll |v_R(t)|$, то з останнього рівняння можна дістати:

$$v_{\text{вих}}(t) = v_R(t) \approx RC \frac{dv_{\text{вх}}(t)}{dt}. \quad (25)$$

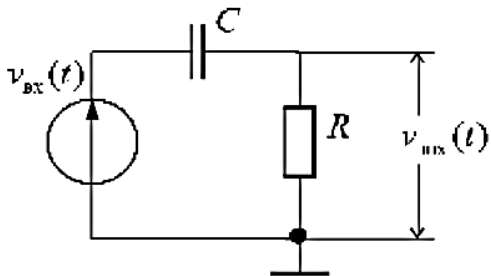
Отже, таке коло виконує операцію приблизного диференціювання. Схемотехнічне використання *диференціюючих* кіл – це загострення імпульсних сигналів, побудова формувачів імпульсних сигналів.

На рис. 7 наведено документ Mathcad з прикладом моделювання диференціюючого кола. Бачимо, що для підвищення якості диференціювання потрібно зменшувати постійну часу кола. Чим повільніше в часі змінюється вхідний сигнал, тим якісніше диференціювання.

Приклад 5

Диференціююче RC-коло

(розв'язок диференціального рівняння за допомогою блока Given і функції odesolve)



$$R := 20000$$

$$C := 0.001 \cdot 10^{-6}$$

$$V0 := 1 \quad f := 1000$$

$$v0(t) := V0 \cdot (\text{sign}(\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)))$$

Розв'язок

- вхідна напруга типу меандр

Given

$$vC(t) + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} vC(t) = v0(t) \quad \text{- рівняння}$$

$$vC(0) = 0 \quad \text{- початкові умови}$$

$$vC := \text{odesolve}(t, 0.002, 10000) \quad \text{- розв'язок відносно напруги на конденсаторі}$$

$$vR(t) := v0(t) - vC(t) \quad \text{- вихідна напруга диференціюючого кола:}$$

$$t := 0, 0.000001 \dots 0.002$$

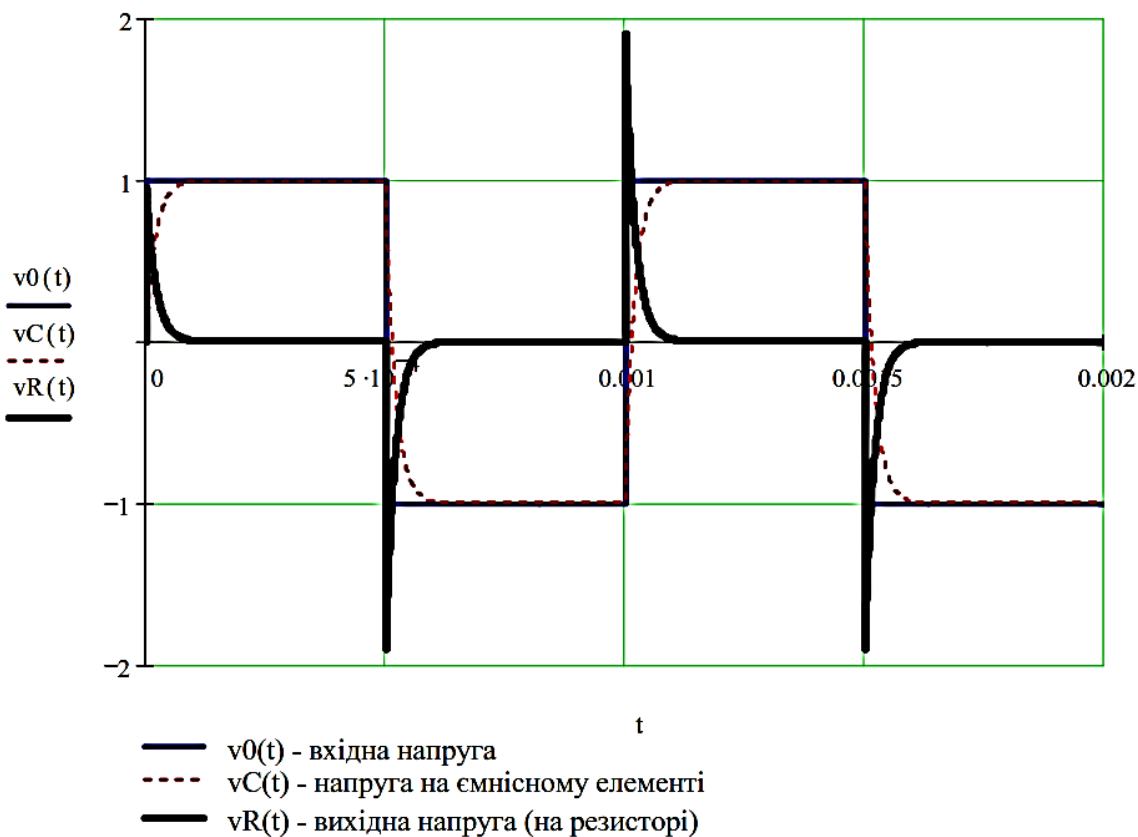


Рис. 7. Диференціювання вхідного сигналу

Аналіз кіл на операційних підсилювачах

Приклад 6

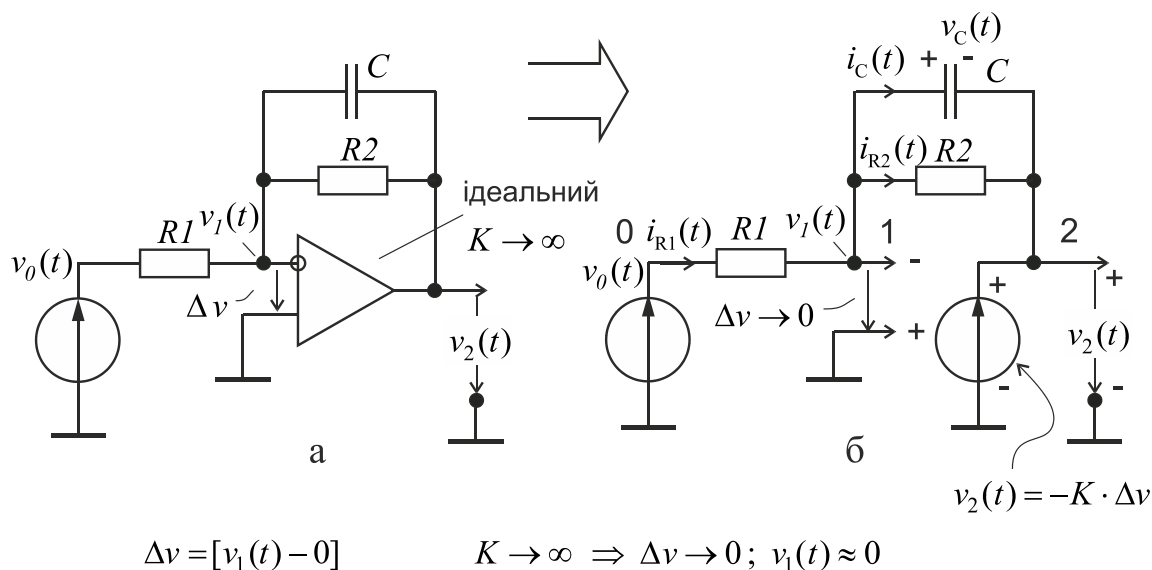


Рис. 8. Коло на операційному підсилювачі (а) та його еквівалентна схема (б)

Диференціальні рівняння зручніше складати відносно однієї із змінних стану, таких як напруга на ємнісному елементі чи струм індуктивного елементу, для яких легко знайти початкову умову.

Додатний напрям відліку напруги між двома точками показують стрілкою. Початок стрілки показує ту точку електричного кола, від потенціалу якої віднімається потенціал іншої точки (кінець стрілки). Додатний напрям відліку струму також показують стрілкою. Хоч вибір додатного напрямку струму може бути довільним, перевагу віддають узгодженому вибору додатних напрямів напруги і струму між одними й тими самими точками.

Розглянемо випадок, коли операційний підсилювач (ОП) – не ідеальний, $K \neq \infty$. Вважаймо, що вхідний опір окремих входів ОП $R_{\pm} \rightarrow \infty$, струм не тече. Так за першим законом Кірхгофа для струмів у вузлі 1 (рис. 8,б) одержимо:

$$\frac{v_0(t) - v_1(t)}{R_1} = C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_2},$$

де враховано $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$. Напруга у вузлі 1 дорівнює¹²⁾:

$$v_1(t) = v_2(t) + v_C(t).$$

Використовуючи *компонентне рівняння* ідеального операційного підсилювача, моделлю якого є джерело напруги $v_2(t)$, кероване напругою Δv

$$\begin{aligned} v_2(t) &= -\Delta v \cdot K = -[v_1(t) - 0] \cdot K = \\ &= -v_1(t) \cdot K, \end{aligned}$$

для напруги в вузлі 1 одержимо $v_1(t) = -v_1(t) \cdot K + v_C(t)$.

Звідси випливає:

$$v_1(t) = \frac{v_C(t)}{1 + K}.$$

Якщо останній вираз підставимо в перше рівняння, то одержимо диференціальне рівняння кола:

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \cdot \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1(1 + K)} \right] = \frac{v_0(t)}{R_1}.$$

Якщо ОП *ідеальний*, тобто $K \rightarrow \infty$, то перехід до границі остаточно дає:

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} \cdot v_C(t) = \frac{v_0(t)}{R_1}. \quad (26)$$

Напруга в вузлі 1 прямує до нуля. Так дійсно, якщо $K \rightarrow \infty$, то $\Delta v \rightarrow 0$, де $\Delta v = v_1(t) - 0$. Відповідно $v_1(t) \approx 0$. Отже, напруга в вузлі 1 – це так звана "*віртуальна*" земля. Вихідна напруга в вузлі 2 дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v_1(t) - v_C(t) = \\ &= 0 - v_C(t) = -v_C(t). \end{aligned} \quad (27)$$

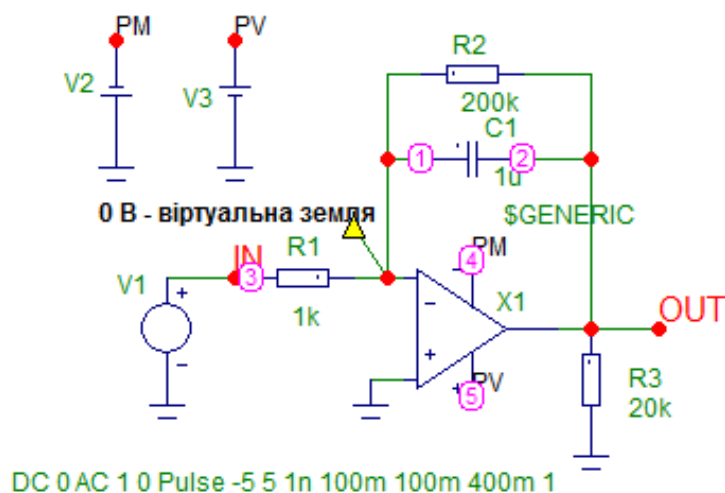
¹²⁾ Як відомо, додатний напрям відліку напруги між двома точками показують стрілкою або позначками "+" і "-". Позначка "+" (початок стрілки) показує ту точку електричного кола, від потенціалу якої віднімається потенціал іншої точки, відміченою позначкою "-" (кінець стрілки). Додатний напрям відліку струму також показують стрілкою. Хоч вибір додатного напрямку струму може бути довільним, перевагу віддають узгодженому вибору додатних напрямів напруги і струму між одними й тими самими точками.

Отже, якщо, розв'язуючи диференціальне рівняння (26), знайдемо напругу на ємнісному елементі $v_C(t)$, то за формулою (27) знайдемо і вихідну напругу схеми $v_2(t)$.

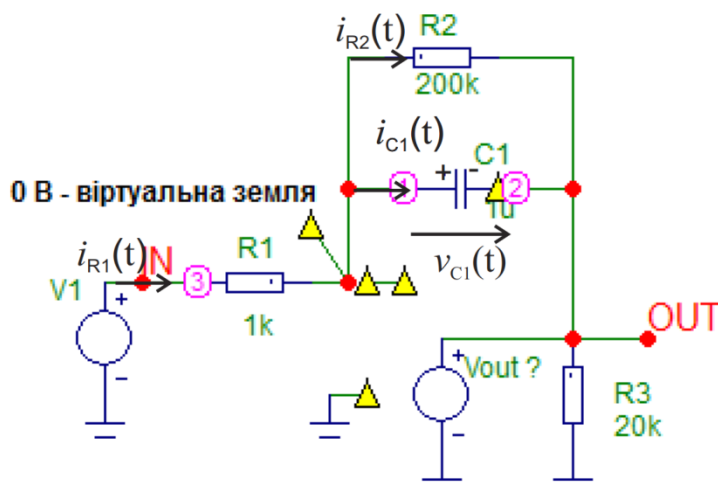
* * *

Приклад 7

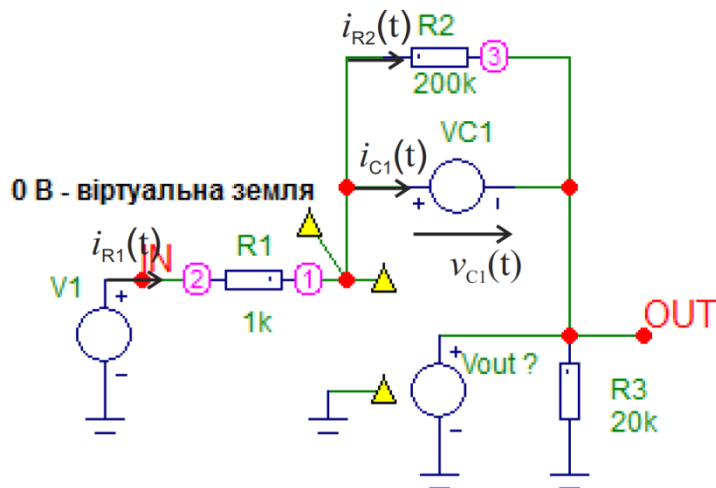
Вважаймо, що ОП – *ідеальний*, $K \rightarrow \infty$. Вхідний опір окремих входів ОП $R_{\pm} \rightarrow \infty$, струм не тече.



1. ОП замінюємо його моделлю – кероване джерело напруги V_{out} (керується різницею $V_+ - V_- \approx 0$). Завдамо напрямки струмів:



2. Еквівалентна схема заміщення для миттєвих струмів та напруг:



Джерело напруги VC1 – замінює ємність C1 за миттєвим значенням напруги на ємності C1 і за тим самим струмом через ємність.

3. За законом Кірхгофа для струмів у вузлі 1:

$$i_{R1}(t) = i_{C1}(t) + i_{R2}(t);$$

де $i_{C1}(t) = C_1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$. Звідки

$$\frac{V_{in} - 0}{R_1} = C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} + \frac{V_{C1}}{R_2}.$$

4. Звідки, диференційне рівняння електричного кола першого порядку:

$$\frac{dV_{C1}}{dt} + \frac{V_{C1}}{C_1 R_2} = \frac{V_{in}(t)}{C_1 R_1}.$$

5. В середовищі Mathcad, використовуючи стандартну процедуру типу `odesolve(x,b,[число кроків])`, яка повертає розв'язок диференційних рівнянь, описаних в блоці `Given`, за заданих початкових умов і кінці інтервалу інтегрування `b`, знаходимо $v_{C1}(t)$.

6. Знаходимо вихідну напругу:

$$V_{out} = -V_{C1}.$$

* * *

Аналіз у середовищі програми Micro-CAP

Далі покажемо, як аналогічний аналіз здійснюється в середовищі Micro-CAP. Наведемо приклад аналізу кола, що на рис. 1, для двох видів вхідного сигналу. Початкова напруга на конденсаторі $v_C(0) = -0,5$ В.

Складемо схему для моделювання (рис. 9). Перехід до аналізу в часовій області здійснюється вибором в меню команд **Analysis** режиму **Transient ... (Alt+1)**. У вікні **Transient Analysis Limits** (Рис. 10) треба встановити необхідні параметри моделювання.

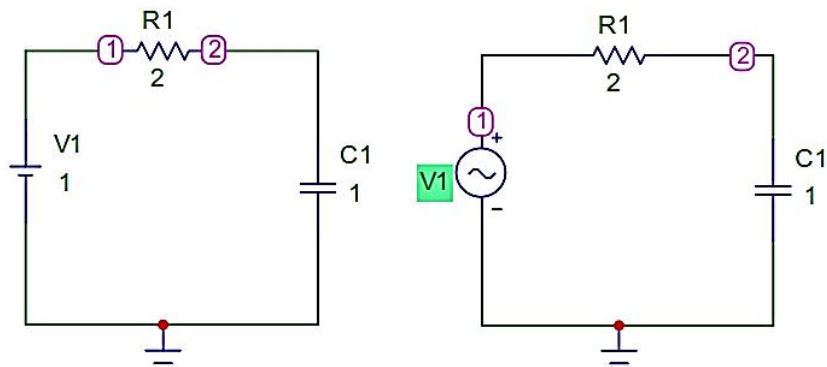
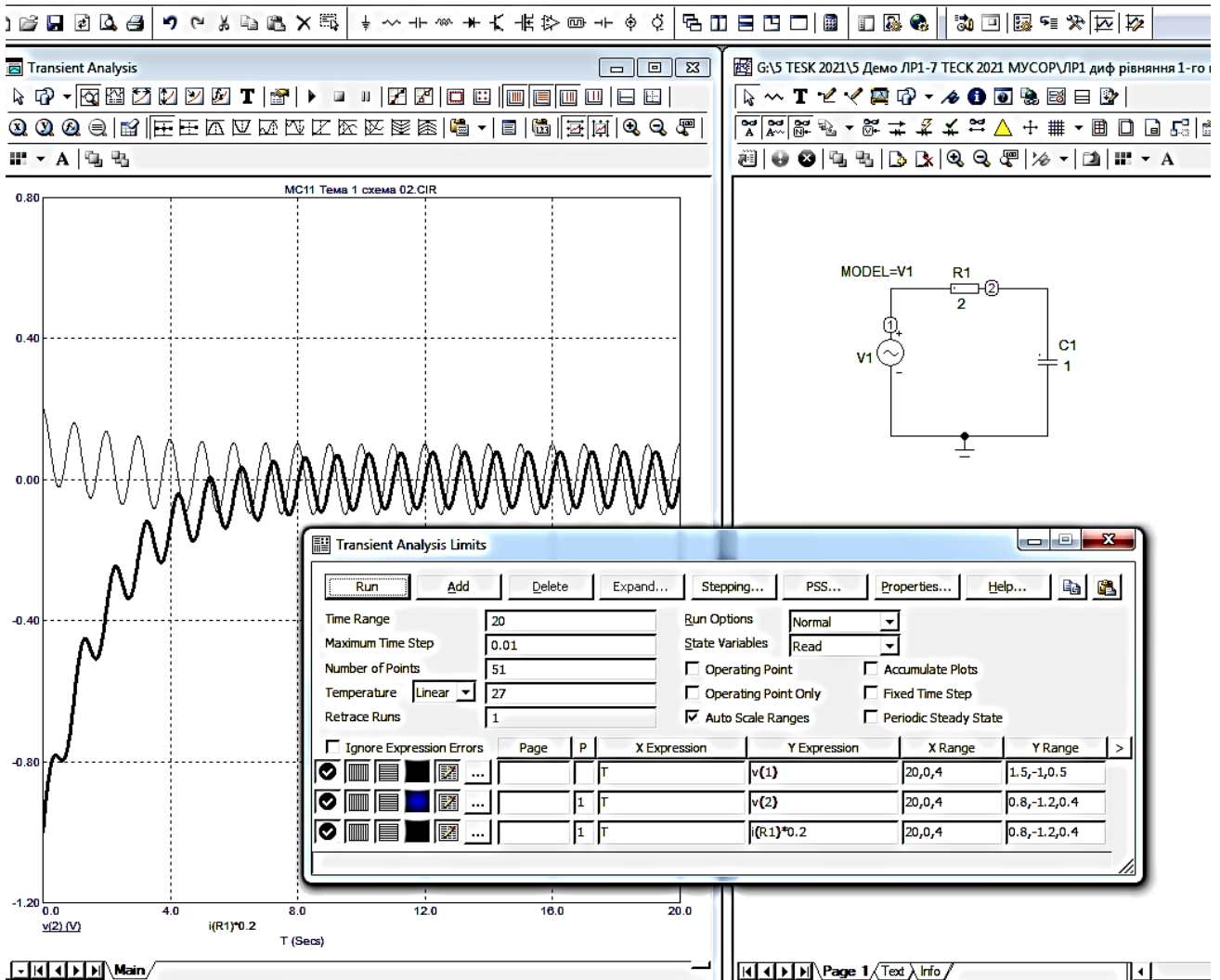
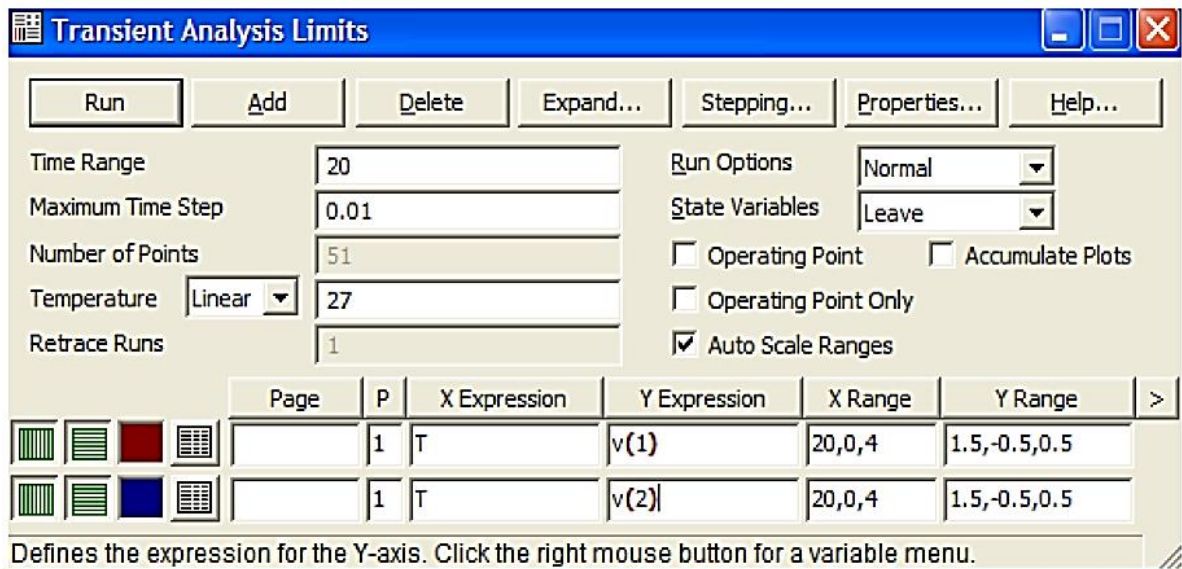


Рис. 9. Схеми моделювання для двох видів сигналу



a)



б)

Рис. 10. Задання параметрів моделювання у вікні **Transient Analysis Limits**:

а) – Micro-CAP 11; б) – Micro-CAP 9

Для встановлення початкових умов (напруга на конденсаторі $v_C(0) = -0,5 \text{ В}$) треба відключити опцію **Operation Point**. В опції **State Variables** встановити режим **Leave** (початкові умови – те, які залишились з попереднього аналізу) або **Read** (початкові умови читає з файлу *.TOP).

В меню **Transient** вибрати **State Variables Editor**, після чого відкривається вікно (рис. 11).

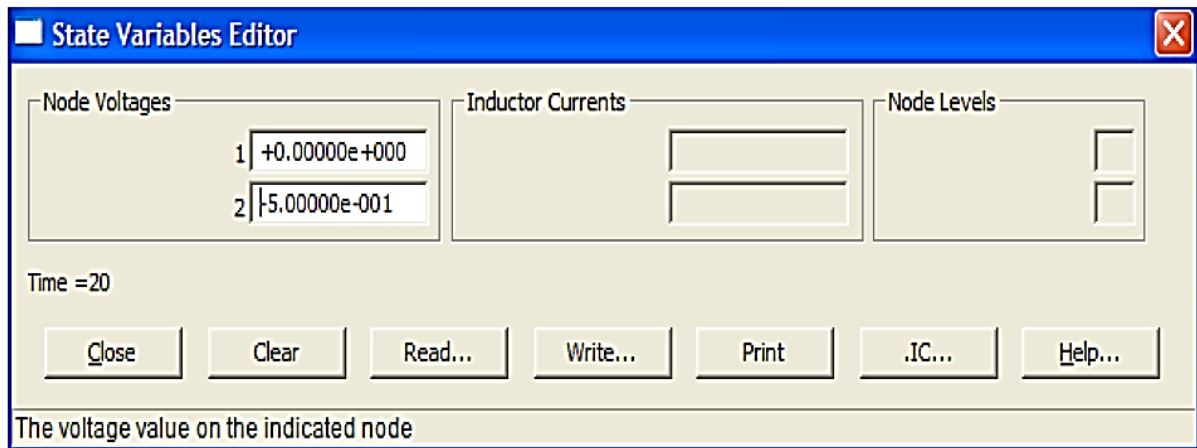


Рис. 11. Задання початкових умов для змінних стану

Кнопкою **Clear** можна встановити всі початкові умови (напруги в полюсах – **Node Voltages**, струми через індуктивні елементи – **Inductor Currents**) нульовими ("скинути" в нуль). Потім встановити початкові умови відповідно завданню. Наприклад, для задання початкового значення $v_C(0) = -0,5 \text{ В}$, в позиції, яка відповідає номеру полюса на конденсаторі, треба встановити відповідне значення напруги, залишаючи інші початкові умови нульовими, потім почати моделювання (кнопка **Run** або клавіша **F2**, або піктограма).

Відзначимо, що, якщо в опції **State Variables** вікна **Transient Analysis Limits** був вибраний режим **Leave**, то після закінчення моделювання цифри у позиціях **Node Voltages** та **Inductor Currents** відповідатимуть напругам у полюсах та струму через індуктивні елементи через інтервал часу, значення якого встановлено в позиції **Time Range**. Саме ці значення будуть сприйматися як початкові умови при моделюванні наступного разу. Тобто, *початкові умови треба задавати щоразу знову*.

Щоб можна було використовувати одні і ті самі початкові умови кожного разу при моделюванні, треба у вікні **Transient Analysis Limits** в опції **State Variables** треба встановити режим **Read** (режим читання початкових умов із файлу). Але поперед у вікні **State Variables Editor** треба встановити потрібні початкові умови та записати їх (**Write ...**) у файл (має розширення *.TOP).

Результати моделювання реакції кола, що на рис. 9, для двох видів вхідного сигналу (початкова напруга на конденсаторі $v_C(0) = -0,5 \text{ В}$) в режимі **Transient Analysis** наведено на рис. 12.

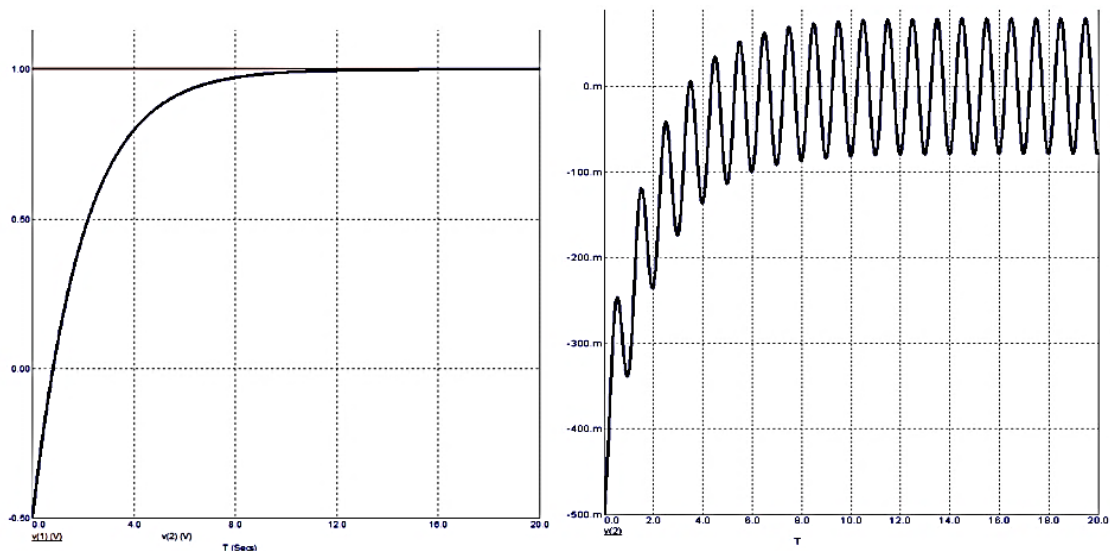


Рис. 12. Моделювання реакції RC -кола у часовій області

Бачимо, що результати моделювання збігаються з результатами аналізу в середовищі Mathcad.

Контрольні запитання та завдання

1. Що є причиною перехідних процесів? Що таке початковий стан електричного кола? Дайте визначення усталеного і перехідного режимів.
2. До якого типу диференціальних рівнянь відносяться рівняння, які описують перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами? Які методи розв'язку існують для таких рівнянь?
3. Що таке лінійне інваріантне в часі електричне коло?
4. Що таке залежні та незалежні початкові умови?

5. *За якою схемою визначаються початкові умови?*
6. *Що таке післякомутаційна схема електричного кола?*
7. *Поясніть суть "класичного" методу аналізу перехідних процесів в електричних колах. Метод Ейлера.*
8. *Поясніть, що таке власна реакція кола або вільна складова і чим вона обумовлена? Поясніть, як визначають вигляд вільної складової перехідної реакції.*
9. *Назвіть спосіб визначення характеристичного рівняння.*
10. *Поясніть, що таке вимушена складова або усталена реакція кола?*
11. *У якій формі шукається усталена реакція кола при експоненціальних зовнішніх впливах? Наведіть приклади.*
12. *Наведіть приклади обчислення сталої інтегрування для кіл першого порядку.*
13. *Наведіть схеми класичних послідовних інтегруючих і диференціюючих RC– та RL–кіл першого порядку та запишіть їх диференціальні рівняння.*
14. *Наведіть графіки перехідних струму та напруги на елементах послідовного RC–кола першого порядку при комутації джерела постійної напруги.*
15. *Наведіть графіки перехідних струму та напруги на елементах послідовного RL–кола першого порядку при комутації джерела постійного сигналу.*
16. *Дайте визначення сталої часу та поясніть її фізичний зміст.*
17. *За якою формулою обчислюють тривалість перехідного процесу в електричному колі з однією сталої часу?*

Лекція 4. Класичний метод аналізу. Лінії кола другого порядку

Класичний метод. Перехідні процеси в колах другого порядку. Послідовний коливальний контур. Підключення до джерела постійної напруги. Метод Ейлера. Вимушена складова. Вільна складова. Повний розв'язок ЛНДР. Підключення до джерела гармонічної напруги. Вимушена складова. Повний розв'язок. Паралельний коливальний контур. Зведення одиночного диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи n ЗДР першого порядку. Приклади аналізу у середовищі Mathcad. Розв'язок одиночних диференціальних рівнянь n -го порядку, систем n диференціальних рівнянь першого порядку в Mathcad. Контрольні запитання та завдання.

1. Класичний метод.

Перехідні процеси в колах другого порядку

Проведемо дослідження перехідних процесів класичним методом у колах другого порядку на прикладах послідовного і паралельного коливальних контурів.

1.1. Послідовний коливальний контур

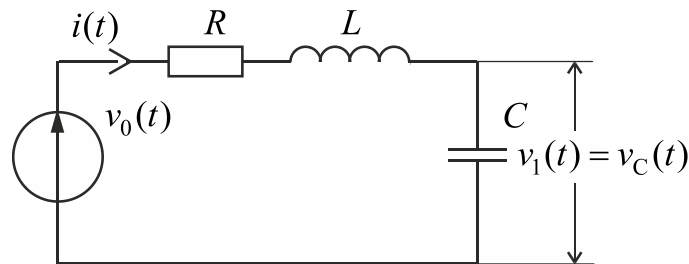


Рис. 1. Класична схема послідовного коливального контуру

Використовуючи основні компонентні рівняння, за другим законом Кірхгофа можна скласти для контуру рівняння:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_C(0) = v_0(t).$$

З урахуванням рівнянь

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}; \quad v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_C(0),$$

одержимо ЛНДР другого порядку відносно напруги $v_C(t)$:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{LC} v_0(t). \quad (1)$$

Якщо вивчаються властивості кола як резонансної системи, то зручніші наступні форми:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2\alpha_k \frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 v_C(t) = \omega_{\text{рез}}^2 v_0(t), \quad \alpha_k = \frac{R}{2L}; \quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

або

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} \frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 v_C(t) = \omega_{\text{рез}}^2 v_0(t), \quad (2)$$

де $2\alpha_k = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} \Rightarrow Q_{\text{пл}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\alpha_k} = \omega_{\text{рез}} \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$; α_k – коефіцієнт згасання;

$Q_{\text{пл}}$ – добротність; $\omega_{\text{рез}}$ – частота резонансу коливального контуру.

Підключення до джерела постійної напруги

$$v_0(t) = E_0; \quad t \geq 0:$$

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{LC} E_0. \quad (3)$$

Вважатимемо, що до підключення джерела напруги (момент комутації) контур перебуває в стані спокою, тобто струм через індуктивний елемент $i_L(0_-) = 0$ та напруга на конденсаторі $v_C(0_-) = 0$ (нульові початкові умови). За класичним методом повний розв'язок ЛНДР (3) шукаємо у вигляді суми вимушеної і вільної складових:

$$v_1(t) = v_C(t) = v_C^{(\text{вим})}(t) + v_C^{(\text{в})}(t).$$

Вимушена складова

Теоретично через деякий достатньо великий проміжок часу після комутації, перехідні процеси в контурі завершаться. В ньому встановиться режим постійного сигналу, за якого усталений струм у контурі, напруга на резистивному та індуктивному елементах дорівнюватиме нулю, а усталена напруга на ємнісному елементі дорівнюватиме $v_C(\infty) = v_0(\infty) = E_0$. Тобто, вимушена складова:

$$v_C^{(внм)}(t) = E_0.$$

Вигляд вільної складової $v_C^{(в)}(t)$ та її параметри визначаються коренями характеристичного рівняння кола.

Вільна складова

Розглянемо ЛОДР:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = 0. \quad (4)$$

Розв'язок (4), згідно з *методом Ейлера*, шукатимемо у вигляді Ae^{st} . Після підстановки у (4), дістанемо:

$$Ae^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right) = 0.$$

Якщо $Ae^{st} \neq 0$, то дістанемо:

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0. \quad (5)$$

Корені *характеристичного* рівняння (5) дорівнюють:

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}; \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad (6)$$

або $s_1 = -\alpha_k + \sqrt{\alpha_k^2 - \omega_{рез}^2}$; $s_2 = -\alpha_k - \sqrt{\alpha_k^2 - \omega_{рез}^2}$. Отже, Ae^{st} є частковим розв'язком рівняння (4), якщо величина s в ньому дорівнює одному з коренів рівняння (5).

Примітка. Можливі наступні випадки:

1. Корені s_1 і s_2 дійсні, різні та від'ємні, якщо $D = R^2/4L^2 - 1/LC > 0$ (або $\alpha_k > \omega_{рез}$, $Q < 1/2$). У цьому випадку повний розв'язок ЛОДР (вільна складова) є сумою двох експонент:

$$v_C^{(в)}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (7)$$

коефіцієнти згасання яких $\alpha_1 = s_1 = -\alpha_k + \sqrt{\alpha_k^2 - \omega_{рез}^2}$, $\alpha_2 = s_2 = -\alpha_k - \sqrt{\alpha_k^2 - \omega_{рез}^2}$. Вільна складова має *апериодичний* характер.

2. Корені s_1 і s_2 дійсні, від'ємні та однакові ($s_1 = s_2 = -\alpha_k$), якщо $D = R^2/4L^2 - 1/LC = 0$ (або $\alpha_k = \omega_{рез}$, $Q = 1/2$). У цьому випадку вільна складова має вигляд:

$$v_C^{(B)}(t) = A_1 e^{-\alpha_k t} + A_2 t e^{-\alpha_k t}. \quad (8)$$

Цей випадок аперіодичного процесу називають *критичним*. Опір $R = R_{кр} = 2\rho = 2\sqrt{L/C}$ – зветься *критичним опором* контуру.

3. Вільна складова буде коливальною, якщо $R < R_{кр}$. Тоді $D = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$ ($\alpha_k < \omega_{рез}$ або $Q > \frac{1}{2}$). У цьому випадку корені s_1 і s_2 – комплексно-спряжені з від'ємними дійсними частинами:

$$s_1 = -\alpha_k + j\sqrt{\omega_{рез}^2 - \alpha_k^2} = -\alpha_k + j\omega_B;$$

$$s_2 = -\alpha_k - j\sqrt{\omega_{рез}^2 - \alpha_k^2} = -\alpha_k - j\omega_B,$$

де частота *власних* (вільних) коливань $\omega_B = \sqrt{\omega_{рез}^2 - \alpha_k^2}$.

Комплексні корені є обов'язково попарно комплексно-спряженими. Реакція є дійсною, якщо сталі інтегрування є також комплексно-спряженими $\dot{A}_1 = |A|e^{j\varphi}$ і $\dot{A}_2 = |A|e^{-j\varphi}$. Тобто кожна пара таких коренів дає складову:

$$\begin{aligned} v_C^{(B)}(t) &= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = \\ &= \dot{A}_1 e^{(-\alpha_k + j\omega_B)t} + \dot{A}_2 e^{(-\alpha_k - j\omega_B)t} = \\ &= |A_1| e^{j\varphi} e^{(-\alpha_k + j\omega_B)t} + |A_2| e^{-j\varphi} e^{(-\alpha_k - j\omega_B)t} = \\ &= |A| e^{-\alpha_k t} [e^{j(\varphi + \omega_B t)} + e^{-j(\varphi + \omega_B t)}] = 2|A| e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_B t + \varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

де за формулою Ейлера $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$.

Слід зазначити, що *практично значущим* є коливальний режим роботи високочастотних контурів при $Q > 50$ ¹³⁾. Далі розглядатимемо випадок, коли корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені.

Повний розв'язок ЛНДР (3):

$$\begin{aligned} v_1(t) = v_C(t) &= v_C^{(ВИМ)}(t) + v_C^{(B)}(t) = \\ &= E_0 + 2|A| e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_B t + \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

¹³⁾ За добротністю коливальні контури поділяють на *низько-* ($Q < 10$), *середньо-* ($10 < Q < 50$) та *високочастотні* ($Q > 50$).

Параметри $|A|$; φ знаходимо з початкових умов відносно напруги на конденсаторі та струму через індуктивний елемент (*незалежні початкові умови*): тобто $v_C(0) = v_C(0_-)$; $i_L(0) = i_L(0_-)$, які задовольняють рівняння (3). Щоб знайти два параметри, потрібні два рівняння. Ураховавши те, що $v_C(0) = v_C(0_-)$, з (10) для моменту часу $t = 0$ дістанемо перше рівняння:

$$v_1(0) = \left[E_0 + 2|A| \cdot e^{-\alpha_k t} \cdot \cos(\omega_B t + \varphi) \right]_{t=0} = v_C(0). \quad (11)$$

Друге рівняння дістанемо з того, що

$$C \frac{dv_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} = C \frac{dv_C(t)}{dt} \Big|_{t=0} = i_C(0) = i_L(0). \quad (12)$$

Отже, друге рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{dv_C(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[E_0 + 2|A| e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_B t + \varphi) \right] \Big|_{t=0} = \\ &= 2|A| \left[-\alpha_k e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_B t + \varphi) - \omega_B e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_B t + \varphi) \right] \Big|_{t=0} = \frac{1}{C} i_L(0). \end{aligned}$$

Ураховавши те, що початкові умови нульові $v_C(0) = 0$ В; $i_L(0) = 0$ А, дістанемо систему:

$$\begin{cases} 2|A| \cos(\varphi) = v_C(0) - E_0 = 0 - E_0; \\ 2|A| \left[-\alpha_k \cos(\varphi) - \omega_B \sin(\varphi) \right] = \frac{1}{C} i_L(0) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Звідси одержимо:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_k}{\omega_B} &= \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}; \Rightarrow \varphi = -\arctg \frac{\alpha_k}{\omega_B}; \\ |A| &= -\frac{E_0}{2 \cos(\varphi)} = -\frac{E_0}{2 \cos(-\arctg \frac{\alpha_k}{\omega_B})} = -\frac{E_0}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_k}{\omega_B} \right)^2}, \end{aligned}$$

де враховано, що $\cos(\varphi) = 1 / \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ (знак функції у лівій частині рівності повинен збігатися із знаком величини у правій частині).

Остаточно знаходимо *повну перехідну реакцію кола*:

$$v_1(t) = E_0 + 2|A|e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_B t + \varphi) = \\ = E_0 - E_0 \sqrt{1 + (\alpha_k / \omega_B)^2} e^{-\alpha_k t} \cos[\omega_B t - \arctg(\alpha_k / \omega_B)], t \geq 0$$

або після деяких перетворень

$$v_1(t) = E_0 \left[1 - \frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha_k t} \cos[\omega_B t - \psi] \right], t \geq 0, \quad (14)$$

$$\text{де } \psi = \arctg(\alpha_k / \omega_B); \omega_B = \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 - \alpha_k^2} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}; \frac{\alpha_k}{\omega_{\text{рез}}} = \frac{1}{2Q}.$$

Закон зміни перехідного струму $i_1(t)$ в контурі визначається похідною в часі від напруги на конденсаторі:

$$i_1(t) = i_L(t) = i_R(t) = i_C(t) = C \frac{dv_1(t)}{dt}, t \geq 0; \\ i_C(t) = C \frac{E_0}{\cos \psi} \cdot e^{-\alpha_k t} \left[\alpha_k \cos[\omega_B t - \psi] + \omega_B \sin[\omega_B t - \psi] \right] = \\ = C \frac{E_0}{\cos \psi} \cdot e^{-\alpha_k t} \cdot \sqrt{\omega_B^2 + \alpha_k^2} \cdot \sin[\omega_B t - \psi + \arctg(\alpha_k / \omega_B)] = \\ = CE_0 \sqrt{1 + (\alpha_k / \omega_B)^2} \cdot \sqrt{\omega_B^2 + \alpha_k^2} \cdot e^{-\alpha_k t} \cdot \sin(\omega_B t)$$

або після деяких перетворень дістанемо:

$$i_C(t) = CE_0 \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{\omega_B} \cdot e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_B t) = \\ = E_0 \frac{1}{L\omega_B} \cdot e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_B t), t \geq 0. \quad (15)$$

Аналіз у середовищі Mathcad

Фрагмент документа Mathcad з прикладом обчислення реакції контуру $v_1(t)$ на сигнал $v_0(t) = E_0 = \text{const}$, $t \geq 0$, де $E_0 = 1\text{В}$, за заданих початкових умов $v_C(0) = 0\text{В}$, $i_L(0) = 0\text{А}$ з використанням функції `odesolve(x,b,[число кроків])` наведено на рис. 2. На рис. 2 наведено також порівняння чисельного розв'язку з точним розв'язком, отриманим аналітично.

Приклад 1

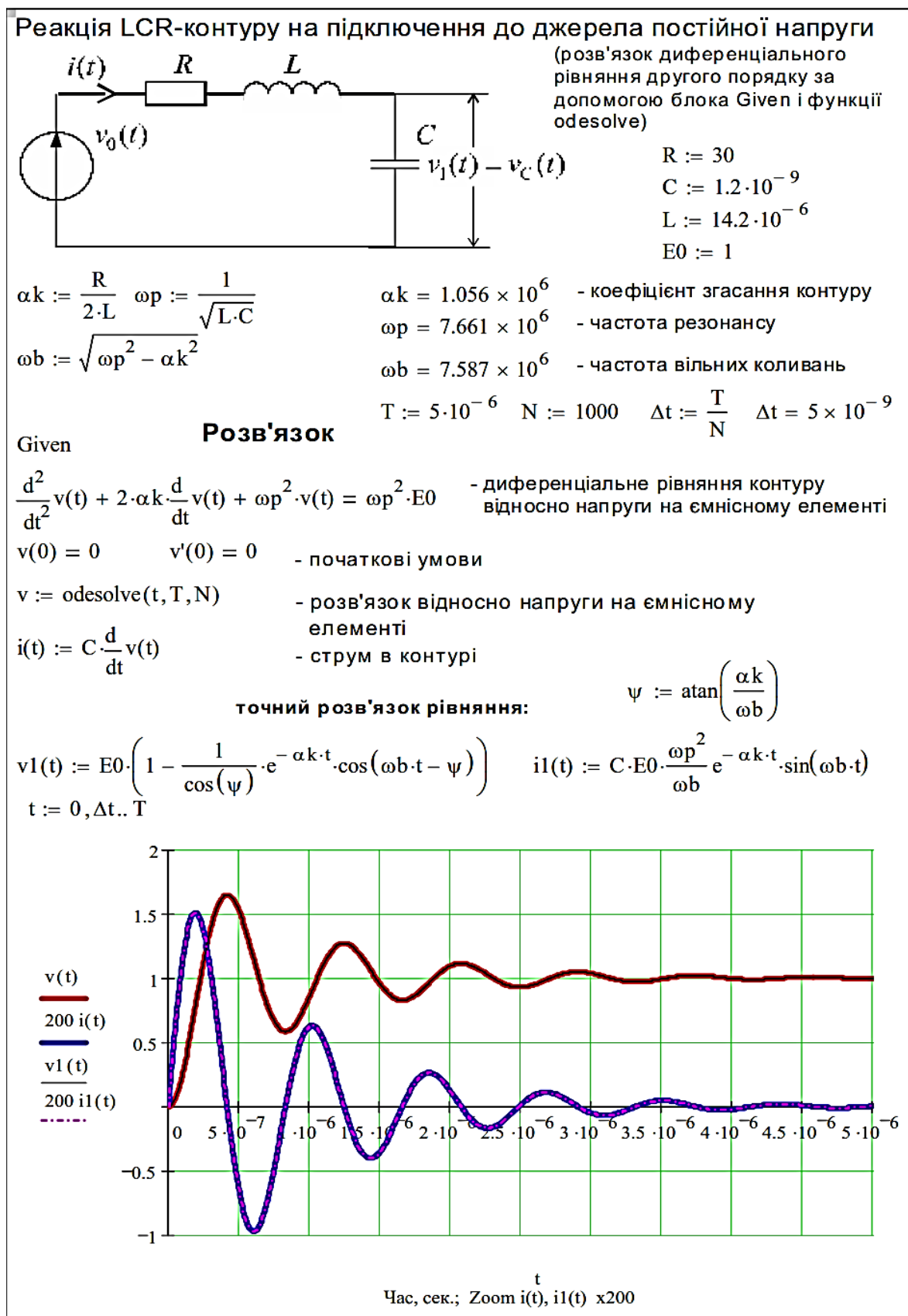


Рис. 2. Підключення контуру до джерела постійної напруги

Підключення до джерела гармонічної напруги

Знайдемо реакцію кола за нульових початкових умов (напруга на конденсаторі $v_C(0) = 0$ В, струм через індуктивний елемент $i_L(0) = 0$ А) на підключення до джерела гармонічної напруги $v_0(t) = V_0 \cos(\omega_{\text{вх}} t + \varphi)$, $t \geq 0$, частота якого у загальному випадку не дорівнює резонансній частоті $\omega_{\text{рез}}$ або частоті власних коливань $\omega_{\text{в}}$. Маємо:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2\alpha_{\text{к}} \frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 v_C(t) = \omega_{\text{рез}}^2 V_0 \cos(\omega_{\text{вх}} t + \varphi). \quad (16)$$

Вимушена складова

Після підключення через деякий час у колі настає сталий гармонічний режим. Всі перехідні процеси у колі закінчуються, напруги на елементах та струм через них набувають форму гармонічних коливань. Тобто вимушену складову (частковий розв'язок (15)) також шукаємо у вигляді гармонічних коливань.

Оскільки коло на рис. 1 лінійне та інваріантне у часі, то частковий розв'язок (15) можна знайти як реакцію кола на сигнал $v_0(t) = V_0 \cdot e^{j\omega t} e^{j\varphi}$.

Потім, з урахуванням того, що за формулою Ейлера

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$$

→

$$\cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[e^{j(\omega t + \varphi)}],$$

треба виділити дійсну частину реакції.

Отже, замість (16) розглядатиме рівняння:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2\alpha_{\text{к}} \frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 v_C(t) = \omega_{\text{рез}}^2 V_0 \cdot e^{j\omega t} e^{j\varphi}. \quad (17)$$

За методом невизначених коефіцієнтів, частковий розв'язок (17) шукаємо також у вигляді

$$v_C^{(\text{вим})}(t) = V_1 e^{j\omega t}.$$

Тоді одержимо:

$$(j\omega)^2 V_1 e^{j\omega t} + 2\alpha_k(j\omega) V_1 e^{j\omega t} + \omega_{\text{рез}}^2 V_1 e^{j\omega t} = \omega_{\text{рез}}^2 V_0 \cdot e^{j\omega t} e^{j\varphi},$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{(j\omega)^2 + 2\alpha_k(j\omega) + \omega_{\text{рез}}^2} V_0 e^{j\varphi}. \quad (18)$$

Як наслідок, реакцію $v_C^{(\text{вим})}(t) = \dot{V}_1 e^{j\omega t}$ можна записати у вигляді:

$$v_C^{(\text{вим})}(t) = \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{(j\omega)^2 + 2\alpha_k(j\omega) + \omega_{\text{рез}}^2} V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = H(j\omega) V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}, \quad (19)$$

де

$$H(j\omega) = \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{(j\omega)^2 + 2\alpha_k(j\omega) + \omega_{\text{рез}}^2}$$

– частотна характеристика кола відносно відношення напруги на конденсаторі і вхідної напруги.

З урахуванням того, що $H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{-j \arg H(j\omega)}$, де $|H(j\omega)|$ – модуль, $\arg H(j\omega)$ – аргумент частотної характеристики, *усталена* реакція кола на вхідний сигнал

$$v_0(t) = V_0 \cos(\omega_{\text{вх}} t + \varphi) = \text{Re} \left[V_0 e^{j(\omega_{\text{вх}} t + \varphi)} \right], \quad t \geq 0$$

дорівнюватиме

$$v_C^{(\text{вим})}(t) = \text{Re} \left[H(j\omega) V_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \right] = V_0 |H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t + \varphi + \arg H(j\omega)], \quad t \geq 0,$$

де $\omega = \omega_{\text{вх}}$.

Повний розв'язок

Повний розв'язок ЛНДР (15). Підключення до джерела гармонічної напруги впливає лише на вигляд вимушеної складової. Форма вільної складової залишається без змін. Повний розв'язок диференційного рівняння (16), тобто повна перехідна реакція кола, матиме наступний вигляд:

$$v_1(t) = v_C^{(ВИМ)}(t) + v_C^{(B)}(t) = V_0 |H(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi_1 + \arg H(j\omega)] + 2|A| e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_B t + \psi), t \geq 0. \quad (20)$$

Параметри $|A|$; ψ знаходимо із початкових умов відносно напруги на конденсаторі та струму через індуктивний елемент: $v_C(0)$; $i_L(0)$, які задовольняють (16). Отже, перше рівняння може бути одержане з (20) у момент часу $t = 0$:

$$v_1(t)|_{t=0} = \left[2|A| e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_B t + \psi) + V_0 |H(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi_1 + \arg H(j\omega)] \right] \Big|_{t=0} = v_C(0). \quad (21)$$

Друге рівняння

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv_1(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left\{ V_0 |H(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi_1 + \arg H(j\omega)] \right\} \right|_{t=0} + \\ &+ 2|A| \left[-\alpha_k e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_B t + \psi) - \omega_B e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_B t + \psi) \right] \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{C} i_L(0). \end{aligned} \quad (22)$$

Отже, дістаємо систему:

$$\begin{cases} v_C(0) - V_0 |H(j\omega)| \cos[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] = 2|A| \cos(\psi); \\ \frac{1}{C} i_L(0) + V_0 \omega |H(j\omega)| \sin[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] = 2|A| [-\alpha_k \cos(\psi) - \omega_B \sin(\psi)]. \end{cases}$$

Враховуючи те, що початкові умови нульові ($v_C(0) = 0$ В; $i_L(0) = 0$ А) одержимо:

$$\begin{cases} -V_0 |H(j\omega)| \cos[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] = 2|A| \cdot \cos(\psi); \\ V_0 \omega |H(j\omega)| \sin[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] = 2|A| \cdot \cos(\psi) [-\alpha_k - \omega_B \operatorname{tg}(\psi)]. \end{cases}$$

Якщо одне рівняння поділити на друге, то дістанемо $\omega \cdot \operatorname{tg}[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] = \alpha_k + \omega_B \operatorname{tg}(\psi)$. Звідси випливає, що

$$\psi = \arctg \left[\frac{\omega \cdot \operatorname{tg}[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] - \alpha_k}{\omega_B} \right];$$

$$|A| = \frac{-V_0 |H(j\omega)| \cos[\varphi_1 + \arg H(j\omega)]}{2 \cos(\psi)},$$

де враховано $\cos(\psi) = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}$. Повний розв'язок ЛНДР (16) буде:

$$v_1(t) = V_0 |H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t + \varphi_1 + \arg H(j\omega)] -$$

$$- V_0 |H(j\omega)| \cdot \cos[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] \frac{1}{\cos \psi} \cdot e^{-\alpha_k t} \cdot \cos(\omega_B t + \psi), \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Закон зміни перехідного струму в контурі визначається похідною в часі від напруги на конденсаторі (23). Тобто

$$i_L(t) = i_R(t) = i_C(t) = C \frac{dv_1(t)}{dt};$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_1(t)}{dt} =$$

$$= -CV_0 |H(j\omega)| \cdot \omega \cdot \sin[\omega t + \varphi_1 + \arg H(j\omega)] +$$

$$+ CV_0 |H(j\omega)| \cos[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] \frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha_k t} \left[\alpha_k \cos(\omega_B t + \psi) + \omega_B \sin(\omega_B t + \psi) \right]$$

або

$$i_C(t) = CV_0 |H(j\omega)| \cdot \omega \cdot \cos \left[\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \arg H(j\omega) \right] +$$

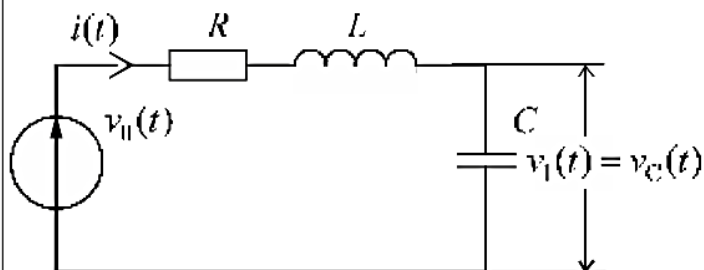
$$+ CV_0 |H(j\omega)| \cos[\varphi_1 + \arg H(j\omega)] \frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha_k t} \omega_{\text{рез}} \cos(\omega_B t + \psi - \arctg \frac{\omega_B}{\alpha_k}), \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Фрагменти документів Mathcad з прикладом обчислення реакції $v_1(t)$ і $i_C(t)$ з використанням функції `odesolve(x,b,[число кроків])` і за точними формулами (23), (24), які отримані аналітично, наведено на рис. 3 та рис. 4 (Приклад 2,3). Як бачимо, результати збігаються.

Приклад 2

Реакція LCR-контру на підключення до джерела гармонічної напруги

(розв'язок диференціального рівняння другого порядку за допомогою блока Given і функції odesolve)



$R := 30$

$C := 1.2 \cdot 10^{-9}$

$L := 14.2 \cdot 10^{-6}$

$V0 := 1$

$f := .5 \cdot 10^6$

 $\phi := -90$ - початкова фаза в електричних градусах

$$\alpha k := \frac{R}{2 \cdot L} \quad \omega p := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \omega b := \sqrt{\omega p^2 - \alpha k^2} \quad \alpha k = 1.056 \times 10^6 \quad \text{- коефіцієнт згасання контуру}$$

$$\omega p = 7.661 \times 10^6 \quad \text{- частота резонансу}$$

$$\omega b = 7.587 \times 10^6 \quad \text{- частота вільних коливань}$$

$$\phi 1 := \frac{\pi}{180} \cdot \phi \quad \phi 1 = -1.571 \quad \text{- початкова фаза в радіанах}$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 3.142 \times 10^6 \quad \text{- частота вхідної напруги у два рази менша частоти резонансу}$$

$$T := 5 \cdot 10^{-6} \quad N := 2000 \quad \Delta t := \frac{T}{N} \quad \Delta t = 2.5 \times 10^{-9}$$

Given

Розв'язок

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} v(t) + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} v(t) + v(t) = V0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi 1) \quad \text{- диференціальне рівняння відносно напруги на ємнісному елементі}$$

$$v(0) = 0 \quad v'(0) = 0 \quad \text{- початкові умови}$$

$$v := \text{odesolve}(t, T, N) \quad \text{- розв'язок відносно напруги на ємнісному елементі}$$

$$i(t) := C \cdot \frac{d}{dt} v(t) \quad \text{- струм в контурі}$$

.....

Рис. 3. Підключення послідовного контуру до джерела гармонічної напруги

Приклад 3

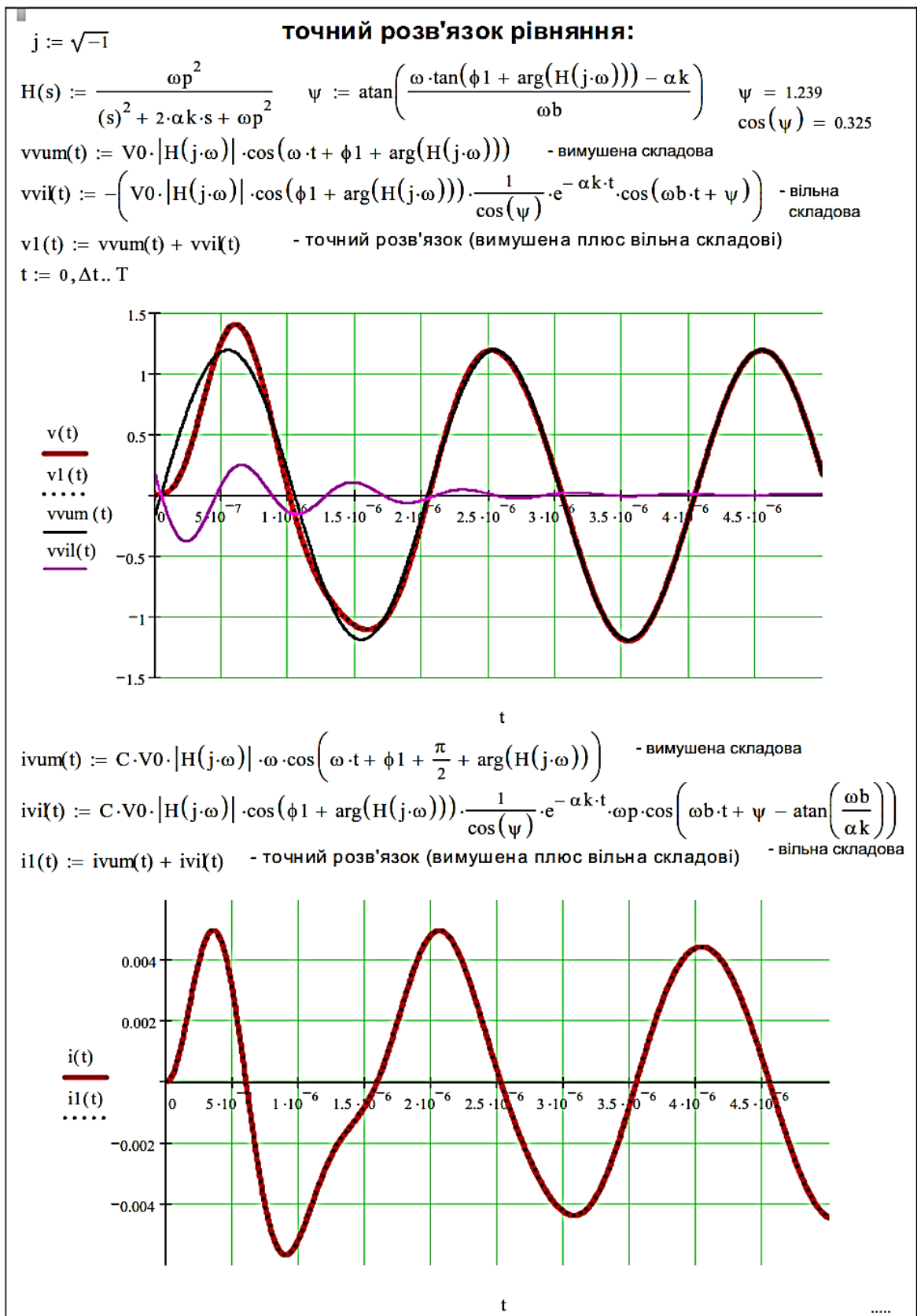


Рис. 4. Порівняння з точним розв'язком

Таким чином, при підключенні джерела гармонічної напруги перехідна реакція (напруга або струм) є сумою двох коливань: одного з частотою дії $\omega = \omega_{\text{вх}}$, другого – з частотою власних коливань $\omega_{\text{в}} = \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 - \alpha_{\text{к}}^2}$ (ще зветься власною частотою контуру), яке з часом загасає за законом експоненти зі швидкістю, відповідно значенню сталої часу контуру $\tau_{\text{к}} = 1/\alpha_{\text{к}} = 2Q/\omega_{\text{рез}}$.

Якщо частота діючого сигналу $\omega = \omega_{\text{вх}}$ дорівнює $\omega_{\text{рез}}$, то відбувається явище резонансу. Тоді для комплексної частотної характеристики контуру, визначеної відносно напруги на конденсаторі, маємо

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\omega=\omega_{\text{рез}}} &= \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\alpha_{\text{к}}} = \frac{1}{\omega_{\text{рез}}RC}; \\ \arg H(j\omega)_{\omega=\omega_{\text{рез}}} &= -\pi/2. \end{aligned}$$

Якщо контур високодобротний (тобто $\alpha_{\text{к}}/\omega_{\text{рез}} = (1/2Q) \ll 1$; $\omega_{\text{в}} = \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 - \alpha_{\text{к}}^2} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 - 1/4Q^2} \approx \omega_{\text{рез}}$ і $\alpha_{\text{к}} \rightarrow 0$ або $\alpha_{\text{к}} \ll \omega_{\text{рез}}$), вирази значно спрощуються. Наприклад, для струму в контурі (24) при $\varphi_1 = 0$ можна записати:

$$i_{\text{с}}(t) = CV_0 \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{2\alpha_{\text{к}}} \cdot [1 - e^{-\alpha_{\text{к}}t}] \cos(\omega_{\text{рез}}t) = I_{\text{м,рез}} [1 - e^{-\alpha_{\text{к}}t}] \cos(\omega_{\text{рез}}t), \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} I_{\text{м,рез}} = I_{\text{м,вим}} &= CV_0 \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{2\alpha_{\text{к}}} = \\ &= CV_0 \omega_{\text{рез}} Q = CV_0 \frac{1}{LC} \frac{1}{2(R/2L)} = \frac{V_0}{R}. \end{aligned}$$

Таким чином, при резонансі в усталеному режимі контур має активний опір R і амплітуда струму максимальна.

Обвідна $I_{\text{м,рез}} [1 - e^{-\alpha_{\text{к}}t}]$ гармонічного сигналу $\cos(\omega_{\text{рез}}t)$ монотонно зростає без коливань від нуля до кінцевого значення $I_{\text{м,вим}}$ за експоненціальним законом.

Отже, в умовах резонансу при суперпозиції *співпадаючих за частотою вимушених і загасаючих власних гармонічних коливань* утворюється струм, що монотонно зростає за амплітудою.

Амплітуда струму досягає рівня 0,9 від усталеного значення (з відносною похибкою встановлення $\gamma = 0,1$) за час:

$$\begin{aligned} t_{\text{уст./}\gamma=0,1} &= -\tau_k \ln \gamma = 2,3 \cdot \tau_k = \frac{2,3}{\alpha_k} = \\ &= 2,3 \cdot \frac{2Q}{\omega_{\text{рез}}} = \frac{4,6}{\omega_{\text{рез}}} Q. \end{aligned} \quad (26)$$

1.2. Паралельний коливальний контур

Відносно струму в індуктивному елементі $i_L(t)$ диференціальне рівняння паралельного контуру дуальне до рівняння (1) послідовного коливального контуру.

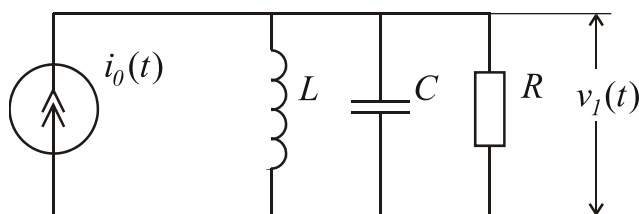


Рис. 5. Класична схема паралельного коливального контуру

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{LC} i_0(t). \quad (27)$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha_k \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 i_L(t) = \omega_{\text{рез}}^2 i_0(t), \quad \alpha_k = \frac{1}{2RC}; \quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 i_L(t) = \omega_{\text{рез}}^2 i_0(t),$$

$$\Rightarrow Q_{\text{пр}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\alpha_k} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega_{\text{рез}} RC = \frac{R}{\omega_{\text{рез}} L},$$

де $Q_{\text{пр}}$ - добротність паралельного контуру. Тобто, перехідний струм індуктивного елемента змінюється за тим самим законом, що перехідна напруга ємнісного елемента послідовного контуру в разі нульових або ненульових

початкових умов. Якщо відомий струм в індуктивному елементі, то напругу на контурі чи струм в конденсаторі можна знайти за формулами:

$$v_1(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_C(t) = C \frac{dv_1(t)}{dt}.$$

* * *

2. Зведення одиночного диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи n ЗДР першого порядку у формі Коші

Диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{LC} v_0(t) \quad (3)$$

можна звести до нормальної системи із двох ЗДР першого порядку. Для цього вводимо наступні заміни:

$$v_C(t) = y_0(t);$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{dy_0(t)}{dt} = y_1(t);$$

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} = \frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{1}{LC} v_0(t) - \frac{R}{L} y_1(t) - \frac{1}{LC} y_0(t).$$

Звідси дістаємо нормальну систему ЗДР першого порядку (якщо задані початкові умови, то буде у формі Коші).

$$\begin{cases} \frac{dy_0(t)}{dt} = y_1(t); \\ \frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{1}{LC} v_0(t) - \frac{R}{L} y_1(t) - \frac{1}{LC} y_0(t). \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y_0(0) = v_C(0); \\ y_1(0) = \frac{d}{dt} y_0(0) = \frac{d}{dt} v_C(0) = \frac{1}{C} i_C(0), \end{cases}$$

де $i_C(0) = i_L(0)$ для послідовного контуру.

Так саме робимо і для ДР n -порядку.

Дослідження послідовного коливального контуру

Дослідження послідовного контуру з зведенням рівняння (3) до системи рівнянь у формі Коші (4) наведено на рис. 6 – 11 (**Приклади 4-9**).

Приклад 4. На рис. 6 наведено початок документа Mathcad, у якому обчислюється реакція контуру на гармонічний сигнал, частота якого відрізняється від резонансної частоти контуру (вона менша у десять разів від резонансної). Вхідним сигналом є перепад косинусоїдальної напруги – він "включається" у момент $t=0$ та має амплітуду V_0 і частоту f . У цьому випадку контур практично не спотворює сигнал, за винятком ледь помітного спотворення на початку перехідного процесу.

Приклад 5. На рис. 7 наведено документ Mathcad, коли частота сигналу дорівнює резонансній частоті. Поведінка контуру різко міняється. У цьому випадку відбувається різке збільшення амплітуди вихідної напруги контуру через резонанс, що проявляється після деякого перехідного процесу, що займає час у кілька періодів вихідної напруги.

Тобто при роботі в області частот, близьких до резонансної, контур поводить як *вузькосмуговий* фільтр, це пояснює тривалий перехідний процес наростання амплітуди коливань на виході контуру.

Приклад 6. Якщо частота діючого гармонічного сигналу близька до частоти власних коливань, то результуюча перехідна реакція (*сума коливань*) змінюється за законом *коливань типу биття* (рис. 8).

Приклад 7. Тепер повторимо експеримент, задаючи вхідний сигнал у вигляді симетричних прямокутних імпульсів – сигнал типу "меандр". Фрагмент документа Mathcad на рис. 9 моделює процеси в контурі для такого впливу із частотою набагато меншої резонансної частоти. Тут чітко видно, що в моменти перепадів меандру коливальний контур "дзенькає", тобто в ньому з'являються загасаючі синусоїдальні коливання із частотою, близької до резонансної частоти контуру. У цілому форма сигналу зберігається.

Приклад 8. Випадок, коли частота меандру дорівнює резонансній частоті контуру, зображено на рис. 10. Картина перехідних процесів різко змінилася – вона схожа на випадок реакції контуру на гармонічний косинусоїдальний сигнал, який було наведено раніше.

На резонансній частоті контур поводить себе як високовибіркове коло, що виділяє з меандру його першу гармоніку і реагуючу в основному на неї. Інші гармоніки меандру контуром заглушуються і мало впливають на вигляд перехідного процесу. Аналогічно можна провести моделювання контуру за будь-яких інших видів вхідних сигналів.

Приклад 9. Якщо частота меандру вище частоти резонансу, амплітуда вихідного сигналу контуру падає (рис. 11).

* * *

Приклад 4

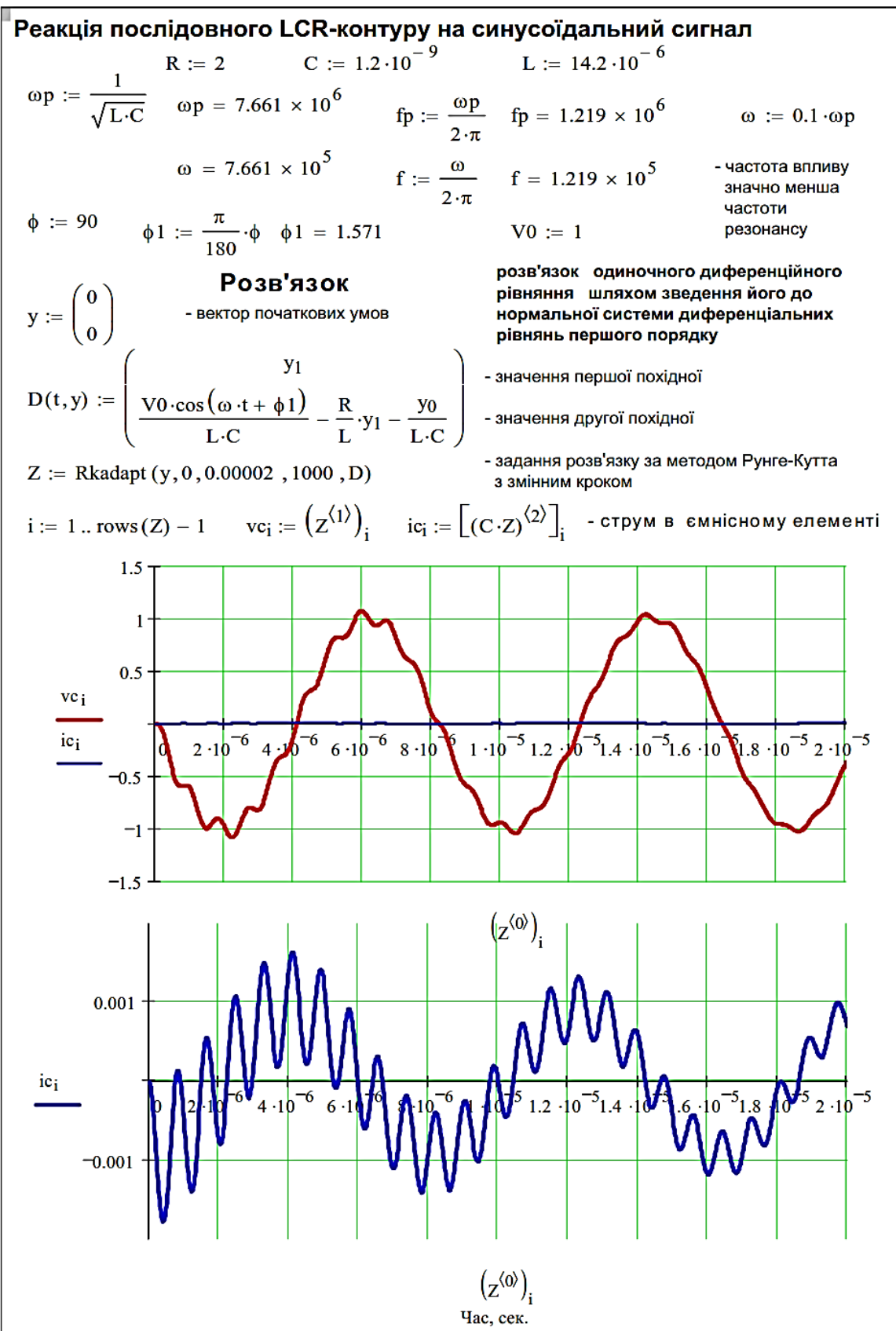


Рис. 6. Реакція послідовного контуру на гармонічний сигнал

Приклад 5

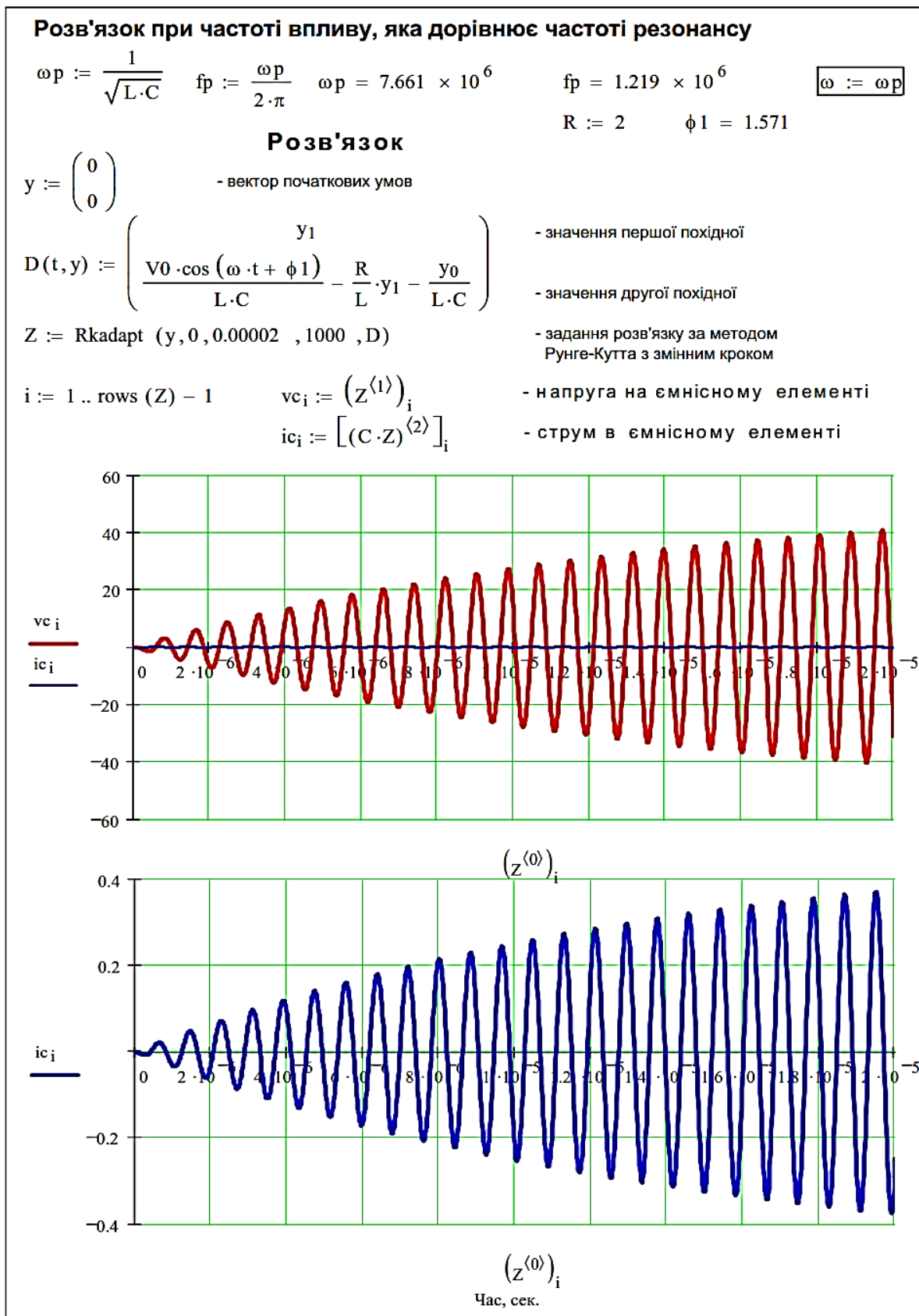


Рис. 7. Реакція послідовного контуру на гармонічний сигнал продовження)

Приклад 6

Розв'язок при частоті впливу, яка близька до частоті резонансу

$$\omega_p := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2 \cdot \pi} \quad \omega_p = 7.661 \times 10^6 \quad f_p = 1.219 \times 10^6 \quad \boxed{\omega := 1.2 \omega_p}$$

$$R := 2 \quad \phi_1 = 1.571$$

Розв'язок

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов}$$

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{V_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_1)}{L \cdot C} - \frac{R}{L} \cdot y_1 - \frac{y_0}{L \cdot C} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- значення першої похідної} \\ \text{- значення другої похідної} \end{array}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(y, 0, 0.00002, 1000, D) \quad \text{- задання розв'язку за методом Рунге-Кутта з змінним кроком}$$

$$i := 1 .. \text{rows}(Z) - 1 \quad v_{ci} := (Z^{(1)})_i \quad \text{- напруга на ємнісному елементі}$$

$$i_{ci} := [(C \cdot Z)^{(2)}]_i \quad \text{- струм в ємнісному елементі}$$

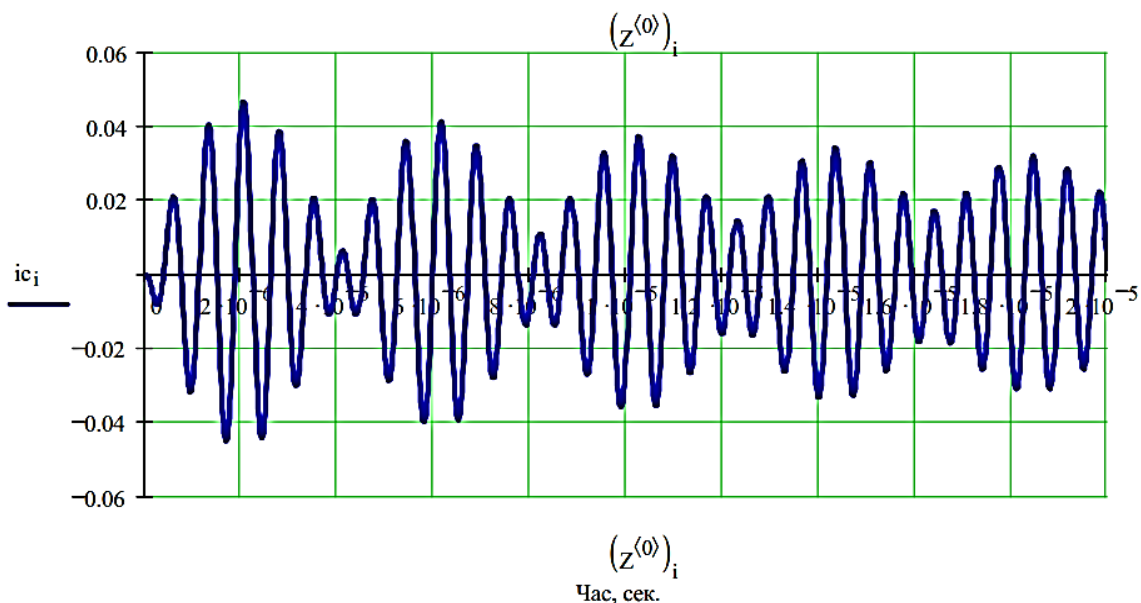
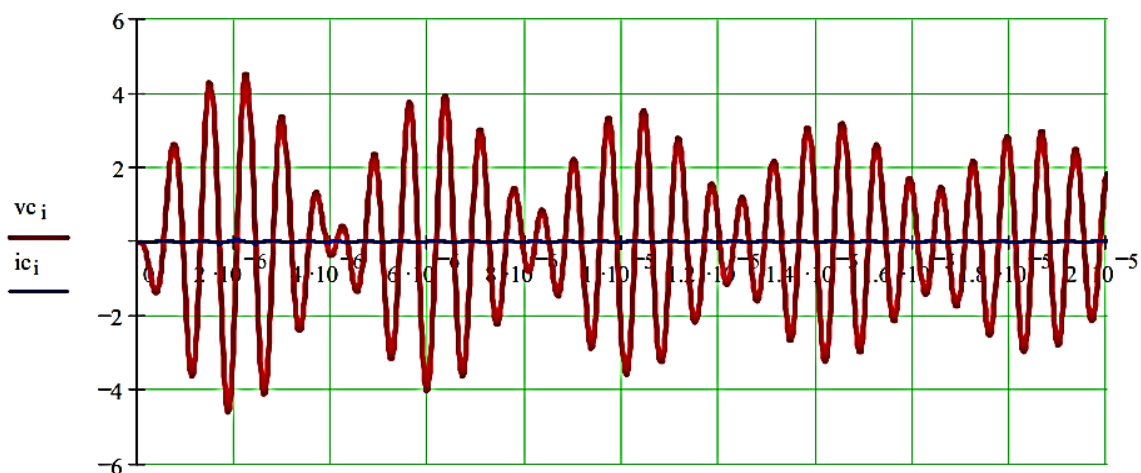


Рис. 8. Реакція послідовного контуру на гармонічний сигнал продовження)

Приклад 7

Реакція LCR-контур на меандр (частота меандру значно менша частоти резонансу)

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} v(t) + R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} v(t) + v(t) = \epsilon(t)$$

- диференціальне рівняння послідовного контуру

$$\omega_p := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2 \cdot \pi} \quad \omega_p = 7.661 \times 10^6 \quad f_p = 1.219 \times 10^6$$

$$\omega := 0.1 \omega_p$$

$$\epsilon(t) := V_0 \cdot (\text{sign}(\sin(\omega \cdot t))) \quad V_0 := 1$$

- вплив у вигляді меандру

Розв'язок

$$R := 30$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- вектор початкових умов

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{\epsilon(t)}{L \cdot C} - \frac{R}{L} \cdot y_1 - \frac{y_0}{L \cdot C} \end{pmatrix}$$

- значення першої похідної

- значення другої похідної

$$Z := \text{Rkadapt}(y, 0, 0.00002, 1000, D)$$

- задання розв'язку за методом Рунге-Кутта з змінним кроком

$$i := 1 \dots \text{rows}(Z) - 1$$

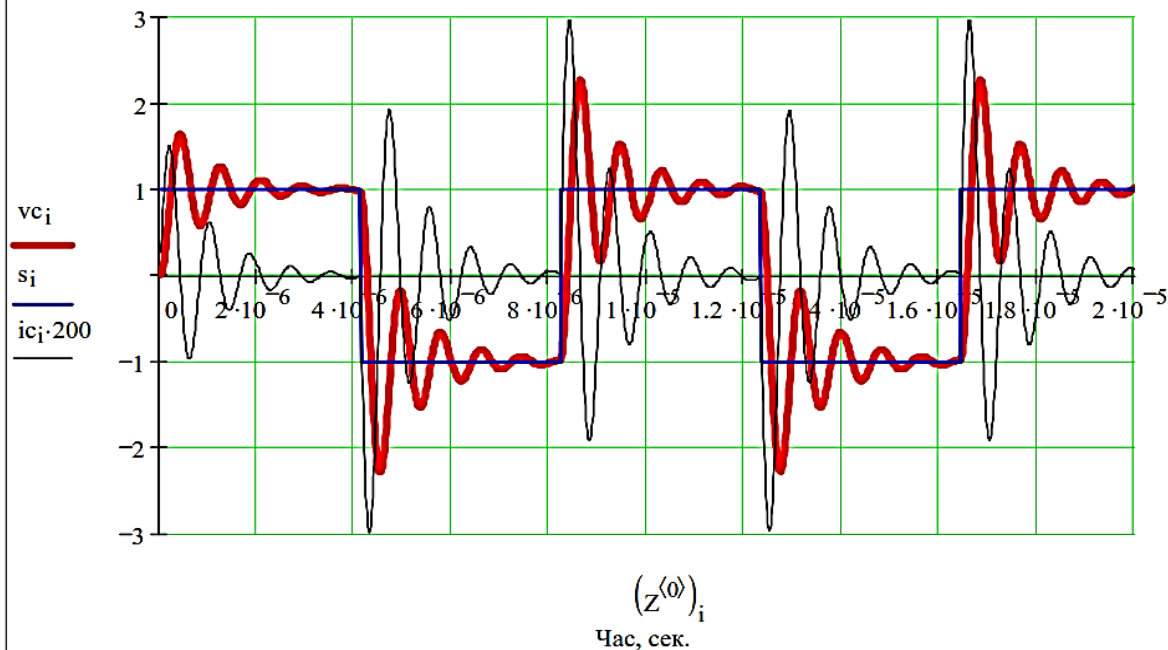
$$v_{c_i} := (Z^{(1)})_i$$

- напруга на ємнісному елементі

$$s_i := \epsilon \left[(Z^{(0)})_i \right]$$

$$i_{c_i} := [(C \cdot Z)^{(2)}]_i$$

- струм в ємнісному елементі



- Напруга на ємності
- Вхідний сигнал
- Струм в ємнісному елементі, Zoom x200

Рис. 9. Реакція послідовного контуру на меандр

Приклад 8

Реакція LCR-контуру на меандр при частоті сигналу, яка дорівнює частоті резонансу

$$\omega_p := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2 \cdot \pi} \quad \omega_p = 7.661 \times 10^6 \quad f_p = 1.219 \times 10^6 \quad \boxed{\omega := \omega_p}$$

$$e(t) := V_0 \cdot (\text{sign}(\sin(\omega \cdot t))) \quad V_0 := 1 \quad \text{- вплив у вигляді меандру}$$

Розв'язок

$$R := 2$$

$$\boxed{\omega = 7.661 \times 10^6}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов}$$

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{e(t)}{L \cdot C} - \frac{R}{L} \cdot y_1 - \frac{y_0}{L \cdot C} \end{pmatrix}$$

- значення першої похідної
- значення другої похідної

$$Z := \text{Rkadapt}(y, 0, 0.00002, 1000, D)$$

- задання розв'язку за методом Рунге-Кутта з змінним кроком

$$i := 1.. \text{rows}(Z) - 1 \quad v_{c_i} := (Z^{(1)})_i \quad \text{- напруга на ємнісному елементі}$$

$$s_i := e[(Z^{(0)})_i] \quad i_{c_i} := [(C \cdot Z)^{(2)}]_i \quad \text{- струм в ємнісному елементі}$$

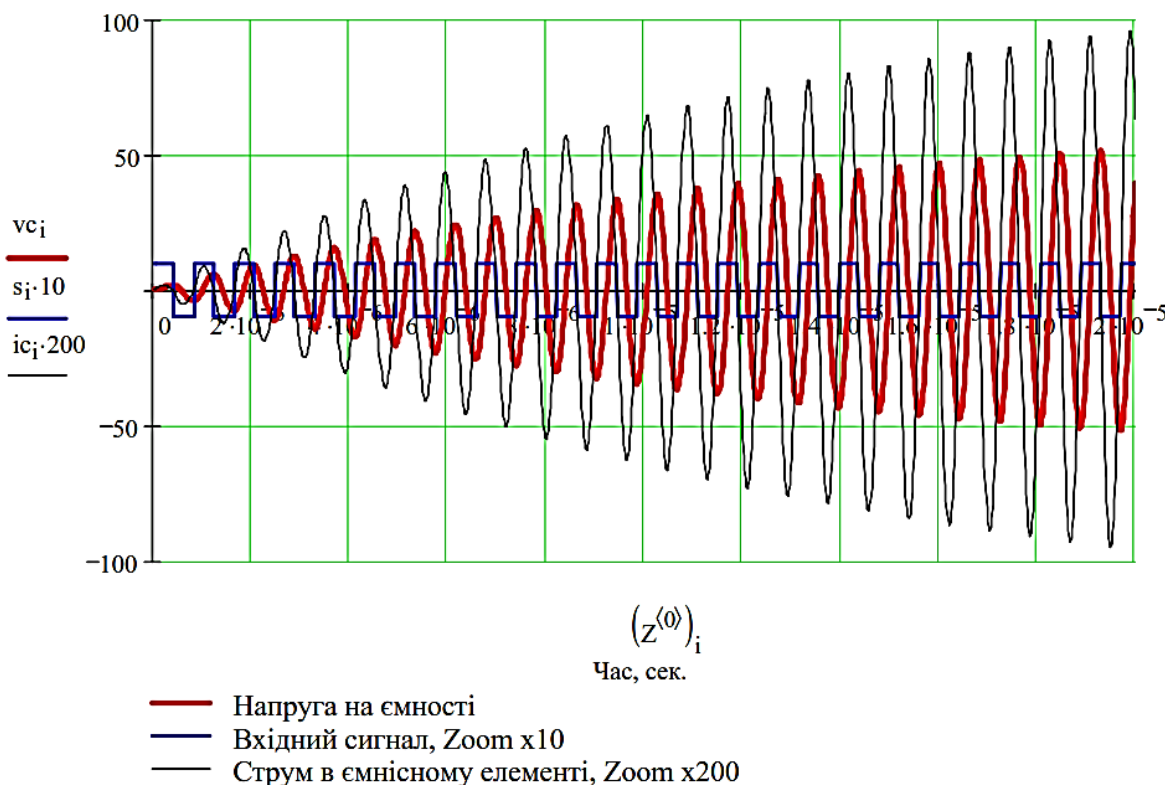


Рис. 10. Реакція послідовного контуру на меандр (продовження)

Приклад 9

Реакція LCR-контуру на меандр при частоті сигналу, яка значно більша частоти резонансу

$$\omega_p := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2 \cdot \pi} \quad \omega_p = 7.661 \times 10^6 \quad f_p = 1.219 \times 10^6$$

$$e(t) := V_0 \cdot (\text{sign}(\sin(\omega \cdot t))) \quad V_0 := 1 \quad \text{- вплив у вигляді меандру}$$

$$\omega := 4\omega_p$$

$$R := 2 \quad \omega = 3.064 \times 10^7$$

Розв'язок

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов}$$

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{e(t)}{L \cdot C} - \frac{R}{L} \cdot y_1 - \frac{y_0}{L \cdot C} \end{pmatrix}$$

- значення першої похідної
- значення другої похідної

$$Z := \text{Rkadapt}(y, 0, 0.000003, 1000, D)$$

$$i := 1 \dots \text{rows}(Z) - 1$$

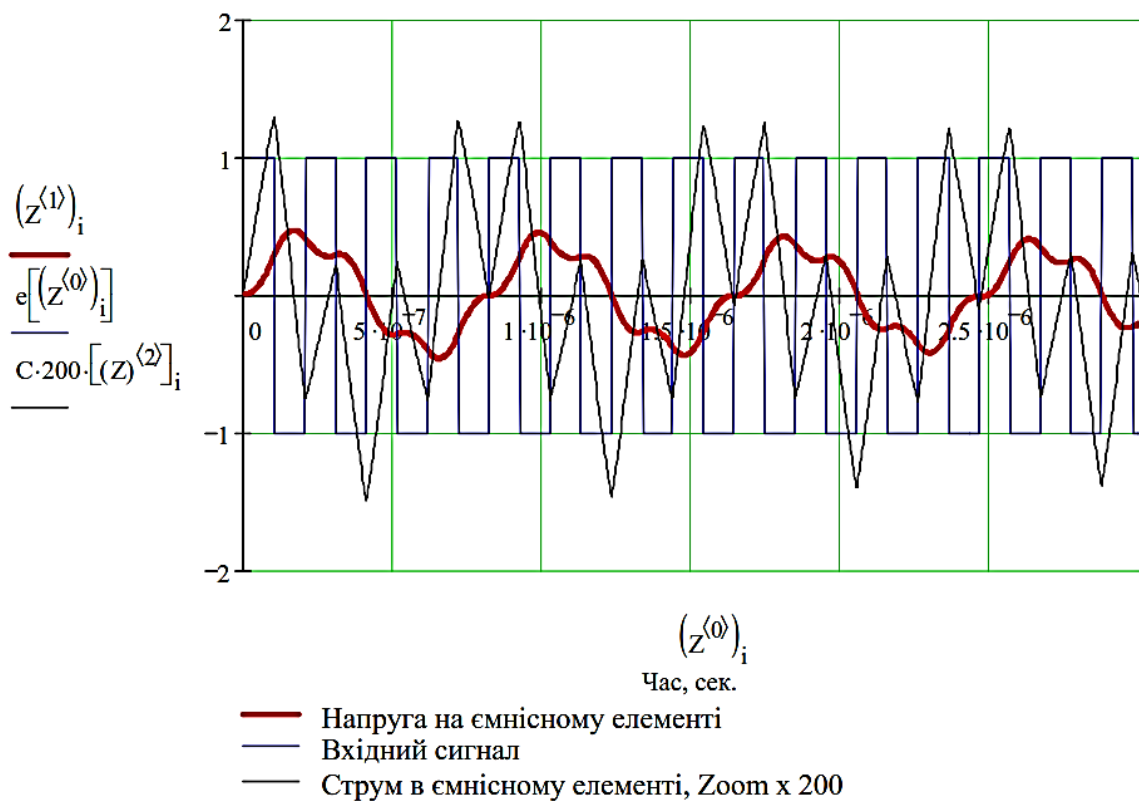


Рис. 11. Реакція послідовного контуру на меандр (продовження)

Висновки

1. Тривалість перехідного процесу в контурі не залежить від параметрів вхідного сигналу. *Чим більша добротність контуру, тим повільніше встановлюються коливання в контурі.*

2. При резонансі ($\omega_{\text{вх}} = \omega_{\text{рез}}$) в усталеному режимі амплітуда струму в послідовному контурі досягає максимального значення, яке значно більше ніж у випадку, коли частота впливу не збігається з резонансною частотою (*вибірковість* або *селективність* за частотою). *Чим більша добротність контуру, тим більша амплітуда струму.*

3. Для періодичних сигналів типу "меандр" і інших форм в області частот, близьких до резонансної, *контур поводитья як вузько смуговий фільтр.*

Аналіз у середовищі Micro-CAP

Наведемо приклад аналізу кола, що на рис. 1, при гармонічному сигналі за нульових початкових умов. Складемо схему для аналізу (рис. 12)

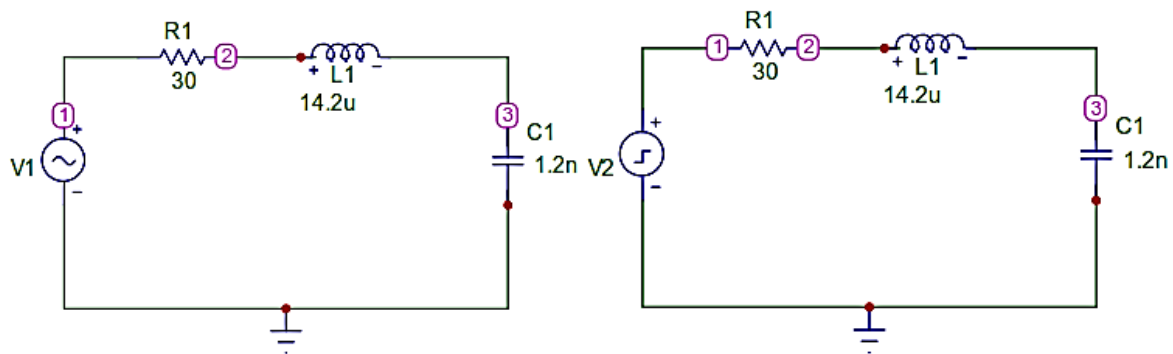


Рис. 12

Перехід до аналізу у часовій області здійснюється вибором в меню команд **Analysis** режиму **Transient ... (Alt+1)**. У вікні **Transient Analysis Limits** треба встановити необхідні параметри моделювання (рис. 13).

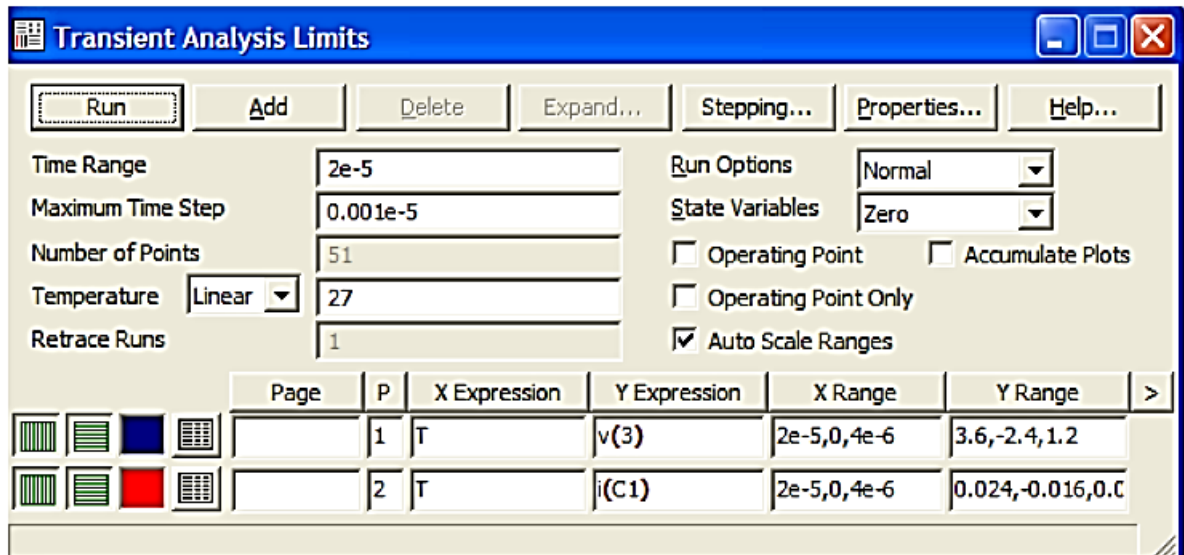
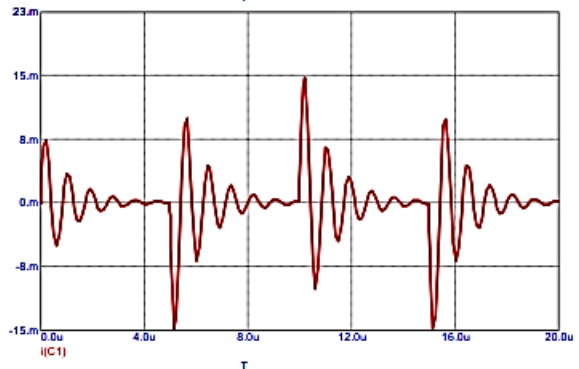
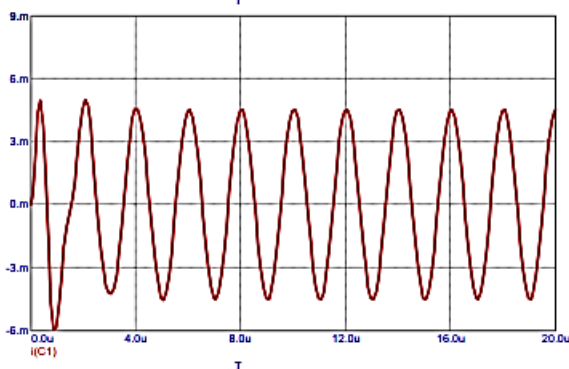
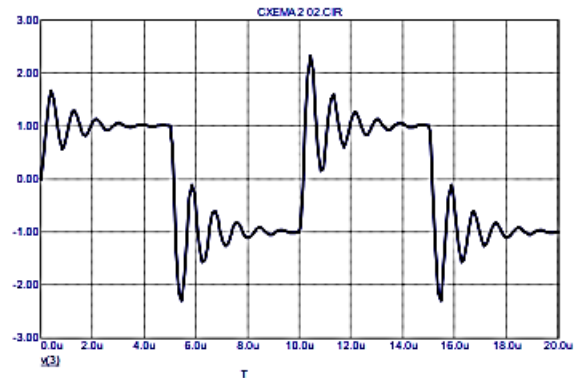
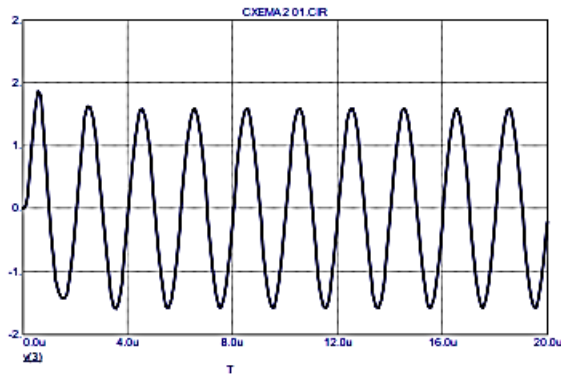


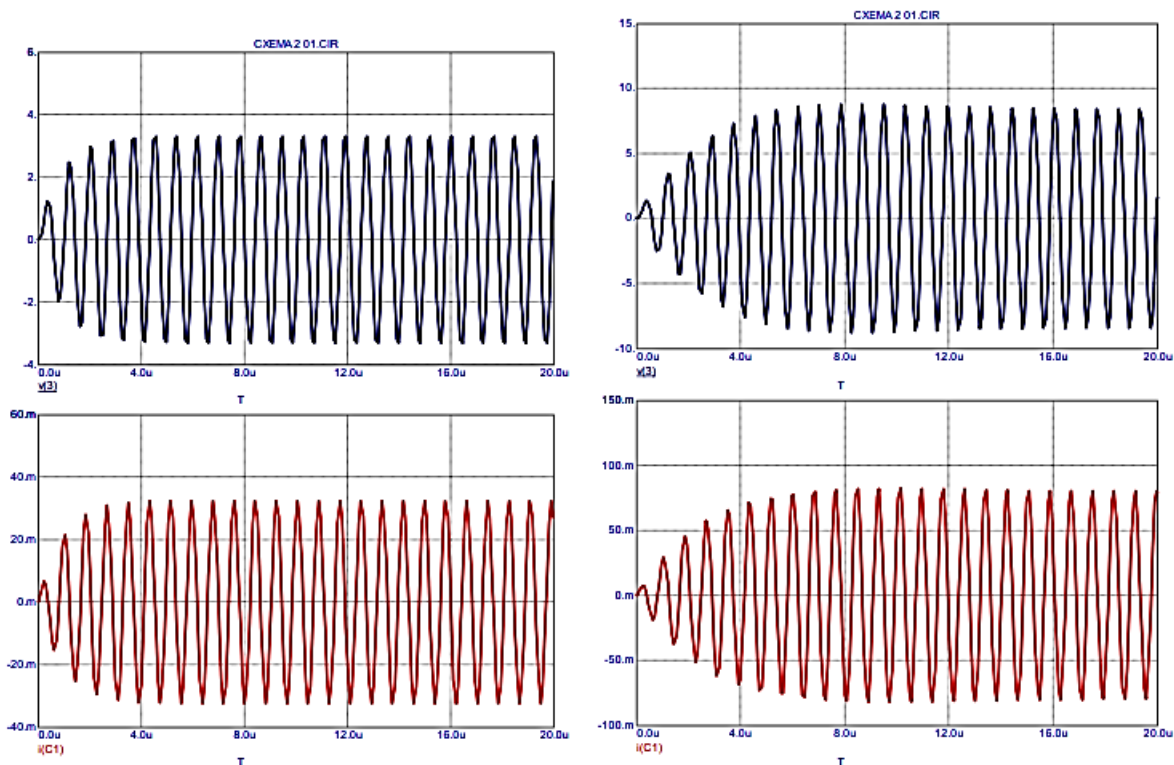
Рис. 13. Задання параметрів моделювання в режимі *Transient Analysis*

Результати аналізу реакції кола у часовій області в середовищі Micro-CAP для двох видів вхідного сигналу наведено на рис. 14. Бачимо, що результати моделювання збігаються з результатами, одержаними в Mathcad.



а) $R=30 \text{ ohm}$; $f=0,5 \text{ MHz}$

б) $R=30 \text{ ohm}$; меандр



в) $R=30 \text{ ohm}$; $f=1,219 \text{ MHz}$

г) $R=10 \text{ ohm}$; $f=1,219 \text{ MHz}$

Рис. 14

Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть суть класичного методу аналізу перехідних процесів електричних кіл.
2. Наведіть схеми класичних послідовного і паралельного коливальних контурів та їх диференціальні рівняння.
3. Чим визначається порядок кола?
4. Поясніть суть розв'язку диференціальних рівнянь за методом Ейлера.
5. Який вигляд має розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння: дійсні і різні, дійсні і рівні, комплексні спряжені?
6. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?
7. У якій формі шукати усталену реакцію кола при експоненціальних

зовнішніх впливах? Наведіть приклади.

8. За яких умов обчислюються сталі інтегрування? Наведіть приклади обчислення сталих інтегрування для кіл другого порядку.

9. Як звести одиночне диференціальне рівняння n -го порядку до нормальної системи з n диференціальних рівнянь першого порядку?

10. Наведіть схеми класичних послідовного і паралельного коливальних контурів та запишіть їх диференціальні рівняння у вигляді системи першого порядку.

11. Наведіть приклади розв'язку систем диференціальних рівнянь першого порядку у середовищі Mathcad. Які стандартні процедури розв'язку використовуються? Наведіть приклади.

12. Який вигляд має вихідний сигнал коливального контуру, якщо частота вхідного гармонічного сигналу значно менша, дорівнює або більша частоти резонансу?

13. Як визначати час встановлення вихідного сигналу коливального контуру при резонансі? Запишіть формулу для часу встановлення.

14. Який вигляд має вихідний сигнал коливального контуру, якщо вхідний сигнал – "меандр", та має частоту, яка значно менша, дорівнює або більша частоти резонансу?

Лекція 5. Метод змінних стану. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

Вступ. Метод змінних стану. Стандартні процедури чисельного інтегрування. Зведення одиночного диференціального рівняння до нормальній системі ЗДР першого порядку у формі Коші. Дослідження послідовного коливального контуру. Лінійні кола третього порядку. Побудова системи рівнянь стану за методом еквівалентних джерел у середовищі системи Mathcad. Аналіз динамічних процесів у типових колах на операційних підсилювачах за методою змінних стану. Аналіз у середовищі Micro-CAP. Робоче завдання. Контрольні запитання та завдання.

ВСТУП

Визначення реакції кола, що має у своєму складі n реактивних елементів, можливо на основі розв'язку одиночного диференціального рівняння n -порядку або *системи* із n диференціальних рівнянь першого порядку.

1. **Розв'язок одиночних диференціальних рівнянь.** У системі Mathcad передбачена функція чисельного розв'язку одиночних диференціальних рівнянь – `odesolve(x,b[,число кроків])`, яка повертає розв'язок диференційного рівняння, описаного в блоці Given, за заданих початкових умов і кінці інтервалу інтегрування b .

2. **Стандартні процедури чисельного інтегрування,** які використовуються в більшості математичних систем, орієнтовані на нормальні системи диференціальних рівнянь, зведених до *форми Коші*:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{array} \right. \quad \text{де} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1(x_0) = y_{0,1}; \\ y_2(x_0) = y_{0,2}; \\ \dots \\ y_n(x_0) = y_{0,n}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Перша система являє собою систему *звичайних диференціальних рівнянь* (ЗДР) першого порядку, розв'язаних відносно похідних (*нормальна форма системи ЗДР*), а друга – задає початкові умови.

1. Метод змінних стану

Змінними стану електричних кіл називають напруги (заряди) ємнісних елементів, струми (потокозчеплення) індуктивних елементів:

$$q(t), v_C(t), \Psi(t), i_L(t) \text{ – змінні стану,}$$

для яких виконується закон комутації (тобто їх значення не можуть змінитися миттєво у момент комутації). Для них можна знайти початкові умови за режимом кола до комутації. Розв'язавши диференціальні рівняння за відомих початкових умов – знайти ці змінні стану після комутації. За знайденими змінними визначають усі напруги та струми кола після комутації.

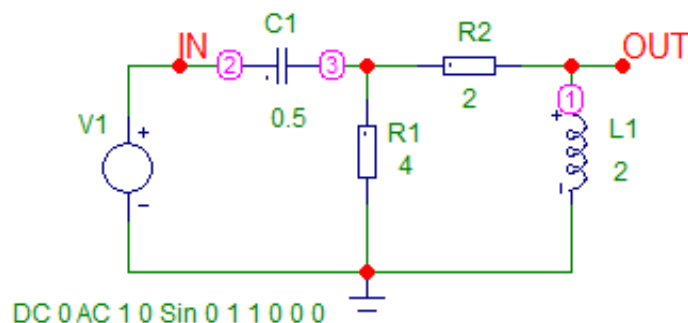
Системи диференціальних рівнянь першого порядку, складені для змінних стану, називають *системами рівнянь стану*. Зазвичай їх надають у вигляді систем відносно *перших похідних від змінних стану*, які знаходяться у лівій частині системи. У правій частині системи знаходяться функції від змінних стану та незалежних джерел. Це так звана *нормальна система ЗДР*. Якщо надати початкові умови – одержимо *нормальну систему ЗДР* у формі Коші.

Існує велика кількість процедур чисельного розв'язку нормальних систем ЗДР у формі Коші, які вбудовано у системи комп'ютерної математики, що робить аналіз електричних кіл досить простою задачею¹⁴.

2. Пасивні лінійні електричні кола другого порядку

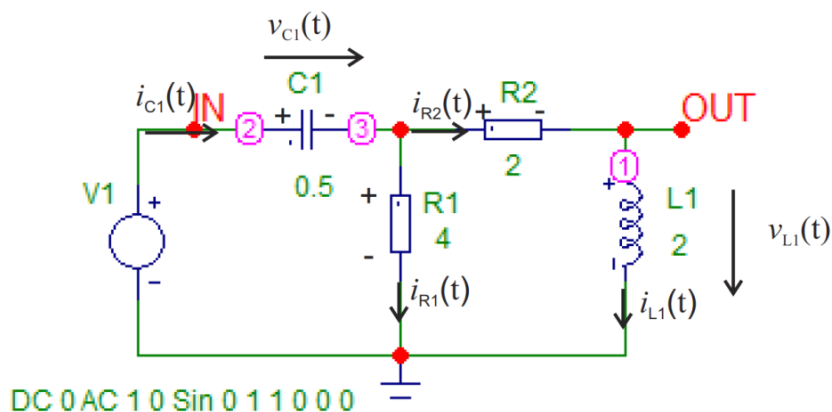
Приклад 1

Схема пасивного лінійного електричного кола другого порядку:

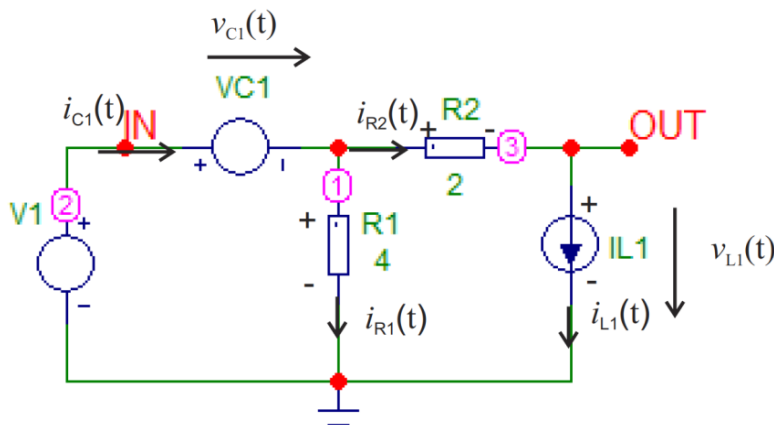


¹⁴ Vlach, J. and Singhal, K. *Computer Methods for Circuit Analysis and Design*. Department of Electrical Engineering and Systems Design University of Waterloo, Ontario, Canada. New-York: Van Nostrand Reinhold Company, 1988.

Завдамо напрямок струмів



1. Еквівалентна схема заміщення для миттєвих струмів та напруг за методом еквівалентних джерел:



Джерело струму $IL1$ – замінює котушку індуктивності $L1$ за миттєвим значенням струму через котушку і за тій самою напругою $v_{L1}(t)$ на котушці. Джерело напруги $VC1$ – замінює ємність $C1$ за миттєвим значенням напруги на ємності $C1$ і за тим самим струмом через ємність.

Склавши алгебраїчні рівняння для миттєвих напруг і струмів кола за законами Ома та Кірхгофа, треба знайти напругу $v_{L1}(t)$ на котушці $L1$ та знайти струм $i_{C1}(t)$ через джерело $VC1$.

Причому, напруга на котушці індуктивності пов'язана зі струмом котушці компонентним співвідношенням $v_{L1}(t) = L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt}$. Струм ємності пов'язаний з напругою на ємності компонентним співвідношенням $i_{C1}(t) = C_1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$.

Робимо заміну $v_{L1}(t) = L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt}$, $i_{C1}(t) = C_1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$. Як наслідок, одержимо систему диференціальних рівнянь першого порядку відносно змінних стану $i_{L1}(t)$ і $v_{C1}(t)$. Система має досить просте рішення в Mathcad.

2. За 2-м законом Кірхгофа для контуру $V1 \rightarrow VC1 \rightarrow R2 \rightarrow iL1$ та за 1-м законом Кірхгофа для вузлу 1 маємо:

$$\begin{cases} V_{in} - V_{C1} - R_2 \cdot i_{L1} - V_{L1} = 0; \\ \frac{V_{in} - V_{C1}}{R_1} + i_{L1} = i_{C1}. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_{L1} = V_{in} - V_{C1} - R_2 \cdot i_{L1}; \\ i_{C1} = \frac{V_{in} - V_{C1}}{R_1} + i_{L1}. \end{cases}$$

3. Робимо заміну:

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = V_{in} - V_{C1} - R_2 \cdot i_{L1}; \\ C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{V_{in} - V_{C1}}{R_1} + i_{L1}. \end{cases}$$

4. Нормальна система ЗДР першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} [V_{in} - V_{C1} - R_2 \cdot i_{L1}]; \\ \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \left[\frac{V_{in} - V_{C1}}{R_1} + i_{L1} \right]. \end{cases}$$

5. В середовищі Mathcad, використовуючи стандартну процедуру, наприклад $Rkadart(x,t1,t2,n,D)$, яка повертає матрицю розв'язків задачі Коші за методом Рунге-Кутта, розв'язуємо систему відносно змінних стану i_{L1} , V_{C1} .

6. За змінними i_{L1} , V_{C1} знаходимо вихідну напругу:

$$V_{out} = V_{L1} = V_{in} - V_{C1} - R_2 \cdot i_{L1}.$$

* * *

Розглянемо коливальний контур з втратами в котушці індуктивності (рис. 1). Початкові умови такі: струм в індуктивному елементі $i_L(0) = 0$ А; напруга на конденсаторі $v_C(0) = 1$ В.

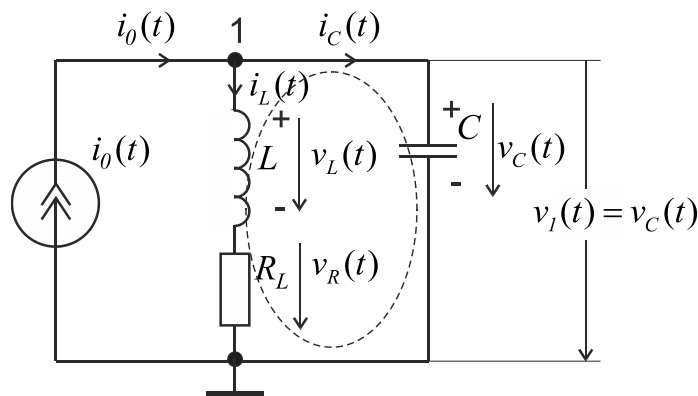


Рис. 1. Схема паралельного коливального контуру з втратами в котушці індуктивності

За законами Кірхгофа для контуру з елементів R_L , L і C (позначено пунктиром) та для струмів в вузлі 1 складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + R_L \cdot i_L(t) - v_C(t) = 0; \\ i_0(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + i_L(t), \end{cases}$$

де враховано $v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$, $i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$, яку легко звести до нормальної форми Коші

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{1}{L} R_L \cdot i_L(t) + \frac{1}{L} v_C(t); \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_0(t) - \frac{1}{C} i_L(t). \end{cases} \quad \begin{cases} i_L(0) = 0 \text{ A}; \\ v_C(0) = 1 \text{ B}. \end{cases} \quad (2)$$

Приклад 2

Документи Mathcad на рис. 2 і рис. 3 ілюструють техніку розв'язання системи рівнянь першого порядку (1) за заданим вхідним сигналом та за заданими початковими умовами. В першому випадку вхідний сигнал – $i_0(t) = 1 \text{ A}$, $t \geq 0$; в другому випадку – $i_0(t) = I_0 \sin(\omega t)$, $t \geq 0$, $I_0 = 1 \text{ A}$, $\omega = 2\pi f$, $f = 0,5 \text{ Гц}$.

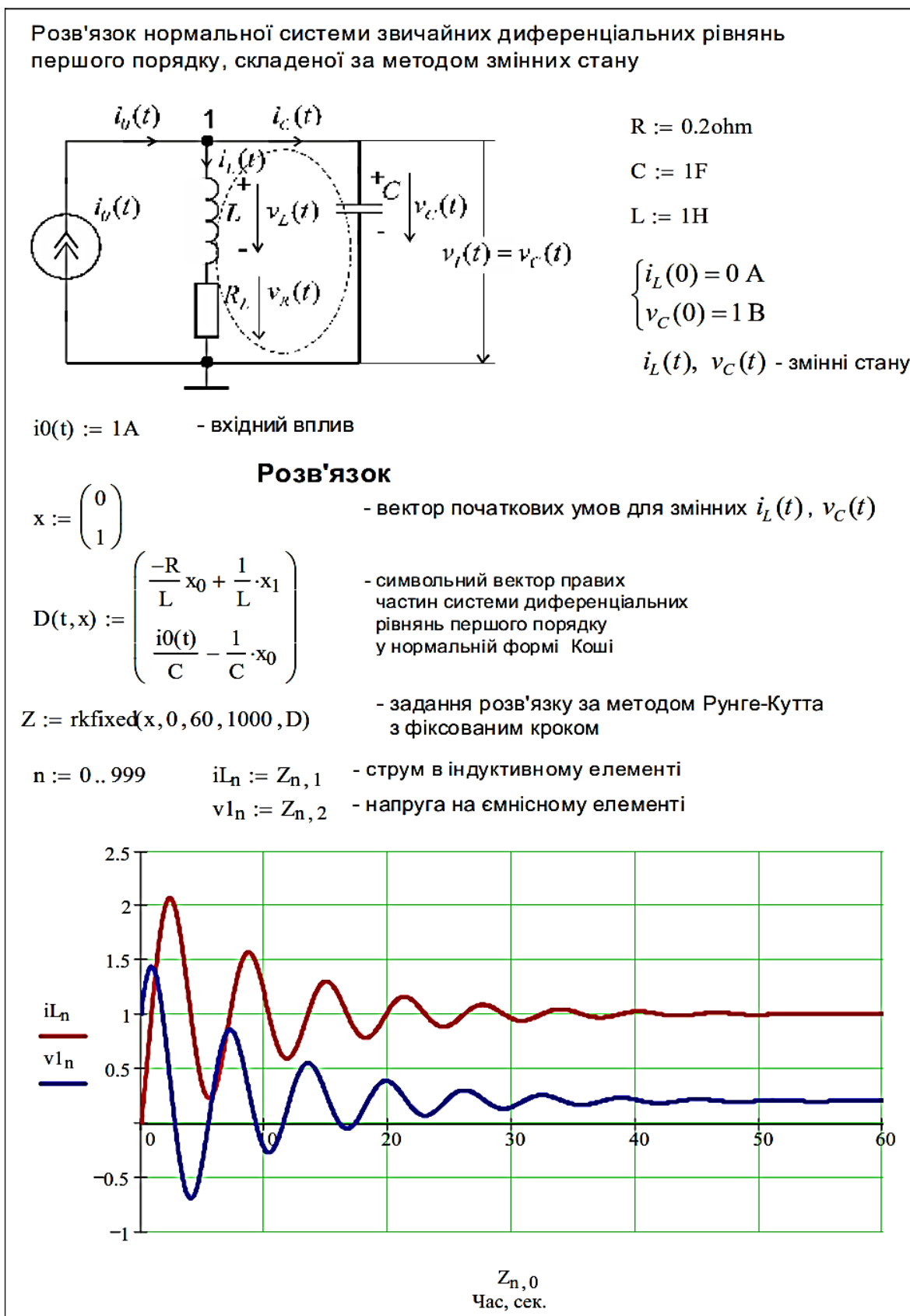


Рис. 2. Підключення контуру до джерела постійного струму

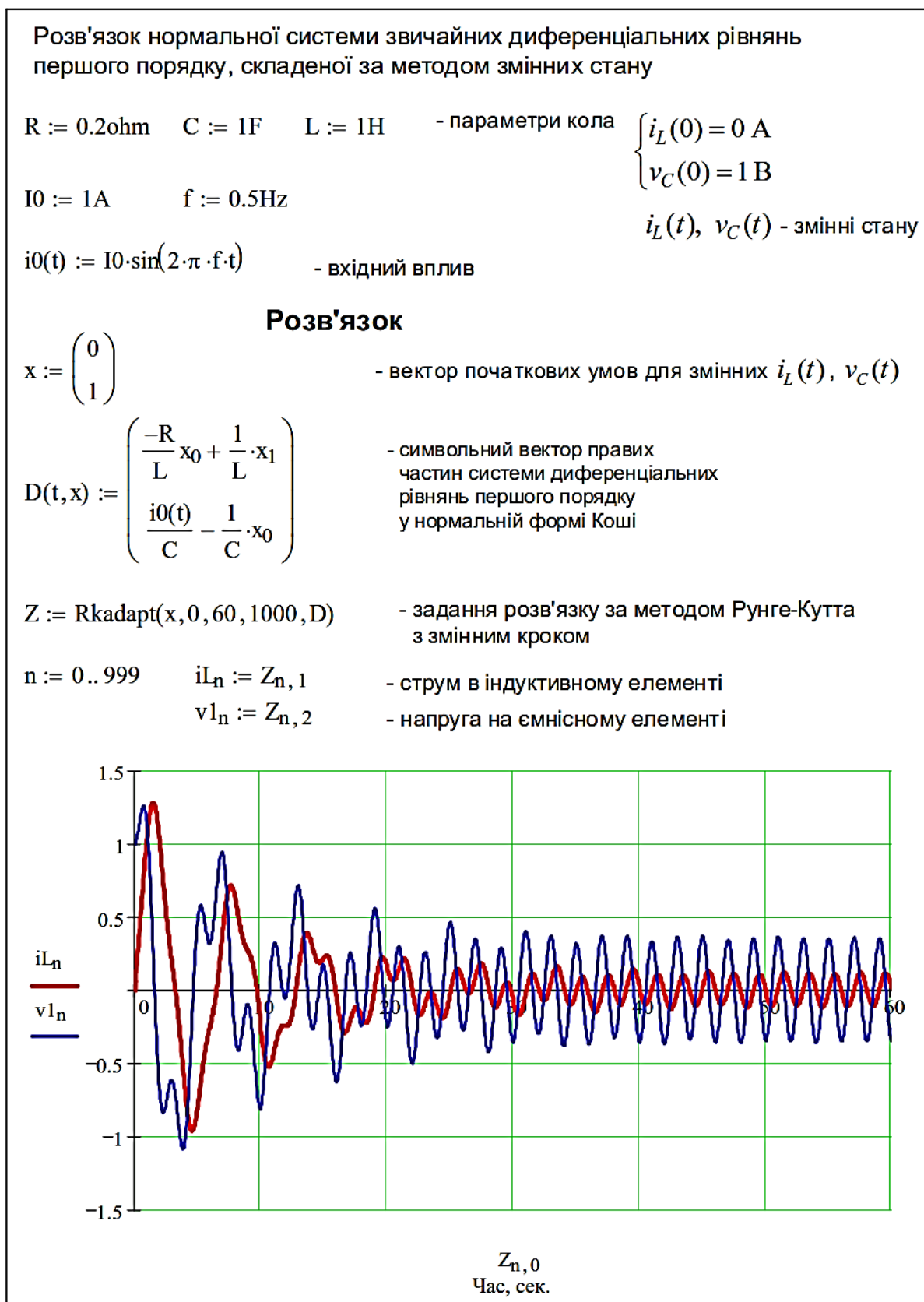


Рис. 3. Підключення контуру до джерела синусоїдального струму

Функція $\text{rkfixed}(x,t_1,t_2,n,D)$ ¹⁵ – повертає матрицю розв’язків з постійним кроком системи звичайних диференціальних рівнянь (задачі Коші) за методом Рунге-Кутта. Праві частини диференціальних рівнянь (у вигляді перших похідних від шуканих функцій) записані в символьному векторі D за початкових умов, що задані у векторі x , при розв’язку на інтервалі від t_1 до t_2 та при фіксованій кількості кроків n .

Матриця розв’язків, що створюється, має ряд стовбців, кількість яких на 1 більше кількості рівнянь. Перший стовбець – це значення аргументу розв’язків (змінної часу t) на рівних інтервалах, другі стовбці – значення шуканих змінних.

Функція $\text{Rkadapt}(x,t_1,t_2,n,D)$ – завдяки автоматичній зміні кроку дає точніший результат. Незважаючи на зміну кроку, виведення розв’язків дається при рівномірному розташуванні точок розв’язків.

Якщо розв’язок системи диференціальних рівнянь має вигляд гладких функцій, то доцільно застосовувати функцію $\text{Bulster}(x,t_1,t_2,n,D)$.

* * *

¹⁵ *Mathcad 2001 Professional Reference Manual*. MathSoft, Inc. 101 Main Street Cambridge, MA 02142. – 528 p. – <http://www.mathsoft.com>

3. Лінійні кола третього порядку. Побудова системи рівнянь стану за методом еквівалентних джерел у середовищі Mathcad

Приклад 3

Розглянемо процедуру побудови системи рівнянь стану в середовищі Mathcad на прикладі кола третього порядку (рис. 4).

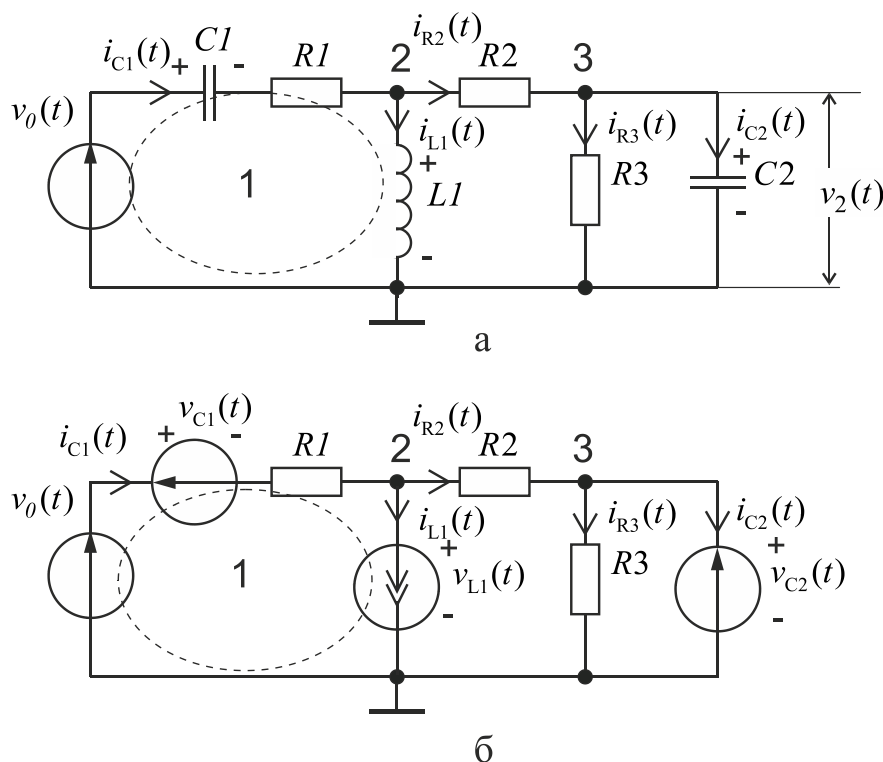


Рис. 4. Коло третього порядку (а) та еквівалентна схема заміщення (б), складена згідно з теоремою компенсації за методом еквівалентних джерел

1. Ємність у схемі заміщення замінюється ідеальним джерелом напруги $v_C(t)$ таким чином, що напруга $v_C(t)$ та струм $i_C(t)$ ємності залишаються такими ж самими, як у початковій схемі.

Котушка індуктивності замінюється ідеальним джерелом струму таким чином, що струм $i_L(t)$ і напруга $v_L(t)$ залишаються такими ж самими.

2. Для схеми заміщення (рис. 4,б) складемо систему незалежних алгебраїчних рівнянь для миттєвих значень струмів і напруг у гілках кола, які охоплюють струми в ємнісних елементах $i_{C1}(t)$, $i_{C2}(t)$ та напругу на індуктивному елементі $v_{L1}(t)$, а також враховують змінні стану $v_{C1}(t)$, $v_{C2}(t)$, $i_{L1}(t)$ та незалежне джерело сигналу $v_0(t)$ (рис. 5).

Перше рівняння складено за другим законом Кірхгофа для контуру 1 (позначено пунктиром). Друге та третє рівняння складені за першим законом Кірхгофа для струмів у вузлах 2 і 3. Четверте рівняння, що визначає струм $i_{R2}(t)$ через $R2$, потрібно лише для розв'язку системи. Струм $i_{R2}(t)$ є зайвою змінною. Після розв'язку системи, його потрібно виключити.

3. Використовуючи функцію Find (у складі обчислювального блоку, який визначається директивою Given), дістанемо розв'язок системи алгебраїчних рівнянь в символьному вигляді відносно усіх змінних $i_{C1}(t)$, $i_{C2}(t)$, $v_{L1}(t)$ та $i_{R2}(t)$ в залежності лише від змінних стану $v_{C1}(t)$, $v_{C2}(t)$, $i_{L1}(t)$ та джерела $v_0(t)$.

Розв'язком для струму $i_{R2}(t)$, як зайвої змінної, знехтуємо.

4. Далі робимо заміну $i_{C1}(t)$, $i_{C2}(t)$, $v_{L1}(t)$ похідними від змінні стану:

$$i_{C1}(t) = C_1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt}, \quad i_{C2}(t) = C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt}; \quad v_{L1}(t) = L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt}$$

та одержимо нормальну систему диференціальних рівнянь стану першого порядку, які включають лише:

- перші похідні від змінних стану у лівій частині рівнянь;
- функції від змінних стану та незалежних джерел у правій частині рівнянь.

Метод змінних стану	
Given	
$v_0(t) - v_{C1} - R1 \cdot i_{C1} - v_{L1} = 0$	$i_{R2} = i_{C1} - i_{L1}$
	$i_{C2} = i_{R2} - \frac{v_{C2}}{R3}$
$i_{R2} = \frac{v_{L1} - v_{C2}}{R2}$	
Find($i_{C1}, i_{C2}, v_{L1}, i_{R2}$) →	$\left[\begin{array}{c} \frac{(v_0(t) - v_{C1} - v_{C2} + i_{L1} \cdot R2)}{(R2 + R1)} \\ \frac{(R3 \cdot v_0(t) - R3 \cdot v_{C1} - R3 \cdot i_{L1} \cdot R1 - R3 \cdot v_{C2} - v_{C2} \cdot R2 - v_{C2} \cdot R1)}{R3 \cdot (R2 + R1)} \\ \frac{(R2 \cdot v_0(t) - R2 \cdot v_{C1} - R2 \cdot R1 \cdot i_{L1} + v_{C2} \cdot R1)}{(R2 + R1)} \\ \frac{(v_0(t) - v_{C1} - R1 \cdot i_{L1} - v_{C2})}{(R2 + R1)} \end{array} \right]$

Рис. 5. Побудова системи рівнянь стану в середовищі Mathcad

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \left\{ \frac{v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t) + i_{L1}(t)R_2}{(R_1 + R_2)C_1} \right\}; \\ \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \left\{ \frac{R_3v_0(t) - R_3v_{C1}(t) - R_3R_1i_{L1}(t) - R_3v_{C2}(t) - R_2v_{C2}(t) - R_1v_{C2}(t)}{(R_1 + R_2)R_3C_2} \right\}; \\ \frac{di_{L1}(t)}{dt} = \left\{ \frac{R_2v_0(t) - R_2v_{C1}(t) - R_1R_2i_{L1}(t) + R_1v_{C2}(t)}{(R_1 + R_2)L_1} \right\}. \end{cases}$$

5. У наступному документі Mathcad (рис. 6) наведено розв'язок системи відносно змінних стану з використанням стандартної функції Rkadapt(x,t1,t2,n,D) та побудова графіків.

6. За знайденими змінними стану можна знайти всі інші струми і напруги в гілках кола.

Ці процедури пригідні також і для аналізу *нелінійних електричних кіл з інерційними елементами*, тобто для випадку, коли *системи рівнянь стану – нелінійні*, тобто у випадку, коли *точні аналітичні методи розв'язку не існують* (лише приблизні спрощені).

* * *

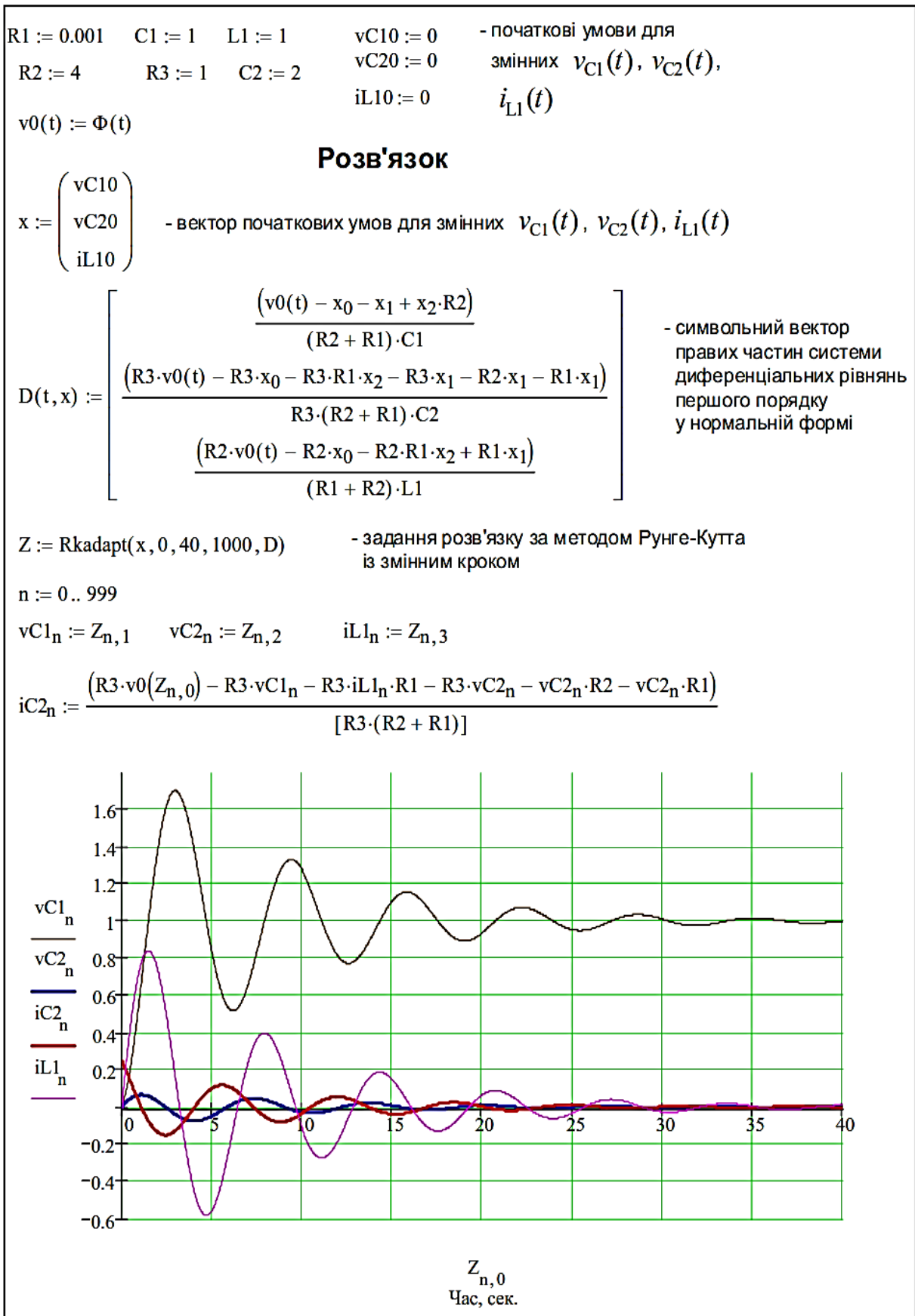
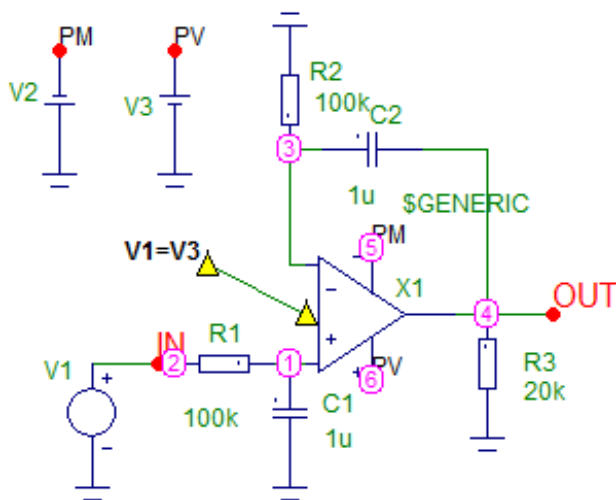


Рис. 6. Розв'язок системи диференціальних рівнянь відносно змінних стану

**Аналіз динамічних процесів у типових колах
на операційних підсилювачах за методом змінних стану**

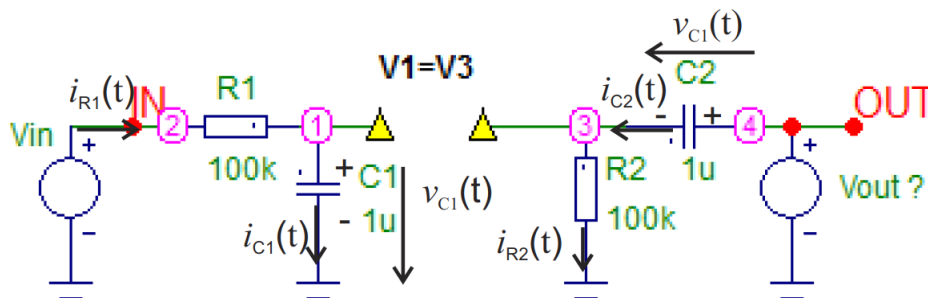
Приклад 4

Схема активного лінійного електричного кола другого порядку на операційному підсилювачі ОП (неінвертуючий інтегратор):

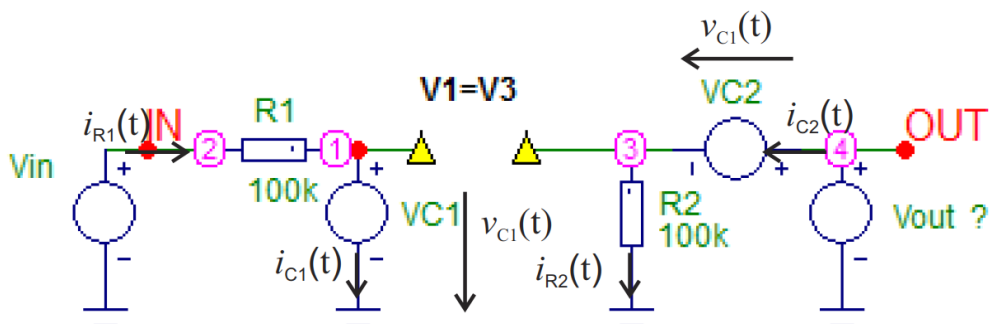


DC 0 AC 1 0 Pulse -5 5 1n 100m 100m 400m 1

1. ОП замінюємо його моделлю – кероване джерело напруги V_{out} (керується різницею $V_1 - V_3 \approx 0$). Завдамо напрямки струмів:



2. Еквівалентна схема заміщення для миттєвих струмів та напруг:



3. За законом Ома для ділянки кола:

$$\frac{V_{\text{in}} - V_{c1}}{R_1} = C_1 \frac{dV_{c1}}{dt}; \quad \frac{V_{\text{out}} - V_{c2}}{R_2} = C_2 \frac{dV_{c2}}{dt}.$$

Звідки

$$V_{R2} = R_2 C_2 \frac{dV_{C2}}{dt}; \quad V_{C1} = V_{R2} \Rightarrow \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{V_{C1}}{R_2 C_2}.$$

4. Нормальна форма ЗДР першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \frac{V_{\text{in}} - V_{C1}}{R_1}; \\ \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} \frac{V_{C1}}{R_2}. \end{cases}$$

5. В середовищі Mathcad, використовуючи стандартну процедуру типа Rkadapt(x,t1,t2,n,D), яка повертає матрицю розв'язків задачі Коші за методом Рунге-Кутта, розв'язуємо систему відносно змінних стану V_{C1} , V_{C2} .

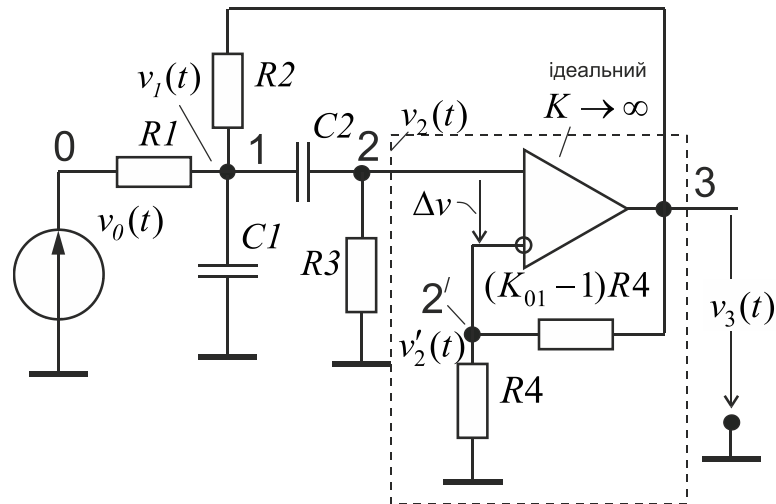
6. Знаходимо вихідну напругу за змінними V_{C1} , V_{C2} :

$$V_{\text{out}} = R_2 C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} + V_{C2} = V_{R2} + V_{C2} = V_{C1} + V_{C2}.$$

* * *

Приклад 5

Розглянемо смуговий фільтр (СФ) на операційному підсилювачі з обмеженим коефіцієнтом підсилення, з додатним зворотним зв'язком (схема за структурою Саллена-Кея), що має *селективні* властивостями, як у резонансної системи (рис. 7).



$$\Delta v \rightarrow 0 \quad v_2(t) = v_2'(t)$$

$$v_3(t) = v_2'(t) \cdot \frac{(K_{01} - 1) \cdot R4 + R4}{R4} = v_2(t) \cdot K_{01}$$

Рис. 7. Смуговий фільтр з додатним зворотним зв'язком на основі підсилювача з обмеженим коефіцієнтом підсилення K_{01}

Примітка. Якщо $R_1 = R_2 = R$ і $R_3 = 2R$, $C_1 = C_2 = C$, то частота, коли коефіцієнт передачі приймає максимальне значення, дорівнюватиме $f_p = 1/2\pi RC$. Коефіцієнт передачі на цієї частоті $K_{\text{ВРФ}}(f_p) = K_{01}/(3 - K_{01})$. Добротність схеми $Q_p = 1/(3 - K_{01})$. За умови $K_{01} \rightarrow 3$ добротність $Q_p \rightarrow \infty$.

Компонентне рівняння підсилювача, який на рис. 7 виділено пунктиром, таке:

$$v_3(t) = K_{01} \cdot v_2(t).$$

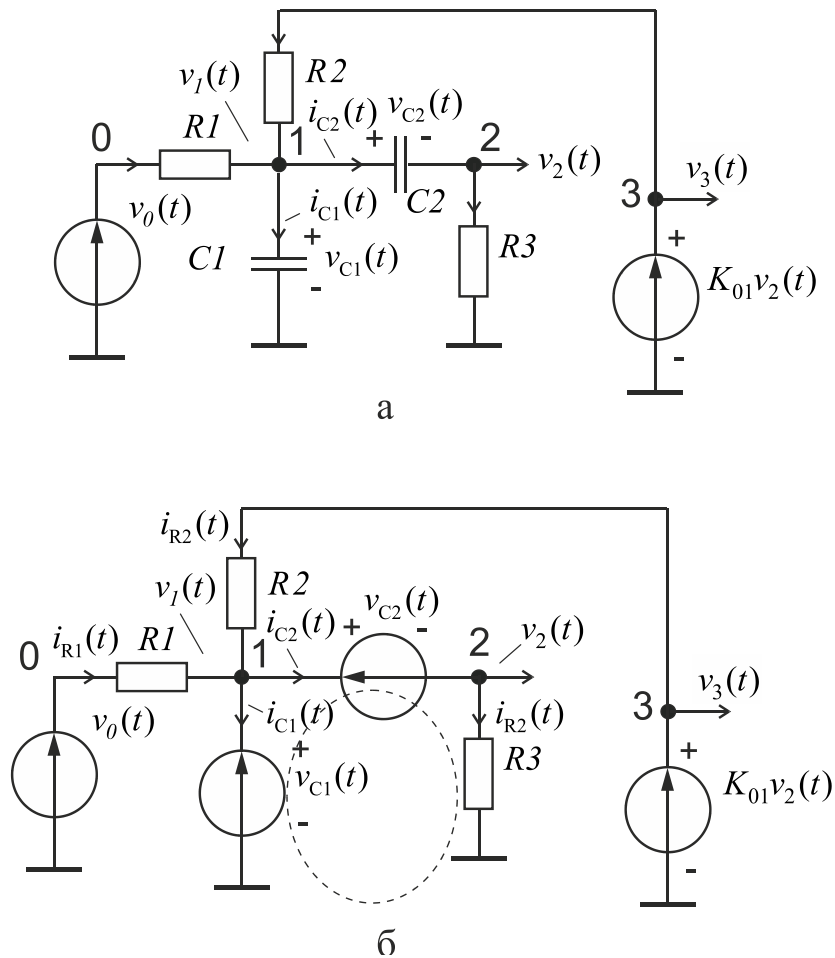


Рис. 8. Схема заміщення СФ (а) та еквівалентна схема (б), складена згідно з теоремою компенсації за методом еквівалентних джерел

За першим законом Кірхгофа для струмів у вузлах 1 і 2 (рис. 8,б) одержимо:

$$\frac{v_0(t) - v_{C1}(t)}{R_1} = i_{C1}(t) + i_{C2}(t) - \frac{v_3(t) - v_{C1}(t)}{R_2};$$

$$i_{C2}(t) = \frac{v_2(t)}{R_3}.$$

За другим законом Кірхгофа для контуру (позначено пунктиром) одержимо:

$$v_2(t) = v_{C1}(t) - v_{C2}(t).$$

Звідси одержимо алгебраїчну систему рівнянь, розв'язану відносно струмів в ємнісних елементах (у правій частині лише змінні стану $v_{C1}(t)$, $v_{C2}(t)$, та незалежне джерело сигналу $v_0(t)$):

$$\begin{cases} i_{C1}(t) = v_{C1}(t) \left[\frac{K_{01}}{R_2} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] - v_{C2}(t) \left[\frac{K_{01}}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] + \frac{v_0(t)}{R_1}; \\ i_{C2}(t) = \frac{1}{R_3} [v_{C1}(t) - v_{C2}(t)]. \end{cases}$$

Зробимо заміну $i_{C1}(t) = C1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$, $i_{C2}(t) = C2 \cdot \frac{dv_{C2}(t)}{dt}$ та одержимо нормальну систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{1}{C1} \left\{ v_{C1}(t) \left[\frac{K_{01}}{R_2} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] - v_{C2}(t) \left[\frac{K_{01}}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] + \frac{v_0(t)}{R_1} \right\}; \\ \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{1}{C_2 \cdot R_3} [v_{C1}(t) - v_{C2}(t)]. \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язуючи систему (5) в середовищі Mathcad за заданих початкових умов $v_{C1}(0_+) = v_{C1}(0_-)$ і $v_{C2}(0_+) = v_{C2}(0_-)$ (зазвичай $v_{C1}(0_+) = 0\text{В}$, $v_{C2}(0_+) = 0\text{В}$), знайдемо реакцію СФ на будь-який сигнал $v_0(t)$. Вихідна напруга СФ дорівнює:

$$v_3(t) = K_{01} \cdot [v_{C1}(t) - v_{C2}(t)].$$

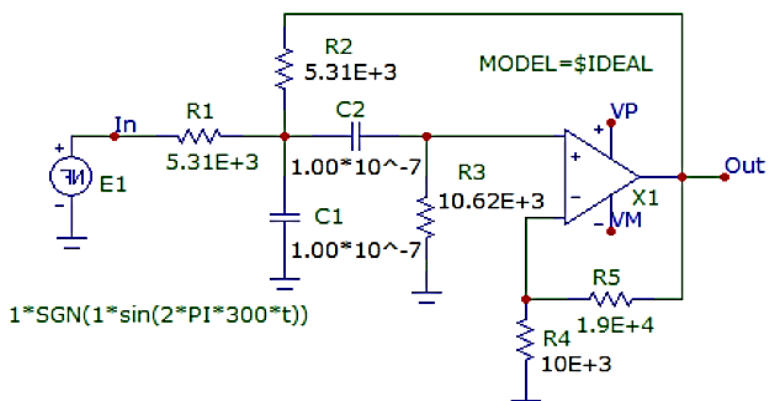
На рис. 9 наведено документ Mathcad, у якому обчислюється реакція СФ на сигнал типу меандр, частота якого дорівнює частоті $f_p = 1/2\pi RC = 300$ Гц. Отже, смуговий фільтр виділяє із меандру його першу гармоніку та підсилює її.

Примітка. Частоту $f = f_{\max} \rightarrow f_p$ (за умови $Q_p \rightarrow \infty$), коли з'являється викид АЧХ часто називають резонансною. Для смугового фільтра завжди $f_{\max} = f_p$.

* * *

Розв'язок нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, складеної за методом змінних стану

Смуговий фільтр
Gain=29.25dB Center Frequency=300Hz Order=2 Q=10



$$R := 5.31 \cdot 10^3$$

$$C := 1 \cdot 10^{-7}$$

$$K := 2.9$$

$$R1 := R$$

$$R2 := R$$

$$R3 := 2 \cdot R$$

$$C1 := C$$

$$C2 := C$$

$$V0 := 1$$

$$f := 300$$

$$T := \frac{1}{f}$$

$$v0(t) := V0 \cdot \text{sign}(\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)) \quad \text{- вхідний сигнал типу меандр}$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C1} \left[(x_0) \cdot \left(\frac{K}{R2} - \frac{1}{R1} - \frac{1}{R2} - \frac{1}{R3} \right) - x_1 \cdot \left(\frac{K}{R2} - \frac{1}{R3} \right) + \frac{v0(t)}{R1} \right] \\ \frac{1}{C2 \cdot R3} \cdot (x_0 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.033, 10000, D)$$

$$n := 0 \dots \text{rows}(Z) - 1 \quad vC1_n := Z_{n,1} \quad vC2_n := Z_{n,2} \quad v3_n := K \cdot (vC1_n - vC2_n)$$

$$t_n := Z_{n,0} \quad v0_n := V0 \cdot \text{sign}(\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n))$$

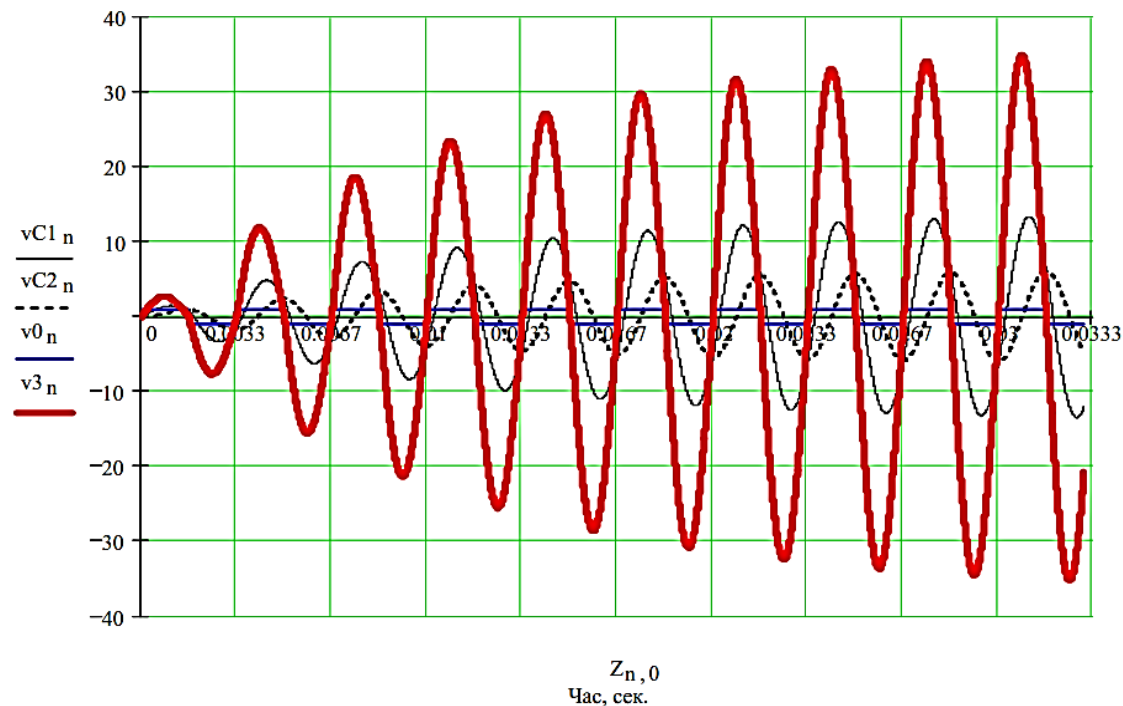


Рис. 9. Аналіз реакції СФ на основі розв'язку системи диференціальних рівнянь, складеної за методом змінних стану

РОБОЧЕ ЗАВДАННЯ

1. Для кіл, зображених на рис. 10, скласти систему диференціальних рівнянь першого порядку відносно змінних стану і вхідного сигналу за нормальною формою Коші.

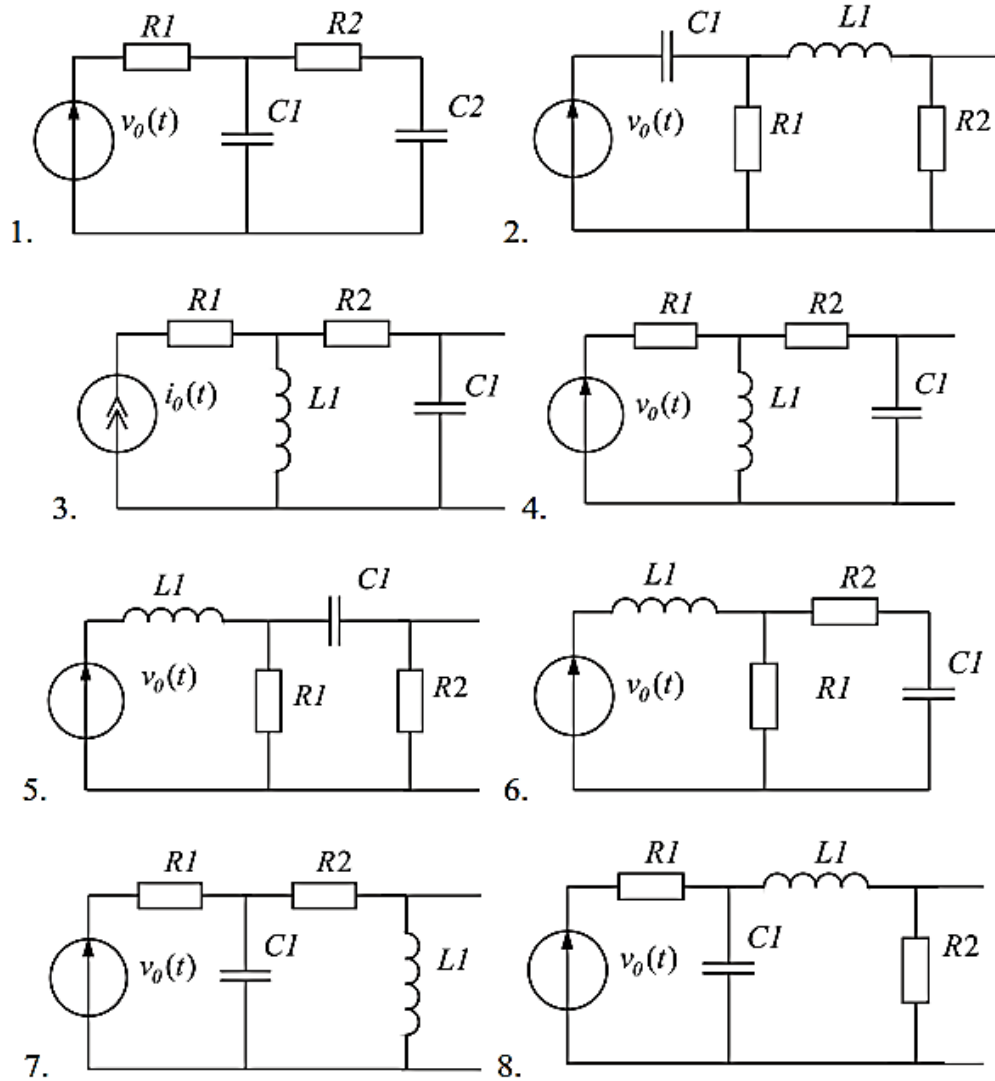


Рис. 10. Пасивні кола другого порядку

2. Для кіл, зображених на рис. 11, скласти систему диференціальних рівнянь першого порядку відносно змінних стану і вхідного сигналу за нормальною формою Коші.

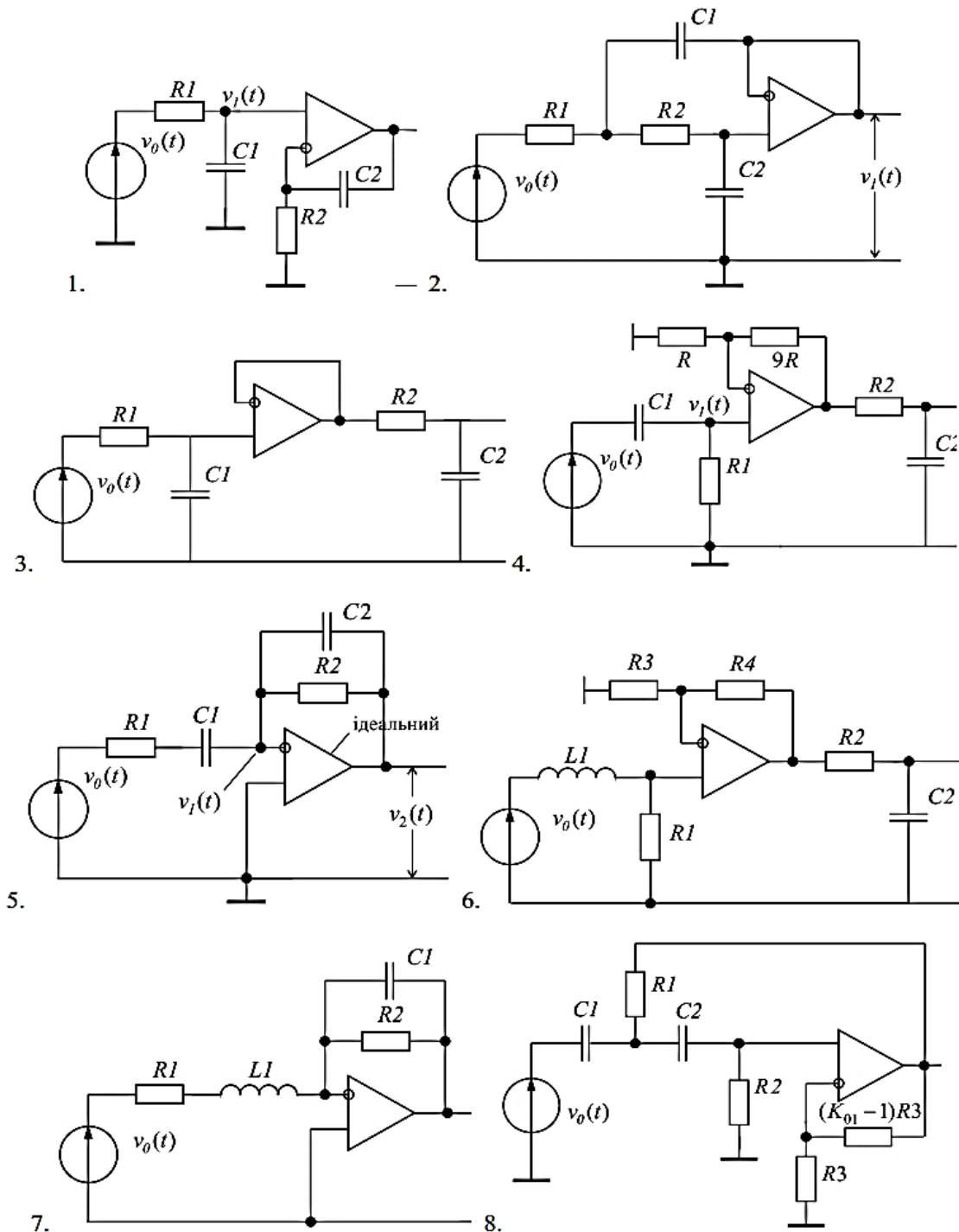


Рис. 11. Електричні кола другого порядку на операційному підсилювачі. Підсилювач – ідеальний

Контрольні запитання та завдання

1. *Що називають системою рівнянь стану електричних кіл, змінними стану?*
2. *Поясніть відмінність методу рівнянь стану щодо аналізу перехідних процесів електричних кіл від класичного методу.*
3. *Наведіть загальну процедуру складання рівнянь стану за методом еквівалентної джерел та рівнянь Кірхофа на прикладах кіл другого та третього порядків.*
4. *Як враховуються операційні підсилювачі в еквівалентних схемах заміщення?*
5. *Навіщо потрібні допоміжні змінні еквівалентної схеми заміщення? Як за допомогою допоміжних змінних одержати систему диференціальних рівнянь стану?*
6. *Що таке "нормальна форма Коші" системи звичайних диференціальних рівнянь?*
7. *Наведіть приклади розв'язку систем диференціальних рівнянь стану у середовищі Mathcad. Які стандартні процедури розв'язку використовуються?*

ТЕМА 3. ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД

Лекція 6. Аналіз лінійних кіл з використанням одностороннього перетворення Лапласа

Одностороннє перетворення Лапласа (\mathcal{L} -перетворення). Компонентні і топологічні рівняння в операторній формі. Аналіз електричних кіл операторним методом. Динамічні рівняння. Імпеданс, адмітанс, імітанс. Операторна схема заміщення. Операторні зображення типових сигналів. Аналіз електричних кіл операторним методом, імпедансний метод. Теорема розкладання Хевісайда. Приклади аналізу в середовищі Mathcad. Аналіз в середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання.

Одностороннє перетворення Лапласа (\mathcal{L} -перетворення)

Для знаходження реакції кола можна використати операторний метод на основі неперервного перетворення Лапласа (\mathcal{L} -перетворення сигналів неперервного часу), який, як відомо, використовується в математиці для розв'язку диференціальних рівнянь. Розглянемо операторний метод на основі \mathcal{L} -перетворення:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt ; \quad (1)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (2)$$

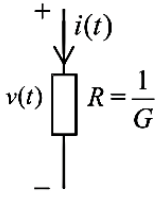
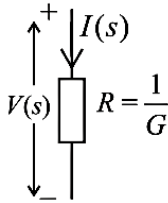
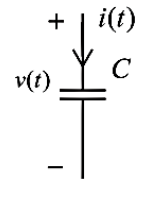
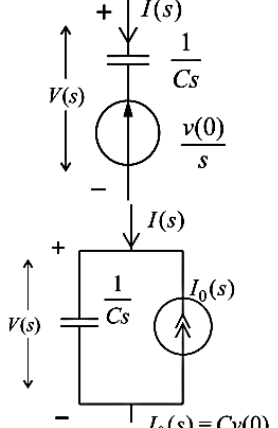
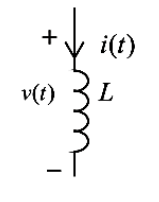
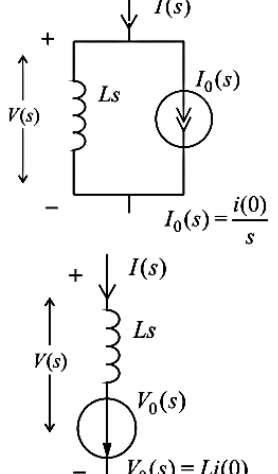
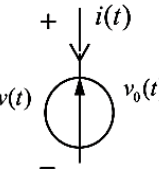
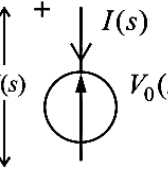
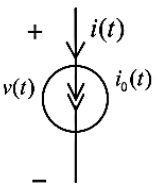
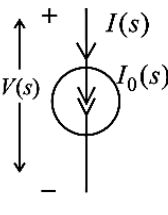
для аналізу перехідних процесів у електричних колах¹⁶⁾.

Компонентні і топологічні рівняння в операторній формі

Компонентні рівняння основних лінійних елементів електричних кіл наведено в табл. 1.

¹⁶⁾ Розмірність зображення за Лапласом дорівнює розмірності оригіналу, помноженій на секунду (Doetsch, G. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*. Munchen, 1967).

Таблиця 1

Компонентне рівняння у часовій області		Компонентне рівняння у частотній області (змінної S)	Еквівалентна операторна схема заміщення
	$v(t) = Ri(t)$ <p>або</p> $i(t) = v(t)/R = Gv(t)$	$V(s) = RI(s)$	
	$v(t) - v(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$ <p>або</p> $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v(0)}{s}$ $I(s) = CsV(s) - Cv(0)$ <p>де $v(0)$ - початкове значення напруги на елементі</p>	
	$i(t) - i(0) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$ <p>або</p> $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$I(s) = \frac{1}{Ls} V(s) + \frac{i(0)}{s}$ $V(s) = LsI(s) - Li(0)$ <p>де $i(0)$ - початкове значення струму в елементі</p>	
	$v(t) = v_0(t)$ <p>не залежить від $i(t)$</p>	$V(s) = V_0(s)$	
	$i(t) = i_0(t)$ <p>і не залежить від $v(t)$</p>	$I(s) = I_0(s)$	

Отже, реактивні елементи у частотній області комплексної змінної s характеризуються деяким опором (компонентні рівняння мають вигляд закону Ома), котрий зветься імпедансом (індуктивний елемент має імпеданс $Z_L(s) = Ls$, ємнісний елемент – $Z_C(s) = 1/Cs$), до якого додатково підключене деяке джерело напруги чи струму, що враховує ненульові початкові умови. Імпеданс $Z(s)$ – є відношення зображення напруги на елементі до зображення струму через нього. Величина, зворотна імпедансу, яка має сенс провідності, зветься повною провідністю або адмітансом (має позначення $Y(s)$). Повна провідність індуктивного чи ємнісного елементів – $Y_L(s) = 1/Ls$, $Y_C(s) = Cs$.

Динамічні рівняння

Динамічні рівняння електричних кіл у часовій області є лінійними відносно миттєвих значень струмів та напруг елементів і реалізують обмеження на структуру кола, зумовлені законами Кірхгофа. Внаслідок лінійності обмежень, згідно з теоремою лінійності перетворення Лапласа, *топологічні динамічні рівняння часової області перетворюються на аналогічні топологічні рівняння в операторній формі у області комплексної змінної s відносно зображень струмів і напруг.*

<p>Часова область</p> $\sum_k i_k(t) = 0$ <p>в перерізі</p>	\Leftrightarrow	<p>Частотна область</p> $\sum_k [I_k(s)] + \sum_m [I_{0m}(s)] = 0$ <p>в перерізі</p>
$\sum_k v_k(t) = 0$ <p>по контуру</p>	\Leftrightarrow	$\sum_k [V_k(s)] + \sum_m [V_{0m}(s)] = 0$ <p>по контуру</p>

де $I_{0m}(s)$, $V_{0m}(s)$ - зображення струму та напруги джерел, які на операторних схемах реактивних елементів відображають ненульові початкові умови. Тобто їх структура така сама, як і для часової області. Але замість *інтегро-*

диференціальних рівнянь одержимо алгебраїчні рівняння відносно зображень струмів і напруг, інтерпретація та розв'язок яких значно простіше.

Операторна схема заміщення кола – це є схемне зображення електричного кола у частотній області (комплексної змінної s), котре утворюється з'єднанням виводів операторних схем заміщення його елементів точно так, як це реалізується під час зображення схеми кола в часовій області.

Змінними в гілках кола є зображення струмів і напруг, діючих у часовій області. "Параметрами елементів" у частотній області є їх *імпеданси*, які відповідають реальним елементам, а додаткові джерела, що відповідають ненульовим початковим умовам, виявляються тільки при переході в частотну область.

Операторні зображення деяких типових сигналів наведено у табл. 2¹⁷⁾.

Таблиця 2

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)], t > 0$	\Leftrightarrow	$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$1(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{s}$
$1(t - \tau)$	\Leftrightarrow	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$
$e^{-\alpha t}$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{s + \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	\Leftrightarrow	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$
$t = \int_0^t 1(t) dt$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 = 2 \int_0^t t dt$	\Leftrightarrow	$\frac{2}{s^3}$

¹⁷⁾ Докладні таблиці перетворень Лапласа наведені в різноманітних посібниках та довідниках як по теорії електричних кіл, так і в математичних довідниках.

$t e^{-\alpha t}$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$\sin \omega_0 t = \frac{1}{j} sh(j\omega_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t = \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} \sin(\omega_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t \pm \psi) =$ $= \cos(\psi) \sin(\omega_0 t) \pm \sin(\psi) \cos(\omega_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{\omega_0 \cdot \cos(\psi) \pm s \cdot \sin(\psi)}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t \pm \psi) =$ $= \cos(\psi) \cos(\omega_0 t) \mp \sin(\psi) \sin(\omega_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{s \cdot \cos(\psi) \mp \omega_0 \cdot \sin(\psi)}{s^2 + \omega_0^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$	\Leftrightarrow	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$	\Leftrightarrow	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$

При визначенні зображення одиничного імпульсного сигналу або дельта-імпульсу $\delta(t)$:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

нижня межа вибирається від $t = 0_-$, щоб $\delta(t)$ – функція, яка відмінна від нуля лише в точці $t = 0$, була включена в інтервал інтегрування.

Аналіз електричних кіл операторним методом

Визначимо перехідний процес у послідовному коливальному контурі.

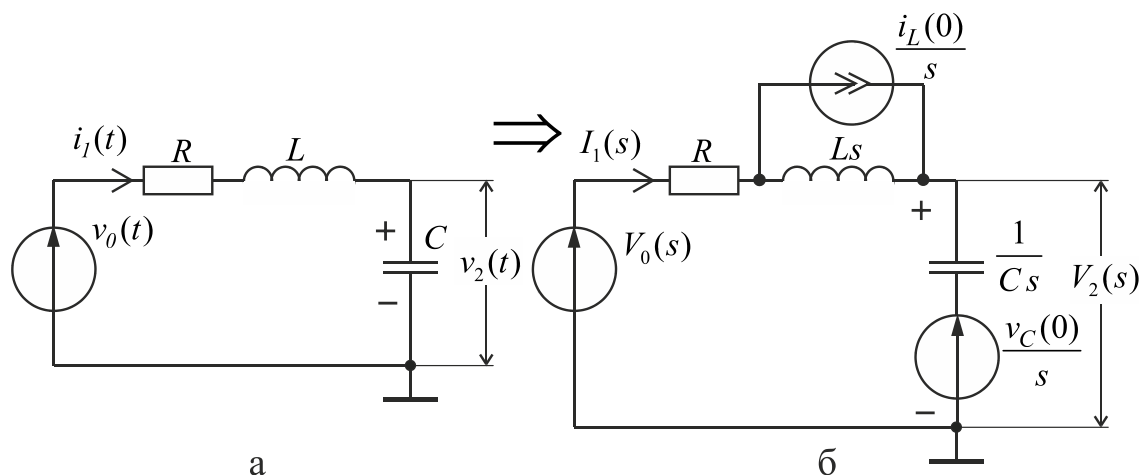


Рис. 1. Електричне коло (а) та його еквівалентна операторна схема заміщення (б)

Якщо значення всіх незалежних джерел (вхідних сигналів) ЛПЧ-кола дорівнюють нулю на деякому інтервалі часу $t \geq t_0$, то протягом цього інтервалу реакція кола (струми та/або напруги) не обов'язково буде дорівнювати нулю, оскільки може бути не рівною нулю енергія, накопичена в реактивних елементах (конденсаторах, котушках індуктивності) на інтервалі $t < t_0$. У цьому випадку реакцію кола називають *власною* реакцією або РНД-реакцією – *реакцією* на ненульові початкові умови, але за нульовою зовнішньою дією (за відсутності вхідних діючих сигналів).

Розглянемо *власну* реакцію на прикладі кола на рис. 2,а, що являє собою послідовний коливальний контур, де взамін джерела вхідної напруги врахований лише його внутрішній опір, який дорівнює нулю.

Припустімо, що вихідним сигналом є напруга $v_2(t)$ на конденсаторі C . Еквівалентну операторну схему заміщення кола зображено на рис. 2,б, де додаткові джерела струму $\frac{i_L(0)}{s}$ та напруги $\frac{v_C(0)}{s}$ відповідають ненульовим початковим умовам.

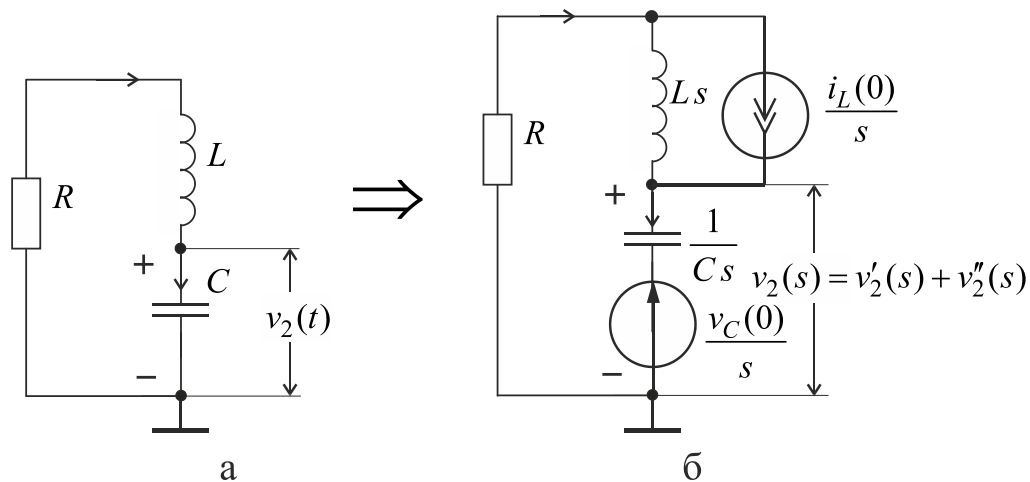


Рис. 2. Власна реакція або реакція кола при нульовому діючому сигналі (РНД-реакція)

Аналіз значно спрощується, якщо використати метод суперпозиції. Тобто для ЛЧ-кіл реакція від декількох джерел сигналу є сумою реакцій на кожне джерело сигналу за умови, коли значення всіх інших джерел прийняти нульовими, але замість них враховують внутрішній опір. У цьому випадку схему, що на рис. 2,б, можна подати у вигляді двох схем (рис. 3), які розраховують незалежно.

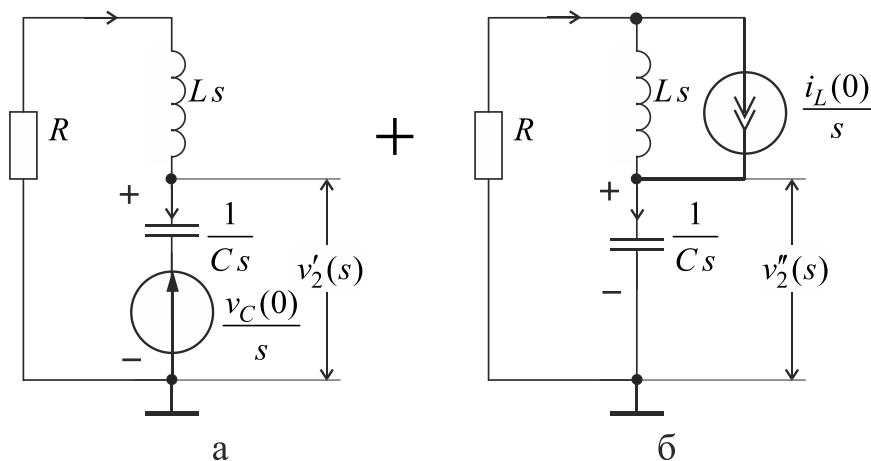


Рис. 3. Принцип суперпозиції

Для кожної схеми (рис. 3) знаходимо відповідні складові загальної реакції кола, які потім сумуємо:

$$V_2(s) = V_2'(s) + V_2''(s). \quad (3)$$

Вираз для складової реакції $V_2'(s)$, яка обумовлена $\frac{v_c(0)}{s}$, можна знайти за формулою подільника напруги:

$$V_2'(s) = \frac{v_c(0)}{s} \frac{R + sL}{R + sL + 1/sC} = v_c(0) \cdot \frac{(s + \frac{R}{L})}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}. \quad (4)$$

Щоб знайти напругу $V_2''(s)$, спочатку знайдемо напругу на паралельно включених sL і $R + 1/sC$:

$$V_L(s) = \frac{i_L(0)}{s} \cdot \frac{sL(R + 1/sC)}{R + sL + 1/sC}.$$

Потім знайдемо струм через $R + 1/sC$:

$$I_C(s) = \frac{V_L(s)}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{i_L(0)}{s} \cdot \frac{Ls}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}.$$

Далі знайдемо напругу на $1/Cs$. Отже, можна записати аналітичний вираз для складової реакції $V_2''(s)$, яка обумовлена тільки джерелом “струму” $i_L(0)/s$:

$$V_2''(s) = I_C(s) \cdot \frac{1}{Cs} = \frac{i_L(0)}{s} \cdot \frac{Ls}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \cdot \frac{1}{Cs} = i_L(0) \cdot \frac{\frac{1}{C}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \quad (5)$$

Загальна реакція кола матиме вигляд:

$$V_2(s) = v_c(0) \cdot \frac{s + R/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} + i_L(0) \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \quad (6)$$

Наступний етап – від зображення $V_2(s)$ перейти до оригіналу $v_2(t)$, використовуючи зворотне перетворення Лапласа.

Теорема розкладання Хевісайда

Якщо раціональний дріб, який представляє напругу $V_2(s)$, є *правильним* (ступінь чисельника менше степені знаменника) і корені знаменника прості

(тобто різні), то можна використати *теорему розкладання Хевісайда*¹⁸, щоб знайти аналітичний вираз $v_2(t)$.

Отже, $V_2(s)$ можна надати у вигляді:

$$V_2(s) = v_C(0) \cdot \left[\frac{k_1}{s - s_{p1}} + \frac{k_2}{s - s_{p2}} \right] + i_L(0) \cdot \frac{1}{C} \cdot \left[\frac{k_3}{s - s_{p1}} + \frac{k_4}{s - s_{p2}} \right], \quad (7)$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 – коефіцієнти, які називають *лишками*; s_{p1}, s_{p2} – корені характеристичного рівняння

$$s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0,$$

тобто полюси. Припустімо, що елементи кола на рис. 2 мають наступні параметри: $R=0,5$ Ом; $C=1$ Ф; $L=1$ Гн; $i_L(0)=0$ А; $v_C(0)=1$ В. Тобто другий доданок в (7) відсутній. Полюси s_{p1}, s_{p2} дорівнюють $s_{p1} = -0,25 + j0,968$; $s_{p2} = -0,25 - j0,968$. Для функції $V_2(s)$ з простими полюсами значення лишків k_1, k_2 можна обчислити за формулами:

$$\dot{k}_1 = [V_2(s)(s - s_{p1})]_{s=s_{p1}} = \left. \frac{s + 0,5}{s - s_{p2}} \right|_{s=s_{p1}} = -0,5 + j \cdot 0,129; \quad (8)$$

$$\dot{k}_2 = [V_2(s)(s - s_{p2})]_{s=s_{p2}} = \left. \frac{s + 0,5}{s - s_{p1}} \right|_{s=s_{p2}} = -0,5 - j \cdot 0,129. \quad (9)$$

Подамо \dot{k}_1, \dot{k}_2 в експоненціальній формі:

$$\dot{k}_1 = |\dot{k}_1| \cdot e^{j \cdot \arg(\dot{k}_1)} = 0,516 \cdot e^{-j \cdot 0,253}; \quad (10)$$

$$\dot{k}_2 = |\dot{k}_2| \cdot e^{j \cdot \arg(\dot{k}_2)} = 0,516 \cdot e^{j \cdot 0,253}.$$

¹⁸ Siebert, W. McC. *Circuits, Signals, and Systems*. Cambridge, Mass. : MIT Press ; New York : McGraw-Hill Book Company, 1986.

Відмітимо, якщо поліноми чисельника та знаменника мають дійсні коефіцієнти, то полюси, як і лишки, виходять у вигляді комплексно-спряжених пар. Підставляючи (10) в (7) та враховуючи $\frac{1}{s - s_{pi}} \Leftrightarrow e^{s_{pi}t}$, одержимо

аналітичний вираз $v_2(t)$:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= 0,516 \cdot e^{-j0,253} e^{-0,25t} e^{j0,968t} + 0,516 \cdot e^{j0,253} e^{-0,25t} e^{-j0,968t} = \\ &= 0,516 \cdot e^{-0,25t} \left[e^{j(0,968t-0,253)} + e^{-j(0,968t-0,253)} \right], \quad t > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

З урахуванням

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}),$$

$v_2(t)$ можна записати у вигляді:

$$v_2(t) = 1,032 \cdot e^{-0,25t} \cdot \cos(0,968t - 0,253), \quad t > 0. \quad (12)$$

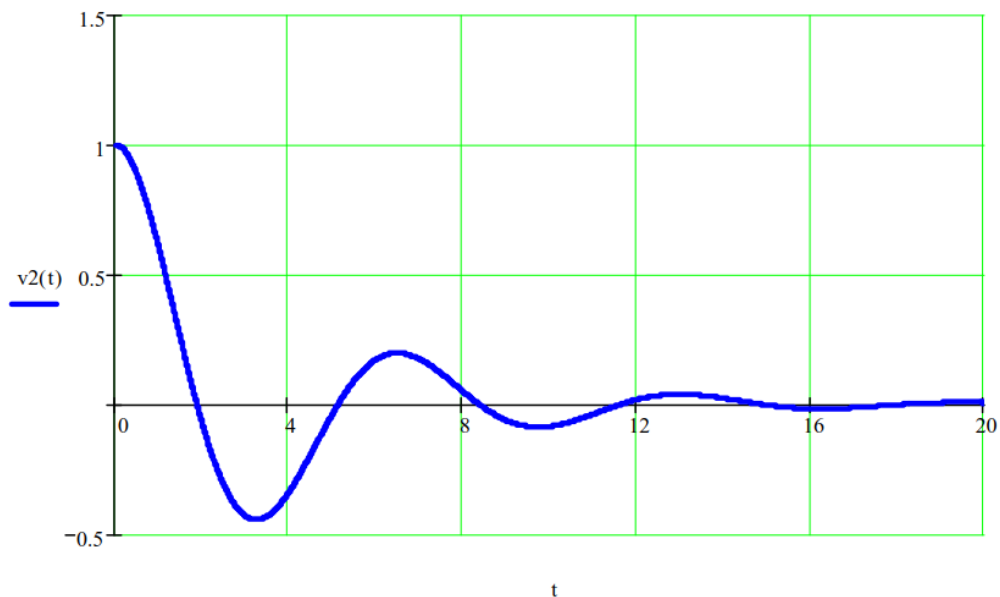


Рис. 4. Графік власної реакції $v_2(t)$, яка знайдена аналітично

Але все це зручніше зробити у символному вигляді в середовищі системи *Mathcad* (рис. 5), де враховано

$$\begin{aligned} A \cdot \cos(\omega t - \psi) &= A \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\psi) + A \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\psi), \\ \psi &= \arctg\left[\frac{A \cdot \sin(\psi)}{A \cdot \cos(\psi)}\right]; \quad \sqrt{[A \cdot \sin(\psi)]^2 + [A \cdot \cos(\psi)]^2} = A. \end{aligned}$$

```

Якщо  $i_L(0) = 0$       R := 0.5      C := 1      L := 1

v2(s) := vc0 *  $\frac{\left(s + \frac{R}{L}\right)}{s^2 + s \cdot \left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{L \cdot C}}$  float, 3 → vc0 *  $\frac{(s + .5)}{(s^2 + .5 \cdot s + 1.)^1}$ 

vc0 := 1

vc0 *  $\frac{(s + .5)}{(s^2 + .5 \cdot s + 1.)^1}$   $\left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, s} \\ \text{float, 3} \end{array} \right.$  → exp(-.250 * t) * cos(.968 * t) + .258 * exp(-.250 * t) * sin(.968 * t)

psi := atan( $\frac{.2582}{1}$ ) float, 3 → .253      A :=  $\sqrt{1^2 + .2582^2}$  float, 3 → 1.03

v2(t) := A * exp(-.250 * t) * cos(.9682 * t - psi) float, 3 → 1.03 * exp(-.250 * t) * cos(.968 * t - .253)

```

Рис. 5. Зворотнє перетворення Лапласа з використанням директиви *invlaplace* оператора символного виводу

Визначимо перехідну реакцію послідовного коливального контуру (рис. 1) за нульових початкових умов (РНУ-реакція), при підключенні джерела постійної напруги $v_0(t) = E_0$; $t > 0$, тобто в операторній схемі заміщення внутрішні джерела, які враховують початкові умови, відсутні.

Враховуючи те, що $v_0(t) = 0$, $t < 0$, вхідний сигнал можна подати у вигляді $v_0(t) = E_0 \cdot 1(t)$.

Операторне зображення діючого (вхідного) сигналу $v_0(s) = \frac{E_0}{s}$. Вхідний операторний опір контуру:

$$Z(s) = R + Ls + \frac{1}{Cs} = \frac{L}{s} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = L \left(s^2 + 2\alpha_k \cdot s + \omega_{\text{рез}}^2 \right) / s.$$

За законом Ома знаходимо зображення струму в контурі:

$$I_1(s) = \frac{V_0(s)}{Z(s)} = \frac{E_0}{sZ(s)} = \frac{E_0}{L \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{E_0}{L \left(s^2 + 2\alpha_k s + \omega_{\text{рез}}^2 \right)}. \quad (13)$$

Напруга на конденсаторі C дорівнює:

$$V_2(s) = I_1(s) \cdot \frac{1}{Cs} = \frac{1}{Cs} \frac{E_0}{L(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} = \frac{E_0 \omega_{\text{рез}}^2}{s(s^2 + 2\alpha_k s + \omega_{\text{рез}}^2)}, \quad (14)$$

$$\text{де } \alpha_k = \frac{R}{2L} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2Q}; \quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Аналітичний вираз реакції в часовій області можна знайти, як і раніше, через лишки, використовуючи теорему розкладання Хевісайда. Але знайти оригінал можна і за таблицями зворотного перетворення Лапласа ¹⁹⁾.

Якщо корені комплексно-спряжені ($D = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$, $\alpha_k < \omega_{\text{рез}}$), то

$$\frac{E_0}{L(s^2 + 2\alpha_k s + \omega_{\text{рез}}^2)} = \frac{E_0}{L[(s + \alpha_k)^2 + \omega_{\text{в}}^2]}, \quad \omega_{\text{в}}^2 = \omega_{\text{рез}}^2 - \alpha_k^2.$$

Відповідна формула для зворотного перетворення Лапласа:

$$\frac{1}{[(s + \gamma)^2 + \lambda^2]} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\gamma t} \sin \lambda t.$$

Звідси

$$i_C(t) = \frac{E_0}{L} \frac{1}{\omega_{\text{в}}} \cdot e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_{\text{в}} t), \quad t > 0. \quad (15)$$

Розглянемо наступний вираз:

$$\frac{E_0 \omega_{\text{рез}}^2}{s(s^2 + 2\alpha_k s + \omega_{\text{рез}}^2)} = \frac{E_0 \omega_{\text{рез}}^2}{s[(s + \alpha_k)^2 + \omega_{\text{в}}^2]}, \quad \omega_{\text{в}}^2 = \omega_{\text{рез}}^2 - \alpha_k^2.$$

Відповідна формула для зворотного перетворення Лапласа, яка взята з [6] (формула (5.1)):

¹⁹⁾ Зазвичай при розрахунках перехідних процесів у лінійних колах із зосередженими параметрами (відповідають лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами або системи таких рівнянь) для більшості вхідних сигналів одержують зображення у вигляді дробово-раціональних функцій. Тому існують спеціальні докладні таблиці зворотних перетворень Лапласа для дробово-раціональних функцій змінної s (Макаров *И.М.*, Менский *Б.М.* Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных z-преобразований: Дробно-рациональные изображения.: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1978. – 247 с.).

$$\frac{1}{s[(s + \gamma)^2 + \lambda^2]} \rightarrow \frac{1}{\rho} - \frac{e^{-\gamma t}}{\lambda\sqrt{\rho}} \cdot \sin(\lambda t + \Theta), \quad \rho = \gamma^2 + \lambda^2, \quad \Theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma};$$

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda^2 + \lambda^2} - \frac{e^{-\gamma t}}{\lambda\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2}} \cdot \cos(\lambda t - \arctg \frac{\gamma}{\lambda}),$$

де $\omega_{\text{рез}}^2 = \alpha_k^2 + \omega_B^2 \rightarrow \gamma^2 + \lambda^2$; $\alpha_k = \gamma$; $\omega_B = \lambda$.

Тоді маємо

$$E_0 \omega_{\text{рез}}^2 \left[\frac{1}{\lambda^2 + \lambda^2} - \frac{e^{-\gamma t}}{\lambda\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2}} \cdot \cos(\lambda t - \arctg \frac{\gamma}{\lambda}) \right] =$$

$$= E_0 \left[1 - \frac{\omega_{\text{рез}}^2 e^{-\alpha_k t}}{\omega_B \omega_{\text{рез}}} \cdot \cos(\omega_B t - \arctg \frac{\alpha_k}{\omega_B}) \right] =$$

$$= E_0 \left[1 - \frac{\omega_{\text{рез}} e^{-\alpha_k t}}{\omega_B} \cdot \cos(\omega_B t - \arctg \frac{\alpha_k}{\omega_B}) \right].$$

З урахуванням $\omega_{\text{рез}} = \omega_B \sqrt{1 + \frac{\alpha_k^2}{\omega_B^2}}$, $\cos(\psi) = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 \psi}}$, де $\psi_B = \arctg(\alpha_k / \omega_B)$,

одержимо:

$$v_2(t) = E_0 \left[1 - \frac{1}{\cos \psi} e^{-\alpha_k t} \cos[\omega_B t - \psi] \right], \quad t > 0, \quad (16)$$

що збігається з результатом, який був отриманий раніше.

Аналіз електричних кіл операторним методом в середовищі системи Mathcad

Засоби Mathcad дають можливість у *символьному* вигляді розв'язувати системи алгебраїчних операторних рівнянь, що описують перехідні процеси в ЛПЧ-колах, а також, використовуючи спеціальну директиву оператора символного виводу `invlaplace`, знаходити зворотне перетворення Лапласа цих розв'язків. Розглянемо деяке довільно вибране електричне коло (рис. 6,а). На рис. 6,б зображено його еквівалентну операторну схему заміщення, яка враховує початкові умови.

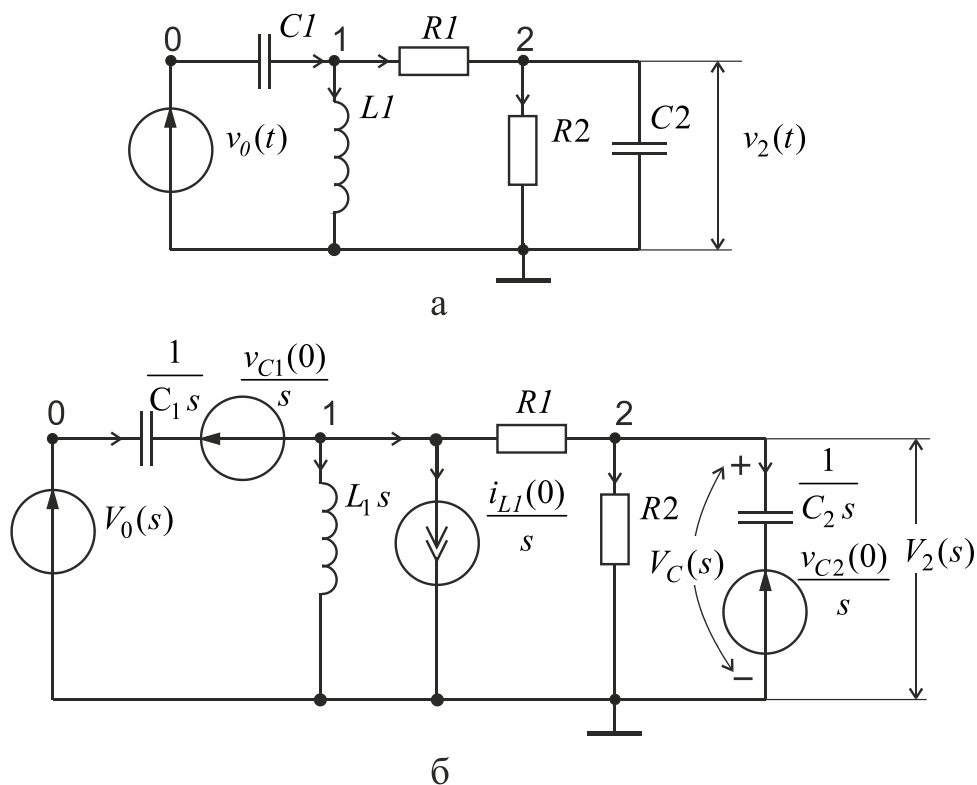


Рис. 6. Електричне коло (а) та його операторна схема заміщення (б)

Власна реакція кола

Спочатку знайдемо *власну реакцію* при нульовій зовнішній дії $v_0(t) = 0$ (РНД-реакція).

Знайдемо розв'язок у трьох випадках, коли початкові умови:

а) $i_{L1}(0) = 0$ А, $v_{C2}(0) = 1$ В ($v_{C1}(0) = 0$ В), (рис. 7);

б) $i_{L1}(0) = 1$ А, $v_{C2}(0) = 0$ В ($v_{C1}(0) = 0$ В), (рис. 8);

в) $i_{L1}(0) = 1$ А, $v_{C2}(0) = 1$ В ($v_{C1}(0) = 0$ В), (рис. 9).

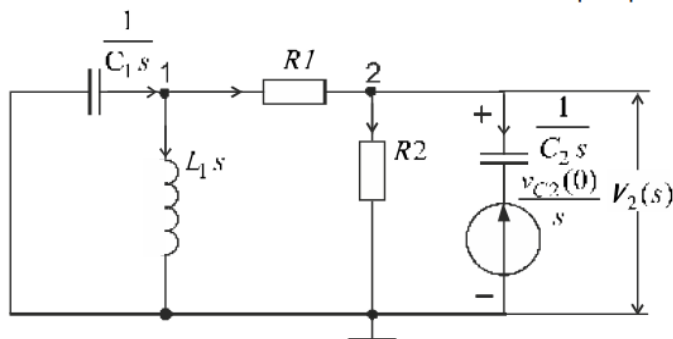
Для того, щоб знайти реакцію кола, необхідно перш за все скласти систему операторних динамічних рівнянь за одним із відомих методів, наприклад, за методом вузлових напруг, де $V_1(s)$, $V_2(s)$ – вузлові змінні.

Фрагменти документів Mathcad на рис. 7 – рис. 9 пояснюють техніку розв'язання зазначеної задачі у символічному вигляді.

Приклад 1

Власна реакція кола на нульову зовнішню дію за ненульових початкових умов

Еквівалентна операторна схема



$$R1 := 4$$

$$C1 := 1 \quad L1 := 1$$

$$R2 := 1 \quad C2 := 2$$

1. Початкові умови:

$$iL1 := 0 \quad \boxed{vc2 := 1} \quad vc1 \equiv 0$$

Given

$$(0 - v1) \cdot C1 \cdot s = \frac{v1}{s \cdot L1} + \frac{(v1 - v2)}{R1} \quad \frac{(v1 - v2)}{R1} = v2 \cdot \left(\frac{1}{R2} \right) + \left(v2 - \frac{vc2}{s} \right) \cdot C2 \cdot s$$

$$V(s) := \text{Find}(v1, v2) \text{ float, 3} \rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \cdot \frac{s}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)^1} \\ 2 \cdot \frac{(4 \cdot s^2 + 4 + s)}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)^1} \end{array} \right]$$

- Розв'язок системи рівнянь в символьному вигляді з використанням функції Find в складі обчислювального блоку Given

Тобто:

$$v2(s) := V(s)_1 \rightarrow 2 \cdot \frac{(4 \cdot s^2 + 4 + s)}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)^1}$$

- власна реакція кола в операторній формі

$$v2(s) \left\{ \begin{array}{l} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \\ \text{float, 2} \end{array} \right. \rightarrow 1.0 \cdot \exp(-.64 \cdot t) - 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \cos(.98 \cdot t) + 2.3 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \sin(.98 \cdot t)$$

$$r1(t) := 1.0 \cdot \exp(-.64 \cdot t) - 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \cos(.98 \cdot t) + 2.3 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \sin(.98 \cdot t)$$

find(var1, var2, ...) - Returns the values of var1, var2, ..., that solve a system of equations. Returns a scalar if only one argument, otherwise returns a vector of answers. This function must be preceded by guess values for each argument and the keyword "Given".

....

Рис. 7. Власна реакція кола при $v_{C2}(0) \neq 0$, $i_{L1}(0) = 0$, $v_{C1}(0) = 0$

Приклад 2

2. Початкові умови:

$$\boxed{i_{L1} := 1} \quad v_{C2} := 0$$

$$v_{C1} := 0$$

Given

$$(0 - v1) \cdot C1 \cdot s = \frac{v1}{s \cdot L1} + \frac{(v1 - v2)}{R1} + \frac{i_{L1}}{s} \quad \frac{(v1 - v2)}{R1} = v2 \cdot \left(\frac{1}{R2} \right) + v2 \cdot C2 \cdot s$$

$$v2(s) := \text{Find}(v1, v2)_1 \text{ float, 3} \rightarrow \frac{-1.}{(7. \cdot s^2. + 8. \cdot s^3. + 5. + 9. \cdot s)^1.}$$

v2(s)	invlaplace, s	→	-0.10 · exp(-0.64 · t) + 0.10 · exp(-0.12 · t) · cos(0.98 · t) - 5.4 · 10 ⁻² · exp(-0.12 · t) · sin(0.98 · t)
	simplify		
	float, 2		

$$r2(t) := -0.10 \cdot \exp(-0.64 \cdot t) + 0.10 \cdot \exp(-0.12 \cdot t) \cdot \cos(0.98 \cdot t) - 5.4 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-0.12 \cdot t) \cdot \sin(0.98 \cdot t)$$

....

Рис. 8. Власна реакція кола при $i_{L1}(0) \neq 0$, $v_{C2}(0) = 0$, $v_{C1}(0) = 0$

Розв'язок системи шукаємо в символному вигляді із застосуванням функції Find у складі обчислювального блоку, який визначається директивою Given. Рівняння задаються відразу ж після Given, із застосуванням *жирного* знаку рівності = (Булева рівність), який вводиться клавішами "Ctrl + =". Функція Find(var1, var2, ..., varn) – повертає значення змінних, що дають точний розв'язок системи рівнянь, заданих в блоці Given; кількість повернутих значень дорівнює кількості змінних.

Легко переконатися, що власна реакція кола в третьому випадку (рис. 9) дорівнює сумі реакцій, одержаних в перших двох випадках.

Приклад 3

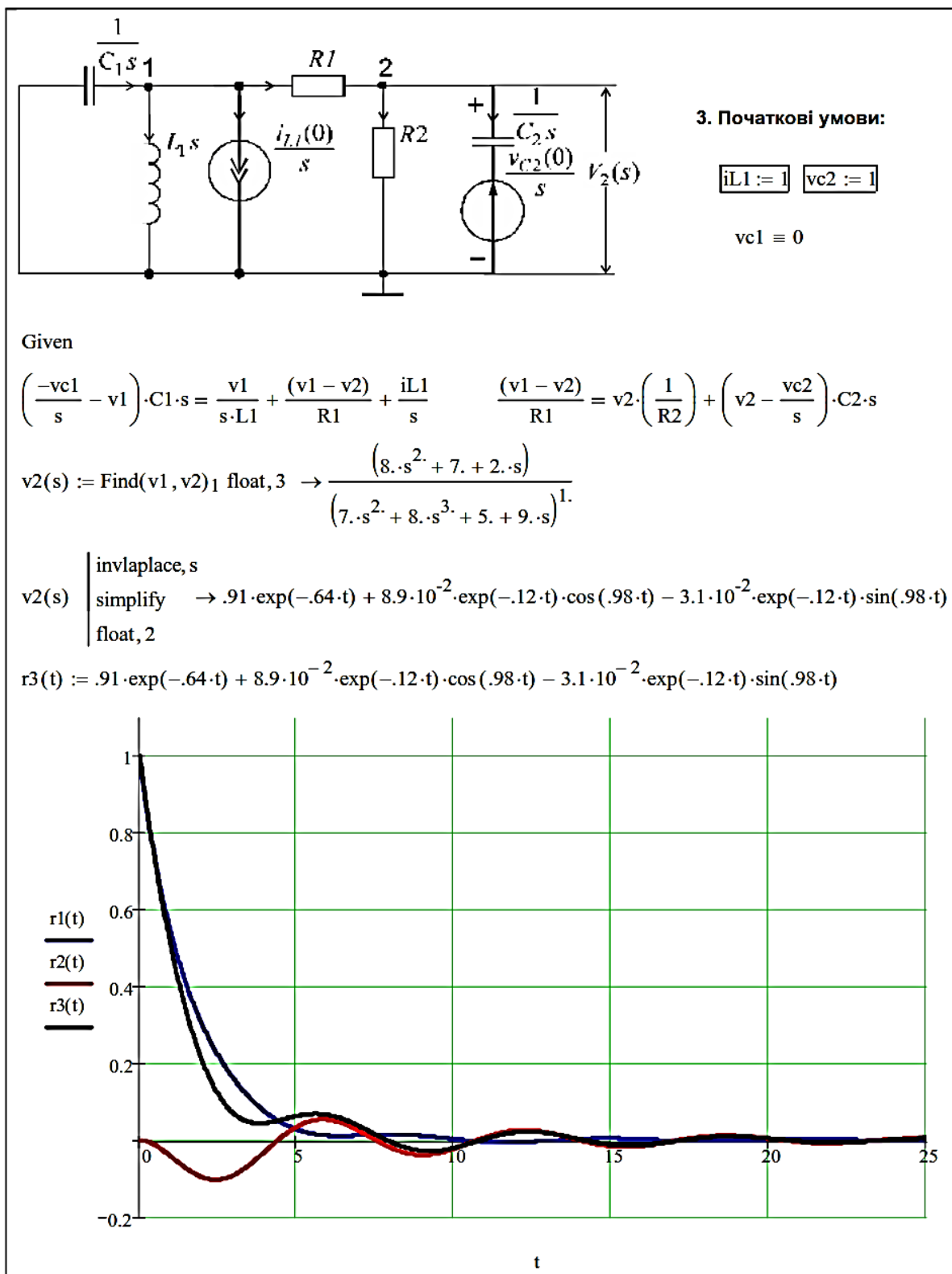
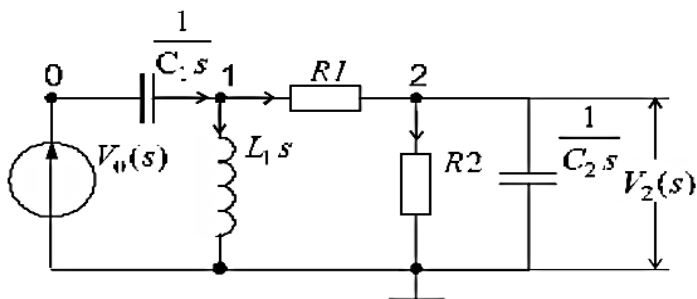


Рис. 9. Власна реакція кола при $i_{L1}(0) \neq 0$, $v_{C2}(0) \neq 0$, $v_{C1}(0) = 0$

Реакція кола при ненульовій зовнішній дії

Приклад 4

Реакція кола на зовнішню дію (вхідний сигнал) у вигляді одиничної ступінчастої функції за нульових початкових умов



$$\begin{aligned} R1 &:= 4 \\ C1 &:= 1 & L1 &:= 1 \\ R2 &:= 1 & C2 &:= 2 \end{aligned}$$

$$v0(s) := \frac{1}{s}$$

- операторне зображення сигналу у вигляді одиничної ступінчастої функції

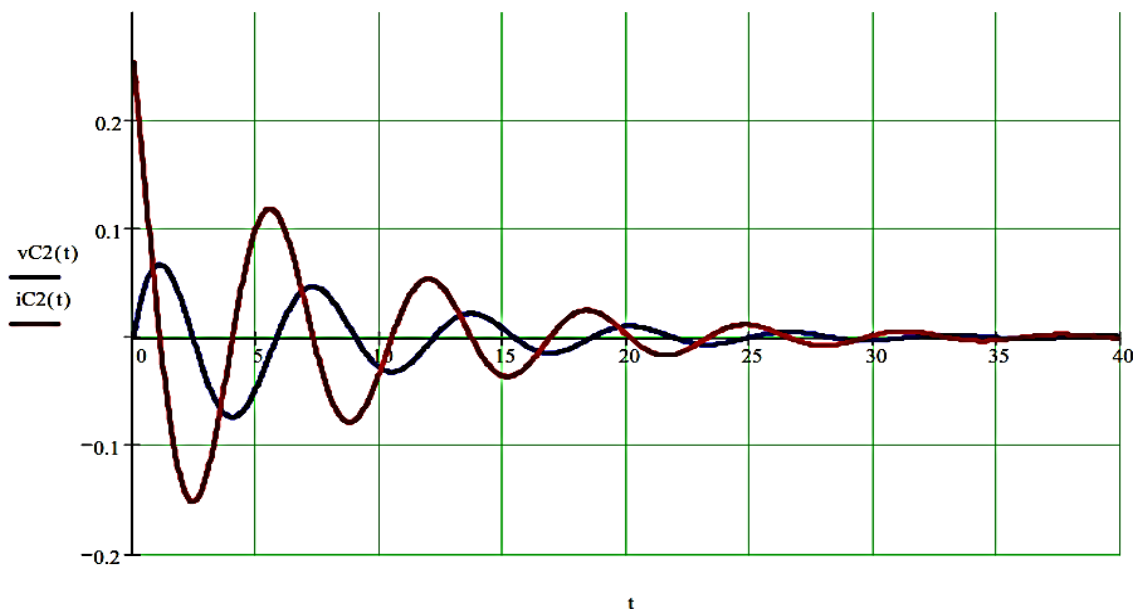
Given

$$(v0(s) - v1) \cdot C1 \cdot s = \frac{v1}{s \cdot L1} + \frac{(v1 - v2)}{R1} \quad \frac{(v1 - v2)}{R1} = v2 \cdot \left(\frac{1}{R2} + C2 \cdot s \right)$$

$$v2(s) := \text{Find}(v1, v2)_1 \text{ float, 3} \rightarrow \frac{s}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)^1}$$

$$vC2(t) := v2(s) \begin{cases} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \\ \text{float, 2} \end{cases} \rightarrow -6.5 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.64 \cdot t) + 6.5 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \cos(.98 \cdot t) + 9.3 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \sin(.98 \cdot t)$$

$$iC2(t) := C2 \cdot \left(\frac{d}{dt} vC2(t) \right) \begin{cases} \text{simplify} \\ \text{float, 2} \end{cases} \rightarrow 8.3 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.64 \cdot t) + .17 \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \cos(.98 \cdot t) - .15 \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \sin(.98 \cdot t)$$



Знайдемо системну функцію (основна передатна функція кола):

$$H(s) := \frac{v2(s)}{v0(s)} \rightarrow \frac{s^2}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)^1}$$

Рис. 10. Реакція кола на вхідний сигнал за нульових початкових умов

Приклад 5

Реакція кола через лишки за формулою розкладання Хевісайда

$$sp := 7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s \text{ solve } ,s, \text{float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -0.6410 \\ -1.1170 - .9805 \cdot i \\ -1.1170 + .9805 \cdot i \end{pmatrix} \quad \text{- корені характеристичного полінома}$$

$$v2(s) := \frac{s}{8(s - sp_0) \cdot (s - sp_1) \cdot (s - sp_2)} \quad ic2(s) := \frac{(C2 \cdot s)s}{8(s - sp_0) \cdot (s - sp_1) \cdot (s - sp_2)} \quad \text{- струм через C2}$$

$$ic2(s) \text{ float}, 4 \rightarrow 2 \cdot \frac{s^2}{(8 \cdot s + 5.128)^1 \cdot (s + .1170 + .9805 \cdot i)^1 \cdot (s + .1170 - .9805 \cdot i)^1}$$

знайдемо лишки:

$$k0 := \frac{2(sp_0)^2}{8 \cdot (sp_0 - sp_1) \cdot (sp_0 - sp_2)} \quad k1 := \frac{2(sp_1)^2}{8 \cdot (sp_1 - sp_0) \cdot (sp_1 - sp_2)} \quad k2 := \frac{2(sp_2)^2}{8 \cdot (sp_2 - sp_0) \cdot (sp_2 - sp_1)}$$

$$k0 = 0.083 \quad k1 = 0.083 - 0.074i \quad k2 = 0.083 + 0.074i$$

$$i(t) := k0 \cdot e^{sp_0 \cdot t} + k1 \cdot e^{sp_1 \cdot t} + k2 \cdot e^{sp_2 \cdot t} \quad \text{- аналітичний вираз реакції (струм через C2)}$$

$$ic2(t) := i(t) \begin{cases} \text{float}, 3 \\ \text{complex} \end{cases} \rightarrow 8.31 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.641 \cdot t) + .1668 \cdot \exp(-.117 \cdot t) \cdot \cos(.981 \cdot t) - .1488 \cdot \exp(-.117 \cdot t) \cdot \sin(.981 \cdot t)$$

$$\text{або} \quad |k2| = 0.112 \quad \arg(k2) = 0.728 \quad \text{Re}(sp_2) = -0.117 \quad \text{Im}(sp_2) = 0.980$$

$$ic2(t) := k0 \cdot e^{sp_0 \cdot t} + 2 \cdot |k2| \cdot e^{\text{Re}(sp_2) \cdot t} \cdot \cos(\text{Im}(sp_2) \cdot t + \arg(k2))$$

$$ic2(t) \text{ float}, 3 \rightarrow 8.31 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.641 \cdot t) + .224 \cdot \exp(-.117 \cdot t) \cdot \cos(.981 \cdot t + .728)$$

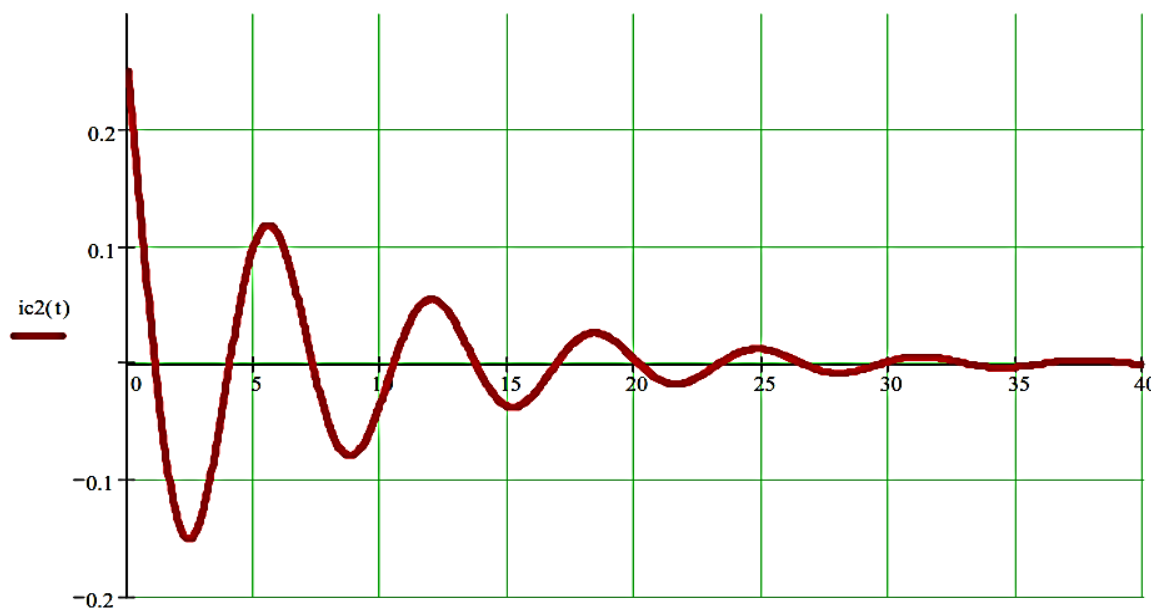
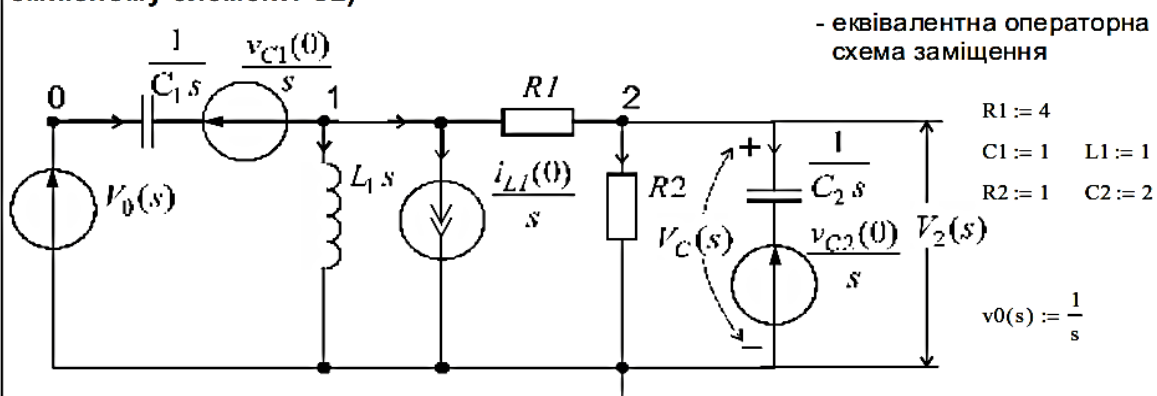


Рис. 11. Реакція, знайдена за формулою розкладання Хевісайда

Приклад 6

Повна реакція кола на вхідний сигнал у вигляді одиничної ступінчастої функції за ненульових початкових умов (струм в індуктивному елементі L1, напруга на ємнісному елементі C2)



Початкові умови $iL1 := 1 \quad vC2 := 1 \quad vC1 := 0$

Given

$$\left(v0(s) + \frac{-vC1}{s} - v1 \right) \cdot C1 \cdot s = \frac{v1}{s \cdot L1} + \frac{(v1 - v2)}{R1} + \frac{iL1}{s} \quad \frac{(v1 - v2)}{R1} = v2 \cdot \left(\frac{1}{R2} \right) + \left(v2 - \frac{vC2}{s} \right) \cdot C2 \cdot s$$

$$v2(s) := \text{Find}(v1, v2)_1 \text{ float, 3} \rightarrow \frac{(3 \cdot s + 8 \cdot s^2 + 7)}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)^1}$$

$$r4(t) := v2(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow .846 \cdot \exp(-.641 \cdot t) + .154 \cdot \exp(-.117 \cdot t) \cdot \cos(.980 \cdot t) + 6.15 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.117 \cdot t) \cdot \sin(.980 \cdot t)$$

$$i4(t) := C2 \cdot \left(\frac{d}{dt} r4(t) \right) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow -1.08 \cdot \exp(-.641 \cdot t) + 8.45 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.117 \cdot t) \cdot \cos(.980 \cdot t) - .316 \cdot \exp(-.117 \cdot t) \cdot \sin(.980 \cdot t)$$

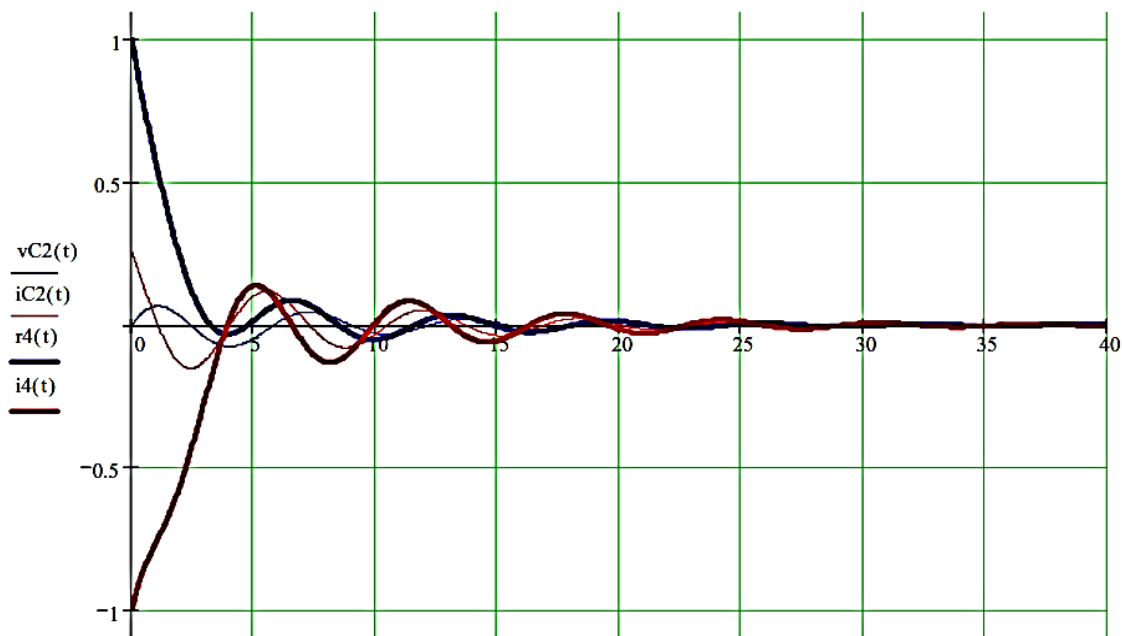


Рис. 12. Повна реакція кола на вхідний сигнал у вигляді одиничної ступінчастої функції за ненульових початкових умов

На рис. 10 наведено фрагмент документа *Mathcad*, де в символічному вигляді знаходимо реакцію кола на вхідний сигнал у вигляді одиничної ступінчастої функції $v_0(t) = E_0 \cdot 1(t)$ за нульових початкових умов (РНУ-реакція). На рис. 11 – приклад знаходження аналітичного виразу реакції через лишки за теоремою розкладання Хевісайда.

На рис. 12 зображена повна реакція кола за ненульових початкових умов, яка дорівнює сумі РНД-реакції та РНУ-реакції.

Аналіз у середовищі Micro-CAP

Складемо схему для аналізу власної реакції послідовного коливального контуру (рис. 13). Нехай коло має такі параметри: $R1=0,5$ Ом; $C1=1$ Ф; $L1=1$ Гн. Початкові умови: $i_{L1}(0)=0$ А; $v_{C1}(0)=1$ В.

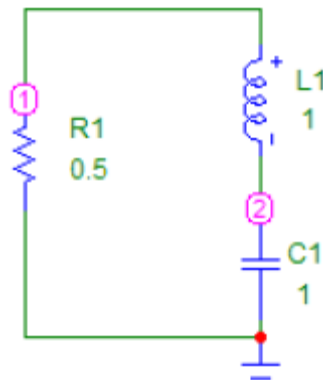


Рис. 13. Схема включення коливального контуру для знаходження його власної реакції

В меню команд **Analysis** виберіть режим **Transient**. У вікні **Transient Analysis Limits** встановіть параметри моделювання (рис. 14).

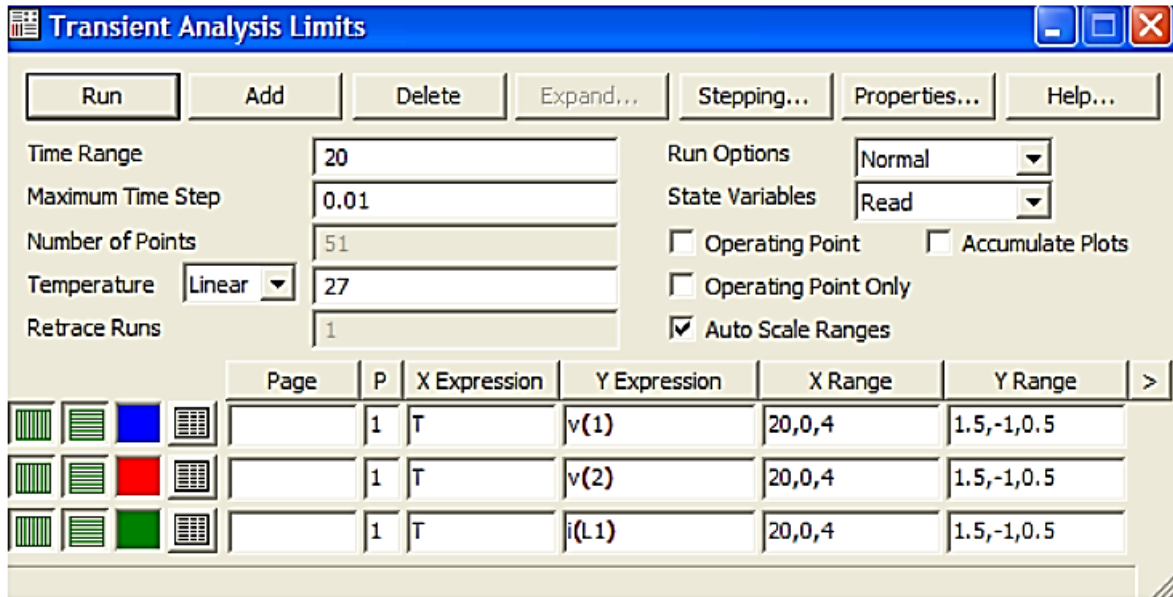


Рис. 14. Задання параметрів моделювання власної реакції контуру

Для можливості використання початкових умов відповідно задач аналізу потрібно відключити опцію **Operation Point**. Щоб можна було використовувати одні й ті самі початкові умови кожного разу при моделюванні, в опції **State Variables** виберіть **Read** (режим читання початкових умов із файлу).

В меню Transient виберіть State Variables Editor (рис. 15)

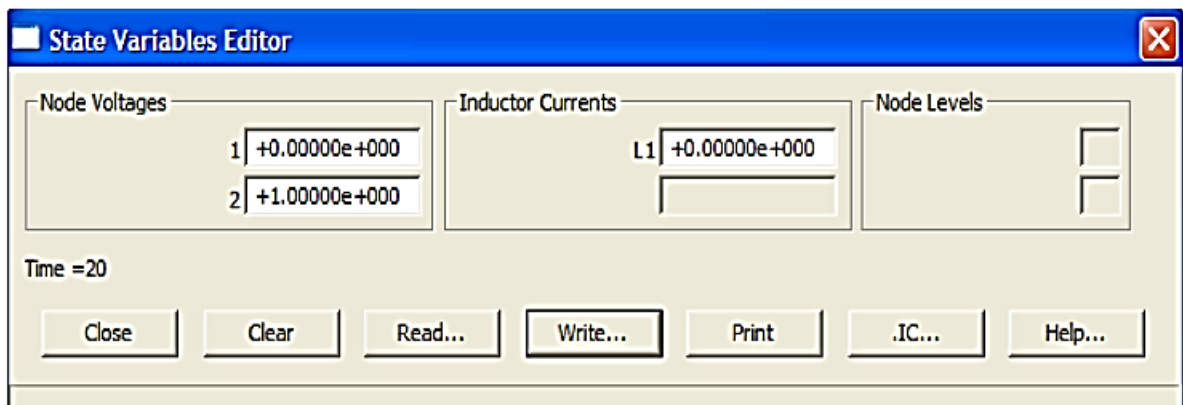



Рис. 15. Задання початкових умов $i_{L1}(0) = 0 \text{ A}$; $v_{C1}(0) = 1 \text{ V}$.

Встановіть початкові умови (напруги в полюсах – **Node Voltage**, струми через індуктивні елементи – **Inductor Current**) відповідно завданню та запишіть їх (**Write ...**) у файл (має розширення *.TOP). Після чого можна

почати моделювання (кнопка **Run** або гаряча клавіша **F2**, або піктограма  панелі інструментів).

Щоб дослідити, як змінюється реакція кола при зміні деякого параметра, у вікні **Transient Analysis Limits** треба вибрати режим **Stepping**.

У вікні **Stepping** (рис. 16), що відкриється, включіть зміну вибраного параметра, задайте діапазон зміни параметра (від ... і до ...) та задайте крок.

Результати аналізу власної реакції контуру при зміні параметра $R1$ наведено на рис. 17.

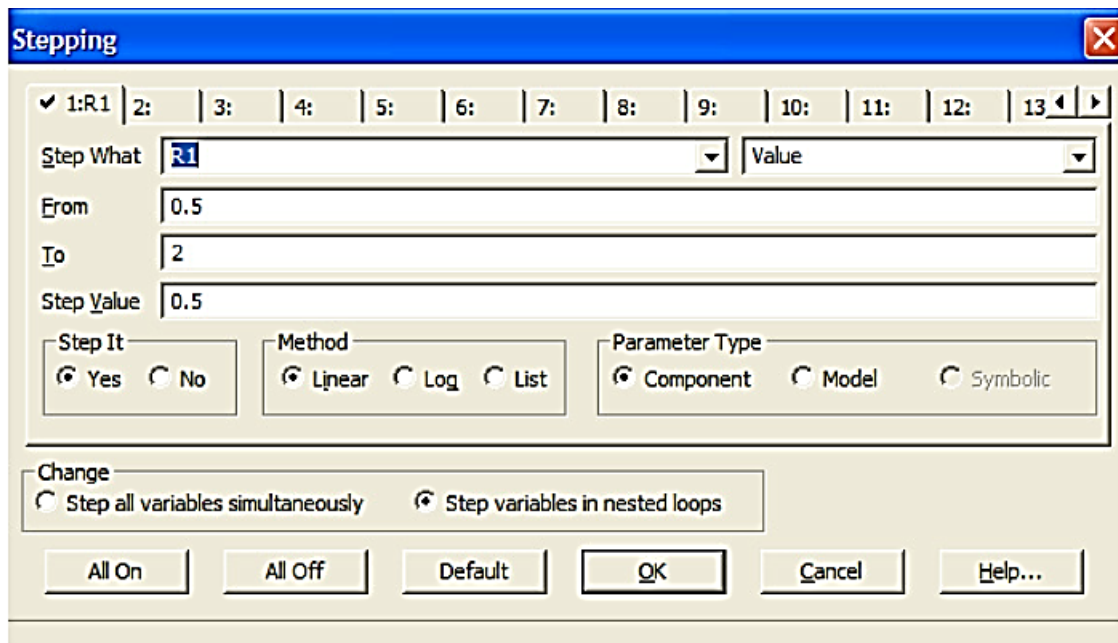


Рис. 16. Задання зміни $R1$ від 0,5 Ом до 2 Ом з кроком 0,5 Ом

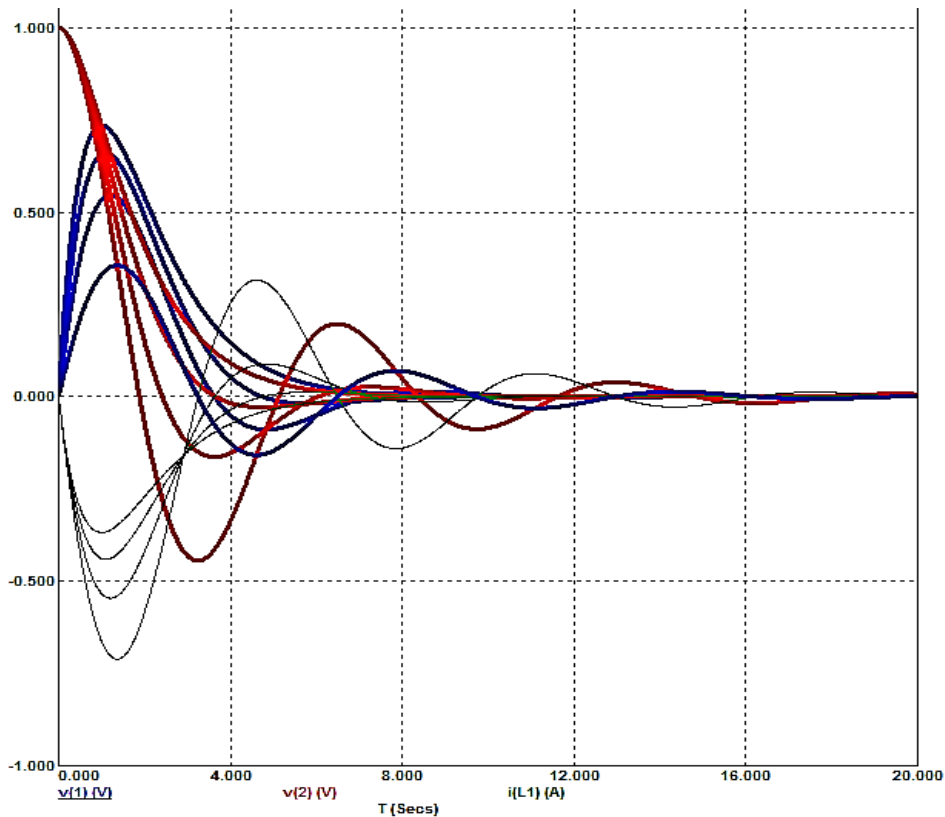


Рис. 17. Власна реакція кола при зміні параметра $R1$ ($v_{C1}(0) = 1 \text{ V}$)

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає операторний метод аналізу?
2. Запишіть формули прямого і зворотного перетворення Лапласа.
3. Назвіть основні етапи визначення за операторним методом реакції ЛІЧ- кола чи системи. Чи можна використовувати операторний метод для аналізу нелінійних кіл?
4. Що таке операторна схема заміщення електричного кола? У який спосіб утворюється операторна схема заміщення?
5. Запишіть в операторній формі компонентні рівняння лінійних індуктивного та ємнісного елементів. Подайте їх операторні схеми заміщення.
6. Укажіть, як враховують ненульові початкові умови на операторних схемах заміщення?
7. Поясніть, чи відрізняються за структурою топологічні рівняння у часової та частотної областях?

8. Запишіть формулу, за якою визначається оригінал зображення відповідно до теореми розкладання Хевісайда. Запишіть формулу для обчислення лишків у простих полюсах.

9. Запишіть зображення за Лапласом для типових сигналів: $1(t)$; $1(t - \tau)$;
 $t = \int_0^t 1(t) dt$; $e^{-\alpha t}$; $e^{j\omega_0 t}$; $\sin(\omega t) = \frac{1}{j} \text{sh}(j\omega t)$; $\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d}{dt} \sin(\omega t)$; $\sin(\omega t \pm \psi)$;
 $\cos(\omega t \pm \psi)$; $e^{-\alpha t} \sin \omega_B t$; $e^{-\alpha t} \cos \omega_B t$, $t > 0$.

10. Виведіть формули для зображень за Лапласом одиночного прямокутного, трикутного, одиночного синусоїдального відеоімпульсів.

11. Виведіть формулу для зображення за Лапласом періодичної послідовності відеоімпульсів.

Лекція 7. Системні функції. Формула суперпозиції

Формула суперпозиції для ЛЧ-кіл. Системна функція. Основна, додаткові передатні функції. Загальні властивості системної функції. Визначення системної функції електричних кіл на операційних підсилювачах. З'єднання каскадів. Буферізація. Приклади аналізу кіл операторним методом в середовищі Mathcad. Робоче завдання. Контрольні запитання та завдання.

Формула суперпозиції для ЛЧ-кіл

На основі операторних схем заміщення, використовуючи відомі методи аналізу резистивних кіл, знаходимо зображення вихідної величини. Для повної реакції ЛЧ- кола (системи) можна записати:

$$Y(s) = H_e(s)X_0(s) + \sum_{n=1}^N H_{in}(s) \frac{\lambda_n(0)}{s}, \quad (1)$$

де $Y(s)$ – \mathcal{L} -перетворення шуканого струму або напруги, які є об'єктом аналізу (позначається як *вихід* або *реакція* кола); $X_0(s)$ – \mathcal{L} -перетворення напруги або струму незалежного зовнішнього джерела, яке розглядається в якості *вхідної дії* (кількість зовнішніх джерел може бути більше одного);

$H_e(s)X_0(s)$ – реакція за *нульових початкових умов* (РНУ); $\sum_{n=1}^N H_{in}(s) \frac{\lambda_n(0)}{s}$ –

реакція за *нульовому діючому (вхідному) сигналі* (РНД); $\frac{\lambda_n(0)}{s}$ – \mathcal{L} -

перетворення джерела, що описує початковий стан для n -ої *змінної стану* $\lambda_n(0)$ у момент часу $t=0$ (напруга на конденсаторі або струм у котушці індуктивності); N – *порядок* кола (системи).

Отже, складова РНД ("*власна*" реакція) не є функцією вхідних сигналів на інтервалі $t \geq 0$, вона визначається початковим станом кола при $t=0$, яке в свою чергу залежить від вхідних дій (сигналів) при $t < 0$.

Складова РНУ ("*вимушена*" реакція) не є функцією початкового стану. Зокрема, якщо початковим є нульовий стан, тобто якщо $\lambda_n(0) = 0$ для всіх n , то РНУ – повна реакція для всіх $t \geq 0$. Відзначимо, що РНД і РНУ зовсім не те ж

саме, що "вільна складова" і "сталій стан" або "вимушена складова". Наприклад, член РНУ взагалі має як "перехідні", так і "сталі" компоненти (навіть якщо вхідною дією є постійний сигнал).

Множники $H_e(s)$ або $H_{in}(s)$ можна інтерпретувати як відношення \mathcal{L} -перетворення компонентів реакції до \mathcal{L} -перетворення джерела, що його породило. Таке відношення зображення реакції до зображення джерела сигналу називається:

- *основною операторною функцією* $H_e(s)$, якщо реакція на незалежне зовнішнє джерело;
- *додатковою операторною функцією* $H_{in}(s)$ – якщо реакція на внутрішнє джерело, яке описує ненульовий початковий стан.

Зазвичай основну передатну функцію $H_e(s)$ (на відміну від додаткових $H_{in}(s)$) називають *системною операторною функцією*²⁰⁾.

Розглянемо процедуру визначення повної реакції ЛПЧ-кіл на прикладі кола (рис. 1) за формулою суперпозиції, використовуючи основну системну функцію $H_e(s)$ і додаткові операторні функції $H_{in}(s)$, що були одержані раніше.

$$V_2(s) = H_e(s)V_0(s) + H_{C1}(s)\frac{V_{C1}(0)}{s} + H_{C2}(s)\frac{V_{C2}(0)}{s} + H_{L1}(s)\frac{I_{L1}(0)}{s}. \quad (2)$$

²⁰⁾ Основні системні функції в електричних системах класифікують як *вхідні* і *передатні* залежно від того, на яких входах (портах, парі клем, полюсах) вимірюються пов'язані з ними струм і напруга. Вони можуть бути безрозмірними відношеннями (напруга/напруга або струм/струм), або мати розмірність опору (напруга/струм), або провідності (струм/напруга) (Siebert, W. McC. *Circuits, Signals, and Systems*. Cambridge, Mass.: MIT Press ; New York : McGraw-Hill Book Company, 1986).

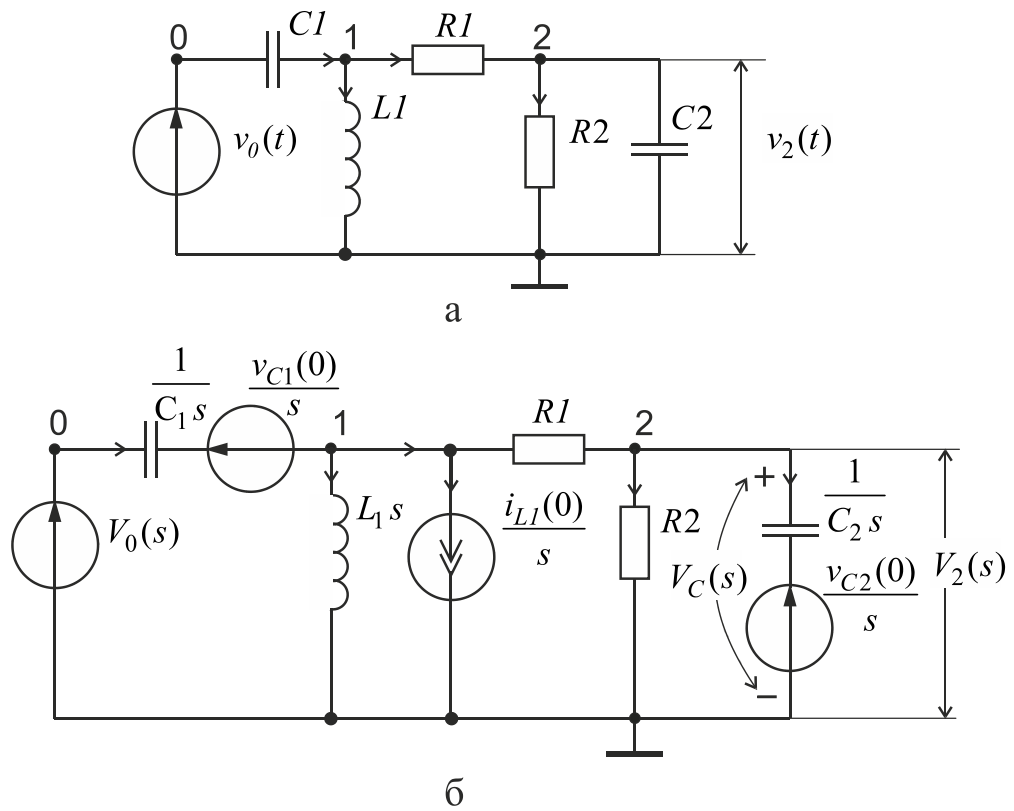


Рис. 1. Електричне коло (а) та його операторна схема заміщення (б)

Приклад 1

РНУ-реакція на синусоїдальний сигнал, якщо відома системна функція кола

1. Знайдемо системну функцію:

$$v_2(s) := \frac{s}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)^1} \quad \text{- реакція на вхідний сигнал у вигляді одиничної ступінчастої функції за нульових початкових умов} \quad v_0(s) := \frac{1}{s}$$

Тобто системна функція:

$$H1(s) := \frac{v_2(s)}{v_0(s)} \text{ simplify} \rightarrow \frac{s^2}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)} \quad f := 0.15 \quad C2 := 2$$

2. Використовуючі системну функцію, знайдемо реакцію на синусоїдальний сигнал (за нульових початкових умов)

$$v_0(t) := 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad v_0(s) := v_0(t) \left| \begin{array}{l} \text{laplace, t} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow \frac{.942}{(s^2 + .888)^1}$$

$$v_2(s) := H1(s) \cdot v_0(s) \quad v_2(s) \rightarrow \frac{.942 \cdot s^2}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s) \cdot (s^2 + .888)^1}$$

$$v_2(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \\ \text{float, 2} \end{array} \right. \rightarrow 3.0 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.64t) - .37 \cdot \exp(-.12t) \cdot \cos(.98t) - .25 \cdot \exp(-.12t) \cdot \sin(.98t) + .34 \cdot \cos(.94t) + .23 \cdot \sin(.94t)$$

Напруга на ємнісному елементі C2:

$$r_5(t) := 3.0 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.64t) - .37 \cdot \exp(-.12t) \cdot \cos(.98t) - .25 \cdot \exp(-.12t) \cdot \sin(.98t) + .34 \cdot \cos(.94t) + .23 \cdot \sin(.94t)$$

$$i_5(t) := \left[C2 \cdot \left(\frac{d}{dt} r_5(t) \right) \right] \quad \text{- струм в ємнісному елементі C2}$$

$$i_5(t) \text{ float, 2} \rightarrow -3.8 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.64t) - .40 \cdot \exp(-.12t) \cdot \cos(.98t) + .79 \cdot \exp(-.12t) \cdot \sin(.98t) - .64 \cdot \sin(.94t) + .43 \cdot \cos(.94t)$$

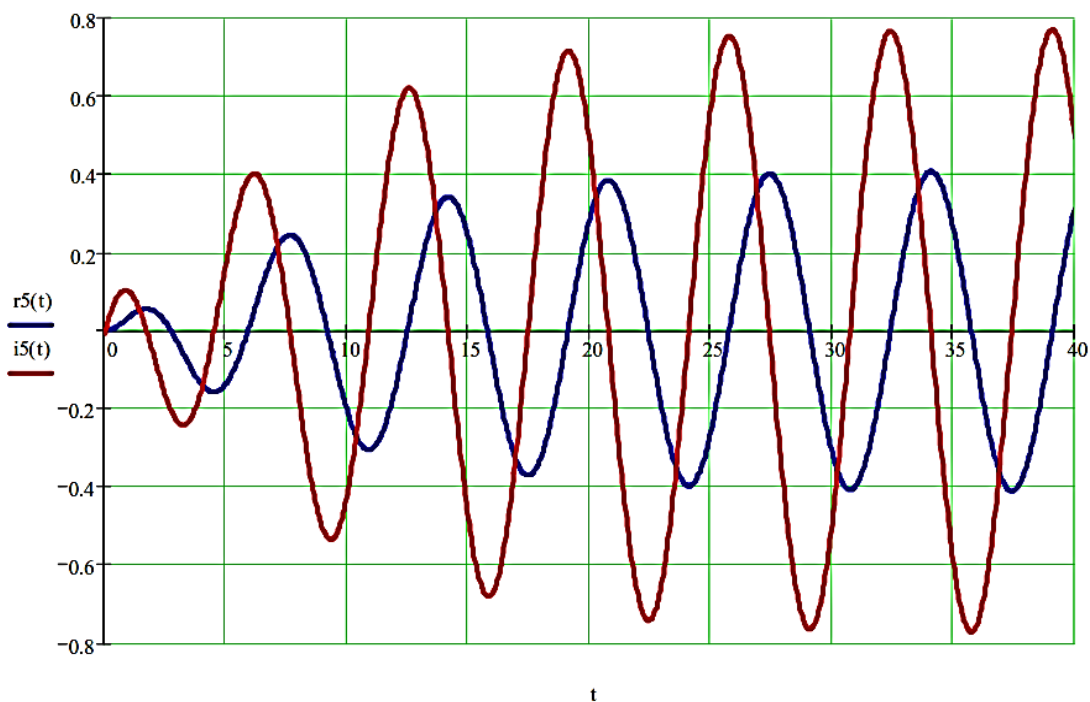


Рис. 2. РНУ-реакція кола на синусоїдальний сигнал ($f = 0,15$ Гц), знайдена за її системною функцією

Приклад 2

Визначення повної реакції кола за ненульових початкових умов (струм в індуктивності L1, напруга на ємності C2) через операторні функції кола



Знайдемо повну реакцію, використовуючи функції H1(s), HL1(s), HCχ(s)

$$H1(s) := \frac{s^2}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)}$$

- системна або основна операторна передатна функція кола, що визначає його реакцію на вхідний сигнал за нульових початкових умов

$$HL1(s) := -1 \cdot \frac{s}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)}$$

- додаткова операторна функція кола, що визначає його реакцію на ненульові початкові умови за iL1/s при нульовому вхідному сигналі

$$HC\chi(s) := 2 \cdot \frac{(4 \cdot s^2 + 4 + s)}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)} \cdot s$$

- додаткова операторна функція кола, що визначає його реакцію на ненульові початкові умови за vC2/s при нульовому вхідному сигналі

Якщо $v0(s) := \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{s^2 + 4 \cdot 3 \cdot 14^2 \cdot f^2} \text{ float, 3} \rightarrow \frac{.942}{(s^2 + .887)^1}$

то повна реакція:

$$v2(s) := v0(s) \cdot H1(s) + \frac{iL1}{s} \cdot HL1(s) + \frac{vc2}{s} \cdot HC\chi(s) \Big|_{\text{simplify}} \Big|_{\text{float, 2}} \rightarrow \frac{(1.5 \cdot 10^4 \cdot s^2 + 6.2 \cdot 10^3 + 8.0 \cdot 10^3 \cdot s^4 + 2.0 \cdot 10^3 \cdot s^3 + 1.8 \cdot 10^3 \cdot s)}{(1.0 \cdot 10^3 \cdot s^2 + 8.9 \cdot 10^2)^1 \cdot (7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)^1}$$

$$r6(t) := v2(s) \Big|_{\text{invlaplace, s}} \Big|_{\text{simplify}} \Big|_{\text{float, 2}} \rightarrow .32 \cos(.94t) + .24 \sin(.94t) + .94 \exp(-.64t) - .26 \exp(-.12t) \cdot \cos(.98t) - .28 \exp(-.12t) \cdot \sin(.98t)$$

$$i6(t) := C2 \left(\frac{d}{dt} r6(t) \right) \Big|_{\text{simplify}} \Big|_{\text{float, 2}} \rightarrow -.60 \sin(.94t) + .45 \cos(.94t) - 1.2 \exp(-.64t) - .49 \exp(-.12t) \cdot \cos(.98t) + .58 \exp(-.12t) \cdot \sin(.98t)$$

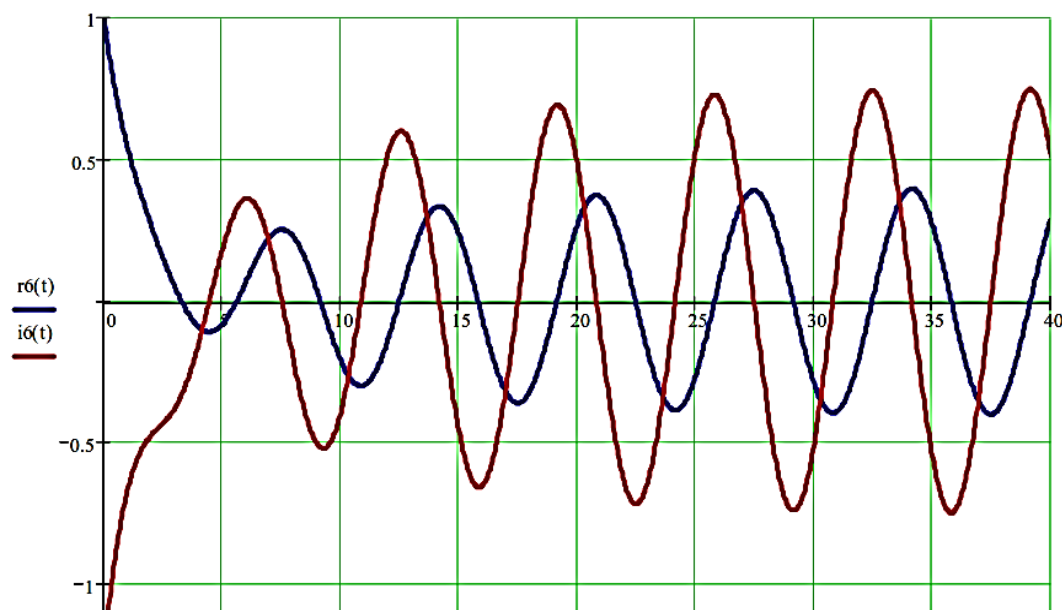


Рис. 3. Визначення повної реакції ЛІЧ-кіл за формулою суперпозиції

Загальні властивості системної функції

1. Системна функція ЛПЧ-кола є зображенням за Лапласом його імпульсної характеристики:

$$H(s) = \mathcal{L}[h_\delta] = \int_0^{\infty} h_\delta(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda. \quad (3)$$

Якщо до входу кола за нульових початкових умов прикладається одиничний імпульс $\delta(t)$, то його вихідний сигнал є імпульсною характеристикою $y(t) = h_\delta(t)$. Зображення за Лапласом РНУ-реакції

$$Y(s) = H(s)X_\delta(s) = H(s) \cdot 1 = H(s).$$

Отже,

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = h_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)].$$

Перехідну характеристику також можна визначити через системну функцію кола :

$$h(t) = \int_0^t h_\delta(\lambda) d\lambda = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]. \quad (4)$$

2. Системна функція і диференціальне рівняння "вхід-вихід".

Важливою, з практичного погляду, є властивість системної функції, зумовлена її взаємозв'язком із диференціальним рівнянням "вхід-вихід":

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y &= \\ &= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння – неоднорідне. Праворуч зовнішню дію $x(t)$ розглядаємо як вхідну величину, ліворуч шукану змінну $y(t)$ – як вихідну величину.

Припустимо, що у початковий момент часу коло (чи система) знаходиться в стані спокою, тобто має нульові початкові умови. Застосовуючи до рівняння (5) перетворення Лапласа, враховуючи те, що

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0), \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s \cdot [sF(s) - f(0)] - f'(0), \dots$$

та $y^{n-1}(0) = y^{n-2}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0$ – нульові початкові умови, дістанемо:

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] \cdot Y(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] \cdot X(s).$$

Звідки:

$$Y(s) = \frac{[b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0]}{[a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0]} \cdot X(s) = H(s) \cdot X(s),$$

де

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (6)$$

– системна функція кола, що зв'язує вхід і вихід.

Тобто для ЛПЧ-кіл із зосередженими параметрами системна функція $H(s)$ завжди є дробово-раціональною функцією змінної s з дійсними коефіцієнтами.

3. Нуль-полюсне зображення системної функції:

$$H(s) = K \frac{(s - s_{z1})(s - s_{z2}) \dots (s - s_{zm})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pn})},$$

де s_{zk}, s_{pi} – корені відповідних поліномів чисельника і знаменника – нулі та полюси. Отже, системна функція з точністю до постійного множника повністю визначається її нулями і полюсами. Відповідно до основної теореми алгебри, якщо коефіцієнти a_i, b_k – дійсні, то нулі і полюси $H(s)$ можуть бути або дійсними, або комплексно-спряжені.

4. Знаменник системної функції є характеристичним поліномом.

Тобто полюси системної функції (вони є корені характеристичного рівняння) визначають вигляд власних коливань (корені – це є частоти власних коливань). Тому за значеннями полюсів можна оцінити стійкість кола (системи).

Визначення. Лінійна динамічна система називається стійкою, якщо всі її власні коливання з часом загасають .

Для абсолютної стійкості кола (системи) необхідно і достатньо, щоб всі полюси були в лівій півплощині комплексної s – площини.

Прикладом абсолютно стійких кіл є пасивні кола, складені виключно з елементів R, L, C . Якщо полюси розташовані на уявній осі, то коло чи система вважається умовно стійкою.

Якщо полюси розташовані у правій півплощині, то коло чи система не є стійкою.

5. Системна функція як реакція на експоненціальний вхідний сигнал в усталеному режимі.

Якщо вхідним сигналом є комплексна експонента $\dot{X}e^{j\omega t}$, сталий вихідний сигнал є також експонентою $\dot{Y}e^{j\omega t}$. Тоді, якщо підставимо в диференціальне рівняння "вхід-вихід" (5), одержимо:

$$\dot{Y}_m e^{j\omega t} \{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0\} = \dot{X}_m e^{j\omega t} \{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0\}.$$

Звідки випливає:

$$\frac{\dot{Y}_m \cdot e^{j\omega t}}{\dot{X}_m \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{b_m \cdot (j\omega)^m + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0}{a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} = H(j\omega), \quad (7)$$

де $H(j\omega) = H(s)_{s=j\omega}$ – комплексна частотна (передатна) функція (КЧФ), яка може бути знайдена з системної (передатної) функції $H(s)$ ЛПЧ-кола (системи), що описується рівнянням (5), при суто уявних значеннях комплексного аргументу, тобто при $s = j\omega$.

За методом невизначених коефіцієнтів, частинний розв'язок НЛДР (5), тобто вимушена складова $y_{\text{вим}}(t)$ повної перехідної реакції ЛПЧ-кіл

$$y_{\text{вим}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y_{\text{вим}}(t) + y_{\text{в}}(t)],$$

шукаємо у тому самому вигляді, який має діюча функція $x(t)$.

Підставляючи в диференціальне рівняння (5) можливий розв'язок із невизначеними параметрами, але відомого вигляду, знаходять таку $y_{\text{вим}}(t)$, щоб це рівняння виконувалося для всіх значень часового аргументу t .

Метод невизначених коефіцієнтів використовують тоді, коли права частина НЛДР є спеціального вигляду – описується постійними, гармонічними, експонентними, степеневими функціями або їх сполученнями (у більшості випадків на практиці саме такі сигнали).

Інакше кажучи, вхідний сигнал $\dot{X}e^{j\omega t}$ після затухання перехідних процесів дає сталу реакцію в вигляді:

$$\dot{Y}_m e^{j\omega t} = H(j\omega) \dot{X}_m e^{j\omega t} = |H(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg H(j\omega)} \dot{X}_m e^{j\omega t},$$

тобто

$$\dot{Y}_m = |H(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg H(j\omega)} \cdot \dot{X}_m.$$

Процедура заміни $s = j\omega$ в системній функції використовується для знаходження частотної характеристики кола в сталому режимі при гармонічному вхідному сигналі.

Покажемо, що $H(s)$ має подібну інтерпретацію, навіть при $s \neq j\omega$, тобто коли до виразу $e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ поняття усталеного стану безпосередньо не застосовується ($e^{\sigma t}$ при $\sigma \neq 0$ або зростає, або зменшується з часом). Таким чином, якщо вхідний сигнал ЛПЧ-системи має вигляд $e^{s_0 t}$, то з плином часу основним компонентом вихідного сигналу стане $H(s_0) e^{s_0 t}$ за умови, що s_0 знаходиться в s -площині правіше самого правого полюса функції $H(s)$ – в області збіжності $H(s)$.

Нехай $v_0(t) = e^{s_0 t}$, $t > 0$, де s_0 – довільне комплексне число. Тоді

$\mathcal{L}[v_0(t)] = V_0(s) = \frac{1}{s - s_0}$. Розглянемо коло, для якого системна функція:

$$H(s) = \frac{-0,5 \cdot s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{-0,5 \cdot s}{(s+1)(s+3)}.$$

У випадку РНУ

$$V_3(s) = H(s)V_0(s) = -0,5 \cdot s / (s+1)(s+3)(s-s_0).$$

Якщо $s_0 \neq -1, -3$, то цей вираз можна розкласти:

$$V_3(s) = \frac{-1}{4(1+s_0)} \frac{1}{s+1} + \frac{3}{4(3+s_0)} \frac{1}{s+3} + \frac{-0,5 \cdot s_0}{(s_0+1)(s_0+3)} \frac{1}{s-s_0},$$

де в лишку $(s - s_0)$ дізнаємось $H(s_0)$. При цьому РНУ має вигляд:

$$v_3(t) = -\frac{1}{4(1+s_0)} e^{-t} + \frac{3}{4(3+s_0)} e^{-3t} + H(s_0) e^{s_0 t}, \quad t > 0.$$

1. Якщо s_0 є суто уявним ($s_0 = j\omega_0$), то цей результат характеризує звичайну ситуацію при синусоїдальному сигналі – перші два члени описують перехідні процеси, котрі виникають внаслідок впливу типу "стрибок" $e^{j\omega_0 t}$ в момент часу $t=0$ на коло, що перебуває в стані спокою. З часом вони затухають і залишається лише усталена реакція $H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$.

2. Проте, навіть якщо $s_0 \neq j\omega_0$, останній член – "вимушений", у виразі для $v_3(t)$ через певний час стане домінуючим за умови, що $\text{Re}[s_0] > -1$.

Якщо $\text{Re}[s_0] < -1$, "вимушений" член зникає швидше перехідних; таким чином в результаті перехідні члени будуть відігравати порівняно важливішу роль, хоча всі вони можуть виявитись загасаючими. Зауважимо, в даному випадку слово "вимушений", узятє в лапки, означає лише те, що цей член має таку саму форму як і вхідна дія, тобто $H(s_0)e^{s_0 t}$. Результуюча повна реакція (при нульовому початковому стані) містить як "вимушену", так і "перехідну" складові.

Визначення системної функції електричних схем на операційних підсилювачах

Фрагменти документів Mathcad на рис. 4 – рис. 6 пояснюють процедуру визначення системних функцій деяких типових схем на операційних підсилювачах, які знаходять через параметри пасивних елементів, як РНУ кола. Для визначення системної функції складається система рівнянь, наприклад, за методом вузлових напруг, яка досить легко розв'язується в символному вигляді в середовищі системи Mathcad.

Отже, на прикладі схеми, яка на рис. 4, бачимо, що при достатньо великому коефіцієнті підсилення $K \rightarrow \infty$ передатна функція залежить виключно від параметрів пасивних елементів схеми. Тобто передатна функція не залежить ні від K , ні від можливої його нестабільності. Це є так званий *стабілізуючий* вплив від'ємного зворотного зв'язку.

Приклад 3

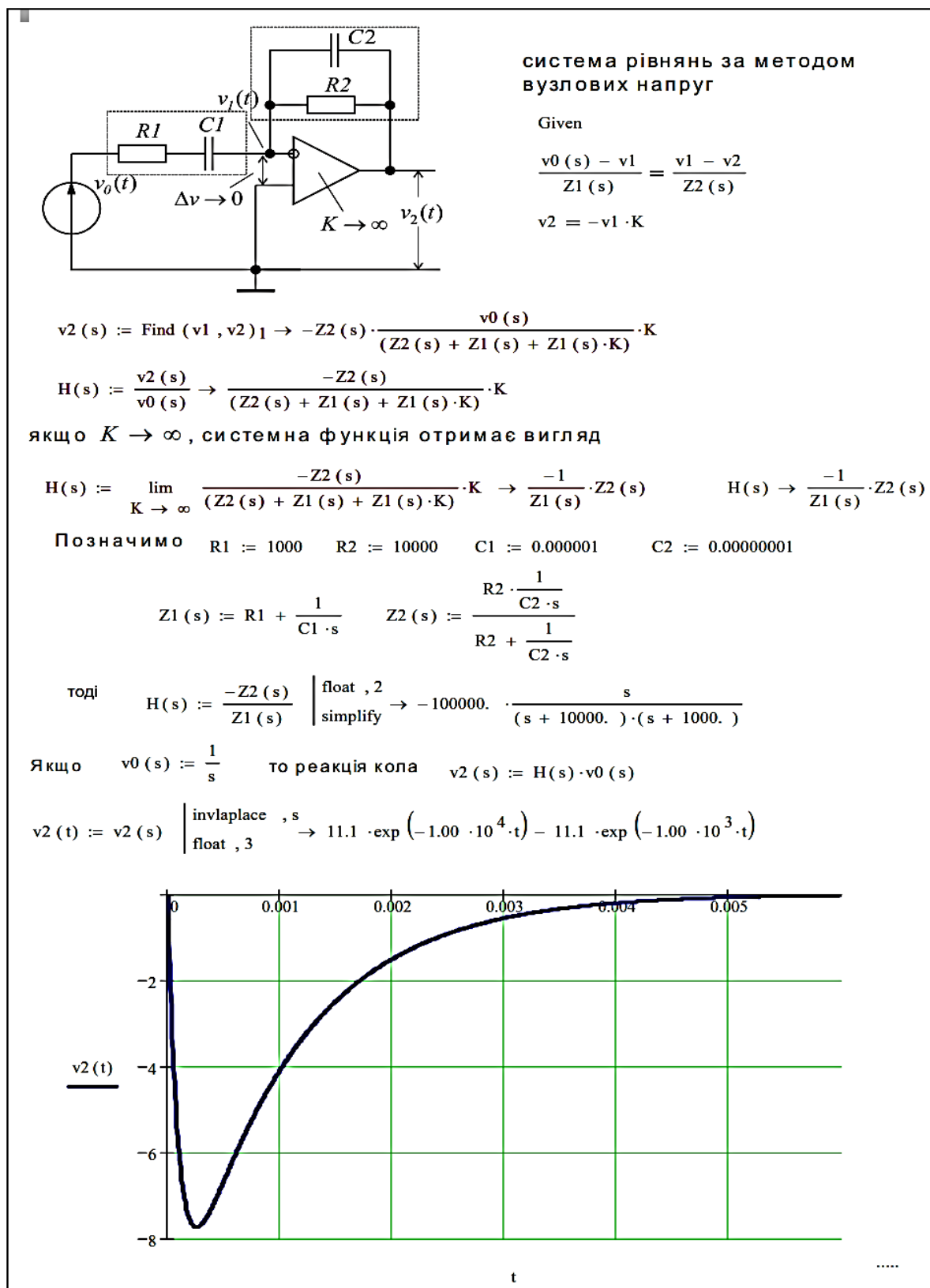


Рис. 4. Системна функція схеми смугового фільтра з дійсними полюсами, знайдена в символічному вигляді, як РНУ-реакція кола

Приклад 4

Структура Саллена і Кея

$$v_2(t) = v_2(t) \cdot \frac{(K_{01} - 1)R_3 + R_3}{R_3} = v_2(t) \cdot K_{01}$$

$v_0(s) := 1$ - зображення вхідного сигналу у вигляді $\delta(t)$ - функції
 система рівнянь за методом вузлових напруг
 Given

$$\frac{v_0(s) - v_1}{R_1} + (v_3 - v_1) \cdot C_1 \cdot s = \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad \frac{v_1 - v_2}{R_2} = v_2 \cdot C_2 \cdot s \quad v_3 = v_2 \cdot K_{01}$$

Find $(v_1, v_2, v_3)_2$ collect, s $\rightarrow \frac{1}{[C_1 \cdot s^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 + (C_2 \cdot R_2 - C_1 \cdot R_1 \cdot K_{01} + C_1 \cdot R_1 + R_1 \cdot C_2) \cdot s + 1]} \cdot K_{01}$

тоді системна функція

$$H(s) := \frac{1}{[C_1 \cdot s^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 + (C_2 \cdot R_2 - C_1 \cdot R_1 \cdot K_{01} + C_1 \cdot R_1 + R_1 \cdot C_2) \cdot s + 1]} \cdot K_{01}$$

або

$$H(s) := \frac{\frac{1}{C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2} \cdot K_{01}}{s^2 + \left(\frac{1}{C_1 \cdot R_1} + \frac{1}{R_2 \cdot C_2} + \frac{1}{R_2 \cdot C_1} - \frac{K_{01}}{R_2 \cdot C_2} \right) \cdot s + \frac{1}{C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2}}$$

якщо позначимо $C_1 := C \quad C_2 := C \quad R_1 := R \quad R_2 := R$

$$\frac{\frac{1}{C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2} \cdot K_{01}}{s^2 + \left(\frac{1}{C_1 \cdot R_1} + \frac{1}{R_2 \cdot C_2} + \frac{1}{R_2 \cdot C_1} - \frac{K_{01}}{R_2 \cdot C_2} \right) \cdot s + \frac{1}{C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2}} \rightarrow \frac{1}{C^2 \cdot R^2} \cdot \frac{K_{01}}{\left[s^2 + \left(\frac{3}{C \cdot R} - \frac{K_{01}}{C \cdot R} \right) \cdot s + \frac{1}{C^2 \cdot R^2} \right]}$$

$$H(s) := \frac{\frac{1}{C^2 \cdot R^2} \cdot K_{01}}{s^2 + \frac{1}{C \cdot R} \cdot (3 - K_{01}) \cdot s + \frac{1}{C^2 \cdot R^2}}$$

Отже, системна функція має вигляд функції кола з властивостями ФНЧ

$$H(s) = \frac{K_{LP0} \omega_p^2}{s^2 + 2\alpha_p s + \omega_p^2}$$

$$2\alpha_p = \frac{3 - K_{01}}{RC}, \quad \omega_p^2 = \frac{1}{R^2 C^2}, \quad K_{LP0} = K_{01}$$

Рис. 5. Системна функція ФНЧ з додатним зворотним зв'язком, знайдена через параметри елементів кола, як РНУ-реакція

Приклад 5

Структура Рауха

$v_3(t) = -K \cdot \Delta v; K \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta v \rightarrow 0; v_2(t) \approx 0$

$v_0(s) := 1$ - зображення вхідного сигналу у вигляді $\delta(t)$ - функції

система рівнянь за методом вузлових напруг

Given

$$\frac{v_0(s) - v_1}{R_1} + \frac{(v_3 - v_1)}{R_2} = \frac{v_1 - v_2}{R_3} + v_1 \cdot (C_1 \cdot s) \quad \frac{v_1 - v_2}{R_3} = (v_2 - v_3) \cdot C_2 \cdot s \quad v_2 = 0$$

Find(v1, v2, v3)2 collect, s \rightarrow
$$\frac{-R_2}{[C_2 \cdot s^2 \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 + (R_2 \cdot R_3 \cdot C_2 + R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 + R_1 \cdot R_2 \cdot C_2) \cdot s + R_1]}$$

тоді системна функція

$$H(s) := \frac{-R_2}{[C_2 \cdot s^2 \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 + (R_2 \cdot R_3 \cdot C_2 + R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 + R_1 \cdot R_2 \cdot C_2) \cdot s + R_1]}$$

або

$$H(s) := \frac{\frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{(C_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot R_2)}}{s^2 + \frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot s + \frac{1}{(C_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot R_2)}}$$

якщо позначимо $R_1 := R \quad R_2 := R \quad R_3 := R$

$$\frac{\frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{(C_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot R_2)}}{s^2 + \frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot s + \frac{1}{(C_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot R_2)}} \rightarrow \frac{-1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R^2 \cdot \left(s^2 + \frac{3}{C_1 \cdot R} \cdot s + \frac{1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R^2} \right)}$$

Отже, системна функція також має вигляд функції кола з властивостями ФНЧ

$$H(s) = \frac{K_{LP_0} \omega_p^2}{s^2 + 2\alpha_p s + \omega_p^2}$$

$$2\alpha_p = \frac{3}{C_1 R}, \quad \omega_p^2 = \frac{1}{C_1 C_2 R^2}, \quad K_{LP_0} = -1$$

Рис. 6. Системна функція ФНЧ зі складним (багатопельовим) від'ємним зворотним зв'язком, знайдена через параметри елементів кола, як РНУ-реакція

З'єднання каскадів. Буферізація

В багатьох випадках електричні схеми можна поділити на каскади. На рис 7 наведено приклади послідовного з'єднання каскадів з використання повторювача напруги, побудованого на операційному підсилювачі, як буфера та без буфера, коли каскади зеднані безпосередньо.

Оскільки операційний підсилювач має вхідний опір $R_{вх} \rightarrow \infty$, а вихідний опір $R_{вих} \rightarrow 0$, то передатна функція каскаду, що підключений до буфера на основі операційного підсилювача, практично не залежить від навантаження. Повторювач має коефіцієнт передачі $K = 1$.

Навпаки, при розрахунках каскаду на пасивних елементах без операційних підсилювачів потрібно враховувати навантаження, яке споживає частку вихідного струму каскаду і тому змінює його передатну функцію.

У схемі (рис. 7,а) з розв'язуючим повторювачем напруги на операційному підсилювачі (буфер) між каскадами передатні функції каскадів перемножуються. У схемі (рис. 7,б) з безпосередньо з'єднаними ланками трапляється відбір частки вихідного струму першої ланки в навантаження – тобто в другу ланку. Тому передатну функцію треба шукати шляхом розрахунку всього електричного кола цілком, наприклад, за методом вузлових напруг. Як бачимо, передатні функції в обох випадках є різними.

Приклад 6

а) каскадування через розв'язуючий операційний підсилювач:

$$H1(s) := \frac{1}{1 + R1 \cdot C1 \cdot s} \quad H2(s) := 1 \quad H3(s) := \frac{R2 \cdot C2 \cdot s}{1 + R2 \cdot C2 \cdot s}$$

системна функція:

$$H(s) := H1(s) \cdot H2(s) \cdot H3(s) \rightarrow \frac{1}{(1 + C1 \cdot s \cdot R1)} \cdot C2 \cdot s \cdot \frac{R2}{(C2 \cdot s \cdot R2 + 1)}$$

або

$$H(s) := C2 \cdot s \cdot \frac{R2}{[C1 \cdot s^2 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2 + (C2 \cdot R2 + C1 \cdot R1) \cdot s + 1]}$$

б) безпосередньо з'єднання ланок без розв'язки:

$$v0(s) := 1$$

Given

$$\frac{v0(s) - v1}{R1} - (v1 \cdot C1 \cdot s) - (v1 - v2) \cdot C2 \cdot s = 0 \quad (v1 - v2) \cdot C2 \cdot s = \frac{v2}{R2}$$

Find(v1, v2) collect, s $\rightarrow s \cdot C2 \cdot \frac{R2}{[C2 \cdot s^2 \cdot R2 \cdot C1 \cdot R1 + (C2 \cdot R2 + C1 \cdot R1 + C2 \cdot R1) \cdot s + 1]}$

Рис. 7. Послідовне з'єднання каскадів через розв'язуючий повторювач напруги на операційному підсилювачі

РОБОЧЕ ЗАВДАННЯ

Знайдіть аналітичні вирази системних функцій кіл, наведених на рис. 8, у разі, коли початкові умови – нульові, коефіцієнти підсилення $K \neq \infty$ (але $K \rightarrow \infty$) та, якщо $K = \infty$ – операційні підсилювачі *ідеальні*.

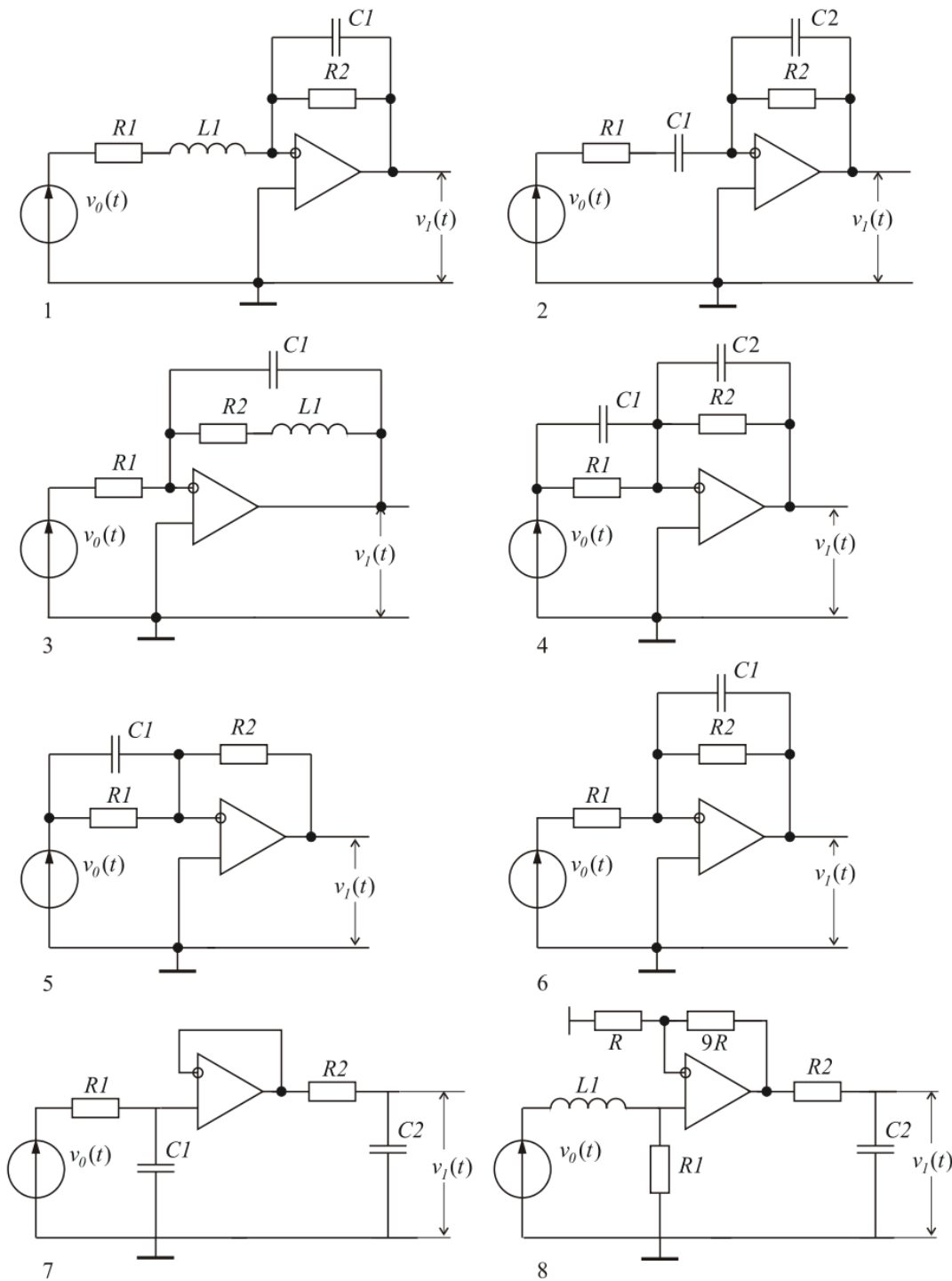


Рис. 8. Типові схеми на операційних підсилювачах

Контрольні запитання та завдання

1. *Що таке системна функція?*
2. *Чим відрізняються системна і додаткова операторні функції?*
3. *Поясніть формулу суперпозиції ЛПЧ-кіл.*
4. *Які системні функції бувають?*
5. *Яку розмірність має системна функція?*
6. *Назвіть основні способи визначення системної функції та її основні властивості.*
7. *Сформулюйте алгоритм запису диференціального рівняння "вхід-вихід" на основі системної функції і навпаки?*
8. *Наведіть нуль-полосне зображення системної функції.*
9. *Наведіть зв'язок між системною функцією і диференціальним рівнянням «вхід-вихід»*
10. *Поясніть зв'язок між полюсами системної функції та коренями характеристичного рівняння кола.*
11. *Наведіть визначення абсолютної стійкості кола чи системи. Який вигляд має діаграма нулів і полюсів стійкого кола?*
12. *Доведіть, що системна функція є зображенням за Лапласом імпульсної характеристики.*
13. *Запишіть формулу, якою визначається взаємозв'язок між зображеннями імпульсної і перехідної характеристик.*
14. *Як виглядає усталена реакція кола на вхідний сигнал у вигляді комплексної експоненти?*

ТЕМА 4. МЕТОД ІНТЕГРАЛІВ ЗГОРТКИ

Лекція 8. Часові динамічні характеристики кіл. Визначення перехідних характеристик електричних кіл за допомогою тестових сигналів. Ефект "згладжування", який створюється фізичними системами

Вступ. Часові динамічні характеристики електричних кіл. Розмірність характеристик $h(t)$ і $h_{\delta}(t)$. Визначення $\delta(t)$ – функції у якості ідеального одиничного імпульсу та її основні властивості. Ефект "згладжування", створюваний фізичними системами. Сигнали у вигляді $\delta(t)$ – функції. Дослідження ефекту "згладжування" в середовищі Mathcad. Аналіз у середовищі Micro-CAP. Робоче завдання. Контрольні запитання та завдання.

ВСТУП

У розглянутих раніше методах аналізу перехідних процесів зв'язок між діючим на коло сигналом $x(t)$ і вихідною величиною $y(t)$ виявлявся опосередковано: або у вигляді операторної передатної функції $H(s)$ (системної функції), що представляє відношення зображень за Лапласом обох сигналів $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ і $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, або за допомогою диференціального рівняння, що зв'язує $x(t)$ і $y(t)$, еквівалентом якого і є передатна $H(s)$ (системна) функція.

Такі способи опису динамічних властивостей кола не несуть в явному вигляді інформацію про швидкість перебігу перехідних процесів. Одержати її можна при вивченні реакції кола на деякі типові вхідні дії – на так звані ідеалізовані характеристичні сигнали.

Часові динамічні характеристики електричних кіл

В якості характеристичних сигналів використовують одиничну ступінчасту $1(t)$ функцію (функцію Хевісайда) і імпульсну $\delta(t)$ функцію (функцію Дірака).

Визначення. *Перехідною характеристикою кола $h(t)$ називається перехідна реакція кола на сигнал у вигляді одиничної ступінчастої функції $1(t)$ за нульових початкових умов.*

Імпульсною характеристикою $h_{\delta}(t)$ кола називається перехідна реакція кола на сигнал у вигляді $\delta(t)$ – функції²¹⁾ за нульових початкових умов.

Перехідну та імпульсну характеристики конкретного кола можна знайти за допомогою операторного метода. Так при $x(t) = 1(t)$ зображення вхідної величини $X(s) = \frac{1}{s}$. Тоді зображення вихідної величини $h(t)$ дорівнює

$Y(s) = \frac{1}{s} H(s)$. Тому $h(t)$ – це оригінал останньої функції.

Аналогічно при $x(t) = \delta(t)$ маємо $X(s) = 1$, тоді $Y(s) = H(s)$ і обернене перетворення Лапласа дає $h_{\delta}(t)$. Таким чином, імпульсна характеристика кола $h_{\delta}(t)$ є оригіналом передатної (системної) функції $H(s)$.

Розмірність характеристик $h(t)$ і $h_{\delta}(t)$

Розмірність $h(t)$ визначається *розмірністю вхідного та вихідного сигналів*, кожен з яких може бути напругою або струмом, наприклад, може мати розмірність ампер на вольт (А/В), вольт на ампер (В/А) чи бути безрозмірною. Розмірність $h_{\delta}(t)$ дорівнює *розмірності відповідної перехідної характеристики, поділеної на час*. Лише за таких умов виконується *збалансованість за розмірністю інтегралів згортки*, де вказані характеристики застосовуються.

Якщо реакція кола визначається на тій же парі виводів, що і збудження, то замість $H(s)$ використовується вхідна величина $Z(s)$ або $Y(s)$ ²²⁾. Тому замість

²¹⁾ При цьому слід пам'ятати, що тестові сигнали у вигляді $1(t)$ і $\delta(t)$ – функцій є математичною абстракцією (Desoer, C.A., and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New-York: McGraw-Hill, 1969).

$h(t)$ маємо *перехідний опір* $Z(t)$ або *перехідну провідність* $Y(t)$, замість $h_{\delta}(t) \rightarrow Z_{\delta}(t)$ або $h_{\delta}(t) \rightarrow Y_{\delta}(t)$ – *імпульсний опір* або *імпульсну провідність*.

З наведених операторних співвідношень випливає, що перехідна і імпульсна характеристики пов'язані між собою наступним чином:

$$h(t) = \int_0^t h_{\delta}(t) dt, \quad h_{\delta}(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Ці зв'язки підтверджують сказане щодо розмірності $h(t)$ та $h_{\delta}(t)$ і можуть бути використані для обчислення характеристик.

Розглянемо приклади. Для кіл, зображених на рис. 1,а,б, маємо $h(t) = 1 - e^{-t/\tau}$, де $\tau = L/R$ або $\tau = RC$ – сталі часу, розмірність секунди (с). Характеристику $h_{\delta}(t)$ одержимо шляхом диференціювання:

$$h_{\delta}(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Для кіл, зображених на рис. 1,в,г, маємо $h(t) = e^{-t/\tau}$, де $\tau = L/R$ або $\tau = RC$.

Якщо тепер формально застосувати зв'язок $h_{\delta}(t) = \frac{dh(t)}{dt}$, то результат буде *невірним*. Тому визначимо $h_{\delta}(t)$ інакше, як оригінал основної передатної (системної) функції

$$H(s) = \frac{s\tau}{1 + s\tau}.$$

Оскільки ця функція – неправильний дріб, то перед застосуванням теореми розкладання слід виділити цілу частину

$$H(s) = 1 - \frac{1}{1 + s\tau}.$$

²²⁾ Наведене позначення для повної провідності (адмітанса) через $Y(s)$ є традиційним, тому не слід його путати з позначенням $Y(s)$ у попередніх прикладах, яке було \mathcal{L} -перетворенням $y(t)$.

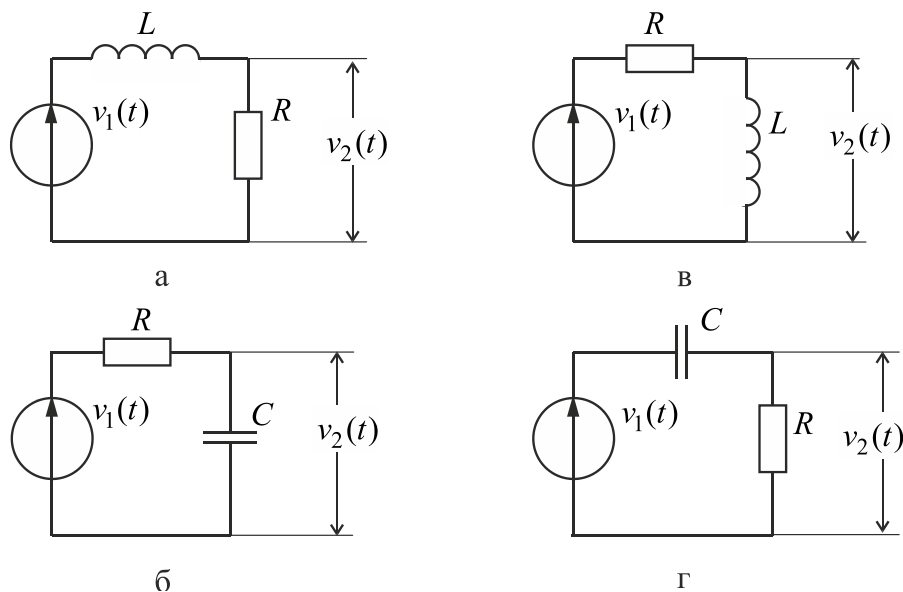


Рис. 1

Оригінал першого доданку – $\delta(t)$ – функція. В результаті для кіл на рис. 1,в,г дістанемо:

$$h_{\delta}(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0.$$

Очевидно, що при диференціюванні $h(t)$ одержуємо тільки другий доданок, бо наведений вираз $h(t) = e^{-t/\tau}$ є дійсним тільки при $t > 0$, але при $t < 0$ завжди $h(t) = 0$ (рис. 2).

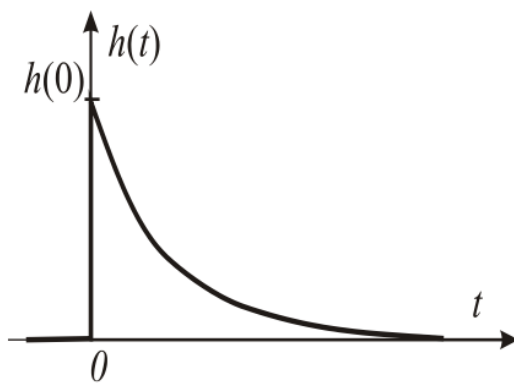


Рис. 2

Тому для одержання вірного результату для $h_{\delta}(t)$ шляхом диференціювання $h(t)$ варто було б записати:

$$h(t) = e^{-t/\tau} \cdot 1(t),$$

і тоді при диференціюванні добутку одержуємо правильний результат.

У першому прикладі (рис. 1,а,б) це було несуттєво, оскільки $h(0) = 0$ і при диференціюванні нічого не втрачається. Тому варто або виправити формули зв'язку між $h(t)$ і $h_{\delta}(t)$, або *враховувати* множник $1(t)$.

Очевидно, зв'язок між $h(t)$ і $h_{\delta}(t)$ можна записати так:

$$h_{\delta}(t) = h(0) \cdot \delta(t) + \frac{dh(t)}{dt}; \quad (1)$$

$$h(t) = \int_{+0}^t h_{\delta}(t) dt + h(0) = \int_{-0}^t h_{\delta}(t) dt. \quad (2)$$

Приклад обчислення $h_{\delta}(t)$ у символьному вигляді в середовищі Mathcad, коли характеристика має доданок у вигляді $\delta(t)$ – функції, наведено на рис. 3, довільно вибраного кола – наведено на рис. 4.

За вказаною ознакою, всі кола можна поділити на два класи:

- 1) кола з *обмеженою* імпульсною характеристикою ($h(0) = 0$);
- 2) кола з *необмеженою* імпульсною характеристикою ($h_{\delta}(0) = \infty$; $h(0) \neq 0$).

Множник $1(t)$, що входить у всі вирази $h(t)$ і $h_{\delta}(t)$, зазвичай береться до уваги.

Приклад 1

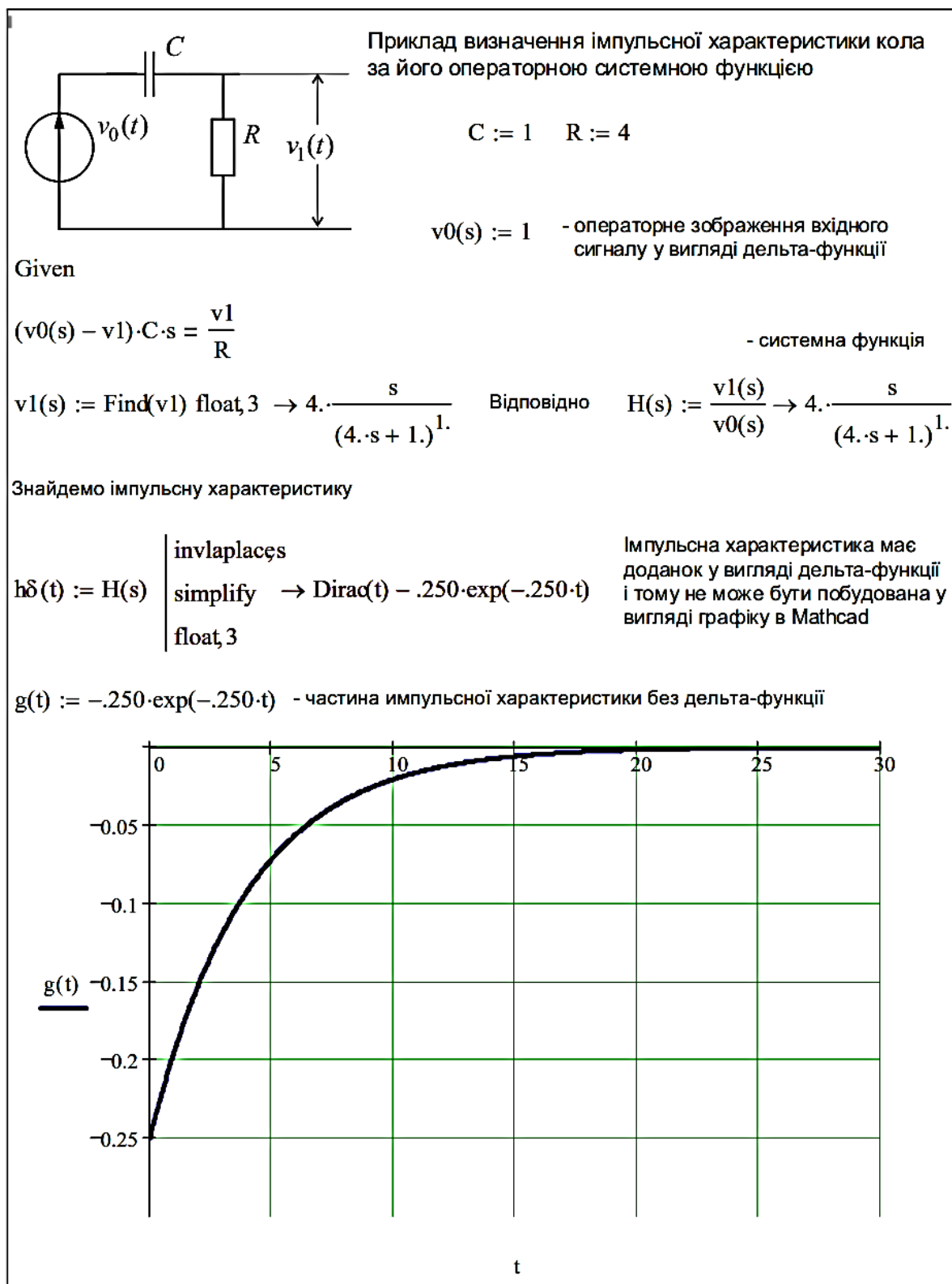


Рис. 3. Визначення імпульсної характеристики кола за його операторною системною функцією

Приклад 2

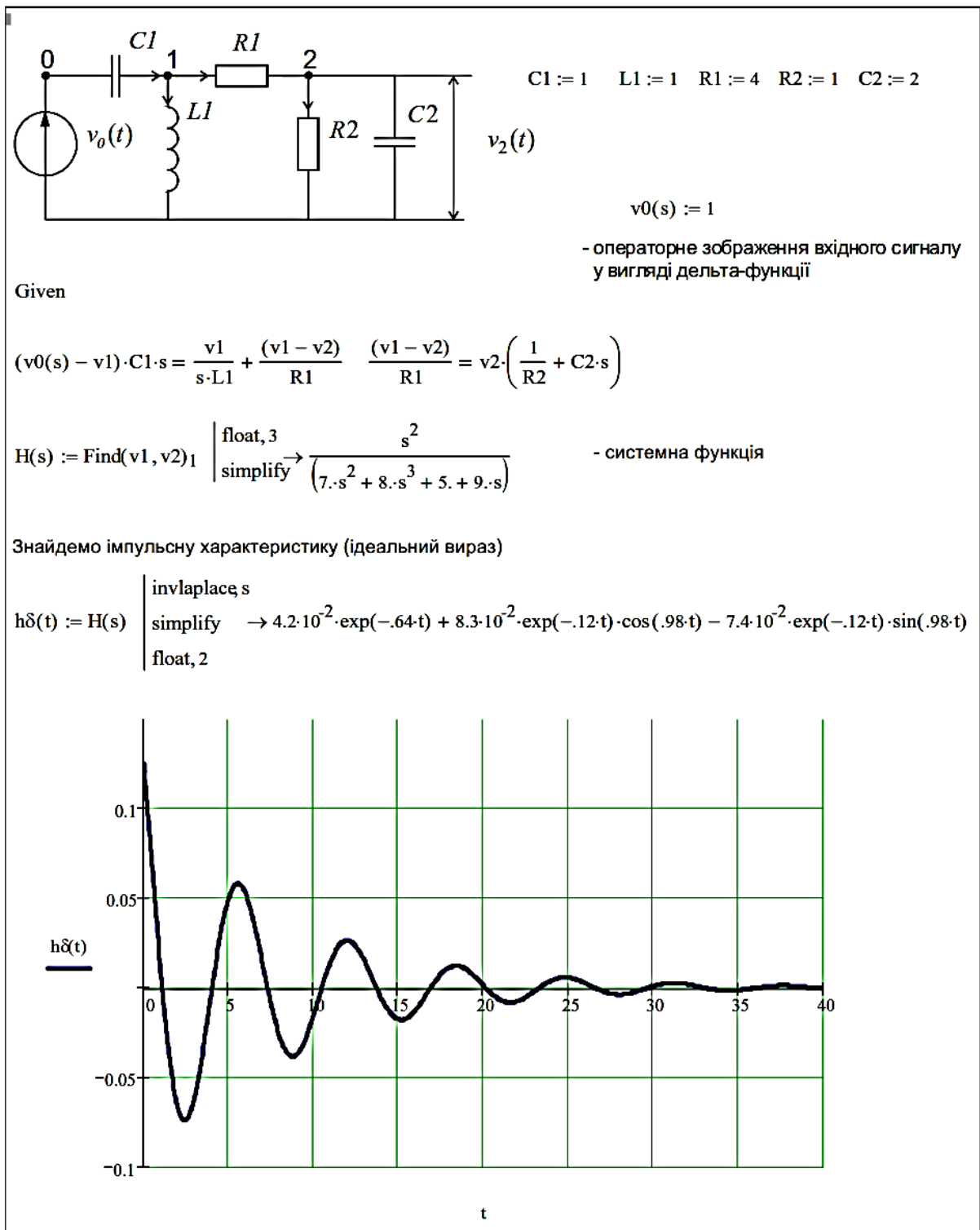


Рис. 4. Визначення імпульсної характеристики кола за його операторною системною функцією (продовження)

Визначення $\delta(t)$ – функції у якості ідеального одиничного імпульсу та її основні властивості

В попередніх прикладах, що на рис. 3 – рис. 4, імпульсну характеристику знаходили як зворотне \mathcal{L} -перетворення від системної функції, яку (імпульсну характеристику) ми назвали реакцією на *одиничний імпульс*. В його якості брали так звану узагальнену $\delta(t)$ – функцію, що має зображення:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1. \quad (3)$$

Нижня межа вибрана від $t = 0_-$, щоб $\delta(t)$ – функція, яка існує в точці $t = 0$, була включена в інтервал інтегрування.

Тоді можна отримати зображення за Лапласом РНУ-реакції $Y(s) = H(s)X_{\delta}(s) = H(s) \cdot 1 = H(s)$. Отже,

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h_{\delta}(t).$$

Якщо до входу кола за нульових початкових умов прикладається одиничний імпульс, то вихідний сигнал кола є його імпульсною характеристикою $y(t) = h_{\delta}(t)$.

Хоч ми дали визначення функції $h_{\delta}(t)$ як "реакція на одиничний імпульс", але поки що не говорили, яким вимогам повинен відповідати "одиничний імпульс", щоб дати такого роду "реакцію".

Дамо визначення одиничного імпульсу. Для цього розглянемо імпульсну функцію $p_{\Delta}(t)$, таку, що

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{1}{\Delta} & \text{при } 0 < t < \Delta; \\ 0 & \text{при } t > \Delta. \end{cases}$$

На рис. 5 наведено, як утворюється імпульсна функція.

$$p_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \cdot [1(t) - 1(t - \Delta)].$$

Площа імпульсу дорівнює:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\Delta}(t) dt = 1.$$

Ці дві рівності зберігаються при довільних значеннях Δ .

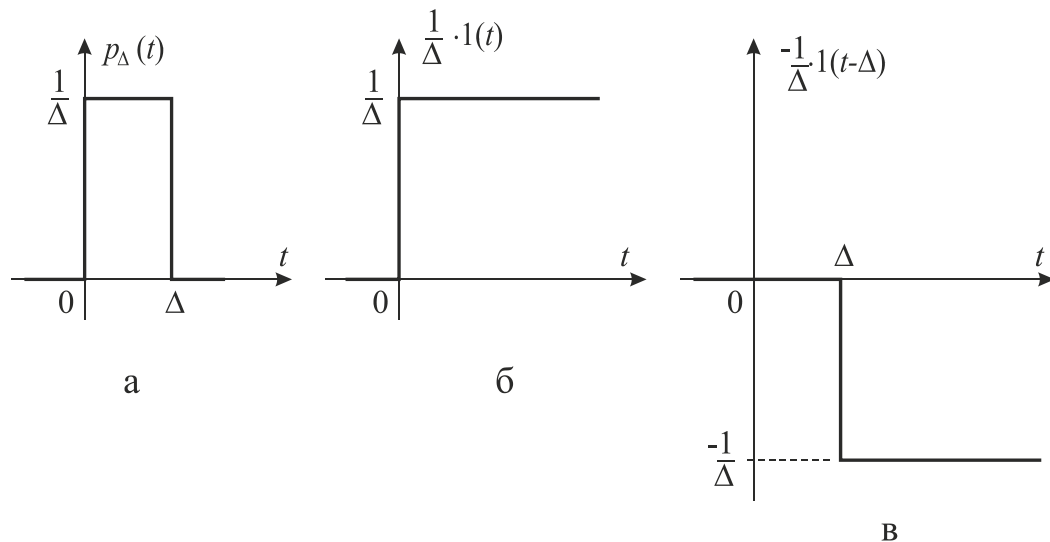


Рис. 5. Імпульсна функція $p_{\Delta}(t)$ (а) та утворення імпульсної функції, як суми ступінчастої функції $\frac{1}{\Delta} \cdot 1(t)$ (б) і другий від'ємної ступінчастої функції $-\frac{1}{\Delta} \cdot 1(t - \Delta)$, що має зсув у часі Δ (в)

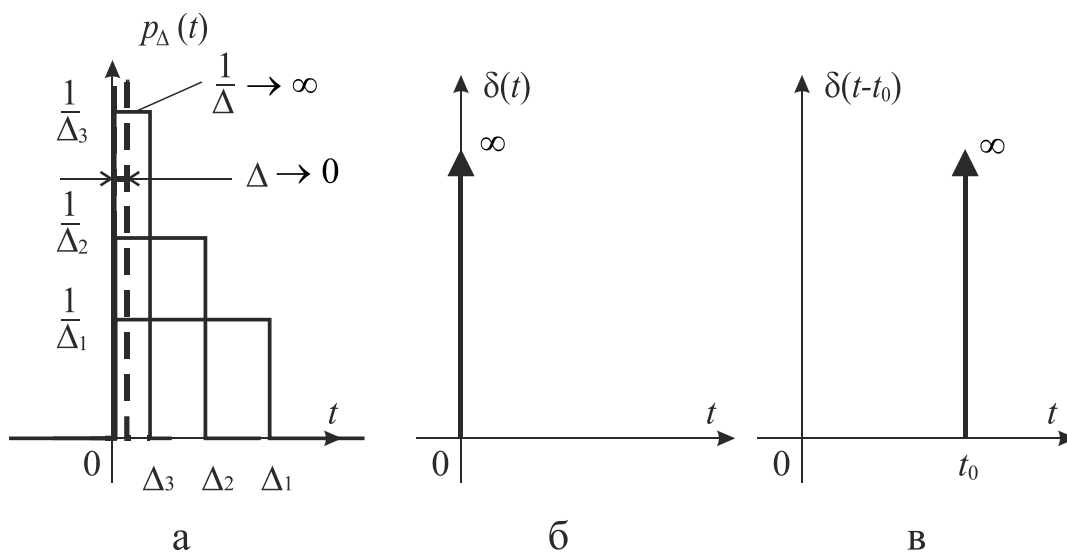


Рис. 6. Послідовність функцій $p_{\Delta}(t)$ (а), що наближаються до $\delta(t)$ – функції (б) і $\delta(t - t_0)$ – функція, що має зсув t_0 (в)

Якщо $\Delta \rightarrow 0$, отримаємо дельта-імпульс $\delta(t)$ (або δ – імпульс):

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta} \cdot [1(t) - 1(t - \Delta)] \right] = \frac{d}{dt} 1(t),$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\Delta}(t) dt = 1,$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Перша рівність, за визначенням, є похідною від одиничного стрибка, друга рівність визначає площу δ -імпульсу.

1. Таким чином, дельта-імпульс є імпульсом нульової тривалості у часі з одиничною площею і дорівнює похідній від одиничного стрибка:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad (\text{відповідно } \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1(t)), \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{або } \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \text{ де } \varepsilon \rightarrow 0).$$

2. Розмірність $\delta(t)$ дорівнює s^{-1} . Тоді імпульсні (голчаті) напруга чи струм з амплітудою A , що мають нескінченно малу тривалість у часі, записують так: $A \cdot \delta(t)$, де A має розмірність $V \cdot s$ (вольт-секунда) або $A \cdot s$ (ампер-секунда) відповідно. Тобто амплітуда A фактично є площею імпульсу. Отже, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ є безрозмірною величиною, а величина $A \cdot \delta(t)$ має розмірність вольти (В) або ампер (А).

3. У випадку зсуву в часі маємо:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_0, \\ 0 & \text{при } t \neq t_0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\delta(t - t_0) = \frac{d1(t - t_0)}{dt}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

4. Імпульс $\delta(t)$ не може бути визначений як звичайна функція. Замість цього він визначається як оператор – тобто визначається тим, "що він робить",

а не тим "що він є" (так звані "узагальнені" функції). Так для будь-якої неперервної у часі функції $f(t)$ маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (7)$$

– так звана *фільтруюча* (стробувальна) властивість δ -функції.

Множення δ -імпульсу, який має зсув у часі $\delta(t - t_0)$, на деяку функцію $f(t)$ – рівносильне його множенню на постійну величину $f(t_0)$, бо $\delta(t - t_0) = 0$ при $t \neq t_0$, тому $f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$. Тобто інтеграл (7) ставить у відповідальність кожної функції $f(t)$ число $f(t_0)$, яке визначається моментом "існування" функції $t = t_0$, коли вона $\delta(t - t_0) \neq 0$.

5. Якщо в (7) замінити t_0 на t , а змінну інтегрування t на λ , то внаслідок *парності* $\delta(t)$ -функції ($\delta(t - \lambda) = \delta(\lambda - t)$) одержимо:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \delta(\lambda - t) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda. \quad (8)$$

Тобто фундаментальна властивість $\delta(t)$ -функції – у згортку будь-якого сигналу з $\delta(t)$ відтворюється той самий сигнал.

Вираз (8) ще називають *динамічним зображенням* $f(t)$ через одиничні імпульсні сигнали ($\delta(t)$ -функції). Таким чином, сигнал $f(t)$ можна розглядати як нескінченну послідовність δ -імпульсів зі зсувом $\delta(t - \lambda)$, помножених на значення $f(\lambda) d\lambda$ у моменти часу, що відповідають цьому зсуву.

Оскільки операція згортки є інваріантною відносно аргументів підінтегральних функцій, то (8) можна записати у вигляді:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \lambda) \delta(\lambda) d\lambda.$$

6. Реакція ЛПЧ-системи, при використанні в якості вхідної дії $\delta(t)$, повинна бути тим, що ми вже назвали – реакцією на одиничний імпульс $h_{\delta}(t)$ цієї системи.

Так, дійсно, реакцію ЛПЧ-системи можна описати інтегралом згортки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h_{\delta}(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) h_{\delta}(\lambda) d\lambda$$

Тепер, якщо задати $x(t) = \delta(t)$, то одержимо:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) h_{\delta}(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) h_{\delta}(t - 0) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) h_{\delta}(t) d\lambda = \\ &= h_{\delta}(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) d\lambda = h_{\delta}(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \lambda) h_{\delta}(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \lambda) h_{\delta}(t) d\lambda = h_{\delta}(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \lambda) d\lambda = h_{\delta}(t).$$

7. Зображення за Лапласом:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \quad \mathcal{L}[\delta(t - T)] = \int_0^{\infty} \delta(t - T) e^{-st} dt = e^{-sT}, \quad T > 0.$$

8. Зміна масштабу аргументу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(at) dt = \frac{x(0)}{|a|}.$$

9. При використанні $\delta(t)$ -функцій нескінченної амплітуди допускається зміна напруги на конденсаторі у вигляді стрибка.

Приклад 3

Так у документі Mathcad на рис. 3 (до схеми на рис. 1,г) – вхідний δ -імпульс напруги $v_0(t) = 1 \cdot \delta(t)$, де амплітуда імпульсу дорівнює одиниці, що має розмірність $V \cdot c$ (тобто розмірність $v_0(t) = 1 \cdot \delta(t)$ дорівнює $\frac{V \cdot c}{c} = V$), миттєво заряджає конденсатор. Опір конденсатора для δ -імпульсу дорівнює нулю, при цьому через резистор тече δ -імпульс струму $i(0) = \frac{1 \cdot \delta(t)}{R}$ і на резисторі виділяється напруга у вигляді δ -імпульсу. До прикладення дії напруга на конденсаторі $V_C(0_-) = 0V$. При $t = 0$ конденсатор миттєво заряджається до напруги:

$$V_C(0_+) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \frac{1 \cdot \delta(t)}{R} dt = \frac{1}{RC} 1(0_+) = \frac{1}{RC} \times 1[\text{В} \cdot \text{с}].$$

При $t > 0$ початкові умови вже не нульові $V_C(0_+) \neq 0$, вхідна дія дорівнюватиме нулю $\delta(t) = 0$ і конденсатор розряджається:

$$V_C(t) = V_C(0_+) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \times 1[\text{В} \cdot \text{с}],$$

викликаючи струм у протилежному напрямку:

$$i_C(t) = \frac{-V_C(t)}{R} = \frac{-1}{R\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \times 1[\text{В} \cdot \text{с}],$$

який викликає на резисторі напругу $v_R(t) = \frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau} \times 1[\text{В} \cdot \text{с}], t > 0$ (її загальна розмірність В).

Сума цих дій і визначає знайдену раніше характеристику відносно напруги на резисторі $h_\delta(t) = \delta(t) - (1/\tau) \cdot e^{-t/\tau}$, що має розмірність с^{-1} – як відношення вихідної напруги (розмірність В) до амплітуди вхідної імпульсної напруги (розмірність $1 \cdot \text{В} \cdot \text{с}$).

* * *

Ефект "згладжування", створюваний фізичними системами.**Сигнали у вигляді $\delta(t)$ – функції. Дослідження ефекту****"згладжування" в середовищі Mathcad**

В якості прикладу розглянемо реакцію кола на короткі імпульси з одиничною площею, але різної форми:

- прямокутний

$$v_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 < t < T; \\ 0, & t \geq T. \end{cases} \quad (9)$$

- експоненціальний

$$v_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}, & 0 \leq t; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Аналіз проведемо в середовищі Mathcad.

Приклади обчислення в символьному вигляді реакції кола на прямокутний імпульс і експоненціальний імпульс з одиничною площею, а також похибки $\Delta h_\delta(t)$ визначення імпульсної характеристики внаслідок заміни δ -імпульсу його "моделлю", яка фізично може бути відтворена у вигляді електричного сигналу, наведено на рис. 7 – рис. 8.

Похибку $\Delta h_\delta(t)$ знаходимо, як різницю між виразом реакції кола на реальний тестовий сигнал (позначена $h_{\delta 1}(t)$) і виразом ідеальної характеристики (позначена $h_\delta(t)$), знайденої операторним методом за системною функцією кола: $\Delta h_\delta(t) = h_{\delta 1}(t) - h_\delta(t)$.

Приклад 4

Оцінка імпульсної характеристики при прямокутному імпульсі одиничної площі:

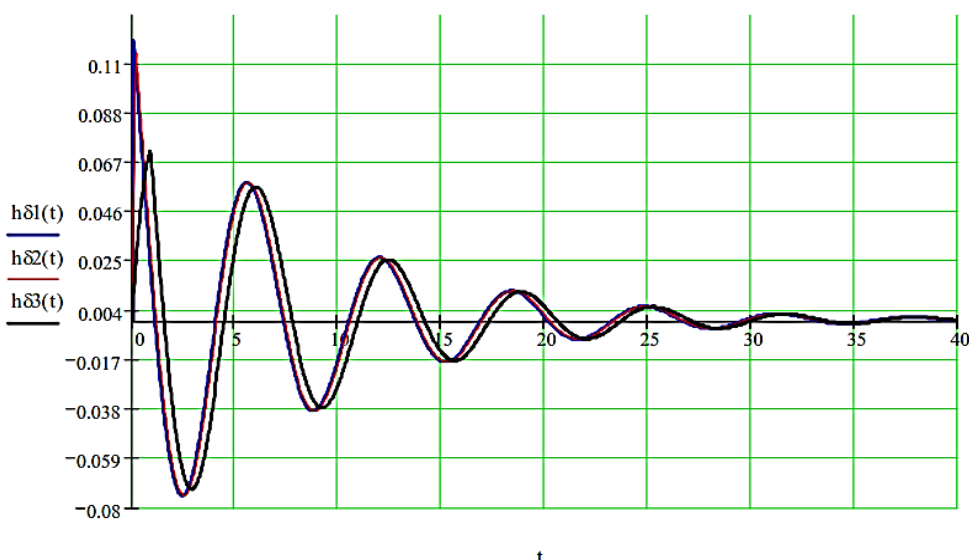
$$\frac{(1 - e^{-s \cdot T})}{s \cdot T} \text{ моделює імпульс у вигляді дельта-функції} \quad v2(s) := \frac{1}{s} \cdot H(s)$$

$$v2(t) := v2(s) \begin{cases} \text{invlaplace, s} \\ \text{complex} \rightarrow -6.5 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.64 \cdot t) + 6.5 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \cos(.98 \cdot t) + 9.3 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \sin(.98 \cdot t) \\ \text{simplify} \\ \text{float, 2} \end{cases}$$

Тоді за теоремою затримки

$$T := .05 \quad h\delta1(t) := \frac{(v2(t) - \Phi(t - T) \cdot v2(t - T))}{T} \quad T := 0.2 \quad h\delta2(t) := \frac{(v2(t) - \Phi(t - T) \cdot v2(t - T))}{T}$$

$$T := 0.9 \quad h\delta3(t) := \frac{(v2(t) - \Phi(t - T) \cdot v2(t - T))}{T}$$



Похибка визначення імпульсної характеристики:

$$\Delta h\delta1(t) := h\delta1(t) - h\delta(t) \quad \Delta h\delta2(t) := h\delta2(t) - h\delta(t) \quad \Delta h\delta3(t) := h\delta3(t) - h\delta(t)$$

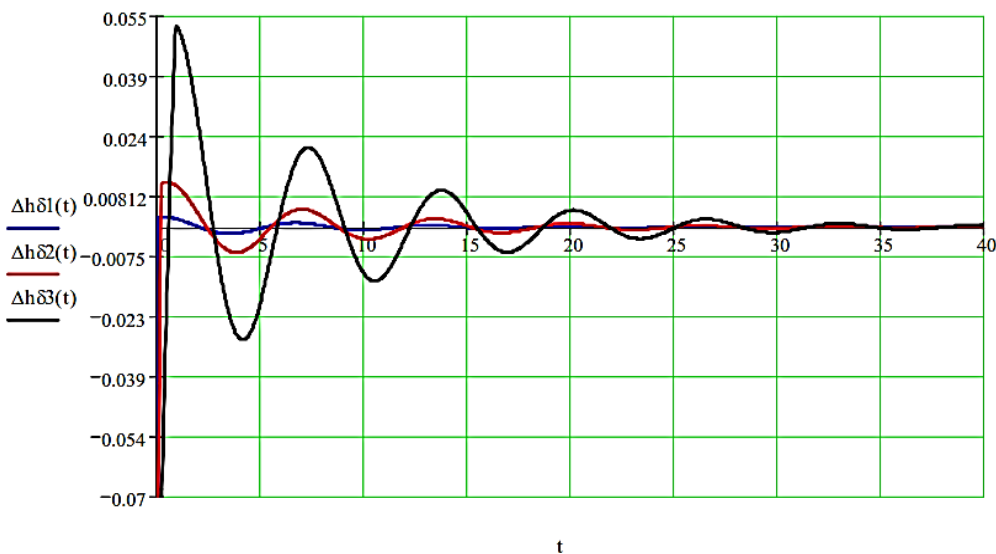


Рис. 7. Оцінка імпульсної характеристики при прямокутному імпульсі з одиничною площею

Приклад 5

**Оцінка імпульсної характеристики при експоненціальному імпульсі
одиничної площі:**

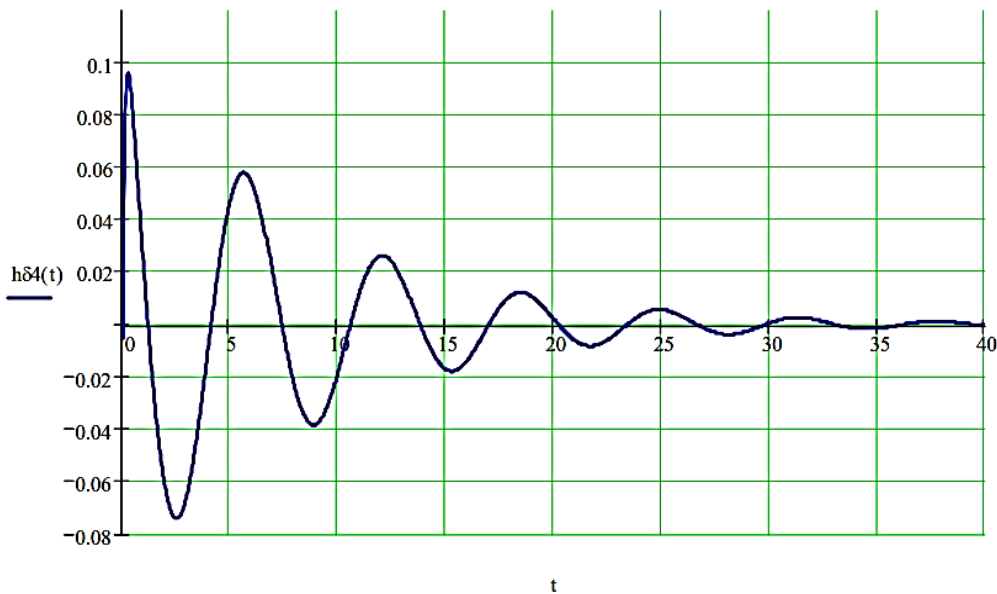
$\frac{1}{\tau \cdot \left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$ - моделює імпульс у вигляді дельта-функції

$$\tau := .1 \quad v2(s) := \frac{1}{\tau \cdot \left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \cdot H(s)$$

```

invlaplace, s
complex      → -0.14 exp(-10.0 t) + 4.4 10-2 exp(-6.4 t) + 9.1 10-2 exp(-12.0 t) cos(.98 t) - 6.6 10-2 exp(-12.0 t) sin(.98 t)
simplify
float, 2
    
```

$$h\delta_4(t) := -0.14 \exp(-10.0 t) + 4.4 \cdot 10^{-2} \exp(-6.4 t) + 9.1 \cdot 10^{-2} \exp(-12.0 t) \cos(.98 t) - 6.6 \cdot 10^{-2} \exp(-12.0 t) \sin(.98 t)$$



Похибка визначення імпульсної характеристики: $\Delta h\delta_4(t) := h\delta_4(t) - h\delta(t)$

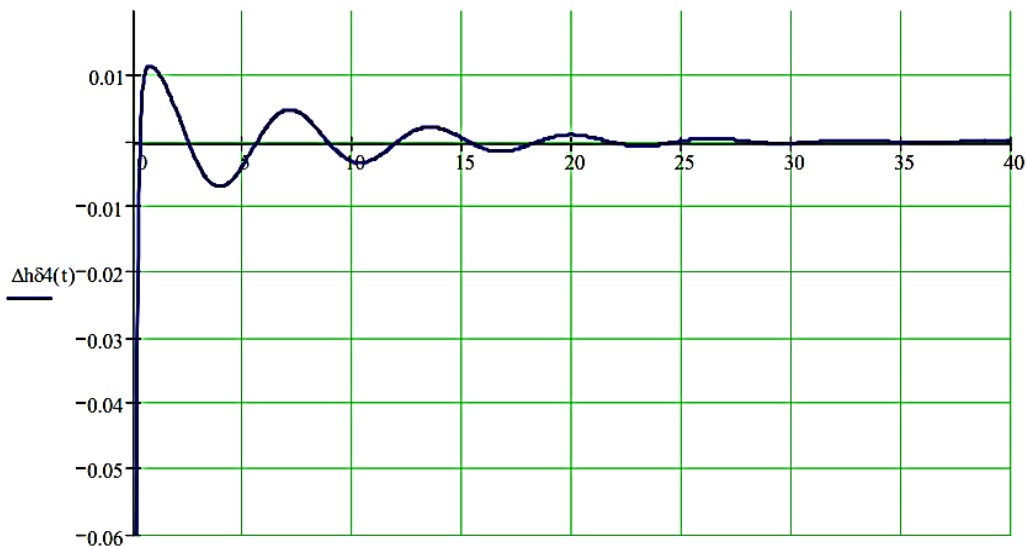


Рис. 8. Оцінка імпульсної характеристики при експоненціальному імпульсі з одиничною площею

Приклад 6

Оцінка імпульсної характеристики при прямокутному імпульсі одиничної площі через інтеграл згортки

$$T := 0.2$$

$$v_0(t) := \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{if } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{- вхідний сигнал}$$

$$h_{\delta 5}(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \int_0^t v_0(x) \cdot h_{\delta}(t-x) dx & \text{if } 0 \leq t < T \\ \int_0^T v_0(x) \cdot h_{\delta}(t-x) dx & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{- інтеграл згортки}$$

$$\Delta h_{\delta 5}(t) := h_{\delta 5}(t) - h_{\delta}(t) \quad \text{- похибка визначення імпульсної характеристики}$$

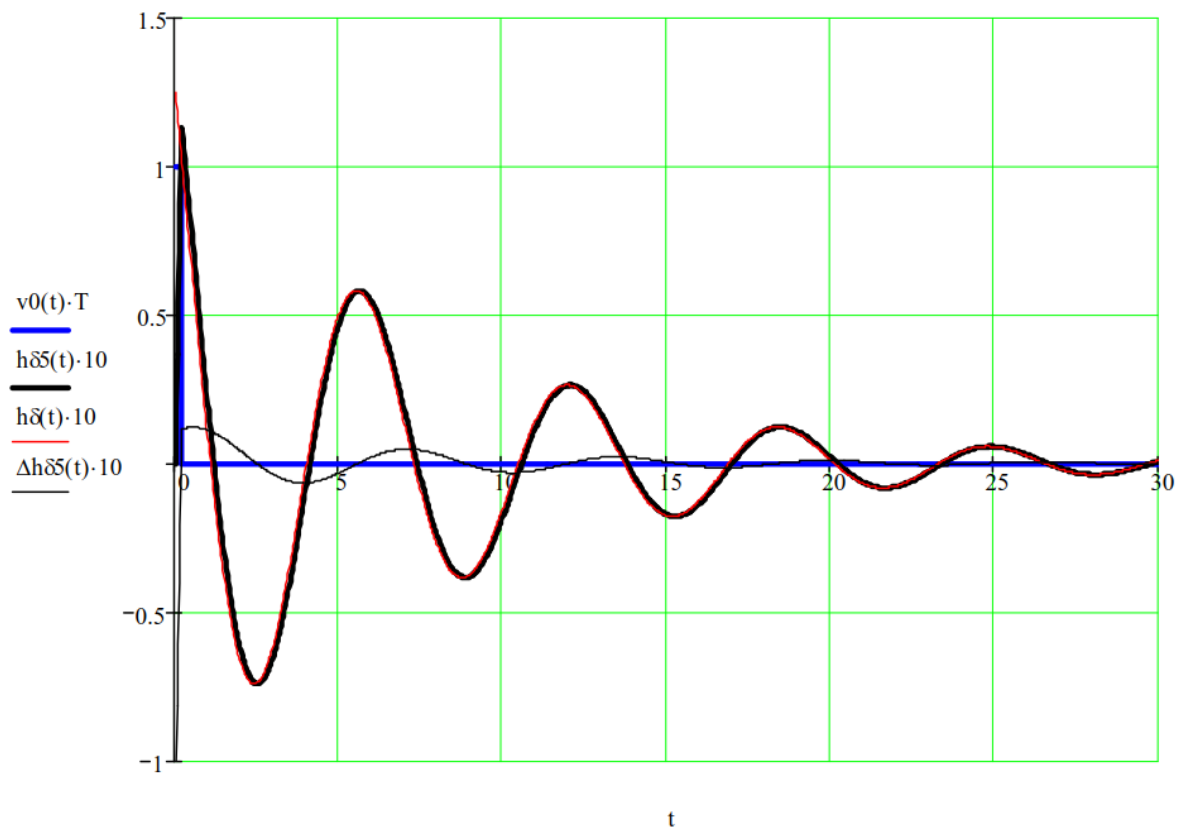


Рис. 9. Оцінка імпульсної характеристики через інтеграл згортки при прямокутному імпульсі одиничної площі

Висновки

1. Бачимо, що при $T \rightarrow 0$ або $\tau \rightarrow 0$ ці імпульси ведуть себе подібно до $\delta(t)$ – функції. Реакція кола (при $T \rightarrow 0$ або $\tau \rightarrow 0$) наближається до ідеальної характеристики $h_\delta(t)$, а похибка $\Delta h_\delta(t) \rightarrow 0$. Тобто вхідні дії, якщо вони дорівнюють нулю за межами деякого досить короткого часового інтервалу, дають, як правило, однаковий ефект, у разі рівності їх площі (інтеграли у часі). Це і є ефект "згладжування", створюваний фізичними системами.

2. Форма діючого сигналу не має значення (значення має площа). Тому обираємо форму, найбільш зручну при розрахунках. Якщо площа таких імпульсів дорівнює одиниці, то вони еквівалентні одиничному імпульсу $\delta(t)$. Ці імпульси можна використовувати у якості *апроксимації* $\delta(t)$ – імпульсу. Точніше, $\delta(t)$ – функція сама і є *математичною моделлю* короткого зовнішнього сигналу у вигляді одиничного імпульсу (з одиничною площею).

3. По-друге, імпульсна характеристика є також результатом ідеалізації, як і $\delta(t)$ – функція, що породжує її. З фізичної точки зору, імпульсна характеристика приблизно відображає реакцію ЛПЧ-кола (системи) на вхідний імпульсний сигнал довільної форми з одиничною площею за умови, що тривалість цього імпульсу досить мала в порівнянні з тривалістю власних перехідних процесів у цій системі (або зі сталими часу).

Визначення характеристик за допомогою тестових сигналів

Якщо системна функція кола не відома, то характеристики можна визначити експериментально за допомогою тестових сигналів, які наближаються до одиничної ступінчастої функції $1(t)$ і імпульсної $\delta(t)$ – функції.

Складність експериментального визначення імпульсних характеристик пов'язана з проблемою отримання тестових сигналів у вигляді $\delta(t)$ – функції. Тому простіше знайти реакцію на сигнал у вигляді $1(t)$ і потім здиференціювати

реакцію, щоб одержати імпульсну характеристику. Або використати інший метод.

Аналіз у середовищі Micro-CAP

Приклади визначення оцінок імпульсних характеристик кіл, що на рис. 1,б і рис. 1,г, у середовищі Micro-CAP при експоненціальній моделі $\delta(t)$ – функції наведено на рис. 10 і рис. 11.

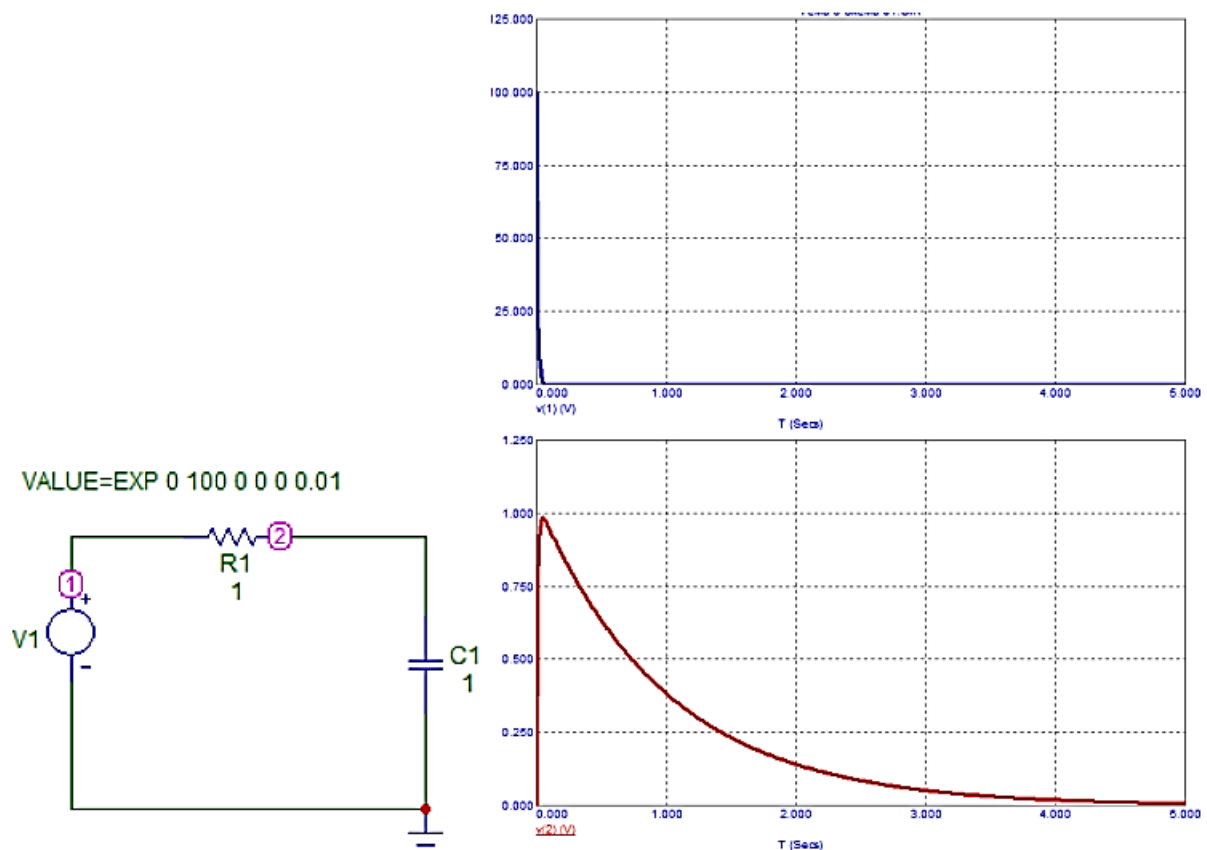


Рис. 10. Визначення імпульсної характеристики інтегруючого RC – кола при експоненціальній моделі $\delta(t)$ – функції

Для RC – кола, що диференціює, імпульсна характеристика містить доданок у вигляді $\delta(t)$ – функції, який при моделюванні проявляється у вигляді великого за амплітудою і короткого за тривалістю стрибка сигналу в початковий момент, а також невелику за значенням від'ємну повільно затухаючу експоненціальну складову, як це і було показано аналітично для розглянутого прикладу. Щоб розглянути невелику за розміром експоненціальну

складову на фоні $\delta(t)$ – імпульсу необхідно налаштувати параметри перегляду графіка за допомогою меню **Properties** → **Scales and Formats** (рис. 11).

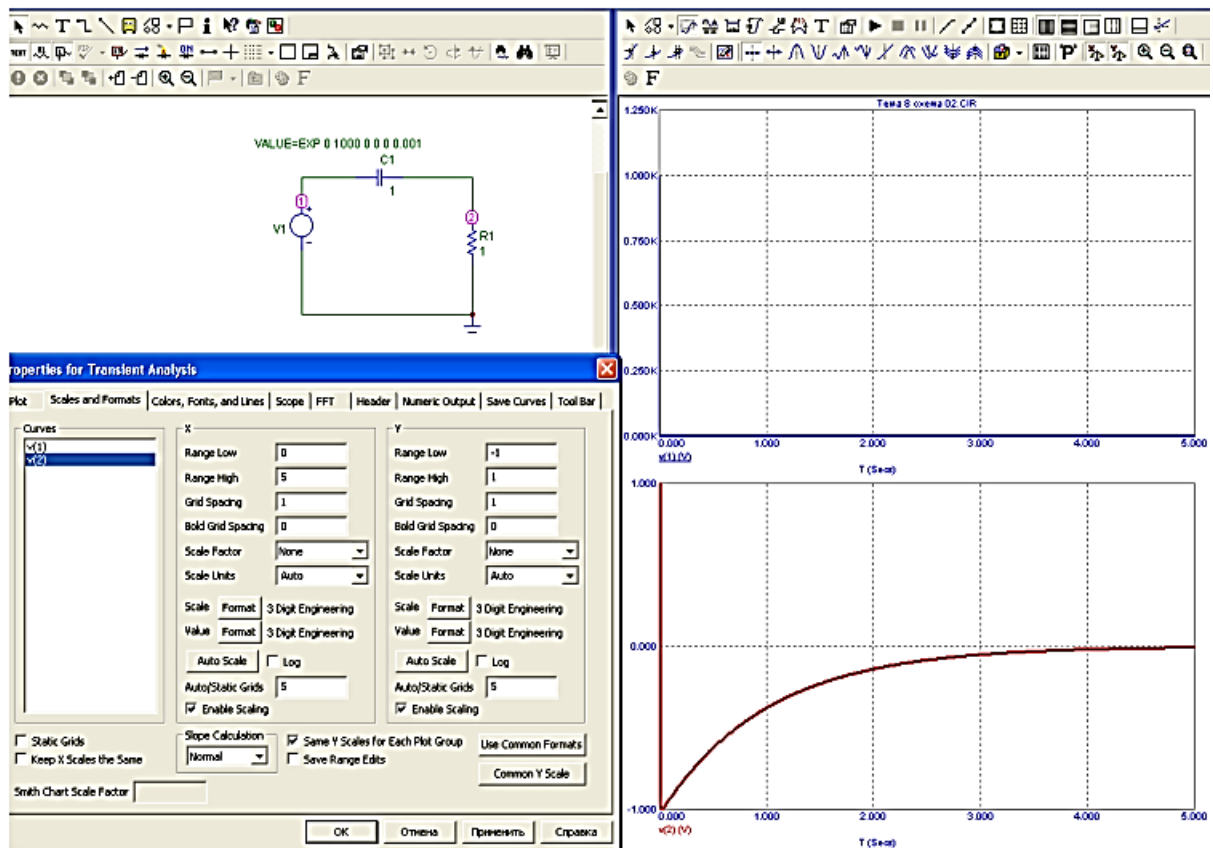


Рис. 11. Визначення імпульсної характеристики диференціюючого RC – кола. Меню **Properties** → **Scales and Formats**

Джерела сигналів задаються з меню **Component** → **Analog Primitives** → **Waveform sources** → Незалежні джерела напруги чи струму (**V**, **I**) → Кусково-лінійний сигнал (**PWL**) – для прямокутних імпульсів (або → експоненціальна функція (**EXP**) – для експоненціальних імпульсів).

Прямокутний імпульс у форматі кусково-лінійного сигналу (**PWL**) задається координатами точок зламу (t_i, y_i) , як на рис. 12,а. Синтаксис: $(t_1, y_1) (t_2, y_2) \dots (t_n, y_n)$. Приклад задання параметрів прямокутного імпульсу з одиничною площею наведено на рис. 12,б.

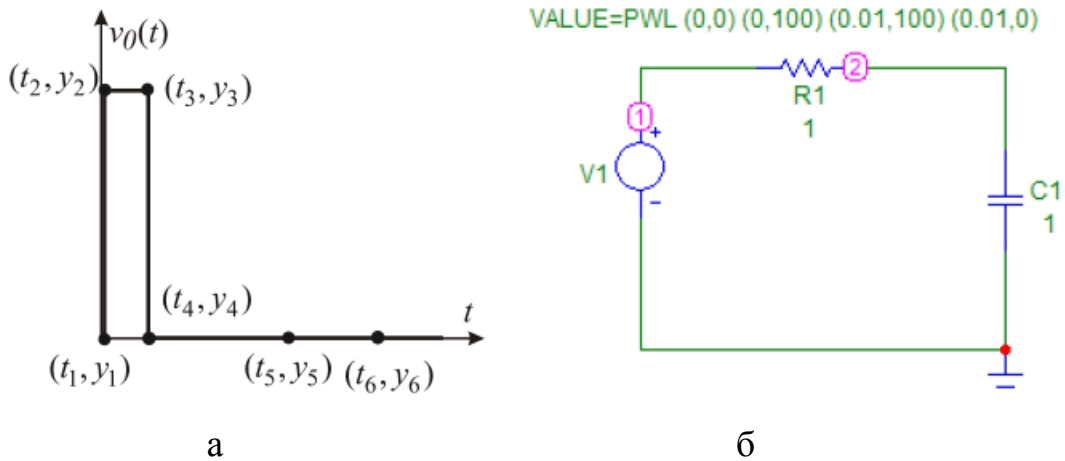


Рис. 12. Задання прямокутного імпульсу координатами точок зламу

Експоненціальний імпульс (**EXP**) в Micro-CAP описується виразом:

$$y(t) = \begin{cases} y_1 & \text{при } 0 < t < td_1 ; \\ y_1 + (y_2 - y_1) \{1 - \exp[-(t - td_1) / tc_1]\} & \text{при } td_1 < t < td_2 ; \\ y_1 + (y_2 - y_1) \{1 - \exp[-(t - td_1) / tc_1] - 1 + \exp[-(t - td_2) / tc_2]\} & \text{при } td_2 < t < STOP . \end{cases}$$

Щоб одержати звичайну загасаючу експоненту, необхідно задати у виразі, наприклад, наступні значення параметрів: $y_1=0$, $y_2=100$, $td_1=0$, $tc_1=0$, $td_2=0$, $tc_2=0,01$, тобто типу EXP 0 100 0 0 0 0.01 – це і є експоненціальна модель сигналу у вигляді $\delta(t)$ -функції. Тоді, в звичайному вигляді, дістанемо $v_0(t) = 100 \cdot e^{-t/0,01}$, $t \geq 0$, тобто імпульс з одиничною площею $v_0(t) = (1/\tau) \cdot e^{-t/\tau}$, $t \geq 0$ з $\tau = 0,01$ с. Приклад введення параметрів експоненціального імпульсу з одиничною площею вже був наведений на рис. 10.

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення імпульсної і перехідної характеристик.
2. За яких початкових умов визначають ці характеристики?
3. Яку розмірність мають характеристики?
4. Який взаємозв'язок між характеристиками?
5. Як знайти аналітичний вираз імпульсної і перехідної характеристик за операторною системною функцією ЛЧ-кола?
6. Наведіть кілька прикладів кіл з обмеженою і з необмеженою імпульсною характеристиками. Поясніть, чому це так?
7. Яке фізичне обґрунтування має поняття δ -імпульсу?
8. Назвіть основні визначення і властивості операцій з δ -імпульсами.
9. Поясніть суть ефекту "згладжування", створюваного фізичними системами.
10. Які моделі сигналів можна використовувати в якості апроксимації характеристичних тестових сигналів?
11. Яке фізичне обґрунтування має поняття "імпульсна характеристика" кола $h_{\delta}(t)$?
12. Доведіть, що для досліджуваного кола, яке наведене на рис. 13,а виконується співвідношення
$$h_{\delta_{\Sigma}}(t) = \int_0^t h_{\delta_1}(x) \cdot h_{\delta_2}(t-x) dx.$$

Лекція 9. Дослідження електричних кіл за допомогою інтегралів згортки

Динамічне зображення сигналу. Інтеграл згортки за методом імпульсних перехідних характеристик. Інтегратор з кінцевим часом інтегрування. Інтеграл згортки за методом перехідних характеристик. Інтеграл Дюамеля. Розрахунок кіл при дії одиночних імпульсів. Врахування доданків у вигляді $\delta(t)$ – функцій у підінтегральних множниках. Розрахунок реакції кіл, коли дія не має простого аналітичного опису. Дослідження реакції кіл у часовій області в середовищі Mathcad. Аналіз у середовищі Micro-CAP. Робоче завдання. Контрольні запитання та завдання.

Класичний та операторний методи аналізу перехідних процесів є зручними, якщо зовнішні дії мають досить просту форму, і практично мало придатні, коли вхідний сигнал змінюється у часі за складним законом.

Розглянемо процес на виході ЛПЧ-кола при дії на вході сигналу довільної форми $x(t)$, $t \geq 0$. Цей сигнал можна подати у вигляді послідовності прямокутних імпульсів тривалістю Δ з амплітудами $x(k \cdot \Delta)$. За малих значень Δ кожен такий імпульс еквівалентний дії на коло δ -імпульсу, що включається в момент $t = k \cdot \Delta$ і має площу $x(k\Delta) \cdot \Delta$. Тому вхідний сигнал представимо у

вигляді суми $x(t) \approx \sum_{k=0}^n x(k\Delta) \cdot \Delta \cdot \delta(t - k\Delta)$.

Після переходу до границі при $\Delta \rightarrow d\lambda$, $k \cdot \Delta \rightarrow \lambda$ одержимо $x(t) = \int_0^t x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda$ – динамічне зображення сигналу $x(t)$ через одиничні імпульсні сигнали.

У загальному випадку, динамічне зображення довільного сигналу $x(t)$ через одиничні імпульсні сигнали ($\delta(t)$ – функції) має вигляд:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda. \quad (1)$$

Оскільки реакція кола на кожний δ -імпульс описується імпульсною характеристикою $h_{\delta}(t)$, то для вихідного сигналу $y(t)$ можна записати аналогічний інтеграл, в якому реакція на $\delta(t - \lambda)$ записана, як $h_{\delta}(t - \lambda)$:

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda) \cdot h_{\delta}(t - \lambda) d\lambda. \quad (2)$$

Одержаний інтеграл називається *інтегралом згортки* (ще називають інтегралом згортки за методом імпульсних характеристик) і використовується для обчислення реакції кола $y(t)$ (РНУ-реакція за нульових початкових умов) на дію $x(t)$ довільної форми. Він і є основою часового методу розрахунку перехідних процесів.

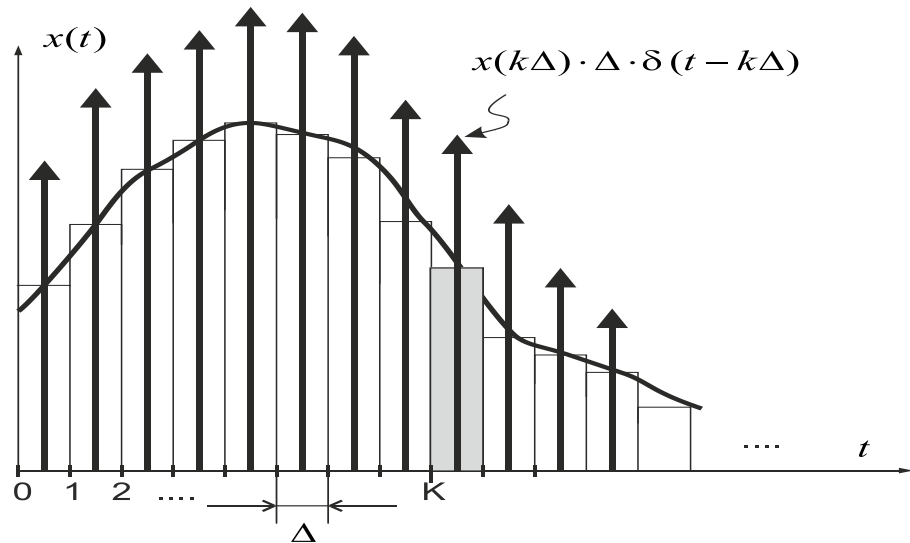


Рис. 1. Подання довільного сигналу у вигляді сукупності δ – імпульсів
У загальному випадку, інтеграл згортки має вигляд:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h_{\delta}(t - \lambda) d\lambda. \quad (3)$$

Оскільки для каузальних (причинних, фізично реалізованих) систем $h_{\delta}(t - \lambda) = 0, \lambda > t$ ($h_{\delta}(t) = 0, t < 0$ – реакція системи не може бути раніше, ніж дія), то

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) h_{\delta}(t - \lambda) d\lambda.$$

Якщо вхідна дія $x(t) = 0$ при $t < 0$, тобто система знаходиться в нульовому стані при $t = 0$, то

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda) h_{\delta}(t - \lambda) d\lambda.$$

Остання форма використовується для аналізу перехідних процесів за нульових початкових умов, які починаються в деякий час (момент комутації), який ми приймаємо за $t = 0$.

У **прикладі 1** (рис. 2) наведено, як визначається реакція за ненульових початкових умов. Власна реакція $v_1^{(B)}(t) = v_C(0) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$, $t \geq 0$, обумовлена ненульовими початковими умовами враховується окремо.

Зазначені вище (2) межі інтегрування вимагають особливих застережень при наявності в підінтегральних множниках доданків у вигляді $\delta(t)$ – функцій. Тоді необхідно враховувати, що перший множник під інтегралом $x(\lambda) = 0$ при $\lambda < -0$; відповідно $h_\delta(t - \lambda) = 0$ при $t - \lambda < -0$, тобто при $\lambda > t + 0$. Саме ці значення меж інтегрування ($-0 < \lambda < t + 0$) необхідно розглядати при обчисленні.

При обмеженому значенні $x(t)$ δ – доданок може містити лише $h_\delta(t - \lambda)$. Внесок цього доданку можна врахувати окремо. Для цього запишемо:

$$y(t) = \int_{-0}^{t+0} x(\lambda)h_\delta(t - \lambda)d\lambda = \int_{-0}^{t-0} x(\lambda)h_\delta(t - \lambda)d\lambda + \int_{t-0}^{t+0} x(\lambda)h_\delta(t - \lambda)d\lambda.$$

Оскільки другий інтеграл можна перетворити до вигляду:

$$\int_{t-0}^{t+0} x(\lambda)h_\delta(t - \lambda)d\lambda = x(t) \cdot \int_{t-0}^{t+0} h_\delta(t - \lambda)d\lambda = x(t) \cdot h(0),$$

то остаточно запишемо:

$$y(t) = x(t)h(0) + \int_0^{t-0} x(\lambda)h_\delta(t - \lambda)d\lambda. \quad (4)$$

В останньому виразі під інтегралом враховується тільки обмежена частина імпульсної характеристики $h_\delta(t)$ вже без доданку у вигляді $\delta(t)$ – функції.

Приклад 1

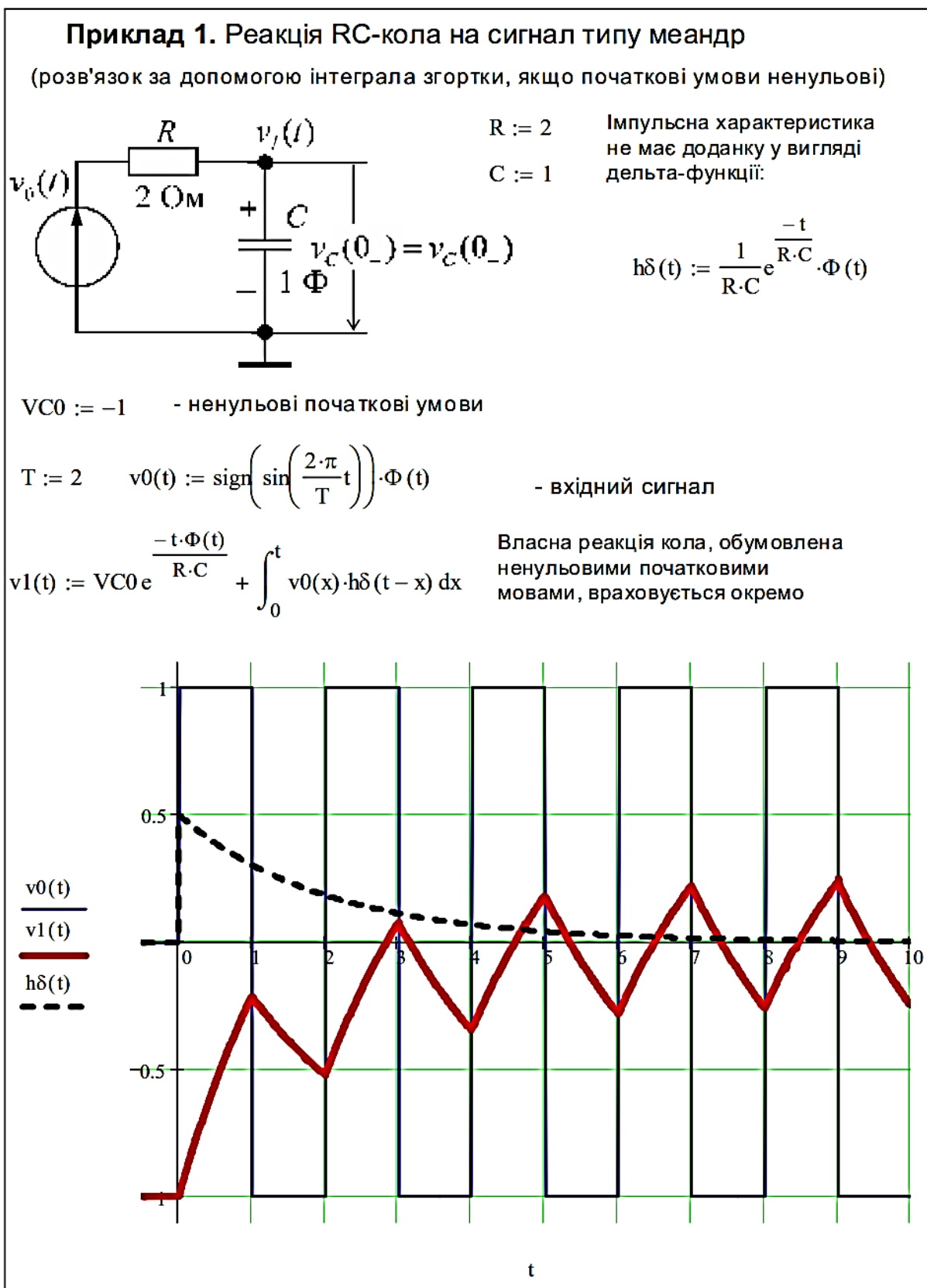


Рис. 2. Реакція RC-кола за ненульових початкових умов

Основні властивості інтегралів згортки

1. Оскільки при $t < 0$ $x(t) = 0$ і $h_{\delta}(t) = 0$, то межі в інтегралі (2) можна взяти від $-\infty$ до $+\infty$, тобто

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h_{\delta}(t - \lambda)d\lambda,$$

бо на доданих відрізках $(-\infty, 0)$ і (t, ∞) один із підінтегральних співмножників тотожно дорівнює нулю.

2. Змінні інтегрування можна замінити, використовуючи зв'язок $t - \lambda = \tau$. Інтеграл при цьому матиме вигляд:

$$y(t) = \int_0^t x(t - \tau)h_{\delta}(\tau)d\tau. \quad (5)$$

3. Інтеграл згортки розтягує імпульсний сигнал у часі.

Покажемо це на прикладі - інтегратора з кінцевим часом інтегрування τ .

Нехай прямокутний імпульс A тривалістю T (рис. 3,а) діє на вході кола, імпульсна характеристика якого зображена на рис. 3,б. Таке коло являє собою *інтегратор з кінцевим часом інтегрування τ* . У цьому простому випадку результат згортки легко знайти графічно. Нехай для визначеності $T > \tau$, тоді для різних моментів часу t_1 , t_2 і t_3 добуток $x(\lambda)$ і $h_{\delta}(t - \lambda)$ буде визначатися площею прямокутників, що перекриваються (рис. 3,в). В результаті, вихідний сигнал матиме вигляд, який наведено на рис. 3,г. Таким чином, коло додає тривалість імпульсу T і власний час τ .

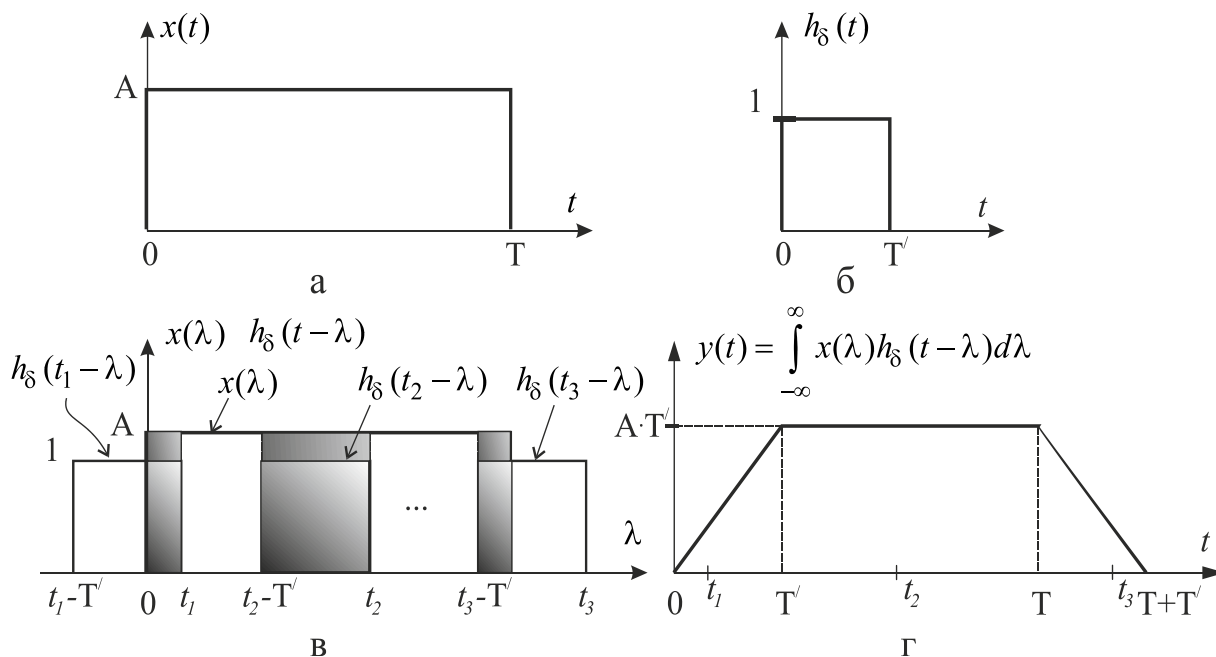


Рис. 3. Згортка з прямокутної імпульсної характеристикою (інтегратор з кінцевим часом інтегрування τ)

4. Теорема про \mathcal{L} -перетворення згортки:

Нехай $y(t) = \int_0^t x(t-\lambda)h_\delta(\lambda)d\lambda$.

Тоді \mathcal{L} -перетворення $y(t)$ має вигляд:

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s), \tag{6}$$

де $H(s) = \mathcal{L}[h_\delta(t)]$, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$.

Інтеграл Дюамеля

Інтеграл згортки можна виразити через перехідну характеристику. Звідси випливає *інтеграл Дюамеля* (інтеграл згортки за методом перехідних характеристик). Для знаходження інтеграла використовуємо зв'язок $h_\delta(t) = dh(t)/dt$, з якого добуток $h_\delta(t-\lambda)d\lambda$ можна подати, як $-dh(t-\lambda)$:

$$y(t) = \int_{-0}^{t+0} x(\lambda)h_\delta(t-\lambda)d\lambda = - \int_{-0}^{t+0} x(\lambda)dh(t-\lambda) = -x(\lambda)h(t-\lambda) \Big|_{-0}^{t+0} + \int_{-0}^{t+0} \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} h(t-\lambda)d\lambda.$$

В останньому перетворенні використана формула інтегрування частинами. Оскільки поза інтегральний член дорівнює нулю, то остаточно одержимо:

$$y(t) = \int_{-0}^{t+0} x'(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda, \quad (7)$$

де $x'(\lambda) = dx(\lambda)/d\lambda$.

Незручність цього виразу пов'язана з δ -складовими в $x'(\lambda)$, які з'являються якщо вхідний сигнал $x(t)$ має розриви неперервності. При наявності розриву в точці $t=0$ [$x(-0)=0$, $x(+0) \neq 0$] його можна виділити і записати інтеграл Дюамеля у вигляді:

$$x(t) = x(0)h(t) + \int_{+0}^{t+0} x'(\lambda)h(t-\lambda) \cdot d\lambda. \quad (8)$$

Останній вираз є найбільш поширеною формою запису інтеграла Дюамеля, котрий, як і інтеграл згортки, використовується для розрахунку перехідних процесів у часовій області.

Динамічне зображення довільного сигналу $x(t)$ через одиничні ступінчасті сигнали ($1(t)$ -функції) в загальному випадку має вигляд:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(\lambda)1(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^t x'(\lambda)1(t-\lambda)d\lambda. \quad (9)$$

Розрахунок кіл при дії одиночних імпульсів

Якщо вхідна функція $x(t)$ має розриви неперервності, то для розрахунку зручніше використовувати інтеграл згортки, якщо вона неперервна, то – інтеграл Дюамеля (наприклад, при необмеженій характеристиці $h_{\delta}(t)$).

При розрахунках труднощі виникають у наступних випадках:

- 1) якщо $x(t)$ має різний аналітичний вираз на окремих відрізках;
- 2) якщо функція $h_{\delta}(t)$ не обмежена (іноді зустрічаються помилки при обчисленні інтегралів з δ -доданками, хоча вони обчислюються досить просто);
- 3) якщо брати до уваги розриви функції $x(t)$ в інтегралі Дюамеля.

Розрахунок кіл, коли дія не має простого аналітичного опису

Якщо дія $x(t)$ не має *простого аналітичного опису*, то її представляють у вигляді сукупності імпульсів прямокутної форми з амплітудою $x(t_k)$ тривалістю Δt_k , кожен з яких розглядається як δ – імпульс (рис. 1):

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x(t_k) \Delta t_k \delta(t - t_k). \quad (10)$$

При такому представленні часовий підхід приводить до заміни інтеграла згортки сумою. Для вихідного сигналу матиме:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^n x(t_k) \Delta t_k h_{\delta}(t - t_k) = \\ &= \Delta t \cdot \sum_{k=0}^n x(t_k) h_{\delta}(t - k \cdot \Delta t), \quad \Delta t_k = \text{const}. \end{aligned} \quad (11)$$

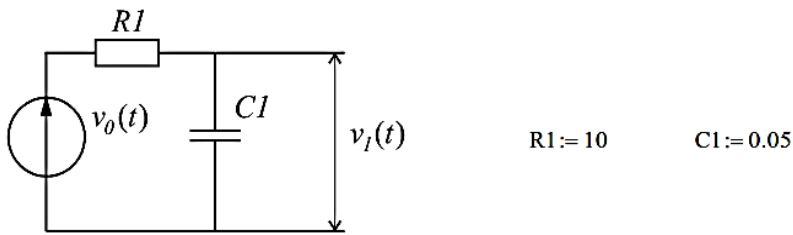
Дослідження реакції кіл у часовій області в середовищі системи Mathcad

Покажемо, як враховуються ці особливості. Приклади обчислення інтегралів згортки за методом імпульсних характеристик та Дюамеля (за методом перехідних характеристик) в середовищі Mathcad наведено на рис. 4 – рис. 6.

У **прикладі 2** (рис. 4) показано, як враховується в інтегралі Дюамеля те, що функція $v_0(t)$ має різний аналітичний вираз на окремих ділянках та ще має розриви неперервності 1-го роду.

Приклад 2

Приклад 2. За допомогою інтеграла Дюамеля знайти реакцію кола



$$h(t) := \left(1 - e^{\frac{-t}{R1 \cdot C1}}\right) \cdot \Phi(t) \quad \text{- перехідна характеристика кола}$$

$$T := 1 \quad B := 2 \quad A := 2 \quad D := -2$$

$$v_0(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ B + A \cdot t & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ D \cdot t & \text{if } T \leq t \leq 2 \cdot T \\ 0 & \text{if } t > 2 \cdot T \end{cases} \quad \text{- вхідний сигнал}$$

$$v_1(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ B \cdot h(t) + \int_0^t A \cdot h(t-x) \, dx & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ B \cdot h(t) + \int_0^T A \cdot h(t-x) \, dx + (D \cdot T - B - A \cdot T) \cdot h(t-T) + \int_T^t D \cdot h(t-x) \, dx & \text{if } T \leq t \leq 2 \cdot T \\ B \cdot h(t) + \int_0^T A \cdot h(t-x) \, dx + (D \cdot T - B - A \cdot T) \cdot h(t-T) + \int_T^{2 \cdot T} D \cdot h(t-x) \, dx + (0 - D \cdot 2 \cdot T) \cdot h(t-2 \cdot T) & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{Інтеграл Дюамеля}$$

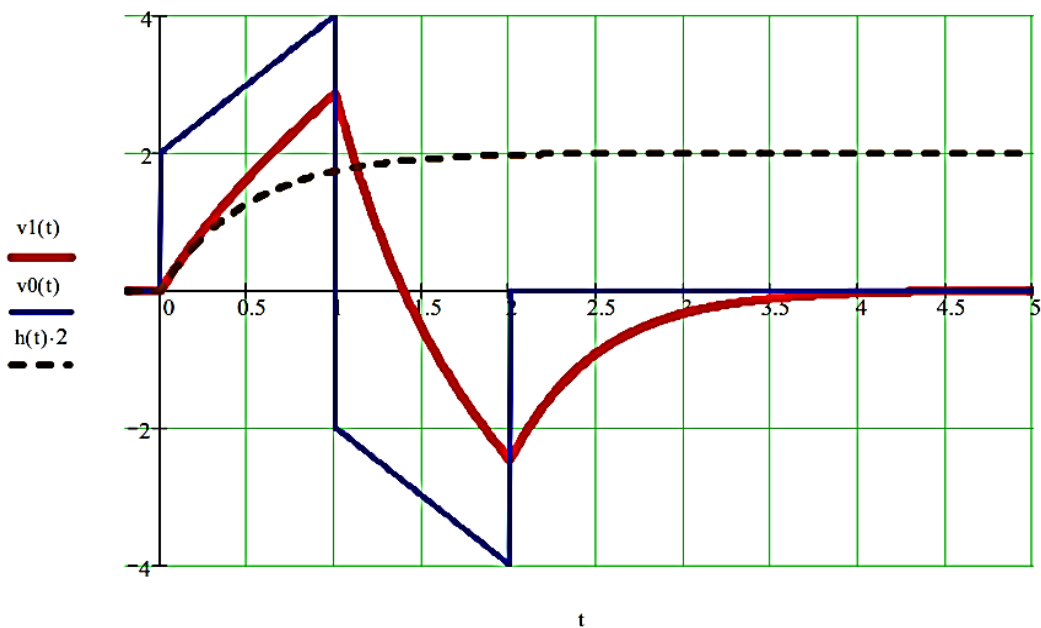


Рис. 4. Інтеграл згортки за методом перехідних характеристик (інтеграл Дюамеля)

Отже, якщо вхідний сигнал має різні аналітичні вирази на окремих ділянках часу $0 < t < \infty$, то інтеграл Дюамеля записують на цих інтервалах також окремо з "припасовуванням" реакції від впливу попередніх компонент вхідного сигналу. Розриви, відповідно (8), також враховуються окремо, реакція від них також "припасовується" до загальної реакції на кожному відрізку.

У **прикладі 3** (рис. 5) показано, як обчислюється інтеграл згортки, якщо $h_{\delta}(t)$ має δ -доданок.

Отже, перехідна характеристика кола $h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t)$, де $\tau = R_1 C_1$. Імпульсну характеристику можна знайти шляхом диференціювання $h_{\delta}(t) = dh(t)/dt$, вона дорівнюватиме:

$$h_{\delta}(t) = \delta(t)h(0) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t),$$

де $h(0) = 1$.

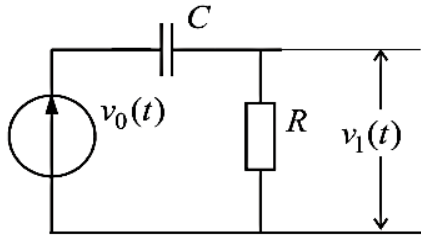
Інтеграл згортки також можна брати по окремим ділянкам, як задано в вхідному сигналі $v_0(t)$. Наприклад, якщо брати інтеграл аналітично, то так зручніше. На першій ділянці, коли $t < T$, частина підінтегрального виразу, що містить $\delta(t)$ -функцію, виноситься та інтегрується окремо. В результаті отримаємо складову $v_0(t) \cdot h(0)$, де $h(0) = 1$. Друга частина інтеграла вже не містить $\delta(t)$ -функцію у межах інтегрування $0 < x \leq t$.

При $t > T$ враховується те, що $v_0(t) = 0$, відповідно інтеграл на ділянці $T < t < \infty$ дорівнює нулю. Залишається лише перший інтеграл. Але він має межі інтегрування $0 < x \leq T$. Цей інтеграл визначає вихідну напругу після припинення дії вхідного імпульсу. Частина з доданком, який містить $\delta(t)$ -функцію, пропадає, оскільки на проміжку інтегрування $0 < x \leq T$ аргумент $\delta(t)$ -функції ніде не обертається в нуль.

Але, якщо розрахунки виконуються в середовищі системи комп'ютерної математики, наприклад, Mathcad, то це не має значення і зручніше брати одним інтегралом.

Приклад 3

Приклад 3. За допомогою інтеграла згортки знайти реакцію кола



$$h(t) := \Phi(t) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad \text{- перехідна характеристика}$$

$$T := 10 \quad A := 4$$

$$v_0(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ (A) & \text{if } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{- вхідний сигнал}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\Phi(t) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right) \rightarrow \text{Dirac}(t) \cdot \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right) - \frac{\Phi(t)}{R \cdot C} \cdot \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right)$$

$$R := 100000 \quad C := .0001$$

Імпульсна характеристика має доданок у вигляді дельта-функції.

Тому введемо позначення частки характеристики без дельта-функції

$$g(t) := \frac{-1}{R \cdot C} e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \Phi(t)$$

$$v_1(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ v_0(t) + \int_0^t v_0(x) \cdot g(t-x) dx & \text{if } (0 \leq t < T) \\ \left(\int_0^T v_0(x) \cdot g(t-x) dx \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

- інтеграл згортки по окремим ділянкам вхідного сигналу

$$v_2(t) := v_0(t) + \int_0^t v_0(x) \cdot g(t-x) dx \quad \text{- загальний вираз інтеграла згортки}$$

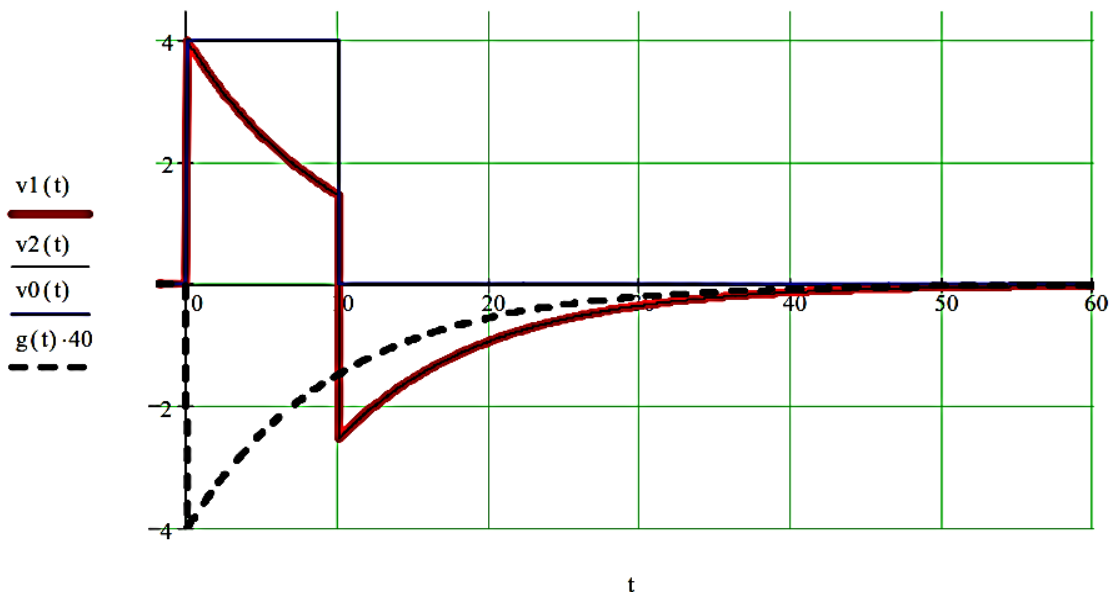
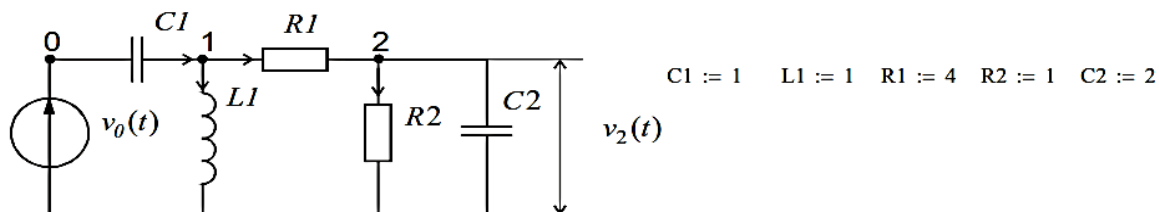


Рис. 5. Інтеграл згортки за методом імпульсних характеристик

Приклад 4

Приклад 4. За допомогою інтеграла згортки знайти реакцію кола



$$H(s) := \frac{s^2}{(7 \cdot s^2 + 8 \cdot s^3 + 5 + 9 \cdot s)}$$

- системна функція кола

$$H(s) \begin{cases} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \\ \text{float, 2} \end{cases} \rightarrow 4.2 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.64 \cdot t) + 8.3 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \cos(.98 \cdot t) - 7.4 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \sin(.98 \cdot t)$$

Імпульсна характеристика:

$$h\delta(t) := 4.2 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.64 \cdot t) + 8.3 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \cos(.98 \cdot t) - 7.4 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-.12 \cdot t) \cdot \sin(.98 \cdot t)$$

$$T := \frac{\pi}{0.98} \quad T = 3.206 \quad A1 := 2 \quad A2 := -2 \quad A3 := 2 \quad h\delta(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ h\delta(t) & \text{if } t > 0 \end{cases}$$

$$v0(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ A1 & \text{if } 0 \leq t < T \\ A2 & \text{if } T \leq t < 2 \cdot T \\ A3 & \text{if } 2 \cdot T \leq t < 3 \cdot T \\ A2 & \text{if } 3 \cdot T \leq t < 4 \cdot T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- вхідний сигнал

$$v2(t) := \int_0^t v0(x) \cdot h\delta(t-x) dx$$

- загальний вираз інтеграла згортки

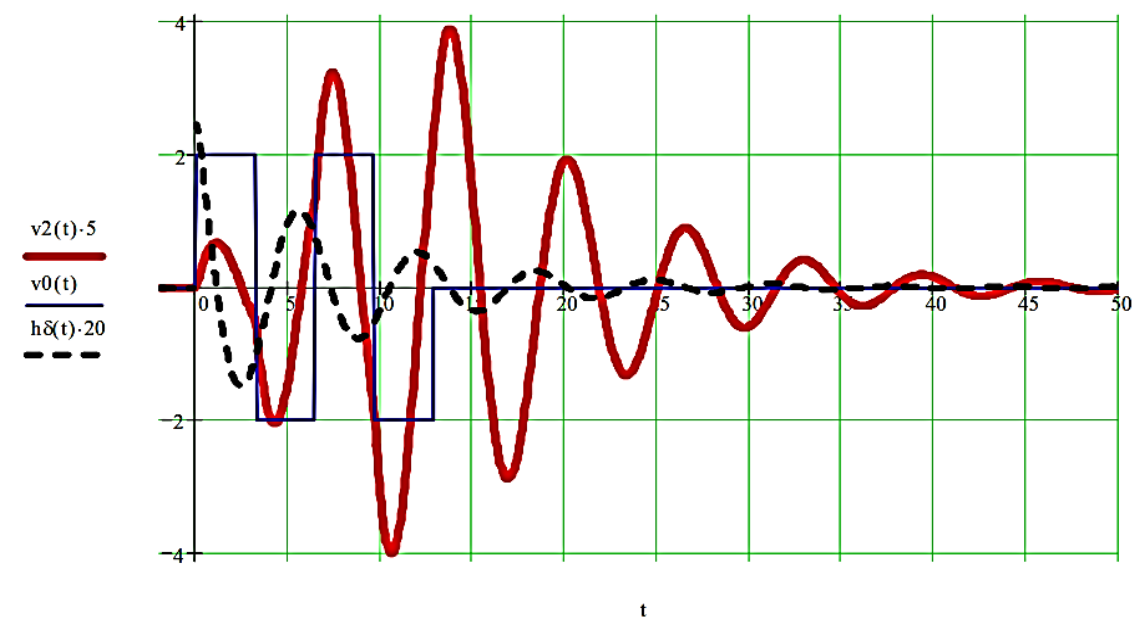


Рис. 6. Інтеграл згортки за методом імпульсних характеристик

Приклад 5

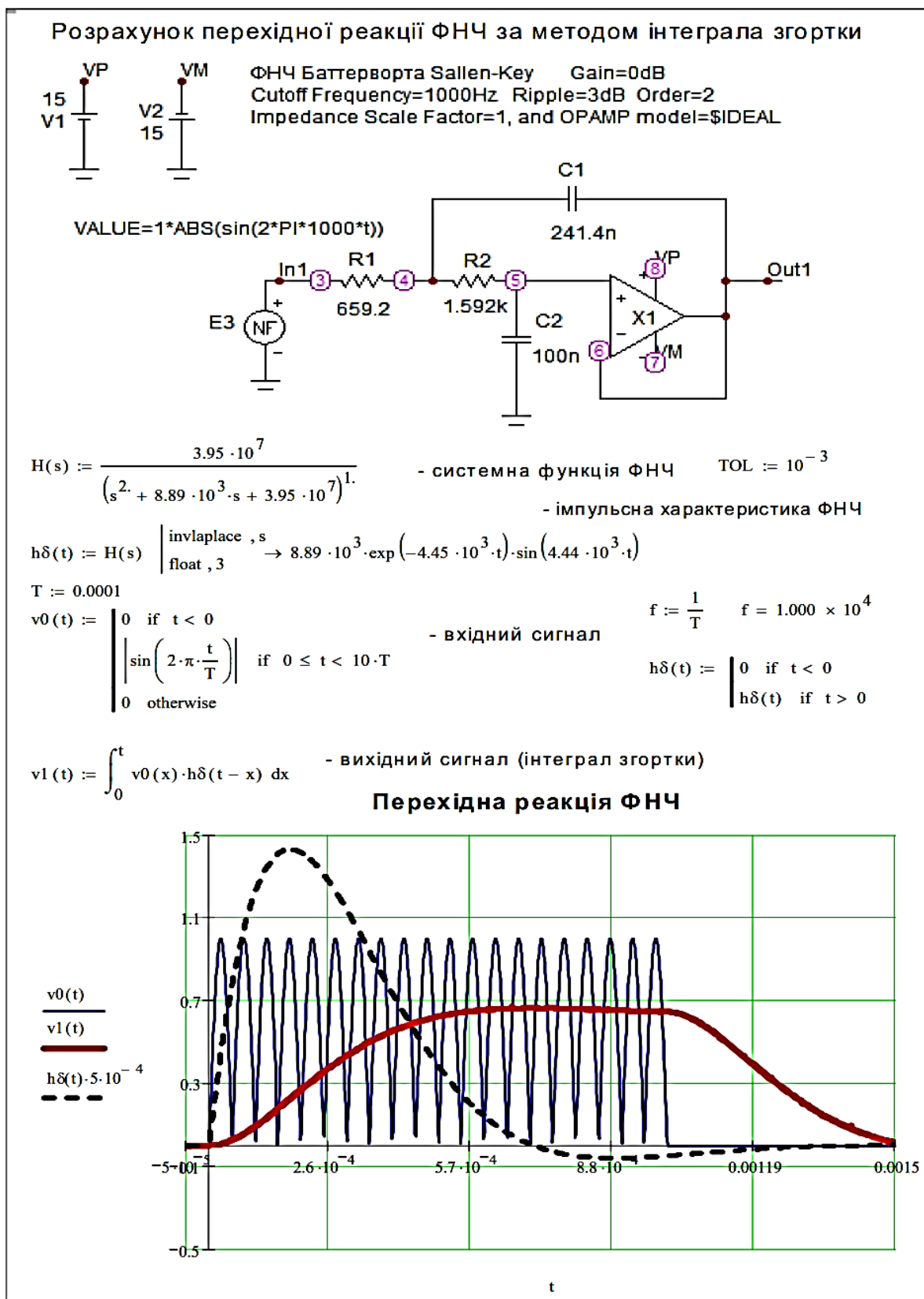
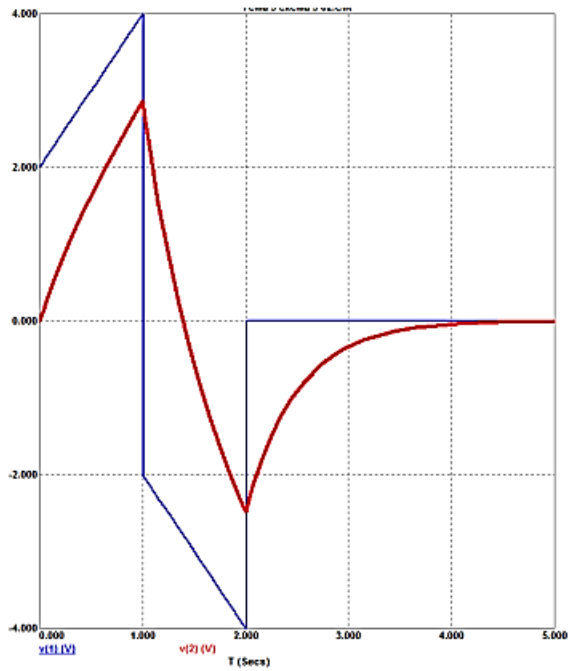
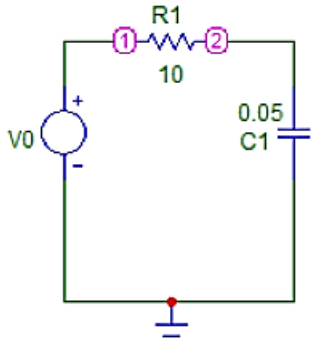


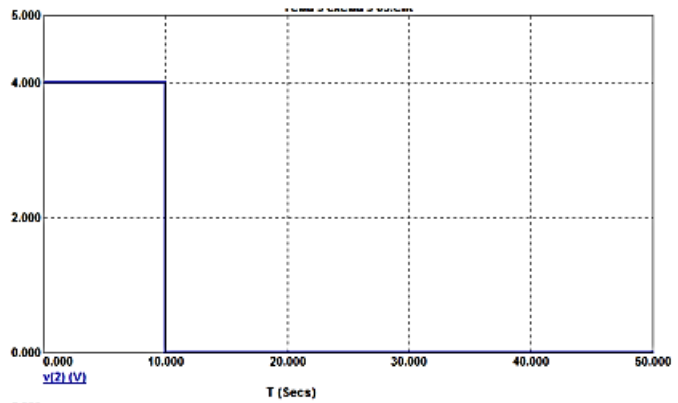
Рис. 7. Реакція ФНЧ на сигнал типу "випрямлений синус" (підключення та відключення сигналу)

Аналіз у середовищі програми Micro-CAP

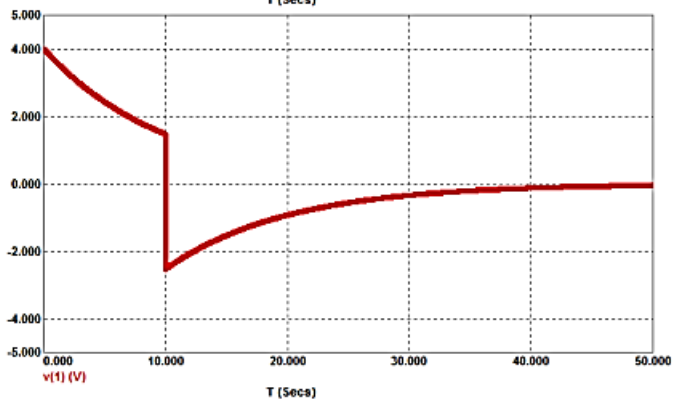
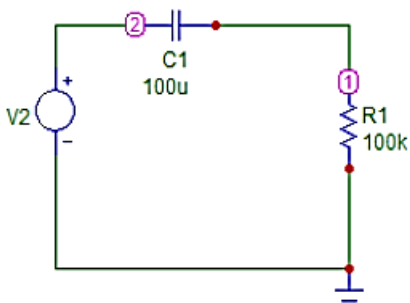
VALUE=PWL 0,0,0,2,1,4,1,-2,2,-4,2,0



а



VALUE=DC 0 AC 0 0 PWL 0,0,0,4,10,4,10,0,20,0



б

Рис. 8. Результати моделювання:
а – до прикладу 2; б – до прикладу 3

Результати моделювання реакції кіл в середовищі програми Micro-CAP підтверджують правильність розрахунків.

Джерела сигналів при моделюванні задаються з меню **Component** → **Analog Primitives** → **Waveform sources** → Незалежні джерела напруги або струму (**V, I**) → кусково-лінійний сигнал (**PWL**). Форма кусково-лінійного сигналу (**PWL**) задається простим перерахуванням координат точок зламу (t_i, y_i) (рис. 9).

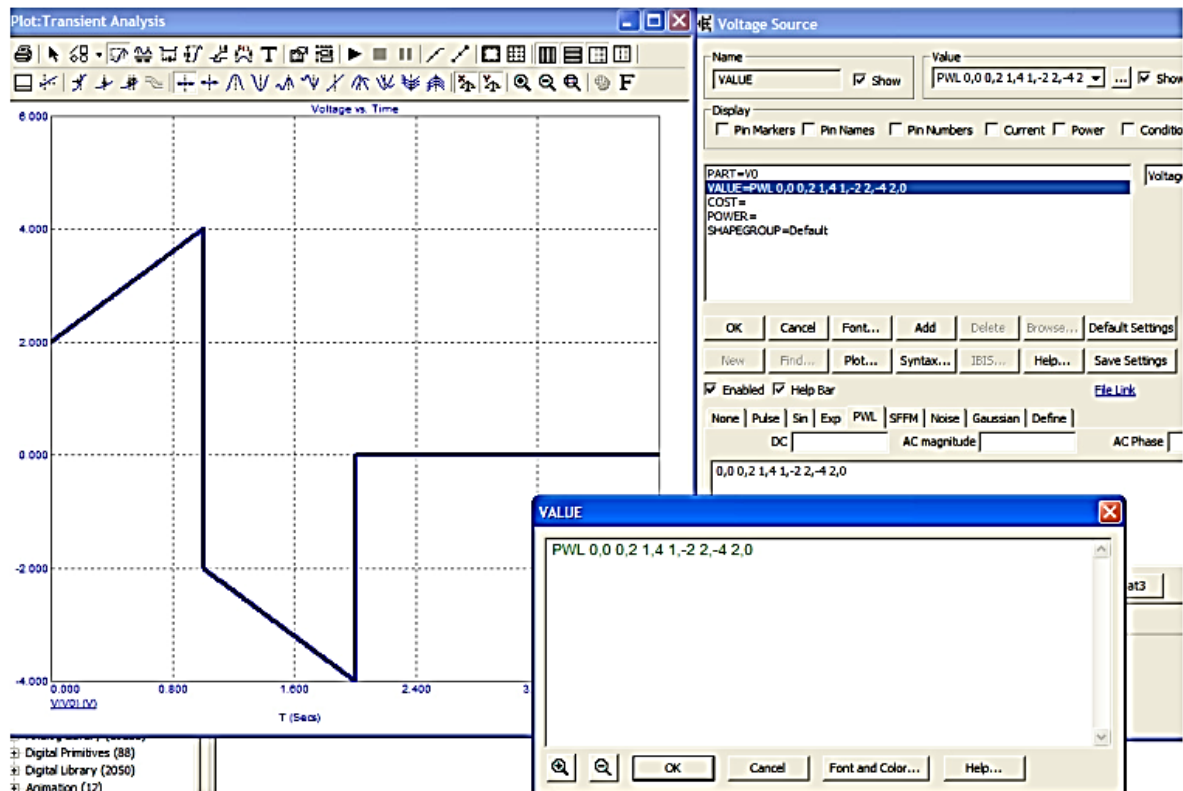


Рис. 9. Задання кусково-лінійного сигналу (PWL)

Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть, що таке динамічне зображення сигналу.
2. Виведіть формулу для динамічного зображення сигналу через одиничні імпульсні сигнали.
3. Виведіть формулу для динамічного зображення сигналу через одиничні ступінчасті сигнали.
4. Запишіть інтеграл згортки за методом імпульсних характеристик.
5. Які особливості виникають в застосуванні інтеграла згортки, якщо імпульсна характеристика містить доданок у вигляді $\delta(t)$ – функцій? Запишіть інтеграл згортки в цьому випадку.
6. Назвіть основні властивості інтеграла згортки.
7. Запишіть інтеграл згортки за методом перехідних характеристик.
8. Які особливості виникають при застосуванні інтеграла Дюамеля, якщо вхідний сигнал має розриви неперервності першого роду? Запишіть інтеграл в цьому випадку.
9. В яких випадках зручніше використання інтеграла згортки за методом імпульсних характеристик?
10. В яких випадках зручніше використання інтеграла Дюамеля?
11. Які особливості виникають при застосуванні інтегралів згортки, якщо вхідний сигнал має кускову структуру? У чому полягає суть методу "припасовування" реакцій? Поясніть на прикладах.
12. Яка форма інтеграла згортки використовується, якщо вхідний сигнал не має простого аналітичного опису?

РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ У ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

ТЕМА 5. МЕТОД ЗМІННИХ СТАНУ. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ КОЛАХ, ЩО МАЮТЬ ІНЕРЦІЙНІ ЕЛЕМЕНТИ.

Лекція 10. Амплітудний детектор з відкритим входом. Система нелінійних диференціальних рівнянь – математична модель детектору

Амплітудний детектор з відкритим входом. Математична модель діода в режимі великого сигналу. Опір $p-n$ переходу. Моделювання амплітудного детектора за допомогою диференціальних рівнянь стану. Перетворення характеристик нелінійних елементів при їх з'єднаннях. Поліноміальна інтерполяція. Інтерполяція сплайнами. Кусково-лінійна інтерполяція. Складання системи диференціальних рівнянь стану (точний метод). Врахування нелінійної ємності $p-n$ переходу. Приклади аналізу нелінійних кіл в середовищі *Mathcad*. Аналіз в середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання.

Розглянемо аналіз та моделювання динамічних процесів у електричних колах, що мають нелінійні та інерційні елементи, на прикладі типових пристроїв вимірювальної техніки.

Амплітудний детектор з відкритим входом

Амплітудний детектор (АД), або перетворювач амплітудних значень змінної напруги є головним пристроєм амплітудних вольтметрів змінного струму. Такі вимірювальні пристрої мають невелику частотну похибку перетворення і тому працюють на частотах до декілька одиниць ГГц. Схеми АД також широко використовуються в радіотехніці.

Схема (рис. 1) працює наступним чином. Якщо $v_0(t) > v_C(t)$ – діод відкривається і конденсатор заряджається зі сталою часу $\tau_1 = (R_1 + R_d)R_2C / (R_1 + R_d + R_2) \approx (R_1 + R_d)C$, де R_d – динамічний опір відкритого діоду; R_1 – внутрішній опір джерела напруги ($R_{дж}$), причім $R_2 \gg R_1 + R_d$.

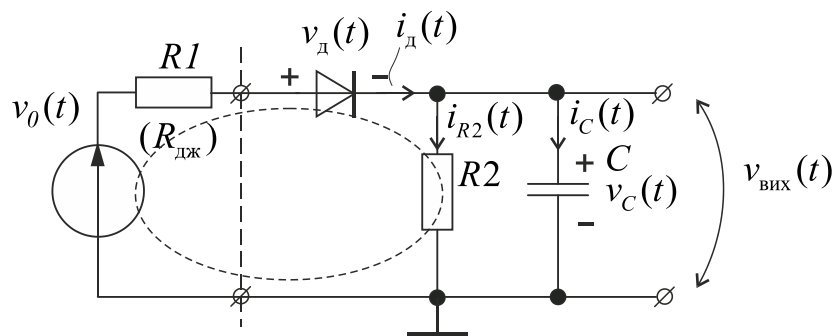


Рис. 1. Амплітудний детектор з відкритим входом

Заряд протікає доти, доки діод не закриється. Якщо $v_0(t) < v_C(t)$ – діод закривається ($R_d \rightarrow \infty$) і конденсатор C розряджається зі сталою часу $\tau_2 \approx R_2 \cdot C$, яка $\tau_2 \gg \tau_1$. Тому конденсатор за час від'ємної півхвилі вхідної напруги не встигає значно розрядитися. Після встановлення робочого динамічного режиму середня напруга на конденсаторі C стає близькою до амплітудного значення вхідної напруги, діод майже весь час закритий. Струм через діод тече лише протягом дуже малої частки кожного періоду, поки виконується умова $v_0(t) - v_C(t) > 0$ – деяка невеличка різниця, достатня для незначного напіввідкриття діода та формування струму підзарядки конденсатора (так званий режим "відсікання").

Математична модель діода в режимі великого сигналу

Схему заміщення діода в режимі великого сигналу [13] зображено на рис. 2.

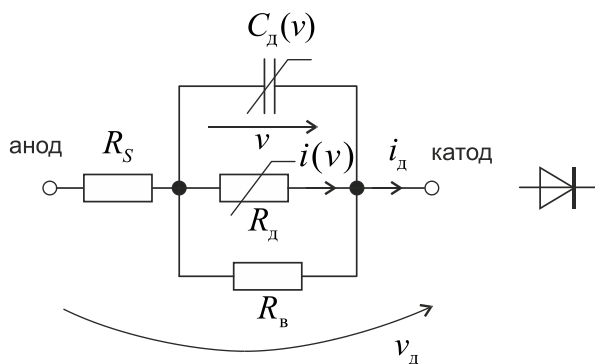


Рис. 2. Схема заміщення діода в режимі великого сигналу

Вона включає нелінійний опір $p-n$ переходу R_d , характеристика якого описується залежністю

$$i(v) = I_S (e^{\frac{v}{n \cdot \varphi_T}} - 1); \quad (1)$$

нелінійну диференціальну ємність $p-n$ переходу C_a , яка має бар'єрну $C_{бар}$ і дифузійну $C_{диф}$ складові:

$$C_d = C_{бар} + C_{диф} = \frac{C_{60}}{(1 - v/\varphi_k)^m} + \frac{I_S \tau}{n \varphi_T} \cdot e^{\frac{v}{n \cdot \varphi_T}}; \quad (2)$$

опір витоку переходу R_b (RL) ≥ 1 МОм та об'ємний опір матеріалу напівпровідника в нейтральних зонах, що примикають до збідненого слою з обох сторін, і опір контактів R_s (RS)²³⁾.

Параметри, які входять до складу вище зображеної моделі мають наступний сенс: I_S (IS) – зворотний струм, або струм насичення (має велику залежність від температури, тому називають ще тепловим струмом); φ_T (VT) – тепловий потенціал, $\varphi_T = kT/q$, де $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона; $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; T – абсолютна температура за Кельвіном $T \text{ } ^\circ\text{K} = 273 \text{ } ^\circ + T \text{ } ^\circ\text{C}$ (так при температурі $T = 27 \text{ } ^\circ\text{C} = 300 \text{ } ^\circ\text{K} \rightarrow \varphi_T = 25,854 \text{ мВ}$); $n = 1,0 \div 2,5$ (N) – поправочний коефіцієнт, що враховує відхилення характеристики діода від ідеальної моделі (коефіцієнт неідеальності); C_{60} (CJO) – бар'єрна ємність за нульового зміщення $p-n$ переходу, має значення декількох пФ; φ_k (VJ) – контактна різниця потенціалів (бар'єрний потенціал), яка $\varphi_k \approx 0,2 \div 0,4$ В для германієвих і $\varphi_k \approx 0,5 \div 0,8$ В для кремнієвих діодів; $m = 1/2 \div 1/3$ (M) – коефіцієнт плавності переходу; τ (TT) – час переносу заряду (Transit Time). Типові значення струму насичення I_S складають $10^{-2} \div 10^{-8}$ А – для германієвих і $10^{-6} \div 10^{-12}$ А – для кремнієвих

²³⁾ В дужках наводяться позначення відповідного параметра моделі діода в стандарті PSpice, який використовується в Micro-CAP [13, 14] та в інших системах схемотехнічного моделювання.

діодів. Опір R_S малопотужних діодів, які працюють з невеликими за значеннями напругою і струмом, складає $\approx 0,1 \div 0,2$ Ом.

Диференціальна (динамічна) ємність діода

Ємність діода $C_d = C_d(v_d) = \Delta Q_d / \Delta v_d$ – визначається, як відношення зміни заряду, який накопичений у переході, до напруги, яка обумовлює цю зміну. Тобто ємність визначена, як диференціальна (чи динамічна), при цьому вона ще залежить від напруги v_d на $p-n$ переході (нелінійна). Ємність діода має дві складові $C_d = C_{\text{бар}} + C_{\text{диф}}$. Бар'єрна ємність $C_{\text{бар}}$ – ємність закритого $p-n$ переходу (працює, як звичайній конденсатор) і залежить від величини зворотної напруги, має значення 1-20 пФ. Бар'єрна ємність визначається системою рівнянь:

$$C_{\text{бар}} = \frac{C_{60}}{(1 - v/\varphi_k)^m}, \text{ якщо } v \leq FC \cdot \varphi_k;$$

$$C_{\text{бар}} = \frac{C_{60}}{(1 - FC)^{(1+m)}} \cdot \left[1 - FC \cdot (1 + m) + m \cdot \frac{v}{\varphi_k} \right], \text{ якщо } v > FC \cdot \varphi_k,$$

де FC - коефіцієнт нелінійності бар'єрної ємності прямо зміщеного переходу [14]. Діоди з електрично-керованою ємністю при зворотній напрузі отримали назву *варикапи*.

Пряме включення $p-n$ переходу додає до бар'єрної ємності ще дифузійну ємність $C_{\text{диф}}$ – ємність прямо зміщеного $p-n$ переходу, яка залежить від величини прямого струму та часу життя нерівноважних носіїв τ (ще називають час переносу заряду Transit Time). Порядок $C_{\text{диф}}$ – десятки і сотні пФ.

Диференціальна провідність $p-n$ переходу

Опір характеризує роботу діода на постійному і на змінному струмі. Оскільки вольт-амперна характеристика $p-n$ переходу є нелінійною функцією, то опір на постійному струмі R_0 буде відмінним від опору на змінному струмі R_d . Опір на змінному струмі називається диференціальним (чи динамічним). Якщо здиференціювати рівняння (1), то дістанемо значення *диференціального опору в заданій точці вольт-амперної характеристики*:

$$G_d(v) = R_d^{-1}(v) = \frac{di(v)}{dv} = \frac{I_s}{n \cdot \varphi_T} e^{\frac{v}{n \cdot \varphi_T}} \approx \frac{I_{\text{ПР}}}{n \cdot \varphi_T} \text{ або } R_d \approx \frac{n \cdot \varphi_T}{I_{\text{ПР}}} [\text{Ом}], \quad (3)$$

де G_d – *диференціальна провідність $p-n$ переходу в заданій точці характеристики*.

Опір на постійному струмі R_0 визначається відношенням напруги до струму в заданій точці (v_0, i_0) вольт-амперної характеристики.

Нагадуємо, що наведена вище модель – це модель ідеального діода²⁴⁾. Вона задовольняє багатьом практичним задачам при аналізі електронних схем (випрямляючі, імпульсні, високочастотні, детекторні діоди), які працюють при невеликих за значенням струмах і напругах. Дійсні параметри моделі визначають *вимірюваннями* для конкретного діода.

При аналізі нелінійних електронних кіл у режимі малого сигналу характеристики нелінійних елементів лінеаризують у межах робочої точки, що призводить до розрахунку лінійного кола, в якому нелінійні елементи представлені їх диференціальними параметрами в робочій точці.

²⁴⁾ Модель не враховує деякі фізичні процеси, які мають місце у напівпровідникових структурах (генерації та рекомбінації носіїв заряду в приконтактній області, вплив заряду інжектованих носіїв та електричного поля, створюваного цими зарядами, явище електричного пробую при зворотній напрузі тощо). Наприклад, явище електричного пробую є головним для деяких типів діодів (стабілітрони, тунельні діоди).

Моделювання амплітудного детектора за допомогою систем диференціальних рівнянь стану

Схема амплітудного детектора (рис. 1) в режимі великого сигналу є нелінійною, тому традиційні методи аналізу лінійних кіл використовувати не можна. Моделювання та аналіз динамічних процесів у нелінійних колах здійснюється на основі диференціальних рівнянь.

Диференціальні рівняння, які описують динамічні процеси в нелінійних колах, мають більш широке застосування, ніж у лінійних колах, тому що вони використовуються не тільки для розрахунків перехідних процесів, а й для періодичних процесів також. Відомо, що *нелінійні диференціальні рівняння* або системи з такими рівняннями, як правило, *не мають аналітичних методів розв'язання*. Тому застосовують чисельні методи, широкі можливості використання яких дає система комп'ютерної математики Mathcad. Досить часто виникає задача апроксимації нелінійних характеристик компонентів кола.

На низьких і середніх частотах ємністю $p-n$ переходу C_d можна знехтувати, і схема моделі діода стає резистивною. Впливом R_S і R_B поки можна також знехтувати. При цьому вважатимемо, що напруга на діоді $v_d(t)$ – це напруга $p-n$ переходу, а струм $i_d(t)$ – це струм $p-n$ переходу.

Розглянемо задачу детальніше. Для кола, зображеного на рис. 1, змінної стану є $v_C(t)$. Так струм через ємнісний елемент C за першим законом Кірхгофа для вузла, який включає R_2 , C і нелінійний резистивний елемент, що має характеристику $i_d(v_d)$, дорівнює:

$$i_C(t) = i_d(v_d) - \frac{v_C(t)}{R_2}.$$

Тоді, враховуючи компонентне рівняння $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$, дістанемо:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_d(v_d) - \frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2}. \quad (4)$$

Але в рівнянні стану (4) напруга на діоді $v_d(t)$ є залишковою змінною, яку потрібно виразити через змінні стану і незалежних джерел. Наступне незалежне рівняння одержимо за другим законом Кірхгофа для головного контуру:

$$v_d(t) = v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d(v_d). \quad (5)$$

Останнє рівняння однозначно визначає $v_d(t)$ через змінні $v_0(t)$, $v_C(t)$, але в неявному вигляді, що не дозволяє виключити цю змінну з правої частини рівняння стану (4), щоб звести систему до одного рівняння відносно змінної стану $v_C(t)$ і вхідної напруги $v_0(t)$.

Процедуру визначення струму $i_d[v_d(t)]$ через змінні $v_0(t)$, $v_C(t)$ можна реалізувати чисельно. Однак, якщо так робити, то при інтегруванні рівняння стану (4) процедуру чисельного розв'язку нелінійного рівняння (5) потрібно виконувати на кожному кроці інтегрування при розрахунках правої частини диференціального рівняння.

Отже, диференціальне рівняння, що описує коло, має вигляд:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2} + \frac{1}{C} \cdot i_d[v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d(v_d)],$$

де права частина не може бути виражена в явному вигляді через $v_C(t)$, $v_0(t)$, тому не може бути розв'язано з використанням стандартних засобів, що передбачені в *Mathcad*. Тому потрібні деякі перетворення елементів схеми.

Але, якщо R_1 відсутній, то $v_d(t)$ можна визначити у явному вигляді $v_d(t) = v_0(t) - v_C(t)$. Тоді одержимо рівняння стану:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2} + \frac{1}{C} \cdot i_d[v_0(t) - v_C(t)],$$

яке матиме розв'язок з використанням стандартної процедури чисельного розв'язку одиноких диференціальних рівнянь `odesolve(x,b[,число кроків])`.

Перетворення характеристик нелінійних елементів при їх з'єднаннях

При аналізі нелінійних кіл досить часто потрібно перетворити ділянку кола з декількома елементами, серед яких можуть бути як лінійні, так і нелінійні елементи, в один елемент з еквівалентною характеристикою.

Так в схемі на рис. 1 є ділянка у вигляді послідовно включених резистор R_1 – діод, яку можна перетворити в один нелінійний елемент NE_{RD} з характеристикою типу $i(v_{NE})$. Якщо елементи включені послідовно, то залежність напруги від струму отримати легко. Так залежність $v_d(i_d)$ знайдемо з (1). Тоді напругу на NE_{RD} отримаємо додаванням:

$$v_{NE}(i_d) = \varphi_T \cdot \ln[(i_d/I_S) + 1] + R_1 \cdot i_d. \quad (6)$$

Але для складання диференціального рівняння на основі рівняння для струмів за першим законом Кірхгофа потрібна зворотна характеристика $i(v_{NE})$, яку аналітично в явному вигляді за виразом (6) отримати не можна. Тому побудуємо її по точкам за виразом $v_{NE}(i)$: спочатку визначимо значення напруги v_i при заданому струмі i_i (рис. 3), потім за вузлові точки виберемо точки з координатами (i_i, v_i) та будуємо через ці точки функцію $i(v_{NE})$ з використанням певного виду інтерполяції (рис. 4). Графіки інтерполуючих функцій наведено на рис. 5.

Приклад 1

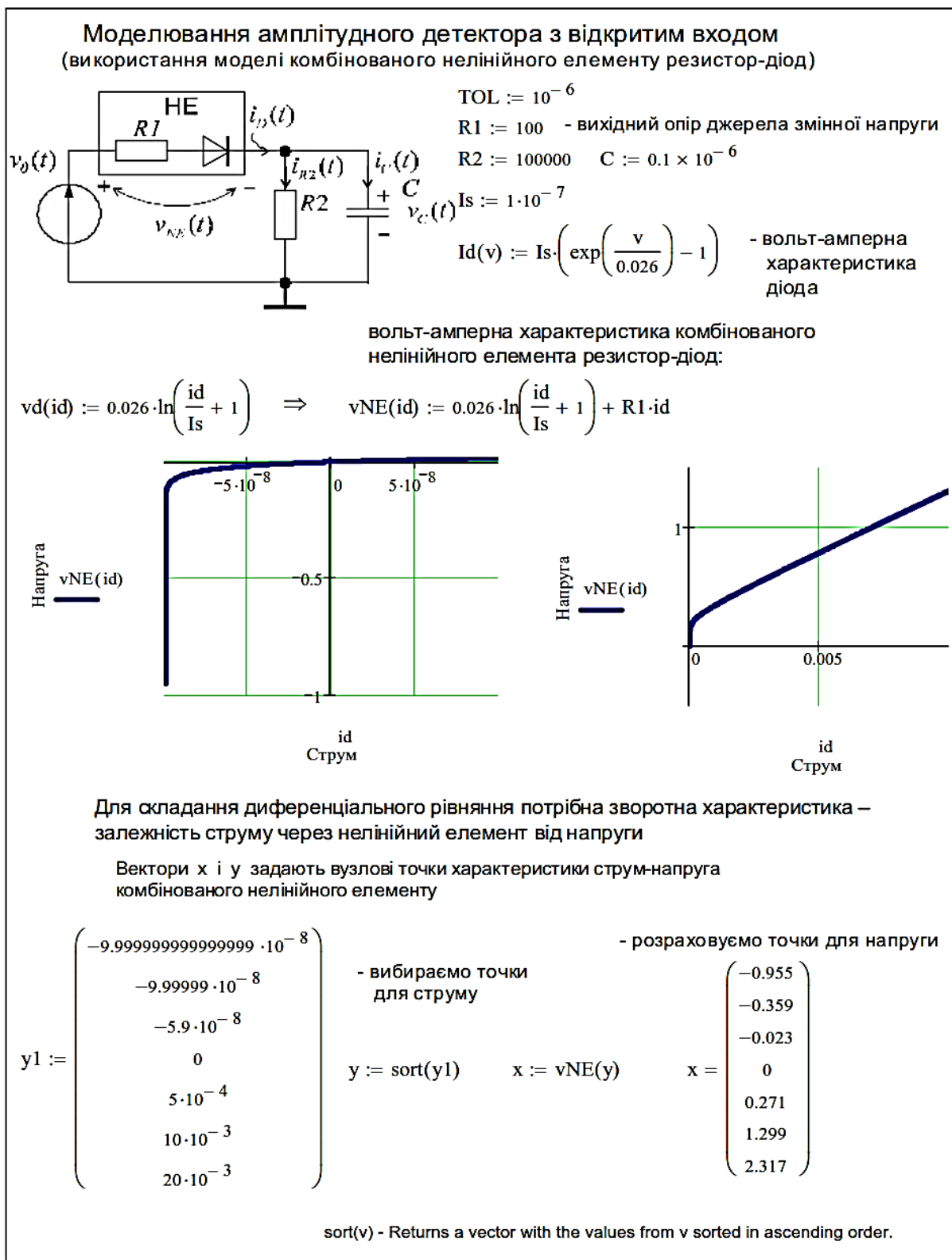


Рис. 3. Перетворення послідовно включених резистор-діод в один нелінійний елемент

Поліноміальна інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$n := \text{length}(y) - 1 \quad n = 6 \quad \text{- ступень полінома}$

$i := 0..n \quad j := 0..n$

Формування матриці XI :

$XI_{j,i} := (x_j)^i \quad XI_{j,0} := 1 \quad a := XI^{-1} \cdot y \quad \text{- розрахунок коефіцієнтів поліному}$

$k := n..0 \quad P(x) := \sum_k a_k \cdot x^k \quad \text{- визначення поліному}$

$V_{\max} := x_n \quad V_{\max} = 2.317$

$x_i := -4, -3.999 .. V_{\max} + 0.1$

$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 8.767 \times 10^{-5} \\ 3.914 \times 10^{-3} \\ 0.01 \\ -2.196 \times 10^{-3} \\ -6.923 \times 10^{-3} \\ 2.549 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$

Сплайнова інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$IS := \text{cspline}(x, y) \quad IS := \text{pspline}(x, y) \quad IS := \text{lspline}(x, y)$

$V := -4, -3.999 .. V_{\max} + 0.1 \quad \text{SPL}(V) := \text{interp}(IS, x, y, V)$

Кусково-лінійна інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$\text{fit}(s) := \text{linterp}(x, y, s)$

Рис. 4. Поліноміальна, сплайнова та кусково-лінійна інтерполяція складної нелінійності

Поліноміальна інтерполяція має певні недоліки. По-перше, поліном на границях різко розбігається. Але найголовніше, в межах робочої точки (ділянки вольт-амперної характеристики), де функція має злам або різкий перехід від ділянки, де функція майже не змінюється, до ділянки, де швидко наростає, степеневий поліном дає значні коливання інтерполяційної кривої. Все це дає значні похибки при подальших обчисленнях – а саме, *при розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь* (рис. б).

Сплайни. Кращі результати дає інтерполяція *сплайнами*. Але в межах робочої точки, де функція має злам або різкий перегин, вона також дає небажані коливання інтерполяційної кривої. Осциляції потім дають аналогічну похибку моделювання динамічного режиму АД. Але *осциляції можна зменшити правильним вибором вузлових точок*.

Кусково-лінійна інтерполяція при заданій кількості вузлів дає більшу похибку наближення функції, але перевагою є те, що вона не дає небажаних осциляцій в межах робочої точки (ділянки, де вольт-амперна характеристика має різкий перегин). Тому в нашому випадку вона краща.

Приклад 2

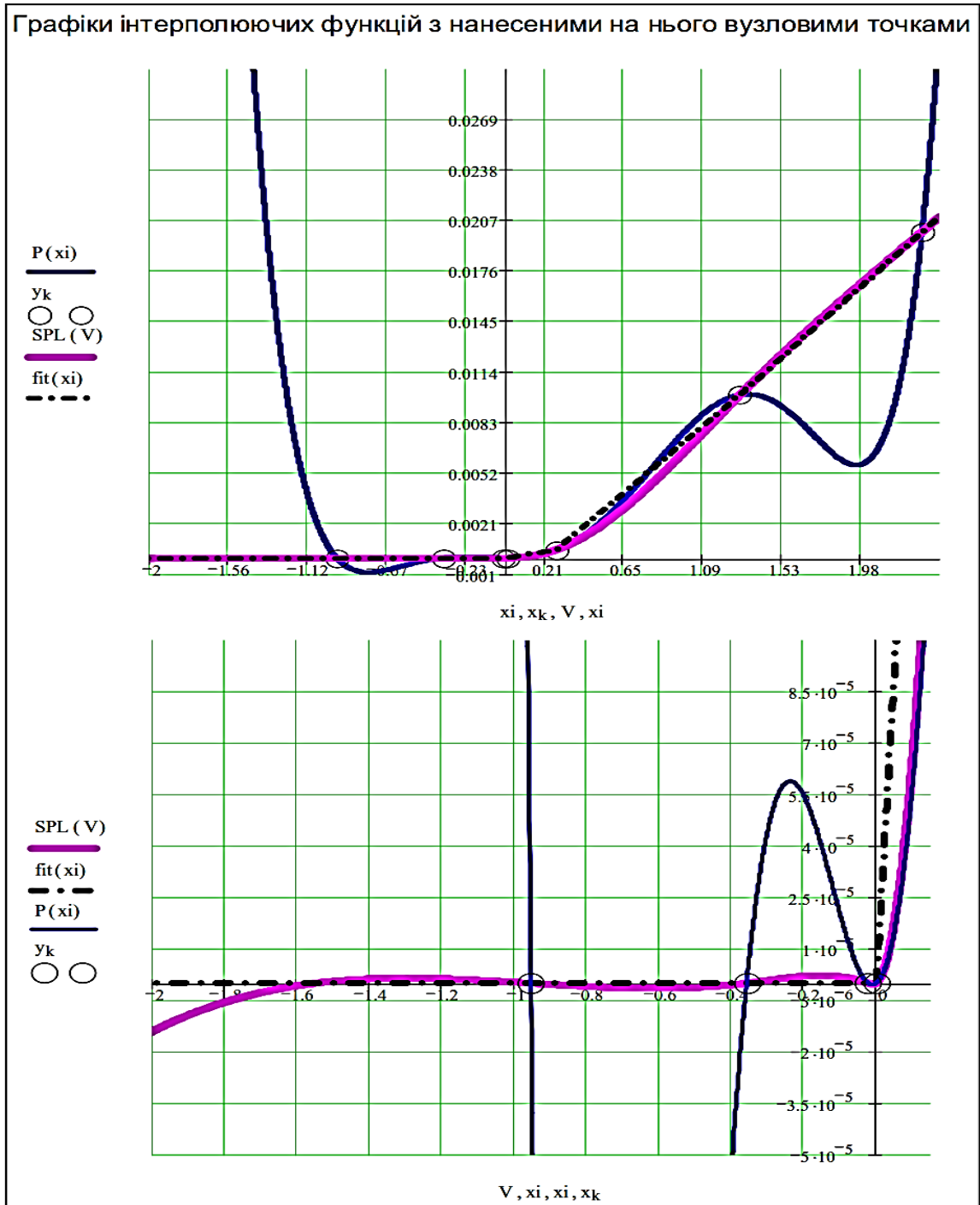


Рис. 5. Осциляції інтерполяційної кривої, якщо функція має злам або різкий перегин

Приклад 3

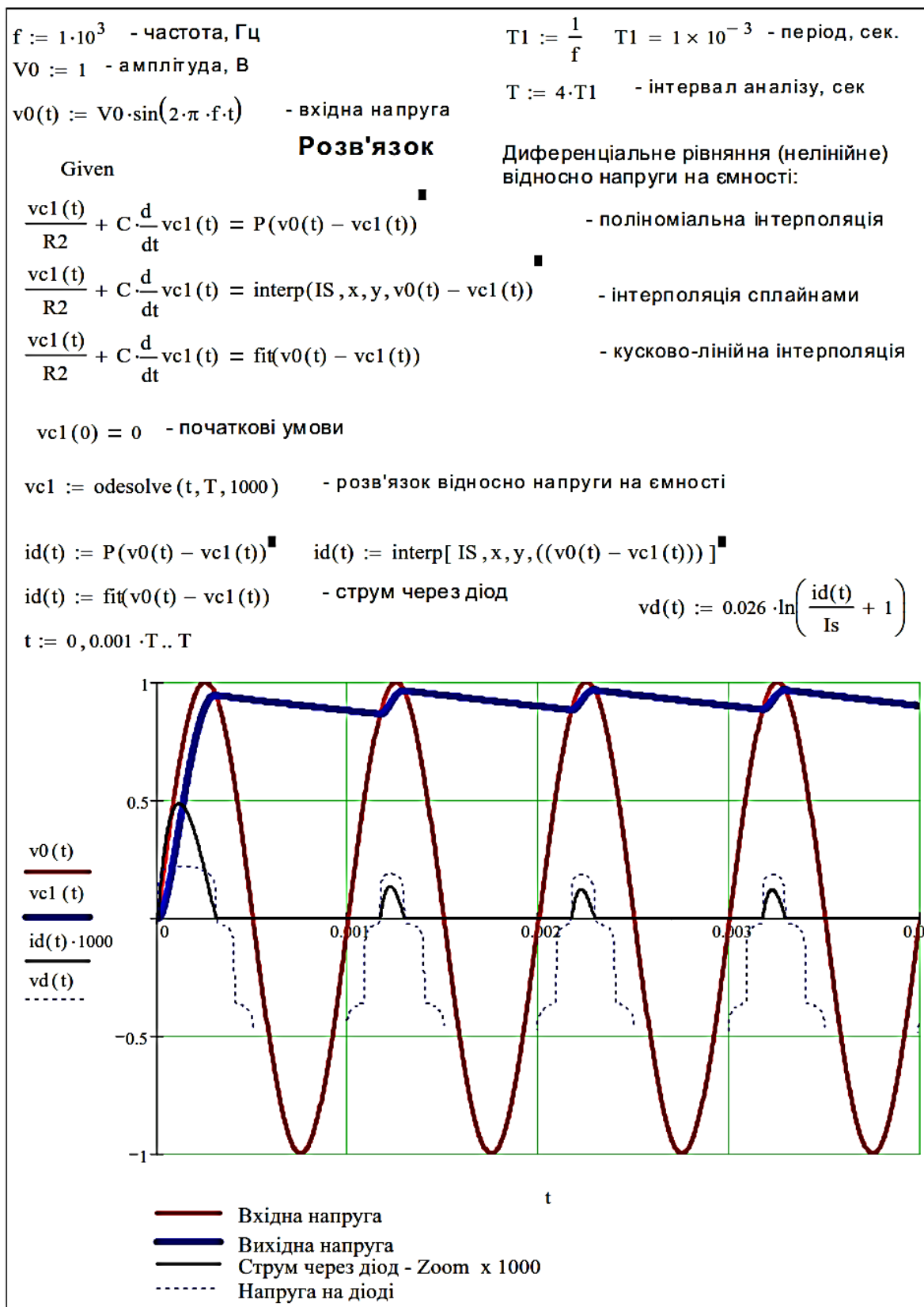


Рис. 6. Моделювання динамічних процесів в АД ($R_1 = 100$ Ом) з використанням інтерполяції нелінійної характеристики

Складання системи диференціальних рівнянь стану (точний метод)

Складемо систему диференціальних рівнянь дещо по-іншому. Так струм через конденсатор C (рис. 1) та напруга на діоді дорівнюють:

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2}, \quad v_d(t) = v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d[v_d(t)].$$

Здиференціюємо останнє рівняння та одержимо:

$$\frac{dv_d(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{dv_C(t)}{dt} - R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt}.$$

Звідси дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{dv_d(t)}{dt} &= \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right] - R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt}, \\ \frac{dv_d(t)}{dt} \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \right] &= \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right]. \end{aligned}$$

Отже, отримуємо нормальну систему рівнянь першого порядку у формі Коші, де друга система задає початкові умови:

$$\begin{cases} \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \left[i_d[v_d(t)] - v_C(t)/R_2 \right]; \\ \frac{dv_d(t)}{dt} = \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \right]^{-1} \cdot \left\{ \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right] \right\}. \end{cases} \quad \begin{cases} v_C(0) = 0; \\ v_d(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи рівнянь потребує задання першої похідної від вхідної напруги $Difv_0(t) = \frac{dv_0(t)}{dt}$, а також $G_d(v_d) = \frac{di_d}{dv_d}$ – диференціальної (динамічної) провідності p - n переходу в аналітичному вигляді, які можна знайти в символному вигляді в середовищі Mathcad, якщо відомі аналітичні вирази $v_0(t)$ і $i_d(v_d)$.

Конденсатор C – це елемент, який накопичує енергію, тому напруга на конденсаторі, яка не може змінюватися миттєво (стрибком), має сенс змінної стану. Початкова напруга на конденсаторі дорівнює $v_C(0) = v_C(0_+) = v_C(0_-)$.

Напруга на діоді $v_d(t)$ не є змінної стану в прямому сенсі, але використання її похідної $\frac{dv_d(t)}{dt}$ дозволяє скласти систему диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі Коші. При цьому $v_d(0_+)$ відноситься до *залежних початкових умов* (якщо не брати до уваги ємність $p-n$ переходу), дорівнює $v_d(0_+) = v_0(0_+) - v_C(0_+) - R_1 \cdot i_d(v_d(0_+))$. Отже, $v_d(0_+)$ визначається (рис. 7) з розв'язку нелінійного рівняння. Але, якщо в момент часу $t = 0$ відбувається підключення до джерела напруги $v_0(t) = V_0 \sin(2\pi f t)$, яка дорівнює $v_0(0_+) = 0$, та ще $v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0$, то струм у момент часу $t = 0_+$ через діод не тече. Вибираємо $v_d(0_+) = 0$ В.

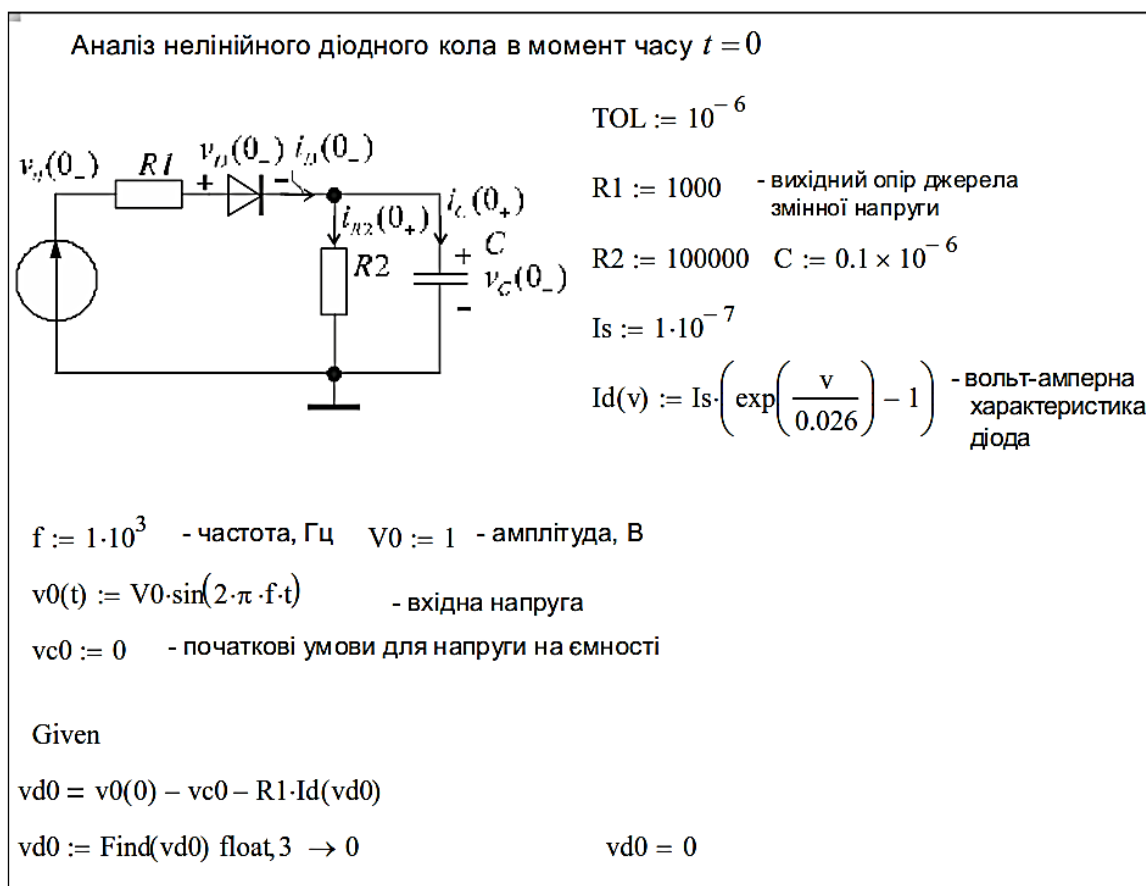


Рис. 7. Розрахунок початкових умов

Фрагменти документів Mathcad з прикладом аналізу реакції амплітудного детектора з відкритим входом на підключення до джерела синусоїдальної напруги наведено на рис. 8 і рис. 9.

Приклад 4

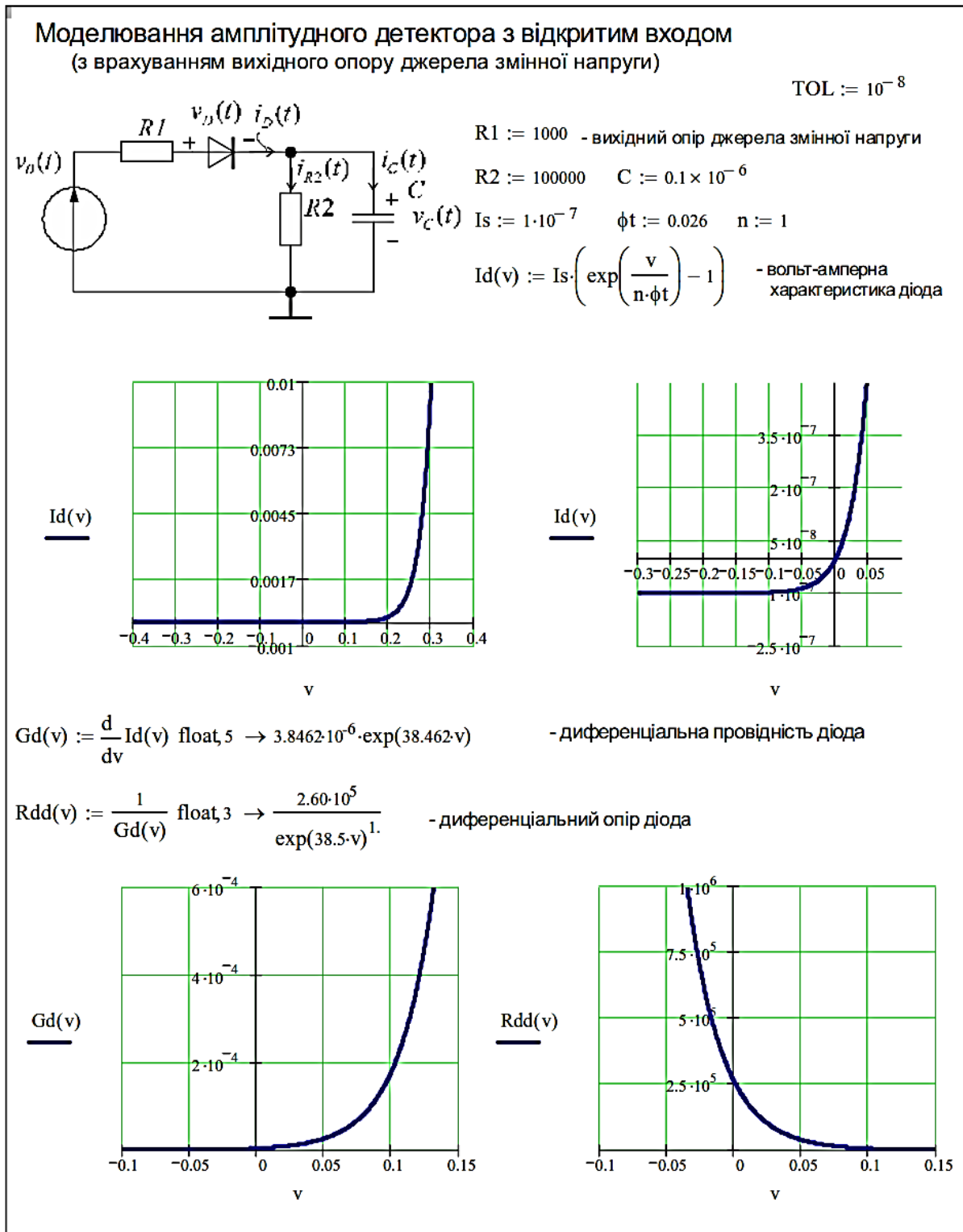


Рис. 8. Моделювання АД з відкритим входом

$f := 1 \cdot 10^3$	- частота, Гц	$V_0 := 1$	- амплітуда, В
		$T := \frac{1}{f}$	$T = 1 \times 10^{-3}$
$v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$	- вхідна напруга		- період, сек.
$\text{DifVQ}(t) := \frac{d}{dt} V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cdot \cos(2000 \cdot \pi \cdot t) \cdot \pi$			
Розв'язок			
$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	- вектор початкових умов для змінних $V_C(t)$, $V_D(t)$		
$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \cdot \text{Id}(x_1) - \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot x_0 \\ \frac{1}{1 + R_1 \cdot Gd(x_1)} \left[\text{DifVQ}(t) - \left(\frac{1}{C} \cdot \text{Id}(x_1) - \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot x_0 \right) \right] \end{bmatrix}$	- символічний вектор правих частин системи <i>нелінійних</i> диференціальних рівнянь першого порядку		
$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.01, 10000, D)$	- Розв'язок системи <i>нелінійних</i> диференціальних рівнянь		
<p><small>Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D) - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.</small></p>			

Рис. 9. Моделювання АД з відкритим входом (продовження)

У прикладі (рис. 9) використана стандартна функція чисельного розв'язку нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в формі Коші $\text{Rkadapt}(x, t_1, t_2, n, D)$. Функція $\text{Rkadapt}(x, t_1, t_2, n, D)$ повертає матрицю розв'язків задачі Коші за методом Рунге-Кутта системи із звичайних диференціальних рівнянь, праві частини яких у вигляді перших похідних від шуканих функцій записані в символічному векторі D з початковими умовами, які задані у векторі x , при розв'язку на інтервалі від t_1 до t_2 при кількості точок розв'язків n . Матриця розв'язків, що створюється, має ряд стовбців, кількість яких на 1 більша за кількість рівнянь. Перший стовбець – це значення аргументу розв'язків (тобто змінної часу t) на рівних інтервалах, другі стовбці – значення шуканих змінних.

Приклад 5

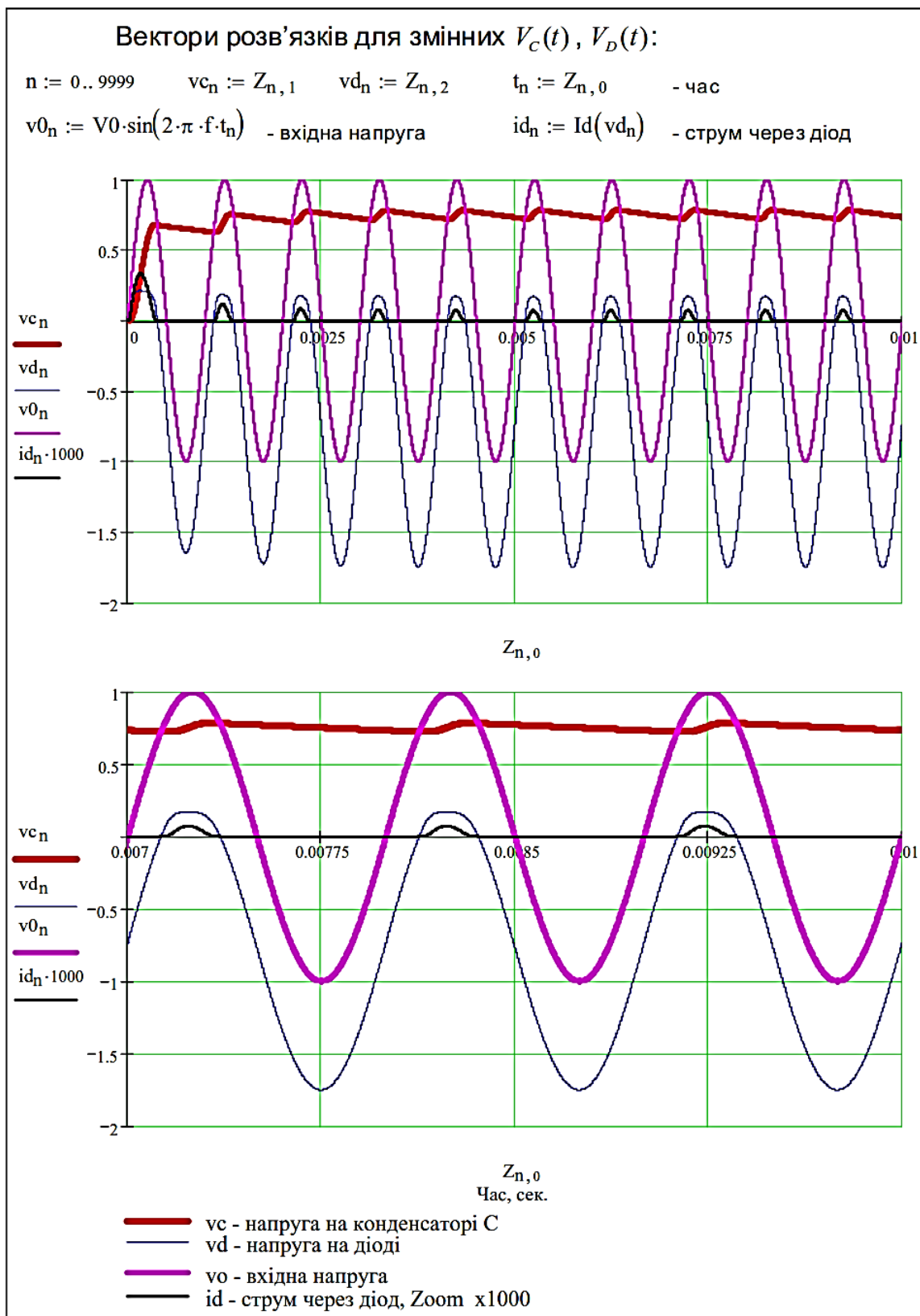


Рис. 10. Динамічні процеси в АД з відкритим входом ($R_1 = 1000 \text{ Ом}$) при підключенні до джерела синусоїдальної напруги

Функція $R_{kadapt}(x,t_1,t_2,n,D)$ аналогічна функції $rkfixed(x,t_1,t_2,n,D)$, де використаний також алгоритм Рунге-Кутта четвертого порядку. Але в функції $R_{kadapt}(x,t_1,t_2,n,D)$ виконується адаптація (настроювання) кожного кроку інтегрування до швидкості зміни розв'язку, внаслідок чого підвищується точність на швидких ділянках і зменшується час на розрахунки на повільних ділянках перехідного процесу. Незважаючи на зміну кроку, виведення розв'язків дається при рівномірному розташуванні точок розв'язків.

Бачимо (наступний фрагмент на рис. 10), що використаний підхід дозволяє набагато точніше описати напругу на діоді при від'ємній полярності вхідного сигналу, а також, що головніше, точніше описати напругу та струм через діод на ділянці "відсікання".

Врахування нелінійної ємності $p-n$ переходу

Проведемо аналіз амплітудного детектора з врахуванням R_d – нелінійного опору та C_d – нелінійної ємності $p-n$ переходу. Об'ємний опір матеріалу напівпровідника R_s можна включити до складу R_1 (внутрішній опір джерела напруги $R_{дж}$).

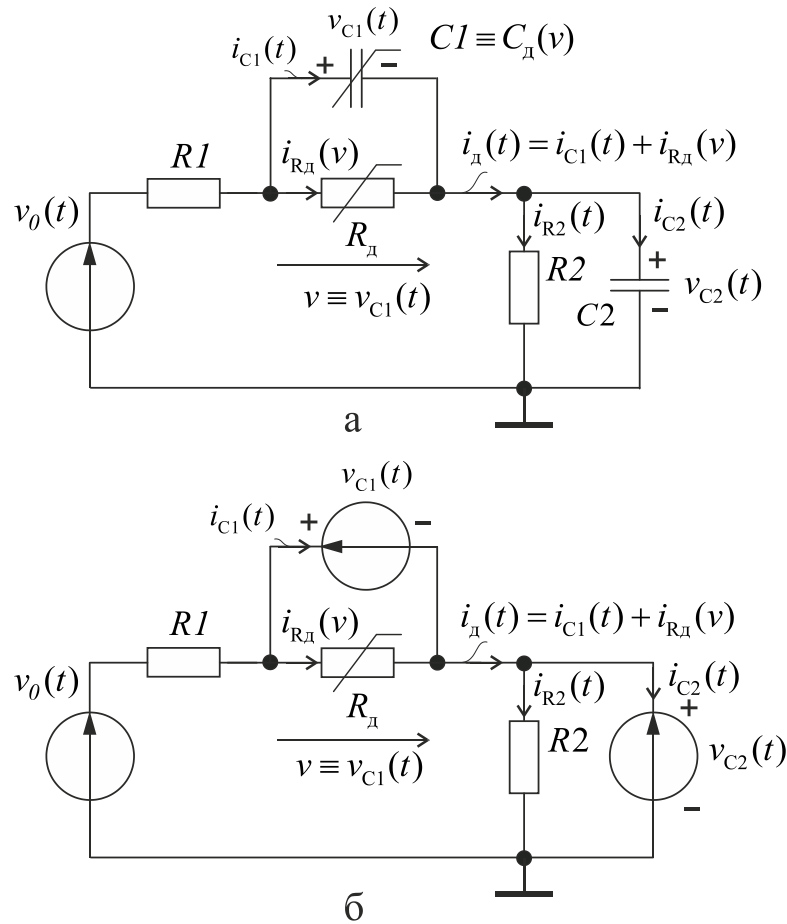


Рис. 11. Схема заміщення амплітудного детектора (а) та еквівалентна схема заміщення (б), складена згідно з теоремою компенсації за методом еквівалентних джерел

Згідно з теоремою компенсації замінимо ємнісні елементи кола (рис. 11,а) еквівалентними джерелами напруг. Одержимо еквівалентне резистивне коло (рис. 11,б), яке складається лише з лінійних та нелінійних резисторів, за заданих величин незалежних та залежних джерел. У такому колі треба виразити струми джерел, що замінюють ємнісні елементи, через напруги всіх джерел кола. Складемо рівняння для струмів:

$$i_{R1}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] = i_{C1}(t) + i_d[v_{C1}(t)];$$

$$i_{C2}(t) = i_{R1}(t) - i_{R2}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2}.$$

Звідси одержимо:

$$\begin{cases} i_{C1}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - i_d[v_{C1}(t)]; \\ i_{C2}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2}. \end{cases}$$

Струм через конденсатор C_2 визначається звичайним компонентним рівнянням лінійного ємнісного елемента $i_{C2}(t) = C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt}$, де C_2 – параметр (ємність) конденсатора, яка є сталою величиною, не залежить від напруги на елементі: $Q(t) = C \cdot v(t)$, $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$.

Струм через ємність $p-n$ переходу визначається так:

$$i_{C1}(t) = \frac{dQ_{C1}}{dt} = \frac{dQ_{C1}}{dv_{C1}} \cdot \frac{dv_{C1}}{dt} = C_d(v_{C1}) \cdot \frac{dv_{C1}}{dt},$$

де Q_{C1} – заряд, накопичений у $p-n$ переході, який розглядаємо, як нелінійний конденсатор C_1 . Отже, $C_1(v_{C1}) = C_d(v_{C1}) = \frac{dQ_{C1}}{dv_{C1}}$ – це диференціальна (динамічна) ємність $p-n$ переходу, залежить від напруги v_{C1} на $p-n$ переході.

Зробивши заміну, одержимо систему рівнянь стану. Отже, нормальна система рівнянь стану першого порядку у формі Коші матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{1}{C_1(v_{C1})} \left\{ \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - i_d[v_{C1}(t)] \right\}; \\ \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \left\{ \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2} \right\}. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{C1}(0) = 0; \\ v_{C2}(0) = 0, \end{cases}$$

де $C_1(v_{C1}) = C_{бар} + C_{диф} = \frac{C_{60}}{(1 - v_{C1}/\varphi_k)^m} + G_d(v_{C1}) \cdot \tau$ – нелінійна диференціальна

ємність $p-n$ переходу (вважаємо, що для реальної схеми виконується режим

$v_{C1} \leq FC \cdot \varphi_k$); $G_d(v_{C1}) = \frac{I_s}{n\varphi_T} \cdot e^{\frac{v_{C1}}{n\varphi_T}}$ – диференціальна провідність діода; τ - час

(Transit Time) переносу заряду.

Приклад 6

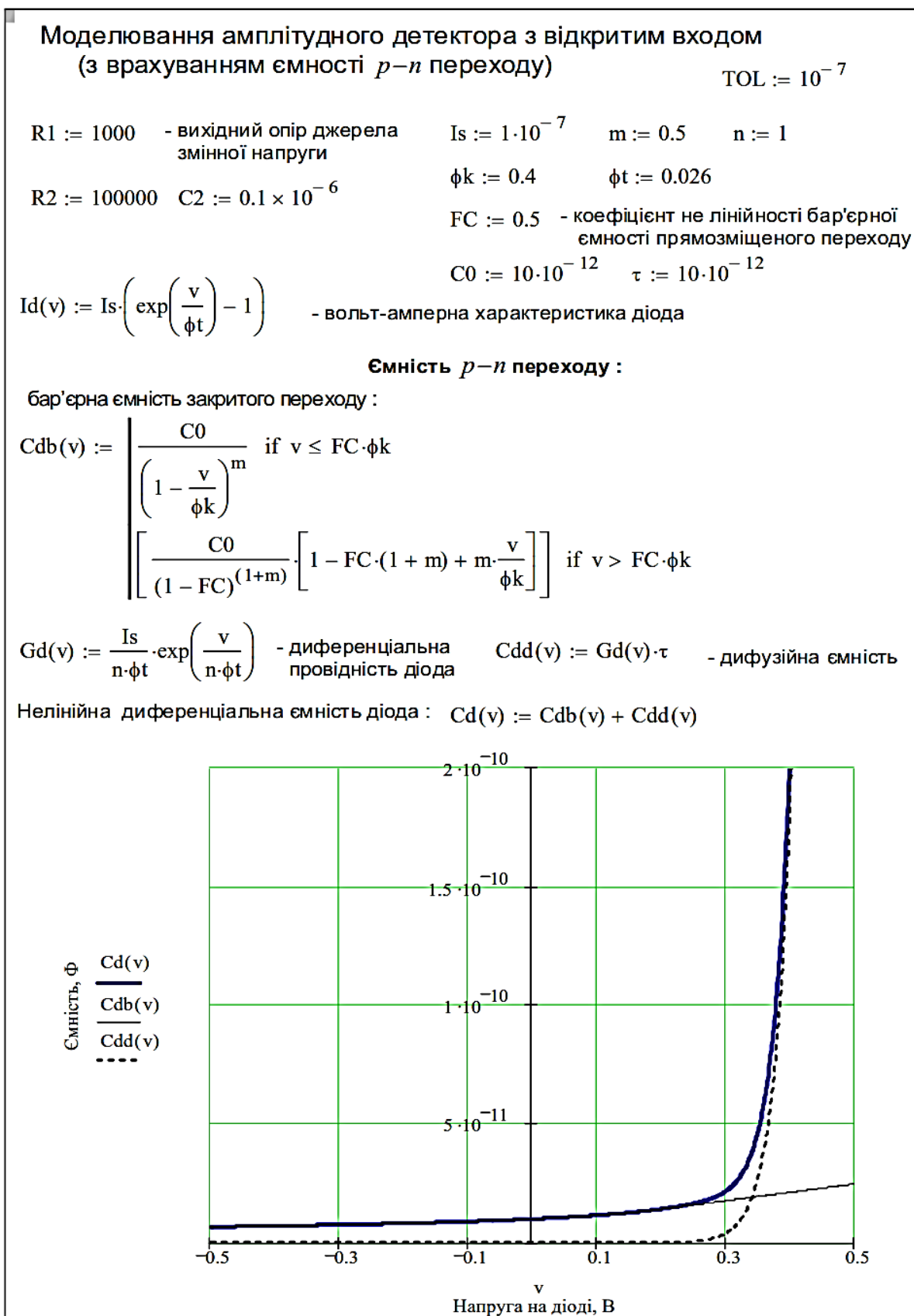


Рис. 12. Нелінійна диференціальна ємність $p-n$ переходу

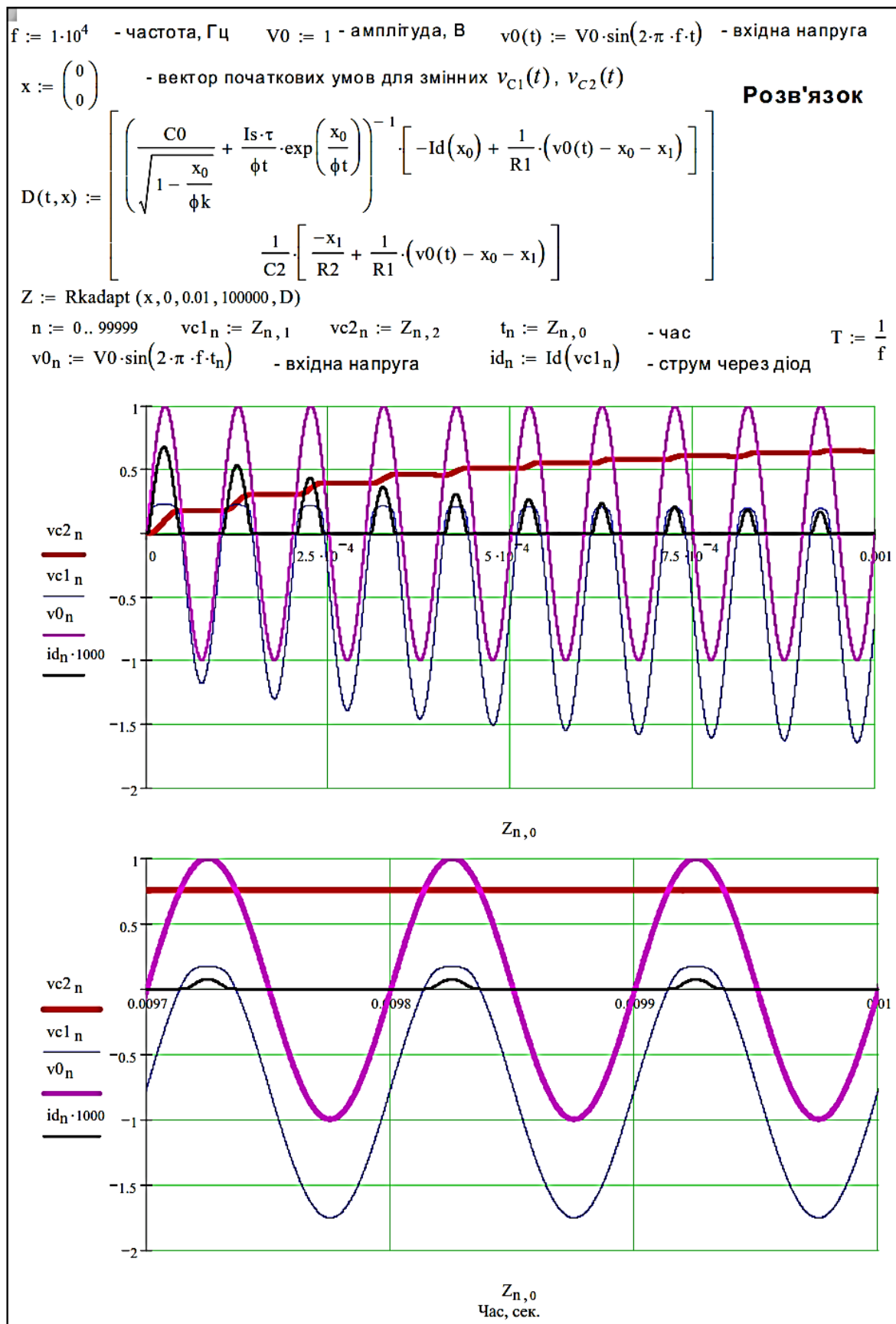


Рис. 13. Динамічні процеси в АД з відкритим входом за умови врахування ємності р-п переходу ($R_1 = 1000$ Ом, $f = 10$ кГц)

Аналіз у середовищі Micro-CAP

Складемо схему амплітудного детектора (рис. 22)

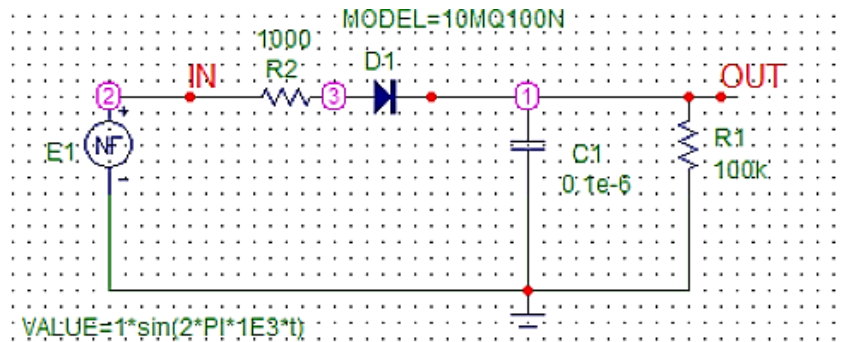



Рис. 14. Схема амплітудного детектора

Source: Local text area of E: \S9 TESK\A0 Комп практикум по ТЕСК\D2 Тема 14 Перетворювач

LEVEL	2	AF	1	BV	100
CJO	8.62759E-1	EG	0.6	FC	0.5
IBV	0.00025	IBVL	0	IKF	0
IS	1E-07	ISR	0	KF	0
M	0.43322	N	1.65612	NBV	1
NBVL	1	NR	2	RL	0
RS	0.0807081	T_ABS	undefined	T_MEASURED	undefined
T_REL_GLOBAL	undefined	T_REL_LOCAL	undefined	TBV1	0
TBV2	0	TIKF	0	TRS1	0
TRS2	0	TT	1E-09	VJ	0.4
XTI	0.5				

Рис. 15. Параметри математичної моделі діода 10MQ100N

Перед початком моделювання можна ознайомитися з математичною моделлю вибраного діода (рис. 15) і його вольт-амперною характеристикою (рис. 16).

Далі виберіть в меню команд **Analysis** режим **Transient ... (Alt+1)**. У вікні **Transient Analysis Limits** встановіть параметри моделювання (рис. 17) та почніть моделювання (**Run** або **F2**, ).

Результати моделювання наведено на рис. 18.

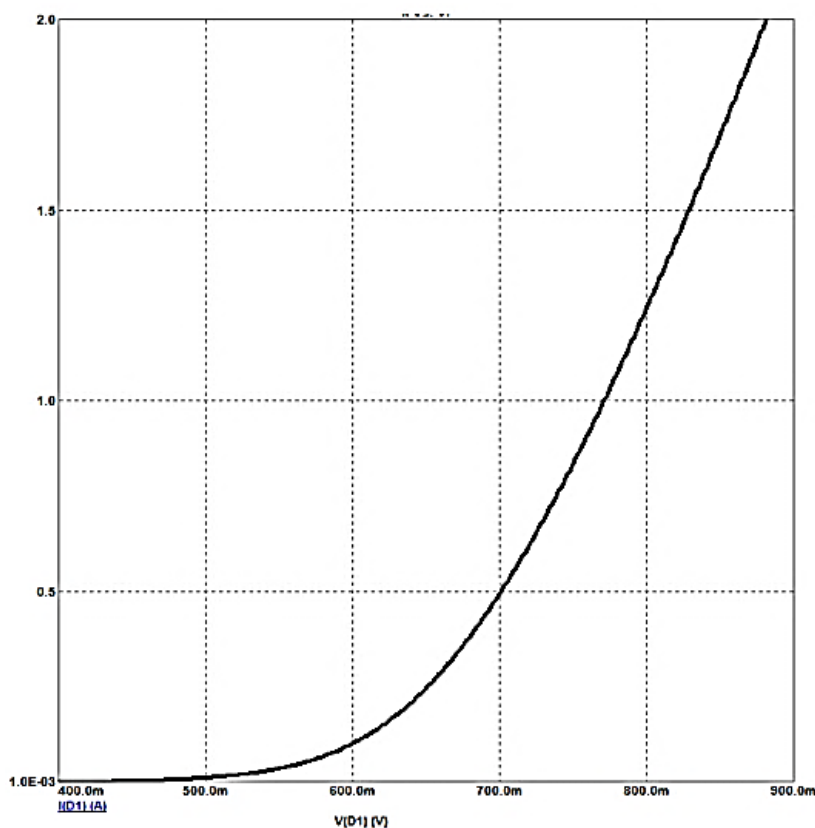


Рис. 16. Вольт-амперна характеристика діода 10MQ100N

Примітка. Модель діода можна задати директивою `.MODEL <ім'я моделі> D [(параметри моделі)]`

Наведемо приклад моделі діода D104A: `.model D104A D (IS=5.81E-12 RS=8.1 N=1.15 TT=8.28NS CJO=41.2PF VJ=0.71 M=0.33 FC=0.5 EG=1.11 XTI=3)`

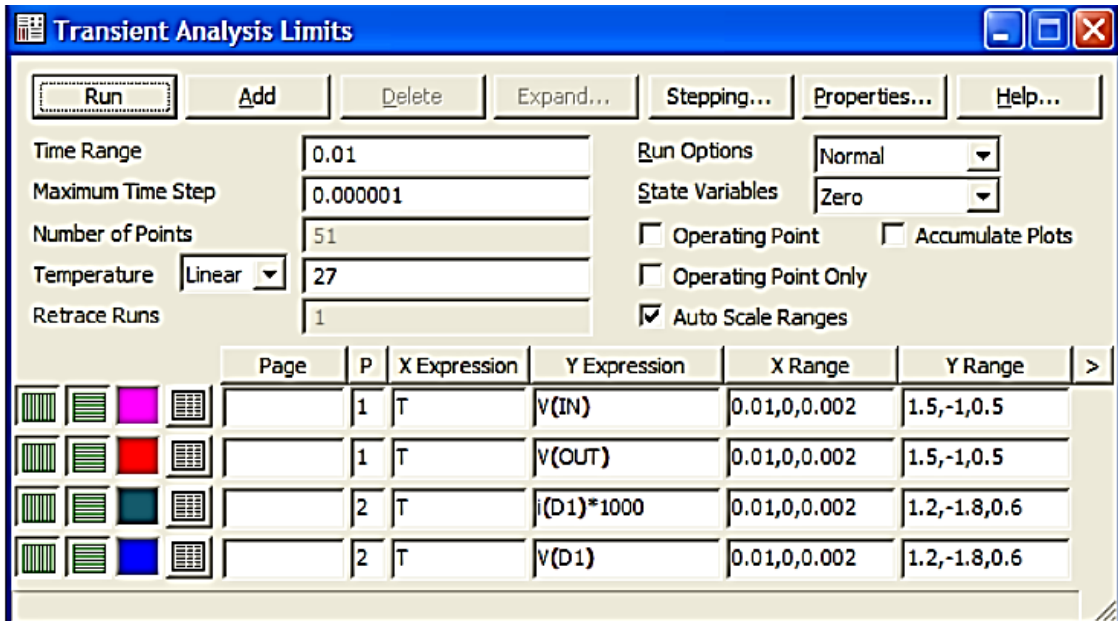


Рис. 17. Задання параметрів моделювання в режимі *Transient Analysis*

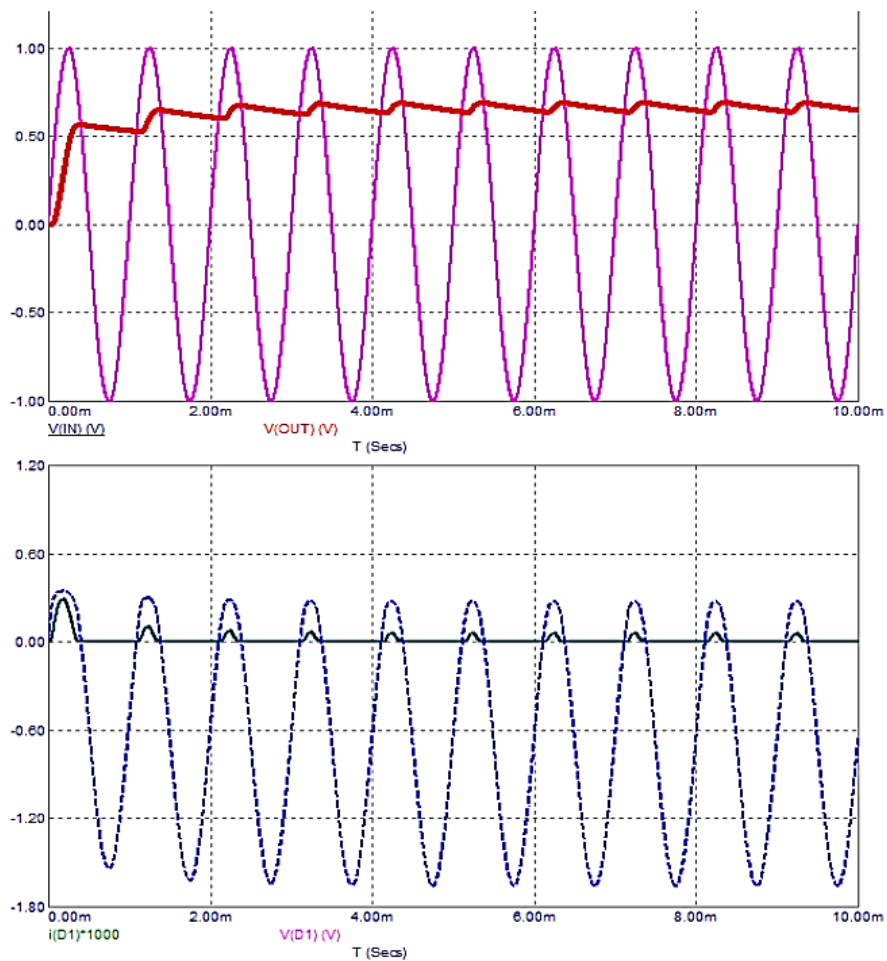


Рис. 18. Результати моделювання амплітудного детектора з відкритим входом

Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть суть методу змінних стану.
2. Які фізичні величини вибирають у якості змінні стану в електричних колах?
3. Які методи розв'язку існують для таких рівнянь?
4. Поясніть визначення інерційного нелінійного кола.
5. Які особливості має аналіз інерційних нелінійних кіл від нелінійних кіл, що не мають інерційні елементи?
6. Чи можна використати операторний метод або метод інтегралів згортки для аналізу динамічних процесів у нелінійних інерційних колах?
7. Поясніть, чим відрізняється використання методу змінних стану для аналізу динамічних процесів у нелінійних колах від випадку лінійних кіл.
8. Які переваги має метод змінних стану перед приблизними методами щодо аналізу перехідних процесів у нелінійних колах?
9. Чи можна метод змінних стану застосувати для аналізу усталеного періодичного режиму в інерційних нелінійних колах?
10. Чи мають нелінійні диференціальні рівняння точний аналітичний розв'язок?
11. Поясніть математичну модель діода в режимі великого сигналу.
12. Як визначити диференціальний і статичний опір діода?
13. Як враховується модель діоду під час складання диференціальних рівнянь кола?
14. Поясніть роботу амплітудного детектора з відкритим входом.
15. Як впливають параметри елементів схеми, моделі діода на роботу детекторів? Яка схема еквівалентна заміщенню амплітудного детектора на низьких, середніх та на високих частотах?

Лекція 11. Амплітудний детектор із закритим входом. Система нелінійних диференціальних рівнянь – математична модель детектору

Амплітудний детектор з відкритим входом. Система нелінійних диференціальних рівнянь – математична модель детектору. Моделювання амплітудного детектора з закритим входом. Лінеаризація характеристики перетворення за малих рівнях вхідної напруги. Метод взаємно-зворотних перетворень. Схема Андерсона. Моделювання ідеального амплітудного детектору на операційному підсилювачі. Приклади аналізу нелінійних кіл в середовищі Mathcad. Контрольні запитання та завдання.

Амплітудний детектор із закритим входом. Система нелінійних диференціальних рівнянь – математична модель детектору

Деяк інакше відбуваються перехідні процеси в амплітудному детекторі з закритим входом (рис. 1).

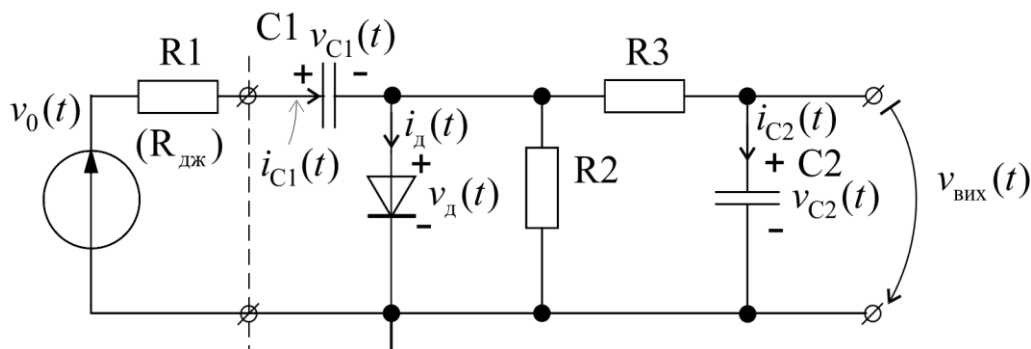


Рис. 1. Амплітудний детектор із закритим входом

Складемо систему диференціальних рівнянь нелінійного кола.

Струм через конденсатор C_1 дорівнює:

$$C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3}.$$

Струм через конденсатор C_2 дорівнює:

$$C_2 \cdot \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3}.$$

Напруга на діоді:

$$v_d(t) = v_0(t) - v_{C1}(t) - R_1 \cdot \left\{ i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3} \right\}.$$

Здиференціюємо останнє рівняння, одержимо:

$$\frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{dv_{\text{C1}}(t)}{dt} - R_1 \cdot \left[\frac{di_{\text{д}}}{dv_{\text{д}}} \cdot \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} - \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_{\text{C2}}(t)}{dt} \right].$$

Звідси дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \left\{ \frac{1}{C_1} i_{\text{д}}[v_{\text{д}}(t)] + \frac{v_{\text{д}}(t)}{R_2 C_1} + \frac{v_{\text{д}}(t) - v_{\text{C2}}(t)}{R_3 C_1} \right\} - \\ - R_1 \cdot \left\{ \frac{di_{\text{д}}}{dv_{\text{д}}} \cdot \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} - \frac{1}{R_3} \cdot \left[\frac{v_{\text{д}}(t) - v_{\text{C2}}(t)}{R_3 C_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} \cdot \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_{\text{д}}}{dv_{\text{д}}} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right] = \frac{dv_0(t)}{dt} - \left\{ \frac{1}{C_1} i_{\text{д}}[v_{\text{д}}(t)] + \frac{v_{\text{д}}(t)}{R_2 C_1} + \frac{v_{\text{д}}(t) - v_{\text{C2}}(t)}{R_3 C_1} \right\} + \\ + \frac{R_1}{R_3} \cdot \left[\frac{v_{\text{д}}(t) - v_{\text{C2}}(t)}{R_3 C_2} \right]. \end{aligned}$$

Отже, дістанемо систему рівнянь першого порядку:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dv_{\text{C1}}(t)}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left\{ i_{\text{д}}[v_{\text{д}}(t)] + \frac{v_{\text{д}}(t)}{R_2} + \frac{v_{\text{д}}(t) - v_{\text{C2}}(t)}{R_3} \right\}; \\ \frac{dv_{\text{C2}}(t)}{dt} &= \frac{v_{\text{д}}(t) - v_{\text{C2}}(t)}{R_3 C_2}; \\ \frac{dv_{\text{д}}(t)}{dt} &= A^{-1} \left\{ \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{i_{\text{д}}[v_{\text{д}}(t)]}{C_1} - \frac{v_{\text{д}}(t)}{R_2 C_1} + \left[\frac{R_1}{R_3^2 C_2} - \frac{1}{R_3 C_1} \right] [v_{\text{д}}(t) - v_{\text{C2}}(t)] \right\}, \\ A &= \left[1 + R_1 \frac{di_{\text{д}}}{dv_{\text{д}}} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right], \end{aligned} \right. \quad (6.12)$$

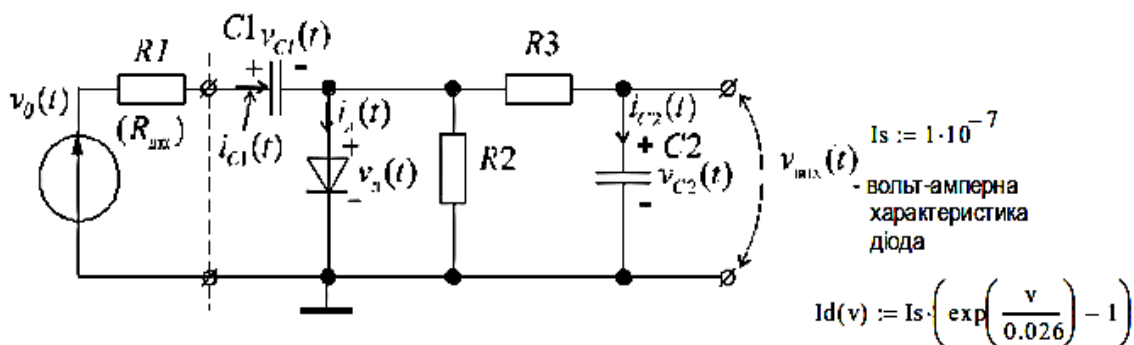
для якої потрібно задати початкові умови, наприклад:
$$\begin{cases} v_{\text{C1}}(0) = 0; \\ v_{\text{C2}}(0) = 0; \\ v_{\text{д}}(0) = 0. \end{cases}$$

Як бачимо, розв'язок системи рівнянь потребує задання похідної від вхідної напруги $Difv_0(t) = \frac{dv_0(t)}{dt}$, а також $G_{\text{д}}(v_{\text{д}}) = \frac{di_{\text{д}}}{dv_{\text{д}}}$ – диференціальної (динамічної) провідності діода.

Приклад 1

Моделювання амплітудного детектора із закритим входом
(з урахуванням вихідного опору джерела змінної напруги)

$$TOL := 10^{-6}$$



$R1 := 1000$ - вихідний опір джерела змінної напруги

$R2 := 1000000$ $R3 := 100000$ $C1 := 0.1 \times 10^{-6}$ $C2 := 0.1 \times 10^{-6}$

$Gd(v) := \frac{d}{dv} I_d(v) \text{ float, 5} \rightarrow 3.846210^{-6} \cdot \exp(38.462v)$ - диференціальна провідність діода

$f := 1 \cdot 10^3$ - частота, Гц $v0 := 1$ - амплітуда, В $T := \frac{1}{f}$ $T = 1 \times 10^{-3}$

$v0(t) := v0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$Difv0(t) := \frac{d}{dt} v0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cos(2000 \pi \cdot t) \cdot \pi$

Розв'язок

$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор початкових умов для змінних $V_{C1}(t)$, $V_{C2}(t)$, $V_D(t)$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C1} \cdot \left[I_d(x_2) + \frac{x_2}{R2} + \frac{1}{R3} \cdot (x_2 - x_1) \right] \\ \frac{1}{R3 \cdot C2} \cdot (x_2 - x_1) \\ \frac{1}{\left(1 + R1 \cdot Gd(x_2) + \frac{R1}{R2} + \frac{R1}{R3} \right)} \cdot \left[Difv0(t) - \frac{1}{C1} \cdot I_d(x_2) - \frac{x_2}{R2 \cdot C1} + \left(\frac{R1}{R3^2 \cdot C2} - \frac{1}{R3 \cdot C1} \right) \cdot (x_2 - x_1) \right] \end{bmatrix}$$

$Z := Rkadapt(x, 0, 0.05, 10000 D)$ - Розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

Рис. 2. Математична модель АД із закритим входом у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь та її розв'язок

Вектори розв'язків для змінних $V_{C1}(t)$, $V_{C2}(t)$, $V_D(t)$:

$n := 0..9999$ $t_n := Z_{n,0}$ $vc1_n := Z_{n,1}$ $vc2_n := Z_{n,2}$ $vd_n := Z_{n,3}$
 $v0_n := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $id_n := Id(vd_n)$ - струм через діод

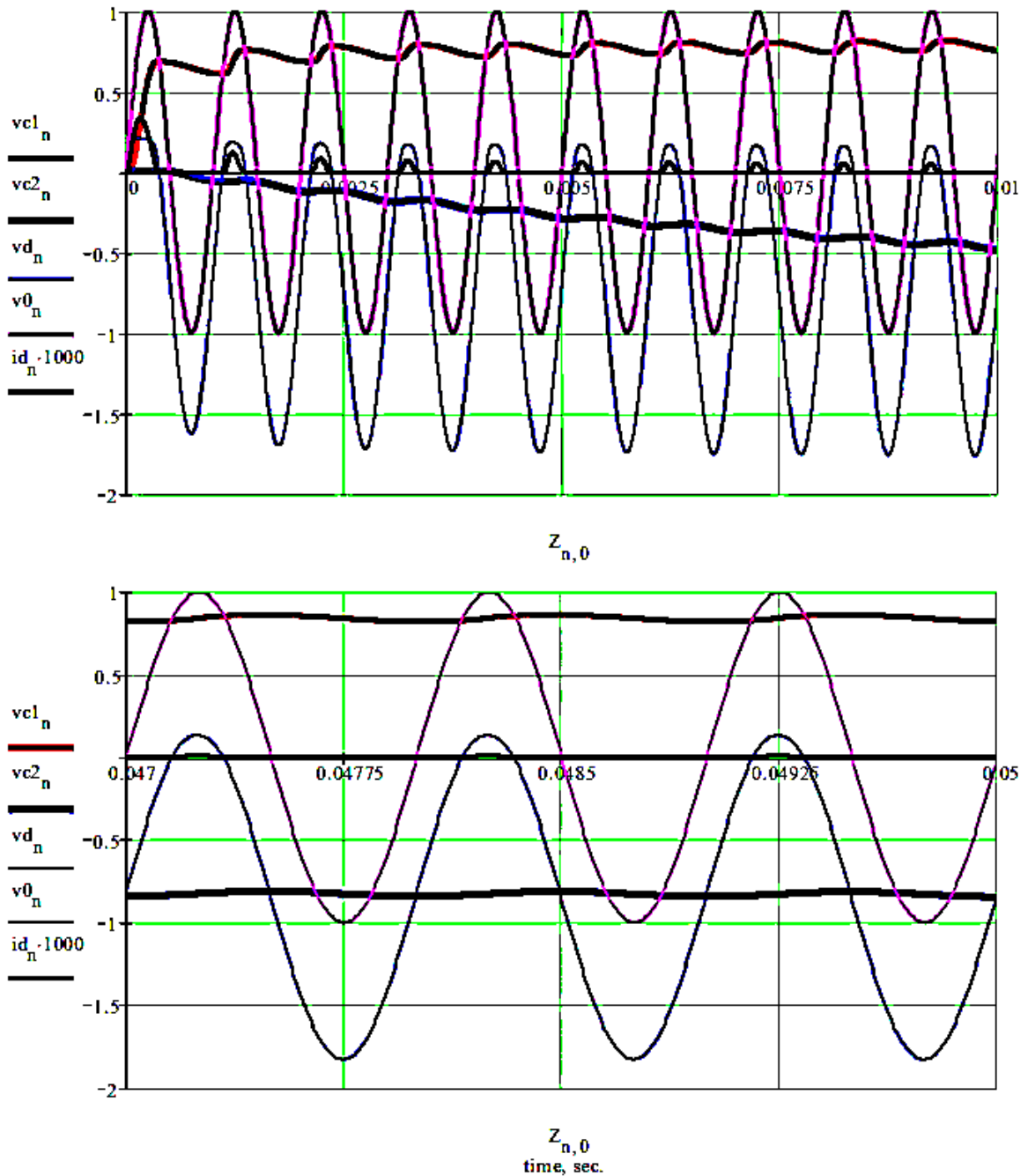


Рис. 3. Динамічні процеси в АД із закритим входом при підключенні до джерела синусоїдальної напруги: $vc1$ - напруга на $C1$; $vc2$ – напруга на $C2$; vd – напруга на діоді; $v0$ – вхідна напруга; id – струм через діод (масштаб $\times 1000$)

Бачимо, що струм через діод тече лише протягом дуже малої частки кожного періоду. Вихідна напруга, що формується на конденсаторі $C2$, має від'ємну полярність.

Недоліком наведених вище схем амплітудних детекторів є значна нелінійність характеристики перетворення за вимірюванням малих напруг.

Для лінеаризації характеристики у вольтметрах змінного струму широко використовується так звана схема Андерсона, яка реалізує метод взаємно-зворотних перетворень²⁵.

Метод взаємно-зворотних перетворень. Схема Андерсона

Такий перетворювач складається з передвключеного нелінійного перетворювача, суматора, підсилювача некомпенсації та ідентичного за параметрами іншого нелінійного перетворювача, включеного в коло зворотного зв'язку.

Схемна модель перетворювача амплітудних значень змінної напруги за структурою Андерсона на *подвійних пікових детекторах* наведена на рис. 4.

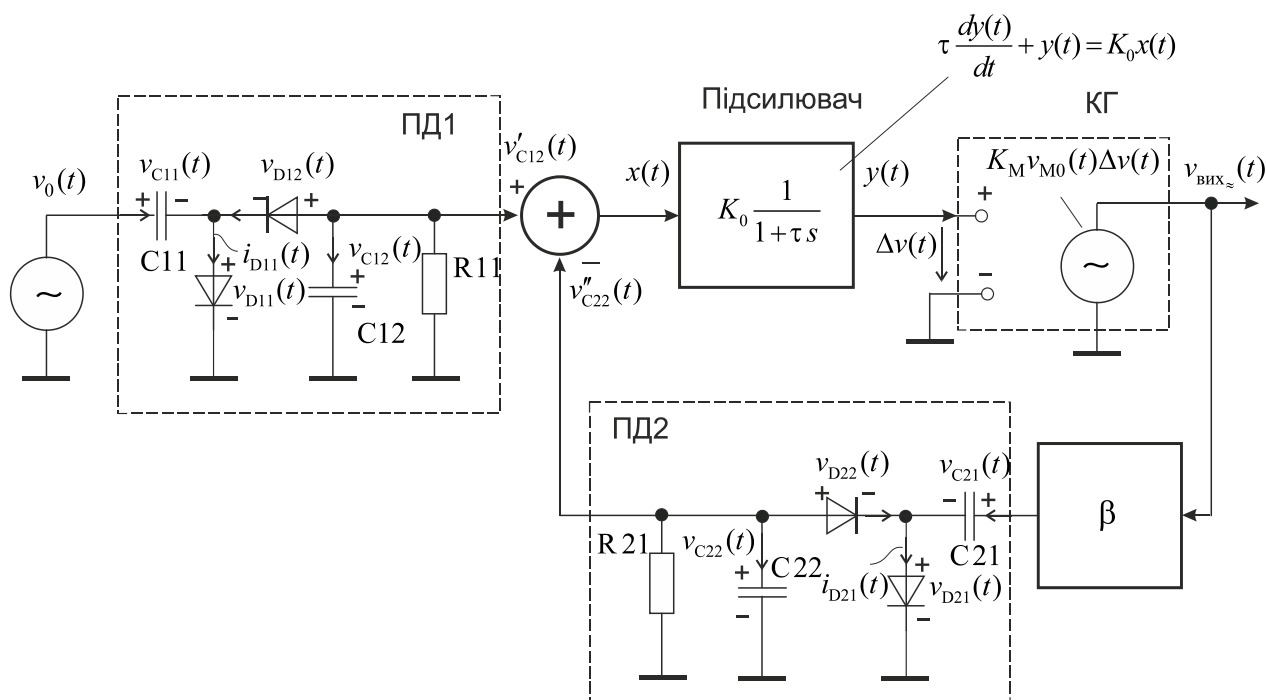


Рис. 4. Схемна модель перетворювача амплітудних значень змінної напруги за структурою Андерсона

²⁵ Туз Ю.М., Серпилін К.Л., Гапченко Л.М. Електронні вольтметри змінного струму (основи проектування). – Київ, Техніка, 1970. – 180 с.

На рисунку зазначені:

ПД1 – передвключений подвійний піковий детектор, який має діоди VD11, VD12, конденсатори C11, C12, та резистор R11, що враховує опір навантаження;

ПД2 – зворотний нелінійний перетворювач, що також є подвійним піковим детектором, і має діоди VD21, VD22, конденсатори C21, C22 та резистор R21, що враховує опір навантаження;

$$H(s) = K_0 \frac{1}{1 + \tau s} \text{ – передатна функція підсилювача некомпенсації, модель}$$

якого має вигляд динамічної ланки першого порядку;

КГ – генератор гармонічної напруги, керований напругою;

β – подільник напруги з коефіцієнтом $\beta < 1$.

У промислових зразках вольтметрів змінної напруги вихідна напруга КГ має невелику фіксовану частоту, зазвичай 10÷100 кГц. Вхідна напруга перетворювача має частотний діапазон до декілька одиниць ГГц.

При достатньо великому коефіцієнті петльового підсилення та за умови, що передатні характеристики детекторів ПД1 і ПД2 ідентичні, передатна характеристика перетворювача стає лінійною.

Вхідна напруга високої частоти перетворюється у низькочастотну гармонічну напругу, яка за амплітудним значенням більше у $1/\beta$ разів. Потім ця напруга перетворюється у постійну напругу. Перетворювач у постійну напругу може бути побудований за прецизійною схемою на базі операційних підсилювачів.

Завдяки взаємній компенсації похибок детекторів ПД1 і ПД2 межа вимірювання може бути знижена до 10 мВ.

$$\begin{aligned}
 C11 &:= 0.1 \times 10^{-6} & C12 &:= 0.1 \times 10^{-6} & C21 &:= 0.1 \times 10^{-6} & C22 &:= 0.1 \times 10^{-6} \\
 R11 &:= 10 \cdot 10^6 & & & R21 &:= 10 \cdot 10^6 & & \\
 I_s &:= 1 \cdot 10^{-7} & & & & & & \\
 Id1(v) &:= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) & Id2(v) &:= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) & & & & \\
 K0 &:= 1000 & \beta &:= \frac{1}{10} & & & & \\
 \tau &:= 200 \quad \text{- стала часу підсилювача} & T_A &:= 0.25 \quad \text{- інтервал аналізу, сек.} & & & & \\
 V0 &:= 0.3 \quad \text{- амплітудне значення} & N &:= 100000 & & & & \\
 & \quad \text{вхідної змінної напруги} & & & & & & \\
 f1 &:= 10 \cdot 10^3 \quad \text{- частота, Гц} & f2 &:= 0.5 \cdot 10^3 & KM &:= 50 & & \\
 v0(t) &:= V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t) & vM(t) &:= 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t) & & \text{- напруга модулятора} & &
 \end{aligned}$$

Рис. 5. Параметри схемної моделі перетворювача за структурою Андерсона (амплітуда вхідної напруги 0,3В)

Математична модель перетворювача у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку для змінних стану $v_{C11}(t)$, $v_{C12}(t)$, $v_{C21}(t)$, $v_{C22}(t)$, $v_Y(t)$ (де $v_Y(t)$ – вихідна напруга підсилювача) в нормальній формі наведена на рис. 6.

Динамічні процеси в ПД1 наведено на рис. 7.

Динамічні процеси в ПД2 та встановлення вихідної напруги перетворювача за схемою Андерсона наведено на рис. 8.

Приклад 2

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- вектор початкових умов змінних стану} \\ v_{C11}(t), v_{C12}(t), v_{C21}(t), v_{C22}(t), v_Y(t) \end{array}$$

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} \frac{dv_{C11}(t)}{dt} & \frac{1}{C11} \cdot (\text{Id1}(v0(t) - x_0) - \text{Id2}(x_0 + x_1 - v0(t))) \\ \frac{dv_{C12}(t)}{dt} & \frac{1}{C12} \cdot \left(-\text{Id2}(x_0 + x_1 - v0(t)) - \frac{x_1}{R11} \right) \\ \frac{dv_{C21}(t)}{dt} & \frac{1}{C21} \cdot \left[\text{Id1}(KM \cdot vM(t) \cdot x_4 \cdot \beta - x_2) - \text{Id2}[-(KM \cdot vM(t) \cdot x_4) \cdot \beta + x_2 + x_3] \right] \\ \frac{dv_{C22}(t)}{dt} & \frac{1}{C22} \cdot \left[-\text{Id2}[-(KM \cdot vM(t) \cdot x_4) \cdot \beta + x_2 + x_3] - \frac{x_3}{R21} \right] \\ \frac{dv_Y(t)}{dt} & \frac{1}{\tau} \cdot [K0 \cdot (x_1 - x_3) - x_4] \end{bmatrix}$$

$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, TA, N, D)$ - розв'язок системи *нелінійних* диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

$\text{Rkadapt}(v, x1, x2, npoints, D)$ - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

Вектори розв'язків для змінних стану:

$$\begin{array}{llllll} n := 0..N-1 & t_n := Z_{n,0} & vc11_n := Z_{n,1} & vc12_n := Z_{n,2} & vc21_n := Z_{n,3} & vc22_n := Z_{n,4} \\ v0_n := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t_n) & & vd11_n := v0_n - vc11_n & & id11_n := \text{Id1}(vd11_n) & \\ vOut_n := KM \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t_n) \cdot Z_{n,5} & & vd21_n := vOut_n \cdot \beta - vc21_n & & id21_n := \text{Id1}(vd21_n) & \end{array}$$

Рис. 6. Математична модель перетворювача за структурою Андерсона у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку та її розв'язок

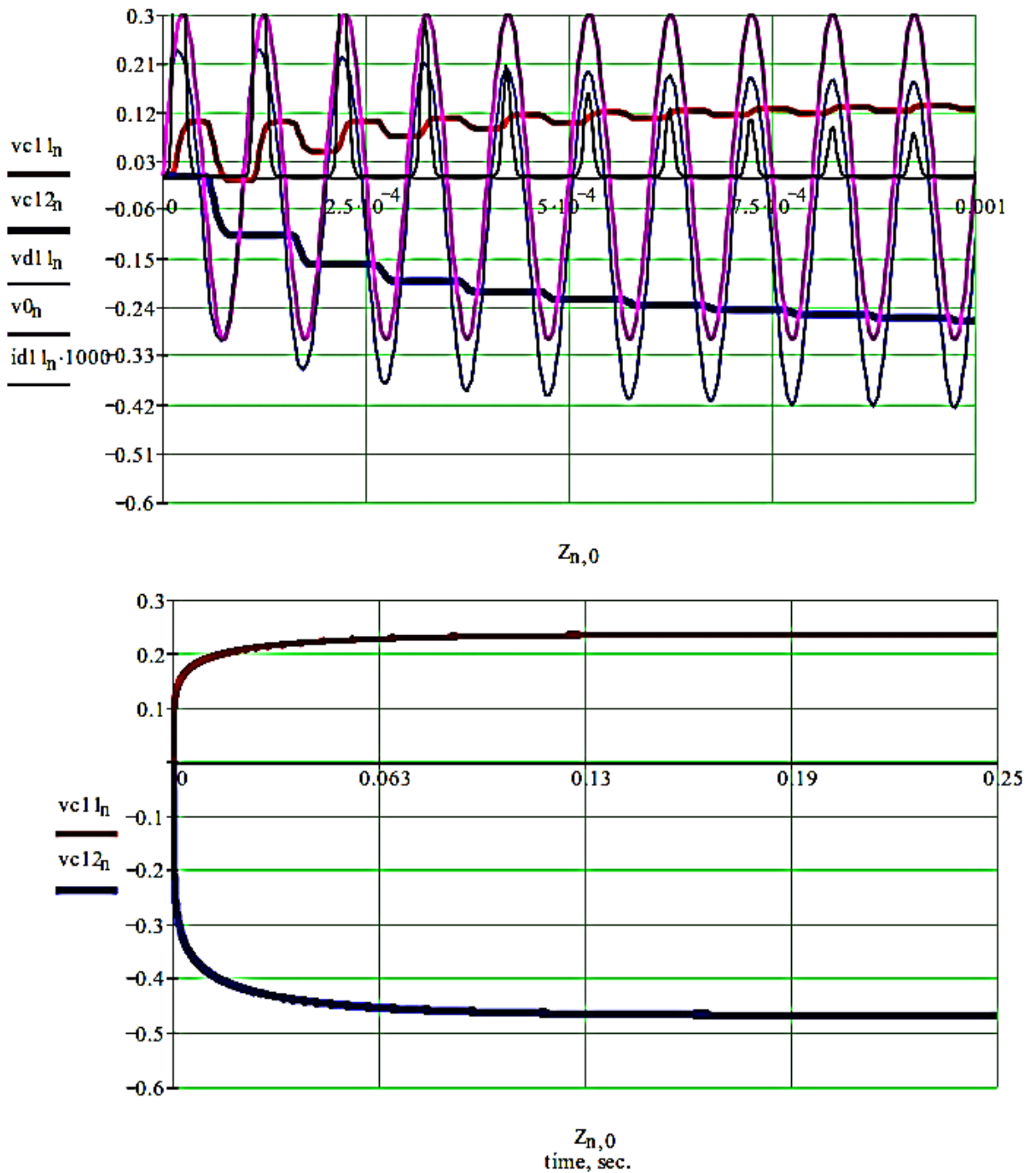


Рис. 7. Динамічні процеси в ПДІ (амплітуда вхідної напруги перетворювача 0,3В)

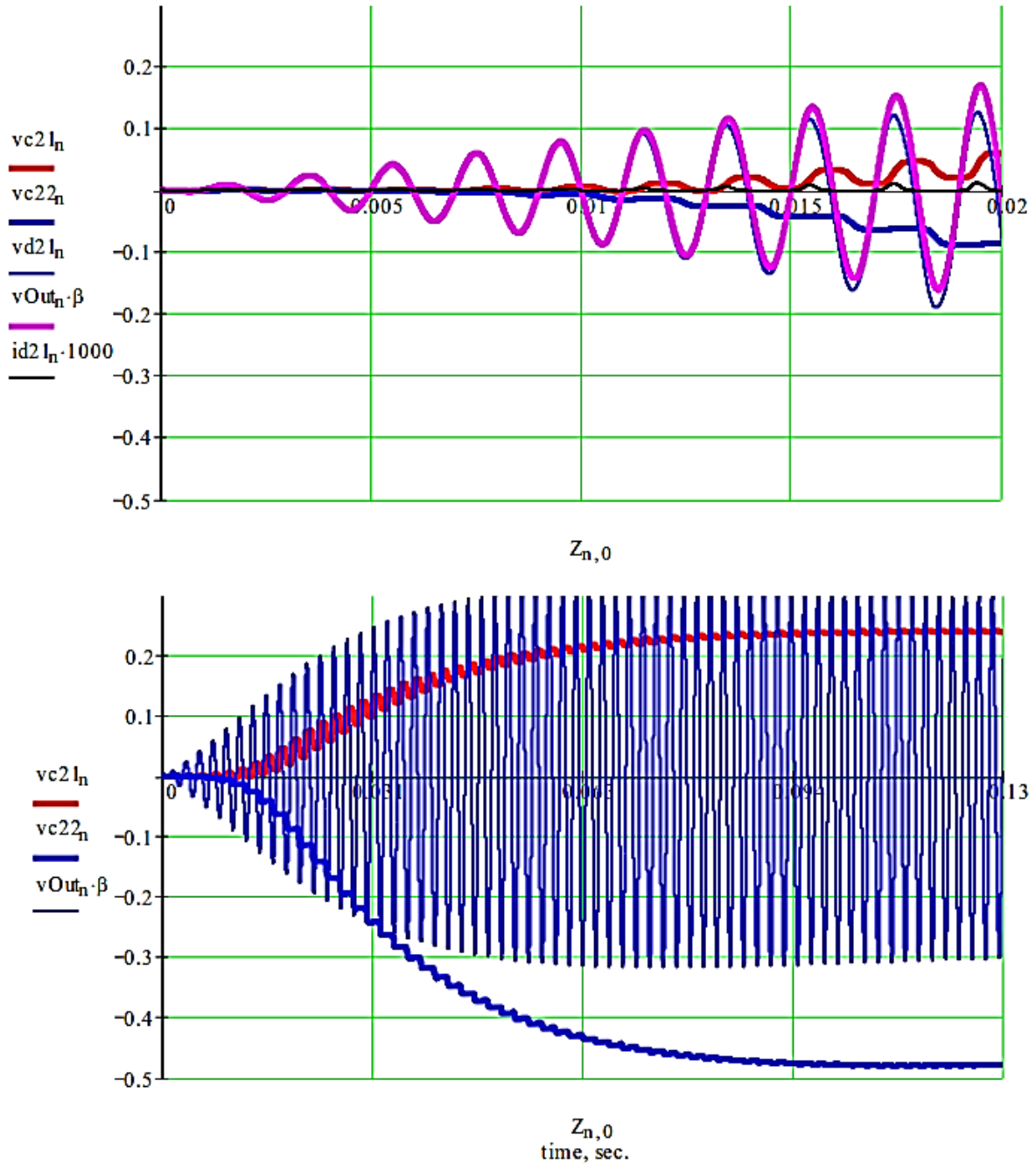


Рис. 8. Динамічні процеси в ПД2 та встановлення напруги на виході β -ланки (амплітуда вхідної напруги перетворювача 0,3В)

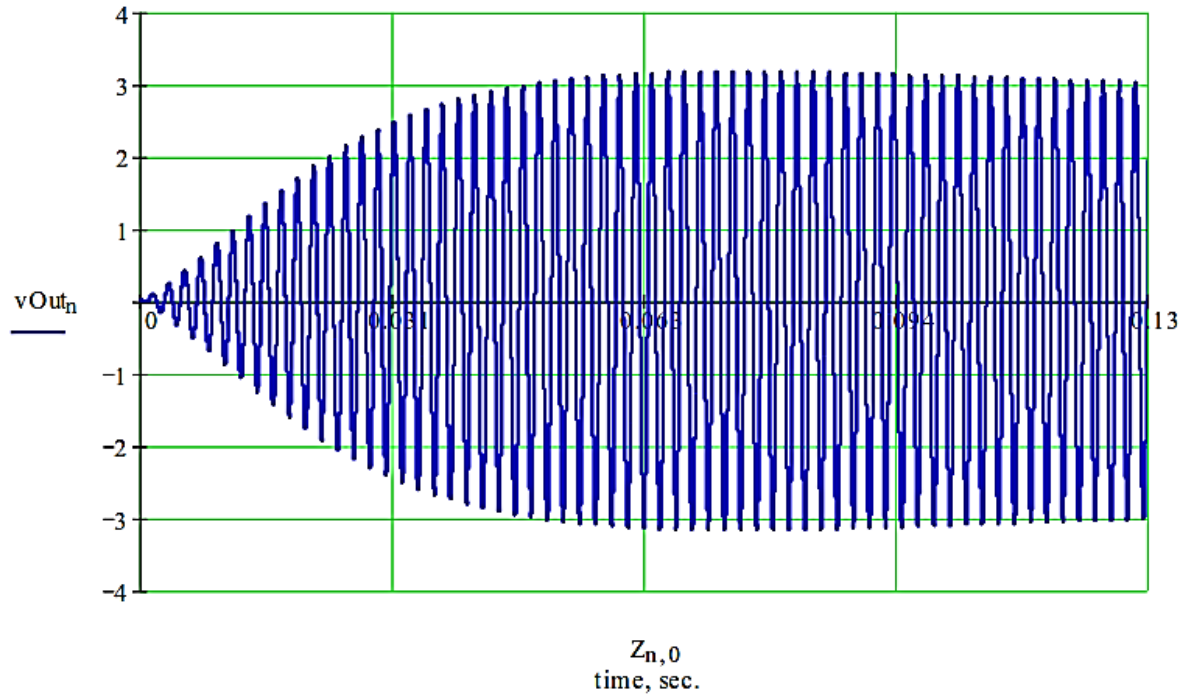


Рис. 9. Вихідна змінна напруга перетворювача $v_{\text{Out}}(t)$ низької частоти f_2 (амплітуда вихідної напруги 3В)

Порівняння вхідної та вихідної напруг перетворювача в усталеному режимі

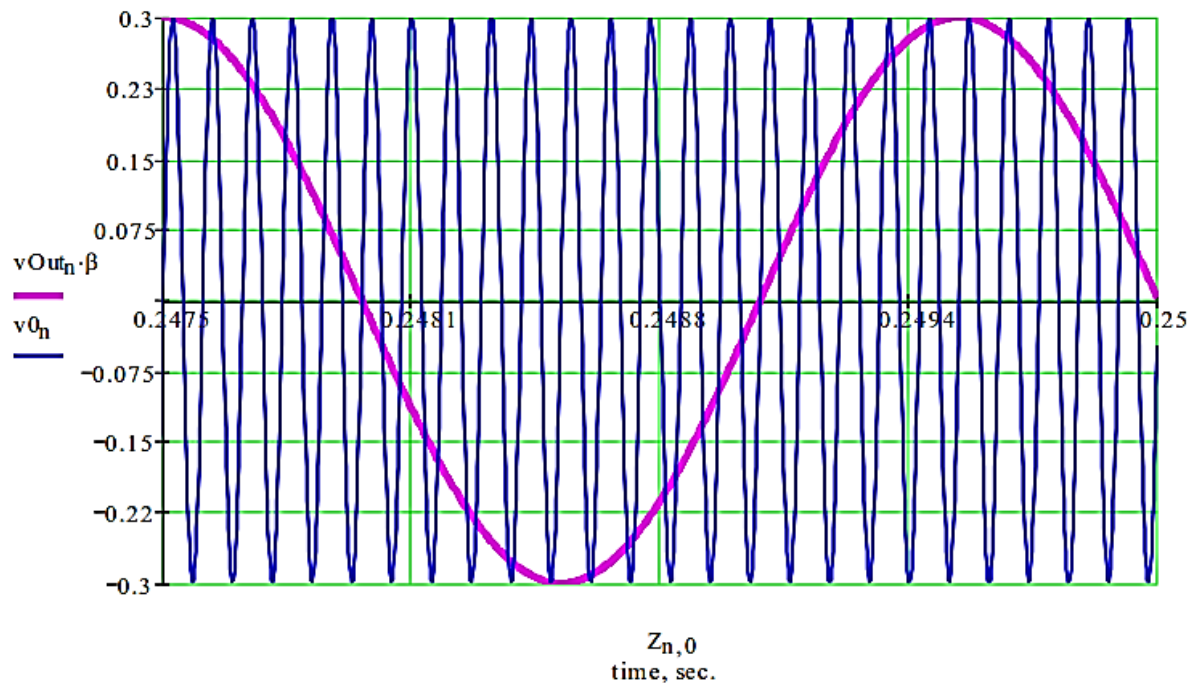


Рис. 10. Порівняння вхідної напруги $v_0(t)$ високої частоти f_1 та напруги зворотного зв'язку $v_{\text{Out}}(t)\beta$ (низька частота f_2) в усталеному режимі

Моделювання амплітудного детектору на операційному підсилювачі

На рис.11 наведено схему амплітудного детектора на операційному підсилювачі, коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком (схема – "ідеальний діод" [16]).

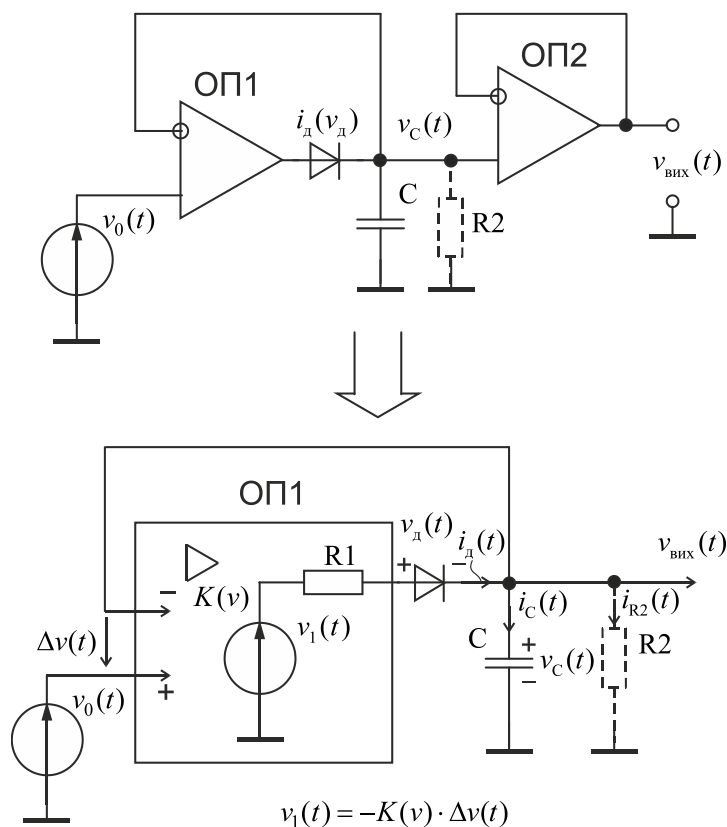


Рис. 11. АД на операційному підсилювачі (схема – "ідеальний діод")

Документ Mathcad з аналізом, коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком, наведено на рис. 12. Математична модель АД за схемою "ідеальний діод" надана у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Застосуємо модель операційного підсилювача у вигляді безінерційної ланки з нелінійною амплітудною характеристикою на зразок насичення:

$$K(v) = K_0 \cdot \text{th}(a \cdot v) = K_0 \frac{e^{a \cdot v} - e^{-a \cdot v}}{e^{a \cdot v} + e^{-a \cdot v}}, \quad \text{де } \text{th}(a \cdot v) \in [-1; +1] \quad (6.13)$$

Приклад 3

$R1 := 1000$ - вихідний опір операційного підсилювача

$R2 := 100000$ $C := 0.1 \times 10^{-6}$ $Is := 1 \cdot 10^{-7}$

$$Id(v) := Is \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) \quad Gd(v) := \frac{d}{dv} Id(v) \text{ float, 5} \rightarrow 3.8462 \cdot 10^{-6} \cdot \exp(38.462 \cdot v)$$

- диференціальна провідність діода

$K0 := 10$ $a := 1000$

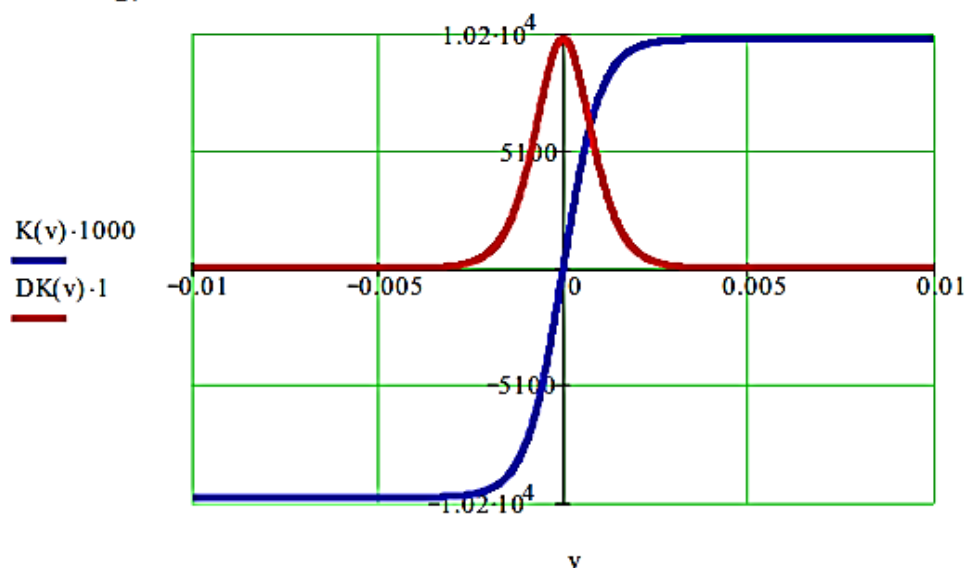
Модель операційного підсилювача

$K(v) := K0 \cdot \tanh(v \cdot a)$

- модель амплітудної характеристики операційного підсилювача у вигляді нелінійності на зразок насичення.

$$DK(v) := \frac{d}{dv} K(v) \text{ float, 3} \rightarrow 1.00 \cdot 10^4 - 1.00 \cdot 10^4 \cdot \tanh(1.00 \cdot 10^3 \cdot v)^2$$

- динамічний коефіцієнт підсилення



$f := 1 \cdot 10^3$ - частота, Гц $V0 := 1$ - амплітуда, В

$v0(t) := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$T := \frac{1}{f}$ $T = 1 \times 10^{-3}$
- період, сек.

$DV0(t) := \frac{d}{dt} V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cdot \cos(2000 \cdot \pi \cdot t) \cdot \pi$

$TA := 8 \cdot T$

$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор початкових умов для змінних $V_C(t)$, $V_D(t)$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \cdot Id(x_1) - \frac{1}{R2 \cdot C} \cdot x_0 \\ \frac{1}{1 + R1 \cdot Gd(x_1)} \cdot \left[DK(x_0 - v0(t)) \cdot DV0(t) - \frac{DK(x_0 - v0(t)) + 1}{C} \cdot \left(Id(x_1) - \frac{1}{R2} \cdot x_0 \right) \right] \end{bmatrix}$$

$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, TA, 100000, D)$ - Розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь

Рис. 12. Математична модель АДУ у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь та її розв'язок: $K(v)$ – нелінійна амплітудна характеристика підсилювача (масштаб $\times 50$); $DK(v)$ – динамічний коефіцієнт підсилення як похідна від $K(v)$

$n := 0..99999$ $v_{c_n} := Z_{n,1}$ $v_{d_n} := Z_{n,2}$ $t_n := Z_{n,0}$ - час
 $v_{0_n} := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $i_{d_n} := Id(v_{d_n})$ - струм через діод

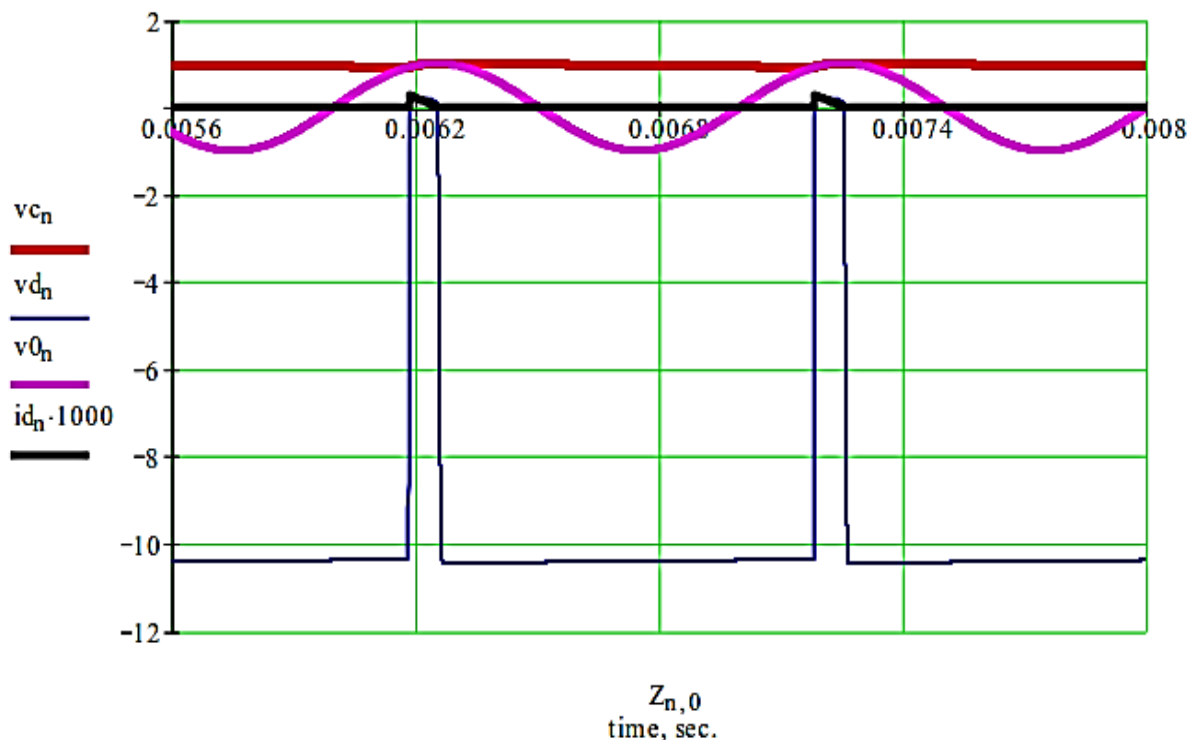
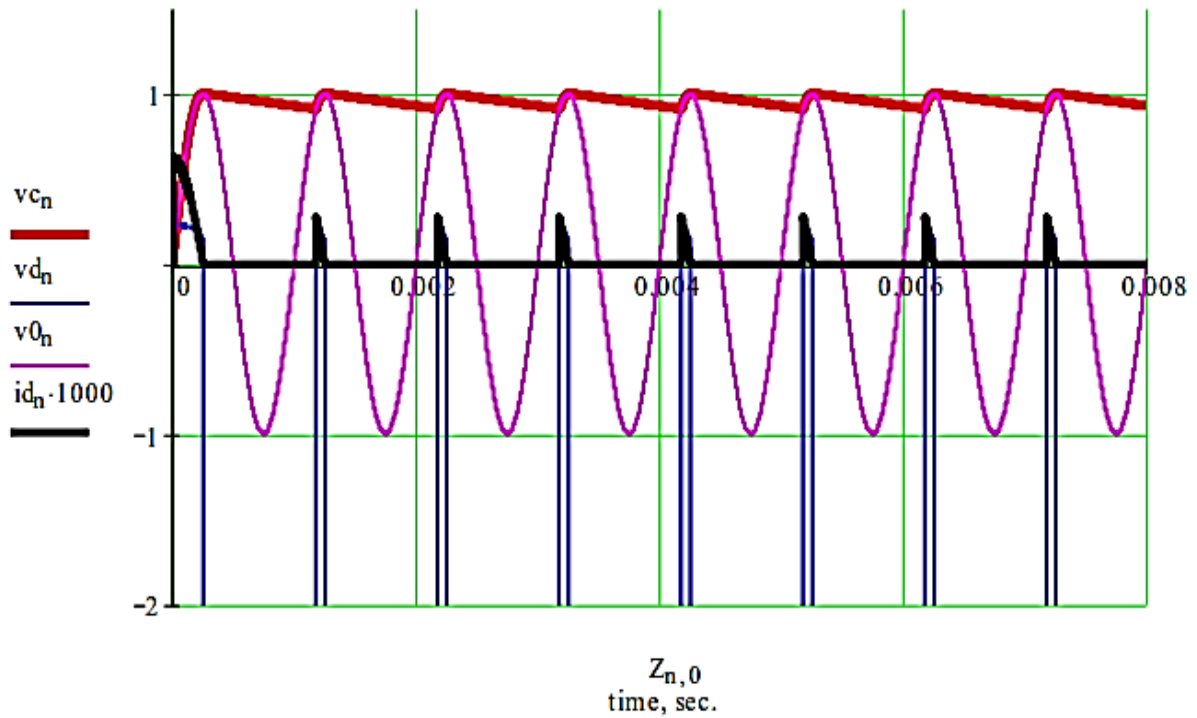


Рис. 13. Моделювання АД (схема – "ідеальний діод"), коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком: v_c - напруга на конденсаторі C ; v_d - напруга на діоді; v_0 - вхідна напруга; i_d - струм через діод (масштаб $\times 1000$)

Бачимо, що вихідна напруга АД практично не залежить від падіння напруги на відкритому діоді.

Контрольні запитання та завдання

1. *Наведіть модель діода в режимі великого сигналу. Як визначається нелінійна ємність діода, як залежить ємність від напруги? Як визначається опір $p-n$ переходу з нелінійною вольт-амперною характеристикою на змінному та постійному струмі?*

1. *Які стандартні процедури і функції існують для чисельного розв'язку систем нелінійних диференціальних рівнянь в системах комп'ютерної математики? Поясніть склад матриці розв'язків. Чи є відмінності у розв'язку систем лінійних чи нелінійних диференціальних рівнянь?*

2. *Модель амплітудного детектору з відкритим входом – система нелінійних диференціальних рівнянь. Що називають нормальною системою рівнянь стану у формі Коші, змінними стану? Поясніть сутність методу складання системи. Як враховується нелінійність опору, ємності діода?*

3. *Модель амплітудного детектору з закритим входом – система нелінійних диференціальних рівнянь. Поясніть сутність методу складання системи. Як враховується нелінійність моделі діоду?*

4. *Поясніть принцип роботи амплітудного детектору за структурою Андерсона та його переваги, принцип складання системи нелінійних диференціальних рівнянь.*

5. *Як враховується нелінійність моделі операційного підсилювача під час моделювання амплітудного детектору за схемою типу "ідеальний діод" (на операційному підсилювачі з від'ємним зворотним зв'язком)?*

Лекція 12. Дослідження динаміки перетворювачів середньо-квадратичних значень змінної напруги

Вступ. Метод взаємно-зворотних перетворень. Динамічна модель перетворювача середньоквадратичних значень змінної напруги. Моделювання методу заглушення пульсацій на низьких та інфранизьких частотах за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь. Операція "ковзного" інтегрування (як модель вольтметра інтегруючого типу з кінцевим часом інтегрування). Приклади аналізу нелінійних кіл в середовищі Mathcad. Аналіз в середовищі програми Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання.

ВСТУП

Другим поширеним класом вимірювань є вимірювання середньоквадратичного значення (СКЗ) змінної напруги²⁶⁾

$$v_{\text{скз}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_x^2(t) dt},$$

де T – час вимірювань або період сигналу. Для реалізації вимірювань у вольтметрах використовуються перетворювачі СКЗ змінної напруги у постійну напругу, значення якої потім визначається за допомогою стандартних засобів, наприклад, аналого-цифрового перетворення.

За визначенням ефективне (або середньоквадратичне) значення змінної напруги, яке вимірюється, дорівнює значенню деякої постійній напрузі на виході перетворювача при тій самій потужності, що виділяється на тому самому навантаженні. Такі перетворювачі є нелійними колами та обов'язково у своєму складі мають інерційні елементи.

В широкосмугових вольтметрах для реалізації прецизійних вимірювань застосовують термоелектричні перетворювачі (ТП). Найпоширеніші – *вакуумні, плівкові та напівпровідникові* ТП з нагрівальним елементом у вигляді *резистора* й різними давачами температури: *термопарою*, напівпровідниковим *діодом*, *транзистором*; диференціальні багатоелементні ТП типу ДТПС тощо.

²⁶⁾ Середньоквадратичне (ефективне, діюче) значення змінної напруги дорівнює постійній напрузі при тій самій потужності, що виділяється на тому самому навантаженні. Становить особливий інтерес при вимірюванні шумів і сигналів з широким спектром.

Нагрівальний елемент і давач температури мають тепловий зв'язок, тому в ТП вихідна напруга постійного струму залежить від потужності вхідної напруги змінного струму.

Розглянемо термоперетворювачі типу ТВБ (термоперетворювач вакуумний безконтактний). Технічні характеристики ТВБ-4: номінальний вхідний струм нагрівального елемента – 10 мА; допустиме значення вхідного струму – 15 мА; номінальне значення термоелектрорушійної сили (термо ЕРС) – $E_{\text{ЕРС}} = 12 \div 16$ мВ; опір нагрівального елемента (нагрівника) – $r_{\text{н}} = 40 \div 60$ Ом; вихідний опір термопари – $r_{\text{вих}} = 15 \div 20$ Ом; стала часу, що характеризує інерційні властивості ТВБ-4, приблизно дорівнює $\tau = 1 \div 1,5$ с.

Переваги таких перетворювачів наступні: мала частотна похибка в діапазоні частот до десятків та сотень мегагерц, висока квадратичність характеристики, незалежність похибки від форми кривої вхідної напруги. Але при звичайному включенні таких ТП в схемі вольтметрів шкала матиме квадратичний характер. Тому використовують диференціальне включення ТП, що реалізує метод взаємно-зворотних перетворень.

Метод взаємно-зворотних перетворень

Схему лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги (ЛПСКЗН), побудовану за методом взаємно-зворотних перетворень²⁷, наведено на рис. 1.

Статичний режим

Розглянемо статичний режим роботи ЛПСКЗН за середньоквадратичним значенням вхідної напруги та визначимо нелінійність характеристики перетворення. Термо-ЕРС окремого ТП визначається таким чином:

$$E_{\text{ЕРС}} = \alpha_{\text{Т}} \cdot i_{\text{нСКЗ}} \cdot v_{\text{нСКЗ}} = \frac{\alpha_{\text{Т}}}{r_{\text{н}}} \cdot v_{\text{нСКЗ}}^2 = \alpha_{\text{Т}} \cdot r_{\text{н}} i_{\text{нСКЗ}}^2,$$

²⁷ Туз Ю.М., Серпилін К.Л., Гапченко Л.М. Електронні вольтметри змінного струму (основи проектування). – Київ, Техніка, 1970. – 180 с.

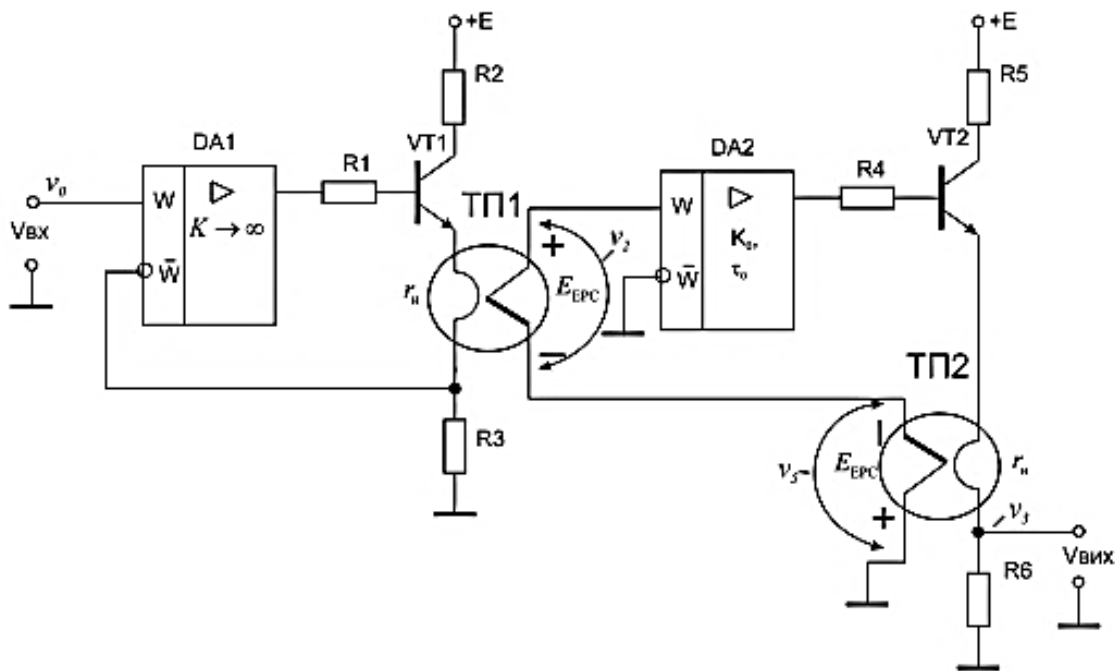


Рис. 1. Лінійний перетворювач СКЗ змінної напруги за методом взаємно-зворотних перетворень

де α_T – коефіцієнт, який враховує ефективність перетворення тепла в вихідну напругу; r_n – опір нагрівника; $i_{\text{нСКЗ}} = v_{\text{нСКЗ}}/r_n$ – струм (середньоквадратичне значення) через нагрівник ТП; $v_{\text{нСКЗ}}$ – середньоквадратичне значення змінної напруги безпосередньо на опорі нагрівника ТП.

У схемі на рис. 1 струм через нагрівник ТП1 не залежить від значення його опору $r_{\text{н1}}$ (режим заданого струму). Враховуючи те, що $v_{R3}(t) = v_{\text{вх}}(t)$, струм

$i_{\text{нТП1}}(t)$ можна визначити наступним чином $i_{\text{нТП1}}(t) = i_{R3}(t) = \frac{v_{\text{вх}}(t)}{R_3}$. Отже,

вибираючи $R_3 = 100$ Ом, одержимо при $v_{\text{вхСКЗ}} = 1$ В струм через нагрівник

$i_{\text{нСКЗ,ТП1}} = 10$ мА. Якщо при $i_{\text{нСКЗ,ТП1}} = 10$ мА вихідна термо-ЕРС $E_{\text{ЕРС}} = 16$ мВ, то

функція перетворення для ТП1 за середньоквадратичним значенням вхідної напруги буде $v_2 = E_{\text{ЕРС,ТП1}} = k_1 \cdot v_{\text{вхСКЗ}}^2$, де $0,016 \text{ В} = k_1 \cdot v_{\text{вхСКЗ}}^2 = k_1 \cdot (1\text{В})^2$, відповідно

$$k_1 = \frac{0,016\text{В}}{(1\text{В})^2} = 0,016 \left(\frac{1}{\text{В}}\right).$$

Аналогічно для ТП2 $i_{н_{ТП2}}(t) = \frac{v_{вих}(t)}{R_6}$. Якщо, також вибираємо $R_6 = 100 \text{ Ом}$, то отримуємо те, що при вихідній напрузі $v_{вих} = 1 \text{ В}$ (напруга постійного струму), струм через нагрівник $i_{н_{ТП2}} = 10 \text{ мА}$. При $i_{н_{ТП2}} = 10 \text{ мА}$ вихідна термо-ЕРС $E_{ЕРС} = 16 \text{ мВ}$. Отже функція перетворення для ТП2 в складі схеми буде $v_5 = E_{ЕРС_{ТП2}} = k_2 \cdot v_{вих}^2$, де $0,016 \text{ В} = k_2 \cdot v_{вих}^2 = k_2 \cdot (1\text{В})^2$ і відповідно $k_2 = \frac{0,016\text{В}}{(1\text{В})^2} = 0,016 \left(\frac{1}{\text{В}}\right)$.

Характеристика перетворення ЛПСКЗН (**Приклад 1**) за схемою рис. 1 в статичному режимі визначена в документі Mathcad на рис. 2:

$$v_{вих} = F(v_{вх_{СКЗ}}) = \frac{1}{2Kk_2} [-1 + \sqrt{1 + 4K^2k_1k_2v_{вх_{СКЗ}}^2}],$$

де K – коефіцієнт підсилення підсилювача на постійному струмі.

При збільшенні K характеристика наближається до лінійної²⁸:

$$v_{вих} = F(v_{вх_{СКЗ}}) = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \cdot v_{вх_{СКЗ}}.$$

В наступному документі Mathcad (рис. 3) наведено приклад (**Приклад 2**), як можна ще зменшити похибку нелінійності від статизму системи. Метод полягає в тому, що в прямий канал підсилення введена додаткова нелінійність типу $\sqrt{\quad}$. В результаті глибина від'ємного зворотного зв'язку не залежить від рівня перетворюваного сигналу.

²⁸ За допомогою підстроювального резистора, включеного послідовно з R_3 або R_6 , можна змінювати k_1 або k_2 і, відповідно, змінювати нахил характеристики перетворення.

Приклад 1

Статична характеристика ЛПСКЗН за методом взаємно-зворотних перетворювань

TOL := 10⁻⁶

Given

$$v_2 = k_1 \cdot v^2 \quad v_5 = k_2 \cdot v_3^2 \quad (v_2 - v_5) \cdot K = v_3$$

$$\left[(\text{Find}(v_2, v_5, v_3))^{(0)} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} k_1 \cdot v^2 \\ \frac{K \cdot k_1 \cdot v^2 - \frac{1}{2 \cdot K \cdot k_2} \cdot \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{K} \\ \frac{1}{2 \cdot K \cdot k_2} \cdot \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right]$$

$$v_3 := \frac{1}{2 \cdot K \cdot k_2} \cdot \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \lim_{K \rightarrow \infty} v_3 \rightarrow \frac{(k_2 \cdot k_1 \cdot v^2)^{\frac{1}{2}}}{k_2} \quad \text{- вихідна напруга}$$

Передатна характеристика

$$k_1 := 0.016 \quad k_2 := 0.016 \quad K := 100$$

$$F(x) := \frac{1}{2 \cdot K \cdot k_2} \cdot \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{- реальна характеристика перетворення}$$

$$F_0(x) := \frac{(k_2 \cdot k_1 \cdot x^2)^{\frac{1}{2}}}{k_2} \quad \text{- ідеальна лінеарізована характеристика перетворення}$$

$$\Delta F(x) := F(x) - F_0(x) \quad \text{- похибка від нелінійності}$$

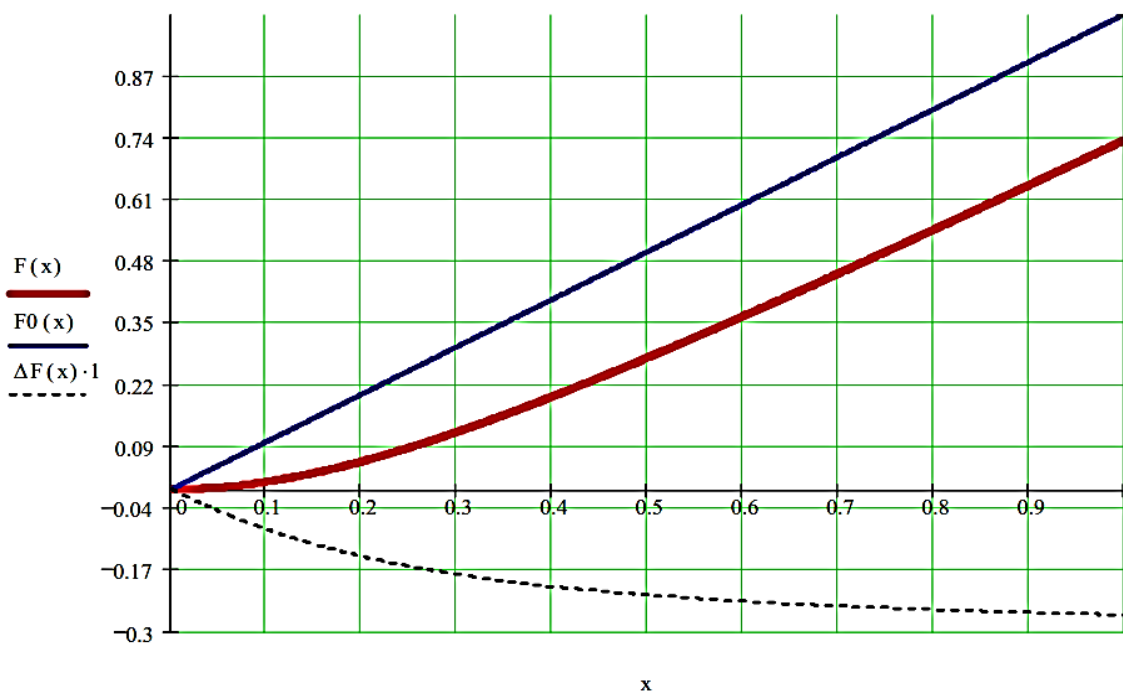


Рис. 2. Статична характеристика ЛПСКЗН

Приклад 2

Статична характеристика ЛПСКЗН за методом взаємно-зворотних перетворювань

Given

$$v_2 = k_1 \cdot v^2 \quad v_5 = k_2 \cdot v_3^2 \quad \sqrt{v_2 - v_5} \cdot K = v_3 \quad \text{- введення нелінійності типу } \sqrt{\quad} \text{ в канал підсилення}$$

$$v_3 := \text{Find}(v_2, v_5, v_3)_2$$

$$v_3 \rightarrow \left[k_1 \cdot \frac{v^2}{(k_2 \cdot K^2 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot K \quad \lim_{K \rightarrow \infty} v_3 \rightarrow \left(k_1 \cdot \frac{v^2}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{- вихідна напруга}$$

Передатна характеристика

$$k_1 := 0.016 \quad k_2 := 0.016 \quad K := 100$$

$$F(x) := \left[k_1 \cdot \frac{x^2}{(k_2 \cdot K^2 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot K \quad \text{- реальна характеристика перетворення}$$

$$F_0(x) := \left(k_1 \cdot \frac{x^2}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{- ідеальна лінеаризована характеристика перетворення}$$

$$\Delta F(x) := F(x) - F_0(x) \quad \text{- похибка від нелінійності}$$

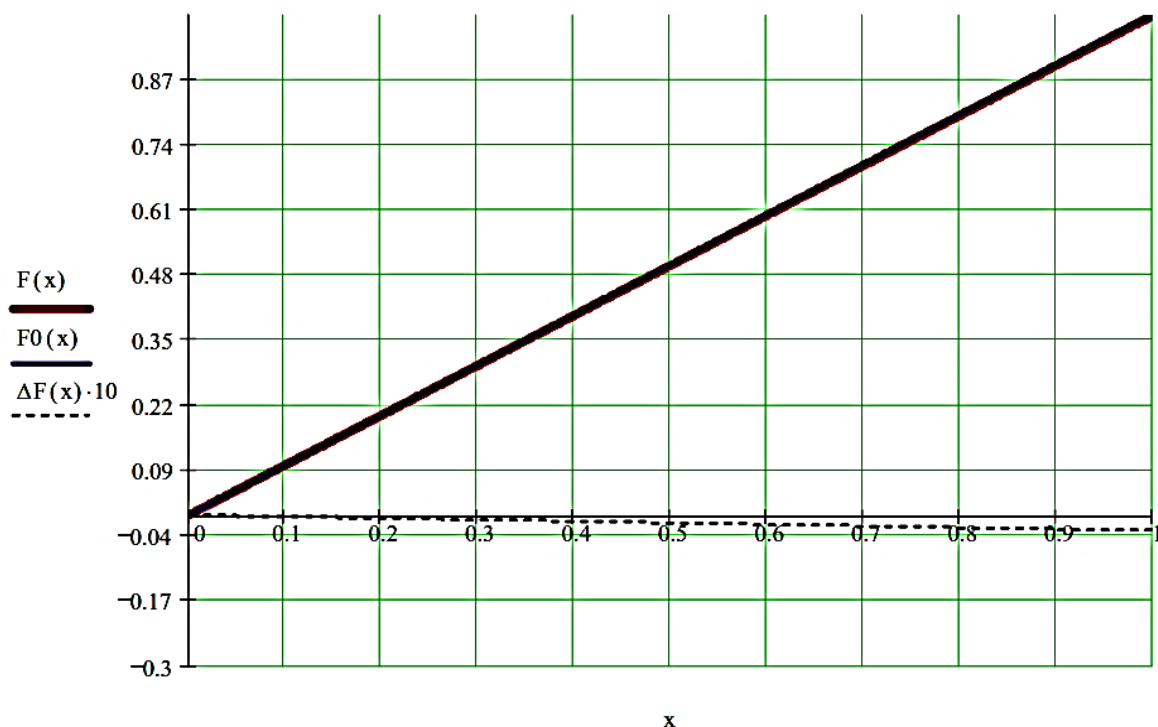


Рис. 3. Зменшення похибки нелінійності від статизму системи

Динамічний режим

Якщо розглядати окремий ТВБ в динамічному режимі, то час встановлення вихідної напруги дуже значний, що визначається великим за значенням τ . Метод взаємно-зворотних перетворень також дозволяє суттєво зменшити час встановлення вихідної напруги зі заданою точністю. Отже, розглянемо роботу схеми в динаміці.

Динамічну модель окремого ТВБ можна представити в спрощеному вигляді, як на рис. 4. Модель включає нелінійну квадратичну безінерційну частину (НЧ) та лінійну інерційну частину (ЛЧ), що має вигляд інерційної ланки першого порядку

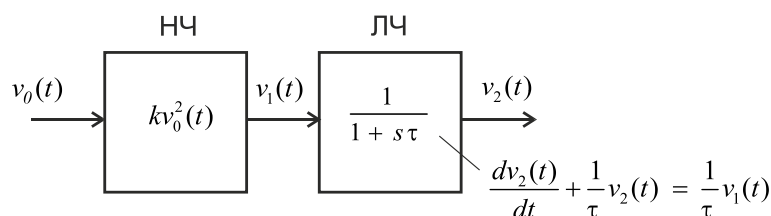


Рис. 4. Динамічна модель ТВБ

Динамічну модель всього ЛПСКЗН у вигляді структурної схеми наведено на рис. 5.

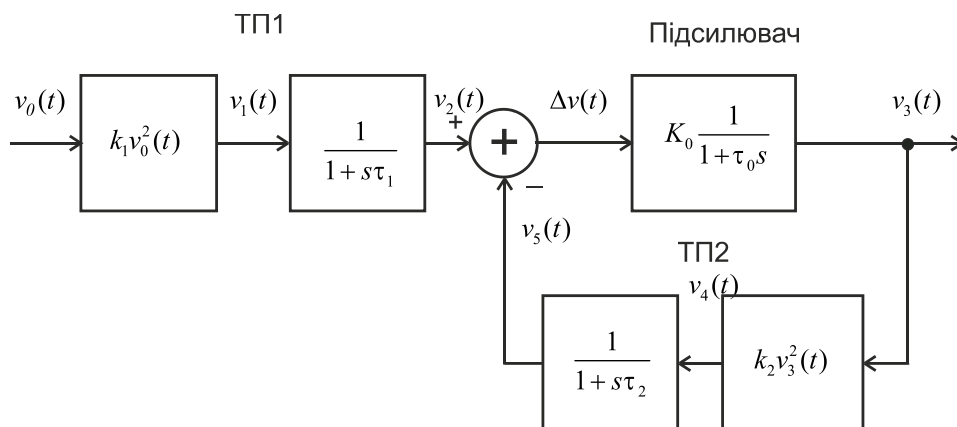


Рис. 5. Динамічна модель ЛПСКЗН за схемою рис. 1

Як бачимо, ЛПСКЗН включає нелінійну ланку в зворотному зв'язку, вплив якої при аналізі виокремити не можна. Тому таку схему неможна аналізувати операторним методом, як це робиться для лінійних систем.

Опишемо роботу схеми системою диференціальних першого порядку рівнянь за методом змінних стану. Модель підсилювача у прямому колі (рис. 1) має вигляд:

$$H(s) = K_0 \frac{1}{1 + \tau_0 s}.$$

Тому диференціальне рівняння, що описує підсилювач, буде наступним:

$$\frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{K_0}{\tau_0} \Delta v_{2,5}(t) - \frac{1}{\tau_0} v_3(t),$$

де $\Delta v_{2,5}(t) = v_2(t) - v_5(t)$ – вхідна напруга підсилювача; $v_3(t)$ – вихідна напруга підсилювача.

Диференціальне рівняння, яке описує напругу на виході ТП1:

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} v_1(t) - \frac{1}{\tau_1} v_2(t); \quad v_1(t) = k_1 v_0^2(t).$$

Диференціальне рівняння, яке описує напругу на виході ТП2:

$$\frac{dv_5(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2} v_4(t) - \frac{1}{\tau_2} v_5(t); \quad v_4(t) = k_2 v_3^2(t).$$

Отже, нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку в формі Коші має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} k_1 v_0^2(t) - \frac{1}{\tau_1} v_2(t); \\ \frac{dv_5(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2} k_2 v_3^2(t) - \frac{1}{\tau_2} v_5(t); \\ \frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{K_0}{\tau_0} [v_2(t) - v_5(t)] - \frac{1}{\tau_0} v_3(t). \end{cases} \quad \begin{cases} v_2(0) = 0; \\ v_5(0) = 0; \\ v_3(0) = 0. \end{cases}$$

Система містить одне *нелінійне* диференціальне рівняння відносно змінних стану. Початкові умови для змінних стану $v_2(t)$, $v_5(t)$, $v_3(t)$ приймаємо нульовими. Після розв'язку цієї системи відносно змінних $v_2(t)$, $v_5(t)$, $v_3(t)$ можна визначити вихідну напругу перетворювача $v_3(t)$, а також всі інші процеси в схемі.

Приклад 3. Фрагмент документа *Mathcad* з прикладом розв'язку системи наведено на рис. 6.

Приклад 4. На рис. 7 наведено зображення процесів в ЛПСКЗН в динамічному режимі (далі по тексту – "динаміка") при підключенні до джерела постійної напруги, якщо постійна часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с.

Отже, якщо ТП1 і ТП2 ідентичні за параметрами, то встановлення вихідної напруги ЛПСКЗН відбувається набагато раніше, ніж встановлення термо ЕРС окремих термоперетворювачів.

Приклад 5. На рис. 8 наведено динаміку ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги низької частоти $f = 10$ Гц (постійна часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с). Бачимо, що на низьких частотах виникають пульсації термо ЕРС із-за недостатньої інерційності ТП, які підсилюються та виникають на виході ЛПСКЗН.

Приклад 3

Дослідження динаміки лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги за методом взаємно-зворотних перетворень

TOL := 10⁻⁶

v0(t) := 0.7 - вхідна напруга ЛПСКЗН, В

Параметри підсилювача: K0 := 10000 fs := 1.592 - частота зрізу АЧХ підсилювача, Гц $\tau_0 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot fs}$ $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача, сек.	Параметри ТП1 і ТП2: $\tau_1 := 1.5$ k1 := 0.016 $\tau_2 := 1.5$ k2 := 0.016
---	--

Розв'язок

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- вектор початкових умов для змінних $V_2(t), V_5(t), V_3(t)$

- Розв'язок нормальної системи (в формі Коші) *нелінійних диференціальних рівнянь* першого порядку, складеної за методом змінних стану.

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{k1}{\tau1} \cdot v0(t)^2 - \frac{1}{\tau1} \cdot x_0 \\ \frac{k2}{\tau2} \cdot (x_2)^2 - \frac{1}{\tau2} \cdot x_1 \\ \frac{K0}{\tau0} \cdot (x_0 - x_1) - \frac{1}{\tau0} \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

- символний вектор правих частин системи *нелінійних диференціальних рівнянь* першого порядку.

$\frac{dv_2(t)}{dt}$
 $\frac{dv_5(t)}{dt}$
 $\frac{dv_3(t)}{dt}$

T := 10 - інтервал аналізу, сек.

Z := Rkadapt(x, 0, T, 10000, D) - Розв'язок системи *нелінійних диференціальних рівнянь* за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D) - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

Рис. 6. Математична модель ЛПСКЗН за методом взаємно-зворотних перетворень та її розв'язок

Приклад 4

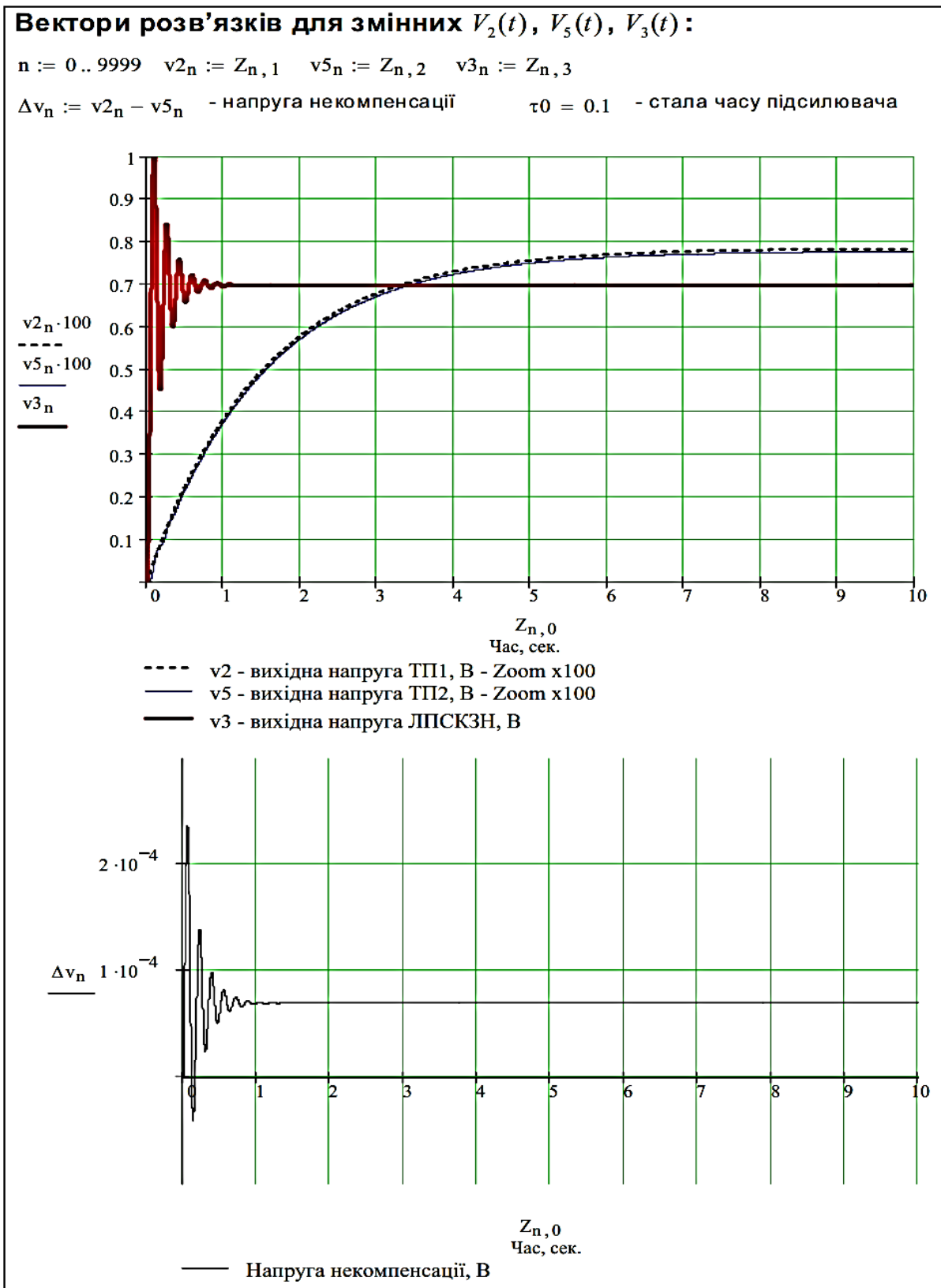


Рис. 7. Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела постійної напруги, якщо $K_0 = 1000$; $\tau_0 = 0,1$ с

Приклад 5

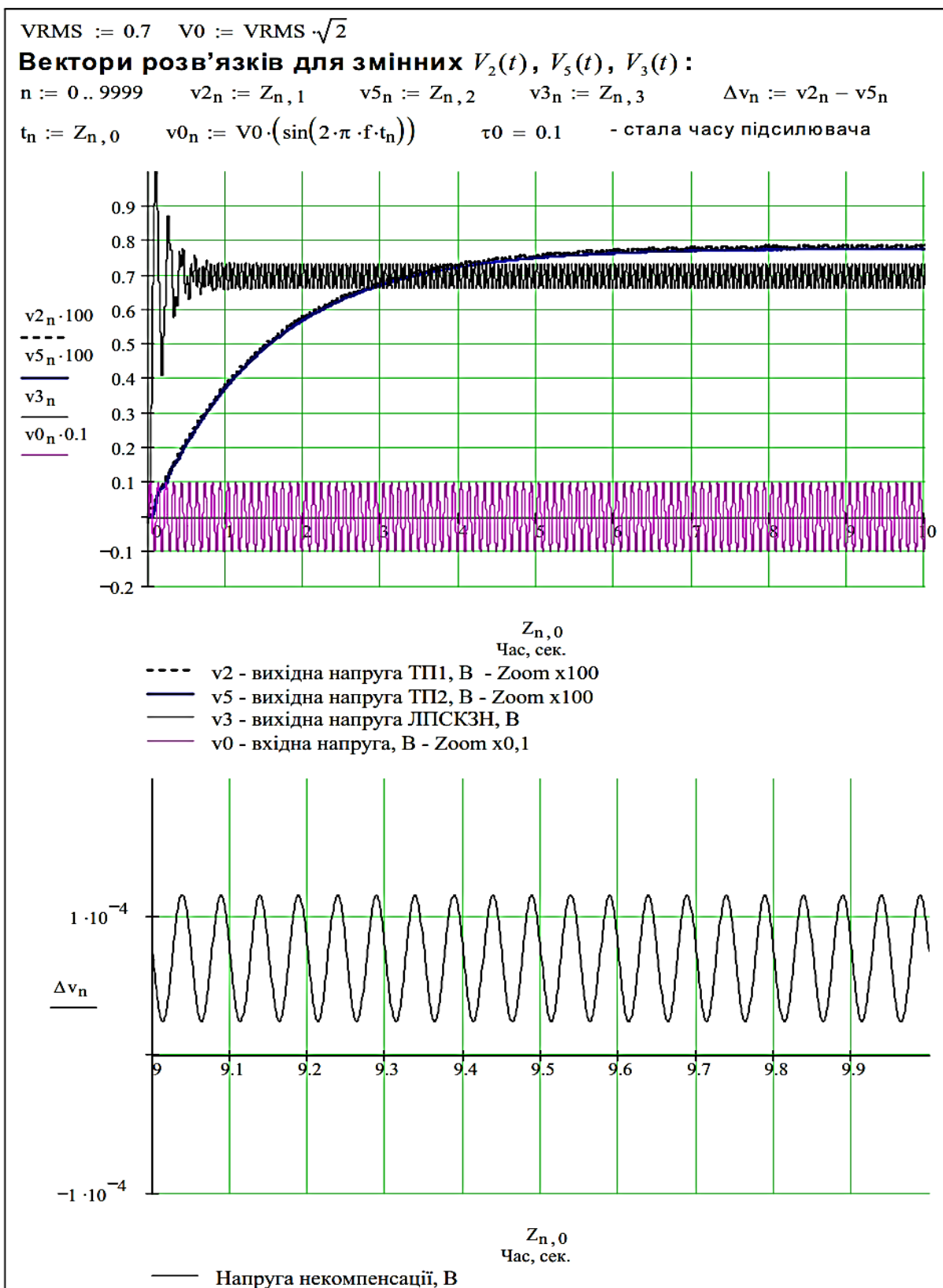


Рис. 8. Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10 \text{ Гц}$ ($K_0 = 1000$; $\tau_0 = 0,1 \text{ с}$)

Приклад 6

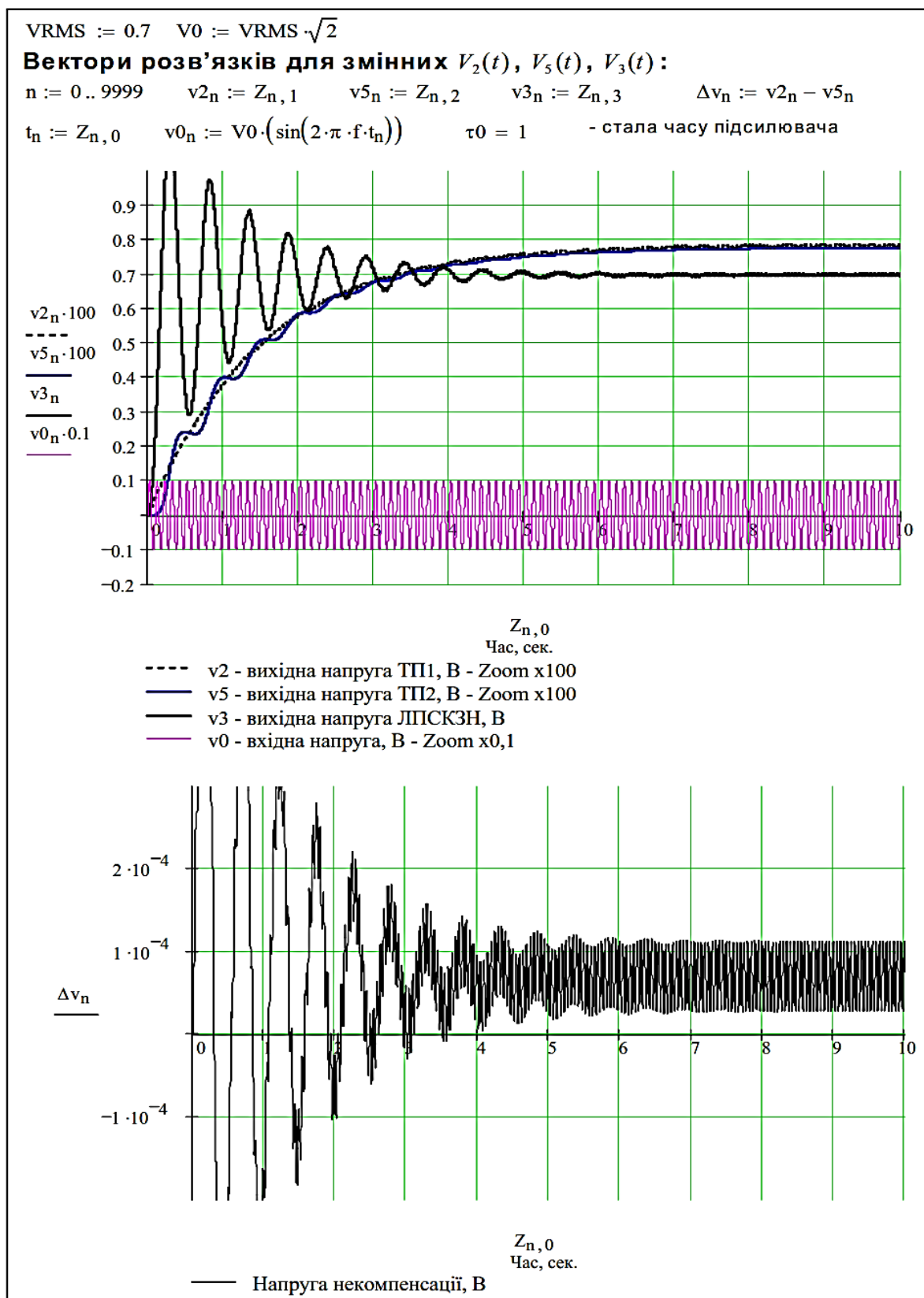


Рис. 9. Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10 \text{ Гц}$ ($K_0 = 1000$; $\tau_0 = 1 \text{ с}$)

Приклад 6. На рис. 9 наведено динаміку ЛПСКЗН при $f = 10$ Гц, якщо постійна часу підсилювача збільшити до $\tau_0 = 1$ с. Бачимо, що рівень напруги низькочастотних пульсацій на виході ЛПСКЗН зменшений, але це досягнуто за рахунок значного збільшення часу встановлення вихідної напруги.

Моделювання методу заглушення пульсацій на низьких та інфранизьких частотах за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь

Метод полягає в введенні додаткового каналу перетворення (рис. 10) на базі ТПЗ, на який подається сигнал, що має зсув за фазою на 90° відносно вхідного сигналу перетворювача, та в додаванні вихідних термо-ЕРС ТП1 і ТП3. Метод не знижує швидкодії самого лінійного перетворювача, але фазообертач "вносить" власний вплив в установлення вихідного сигналу ЛПСКЗН.

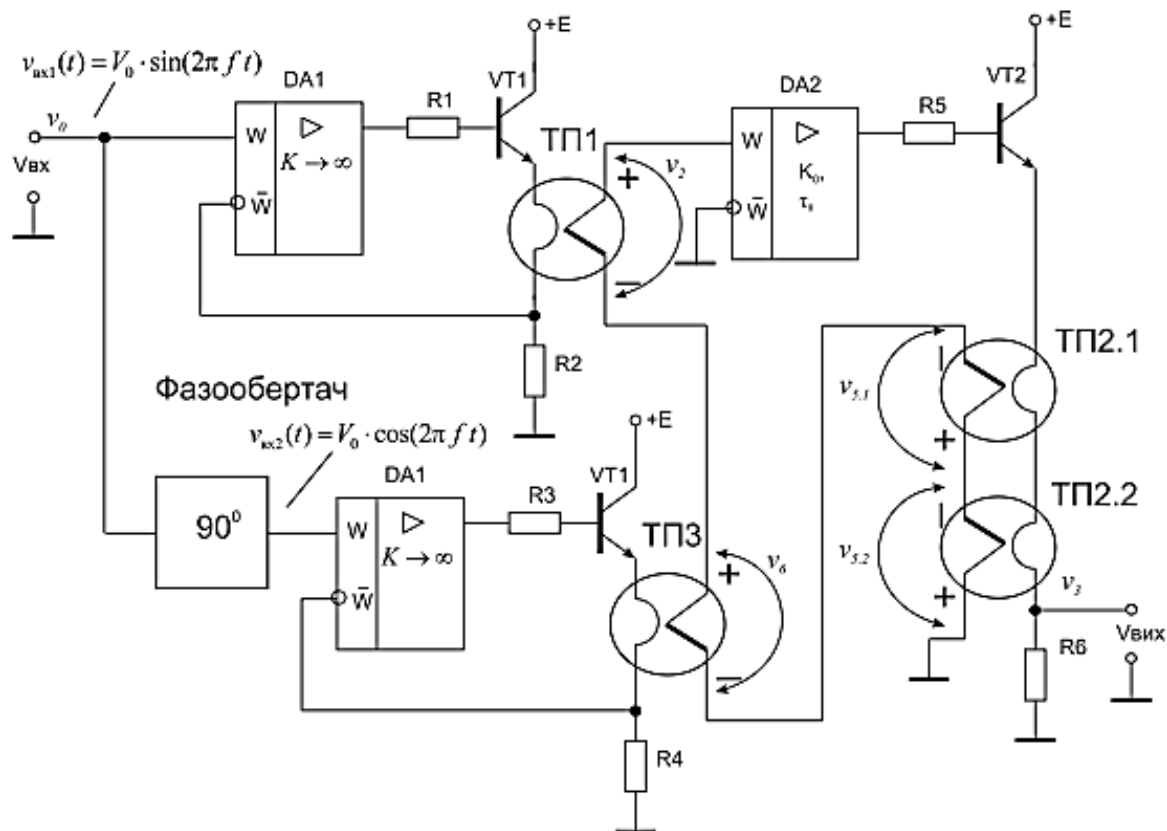


Рис. 10. Введення додаткового каналу корекції пульсацій термо-ЕРС на низьких частотах

Приклад 7

На рис. 11 наведено математичну модель ЛПСКЗН у вигляді системи диференціальних рівнянь, що описує схему в даному випадку. На рис. 12 наведено динаміку ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц (постійна часу $\tau_0 = 0,1$ с). Для наочності введена деяка неідентичність термоперетворювачів.

Дослідження методу корекції пульсацій на низьких частотах

TOL := 10^{-6}

VRMS := 0.7 V0 := VRMS $\cdot\sqrt{2}$ f := 10 v0(t) := V0 $\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)$ - вхідна напруга

$\phi := 0$ zk(t) := V0 $\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot f\cdot t + \frac{\pi}{180}\cdot\phi\right)$ - компенсуюча напруга

<p><u>Параметри підсилювача:</u></p> <p>K0 := 10000 fs := 1.5917 - частота зрізу АЧХ підсилювача, Гц</p> <p>$\tau_0 := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot fs}$ $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача, сек.</p>	<p><u>Параметри ТП1 і ТП2:</u></p> <p>$\tau_1 := 1.5$ k1 := 0.016</p> <p>$\tau_2 := 1.5$ k2 := 0.016</p> <p style="text-align: center;">Параметри ТП3 в коректуючому каналі</p> <p>$\tau_3 := 1.4$ k3 := 0.016</p>
---	--

Розв'язок

x := $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор початкових умов для змінних $V_2(t), V_5(t), V_3(t), V_6(t)$

- Розв'язок нормальної системи (в формі Коші) *нелінійних диференціальних рівнянь* першого порядку, складеної за методом змінних стану.

- символний вектор правих частин системи *нелінійних* диференціальних рівнянь першого порядку.

$\frac{dv_2(t)}{dt}$

$\frac{dv_5(t)}{dt}$

$\frac{dv_3(t)}{dt}$

$\frac{dv_6(t)}{dt}$

D(t,x) := $\begin{bmatrix} \frac{k_1}{\tau_1}\cdot v_0(t)^2 - \frac{1}{\tau_1}\cdot x_0 \\ \frac{k_2}{\tau_2}\cdot (x_2)^2 - \frac{1}{\tau_2}\cdot x_1 \\ \frac{K_0}{\tau_0}\cdot (x_0 - 2\cdot x_1 + x_3) - \frac{1}{\tau_0}\cdot x_2 \\ \frac{k_3}{\tau_3}\cdot zk(t)^2 - \frac{1}{\tau_3}\cdot x_3 \end{bmatrix}$

T := 10 - інтервал аналізу, сек.

Z := Rkadapt(x, 0, T, 10000, D) - **Розв'язок системи *нелінійних* диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком**

Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D) - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

Рис. 11. Математична модель ЛПСКЗН у випадку додаткового каналу корекції напруги пульсацій та її розв'язок

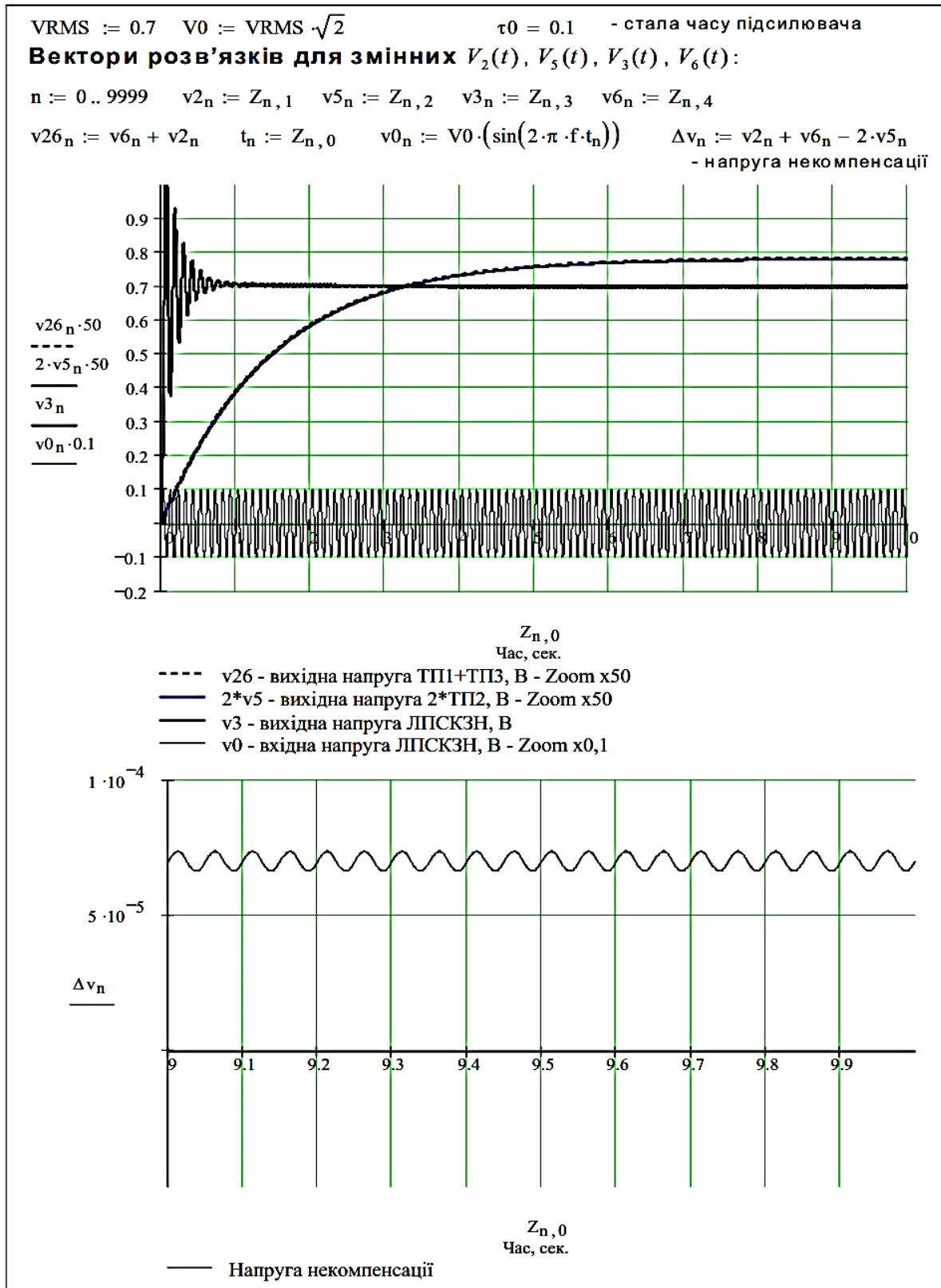


Рис. 12. Динаміка ЛПСКЗН з корекцією пульсацій при підключенні до джерела синусоїдальної напруги з $f = 10$ Гц (постійна часу $\tau_0 = 0,1$ с)

Бачимо, що напруга пульсацій в цьому випадку суттєво зменшується, в порівнянні тим, що наведено на рис. 8, при тій же швидкодії встановлення вихідної напруги ЛПСКЗН (постійна часу $\tau_0 = 0,1$ с).

За повної ідентичності ТП1 і ТП3 можна досягти повного заглушення пульсації термо-ЕРС (взаємно віднімаються) в різницевій напрузі некомпенсації, що подається на вхід підсилювача.

Операція "ковзкого" інтегрування

Розглянемо ще раз ЛПСКЗН (рис. 1), математичну модель якого у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь було наведено на рис. 6. Але тепер вихідна напруга ЛПСКЗН $v_3(t)$ вимірюється вольтметром інтегруючого типу, що виконує операцію «ковзкого» інтегрування, або проходить через ланку «ковзного» інтегрування.

Основна особливість цифрових інтегруючих вольтметрів, які вимірюють середнє значення напруги за час інтегрування T_{int} , полягає у їхній здатності заглушувати завади – як випадкові, так і періодичні. Так, для кожного довільного моменту часу t вихідна величина такого приладу $y(t)$ являє собою середнє значення (інтеграл) вхідної величини $x(t)$ за минулий інтервал T_{int} (інтервал інтегрування). Якщо вважати, що інтегральні відліки вхідної величини за минулий інтервал T_{int} одержуємо *неперервно* в часі (а не циклічно, що є характерним для цифрових вольтметрів у дійсності), то моделлю вихідної величини $y(t)$ може бути наступний інтеграл згортки, який ще звется "ковзким" інтегралом:

$$y(t) = \frac{1}{T_{\text{int}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h_{\delta}(t - \tau) d\tau = \frac{1}{T_{\text{int}}} \cdot \int_{t-T_{\text{int}}}^t x(\tau) d\tau,$$

де для довільного t залежність $h_{\delta}(t - \tau)$ від τ матиме вигляд (рис. 13).

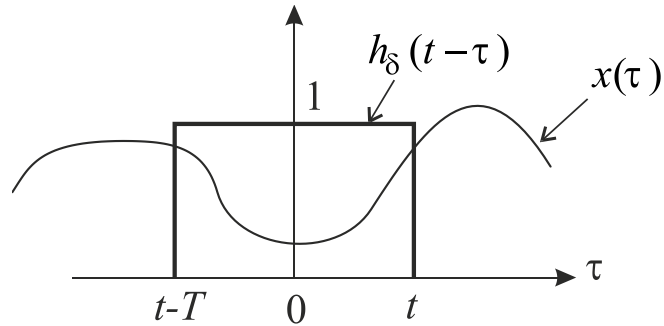


Рис. 13. Функції $h_{\delta}(t-\tau)$ і $x(\tau)$ для інтегратора з кінцевим часом інтегрування

Використання згортки є особливо ефективним при дослідженні систем, якщо їх імпульсні характеристики фінітні у часі. Такі системи не можна описати звичайними диференціальними рівняннями.

Нормована за амплітудою імпульсна характеристика ланки, що усереднює та реалізує операцію "ковзкого" інтегрування, матиме вигляд:

$$h_{\delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_{\text{int}}}, & 0 < t \leq T_{\text{int}}; \\ 0, & t < 0; t > T_{\text{int}}. \end{cases}$$

Приклад 8

Фрагмент документа Mathcad з використанням операції "ковзкого" інтегрування, що ілюструє ефект згладжування пульсацій вихідної напруги ЛПСКЗН $v_3(t)$ (частота входної напруги $f = 10$ Гц, стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с), наведено на рис. 14.

Системна функція, як перетворення Лапласа від $h_{\delta}(t)$, матиме вигляд:

$$H(s) = \frac{1 - e^{-s \cdot T_{\text{int}}}}{s \cdot T_{\text{int}}}.$$

Звідки, зробивши заміну $s = j\omega$, дістанемо:

$$H(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_{\text{int}}}}{j\omega \cdot T_{\text{int}}}.$$

Приклад 9

Амплітудну та фазову частотні характеристики ланки, що усереднює та реалізує операцію "ковзкого" інтегрування, наведено на рис. 15.

Отже, при часі інтегрування, кратному періоду завади, її заглушення прямує до нескінченності. Однак навіть при незначних відхиленнях частоти завади від її номінального значення коефіцієнт заглушення різко зменшується.

Тому при прецизійних вимірюваннях застосовуються спеціальні заходи для спостереження за часом інтегрування.

Висновки

1. Для суттєвого зменшення часу встановлення потрібно брати ТВБ з однаковими постійними часу та зменшувати постійну часу підсилювача.

2. Для зменшування похибки від нелінійності (а також від некомпенсації) потрібно вибрати великий коефіцієнт підсилювача, але це призводить до зменшення стійкості системи з замкнутим зворотним зв'язком і, в наслідок цього, виникненню коливального характеру перехідного процесу встановлення вихідної напруги.

3. При підключені до джерела напруги низької частоти виникають пульсації на виході перетворювача, обумовлені недостатньою інерційністю термперетворювачів. Щоб зменшити рівень пульсацій, потрібно збільшувати постійну часу підсилювача. Однак це веде до небажаного суттєвого збільшення часу встановлення вихідної напруги. Тому використовують деякі спеціальні методи, спрямовані на зменшення напруги пульсацій на низьких частотах. Проте на високих частотах зазначена проблема не з'являється взагалі.

Приклад 8

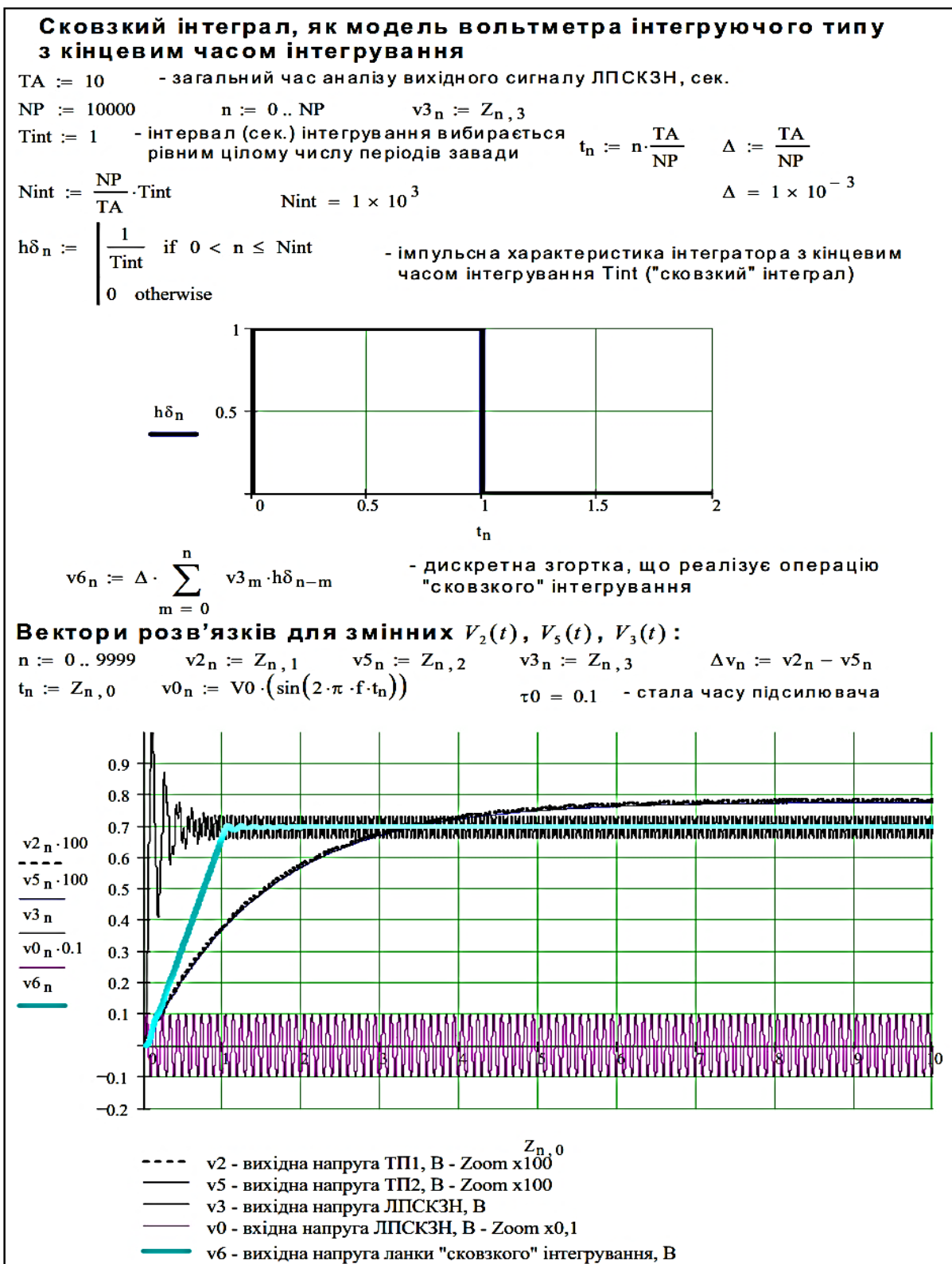


Рис. 14. Ефект згладжування пульсацій при вимірюванні вихідної напруги ЛПСКЗН вольтметром інтегруючого типу (підключення ЛПСКЗН до синусоїдальної напруги $f = 10$ Гц, постійна часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с)

Приклад 9

Логарифмічні амплітудна та фазова характеристики ланки "сковзкого" інтегрування

$H(s) := \frac{1 - e^{-s \cdot T_{int}}}{T_{int} \cdot s}$ - системна функція інтегратора з кінцевим часом інтегрування ("сковзкий інтеграл")

$B0 := \text{BodePlot}(H, 0.01, 20)$

$i := 0 \dots \text{last}(B0^{(0)}) \quad \text{last}(B0^{(0)}) = 4 \times 10^4$

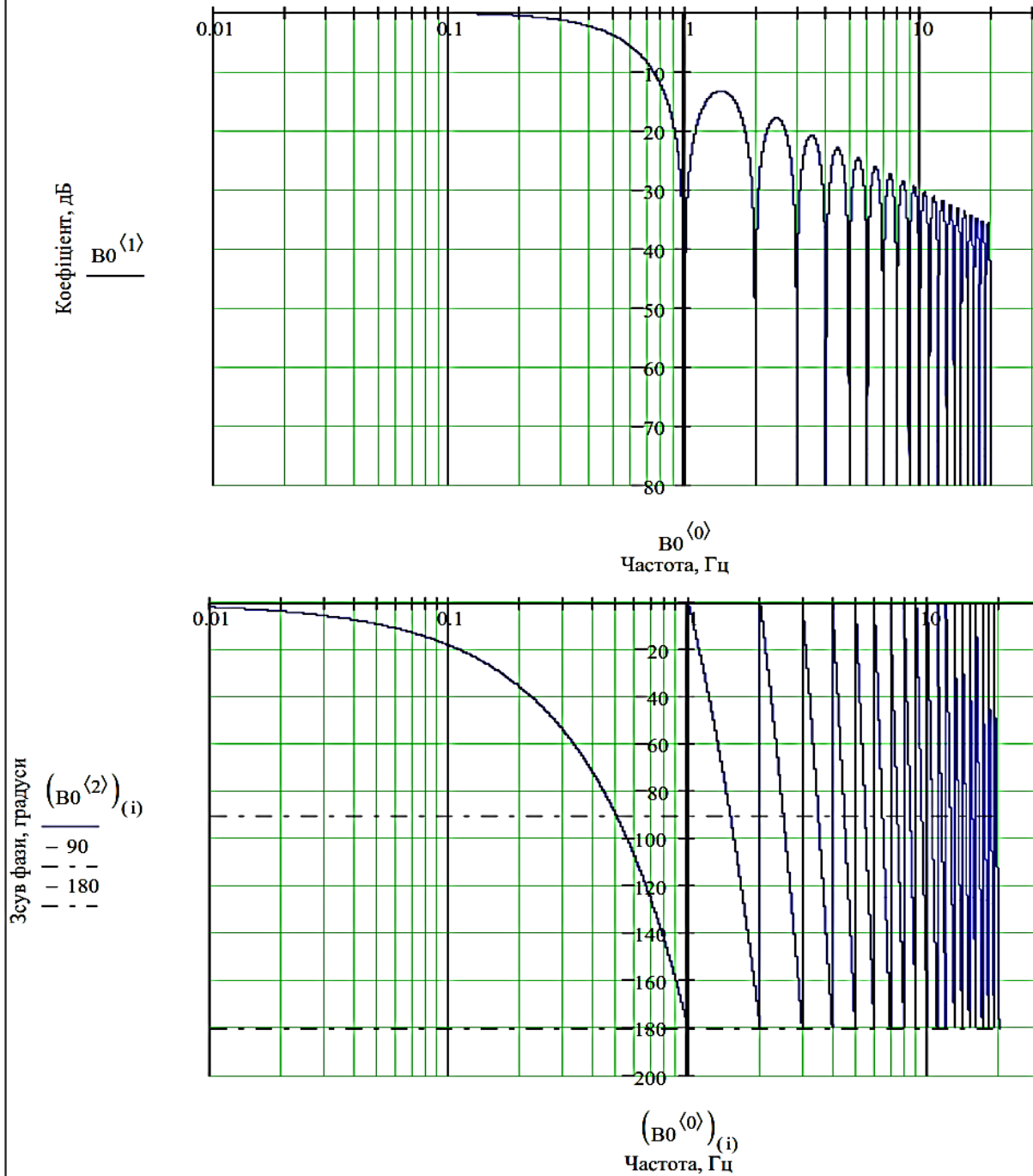



Рис. 15. Ефект нескінченного заглушення пульсацій на частотах, кратних $1/T_{int}$

Аналіз у середовищі програми Micro-Cap

Наведемо приклад моделювання ЛПСКЗН, схему якого зображено на рис. 1, в середовищі Micro-CAP. Складемо схему для моделювання (рис. 16).

Виберіть в меню команд **Analysis** режим **Transient ... (Alt+1)**.

У вікні **Transient Analysis Limits** (рис. 17) встановіть параметри моделювання.

Почніть моделювання (кнопка **Run** або клавіша **F2**, або ). Результати моделювання наведено на рис. 18.

Якщо диференціальні рівняння складені правильно, то результати аналізу в середовищі Mathcad та моделювання в середовищі Micro-CAP повинні збігатися.

Як бачимо, результати збігаються.

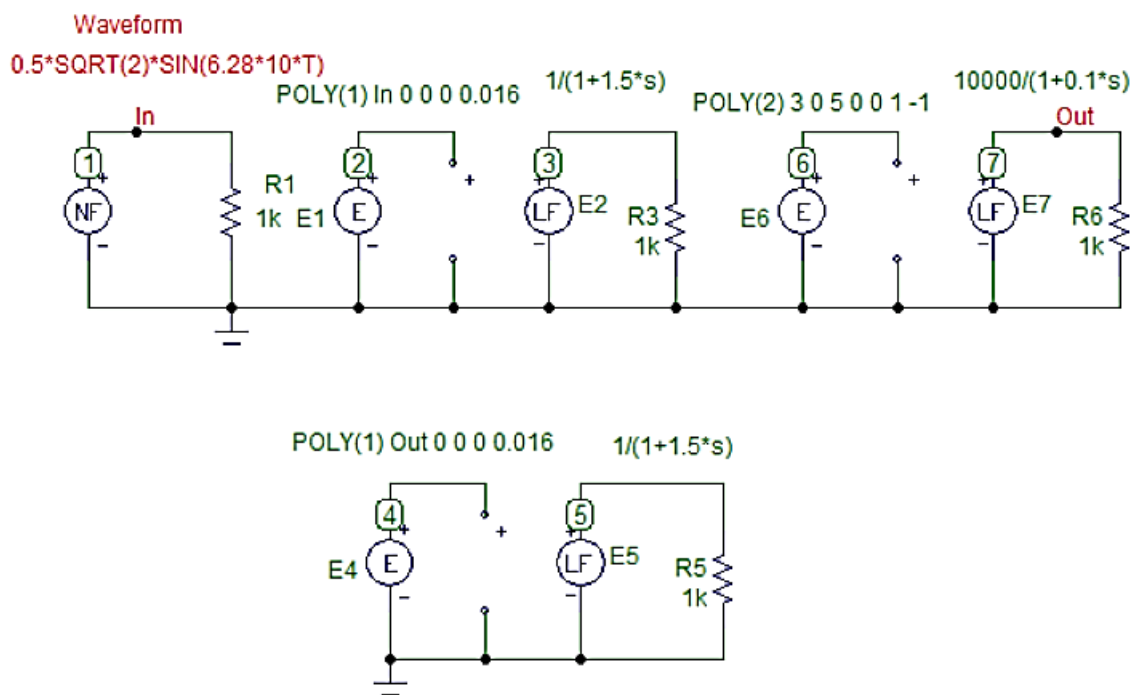


Рис. 16. Моделювання ЛПСКЗН в перехідному динамічному режимі при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц (параметри підсилювача $K_0 = 1000$; $\tau_0 = 0,1$ с)

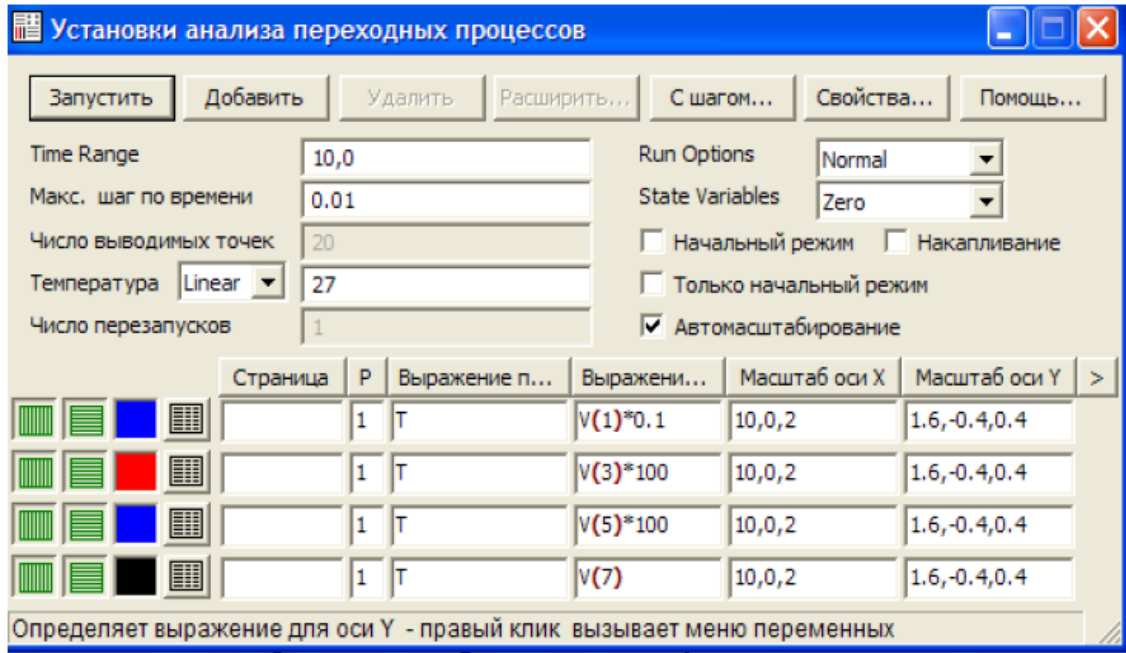


Рис. 17. Задання параметрів моделювання в режимі *Transient Analysis*

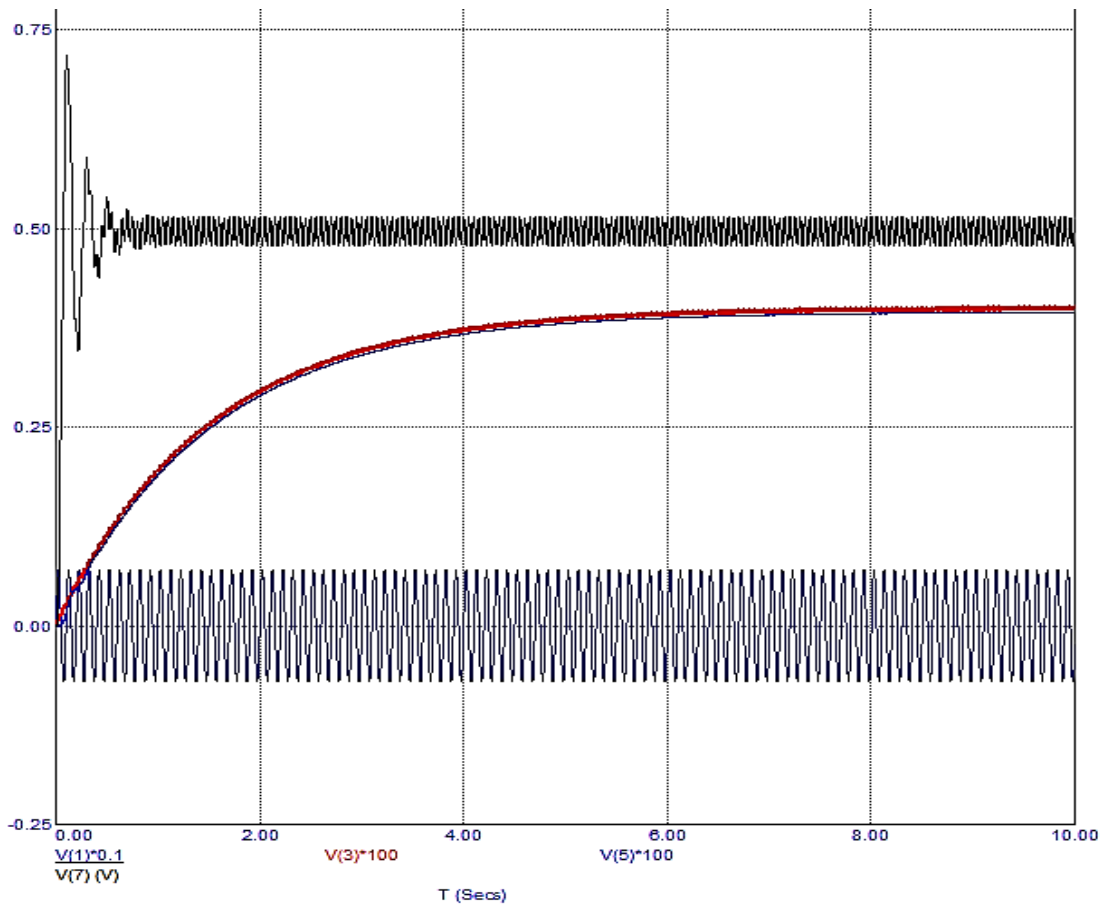


Рис. 18. Моделювання у часовій області

Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть визначення інерційного нелінійного кола.
2. Які особливості має аналіз інерційних нелінійних кіл від нелінійних кіл, що не мають інерційні елементи?
3. Чи можна використати операторний метод або метод інтегралів згортки для аналізу динамічних процесів у нелінійних інерційних колах?
4. Поясніть, чим відрізняється використання методу змінних стану для аналізу динамічних процесів у нелінійних колах від випадку лінійних кіл.
5. Які переваги має метод змінних стану перед приблизними методами щодо аналізу перехідних процесів у нелінійних колах?
6. Чи можна метод змінних стану застосувати для аналізу усталеного періодичного режиму в інерційних нелінійних колах?
7. Чи мають нелінійні диференціальні рівняння точний аналітичний розв'язок?
8. Поясніть математичну модель термо-перетворювача в динамічному режимі.
9. Поясніть суть методу взаємно-зворотних перетворень при побудові перетворювачів середньоквадратичних значень змінної напруги. Які характеристики перетворювача покращуються?
10. Чи можна використати метод взаємно-зворотних перетворень при побудові інших типів перетворювачів?
11. Як описати диференціальними рівняннями роботу перетворювача в динамічному режимі?
12. Наведіть систему диференціальних рівнянь лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги за методом взаємно-зворотних перетворень.
13. Чи можна аналізувати схему лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги операторним методом?
14. Якими параметрами характеризується динамічний режим роботи перетворювача?
15. Назвіть методи покращення динамічних характеристик

перетворювача.

16. *Наведіть систему нелінійних диференціальних рівнянь перетворювача, який побудовано за методом заглушення пульсацій на інфранизьких частотах.*

17. *Наведіть математичну модель ланки «ковзкого» інтегрування.*

18. *Які частотні характеристики має ланка «ковзкого» інтегрування? Яка мета операції «ковзкого» інтегрування?*

РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

ТЕМА 6. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Лекція 13. Частотний аналіз лінійних кіл.

Метод асимптотичних діаграм Бode

Частотні характеристики кіл. Нуль-полосне зображення комплексної частотної функції (КЧФ). Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ). Логарифмічна фазочастотна характеристика (ЛФЧХ). Метод асимптотичних діаграм Бode. Частотний годограф. Дослідження кіл у частотній області в середовищі Mathcad. Частотний аналіз в середовищі Міcro-CAP. Контрольні запитання та завдання.

Частотні характеристики кіл.

Комплексна частотна функція (КЧФ)

Для опису кола в частотній області (область комплексної змінної s) важливою характеристикою є його системна функція $H(s)$. Зробивши заміну s на $j\omega$, можна отримати аналітичний вираз для *комплексної частотної характеристики* $H(j\omega)$ (іноді характеристику називають *комплексною частотною функцією* КЧФ) кола в *усталеному режимі при гармонічному вхідному сигналі*.

Таким чином, для $s = j\omega$ системна функція має наступну інтерпретацію. Якщо вхідним сигналом ЛПЧ-кола є комплексна експонента $\dot{X} e^{j\omega t}$, а усталений вихідний сигнал є комплексною експонентою $\dot{Y} e^{j\omega t}$, то

$$\frac{\dot{Y} e^{j\omega t}}{\dot{X} e^{j\omega t}} = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = H(j\omega), \quad (1)$$

де $H(j\omega)$ – системна функція, яка зв'язує вхід з виходом. Іншими словами, вхідний сигнал $\dot{X} e^{j\omega t}$ після затухання перехідних процесів дає усталену реакцію в вигляді $\dot{X} \cdot H(j\omega) e^{j\omega t}$.

Нехай вхідний сигнал $v_0(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, $-\infty < t < +\infty$. Тоді можна застосовувати співвідношення $\cos(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \varphi_0)}]$. Оскільки коло лінійне та інваріантне в часі, ми можемо визначити його реакцію, знайшовши спочатку реакцію на $v_0(t) = V_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}$, і потім виділити її дійсну частину. Тому усталеною реакцією ЛПЧ-кола на $v_0(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}[V_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}]$ буде:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \operatorname{Re}[H(j\omega)V_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}] = \\ &= V_0 |H(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi_0 + \arg H(j\omega)], \quad -\infty < t < +\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

де φ_0 – початкова фаза, ω – кутова частота вхідної гармонічної дії.

Отже, усталену реакцію ЛПЧ-кола на гармонічний сигнал довільної частоти можна описати за допомогою зображень на осі частот амплітудної і фазової компонентів його комплексної частотної характеристики $H(j\omega)$.

Нуль-полюсне зображення комплексної частотної функції (КЧФ)

Відомо, що для ЛПЧ-кола зі зосередженими параметрами системна функція $H(s)$ майже завжди може бути представлена у вигляді:

$$H(s) = K \frac{(s - s_{z1})(s - s_{z2}) \dots (s - s_{zm})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pn})}, \quad (3)$$

тобто повністю визначена (з точністю до постійного множника) коренями поліномів чисельника і знаменника – нулями s_{zi} і полюсами s_{pi} . Отже,

$$|H(j\omega)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m |j\omega - s_{zi}|}{\prod_{i=1}^n |j\omega - s_{pi}|}, \quad (4)$$

$$\arg H(j\omega) = \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - s_{zi}) - \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - s_{pi}). \quad (5)$$

Це дає змогу, задаючи значення частоти ω , обчислювати значення модуля $|H(j\omega)|$ і аргументу $\arg H(j\omega)$ КЧФ $H(j\omega)$ у кожній точці частотного діапазону. При цьому взаємне розташування нулів і полюсів системної функції

в комплексній s -площині містить важливу інформацію – визначає частотні властивості ЛПЧ-кіл.

Розглянемо RC -коло *першого* порядку (рис. 1).

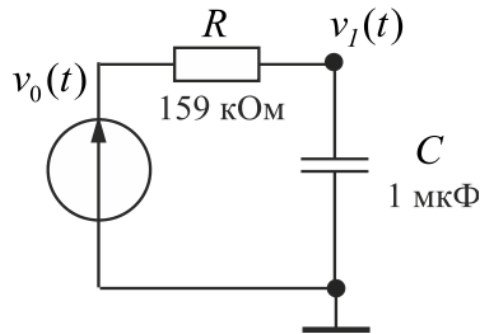


Рис. 1. RC -фільтр нижніх частот

Системна функція кола дорівнює:

$$H(s) = \frac{1}{sC} / \left(R + \frac{1}{sC} \right) = \frac{1}{1 + sCR}. \quad (6)$$

Зробивши заміну $s = j\omega$, отримаємо аналітичний вираз для КЧФ кола:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad (7)$$

де $\tau = CR$ – стала часу кола, має розмірність секунди (с).

Визначення. Залежність від частоти відношення амплітудних або ефективних значень гармонічної реакції та входної дії в усталеному режимі називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) ЛПЧ-кола чи системи.

Амплітудно-частотна характеристика визначається модулем $|H(j\omega)|$ комплексної частотної функції $H(j\omega)$. Для кола на рис. 1 АЧХ описується виразом:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}. \quad (8)$$

На частоті, яка визначена як *частота зрізу* АЧХ, модуль $|H(j\omega)|$ зменшується у $\sqrt{2}$ разів. При цьому для кіл першого порядку з характеристикою вигляду (6) виконується рівність $\omega_{зр}\tau = 1$. Тоді частота зрізу АЧХ кола на рис. 1 дорівнюватиме $\omega_{зр} = 1/\tau$. Кутова частота ω має розмірність рад/с. Циклічна частота $f = \frac{1}{T}$ має розмірність s^{-1} або Герц (Гц).

Враховуючи, що $\tau = 1/\omega_{зр}$ і $\omega = 2\pi f$, формулу (6) можна подати в іншому вигляді:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_{зр})^2}}, \quad (9)$$

де $f_{зр}$ – частота зрізу, виражена в Гц. Частота зрізу АЧХ кола, зображеного на рис. 1, дорівнює $f_{зр} = 1/2\pi CR = 1$ Гц. Графік АЧХ у лінійному масштабі зображено на рис. 2. Модуль частотної характеристики $|H(j\omega)|$ кола – безрозмірна величина.

При лінійному масштабі по осі ω графіки частотних характеристик змінюються дуже швидко на низьких частотах і повільно – на високих частотах. Тому в практичних розрахунках використовують *логарифмічні частотні характеристики* (ЛЧХ).

Приклад 1

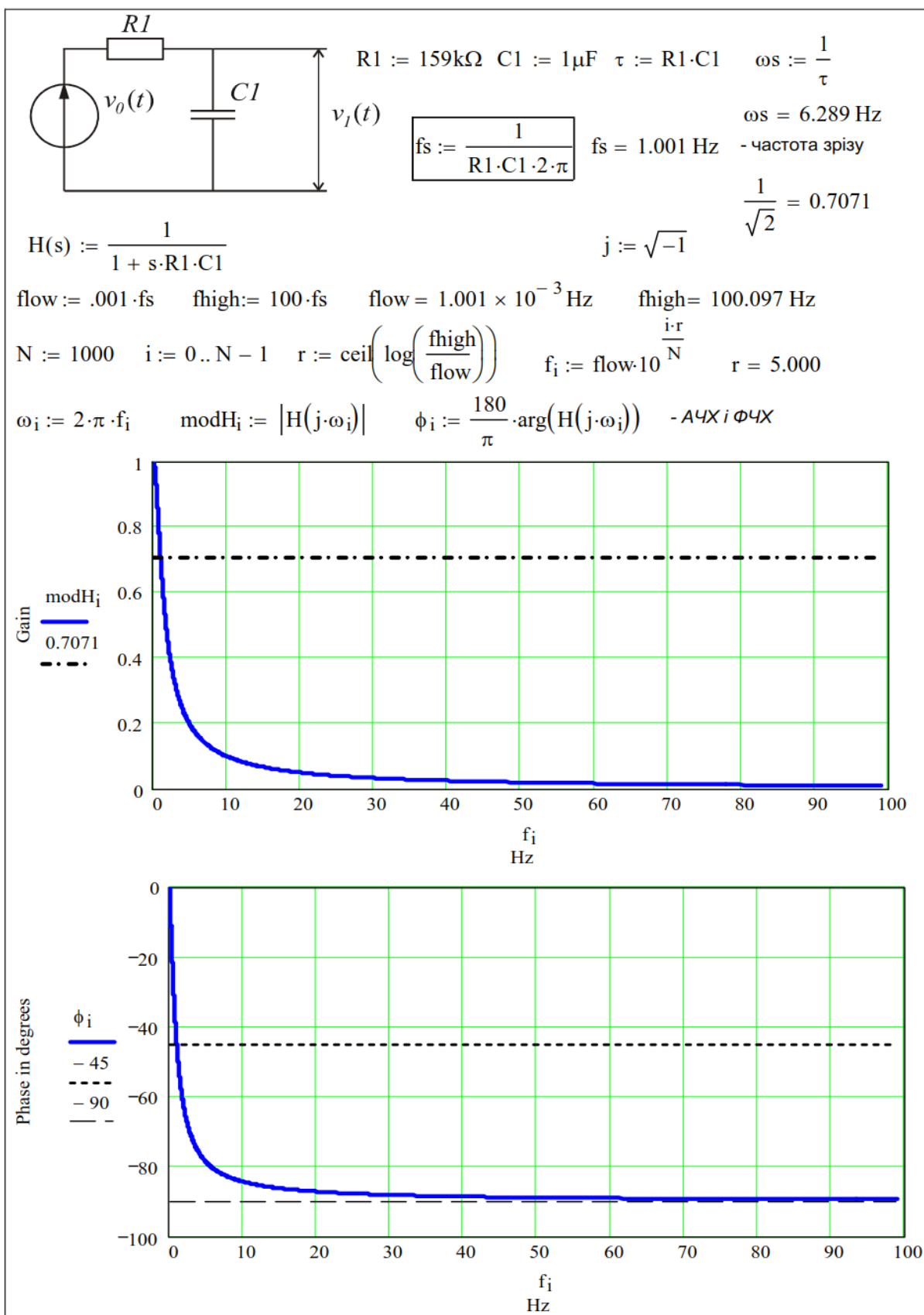


Рис. 2. Надання частотних характеристик у лінійному масштабі

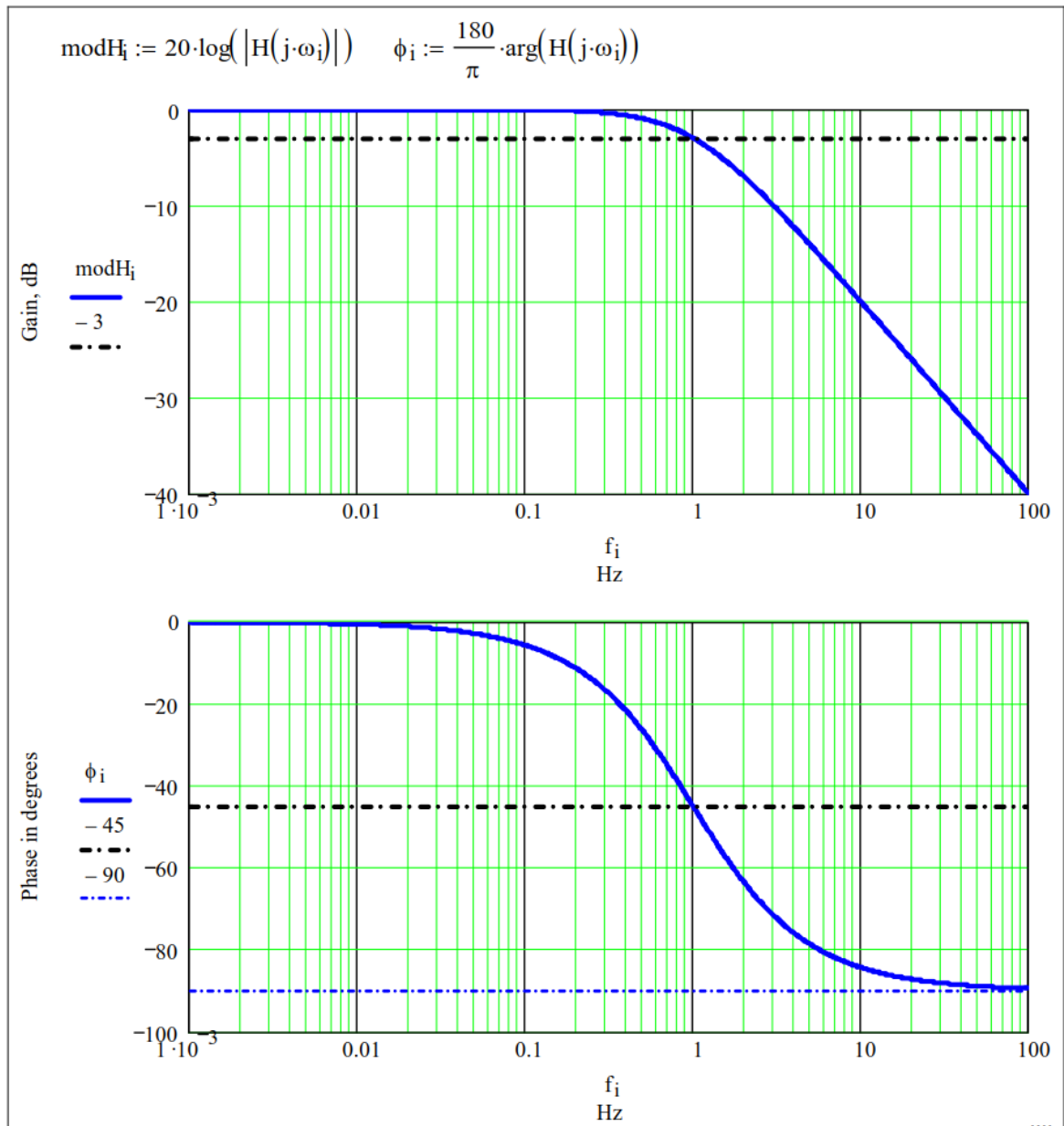


Рис. 3. Надання частотних характеристик у логарифмічному масштабі

* * *

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) (розмірність децибелі, дБ):

$$|H(j\omega)|, [\text{дБ}] = 20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|. \quad (10)$$

По осі частот також використовується логарифмічний масштаб, тобто величина $20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|$ розглядається в залежності від $\log_{10} \omega$. Графік АЧХ кола в подвійному логарифмічному масштабі зображено на рис. 3.

При такому зображенні АЧХ (дБ в залежності від $\log_{10} \omega$) може бути представлена двома *асимптотами*: у вигляді горизонтальної лінії на рівні 0 дБ для нижніх частот ($\omega \ll \omega_{\text{зр}}$) і похилої лінії з нахилом -6 дБ на *октаву* (коефіцієнт 2) або -20 дБ на *декаду* (коефіцієнт 10) для верхніх частот ($\omega \gg \omega_{\text{зр}}$). Ці дві асимптоти перетинаються в точці $\omega_{\text{зр}} = 1/\tau$, яка називається точкою перелому. Відхилення $20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|$ від асимптот складає приблизно -3 дБ ($\approx 20 \cdot \log_{10}(1/\sqrt{2})$) на частоті $\omega_{\text{зр}} = 1/\tau$ і близько -1 дБ ($\approx 20 \cdot \log_{10}(1/\sqrt{5/4})$) при зміні частоти на октаву в кожен із сторін від точки зламу ($\omega = 2/\tau$ і $\omega = 1/2\tau$).

Логарифмічна фазочастотна характеристика (ЛФЧХ)

Визначення. Залежність від частоти різниці початкових фаз гармонічних реакції та вхідної дії в усталеному режимі називається фазочастотною характеристикою (ФЧХ) ЛПЧ-кола чи системи.

Фазочастотна характеристика $\varphi(\omega)$ визначається аргументом комплексної частотної функції $H(j\omega)$. Для кола, зображеного на рис. 1, ФЧХ має вигляд:

$$\varphi(\omega) \equiv \arg H(j\omega) = -\arctg(\omega\tau) = -\arctg(f/f_{\text{зр}}). \quad (11)$$

Розмірність фази – радіани або градуси. Залежність $\arg H(j\omega)$ від $\log_{10} \omega$ називається *логарифмічною фазочастотною характеристикою* (ЛФЧХ). Фазовий зсув $\varphi(\omega)$ по осі ординат відкладають в лінійному масштабі. Графік логарифмічної ФЧХ кола, що на рис. 1, зображено на рис. 3. Фазова

характеристика змінюється плавно від 0° при $\omega=0$ до -90° при $\omega=\infty$, приймаючи значення -45° при $\omega_{зр} = 1/\tau$.

Згідно з виразом (2), для певної частоти ω гармонічного вхідного сигналу амплітуда гармонічної реакції ЛПЧ-кола або системи дорівнює добуткові значення АЧХ на цій частоті та амплітуди вхідної дії

$$V_{m1} = V_0 \cdot |H(j\omega)|,$$

а початкова фаза тієї самої реакції дорівнює сумі значення ФЧХ на частоті ω та початкової фази дії

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi(\omega) = \varphi_0 + \arg H(j\omega).$$

Частотний годограф

Визначення. Лінія в комплексній площині, яка утворюється точками графіку $H(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ , зветься годографом, або амплітудно-фазовою характеристикою (АФХ) ЛПЧ-кола чи системи.

Годограф будується як параметрична функція частоти $\omega \in [0, \infty)$ за значеннями будь-якої з пар характеристик $\{A(\omega), \varphi(\omega)\}$ або $\{P(\omega), Q(\omega)\}$. З математичної точки зору, годограф є відображенням на комплексну площину верхньої половини уявної осі площини s через функцію $H(j\omega)$.

Метод асимптотичних діаграм Боде ²⁹⁾

Для випадку, коли всі *полюси і нулі* $H(s)$ дійсні, існує зручний технічний прийом – метод *асимптотичних діаграм Боде*, який дозволяє за допомогою асимптот і прямолінійної апроксимації (за моделями типових динамічних ланок) швидко зобразити амплітудну $|H(j\omega)|$ і фазову $\arg H(j\omega)$ характеристики будь-якого ЛПЧ-кола. Отже, якщо всі полюси і нулі знаходяться на дійсній осі, то $H(s)$ можна записати так:

²⁹⁾ В англійській технічній літературі логарифмічні характеристики зветься діаграмами Боде (Siebert, W. McC. *Circuits, Signals, and Systems*. Cambridge, Mass.: MIT Press; New York: McGraw-Hill Book Company, 1986).

$$H(s) = H(0) \cdot \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots}{(1 + \tau_3 s)(1 + \tau_4 s) \dots},$$

де τ_i – стала часу, яка відповідає полюсу чи нулю. Зробивши заміну $s = j\omega$ та злогарифмувавши цей вираз, дістанемо:

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j\omega)| &= \\ &= 20 \log_{10} H(0) + 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_1| + 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_2| + \dots \quad (12) \\ &\dots - 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_3| - 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_4| - \dots ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg H(j\omega) &= \arg(1 + j\omega\tau_1) + \arg(1 + j\omega\tau_2) + \dots \\ &\dots - \arg(1 + j\omega\tau_3) - \arg(1 + j\omega\tau_4) - \dots . \end{aligned} \quad (13)$$

Тому, якщо ми знаємо асимптотичні логарифмічні амплітудні і фазові характеристики окремих членів $(1 + j\omega\tau)$, то за картою нулів і полюсів системної функції можна швидко побудувати амплітудну та фазову характеристики будь-якої $H(j\omega)$, які будуть давати з належною точністю кусково-лінійну графічну апроксимацію реальних ЛЧХ. Ці характеристики є корисними для попереднього оцінювання частотних властивостей кіл чи систем.

Логарифмічні амплітудну і фазову частотні характеристики (ЛАЧХ і ЛФЧХ) ланки $(1 + j\omega\tau)$ та їх кусково-лінійні апроксимації за допомогою асимптот зображено на рис. 4.

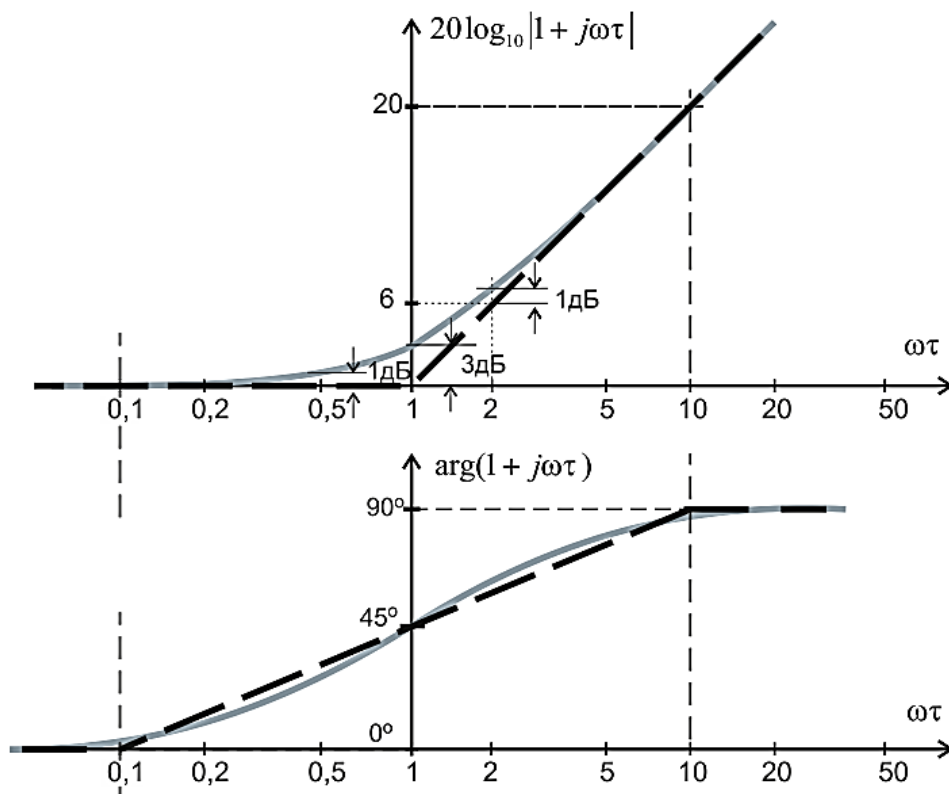


Рис. 4. ЛАЧХ і ЛФЧХ динамічної ланки $(1 + j\omega\tau)$

Приклад 2

Як показує наступний приклад, цей метод легко поширюється на особливі випадки, коли $H(s)$ має полюси або нулі при $s=0$. В якості ілюстрації застосування метода асимптотичних діаграм Бode візьмемо коло, зображене на рис. 5.

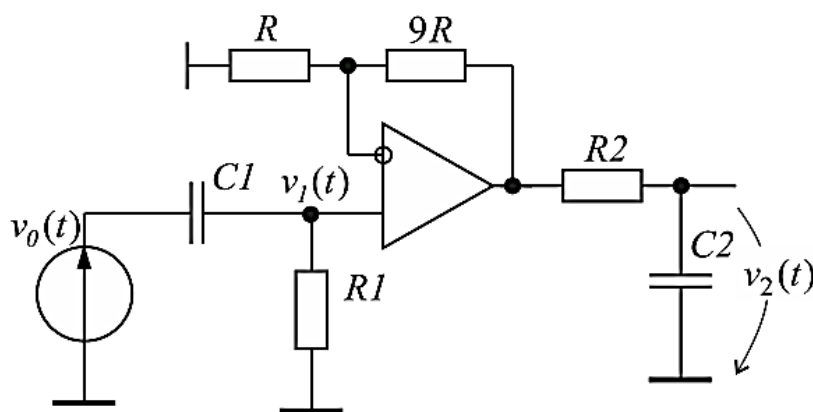


Рис. 5. Смуговий фільтр (СФ) з дійсними полюсами

Припустимо, що операційний підсилювач ідеальний. Тоді системна функція СФ дорівнює:

$$H(s) = \frac{v_2(s)}{v_0(s)} = 10 \frac{R_1 \cdot C_1 \cdot s}{(R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1)(R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1)} =$$

$$= 10 \frac{\tau_1 \cdot s}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)} = 10 \frac{1 \cdot s}{(s + 1)(0,1 \cdot s + 1)},$$

де $R_1 = 1 \text{ МОм}$; $R_2 = 100 \text{ кОм}$; $C_1 = 1 \text{ мкФ}$; $C_2 = 1 \text{ мкФ}$.

Отже, полюси системної функції СФ дійсні. ЛАЧХ матиме вигляд:

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} |j\omega| - 20 \log_{10} |1 + j\omega \cdot 1| - 20 \log_{10} \left| 1 + j\omega \cdot \frac{1}{10} \right|$$

Асимптоти кожної складової ЛАЧХ (окремі ланки фільтру) зображено в верхній частині рис. 6. В нижній частині рис. 6 суцільною лінією зображена апроксимація дійсної частотної характеристики СФ.

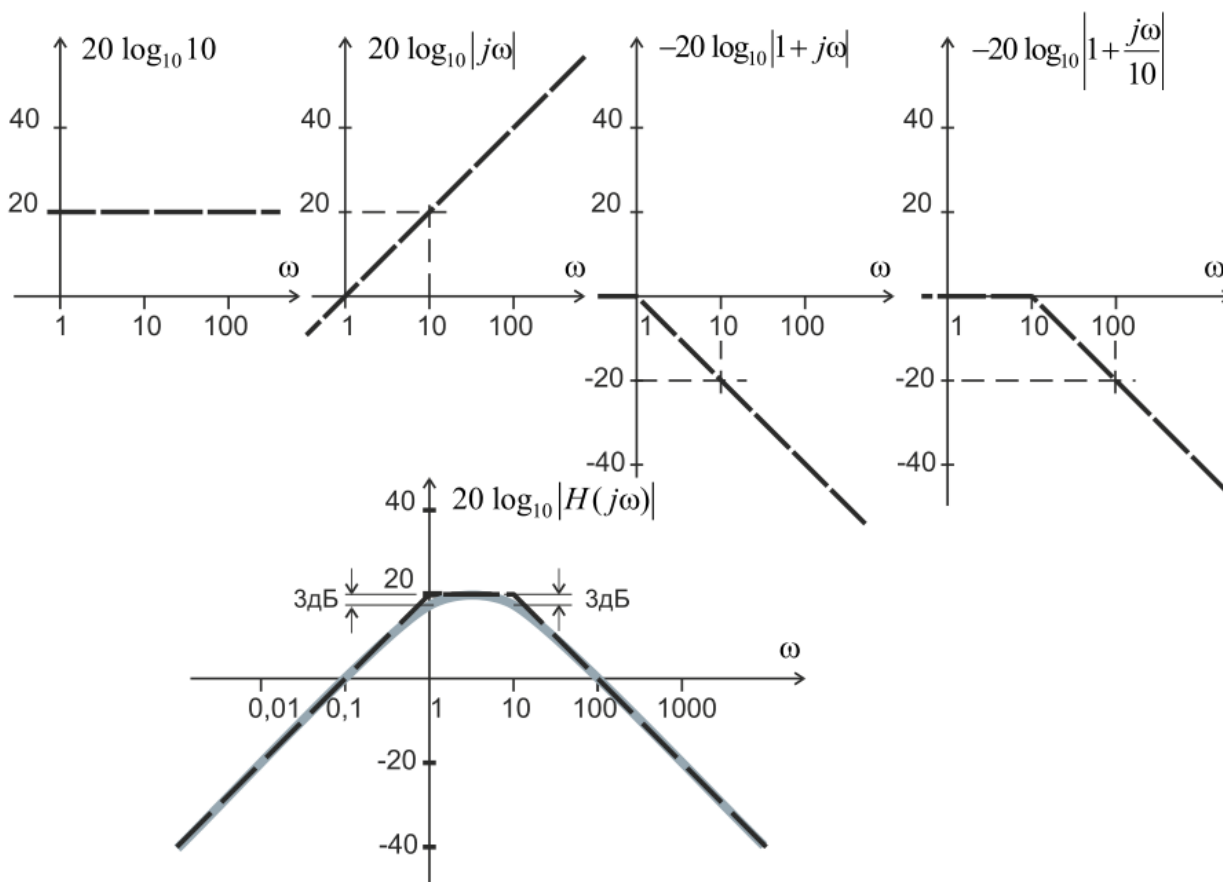


Рис. 6. Метод побудови асимптот діаграми Бодє (ЛАЧХ)

Відповідна фазова характеристика та асимптоти окремих ланок СФ зображено на рис. 7.

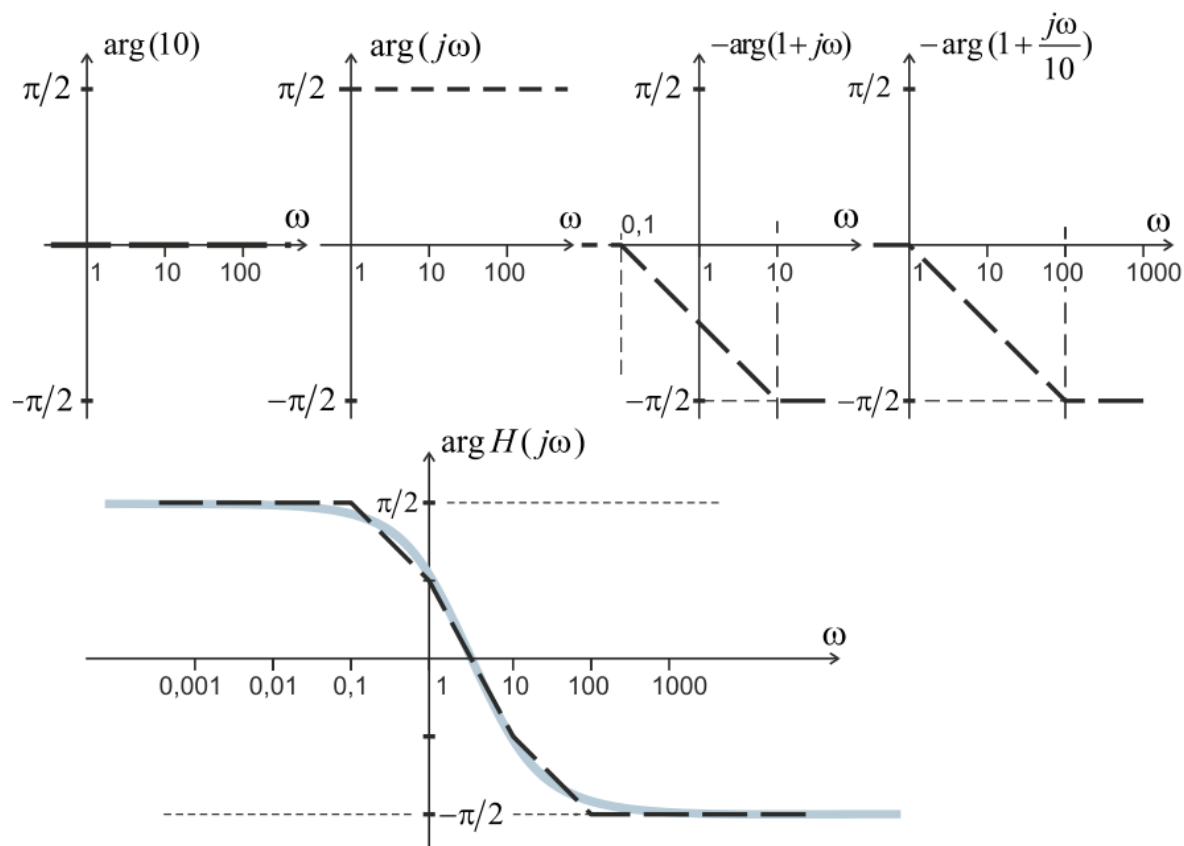


Рис. 7. Метод побудови асимптот діаграми Бодє (ЛФЧХ)

* * *

Якщо коло другого порядку, наприклад з властивостями фільтра нижніх частот

$$H(j\omega) = \frac{K_0 \omega_p^2}{(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + \omega_p^2}$$

має комплексно-спряжені полюси $s_{p1,p2} = -\alpha_p \pm j\sqrt{\omega_\delta^2 - \alpha_p^2} = -\alpha_p \pm j\omega_\delta \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q_p)^2}}$

($\alpha_p < \omega_p$), то логарифмічні частотні характеристики будуть інакше.

У цьому випадку передатну функцію не можна розбивати на окремі ланки першого порядку, тому ЛЧХ будують цілком. Асимптоту, яку проводять через точку $\omega = \omega_p$ (точка зламу), на високих частотах має нахил -40 дБ/дек. Але

при наближенні $\omega \rightarrow \omega_p$ вже при значеннях $Q_p > 2$, де $Q_p = \omega_p / 2\alpha_p$ – добротність полюсів, АЧХ може мати великий резонансний викид $|H(j\omega)|_{\max} \approx K_0 Q_p$. В цьому випадку спрощена кусково-лінійна апроксимація асимптотами дає значну *похибку* наближення.

Відмітимо, що корені характеристичного поліному стають комплексно-спряженими при $Q_p > 1/2$, а резонансний викид АЧХ, частота якого $\omega_{\max} < \omega_p$, з'являється при $Q_p > \sqrt{2}/2$. Але з зростанням Q_p частота максимуму $\omega_{\max} \rightarrow \omega_p$. При великих $Q_p \geq 10$ буде $\omega_{\max} \approx \omega_p$ (параметр ω_p – модуль полюса).

Якщо відомі логарифмічні характеристики окремих динамічних ланок кола (системи), то шляхом простого додавання можна побудувати характеристики всього кола (системи).

Розглянемо іншу, так звану *канонічну* форму КЧФ, яка впливає з відповідної форми запису НЛДР ЛПЧ-кола:

$$H(j\omega) = \frac{b_m \cdot (j\omega)^m + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0}{a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg H(j\omega)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

де $A(\omega)$ – *амплітудно-частотна характеристика*; $\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x$ – *фазочастотна характеристика* (різниця між початковою фазою вихідних коливань, яка залежить від частоти, і початковою фазою вхідних коливань); $H(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ – комплексна частотна характеристика.

Як комплексна величина, характеристика може бути представлена у *тригонометричній* формі:

$$H(j\omega) = A(\omega)[\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = P(\omega) + jQ(\omega),$$

де $P(\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} = A(\omega) \cdot \cos(\varphi)$ – дійсна і $Q(\omega) = \operatorname{Im}\{H(j\omega)\} = A(\omega) \cdot \sin(\varphi)$ – уявна складові. Модуль визначається за формулою:

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}.$$

Аргумент $\varphi(\omega)$ визначається за формулами:

$$\cos(\varphi) = \frac{P(\omega)}{A(\omega)}, \quad \sin(\varphi) = \frac{Q(\omega)}{A(\omega)}.$$

Але під час визначенні фазової характеристики у такий спосіб слід пам'ятати операції над комплексними числами. Так, в загальному випадку:

$$\varphi(\omega) = \arg[P(\omega) + jQ(\omega)] \neq \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

Відомо, що комплексне число можна представити точкою або вектором в комплексній площині. Функція $\operatorname{arctg}(x)$, в Mathcad це функція $\operatorname{atan}(x)$, з одним аргументом $x = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ дає *головне значення* кута в інтервалі $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Вона не враховує всіх чотирьох поєднань знаків дійсного числа $P(\omega)$ і уявного числа $Q(\omega)$. Тому правильно розраховує фазу комплексної точки лише в першому і четвертому квадрантах, де $P(\omega) > 0$. Через те при $P(\omega) < 0$ потрібно вводити корекцію кута на $\operatorname{sign}(Q(\omega)) \cdot \pi$.

До речі, взагалі неможливо за допомогою функції $\operatorname{arctg}(x)$ розрахувати фазовий кут при $P(\omega) = 0$.

Примітка. Аргумент комплексного числа – величина багатозначна і визначається з точністю до $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\varphi = \operatorname{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi k,$$

де $\arg(z)$ – *головне значення* аргументу, яке знаходиться в межах $(-\pi, \pi]$ (або $-\pi < \arg(z) \leq \pi$). Отже, якщо комплексне число $z = x + j \cdot y = |z| \cos \varphi + j \cdot |z| \sin \varphi$, або $z = |z|(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$, то з формули $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ маємо:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, \text{ I, IV - квадранти}; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y > 0, \text{ II - квадрант}; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \text{ III - квадрант}; \\ \text{невизначений}, & x = 0, y = 0; \\ \pi / 2, & x = 0, y > 0; \\ -\pi / 2, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Для запису комплексного числа z в показниковій формі достатньо знайти головне значення аргументу комплексного числа, тобто вважати $\varphi = \arg(z)$.

У системі Mathcad для побудови фазових характеристик більш ефективно використання функції $\text{atan2}(x, y)$, яка повертає значення кута комплексного числа $x + j \cdot y$ в інтервалі $\varphi \in (-\pi, +\pi]$ з врахуванням обох знаків аргументів x і y . В Mathcad також є ще одна функція $\text{arg}(z)$ розрахунку фазового кута $\varphi \in (-\pi, +\pi]$ комплексного числа $z = x + j \cdot y$.

Використання функцій $\text{atan2}(x, y)$ і $\text{arg}(z)$ гарантує вірну побудову фазочастотних характеристик в інтервалі $(-180^\circ, 180^\circ]$, що задовольняє фазочастотні характеристики всіх типових ланок до другого порядку включно.

Дослідження кіл у частотній області в середовищі Mathcad

Для дослідження впливу окремих нулів і полюсів на вигляд частотних характеристик кола системна функція $H(s)$ розбивається на типові динамічні ланки $H_i(s)$ першого або другого порядку (у випадку комплексно-спряжених коренів), які відповідають цим нулям і полюсам. Системна функція може містити також пропорційну ланку нульового порядку. Отже, маємо:

$$H(j\omega) = \prod_i H_i(j\omega) = \prod_i A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)} = A_{\text{дБ}}(\omega) = \sum_i 20 \lg A_i(\omega);$$

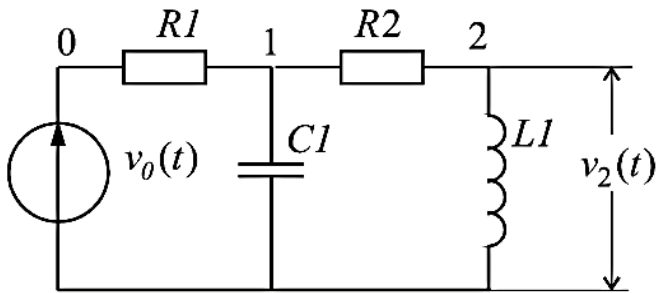
$$= \left\{ \prod_i A_i(\omega) \right\} e^{j \sum_i \varphi_i(\omega)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad \varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega).$$

Ці ланки мають типові ЛАЧХ і ЛФЧХ.

Наступні фрагменти документів Mathcad ілюструють техніку побудови діаграм Бode за моделями типових динамічних ланок першого і нульового порядку.

Приклад 3

На рис. 8 наведено фрагмент документа Mathcad, де показано подання $H(s)$ деякого кола, яке має один нуль $s_{z0} = 0$ і два простих дійсних полюси $s_{p1} = -266.710$ і $s_{p0} = -1.500 \times 10^6$, а також постійний масштабний коефіцієнт, через моделі типових динамічних ланок.



$C1 := .000005$ $L1 := .002$
 $R1 := 1000$ $R2 := 3000$

шукаємо системну функцію кола $v0 := 1$

Given

$$\frac{(v0 - v1)}{R1} = v1 \cdot C1 \cdot s + \frac{(v1 - v2)}{R2} \quad \frac{(v1 - v2)}{R2} = \frac{v2}{L1 \cdot s}$$

Find($v1, v2$)_{1 float, 3} → $200 \cdot \frac{s}{(1.50 \cdot 10^6 \cdot s + s^2 + 4.00 \cdot 10^8)^1}$

Тобто $H(s) := 200 \cdot \frac{s}{(s^2 + 1.50 \cdot 10^6 \cdot s + 4.00 \cdot 10^8)^1}$ - системна функція

Знайдемо полюси системної функції та надамо її через моделі типових динамічних ланок

$$Q(s) := s^2 + 1.50 \cdot 10^6 \cdot s + 4.00 \cdot 10^8$$

$$sp := Q(s) \text{ solve, } s, \text{ float, } 5 \rightarrow \begin{pmatrix} -1.4997 \cdot 10^6 \\ -266.71 \end{pmatrix} \quad sp_0 = -1.50 \times 10^6 \quad sp_1 = -266.71$$

$$H(s) := \frac{200 \cdot s}{(s - sp_0) \cdot (s - sp_1)} \quad \text{де} \quad \tau_0 := \frac{1}{-sp_0} \quad \tau_1 := \frac{1}{-sp_1}$$

Тобто $H(s) := \frac{200 \cdot s}{sp_0 \cdot sp_1 \cdot [(s \cdot \tau_0 + 1) \cdot (s \cdot \tau_1 + 1)]}$

Моделі типових ланок

$$H0(s) := \frac{200}{-sp_0} \quad H1(s) := s \cdot \tau_1 \quad H2(s) := \frac{1}{(s \cdot \tau_0 + 1)} \quad H3(s) := \frac{1}{(s \cdot \tau_1 + 1)}$$

Вираз системної функції кола через моделі типових динамічних ланок

$$H(s) := H0(s) \cdot H1(s) \cdot H2(s) \cdot H3(s)$$

Рис. 8. Подання системної функції кола за моделями типових динамічних ланок

На рис. 9 наведено програмний модуль Mathcad, у якому визначена функція $BodePlot(H, MinFreq, MaxFreq)$ для побудови діаграм Боде³⁰ за деякою системною функцією $H(s)$ в діапазоні частот від мінімальної $MinFreq$ до максимальної $MaxFreq$.

```

Програмний модуль для побудови діаграм Боде

j := √-1 - уведення позначення уявної одиниці

BodePlot(H, MinFreq, MaxFreq) :=
  ndk ← 20
  n ← ndk · ceil( log( MaxFreq / MinFreq ) )
  r ← ln( MaxFreq / MinFreq )
  for i ∈ 0..n
    f ← MinFreq · ei·r/n
    Zi,0 ← f
    V ← H(j·2π·f)
    Zi,1 ← 20·log(|V|)
    Zi,2 ← arg(V) · 180 / π
  for i ∈ 1..n
    Zi,2 ← Zi,2 - 360·sign(Zi,2 - Zi-1,2) if (|Zi,2 - Zi-1,2|) > 300
  Z

```

Рис. 9. Програмний модуль побудови діаграм Боде

Логарифмічні АЧХ і ФЧХ окремих типових динамічних ланок $H_i(s)$, побудовані в Mathcad, зображено на рис. 10. Сума дає загальні ЛАЧХ і ЛФЧХ кола. На рис. 11 наведено логарифмічні характеристики, одержані відразу за системною функцією кола $H(s)$. Легко перевірити, що шляхом додавання

³⁰ Пряме використання функцій $\text{atan2}(x, y)$ і $\text{arg}(z)$ призводить до того, що при перетині графіком фазової характеристики $\varphi(\omega)$ рівня $\pm 180^\circ$ виникає стрибок кута $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ приблизно на $\mp 360^\circ$ (знак протилежний напрямку перетину). Наведений програмний модуль виявляє помилкові стрибки фази і коригує їх. Необхідно відмітити, що нульову частоту $MinFreq$ брати при логарифмічному масштабі не можна.

логарифмічних частотних характеристик окремих ланок $H_i(s)$, можна знайти загальні ЛАЧХ і ЛФЧХ.

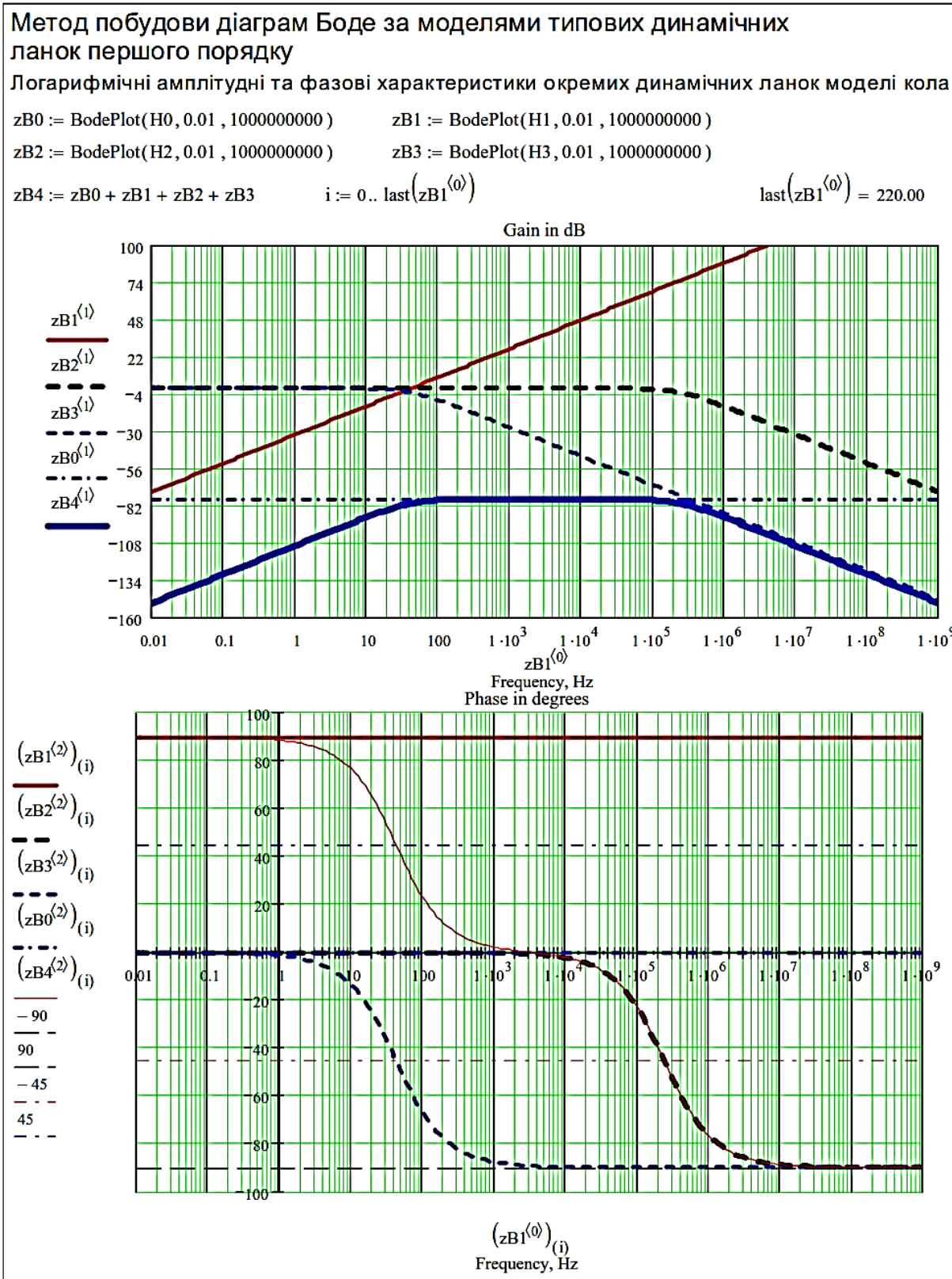


Рис. 10. Ілюстрація методу асимптот для побудови діаграм Бодє за моделями типових динамічних ланок

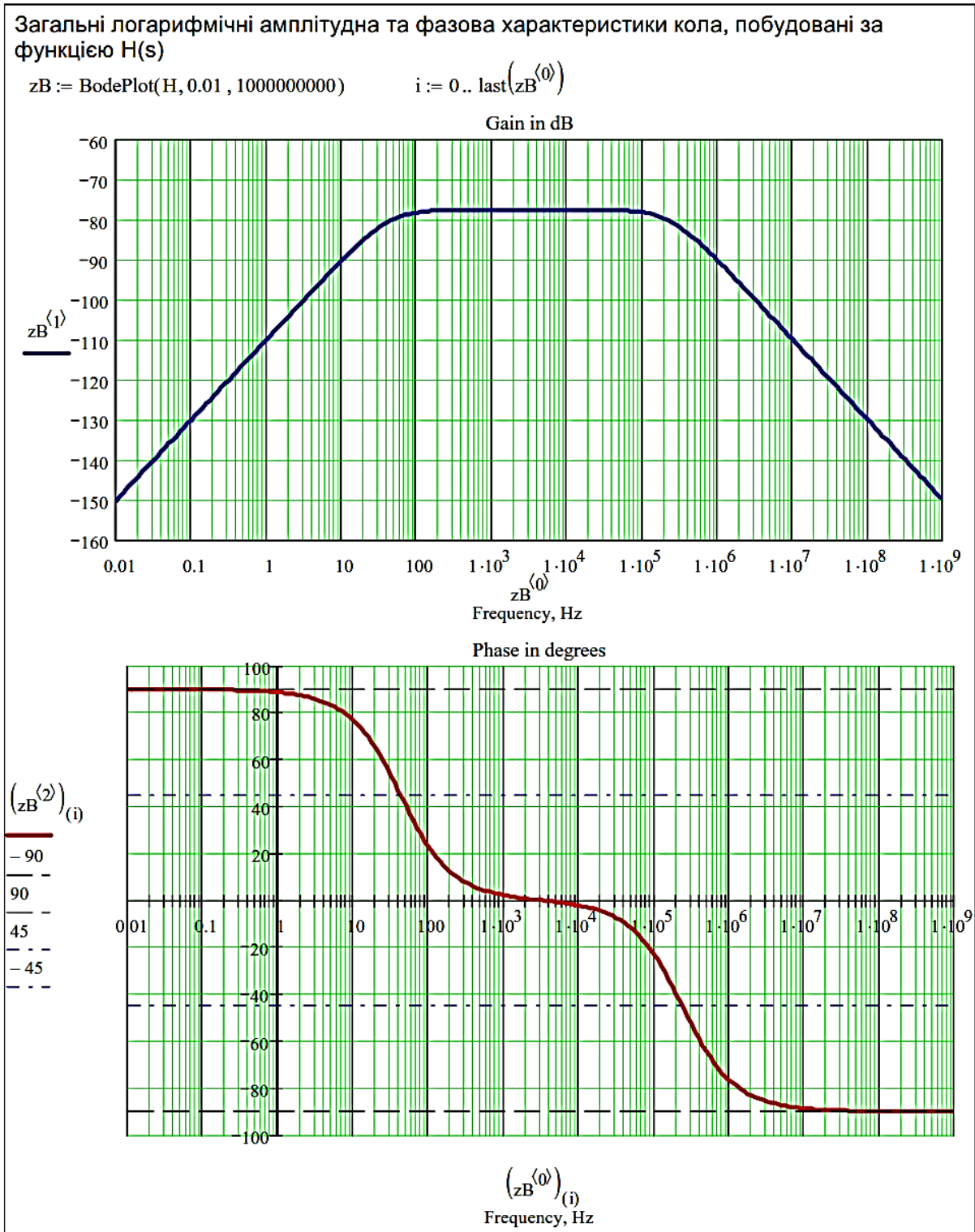


Рис. 11. Загальні логарифмічні АЧХ і ФЧХ кола

Висновок

Метод побудови діаграм Бодє за моделями типових динамічних ланок показує, як розташування нулів і полюсів системної функції визначає вигляд АЧХ і ФЧХ всього кола.

Аналіз у середовищі Micro-CAP

Далі наведемо приклад аналізу частотних характеристик кола в середовищі Micro-CAP. Складемо схему (рис. 12)

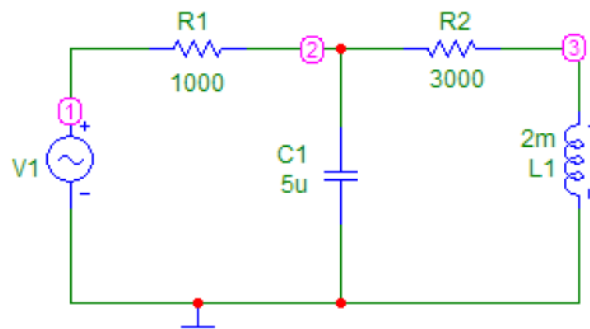



Рис. 12

Перехід до аналізу в частотній області здійснюється вибором в меню команд **Analysis** режиму **AC ...**.³¹⁾ У вікні **AC Analysis Limits** (рис. 13) задайте необхідні параметри та почніть моделювання (**Run, F2** або ).

³¹⁾ Для розрахунку частотних характеристик до входу кола повинно бути підключене джерело синусоїдальної напруги (**Sine Source**) /або джерело імпульсної напруги (**Pulse Source**). При розрахунку частотних характеристик амплітуда цього сигналу автоматично визначається програмою – 1В (*Micro-CAP 9 Electronic Circuit Analysis Program Reference Manual*. Copyright 1982-2008 by Spectrum Software 1021 South Wolfe Road Sunnyvale, CA 94088. – 916 p. – <http://www.spectrum-soft.com>).

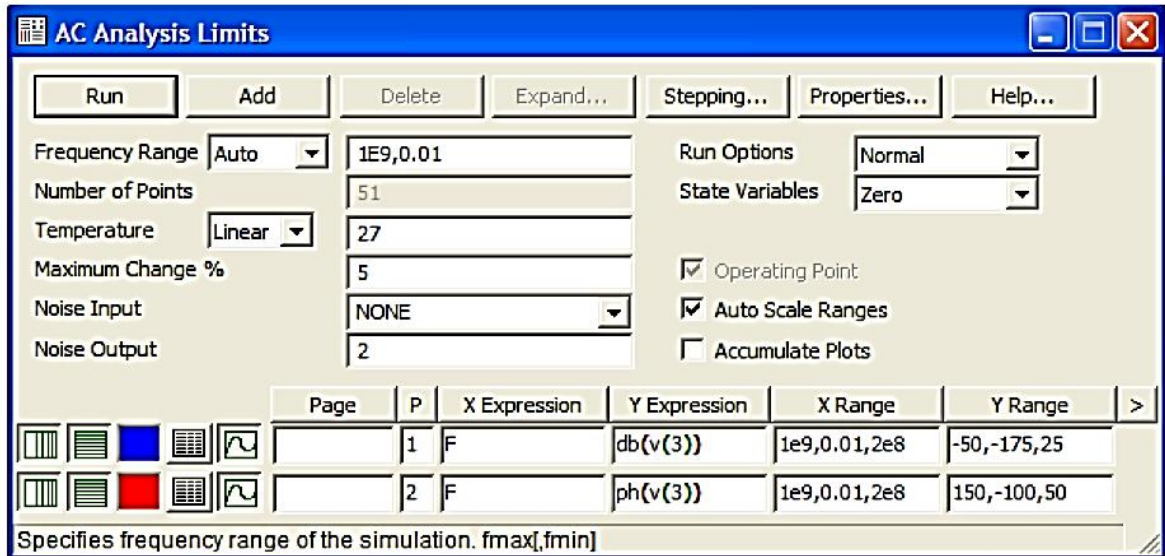


Рис. 13. Задання параметрів моделювання в режимі AC Analysis

Результати аналізу зображено на рис. 14.

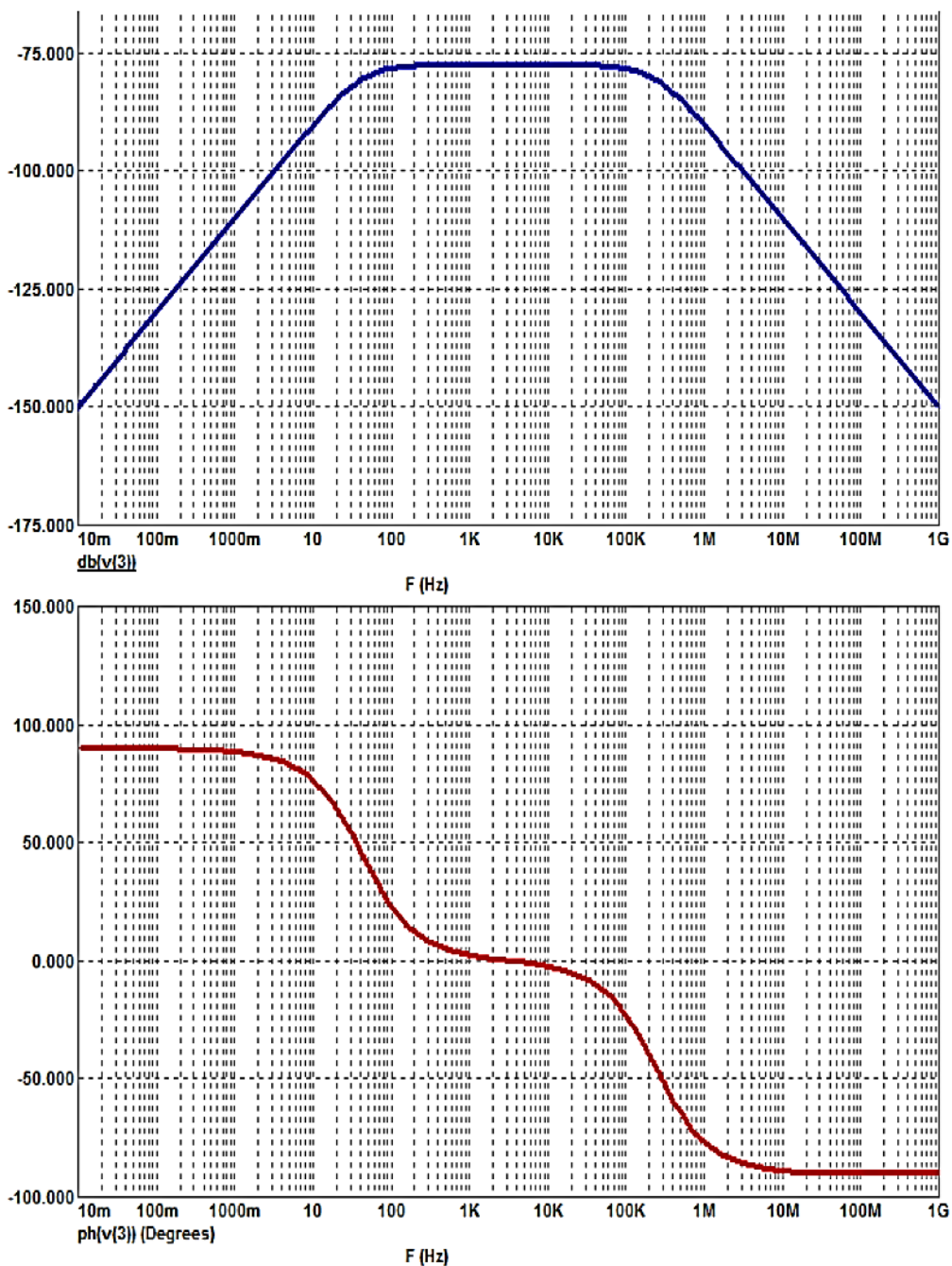


Рис. 14. ЛАЧХ і ЛФЧХ кола на рис. 12, побудовані в Micro-CAP

Частоти зрізу $f_{зп1} \approx 42$ Гц і $f_{зп2} \approx 240$ кГц відповідають полюсам $s_{p1} = -266.710$ і $s_{p0} = -1.500 \times 10^6$, які одержано аналітично.

Контрольні запитання та завдання

1. *Що таке комплексна частотна функція кола та яка її розмірність? Дайте визначення амплітудної, фазової частотних характеристик кола.*
2. *Запишіть формули для обчислення амплітуди та початкової фази гармонічної реакції ЛЧ-кола за відомими АЧХ і ФЧХ.*
3. *Що таке гранична частота та смуга пропускання?*
4. *Як знайти аналітичний вираз частотних характеристик кола за його операторною системною функцією?*
5. *Як пов'язані імпульсна характеристика та відповідна КЧФ кола?*
6. *Що таке діаграма нулів і полюсів?*
7. *Який вигляд має діаграма нулів і полюсів стійкого кола?*
8. *Запишіть формули для визначення модуля та аргументу КЧФ за її нуль-полюсним зображенням.*
9. *Що таке логарифмічна амплітудно-частотна ЛАЧХ?*
10. *Чим відрізняється логарифмічна фазочастотна ЛФЧХ від звичайної ФЧХ?*
11. *Що таке частотний годограф?*
12. *Що таке асимптотичні ЛЧХ? В чому полягає метод асимптотичних діаграм Боде?*
13. *Виконання яких операцій передбачає метод діаграм Боде для побудови ЛАЧХ і ЛФЧХ? Як впливає розташування дійсних нулів і полюсів на вигляд частотних характеристик?*
14. *Чи можна використовувати метод асимптотичних діаграм Боде, якщо КЧФ кола має комплексно-спряжені нулі або полюси?*
15. *Чи можуть КЧФ кіл першого порядку мати комплексні нулі і полюси?*

Лекція 14. Дослідження частотних властивостей типових електричних кіл другого порядку

Типові моделі електричних кіл. Схеми активних фільтрів першого порядку. Схеми активних фільтрів другого порядку з додатним зворотним зв'язком (структура Саллена і Кея). Схеми активних фільтрів другого порядку з складним (багатопетльовим) від'ємним зворотним зв'язком (структура Рауха). Дослідження типових схем кіл другого порядку у частотній області в середовищі Mathcad. Частотний аналіз в середовищі Micro-CAP. Моделювання лінійних аналогових пристроїв, заданих передатними функціями з використанням перетворення Лапласу. Контрольні запитання та завдання.

Типові моделі електричних кіл

За умови незалежності каскадів один від одного, якщо використовуються схеми на операційних підсилювачах, складну технічну систему n – порядку можна надати у вигляді добутку КЧФ типових кіл першого і другого порядків.

Кола першого порядку:

Фільтр нижніх частот (ФНЧ):
$$H(j\omega) = K_0 \frac{\alpha}{\alpha + j\omega} = K_0 \frac{1}{1 + j\omega\tau}.$$

Фільтр верхніх частот (ФВЧ):
$$H(j\omega) = K_0 \frac{j\omega}{\alpha + j\omega} = K_0 \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}.$$

Кола другого порядку:

Фільтр нижніх частот (ФНЧ)
(*low-pass filter*):
$$H(j\omega) = \frac{K_{LP0} \omega_p^2}{(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + \omega_p^2}.$$

Фільтр верхніх частот (ФВЧ)
(*high-pass filter*):
$$H(j\omega) = \frac{K_{HP0} (j\omega)^2}{(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + \omega_p^2}.$$

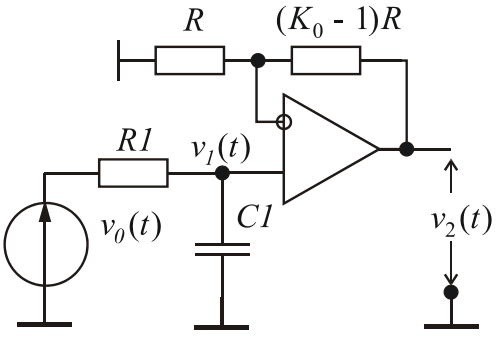
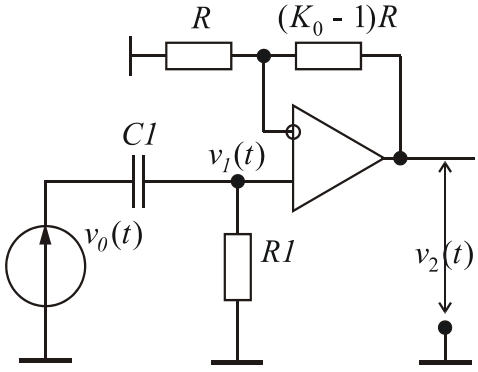
Смуговий фільтр (СФ)
(*band-pass filter*):
$$H(j\omega) = \frac{K_{BP0} 2\alpha_p(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + \omega_p^2}.$$

Загороджувальний фільтр (ЗФ)
або режекторний фільтр (РФ)
(*band-stop filter*):
$$H(j\omega) = \frac{K_{BS0} [(j\omega)^2 + \omega_z^2]}{(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + \omega_p^2}.$$

Отже, знаючи частотні властивості типових кіл, наведених вище, можна досліджувати частотні властивості складних систем.

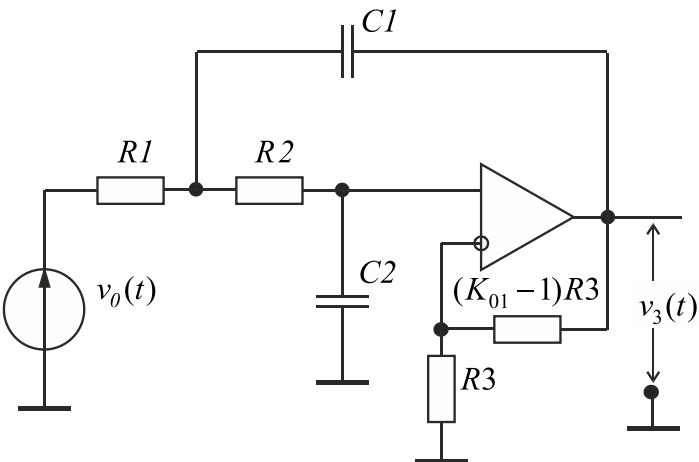
Таблиця 1

Схеми фільтрів першого порядку

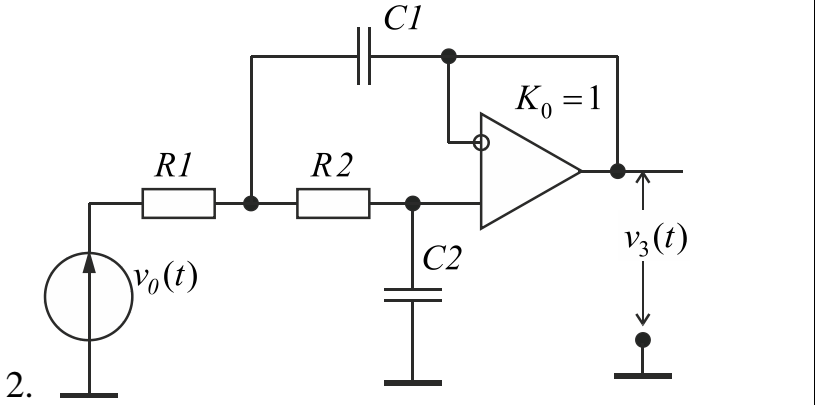
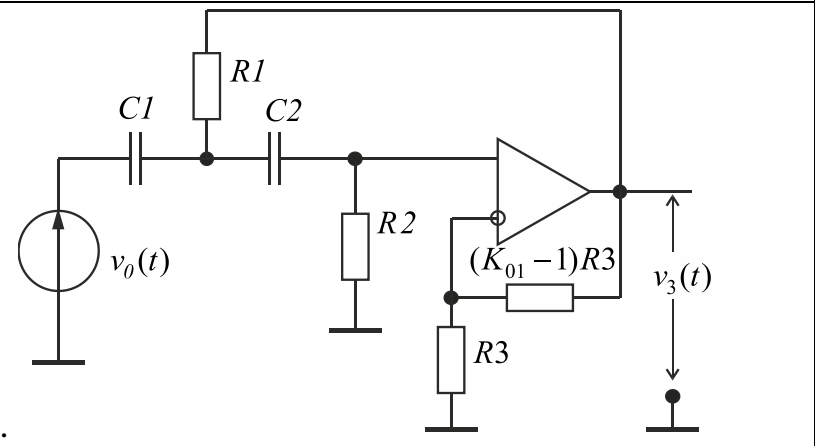
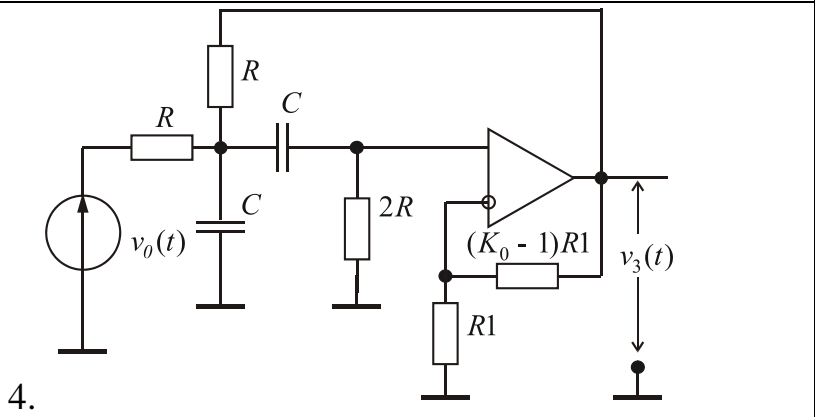
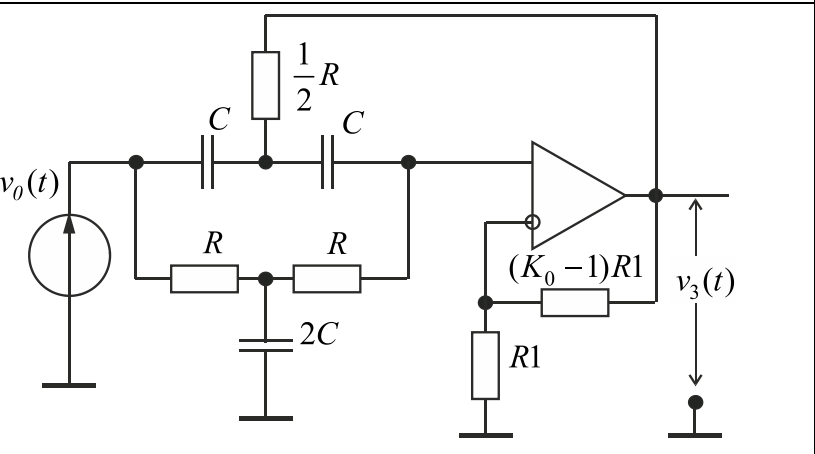
Кола першого порядку	
	Фільтр нижніх частот ФНЧ
	Фільтр верхніх частот ФВЧ

Таблиця 2

Схеми фільтрів з додатним зворотним зв'язком (структура Саллена і Кея)³²

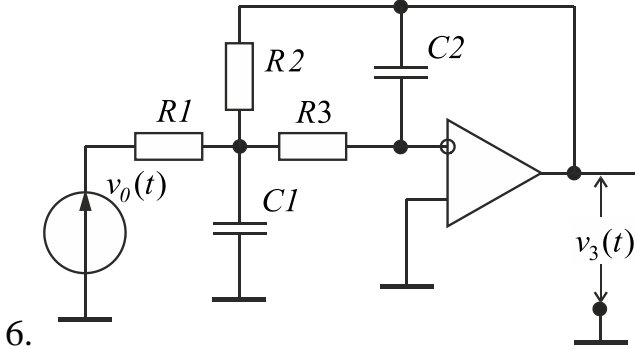
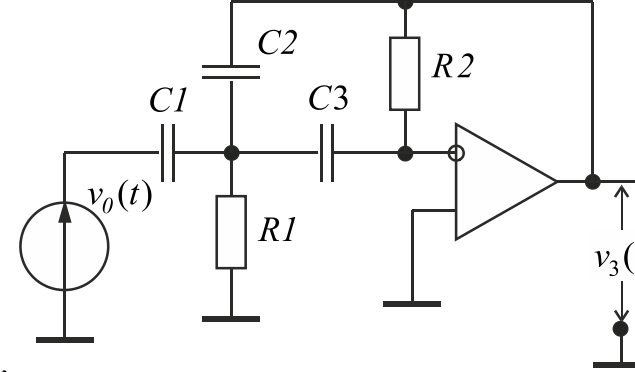
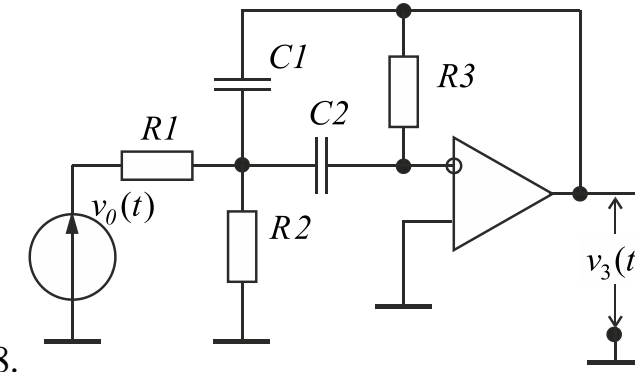
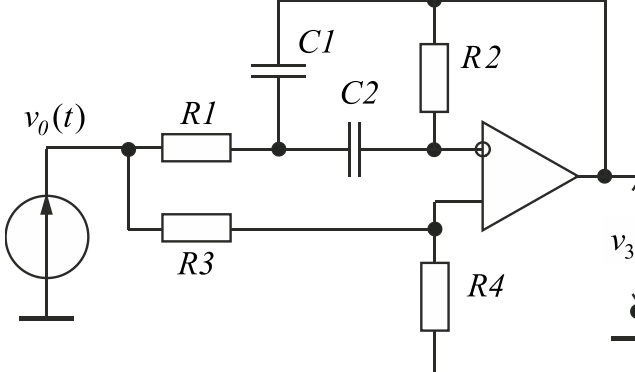
Кола другого порядку	
<p>1.</p> 	Фільтр нижніх частот ФНЧ

³² Peyton, A.J. and Volsh, V. *Analog electronics on operational amplifiers*. Cambridge University Press, 1993.

<p>2.</p> 	<p>Фільтр нижніх частот ФНЧ</p>
<p>3.</p> 	<p>Фільтр верхніх частот ФВЧ</p>
<p>4.</p> 	<p>Смуговий фільтр СФ</p>
<p>5.</p> 	<p>Режекторний фільтр РФ</p>

Таблиця 3

Схеми фільтрів з складним (багатопетльовим) від'ємним зворотним зв'язком (структура Рауха)³³

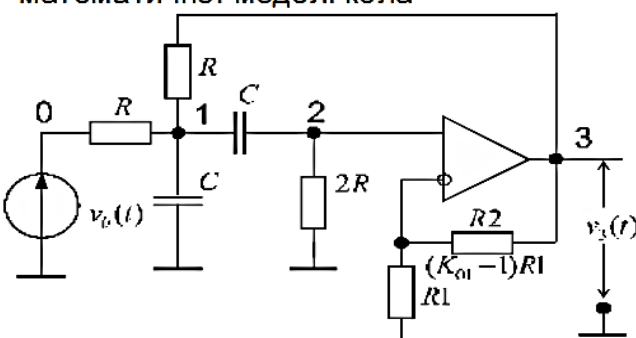
<p>6.</p> 	<p>Фільтр нижніх частот ФНЧ</p>
<p>7.</p> 	<p>Фільтр верхніх частот ФВЧ</p>
<p>8.</p> 	<p>Смуговий фільтр СФ</p>
<p>9.</p> 	<p>Загороджувальний фільтр ЗФ</p>

³³ Peyton, A.J. and Volsh, V. *Analog electronics on operational amplifiers*. Cambridge University Press, 1993.

Аналіз в середовищі системи Mathcad

Приклад 1

Розрахунок параметрів елементів електричної схеми за параметрами математичної моделі кола



Given

$$\frac{(v0 - v1)}{R} = v1 \cdot (C \cdot s) + (v1 - v2) \cdot C \cdot s + \frac{(v1 - v3)}{R} \quad (v1 - v2) \cdot C \cdot s = \frac{v2}{2R} \quad v3 = K01 \cdot v2$$

Find (v1, v2, v3)₂ collect, s $\rightarrow K01 \cdot C \cdot s \cdot \frac{R}{[C^2 \cdot s^2 \cdot R^2 + (3 \cdot C \cdot R - K01 \cdot C \cdot R) \cdot s + 1]}$

Передатна функція електричної схеми $H(s) := \frac{K01 \cdot \frac{1}{C \cdot R} \cdot s}{[s^2 + \frac{1}{C \cdot R} \cdot (3 - K01) \cdot s + \frac{1}{(C \cdot R)^2}]}$

Отже, маємо передатну функцію кола другого порядку з властивостями смугового фільтра СФ $\rightarrow H(j\omega) = \frac{K_{BPF} \cdot 2\alpha_p \cdot (j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + \omega_p^2}$

Нехай модель кола має наступні параметри:

$$\omega_p := 2 \cdot \pi \cdot 300 \quad Q_p := 10 \quad \alpha_p := \frac{\omega_p}{2Q_p}$$

Розрахуємо параметри елементів електричної схеми за параметрами математичної моделі кола

Given

$$2 \cdot \alpha_p = \frac{3 - K01}{C \cdot R} \quad \omega_p = \frac{1}{C \cdot R} \quad 2 \cdot \alpha_p \cdot K_{BPF} = \frac{K01}{C \cdot R} \quad C = 0.1 \cdot 10^{-6}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ R \\ K01 \\ K_{BPF} \end{pmatrix} := \text{Find}(C, R, K01, K_{BPF}) \text{ float, 3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^{-7} \\ 5.31 \cdot 10^3 \\ 2.90 \\ 29. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C \\ R \\ K01 \\ K_{BPF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \times 10^{-7} \\ 5.310 \times 10^3 \\ 2.900 \\ 29.000 \end{pmatrix}$$

Отже, маємо

$$f_p := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \text{ float, 3} \rightarrow 300. \quad K_{BPF} := \frac{K01}{3 - K01} \text{ float, 3} \rightarrow 29.0 \quad Q_p := \frac{1}{3 - K01} \text{ float, 3} \rightarrow 10.0$$

Нехай $R1 := 10 \cdot 10^3$ тоді одержимо $R2 := R1 \cdot (K01 - 1) = (1.9 \times 10^4)$

Далі, за системною функцією побудуємо частотні характеристики

$$H(s) := \frac{K01 \cdot \frac{1}{C \cdot R} \cdot s}{[s^2 + \frac{1}{C \cdot R} \cdot (3 - K01) \cdot s + \frac{1}{(C \cdot R)^2}]}$$

Рис. 1. Розрахунок елементів електричної схеми СФ

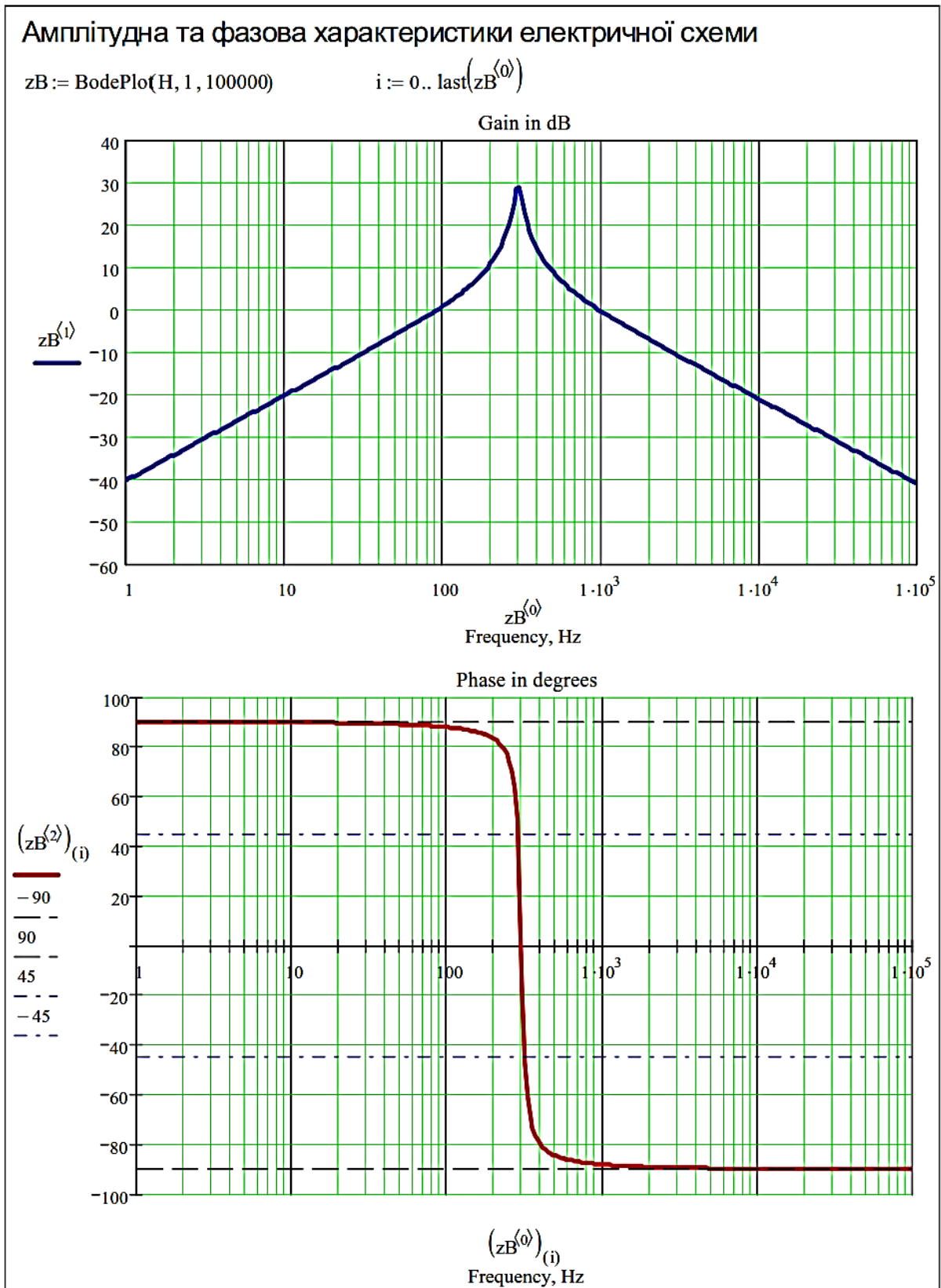


Рис. 2. Амплітудна та фазова характеристики розрахованої схеми СФ

Аналіз у середовищі програми Micro-CAP

Приклад 3

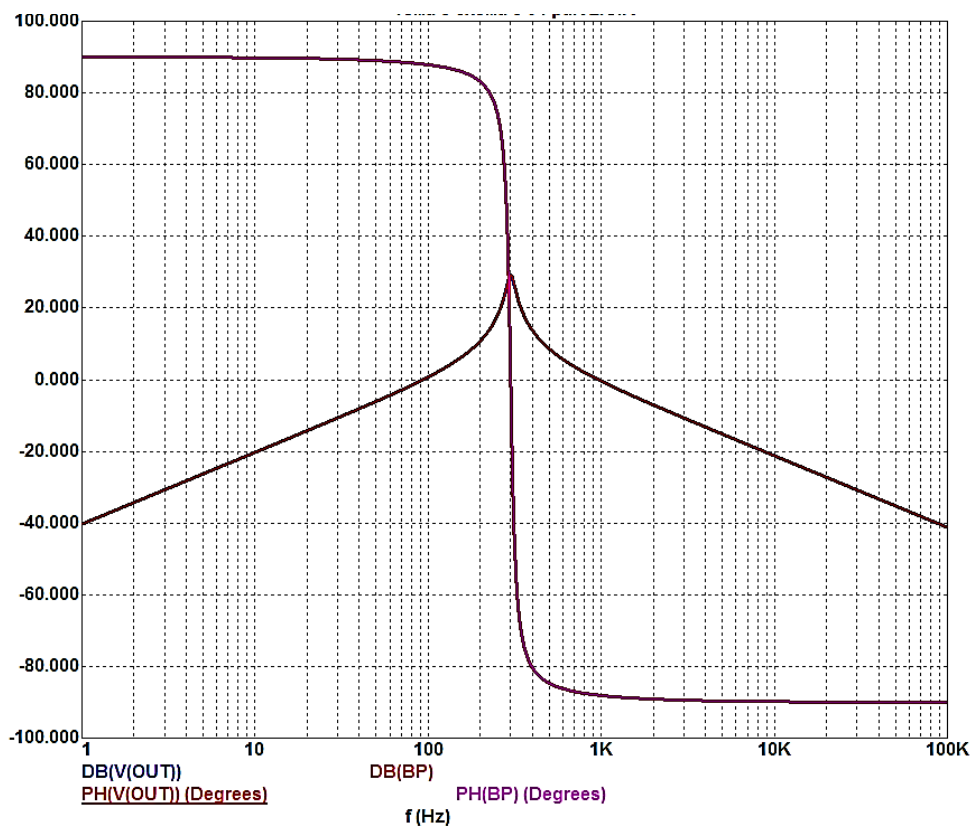
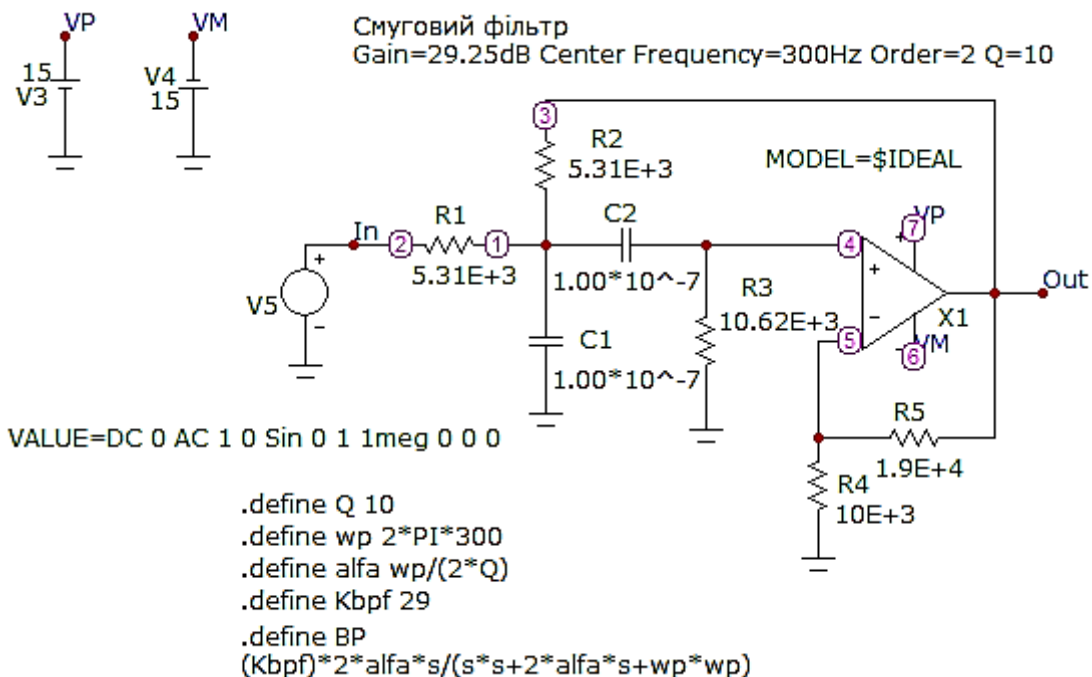
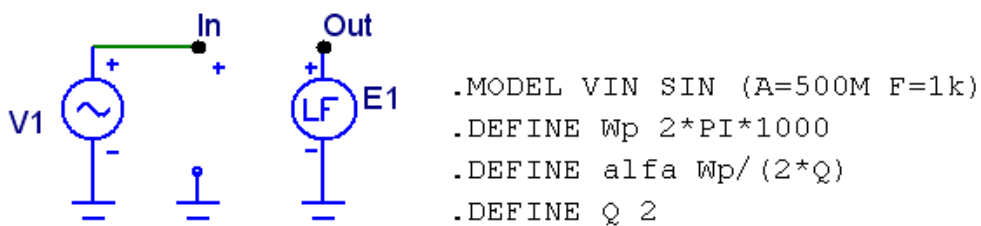


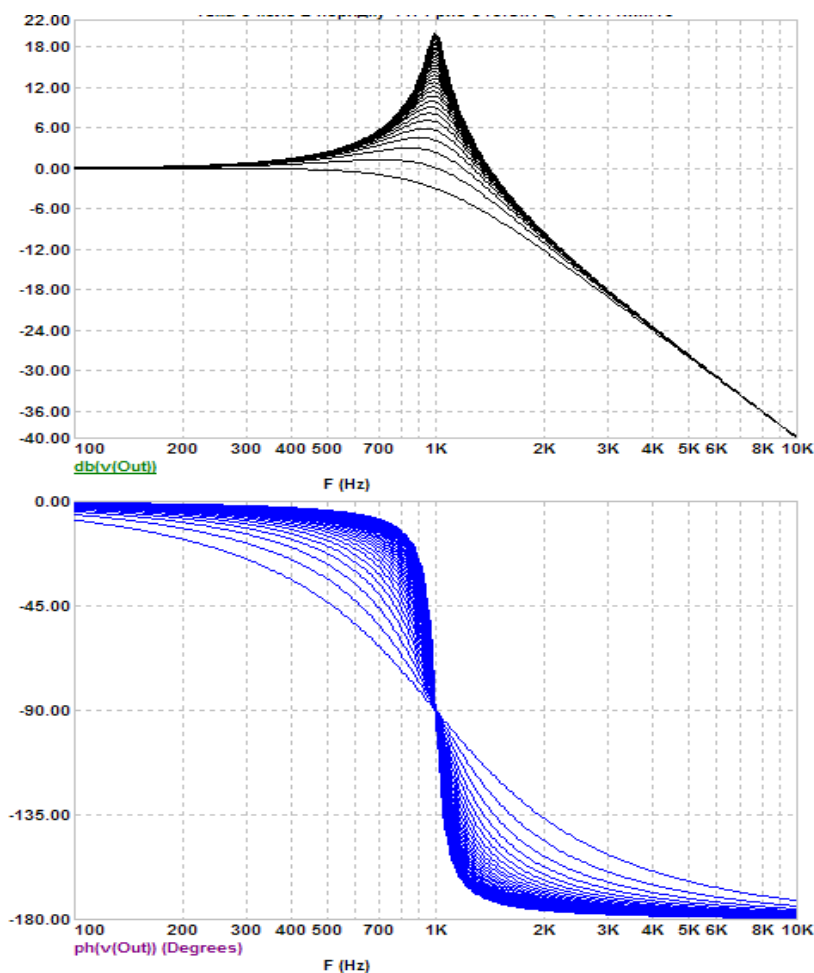
Рис. 4. Моделювання розрахованої схеми СФ в середовищі Micro-CAP

**Моделювання лінійних аналогових пристроїв,
заданих передатними функціями
з використанням перетворення Лапласу**



$$LAPLACE=Wp*Wp/(s*s+2*alfa*s+Wp*Wp)$$

a



б

*Рис. 5. Моделювання динамічного кола другого порядку з властивостями ФНЧ:
а – використання джерела $VofV$, яке задається перетворенням Лапласа (LF –
передатна функція задається формулою); б – ЛАЧХ і ЛФЧХ кола у випадку, коли
полюси комплексно-спряжені (добротність $Q_p > 1/2$)*

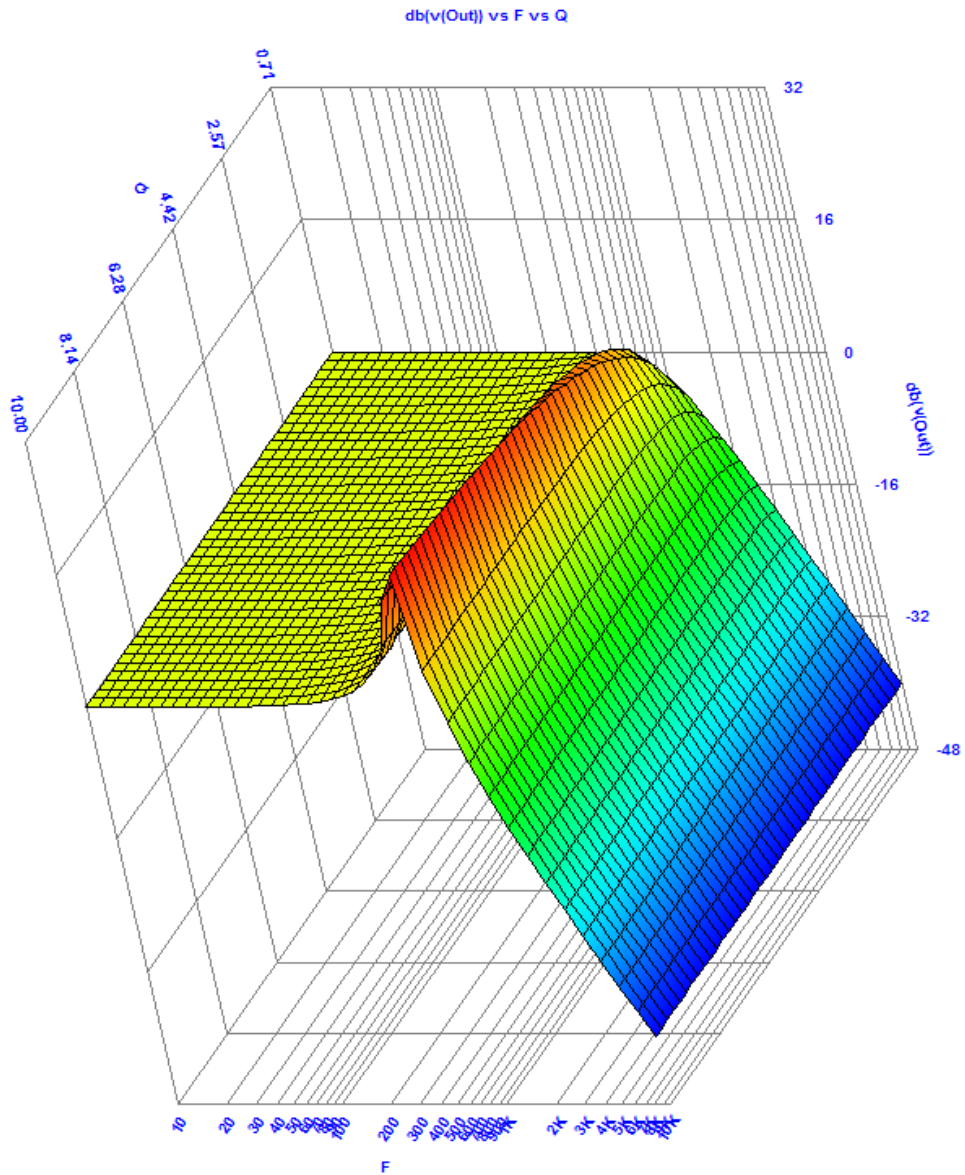
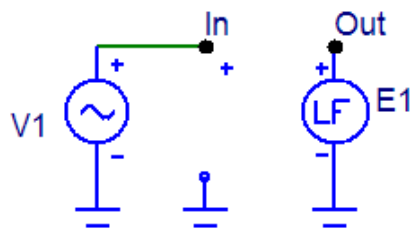


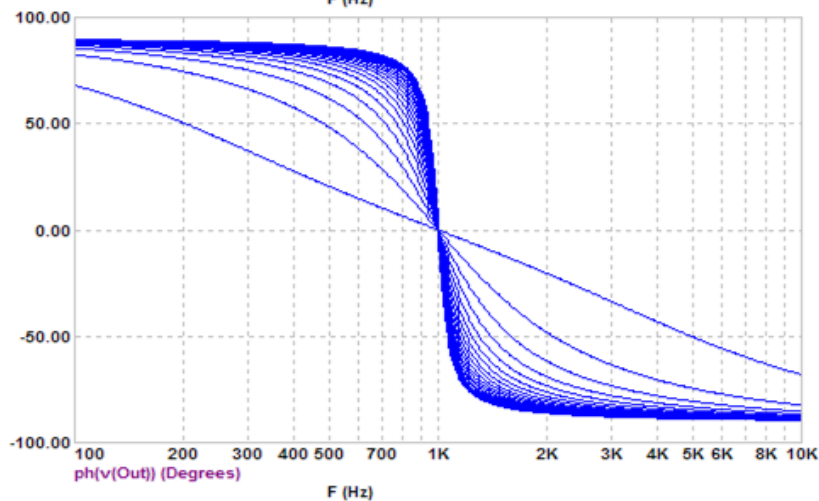
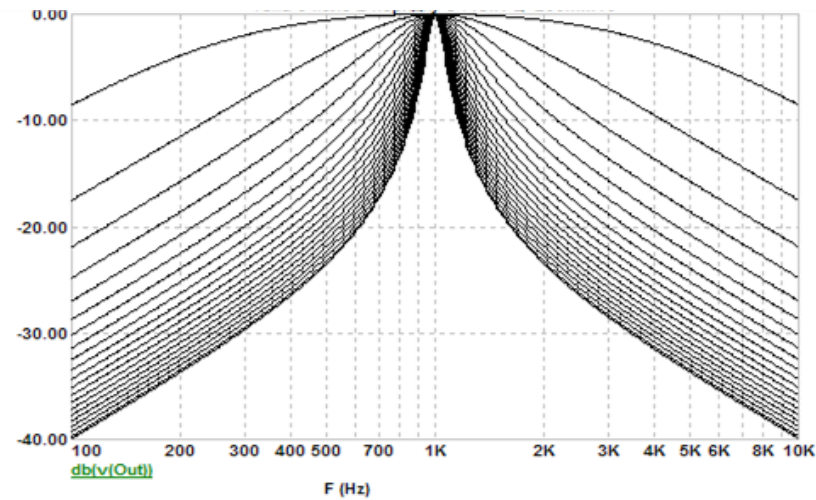
Рис. 6. Приклад використання тривимірної графіки для моделювання АЧХ кола другого порядку з властивостями ФНЧ



```
.MODEL VIN SIN (A=500M F=1k)
.DEFINE Wp 2*PI*1000
.DEFINE alfa Wp/(2*Q)
.DEFINE Q 2
```

$$2 \cdot \text{alfa} \cdot s / (s^2 + 2 \cdot \text{alfa} \cdot s + Wp \cdot Wp)$$

a



б

Рис. 7. Моделювання динамічного кола другого порядку з властивостями СФ:
 а – використання джерела **VofV**, яке задається перетворенням Лапласа (**LF** –
 передатна функція задається формулою); б – ЛАЧХ і ЛФЧХ кола у випадку, коли
 добротність $Q_p > 0,1$

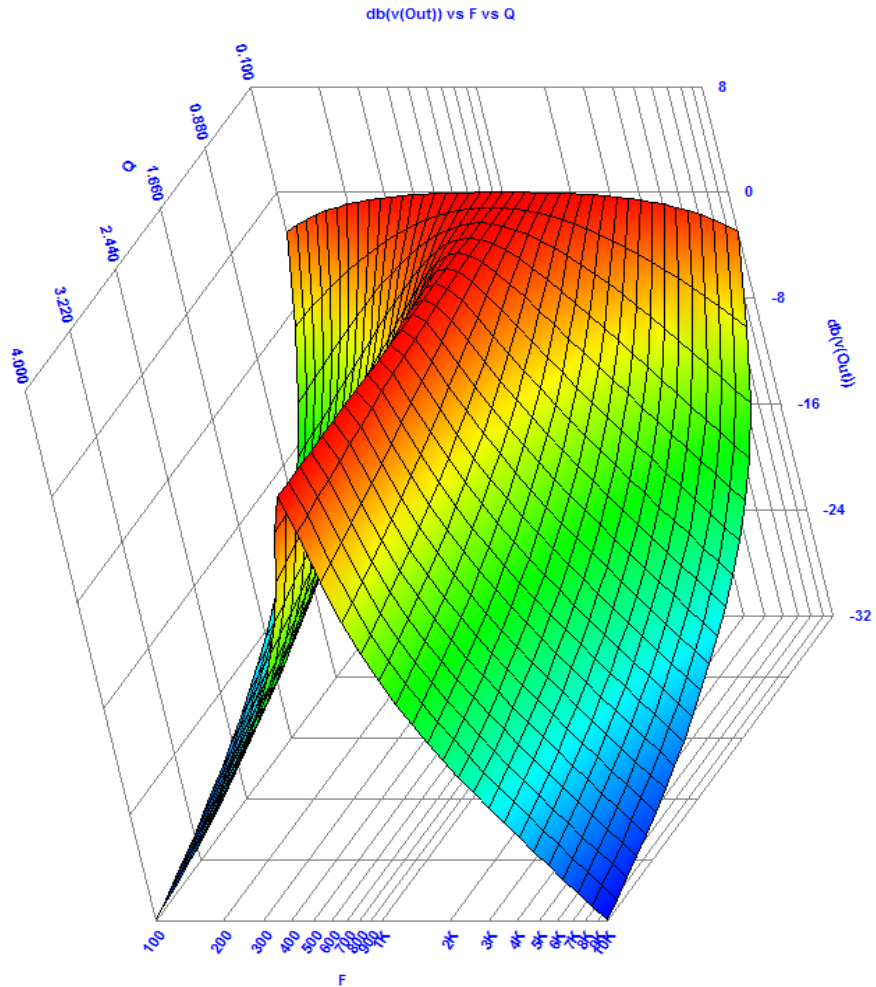


Рис. 8. Приклад використання трьохвимірної графіки для моделювання АЧХ кола другого порядку з властивостями СФ

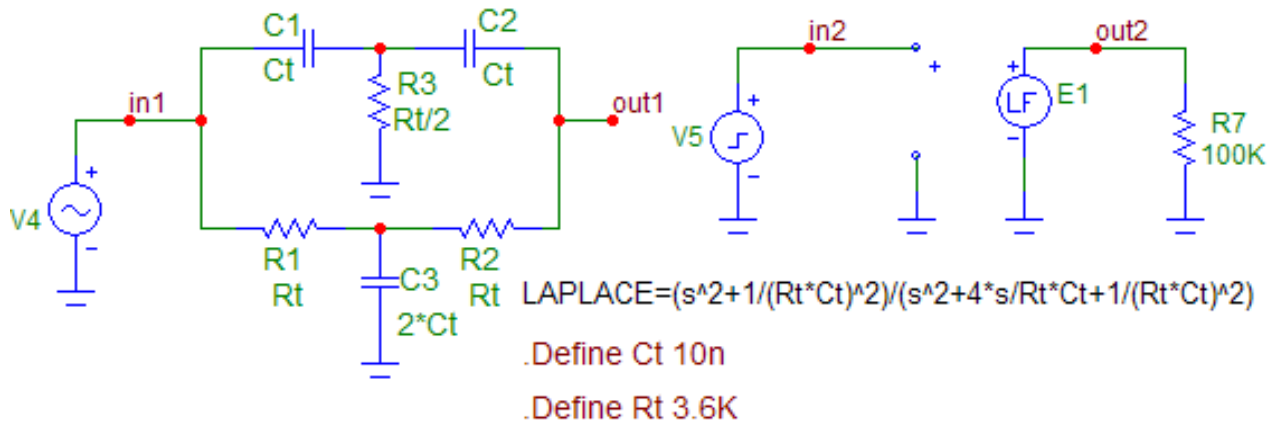


Рис. 9. Моделювання пасивного режекторного фільтру на основі подвійного T-подібного моста

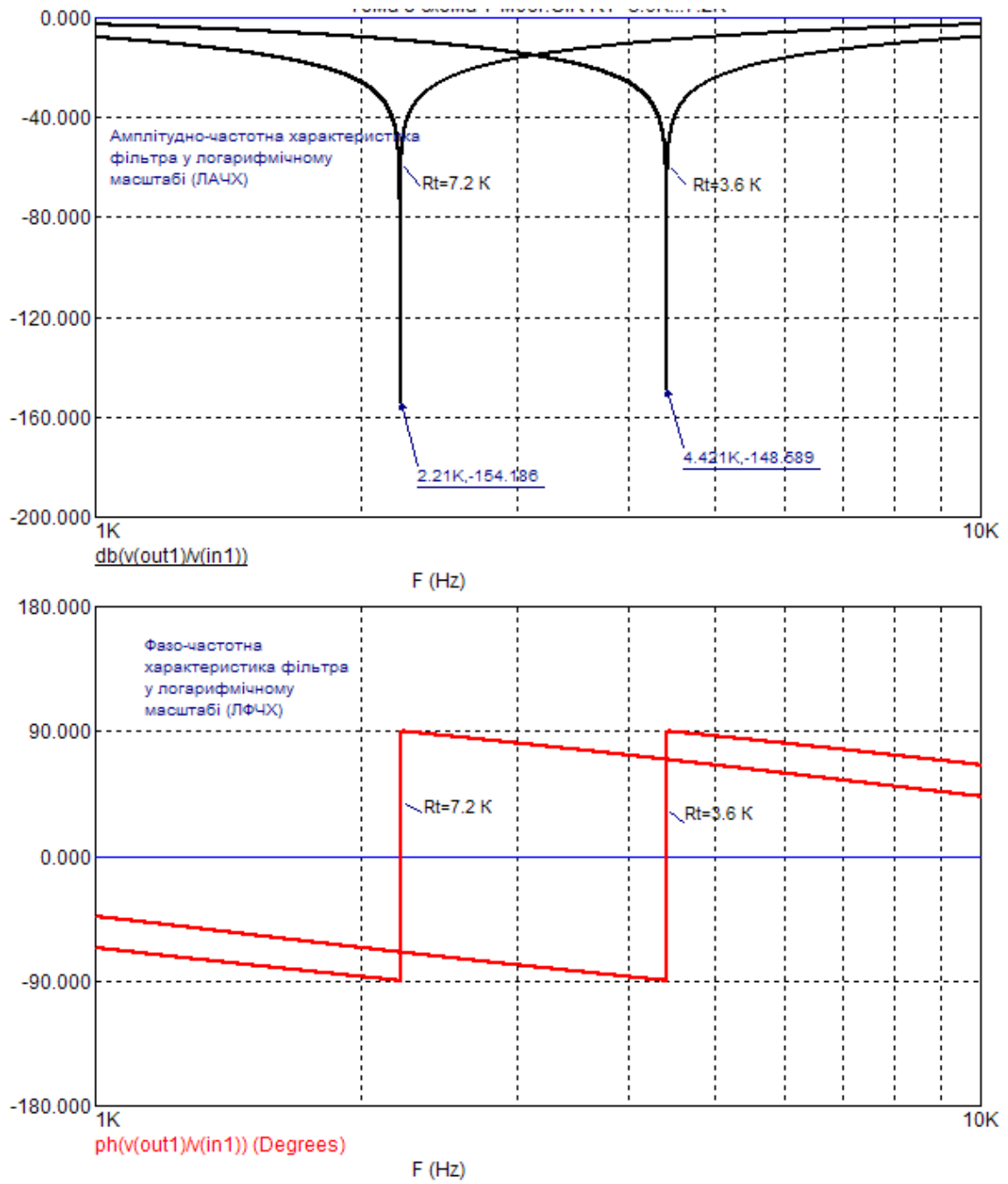


Рис. 10. Пасивний режекторний фільтр на основі подвійного T-подібного моста (продовження)

Контрольні запитання та завдання

1. *Наведіть типову КЧФ кіл першого порядку з властивостями ФНЧ. Який вигляд має АЧХ і ФЧХ цих кіл?*
2. *Наведіть типову КЧФ кіл першого порядку з властивостями ФВЧ. Який вигляд має АЧХ і ФЧХ цих кіл?*
3. *Чи можуть КЧФ кіл першого порядку мати комплексні нулі і полюси?*
4. *Наведіть типову КЧФ кіл другого порядку, які матимуть комплексно-спряжені нулі і полюси, з властивостями ФНЧ. Який вигляд має АЧХ і ФЧХ цих кіл?*
5. *Який вигляд має діаграма нулів і полюсів для кіл другого порядку з властивостями ФНЧ і як вона пов'язана з формою АЧХ?*
6. *Дайте визначення добротності нулів і полюсів КЧФ кіл другого порядку.*
7. *Наведіть типову КЧФ кола другого порядку, яке матиме комплексно-спряжені нулі і полюси, з властивостями ФВЧ. Який вигляд має АЧХ і ФЧХ цих кіл?*
8. *Наведіть приклад розрахунку елементів електричної схеми ФНЧ (структура Саллена і Кея чи Рауха) за параметрами математичної моделі кола.*
9. *Який вигляд має діаграма нулів і полюсів для кіл другого порядку з властивостями ФВЧ і як вона пов'язана з формою АЧХ?*
10. *Наведіть приклад розрахунку елементів електричної схеми ФВЧ (структура Саллена і Кея чи Рауха) за параметрами математичної моделі кола.*
11. *Наведіть типову КЧФ кола другого порядку, яке матиме комплексно-спряжені нулі і полюси, з властивостями СФ. Який вигляд має АЧХ і ФЧХ цих кіл?*
12. *Який вигляд має діаграма нулів і полюсів для кіл другого порядку з*

властивостями СФ і як вона пов'язана з формою АЧХ?

13. *Наведіть приклад розрахунку елементів електричної схеми СФ (структура Саллена і Кея чи Рауха) за параметрами математичної моделі кола.*

14. *Наведіть типову КЧФ кола другого порядку, яке матиме комплексно-спряжені нулі і полюси, з властивостями ЗФ. Який вигляд має АЧХ і ФЧХ цих кіл?*

15. *Який вигляд має діаграма нулів і полюсів для кіл другого порядку з властивостями ЗФ і як вона пов'язана з формою АЧХ?*

16. *Наведіть приклад розрахунку елементів електричної схеми ЗФ (структура Саллена і Кея чи Рауха) за параметрами математичної моделі кола.*

Лекція 15. Дослідження резонансних кіл у частотній області.

Частотні характеристики резонансних систем

Частотні характеристики резонансних систем. Діаграма полюсів і нулів резонансної системи з великим Q . Резонансна крива. Послідовний коливальний контур. Резонанс у послідовному контурі. Паралельний коливальний контур. Резонанс у паралельному контурі. Схемні моделі пасивних коливальних контурів, які враховують втрати. Дослідження резонансних кіл у частотній області в середовищі Mathcad. Частотний аналіз резонансних кіл в середовищі Мікро-САР. Лінеаризована схема заміщення (режим малого сигналу) транзисторного підсилювача за схемою "спільний емітер", навантаженням якого є паралельний коливальний контур. Контрольні запитання та завдання.

Діаграма полюсів і нулів резонансної системи з великим Q .

Резонансна крива

Спочатку розглянемо частотні характеристики смугового фільтра на операційному підсилювачі (рис. 1), у якого, за рахунок додатного зворотного зв'язку (коло на резистивних елементах R_0, R), з'являються комплексно-спряжені полюси. При цьому схема одержує селективні властивості за частотою, як у резонансної системи з великою добротністю.

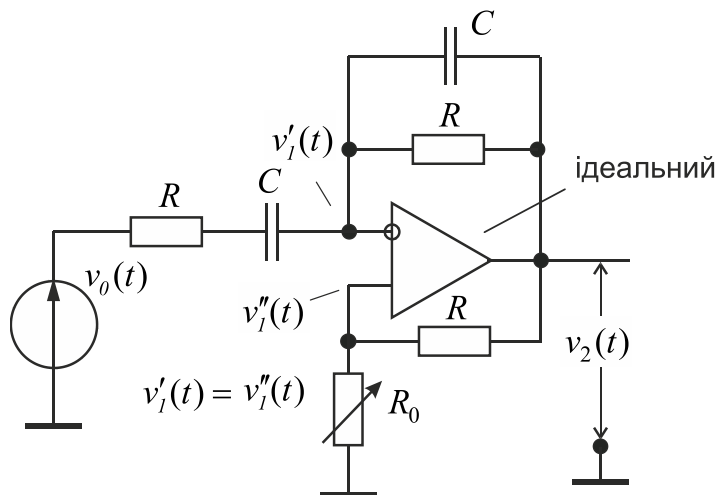


Рис. 1. Смуговий фільтр на операційному підсилювачі з додатним зворотним зв'язком

Системну функцію можна визначити наступним чином:

$$v_0(s) := 1$$

Given система рівнянь за методом вузлових напруг

$$\frac{v_0(s) - v_1}{R + \frac{1}{C \cdot s}} = (v_1 - v_2) \cdot \left(\frac{1}{R} + C \cdot s \right) \quad v_2 = v_1 \cdot \frac{(R + R_0)}{R_0}$$

$$\text{Find}(v_1, v_2)_1 \text{ collect, s} \rightarrow -C \cdot \frac{s}{\left[R^2 \cdot C^2 \cdot s^2 + (-C \cdot R_0 + 2 \cdot R \cdot C) \cdot s + 1 \right]} \cdot (R + R_0)$$

Отже, одержимо:

$$H(s) := \frac{s \cdot \frac{(2 \cdot R - R_0) \cdot C}{R^2 \cdot C^2}}{s^2 + \frac{(2 \cdot R - R_0) \cdot C}{R^2 \cdot C^2} \cdot s + \frac{1}{(R^2 \cdot C^2)}} \cdot \frac{-(R + R_0)}{(2 \cdot R - R_0)}$$

Given

$$\frac{\omega_p}{Q_p} = \frac{(2 \cdot R - R_0) \cdot C}{R^2 \cdot C^2} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{(R \cdot C)^2}$$

$$\text{Find}(\omega_p, Q_p)^{\langle 0 \rangle} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{1}{R \cdot C} \\ R \\ \frac{1}{(2 \cdot R - R_0)} \end{array} \right] \quad \text{Тоді маємо: } K := (-1) \cdot \frac{(R + R_0)}{(2 \cdot R - R_0)}$$

Звідси одержимо системну функцію у загальному вигляді:

$$H(s) = \frac{V_1(s)}{V_0(s)} = K \frac{2\alpha_p \cdot s}{s^2 + 2\alpha_p \cdot s + \omega_p^2} = K \frac{\left(\frac{\omega_p}{Q_p} \right) \cdot s}{s^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p} \right) s + \omega_p^2}, \quad (1)$$

де $\omega_p = \frac{1}{RC}$ – частота полюсів (модуль); $Q_p = \frac{R}{2R - R_0}$ – добротність полюсів;

$K = -\frac{R_0 + R}{2R - R_0}$; $s_{p1,p2} = -\alpha_p \pm j\sqrt{\omega_p^2 - \alpha_p^2}$; або $s_{p1,p2} = \frac{-\omega_p}{2Q_p} \pm j\sqrt{\omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{4Q_p^2}\right)}$ –

ПОЛЮСИ.

Добротність полюсів визначається так:

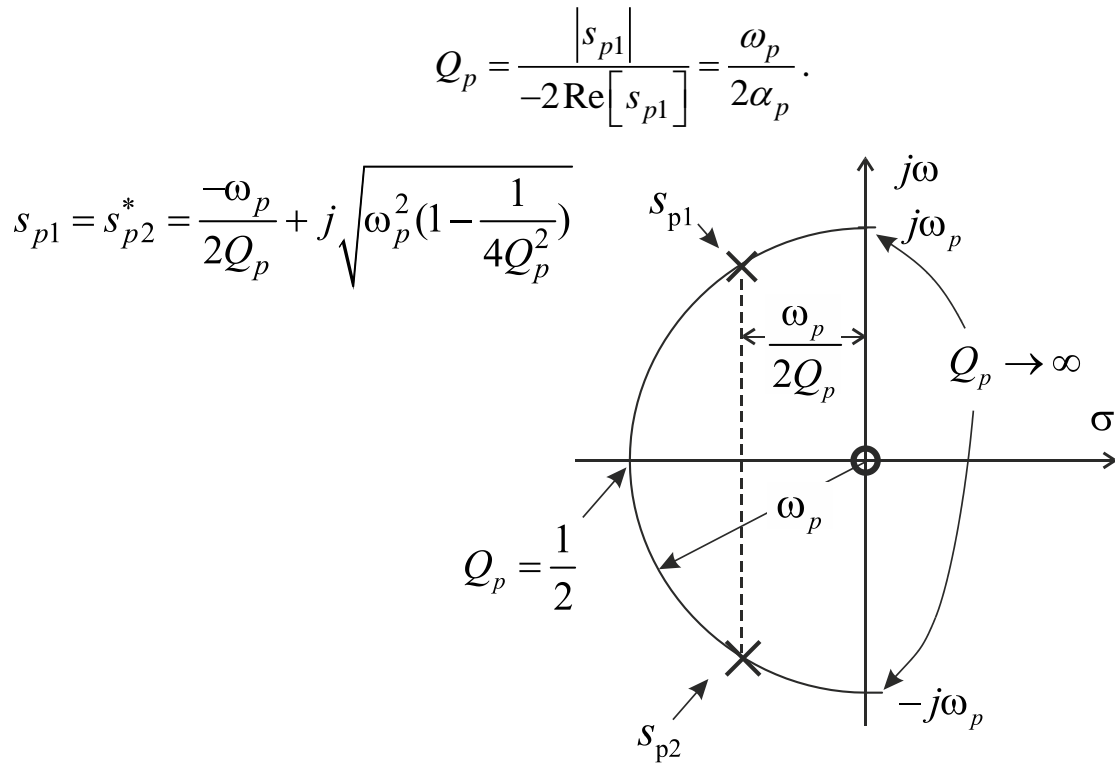


Рис. 2. Діаграма полюсів і нулів виразу (1)

При зміні R_0 полюси переміщуються по окружності радіусом ω_p .

Якщо $0 < R_0 < 2R$, то добротність $\frac{1}{2} < Q_p < \infty$.

При $Q_p = 1/2$ (коли $R_0 = 0$) полюси сполучаються на від'ємній частині осі σ у точці $\sigma = -\omega_p = -1/RC$.

При $Q_p \rightarrow \infty$ (якщо $R_0 \rightarrow 2R$) полюси наближаються до точок $\pm j\omega_p$.

Якщо $R_0 > 2R$, то полюси переміщуються в праву s -півплощину, що означає нестійкість системи.

Резонанс заслуговує уваги головним чином, коли добротність полюсів велика, наприклад $Q_p \geq 10$. Коли добротність полюсів приймає велике значення, полюси знаходяться достатньо близько від осі $j\omega$.

Останнє є загальною властивістю будь-яких *частотно-вибіркових систем*. У цьому випадку діаграма полюсів і нулів стає такою, як зображено на рис. 3.

Результати, знайдені при дослідженні впливу нулів і полюсів на частотну характеристику схеми на операційному підсилювачі (рис. 1), можна

використати для великого класу резонансних систем, використовуючи нуль-полосне зображення їх характеристик.

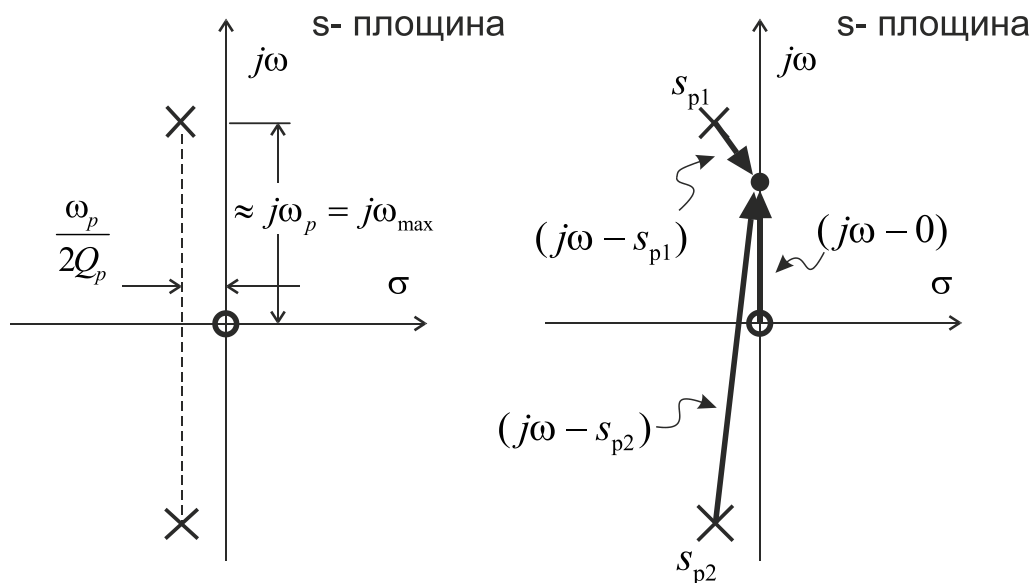


Рис. 3. Діаграма полюсів і нулів резонансної системи з великим Q

При великому Q_p КЧФ $H(j\omega)$ матиме вигляд:

$$H(j\omega) = \frac{K \frac{\omega_p}{Q_p} (j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} (j\omega) + \omega_p^2} = \frac{K \frac{\omega_p}{Q_p} (j\omega - 0)}{(j\omega - s_{p1})(j\omega - s_{p2})} \approx$$

$$\approx \frac{K \frac{\omega_p}{Q_p} (j\omega - 0)}{(j\omega + \frac{\omega_p}{2Q_p} - j\omega_p)(j\omega + \frac{\omega_p}{2Q_p} + j\omega_p)}, \quad (2)$$

$$\text{де } s_{p1} = s_{p2}^* = \frac{-\omega_p}{2Q_p} + j \sqrt{\omega_p^2 (1 - \frac{1}{4Q_p^2})} \approx \frac{-\omega_p}{2Q_p} + j\omega_p.$$

Поблизу $\omega = \omega_p$ можна вважати, що вектори $(j\omega - 0)$ і $(j\omega - s_{p2})$ є постійними, незалежними від $j\omega$ і рівними відповідно $j\omega_p$ і $2j\omega_p$. Тоді поведінка $H(j\omega)$ поблизу ω_p визначається швидкою зміною вектора $(j\omega - s_{p1})$, тобто її можна надати так:

$$H(j\omega) \approx K \frac{\frac{\omega_p}{Q_p} j\omega_p}{\left(j\omega + \frac{\omega_p}{2Q_p} - j\omega_p \right) 2j\omega_p} = \frac{K}{1 + j2Q_p \left(\frac{\omega - \omega_p}{\omega_p} \right)}, \quad (3)$$

де $K = H(j\omega_p)$.

Користуючись наближеною формулою (3), можемо зобразити узагальнену резонансну криву для ω в околі ω_p ($f = \omega/2\pi$ в околі $f_p = \omega_p/2\pi$), як на рис. 4.

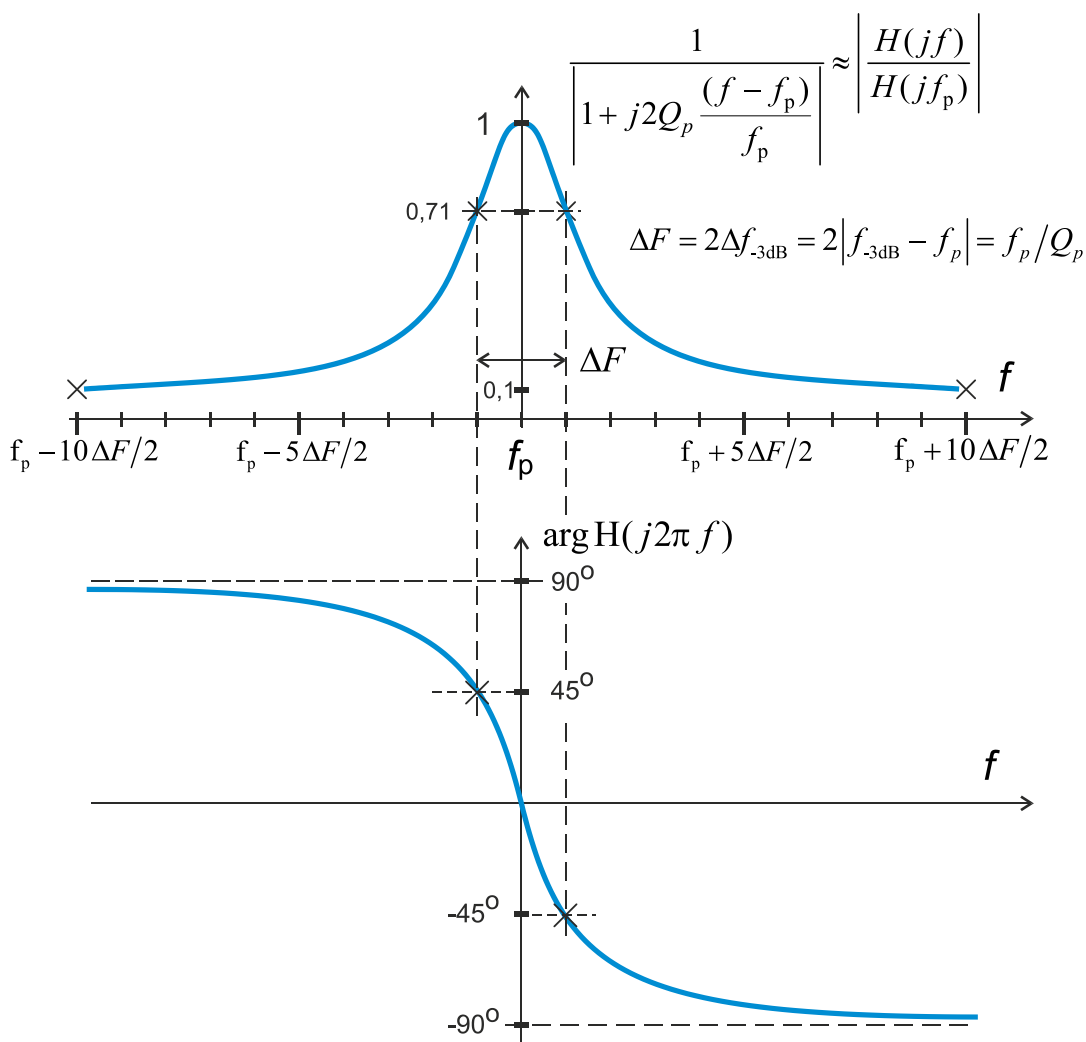


Рис. 4. Узагальнена резонансна крива

За великих за значенням $Q_p \gg 1$ резонансна крива відмінна від нуля в узькій області частот в околі резонансної частоти та практично симетрична за формою відносно ω_p .

Максимальне значення $|H(j\omega)|_{\max}$ характеристика приймає при частоті $\omega = \omega_{\max} = \omega_p$, тобто $|H(j\omega)|_{\max} = |H(j\omega_p)|$, де ω_p – модуль полюсів s_{p1}, s_{p2} .

$$\text{При } 2Q_p \left(\frac{\omega - \omega_p}{\omega_p} \right) = \pm 1 \text{ або } \omega = \omega_p \pm \frac{\omega_p}{2Q_p} \text{ маємо } H(j\omega) = \frac{e^{\mp j\pi/4} H(j\omega_p)}{\sqrt{2}}.$$

Значення частоти, при яких $|H(j\omega)|^2 = |H(j\omega_p)|^2 / 2$, є *точками рівня половинної потужності*.

Отже, відношення ширини смуги пропускання за рівнем половинної потужності до центральної частоти приблизно дорівнює:

$$\frac{2 \cdot |\omega_{-3\text{dB}} - \omega_p|}{\omega_p} = \frac{1}{Q_p}. \quad (4)$$

Смуга пропускання резонансної системи дорівнює:

$$2\Delta\omega_{-3\text{dB}} = \frac{\omega_p}{Q_p}; \quad \Delta F_{-3\text{dB}} = 2\Delta f_{-3\text{dB}} = 2|f_{-3\text{dB}} - f_p| = \frac{f_p}{Q_p} \text{ [Гц]}.$$

Послідовний коливальний контур

Класичну схему модель послідовного коливального контуру зображено на рис. 5.

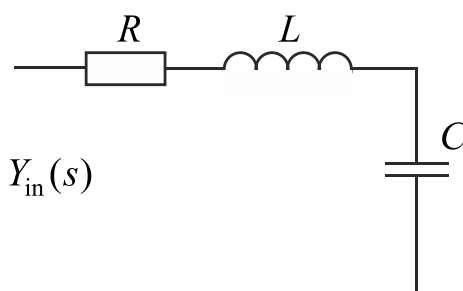


Рис. 5. Класична (канонічна) схемна модель послідовного коливального контуру

Важливою характеристикою контуру є вхідна провідність³⁴, від якої залежить струм в контурі. Так операторна провідність контуру дорівнює:

³⁴ Адмітанс – повна комплексна провідність; імпеданс – повний комплексний опір; імітанс – загальне поняття, що включає в себе поняття і адмітансу і імпедансу.

$$Y(s) = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{R} \frac{\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right) \cdot s}{s^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)s + \omega_p^2}, \quad (5)$$

$$\text{де } \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \frac{\omega_p}{Q_p} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q_p = \frac{L \cdot \omega_p}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R\omega_p C}; \quad K = \frac{1}{R}.$$

Якщо $s = j\omega$, то одержимо вираз для функції адмітанса (повної комплексної провідності) контуру $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ ³⁵

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{1}{R} \frac{2\alpha_p(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + \omega_p^2} = \frac{1}{R} \frac{\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)(j\omega)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)(j\omega) + \omega_p^2},$$

$$\text{де } 2\alpha_p = \omega_p / Q_p.$$

Діаграма полюсів-нулів функції адмітанса $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ послідовного резонансного контуру при зміні $R \rightarrow 0$ веде себе так саме, як діаграма полюсів-нулів схеми на рис. 1 при зміні $R_0 \rightarrow 2R$.

У пасивних R, L, C – контурах (мається на увазі класична схемна модель) частота полюсів ω_p (модуль) збігається з частотою, на якій виникає явище резонансу напруг (послідовний контур) чи струмів (паралельний контур) реактивних елементів.

Традиційно частоту ω_p позначають $\omega_{\text{рез}}$. Тоді маємо $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$.

Добротність послідовного контуру дорівнює:

$$Q_{\text{пл}} = \frac{L \cdot \omega_{\text{рез}}}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R\omega_{\text{рез}}C}.$$

Надамо функцію адмітанса в іншій формі:

³⁵ $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ має такий самий вигляд як КЧФ $H(j\omega)$ схеми на рис. 1:

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{вх}}(j\omega) &= \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j \left[(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \frac{1}{R} \right]} = \\
 &= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j \left[Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega} \right) \right]} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\xi},
 \end{aligned} \tag{6}$$

де $\xi_{\text{пл}} = \frac{x}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega} \right)$ – узагальнене розстроювання

(узагальнена характеристика відхилення частоти вхідної гармонічної напруги від резонансної частоти контуру).

Коли частота вхідної напруги ω наближається до частоти резонансу $\omega_{\text{рез}}$,

матиме $\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega} \approx 2 \cdot \frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}}$, тоді одержимо:

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) \approx \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j2Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}} \right)};$$

$$|Y_{\text{вх}}(j\omega)| = \frac{1}{R \sqrt{1 + \left[(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \frac{1}{R} \right]^2}} = \frac{1}{R \sqrt{1 + \xi^2}} \approx \frac{1}{R \sqrt{1 + \left[2Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}} \right) \right]^2}}; \tag{7}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \frac{1}{R} \right] = -\arctg \xi \approx -\arctg \left[2Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}} \right) \right]. \tag{8}$$

Отже, при наближенні ω до частоти резонансу $\omega_{\text{рез}}$ узагальнене розстроювання визначається так:

$$\xi_{\text{пл}} \approx 2Q_{\text{пл}} \frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}}$$

Примітка. Якщо вхідна напруга $v_0(t) = V_0 \cos(\omega_{\text{вх}} t + \varphi_1)$, то струм в контурі в усталеному гармонічному режимі дорівнює:

$$i(t) = \text{Re} \left[Y_{\text{вх}}(j\omega) \cdot V_0 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \right] = V_0 |Y_{\text{вх}}(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi_1 + \arg Y_{\text{вх}}(j\omega)].$$

Резонанс у послідовному контурі

Під час резонансу вектори напруг реактивних елементів послідовного контуру дорівнюють

$$V_L(j\omega_{\text{рез}}) = I_{m,\text{рез}} \cdot L\omega_{\text{рез}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

$$V_C(j\omega_{\text{рез}}) = I_{m,\text{рез}} \cdot \frac{1}{C\omega_{\text{рез}}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

На частоті резонансу амплітуда напруги на ємності дорівнює амплітуді напруги на індуктивності, вони мають зсув за фазою $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ відносно загального струму у контурі, знаходяться у протифазі відносно одна одної. Тобто напруги послідовно з'єднаних реактивних елементів взаємно компенсують одна одну (рівні за модулем та протилежні за напрямом).

Частота резонансу послідовного контуру визначається за умови, що реактивна складова опору дорівнює нулю:

$$x(\omega) = \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]_{\omega=\omega_{\text{рез}}} = 0,$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9)$$

Явище резонансу в послідовному контурі називають *резонансом напруг на реактивних елементах, або послідовним резонансом*. У разі резонансу послідовний контур можна розглядати як резистивний елемент з активним опором R . Амплітуда струму максимальна і дорівнює

$$I_{m,\text{вх}} = I_{m,\text{рез}} = I_{\text{max}} = V_0/R.$$

Якщо $\omega_{\text{вх}} \neq \omega_{\text{рез}}$, струм у контурі дорівнює:

$$I_{m,\text{вх}} = V_0 \cdot |Y_{\text{вх}}(j\omega)| = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left[(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \frac{1}{R} \right]^2}} = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (10)$$

На резонансній частоті реактивний опір контуру $x = \omega L - 1/\omega C = 0$ і зсув фаз $\varphi(\omega) = -\arctg[x/R] = -\arctg \xi = 0$ дорівнюють нулю ($\xi = 0$).

Для діючих (середньоквадратичне, ефективне) значень напруг на елементах контуру маємо:

$$V_C = V_L = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{R} \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{R} \omega_{\text{рез}} L = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} Q_{\text{пл}}.$$

Отже, добротність контуру

$$Q_{\text{пл}} = \frac{L \cdot \omega_{\text{рез}}}{R} = \frac{L}{R \sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R \omega_{\text{рез}} C}$$

показує, у скільки разів збільшується напруга на реактивних елементах у порівнянні із напругою на активному елементі або у порівнянні із напругою джерела.

За сумарного симетричного відхилення частоти вхідного сигналу від резонансної $2\Delta\omega_{-3\text{дБ}}$ (на значення $\pm\Delta\omega_{-3\text{дБ}}$ відносно $\omega_{\text{рац}}$) максимальне значення струму в контурі зменшується у $\sqrt{2}$ рази, якщо

$$\xi = \frac{2\Delta\omega \cdot Q_{\text{пл}}}{\omega_{\text{рез}}} = \pm 1. \quad (11)$$

Звідси смуга пропускання контуру $\Delta F_{-3\text{дБ}}$ [Гц] за рівнем -3дБ :

$$2\pi \cdot \Delta F_{-3\text{дБ}} = 2\Delta\omega_{-3\text{дБ}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q_{\text{пл}}}. \quad (12)$$

Отже, чим більша добротність $Q_{\text{пл}}$, тим вузьча смуга пропускання, а враховуючи $I_{m,\text{рез}} = V_0/R$, тим більше резонансне значення струму та максимальне значення АЧХ.

Раніше було визначено, що при резонансі обвідна гармонічного струму $I_{m,\text{рез}}[1 - e^{-\alpha_k t}] \cos(\omega_{\text{рез}} t)$ монотонно зростає за експоненціальним законом від нуля до кінцевого значення $I_{m,\text{рез}}$. Усталеного значення $I_{m,\text{рез}}$ з відносною похибкою γ амплітуда струму досягає за час:

$$t_{\text{уст.}/\gamma} = -\tau_k \ln \gamma = -\frac{\ln \gamma}{\alpha_k} = -\frac{2Q_{\text{пл}}}{\omega_{\text{рез}}} \cdot \ln \gamma. \quad (13)$$

Якщо, наприклад, задати $\gamma = 0,1$ і в цей вираз підставити (12), то дістанемо наступний вираз для часу встановлення реакції контуру на підключення джерела гармонічної напруги:

$$t_{\text{уст.}/\lambda=0,1} = 2,3 \cdot \tau_k = \frac{2,3}{\alpha_k} = 2,3 \cdot \frac{2Q_{\text{пл}}}{\omega_{\text{рез}}} = \frac{2,3 \cdot 2}{2\pi \cdot \Delta F_{-3\text{дБ}}} \approx \frac{0,73}{\Delta F_{-3\text{дБ}}}.$$

Отже, чим більша добротність $Q_{\text{пл}}$ (вужча смуга пропускання $\Delta F_{-3\text{дБ}}$), тим більший час встановлення сигналу в контурі.

Важливою характеристикою контуру є також коефіцієнт передачі за напругою: $K_C(j\omega)$, якщо вихідна величина – це напруга на ємнісному елементі; або $K_L(j\omega)$, якщо вихідна величина – це напруга на індуктивному елементі.

$$K_C(j\omega) = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{jR\omega C} \cdot \frac{1}{1 + j \left[Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega} \right) \right]} = \frac{-jQ_{\text{пл}}}{\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} (1 + j\xi)};$$

$$K_L(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{R} \cdot \frac{j\omega L}{1 + j \left[Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega} \right) \right]} = \frac{jQ_{\text{пл}}}{\frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega} (1 + j\xi)}.$$

Звідки, при малих неузгодженнях за частотою, коли $\omega/\omega_{\text{рез}} \approx 1$, можна приблизно вважати

$$|K_C(j\omega)| \approx |K_L(j\omega)| \approx \frac{Q_{\text{пл}}}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Отже, послідовний коливальний контур має властивість *при резонансі підсилювати вхідну напругу, причому коефіцієнт підсилення дорівнює добротності контуру.*

Паралельний коливальний контур

Класичну схемну модель паралельного коливального контуру зображено на рис. 6.

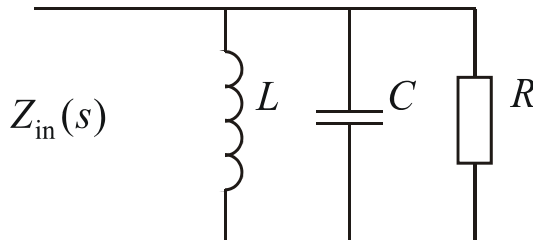


Рис. 6. Класична (канонічна) схемна модель паралельного коливального контуру

Отже, важливою характеристикою паралельного контуру є вхідна функція імпеданса (повний комплексний опір $Z_{\text{вх}}(j\omega)$), від якого залежить напруга на контурі. Так операторний опір контуру дорівнює:

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} = R \frac{s \cdot \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)}{s^2 + s \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right) + \omega_p^2}, \quad (14)$$

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \frac{\omega_p}{Q} = \frac{1}{RC} \Rightarrow Q_{\text{пр}} = RC\omega_p = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = R \frac{1}{\omega_p L}; \quad K = R.$$

Якщо прийmemo $s = j\omega$, одержимо вираз для повного комплексного опору $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ контуру.

Діаграма полюсів-нулів функції імпеданса $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ паралельного резонансного контуру при зміні $R \rightarrow \infty$ веде себе так саме, як діаграма полюсів-нулів схеми на рис. 1 при зміні $R_0 \rightarrow 2R$.

Примітка. Якщо вхідний струм $i_0(t) = I_0 \cos(\omega_{\text{вх}}t + \varphi_1)$, то напруга на контурі в усталеному режимі дорівнює:

$$v(t) = \text{Re} \left[Z_{\text{вх}}(j\omega) \cdot I_0 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \right] = I_0 |Z_{\text{вх}}(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi_1 + \arg Z_{\text{вх}}(j\omega)].$$

Інший вигляд функції імпеданса контуру:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{вх}}(j\omega) &= \frac{1}{Y_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} = R \cdot \frac{1}{1 + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})R} = \\
 &= R \cdot \frac{1}{1 + jQ_{\text{пр}}(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega})} = R \cdot \frac{1}{1 + j\xi_{\text{пр}}} \approx R \cdot \frac{1}{1 + j2Q_{\text{пр}}\left(\frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}}\right)}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

де $\xi_{\text{пр}} = \frac{b}{g} = (\omega C - 1/L\omega)R = Q_{\text{пр}}(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega})$. Аналогічно, приблизна рівність має

місце тоді, коли частота вхідної напруги наближається до частоти резонансу.

$$\begin{aligned}
 |Z_{\text{вх}}(j\omega)| &= \frac{R}{\sqrt{1 + \left[\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)R\right]^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \xi_{\text{пр}}^2}} \approx \frac{R}{\sqrt{1 + \left[2Q_{\text{пр}}\left(\frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}}\right)\right]^2}}; \quad (16) \\
 \varphi(\omega) &= -\arctg\left[\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)R\right] = -\arctg \xi_{\text{пр}} \approx -\arctg\left[2Q_{\text{пр}}\left(\frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}}\right)\right].
 \end{aligned}$$

Отже, при наближенні ω до частоти резонансу $\omega_{\text{рез}}$ узагальнене розстроювання визначається так:

$$\xi_{\text{пр}} \approx 2Q_{\text{пр}} \frac{\omega - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}}$$

Якщо добротність достатньо велика, то резонансна крива практично симетрична відносно частоти $\omega_{\text{рез}}$.

Резонанс у паралельному контурі

За умови резонансу вектори струмів реактивних елементів

$$I_L(j\omega_{\text{рез}}) = \frac{V_{m,\text{рез}}}{L\omega_{\text{рез}}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$I_C(j\omega_{\text{рез}}) = V_{m,\text{рез}} C \omega_{\text{рез}} e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

рівні за модулем та протилежні за напрямом. Вони мають зсув за фазою $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ відносно загальної напруги на контурі, знаходяться у протифазі та повністю компенсують один одного.

Частота резонансу паралельного контуру визначається за умови, що реактивна складова провідності дорівнює нулю:

$$b(\omega) = \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right]_{\omega=\omega_{\text{рез}}} = 0,$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{рез}} = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (17)$$

Явище резонансу в паралельному контурі називають *резонансом струмів*, або *паралельним резонансом*. У разі резонансу паралельний контур можна розглядати як резистивний елемент з активним опором R . Струм через реактивну LC – гілку загалом дорівнює нулю.

Амплітуда напруги при резонансі максимальна і дорівнює

$$V_{m,\text{вх}} = V_{m,\text{рез}} = V_{\text{max}} = I_0 R.$$

Якщо $\omega_{\text{вх}} \neq \omega_{\text{рез}}$, напруга на контурі дорівнює:

$$V_{m,\text{вх}} = I_0 \cdot |Z_{\text{вх}}(j\omega)| = I_0 R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left[(\omega C - \frac{1}{\omega L}) R \right]^2}} = I_0 R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{пр}}^2}}. \quad (18)$$

На резонансній частоті $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ реактивна провідність контуру $b = \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$ і зсув фаз $\varphi(\omega) = -\arctg \left[\frac{b}{(1/R)} \right] = 0$ дорівнюють нулю ($\xi = 0$).

Для діючих (середньоквадратичне, ефективне) значень струмів в елементах контуру маємо:

$$I_C = I_L = \frac{I_0}{\sqrt{2}} R \omega_{\text{рез}} C = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \frac{R}{\omega_{\text{рез}} L} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} Q_{\text{пр}}.$$

Отже, добротність контуру $Q_{\text{пр}} = R \omega_{\text{рез}} C = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_{\text{рез}} L}$ показує, у

скільки разів збільшується струм у реактивних елементах у порівнянні зі струмом в активному елементі або у порівнянні зі струмом джерела.

Аналогічно за сумарного симетричного відхилення частоти вхідного сигналу від резонансної $2\Delta\omega_{-3\text{дБ}}$ (на значення $\pm\Delta\omega_{-3\text{дБ}}$ відносно частоти $\omega_{\text{рез}}$) максимальне значення напруги на контурі зменшується у $\sqrt{2}$ рази, якщо

$$\xi = \frac{2\Delta\omega \cdot Q_{\text{пр}}}{\omega_{\text{рез}}} = \pm 1.$$

Звідси смуга пропускання контуру $\Delta F_{-3\text{дБ}}$ [Гц] за рівнем -3дБ визначається за формулою:

$$2\pi \cdot \Delta F_{-3\text{дБ}} = 2\Delta\omega_{-3\text{дБ}} = \omega_{\text{рез}} / Q_{\text{пр}}.$$

Отже, чим більша добротність Q , тим вузча смуга пропускання, враховуючи $V_{m,\text{рез}} = I_0 R$, тим більше резонансне значення напруги і максимальне значення АЧХ.

Час встановлення реакції контуру після підключення джерела гармонічного струму складає:

$$t_{\text{уст./}\gamma=0,1} = 2,3 \cdot \tau_k = \frac{2,3}{\alpha_k} = 2,3 \cdot \frac{2Q_{\text{пр}}}{\omega_{\text{рез}}} = \frac{2,3 \cdot 2}{2\pi \cdot \Delta F_{-3\text{дБ}}} \approx \frac{0,73}{\Delta F_{-3\text{дБ}}}.$$

Чим більша добротність $Q_{\text{пр}}$ (вузча смуга пропускання $\Delta F_{-3\text{дБ}}$), тим більший час встановлення сигналу в контурі.

**Схемні моделі пасивних коливальних контурів,
які враховують втрати**

Схемні моделі пасивних коливальних контурів, які враховують втрати в джерелі, конденсаторі та котушці індуктивності, зображено на рис. 21, де елемент R_L – відображає втрати у котушці (в основному за рахунок втрат енергії на активному опорі провідників та втрат у сердечнику), R_C – відображає втрати в конденсаторі (в основному за рахунок опору витoku в діелектрику, який не залежить від частоти), $R_{вн}$ – внутрішній опір джерела сигналу, R_H – шунтуючий опір навантаження.

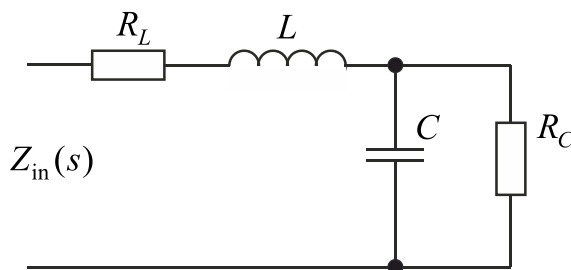


Рис. 7. Схемна модель послідовного коливального контуру, яка враховує втрати R_C в конденсаторі

Для схеми (рис. 7) вхідний комплексний опір дорівнює:

$$\begin{aligned} Z_{вх}(j\omega) &= R + j\omega L + R_C \parallel \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L + \frac{R_C}{j\omega C} \Big/ \left[R_C + \frac{1}{j\omega C} \right] = \\ &= R + \frac{R_C}{1 + (\omega C R_C)^2} + j \left[\omega L - \frac{\omega C R_C^2}{1 + (\omega C R_C)^2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Відповідно, нова частота резонансу, яка визначається за умови, що реактивна складова опору дорівнює нулю:

$$x(\omega) = \left[\omega L - \frac{\omega C R_C^2}{1 + (\omega C R_C)^2} \right]_{\omega=\omega_{рез}} = 0, \quad (20)$$

буде відмінною від частоти резонансу класичного контуру $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Втрати в котушці індуктивності (рис. 8) впливають на реактивну складову комплексної провідності паралельного контуру:

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{j\omega L + R_L} = \frac{1}{R} + \frac{R_L}{(\omega L)^2 + R_L^2} - j \left[\frac{R_L}{(\omega L)^2 + R_L^2} - \omega C \right]. \quad (21)$$

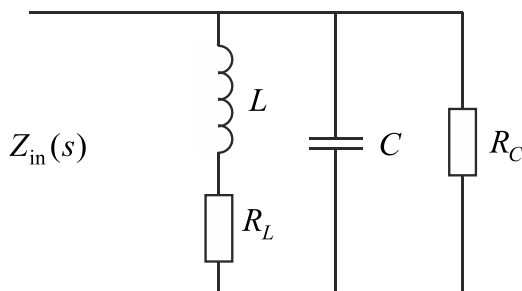


Рис. 8. Схемна модель паралельного коливального контуру, яка враховує втрати R_L у котушці індуктивності

Тобто нова частота резонансу, яка визначається за умови, що реактивна складова провідності дорівнює нулю

$$x(\omega) = \left[\frac{R_L}{(\omega L)^2 + R_L^2} - \omega C \right]_{\omega=\omega_{\text{рез}}} = 0, \quad (22)$$

буде також відмінною від частоти резонансу класичного паралельного контуру.

Висновки

1. У послідовному контурі R_C спричиняє зміну резонансної частоти. Для поліпшення селективних властивостей послідовного контуру опір втрат у конденсаторі потрібно збільшувати. Опір навантаження R_L проявляє себе так само, як і R_C .

Резонансна частота інваріантна до R_L і $R_{\text{вн}}$. Але втрати R_L і $R_{\text{вн}}$ – впливають на добротність, тобто впливають на селективність контуру – призводять до зменшення максимуму АЧХ та розширення смуги пропускання. Отже, втрати R_L і $R_{\text{вн}}$ потрібно зменшувати.

2. У паралельному коливальному контурі для забезпечення великих значень добротності джерело сигналу, на відміну від послідовного коливального контуру, повинно мати великий внутрішній опір.

Втрати у конденсаторі, як і опір навантаження, не впливають на резонансу частоту, однак зменшують резонансний опір та впливають на селективність (призводять до розширення смуги пропускання та зменшення максимуму АЧХ). Тобто R_C і R_H повинні бути великими.

На відміну від послідовного контуру, в паралельному контурі втрати у котушці R_L впливають на частоту резонансу.

Дослідження резонансних кіл у частотній області в середовищі системи Mathcad

Резонансні криві мають досить круті схили, такі, що апроксимація їх асимптотичними діаграмами Боде недостатня, тому треба безпосередньо використовувати комплексні передатні функції.

На рис. 9 – рис. 12 наведено фрагменти документів Mathcad, де на прикладі моделі (рис. 7), яка враховує втрати у конденсаторі R_C , надана технологія досліджень АЧХ і ФЧХ послідовного контуру.

У документі Mathcad на рис. 13 наведено аналіз АЧХ і ФЧХ паралельного контуру за моделлю (рис. 8), яка враховує втрати у котушці індуктивності R_L .

Приклад 1

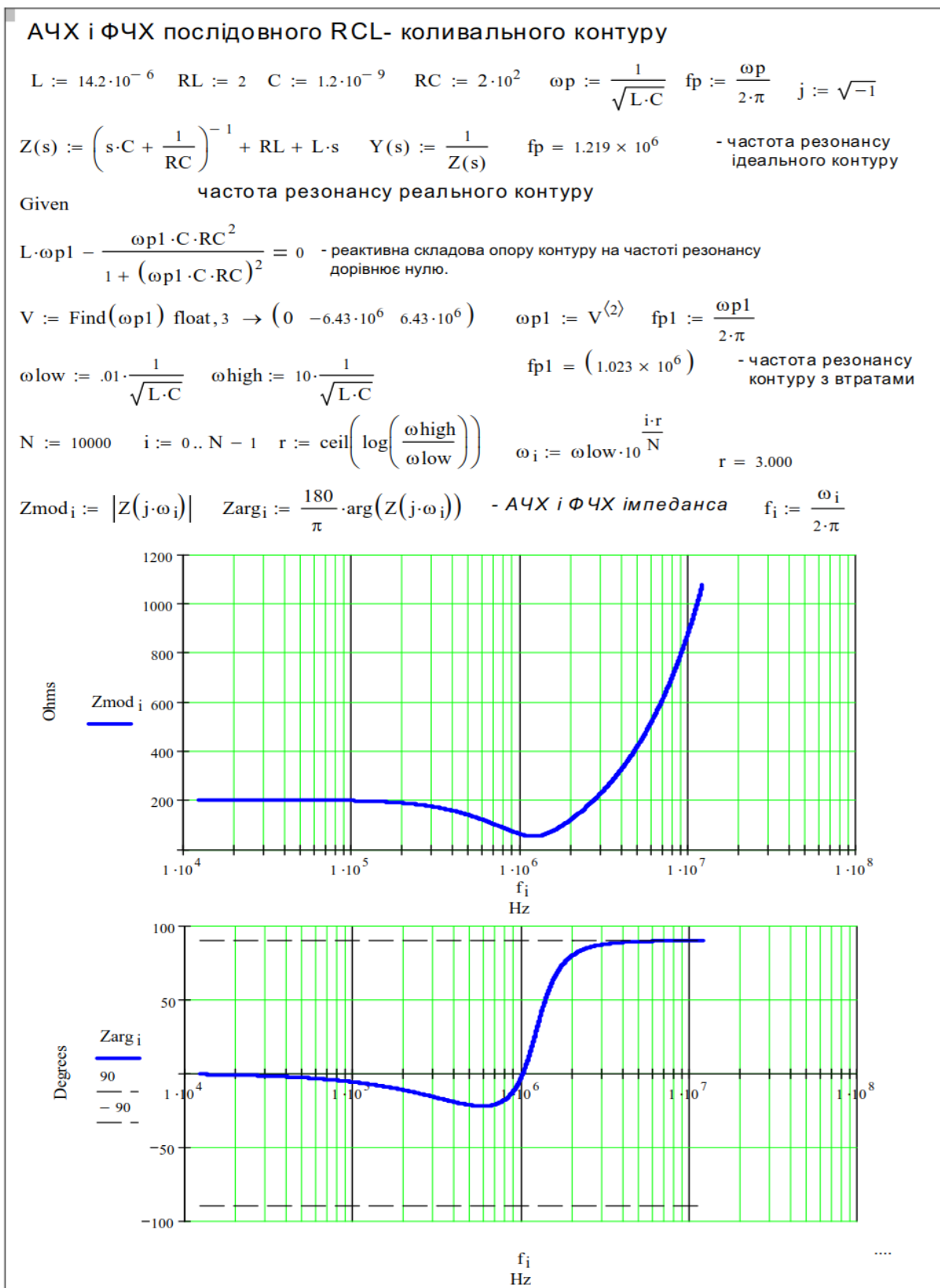


Рис. 9. Вхідний імпеданс послідовного коливального контуру з малою добротністю

Приклад 2

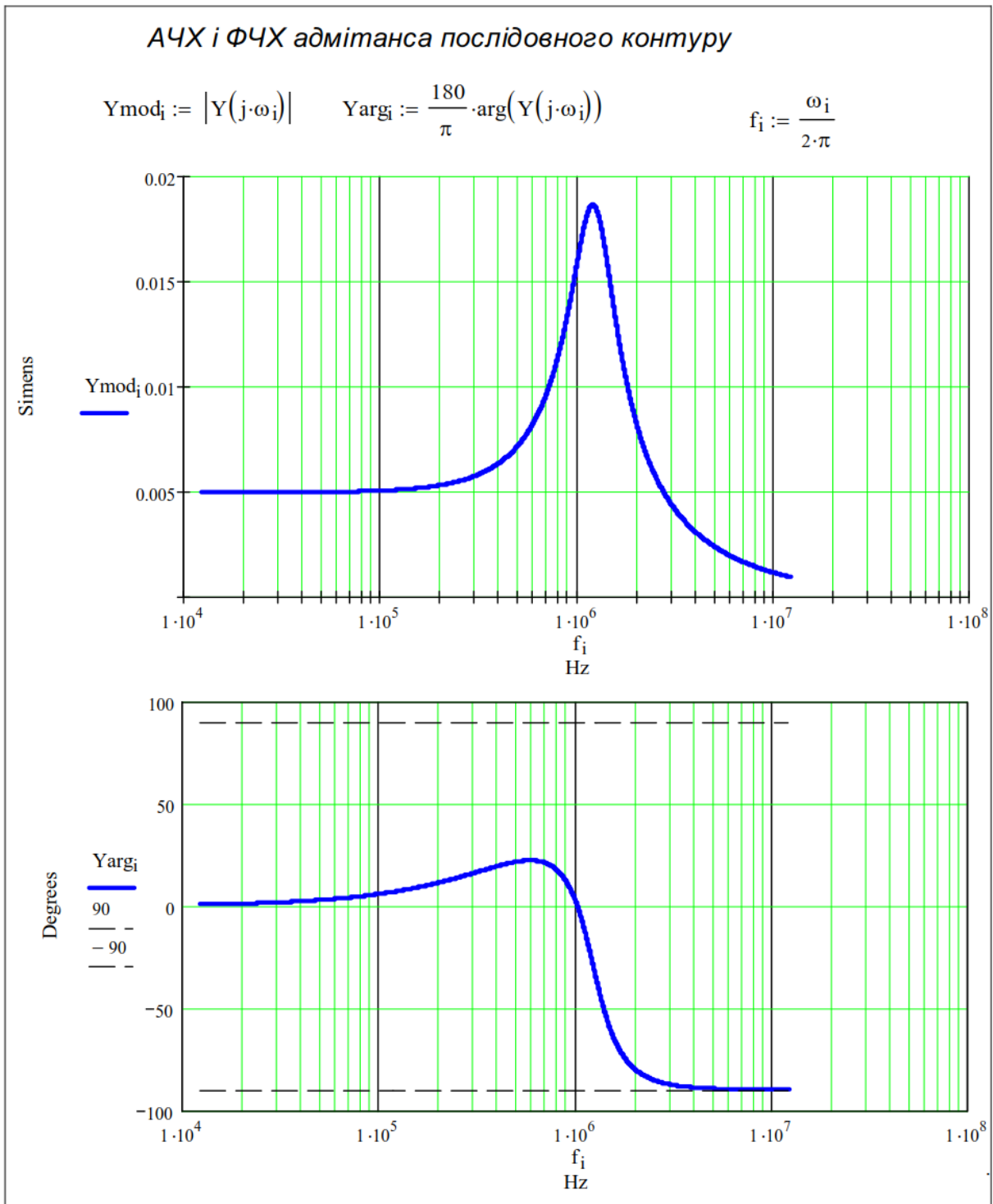
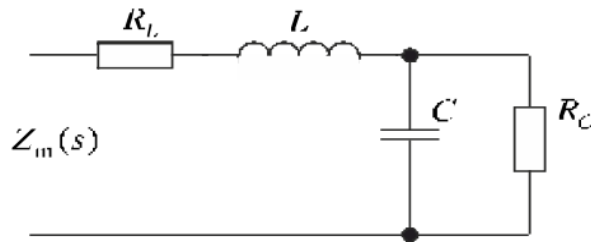


Рис. 10. Вхідний адмітанс послідовного коливального контуру з малою добротністю

Приклад 3

АЧХ і ФЧХ послідовного RCL- коливального контуру



$$L := 14.2 \mu\text{H} \quad R_L := 0.5 \Omega \quad C := 1.2 \text{nF}$$

$$\omega_p := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2 \cdot \pi} \quad R_C := 2 \text{M}\Omega$$

$$f_p = 1.219 \times 10^6 \text{ Hz} \quad \text{- частота резонансу ідеального контуру}$$

$$\omega_{\text{low}} := 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \omega_{\text{high}} := 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$Z(s) := \left(s \cdot C + \frac{1}{RC} \right)^{-1} + R_L + L \cdot s \quad Y(s) := \frac{1}{Z(s)} \quad j := \sqrt{-1}$$

$$N := 10000 \quad i := 0..N - 1 \quad r := \text{ceil} \left(\log \left(\frac{\omega_{\text{high}}}{\omega_{\text{low}}} \right) \right) \quad \omega_i := \omega_{\text{low}} \cdot 10^{\frac{i \cdot r}{N}} \quad r = 1.000$$

$$Z_{\text{mod } i} := |Z(j \cdot \omega_i)| \quad Z_{\text{arg } i} := \frac{180}{\pi} \cdot \arg(Z(j \cdot \omega_i)) \quad \text{- АЧХ і ФЧХ імпеданса} \quad f_i := \frac{\omega_i}{2 \cdot \pi}$$

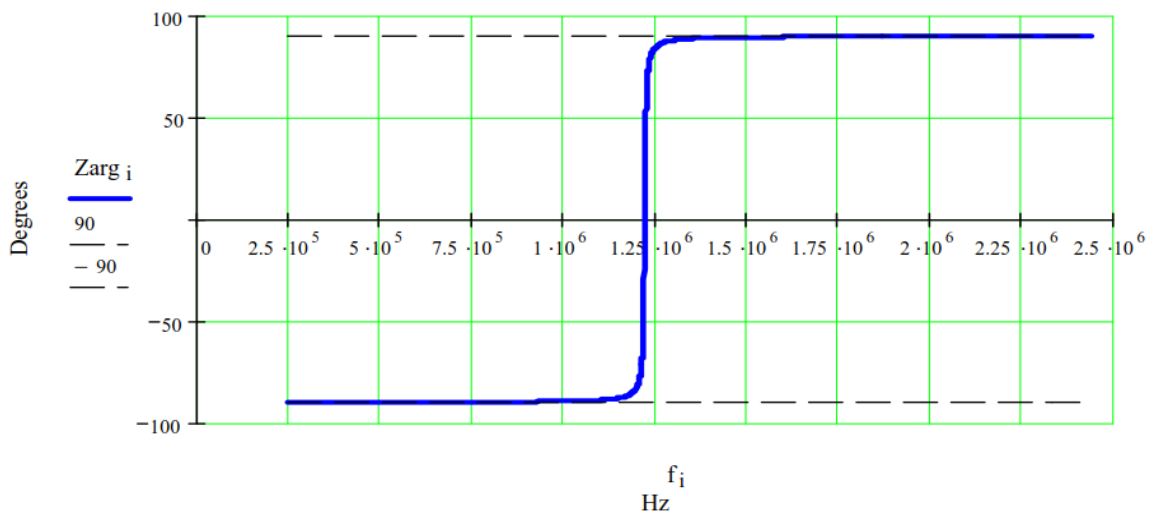
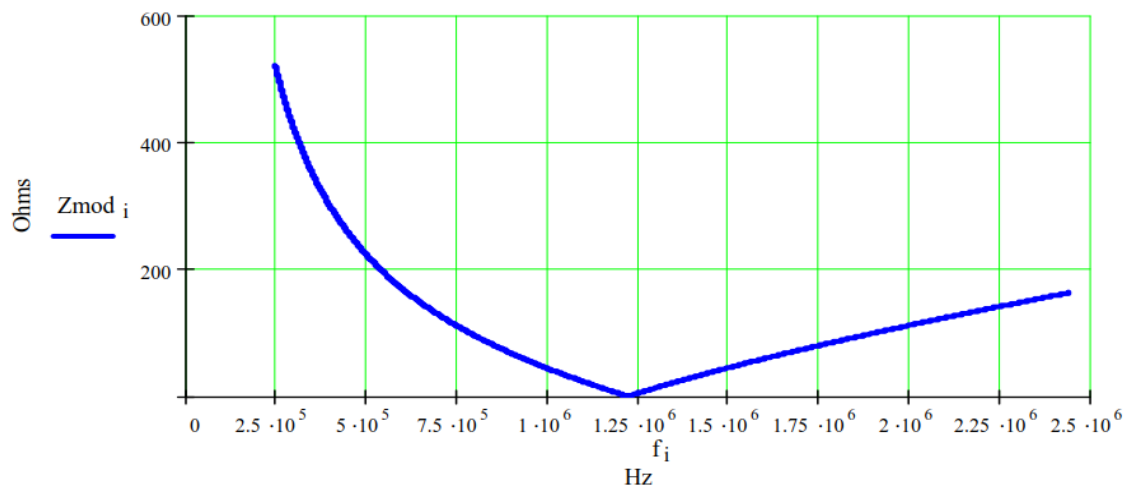


Рис. 11. Вхідний імпеданс послідовного коливального контуру з великою добротністю

Приклад 4

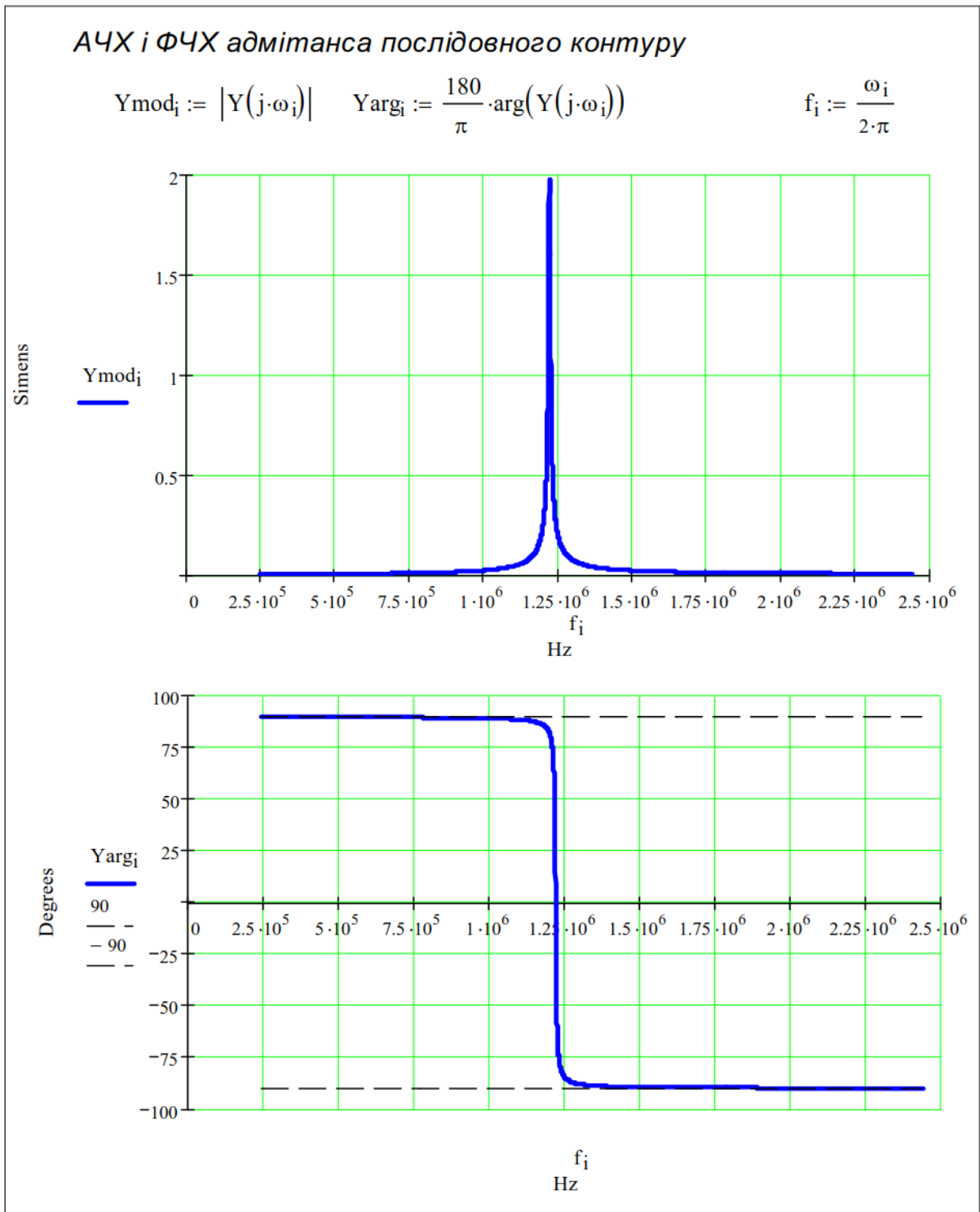
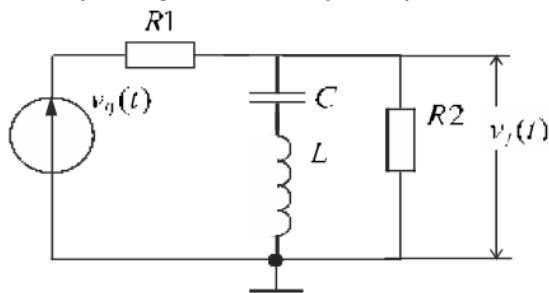


Рис. 12. Вхідний адмітанс послідовного коливального контуру з великою добротністю

Приклад 6

Загороджувальний фільтр на основі послідовного LC- контуру



$$L := 14.2 \cdot 10^{-6} \quad C := 1.2 \cdot 10^{-9}$$

$$R1 := 0.1 \cdot 10^3 \quad R2 := 1000 \cdot 10^3 \quad R := 1$$

$$\omega_p := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2 \cdot \pi} \quad j := \sqrt{-1}$$

$$f_p = 1.219 \times 10^6 \quad \text{- частота резонансу ідеального контуру}$$

R - внутрішній опір котушки індуктивності

$$\omega_{low} := .01 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \omega_{high} := 50 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$Z1(s) := s \cdot L + \frac{1}{C \cdot s} + R \quad Z2(s) := \left(Z1(s)^{-1} + \frac{1}{R2} \right)^{-1} \quad K(s) := \frac{Z2(s)}{Z2(s) + R1}$$

$$N := 10000 \quad i := 0..N - 1 \quad r := \text{ceil} \left(\log \left(\frac{\omega_{high}}{\omega_{low}} \right) \right) \quad \omega_i := \omega_{low} \cdot 10^{\frac{i \cdot r}{N}} \quad r = 4,000 \quad f_i := \frac{\omega_i}{2 \cdot \pi}$$

$$K_{mod_i} := |K(j \cdot \omega_i)| \quad K_{arg_i} := \frac{180}{\pi} \cdot \arg(K(j \cdot \omega_i)) \quad \text{- АЧХ і ФЧХ передатного коефіцієнту за напругою}$$

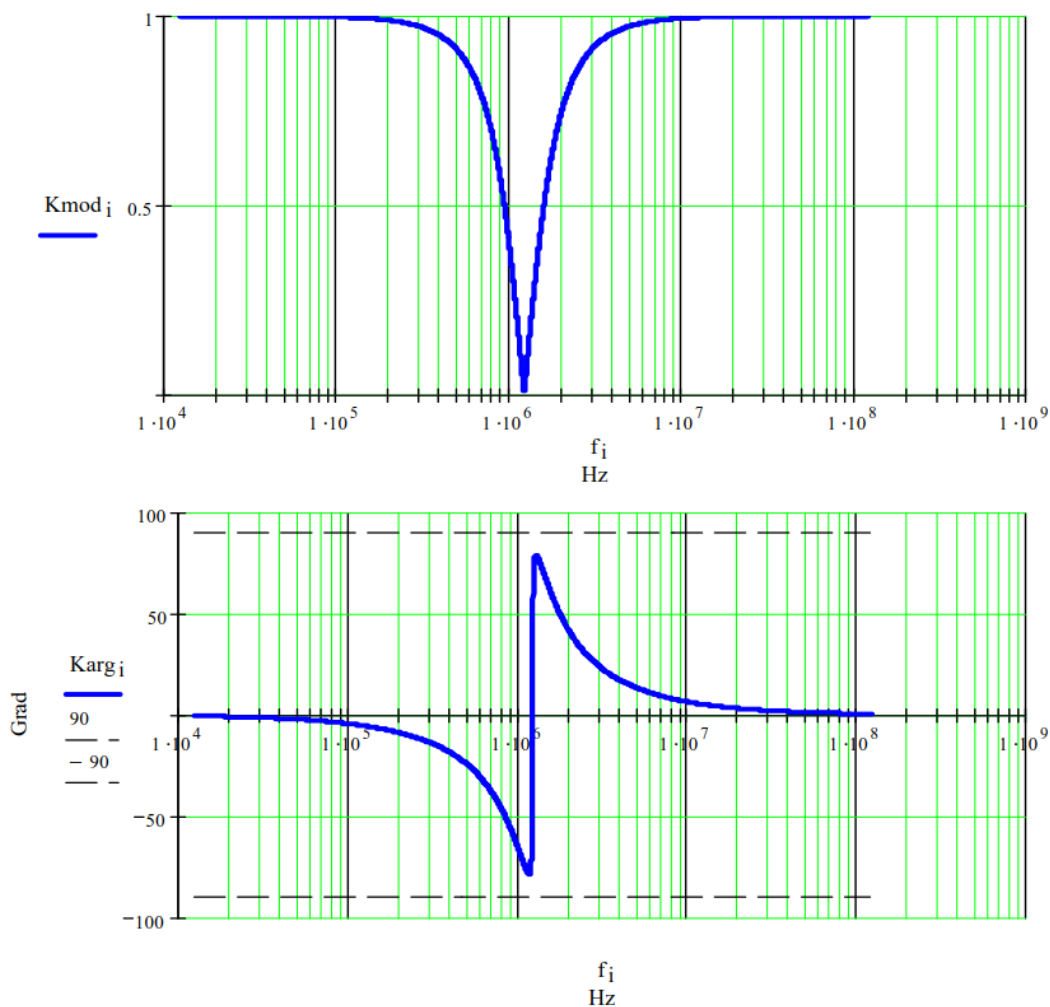


Рис. 14. Загороджувальний фільтр на основі послідовного LC- контуру

Приклад 7

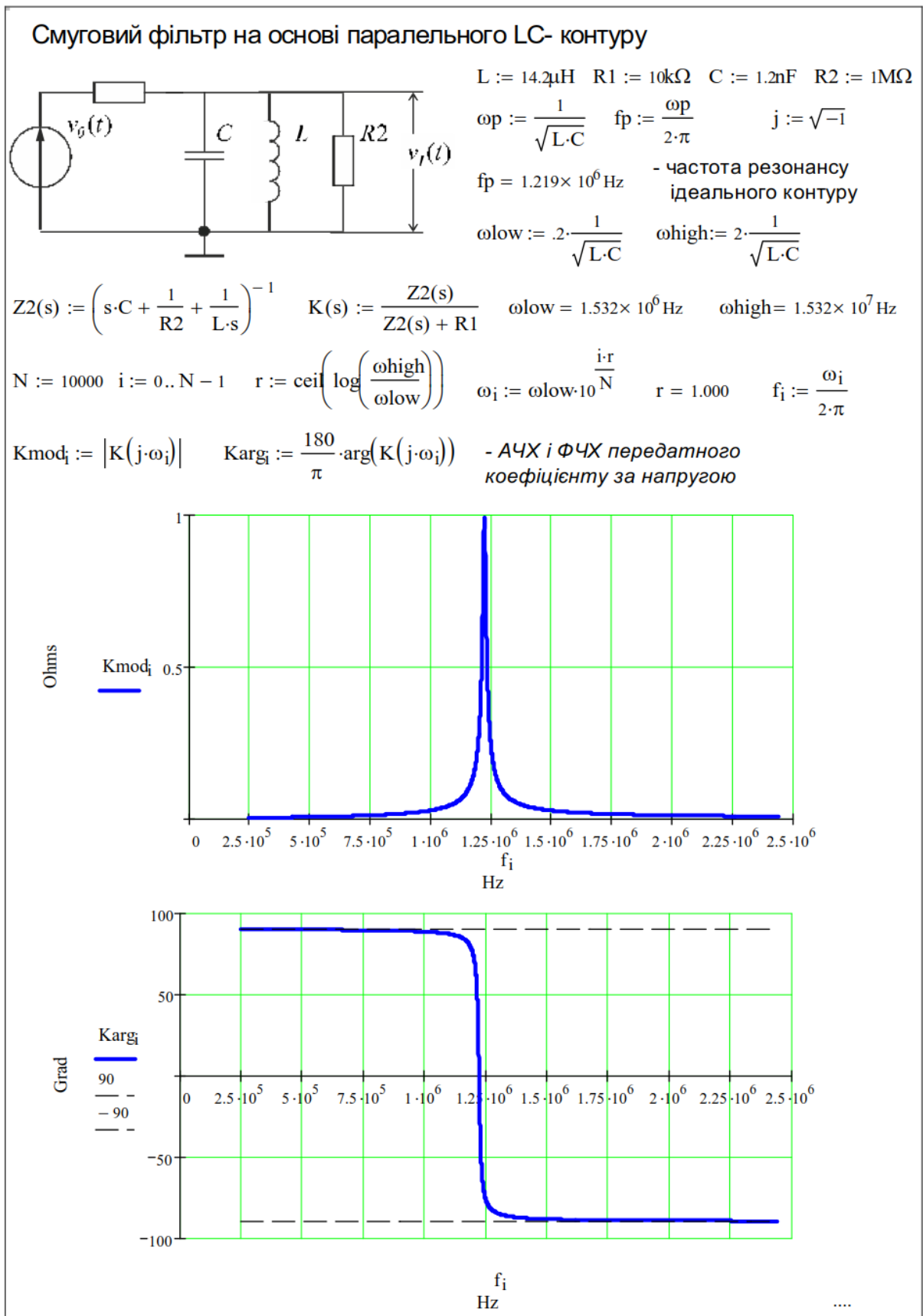


Рис. 15. Смуговий фільтр на основі паралельного LC- контуру

Аналіз у середовищі програми Micro-CAP

Дослідження значно спрощуються, якщо аналіз частотних характеристик проводити у середовищі Micro-CAP. Розглянемо приклад аналізу транзисторного підсилювача за схемою "спільний емітер", навантаженням якого є паралельний коливальний контур (рис. 16)

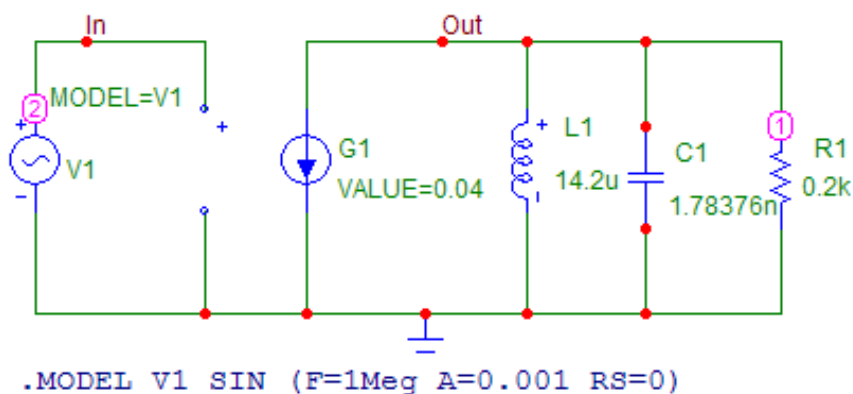


Рис. 16. Лінеаризована схема заміщення (режим малого сигналу)

У вікні **AC Analysis Limits** (рис. 17) встановіть необхідні параметри та почніть моделювання (**Run, F2** або).

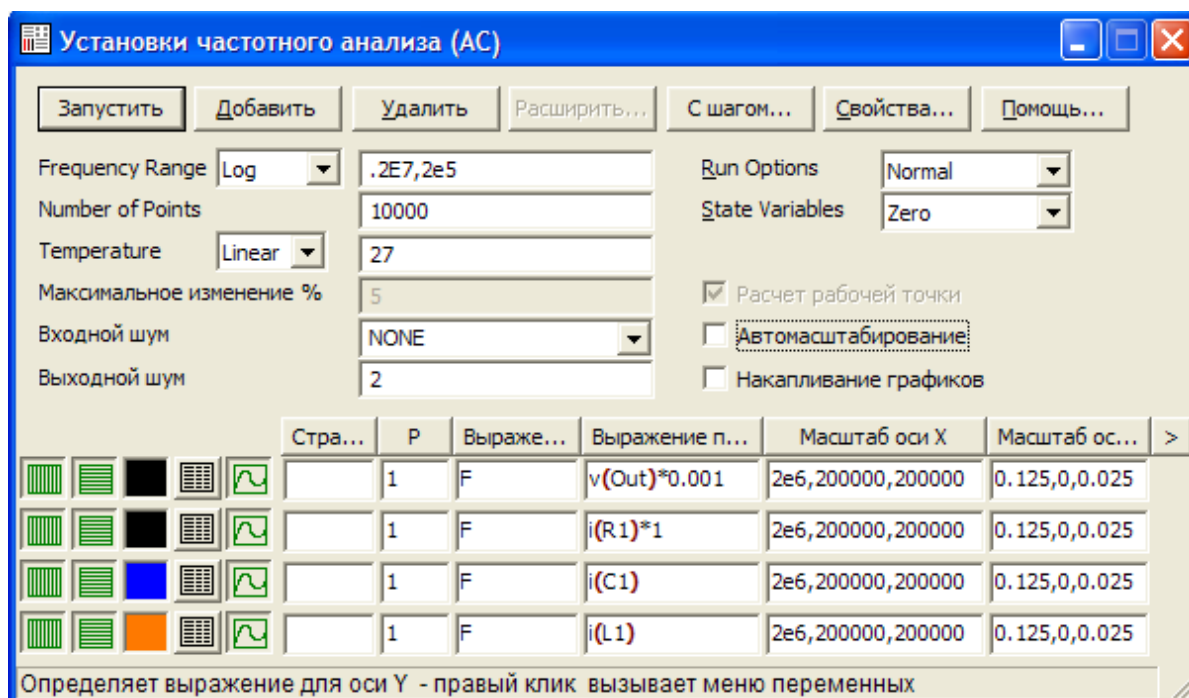
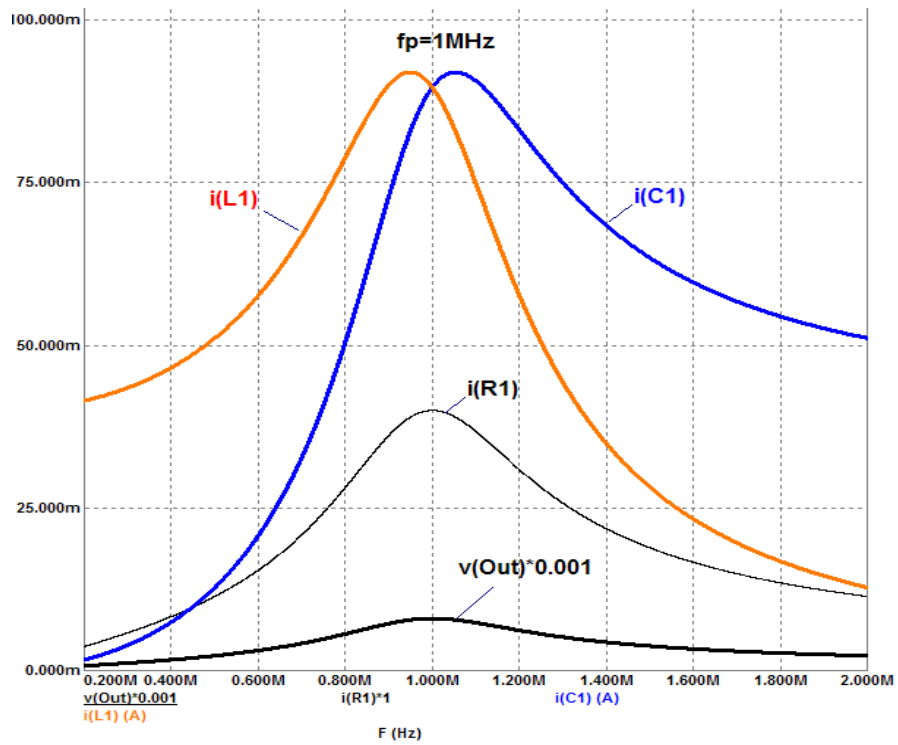
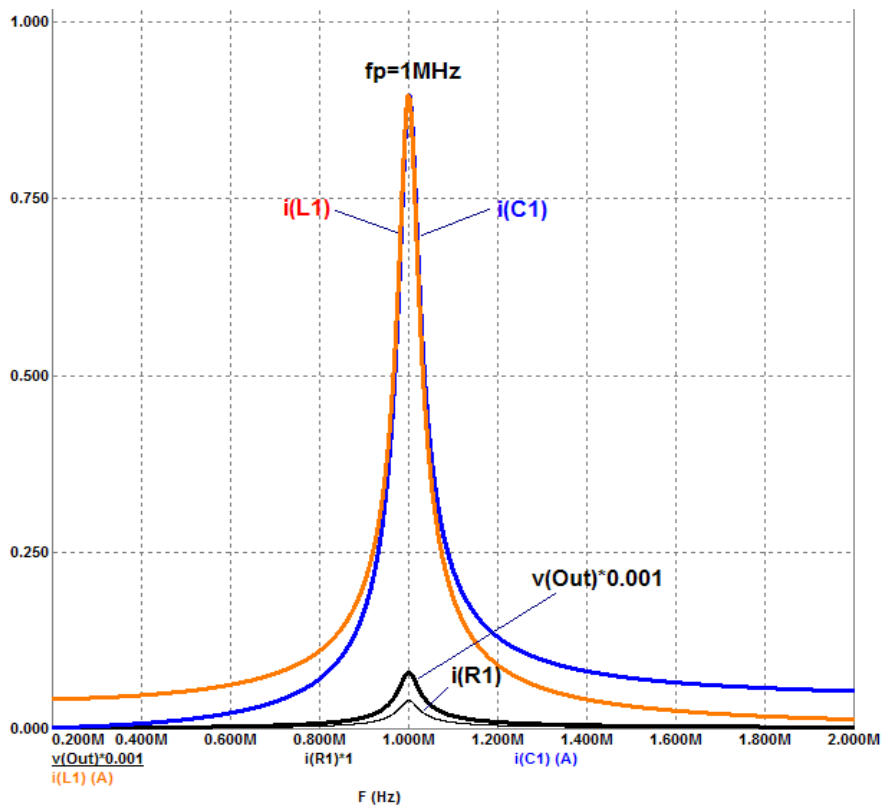


Рис. 17. Задання параметрів моделювання в режимі AC Analysis



а



б

Рис. 18. Резонансні криві для струмів і напруг елементів контуру:
 а – добротність $Q_{пр} = 2,24$ ($R1 = 0,2\kappa$); б – добротність $Q_{пр} = 22,4$ ($R1 = 2\kappa$)

Смуга пропускання контуру $\Delta F_{-3\text{дБ}}$ [Гц] за рівнем -3дБ :

$$\Delta F_{-3\text{дБ}} = \frac{2\Delta\omega_{-3\text{дБ}}}{2\pi} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\pi Q_{\text{пр}}}.$$

Отже, чим більша добротність $Q_{\text{пр}}$, тим вузуча смуга пропускання. При цьому тим більше резонансне значення напруги $V_{m,\text{рез}} = I_0 R$ і максимальне значення АЧХ.

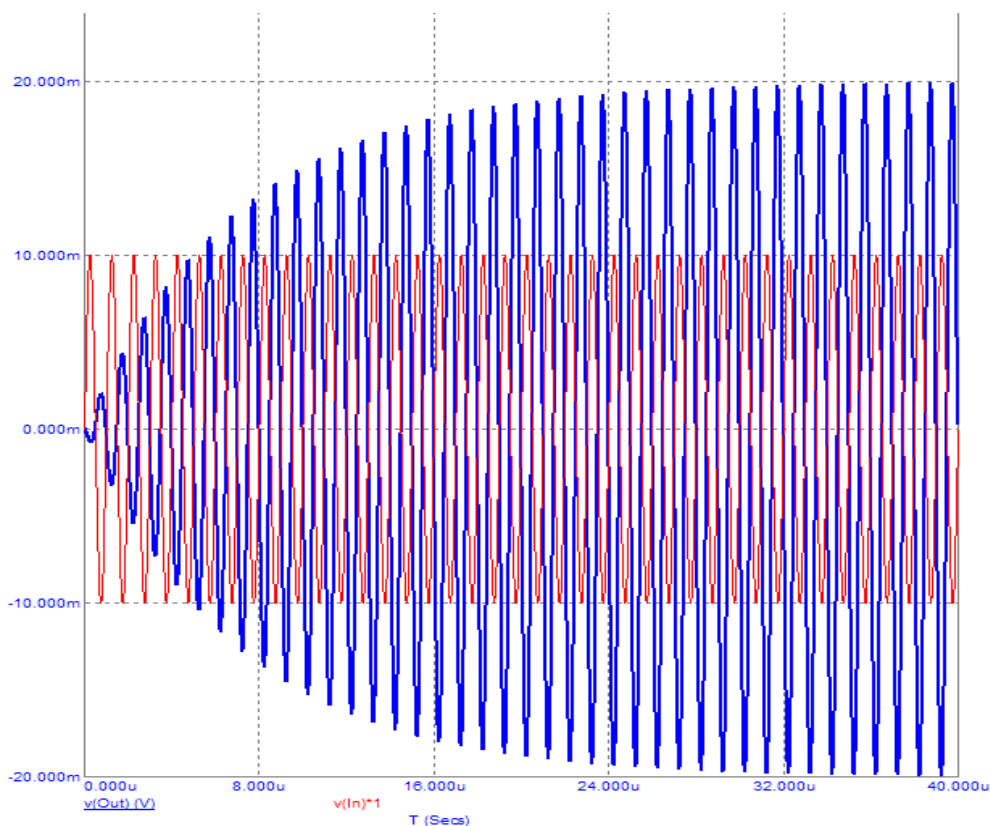


Рис. 19. Встановлення вихідної напруги, якщо контур має велику добротність $Q_{\text{пр}} = 22,4$ ($R1 = 2\text{k}$)

Час встановлення реакції контуру після підключення джерела сигналу:

$$t_{\text{уст.}/\gamma=0,1} = 2,3 \cdot \tau_{\kappa} = 2,3 \cdot \frac{2Q_{\text{пр}}}{\omega_{\text{рез}}} \approx \frac{0,73}{\Delta F_{-3\text{дБ}}}.$$

Чим більша добротність $Q_{\text{пр}}$ (чим вузуча смуга пропускання $\Delta F_{-3\text{дБ}}$), тим більший час встановлення сигналу в контурі.

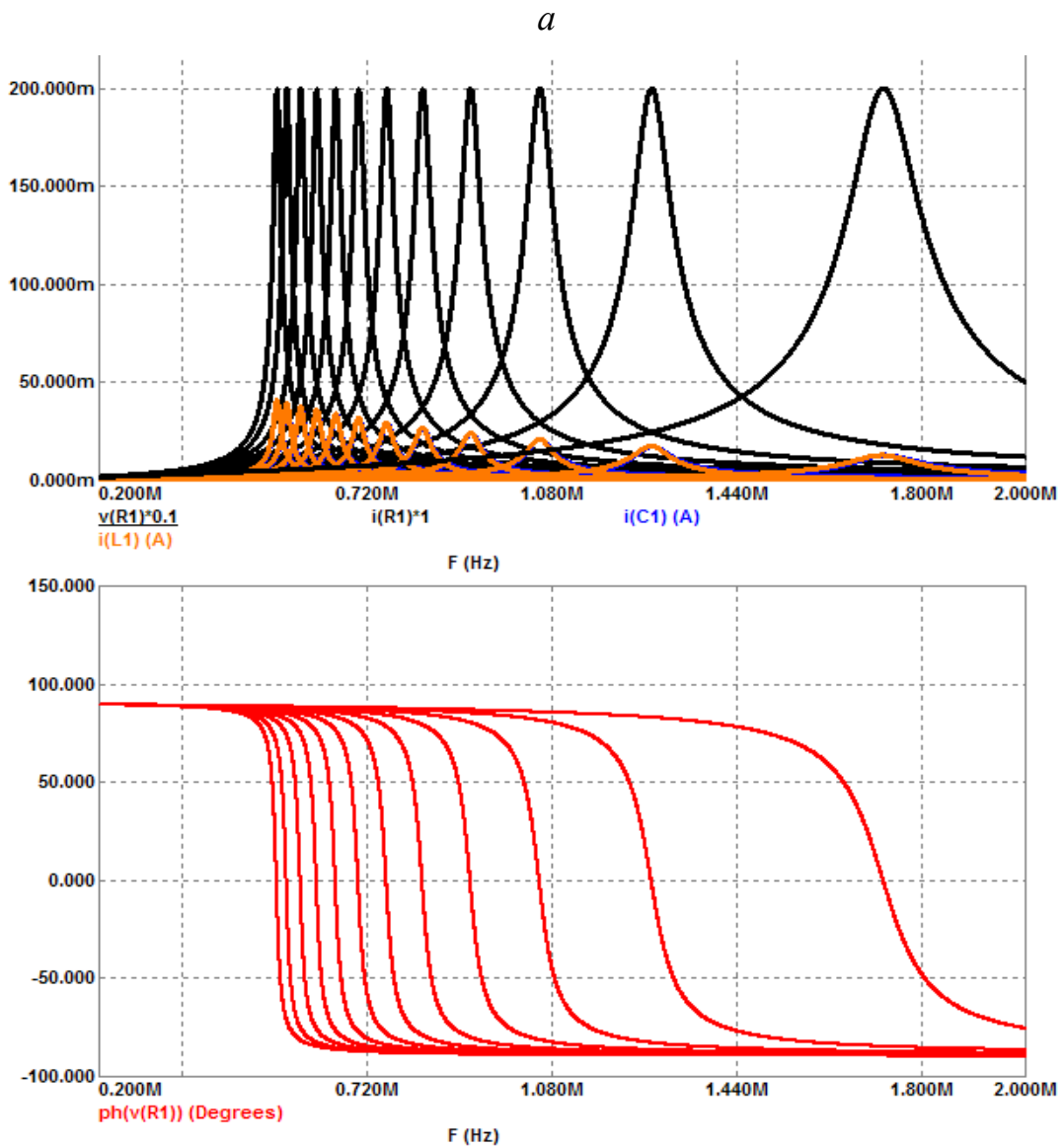
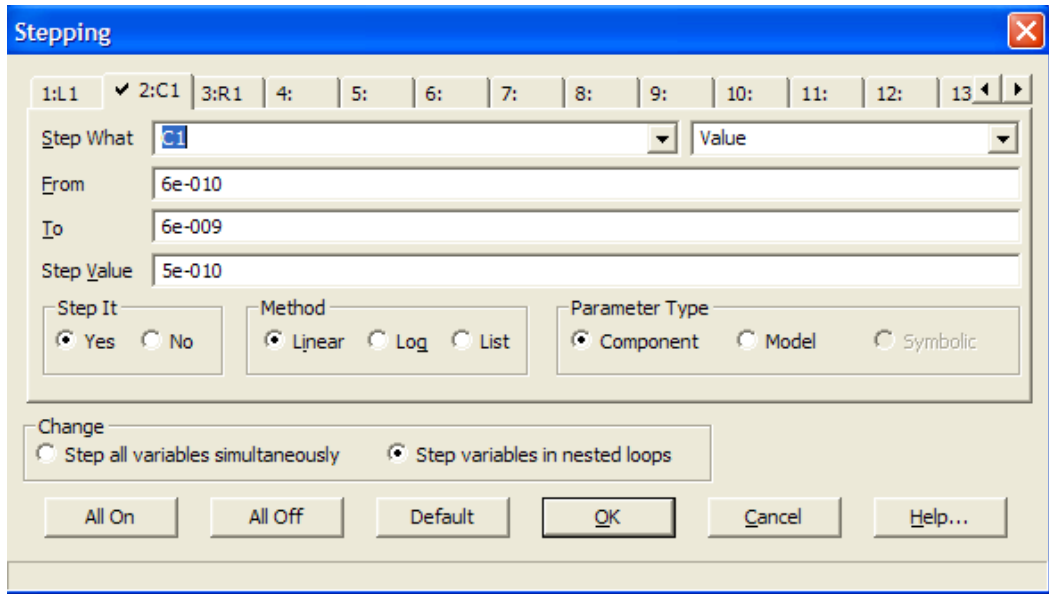


Рис. 20. Резонансні криві, коли ємність $C1$ змінюється ($R1 = 2\kappa$)

Контрольні запитання та завдання

1. Який вигляд має діаграма нулів і полюсів системної функції резонансної системи і як вона пов'язана з формою АЧХ?
2. Наведіть приклади схем на операційних підсилювачах, які мають селективні властивості за частотою, як у резонансних систем.
3. Наведіть схеми класичних послідовного і паралельного коливальних контурів. Який вигляд мають їх системні функції?
4. Наведіть наближену формулу резонансної кривої в околиці $\omega_{\text{рез}}$.
5. Що таке смуга пропускання резонансної системи?
6. За якою формулою визначається ширина смуги пропускання? Як пов'язана смуга пропускання з добротністю?
7. За яких умов визначається частота резонансу послідовного коливального контуру? Який опір має контур на частоті резонансу?
8. За яких умов визначається частота резонансу паралельного коливального контуру? Який опір має паралельний контур на частоті резонансу?
9. Який зсув фаз на резонансній частоті?
10. Наведіть формулу для часу встановлення вихідного сигналу резонансного контуру.
11. Як пов'язані час встановлення і смуга пропускання контуру?
12. Який вигляд мають схеми заміщення реальних контурів? Які додаткові параметри враховуються.
13. Як впливають на резонансну криву паразитні параметри послідовного контуру?
14. Як впливають на резонансну криву паразитні параметри паралельного контуру?

ТЕМА 7. ДИНАМІКА КІЛ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ

Лекція 16. Дослідження впливу від'ємного зворотного зв'язку на частотні характеристики підсилювачів

Від'ємний зворотний зв'язок. Інверсні системи. Неінвертуючий підсилювач. Інвертуючий підсилювач. Розширення смуги пропускання. Дослідження впливу від'ємного зворотного зв'язку в середовищі Mathcad. Зменшення вихідного імпеданса підсилювачів з від'ємним зворотним зв'язком. Метод зменшення впливу ємності вхідного кабелю у вимірювальних приладах. Аналіз в середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання.

Від'ємний зворотний зв'язок

Структуру системи з від'ємним зворотним зв'язком зображено на рис. 1, де пряма ланка з передатної функцією $K(s)$ – деякий активний чотириполосник (наприклад, підсилювач напруги); $\beta(s)$ – ланка зворотного зв'язку.

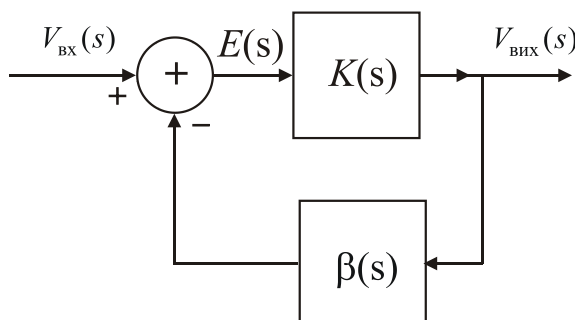


Рис. 1. Система з від'ємним зворотним зв'язком

Математичною моделлю системи може бути рівняння, яке відображає залежність вихідного сигналу $V_{\text{вих}}(s)$ від сигналу на вході $V_{\text{вх}}(s)$.

$$E(s) = V_{\text{вх}}(s) - \beta(s) \cdot V_{\text{вих}}(s), \quad V_{\text{вих}}(s) = K(s) \cdot E(s).$$

Звідси, виключивши зайву змінну $E(s)$, одержимо:

$$\frac{V_{\text{вих}}(s)}{V_{\text{вх}}(s)} = H(s) = \frac{K(s)}{1 + \beta(s)K(s)}. \quad (1)$$

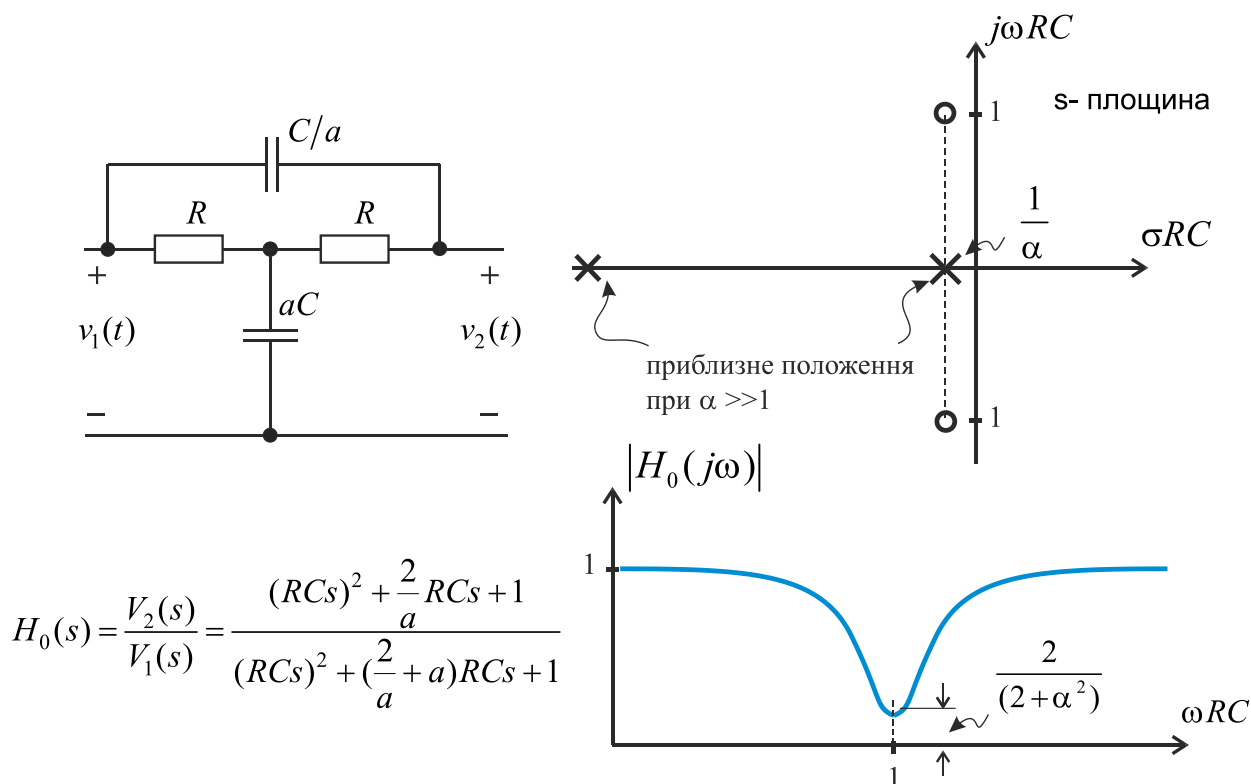
Якщо петльове підсилення велике $|\beta(s)K(s)| \gg 1$, то одержимо:

$$H(s) \approx \frac{K(s)}{\beta(s)K(s)} = \frac{1}{\beta(s)}.$$

Отже, системна функція практично не залежить від $K(s)$. Далі розглянемо приклади практичного використання властивостей від'ємного зворотного зв'язку.

Інверсні системи

У випадку, коли $|\beta(s)K(s)| \gg 1$, передатна функція усієї системи з від'ємним зворотним зв'язком приблизно дорівнює інверсній передатній функції ланки зворотного зв'язку. Це може бути корисним для синтезу інверсної системи, якщо через деякі причини системну функцію $H_0(s)$ реалізувати простіше, ніж $[H_0(s)]^{-1}$. Наприклад, якщо мостове Т-подібне коло (рис. 2) має $H_0(s)$, то



$$H_0(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(RCs)^2 + \frac{2}{a}RCs + 1}{(RCs)^2 + (\frac{2}{a} + a)RCs + 1}$$

Рис. 2. Мостове Т-подібне коло

передатна функція підсилувача на рис. 3, де Т-подібне коло включене у тракт від'ємного зворотного зв'язку, матиме вигляд

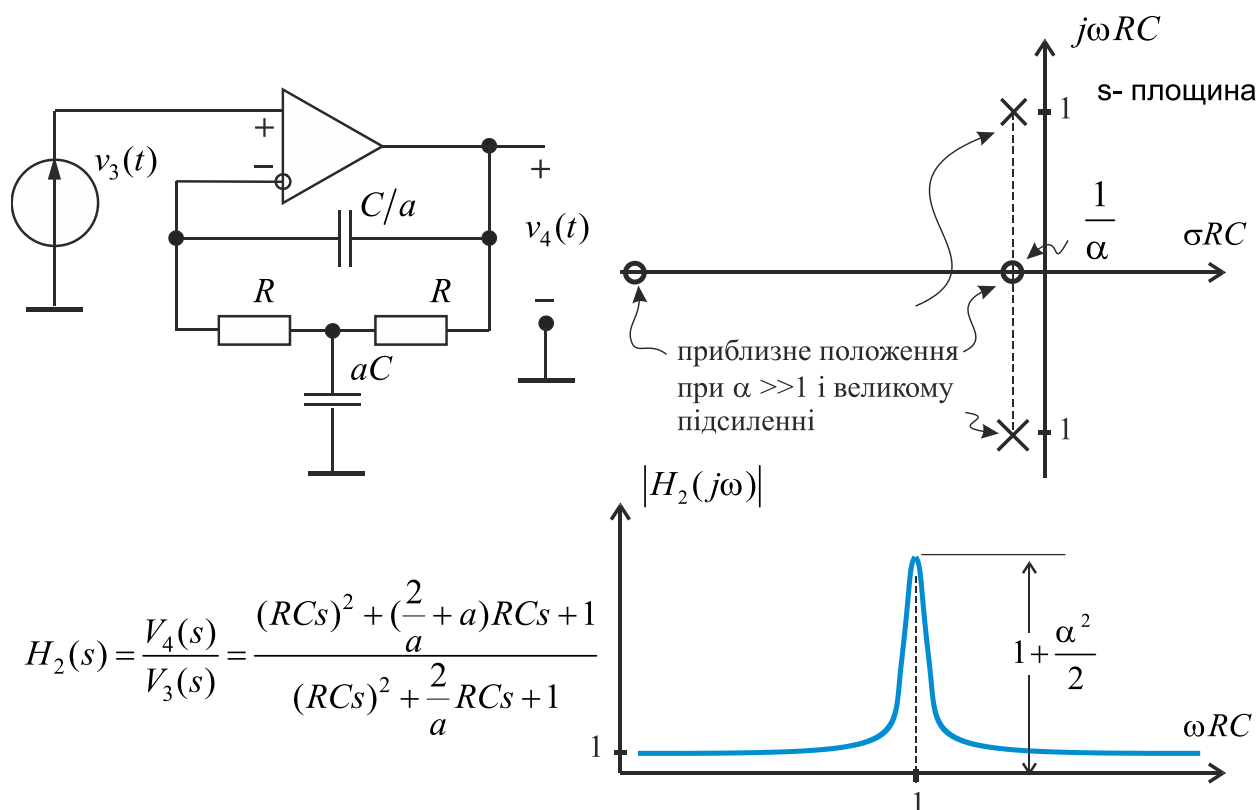


Рис. 3. Інверсна система

Отже системна функція інверсної системи дорівнює:

$$H_2(s) \approx \frac{1}{H_0(s)}. \quad (2)$$

Від'ємний зворотний зв'язок використовується для поліпшення статичних та динамічних властивостей вимірювальних перетворювачів:

- стабільність коефіцієнта передачі у статиці;
- розширення смуги частот, у якої частотна характеристика рівномірна та стабільна;
- зменшення часу встановлення реакції на вхідний вплив;
- лінеаризація функції перетворення, зменшення нелінійних спотворень;
- забезпечення їх незалежності від впливаючих факторів.

Інверсні системи можуть бути побудовані також на основі нелінійних електричних кіл.

За методом взаємно-зворотних перетворень зворотна функція перетворення, яка одержана на основі нелінійної інверсної системи,

використовуються для лінеаризації статичної характеристики перетворення вимірювальних пристроїв.

Нижче розглянемо полишення динамічних властивостей лінійних систем на прикладі типових схем підсилювачів

Неінвертуючий підсилювач

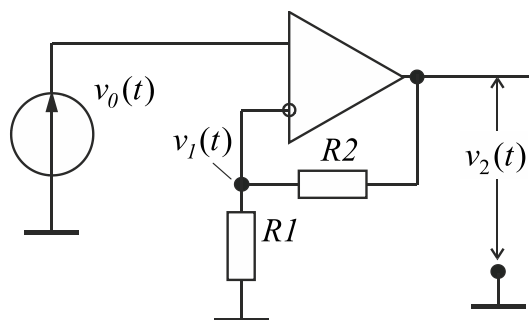


Рис. 4. Неінвертуючий підсилювач
($v_0(t) \approx v_1(t)$, якщо $K_0 \rightarrow \infty$)

Якщо вважати, що операційний підсилювач (ОП) має коефіцієнт підсилення $K_0 \neq \infty$ (причому не залежить від частоти сигналу), але нескінченний вхідний імпеданс, нульовий вихідний імпеданс, то одержимо:

$$\Delta V(s) = V_0(s) - V_1(s) = V_0(s) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2(s);$$

$$V_2(s) = \Delta V(s) \cdot K_0.$$

Якщо вважати $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ – коефіцієнт передачі пасивного кола зворотного зв'язку, ці рівняння відповідають рівнянню вхід-вихід:

$$K_{33}(s) = \frac{V_2(s)}{V_0(s)} = \frac{K_0}{1 + K_0\beta} = \frac{K_0}{1 + \frac{K_0 R_1}{R_1 + R_2}} \approx \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{1}{\beta}.$$

Тобто загальний коефіцієнт підсилення не залежить від K_0 , якщо $K_0\beta = K_0 R_1 / (R_1 + R_2) \gg 1$ (властивість від'ємного зворотного зв'язку є стабілізуюча дія на коефіцієнт підсилення системи).

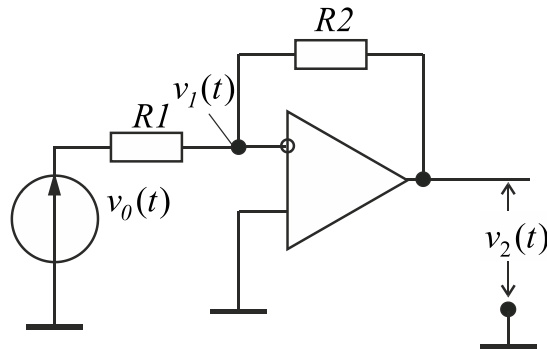
Інвертуючий підсилювач

Рис. 5. Інвертуючий підсилювач
($v_1(t) \approx 0$, якщо $K_0 \rightarrow \infty$)

Якщо ОП має нескінчений вхідний імпеданс, нульовий вихідний імпеданс і кінцевий коефіцієнт підсилення $K_0 \neq \infty$, то можна записати:

$$V_1(s) = V_0(s) \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2(s);$$

$$V_2(s) = \Delta V(s) \cdot K_0 = (0 - V_1(s)) \cdot K_0 = -V_1(s) \cdot K_0.$$

Тоді дістанемо:

$$K_{33}(s) = \frac{V_2(s)}{V_0(s)} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{K_0}{1 + \frac{K_0 R_1}{R_1 + R_2}} \approx -\frac{R_2}{R_1}.$$

Отже, якщо $K_0 \beta = K_0 R_1 / (R_1 + R_2) \gg 1$, загальний коефіцієнт підсилення практично не залежить від K_0 .

Розширення смуги пропускання

У випадку, коли величина петльового підсилення $|\beta(s)K(s)|$ не досить велика, то загальна передатна функція системи, яка охоплена від'ємним зворотним зв'язком, не дорівнює $1/\beta(s)$.

Приклад 1

Нижче розглядаємо випадок, коли зворотний зв'язок є безінерційним $\beta(j\omega) = \beta_0$.

Властивість

$$\lim_{|K(j\omega)| \rightarrow \infty} \frac{K(j\omega)}{1 + \beta K(j\omega)} \rightarrow \frac{1}{\beta}$$

веде до розширення смуги пропускання підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком (смуга пропускання визначається пасивними елементами зворотного зв'язку) у порівнянні зі смугою без зворотного зв'язку, коли передатна функція визначається тільки $K(j\omega)$ (частотнозалежний).

З міркувань стійкості схем зі зворотним зв'язком, в операційний підсилювач (ОП) вводять внутрішньосхемну частотну корекцію таким чином, що він має частотну характеристику, як фільтр першого порядку впритул до високих частот. На рис. 6 наведено діаграму Бode відомого "частотно-скорегованого" ОП $\mu 741$ з роз'єднаним зворотним зв'язком.

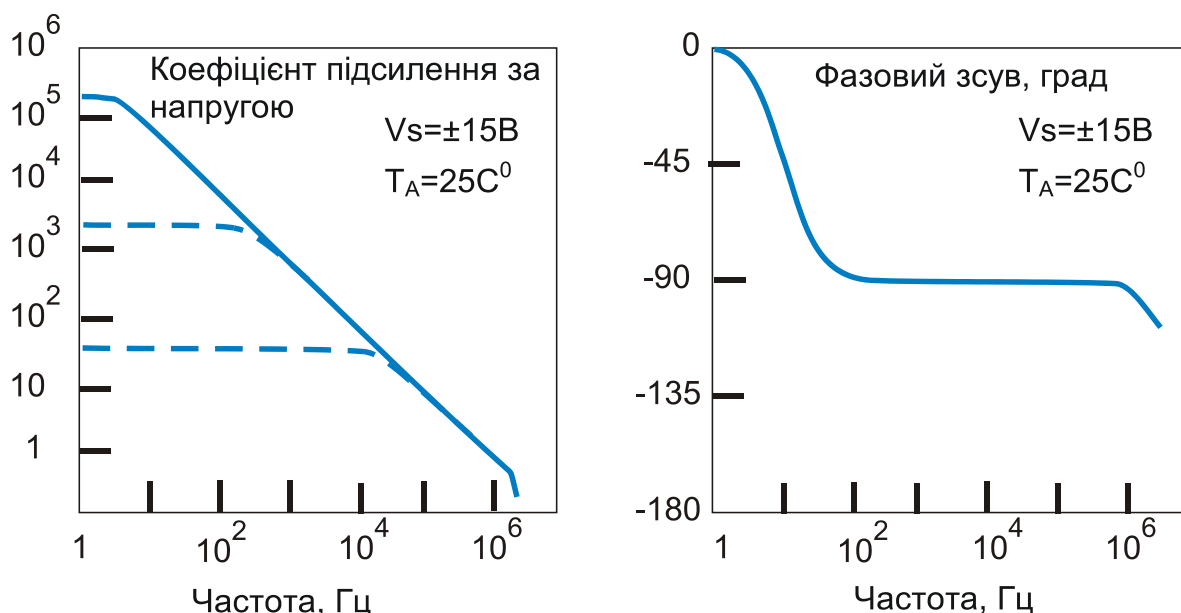


Рис. 6. Характеристики $\mu 741$ без зворотного зв'язку

Так, підсилювач $\mu 741$ має коефіцієнт підсилення на постійному струмі $K_0 \approx 2 \cdot 10^5$, частоту зрізу $f_{зр}$ (тобто смугу пропускання за рівнем половинної потужності) близько 6 Гц, що відповідає кутовій частоті $\omega_{зр} = 2\pi f_{зр} \approx 38$ рад/с, та крутизну спаду частотної характеристики в області високих частот 20 дБ/декада.

Майже до доволньо високих частот поки коефіцієнт підсилення за напругою більше одиниці ($f_1 = 1,2$ МГц – частота одиничного підсилення) цей

ОП можна представити динамічною моделлю першого порядку, яка має один полюс:

$$K(s) = \frac{K_0}{1 + s\tau} = \frac{K_0 \cdot \alpha}{\alpha + s}, \quad (3)$$

де $K_0 \approx 2 \cdot 10^5$; $\tau = \frac{1}{\omega_{зр}} = \frac{1}{38} \approx 0,027$ с; $\alpha = \frac{1}{\tau} = \omega_{зр}$.

Якщо цей ОП увімкнути у схему неінвертуючого підсилювача (рис. 7), для якого $\beta = R1/(R1 + R2)$, то передатна функція схеми зі зворотним зв'язком набере вигляду:

$$\begin{aligned} K_{33}(s) &= \frac{K(s)}{1 + K(s)\beta} = \frac{K_0/(1 + s\tau)}{1 + [K_0/(1 + s\tau)] \cdot \beta} = \frac{K_0}{1 + s\tau + K_0\beta} = \\ &= \frac{K_0}{1 + K_0\beta} \cdot \frac{1}{1 + s\tau/(1 + K_0\beta)} = K_{0,33} \frac{1}{1 + s\tau_{екв}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тобто

$$K_{0,33} = \frac{K_0}{1 + K_0\beta}; \quad \tau_{екв} = \frac{\tau}{1 + K_0\beta}; \quad \omega_{зр.екв} = \omega_{зр}(1 + K_0\beta). \quad (5)$$

Звідси маємо

$$K_{0,33} \cdot \omega_{зр.екв,3дБ} = \omega_{зр} K_0 = \text{const}.$$

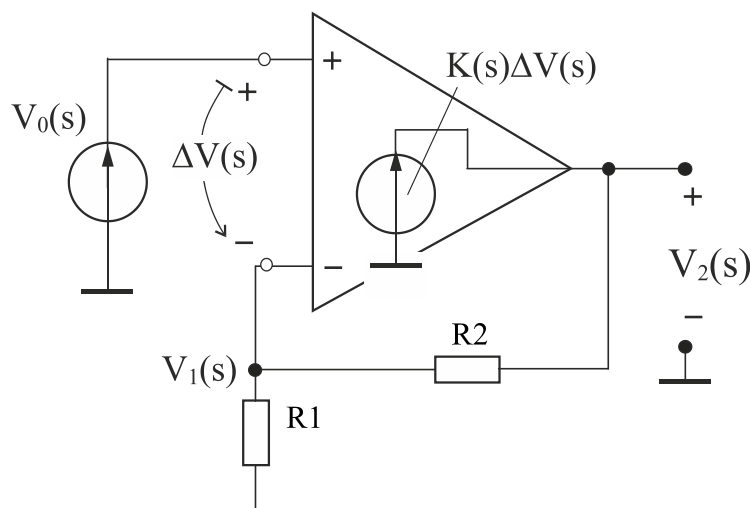


Рис. 7. Еквівалентна схема неінвертуючого підсилювача

Або передатна функція буде:

$$K_{33}(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)\beta} = \frac{K_0\alpha}{s + \alpha + K_0\alpha\beta} = \frac{K_0\omega_{зр}}{s + \omega_{зр}(1 + K_0\beta)}, \quad (6)$$

тобто полюс зміщується у область високих частот.

Нехай частота одиничного підсилювання ОП дорівнює ω_1 ($f_1 = \omega_1/2\pi$).

Тоді з рівності

$$|K(j\omega)|_{\omega=\omega_1} = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \omega_1^2\tau^2}} = 1$$

дістанемо $K_0^2 \approx \omega_1^2\tau^2$. Отже, маємо:

$$\omega_1 \approx K_0 \frac{1}{\tau} = K_0\omega_{зр}.$$

Звідси

$$K_{0,33} \cdot \omega_{зр.екв} = \omega_{зр} \cdot K_0 \approx \omega_1 = \text{const}; \quad (7)$$

$$\Delta f_{-3дБ} = f_{зр.екв} \approx \frac{\omega_1}{2\pi K_{0,33}} = \frac{f_1}{K_{0,33}}. \quad (8)$$

Висновки

1. Чим більше $1 + K_0\beta$, тим менше коефіцієнт підсилення схеми зі зворотним зв'язком і тим більша смуга пропускання за рівнем половинної потужності.

2. Добуток коефіцієнту підсилення на смугу пропускання за рівнем половинної потужності є *величина постійна*, незалежна від β і дорівнює ω_1 .

Приклад 2

Для $\mu 741$ $\omega_1 \approx \omega_{зр} \cdot K_0 = 38 \cdot 2 \cdot 10^5 = 7,6 \cdot 10^6$ рад/с ($f_1 = 1,2$ МГц – частота одиничного підсилення в герцах). Тоді, якщо $K_{0,33} = 100$, то смуга пропускання схеми підсилювача зі зворотним зв'язком за рівнем -3 дБ буде:

$$\Delta f_{-3\text{дБ}} = \frac{\omega_1}{2\pi K_{0,33}} = \frac{7,6 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 100} = 12 \cdot 10^3 \text{ Гц.}$$

З виразу (5) випливає

$$\frac{dK_{0,33}}{K_{0,33}} = \frac{1}{1 + K_0\beta} \frac{dK_0}{K_0}. \quad (9)$$

Отже, чутливість $K_{0,33}$ до зміни K_0 зменшується в $1 + K_0\beta$ разів, тобто схема стає *стабільною*.

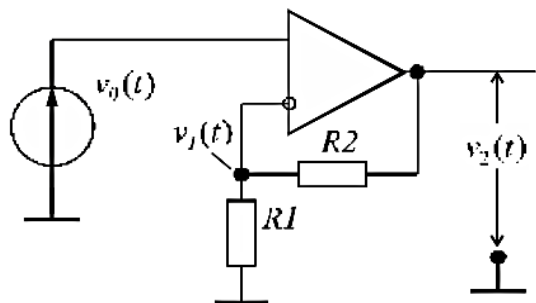
**Дослідження впливу від'ємного зворотного зв'язку
в середовищі системи Math-Cad**

Розглянемо підсилювач, який характеризується однією постійною часу в області верхніх частот (рис. 8). Для прикладу візьмемо типовий операційний підсилювач моделі $\mu 741$, який має $K_0 \approx 2 \cdot 10^5$; $f_{зр} \approx 6$ Гц.

У наведених нижче прикладах використана функція побудови діаграм Бодє $BodePlot(F, MinFreq, MaxFreq)$.

Приклад 3

Аналіз впливу від'ємного зворотного зв'язку на частотні властивості підсилювачів в області верхніх частот



Динамічна модель операційного підсилювача (ОП) з однією постійною часу в області верхніх частот

$$\text{Нор}(s) := K_0 \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$$

$$\beta := \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{- коефіцієнт передачі кола зворотного зв'язку}$$

Визначення в символічному вигляді системної функції підсилювача зі зворотним зв'язком:

Given

$$(v_0 - v_1) \cdot \frac{K_0}{s \cdot \tau + 1} = v_2 \quad v_1 = v_2 \cdot \beta$$

$$\frac{\text{Find}(v_1, v_2)_1}{v_0} \text{ float, 3} \rightarrow \frac{K_0}{(K_0 \cdot \beta + s \cdot \tau + 1)^1}$$

Примітка:

$$\lim_{K_0 \rightarrow \infty} \frac{K_0}{(K_0 \cdot \beta + s \cdot \tau + 1)^1} \rightarrow \frac{1}{\beta}$$

Нехай ОП має такі параметри $K_0 := 200000$ $f_s := 6$ $\omega_s := 2 \cdot \pi \cdot f_s$ $\tau := \frac{1}{\omega_s}$

$$\text{Нор}(s) := K_0 \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$$

$$\tau = 0.027 \quad \omega_s = 37.699$$

Отже, передаточна функція підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком:

$$H(s, \beta) := K_0 \cdot \frac{1}{(K_0 \cdot \beta + s \cdot \tau + 1)^1}$$

Або

$$K_{oc}(\beta) := \frac{K_0}{1 + K_0 \cdot \beta} \quad \tau_{oc}(\beta) := \frac{\tau}{(1 + K_0 \cdot \beta)} \quad \text{Нос}(s, \beta) := K_{oc}(\beta) \cdot \frac{1}{1 + \tau_{oc}(\beta) \cdot s}$$

Нехай $\beta := (0 \quad 0.1 \quad 0.01 \quad 0.001)^T$

$$K_{oc}(\beta) = \begin{pmatrix} 2.000 \times 10^5 \\ 10.000 \\ 99.950 \\ 995.025 \end{pmatrix} \quad \tau_{oc}(\beta) = \begin{pmatrix} 0.027 \\ 1.326 \times 10^{-6} \\ 1.326 \times 10^{-5} \\ 1.320 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Наприклад

$$H(s, \beta_1) \rightarrow \frac{200000}{\left(20001.0 + \frac{1}{12 \cdot \pi} \cdot s\right)^1} \quad \text{або} \quad \text{Нос}(s, \beta_1) \text{ float, 3} \rightarrow \frac{10.0}{\left(1. + 1.33 \cdot 10^{-6} \cdot s\right)^1}$$

Рис. 8. Аналіз впливу від'ємного зворотного зв'язку на підсилювач з однією постійною часу в області верхніх частот

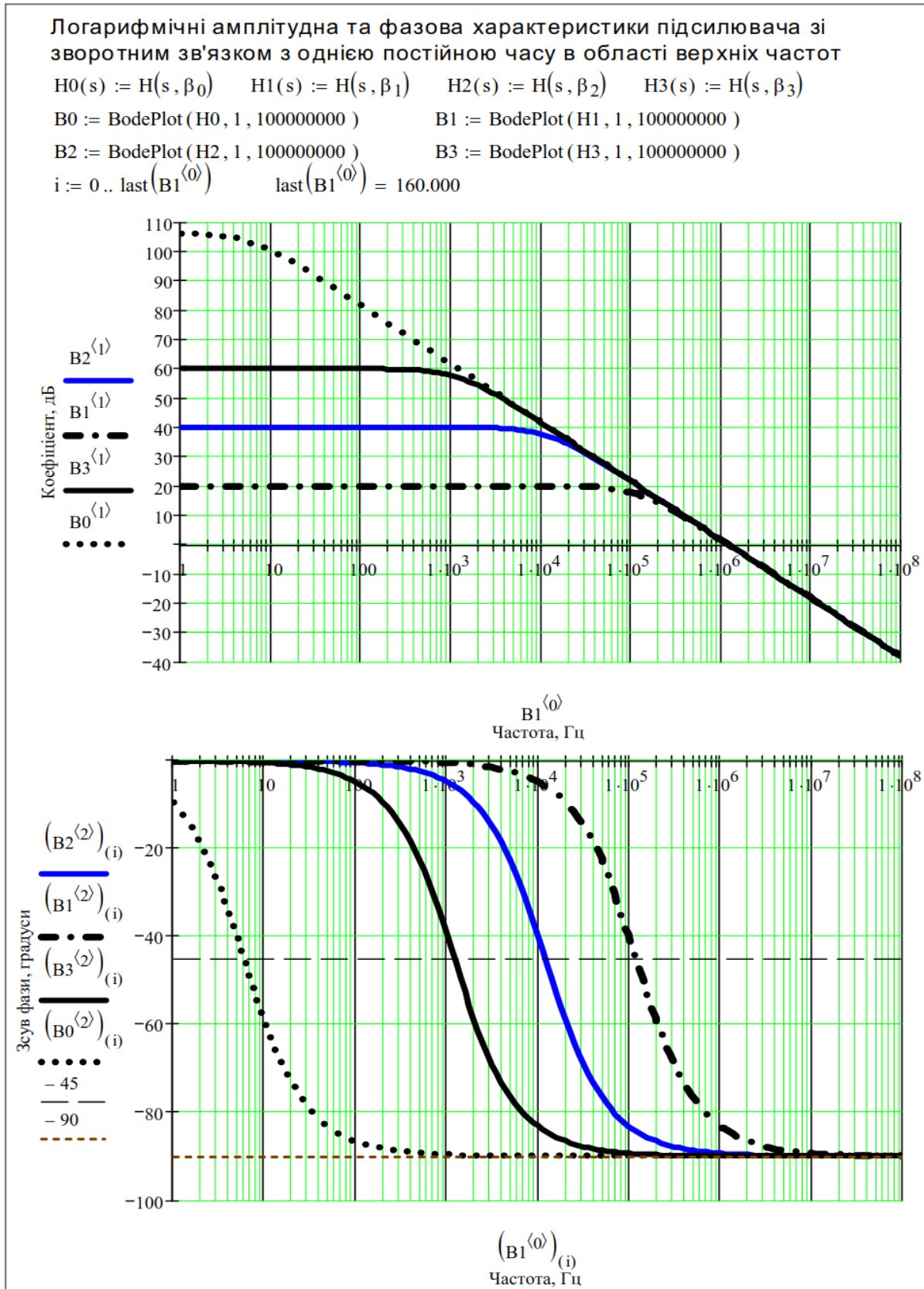


Рис. 9. Вплив від'ємного зворотного зв'язку на підсилювач з однією постійною часу в області верхніх частот (продовження)

Приклад 4

Динамічна модель підсилювача з однією постійною часу в області нижніх частот

$$HOP(s) := K0 \cdot \frac{\tau \cdot s}{1 + \tau \cdot s}$$

Given

$$(v0 - v1) \cdot \left(K0 \cdot \frac{\tau \cdot s}{1 + \tau \cdot s} \right) = v2 \quad v1 = v2 \cdot \beta$$

- визначення системної функції підсилювача зі зворотним зв'язком

$$\frac{\text{Find}(v1, v2)_1}{v0} \text{ float, 3} \rightarrow K0 \cdot s \cdot \frac{\tau}{(K0 \cdot s \cdot \tau \cdot \beta + s \cdot \tau + 1.)^1}$$

Нехай підсилювач має такі параметри:

$$K0 := 200000 \quad f_{sr} := 1000 \quad \omega_{sr} := 2 \cdot \pi \cdot f_{sr} \quad \tau := \frac{1}{\omega_{sr}} \quad \tau = 1.592 \times 10^{-4} \quad \omega_{sr} = 6.283 \times 10^3$$

$$HOP(s) := K0 \cdot \frac{\tau \cdot s}{1 + \tau \cdot s}$$

$$H(s, \beta) := K0 \cdot s \cdot \tau \cdot \frac{1}{(K0 \cdot s \cdot \tau \cdot \beta + s \cdot \tau + 1.)^1}$$

$$\text{Нехай } \beta := (0 \quad 0.1 \quad 0.01 \quad 0.001)^T$$

Отже, передаточна функція системи з від'ємним зворотним зв'язком:

$$H(s, \beta_0) \text{ float, 3} \rightarrow 31.8 \cdot \frac{s}{(1.59 \cdot 10^{-4} \cdot s + 1.)^1} \quad H(s, \beta_1) \text{ float, 3} \rightarrow 31.8 \cdot \frac{s}{(3.18 \cdot s + 1.)^1}$$

$$H(s, \beta_2) \text{ float, 3} \rightarrow 31.8 \cdot \frac{s}{(.318 \cdot s + 1.)^1} \quad H(s, \beta_3) \text{ float, 3} \rightarrow 31.8 \cdot \frac{s}{(3.21 \cdot 10^{-2} \cdot s + 1.)^1}$$

Рис. 10. Аналіз впливу від'ємного зворотного зв'язку на підсилювач з однією постійною часу в області нижніх частот

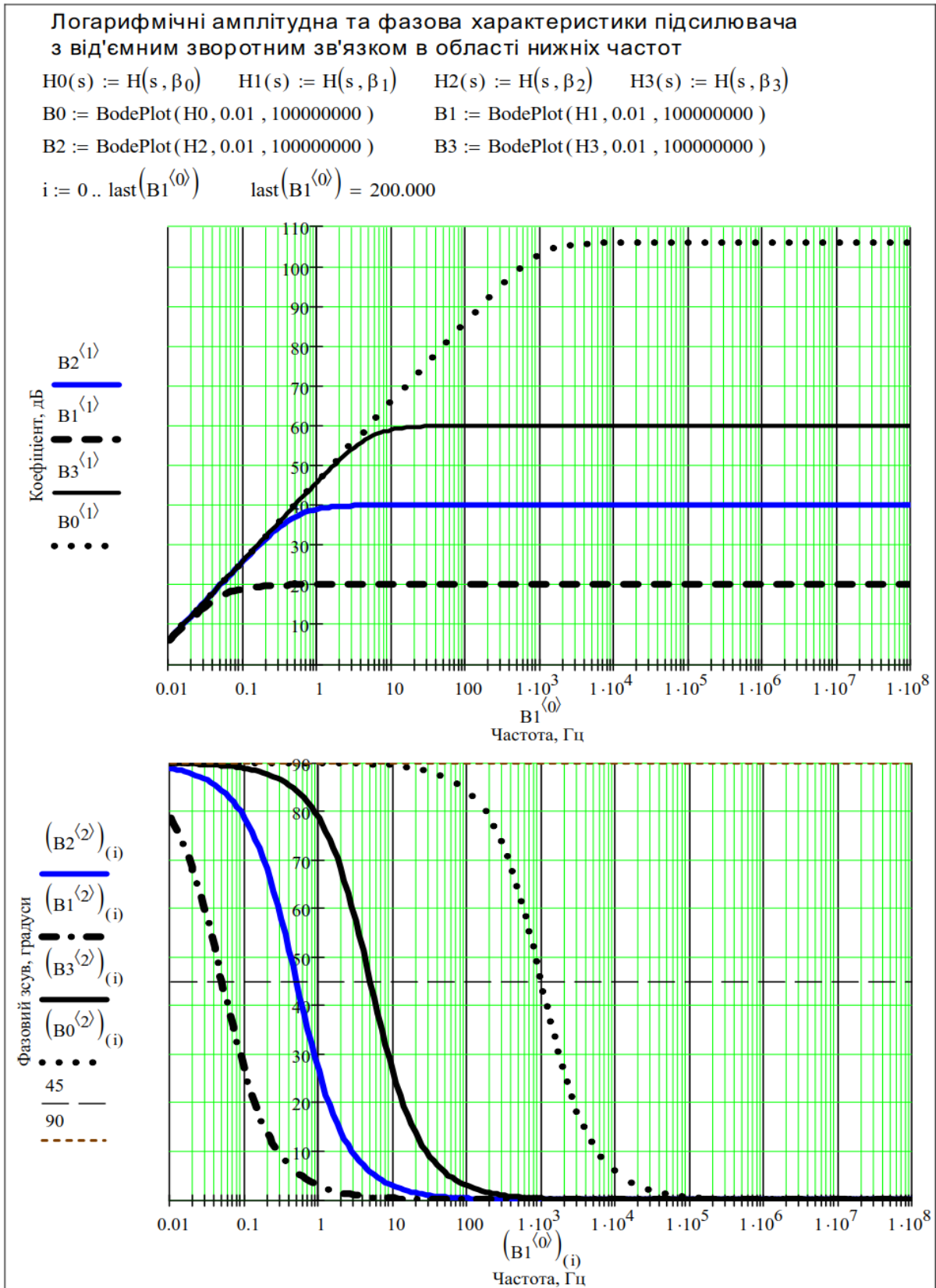


Рис. 11. Вплив від'ємного зворотного зв'язку на підсилювач з однією постійною часу в області нижніх частот (продовження)

Приклад 5

Динамічна модель підсилювача з однією постійною часу в області нижніх частот і з двома в області верхніх частот

$$HOP(s) := K0 \cdot \frac{\tau \cdot s}{(1 + \tau \cdot s) \cdot (1 + 0.01 \cdot \tau \cdot s) \cdot (1 + 0.00001 \cdot \tau \cdot s)}$$

Given

$(v0 - v1) \cdot HOP(s) = v2$ $v1 = v2 \cdot \beta$ - визначення системної функції підсилювача зі зворотним зв'язком

$$\frac{\text{Find}(v1, v2)_1}{v0} \text{ float, 2} \rightarrow 1.0 \cdot 10^7 \cdot K0 \cdot s \cdot \frac{\tau}{\left(1.0 \cdot 10^7 \cdot K0 \cdot s \cdot \tau \cdot \beta + 1.0 \cdot 10^7 + 1.0 \cdot 10^7 \cdot s \cdot \tau + 1.0 \cdot 10^5 \cdot s^2 \cdot \tau^2 + s^3 \cdot \tau^3\right)^1}$$

Нехай підсилювач має такі параметри:

$$K0 := 200000 \quad fs := 1000 \quad \omega s := 2 \cdot \pi \cdot fs \quad \tau := \frac{1}{\omega s} \quad \tau = 1.592 \times 10^{-4} \quad \omega s = 6.283 \times 10^3$$

$$H(s, \beta) := 1.0 \cdot 10^7 \cdot K0 \cdot \tau \cdot \frac{s}{\left(1.0 \cdot 10^7 \cdot K0 \cdot \tau \cdot s \cdot \beta + 1.0 \cdot 10^7 + 1.0 \cdot 10^7 \cdot \tau \cdot s + 1.0 \cdot 10^5 \cdot \tau^2 \cdot s^2 + \tau^3 \cdot s^3\right)^1}$$

Нехай $\beta := (0 \ 0.1 \ 0.01 \ 0.001)^T$

Отже, передаточна функція системи з від'ємним зворотним зв'язком:

$$H(s, \beta_0) \text{ float, 3} \rightarrow 3.18 \cdot 10^8 \cdot \frac{s}{\left(1.00 \cdot 10^7 + 1.59 \cdot 10^3 \cdot s + 2.53 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 + 4.03 \cdot 10^{-12} \cdot s^3\right)^1}$$

$$H(s, \beta_1) \text{ float, 3} \rightarrow 3.18 \cdot 10^8 \cdot \frac{s}{\left(3.18 \cdot 10^7 \cdot s + 1.00 \cdot 10^7 + 2.53 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 + 4.03 \cdot 10^{-12} \cdot s^3\right)^1}$$

$$H(s, \beta_2) \text{ float, 3} \rightarrow 3.18 \cdot 10^8 \cdot \frac{s}{\left(3.18 \cdot 10^6 \cdot s + 1.00 \cdot 10^7 + 2.53 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 + 4.03 \cdot 10^{-12} \cdot s^3\right)^1}$$

$$H(s, \beta_3) \text{ float, 3} \rightarrow 3.18 \cdot 10^8 \cdot \frac{s}{\left(3.21 \cdot 10^5 \cdot s + 1.00 \cdot 10^7 + 2.53 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 + 4.03 \cdot 10^{-12} \cdot s^3\right)^1}$$

Рис. 12. Аналіз впливу від'ємного зворотного зв'язку на характеристики підсилювача з однією постійною часу в області нижніх частот та з двома постійними часу в області верхніх частот

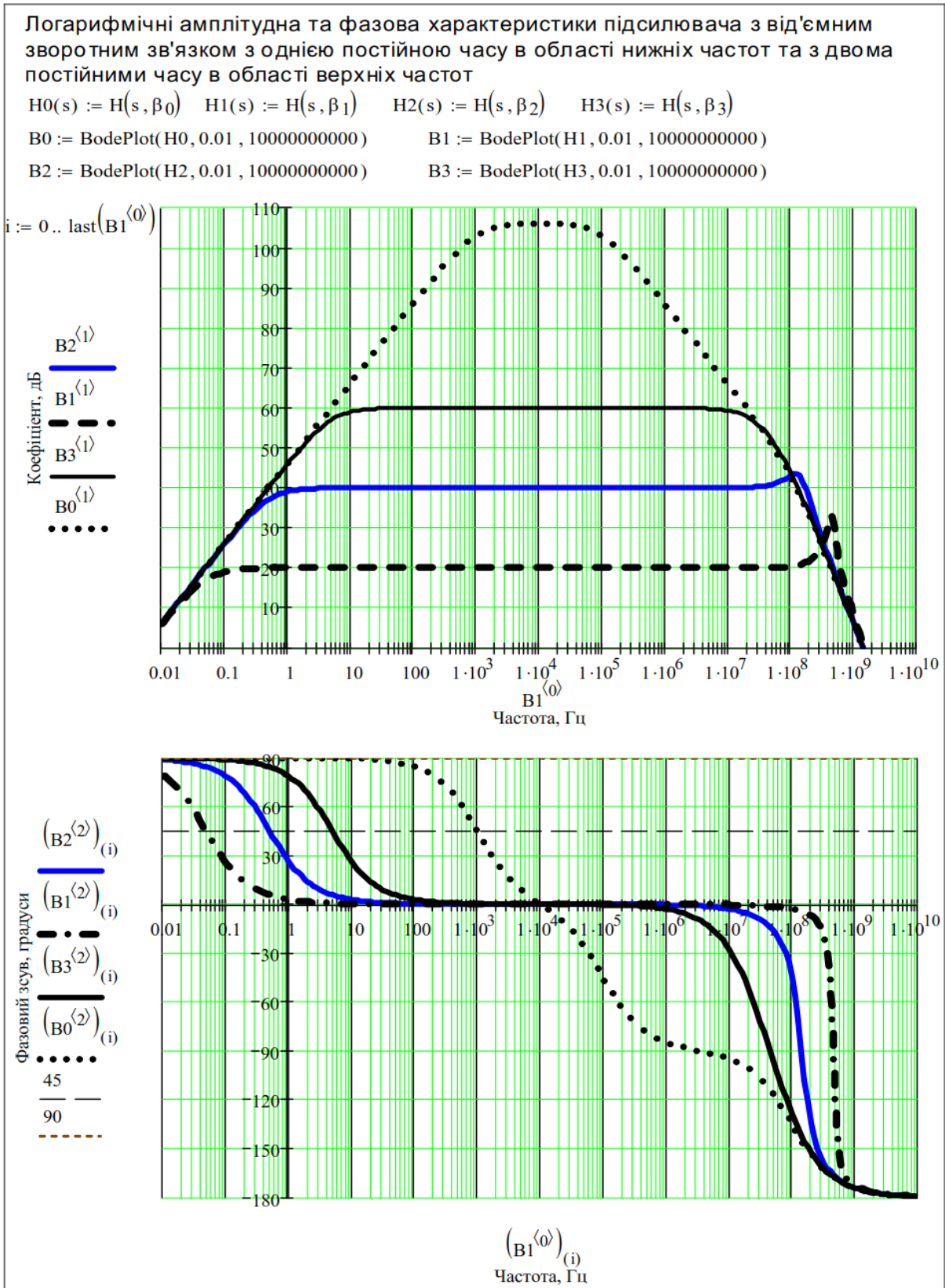


Рис. 13. Вплив від'ємного зворотного зв'язку на характеристики підсилювача з однією постійною часу в області нижніх частот та з двома постійними часу в області верхніх частот (продовження)

Зменшення вихідного імпеданса підсилювачів з від'ємним зворотним зв'язком

Доволі часто підсилювач має працювати на навантаження, яке може змінюватися. Тому для точного відтворення сигналу на навантаженні підсилювач повинен мати якомога менший вихідний опір, тобто поводити себе як ідеальне джерело напруги.

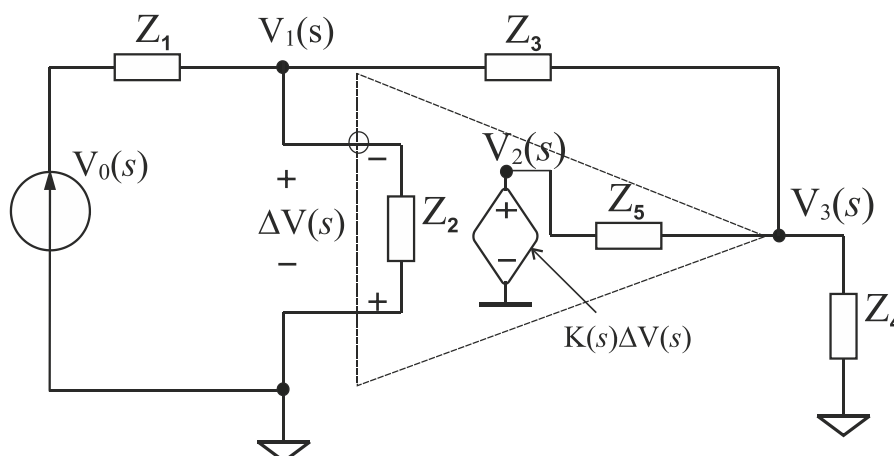


Рис. 14. Вплив від'ємного зворотного зв'язку на вихідний імпеданс підсилювача

На рис. 14 наступні позначення: Z_1 - вхідний опір; Z_2 - внутрішній вхідний опір підсилювача; Z_3 - опір зворотного зв'язку; Z_4 - опір навантаження; Z_5 - внутрішній вихідний опір підсилювача; K - власний коефіцієнт підсилення з роз'єднаним зворотним зв'язком.

Вихідний опір ділянки електричного кола є похідним від напруги за струмом і помітний лише при зміні навантаження:

$$-Z_{\text{вих}} = \frac{\partial U_{\text{вих}}}{\partial I_{\text{вих}}} = -\frac{\frac{\partial U_{\text{вих}}}{\partial Z_{\text{н}}}}{\frac{\partial I_{\text{вих}}}{\partial Z_{\text{н}}}}$$

На рис. 15 наведено фрагмент документа Mathcad, що пояснює процедуру визначення вихідного опору підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком. На рис. 16 наведено частотні залежності повного вихідного опору (імпеданса) підсилювача.

Приклад 6

Given Нехай $Z_2 \rightarrow \infty$

$$\frac{v_0 - v_1}{z_1} = \frac{v_1 - v_3}{z_3} \quad \frac{v_1 - v_3}{z_3} + \frac{v_2 - v_3}{z_5} = \frac{v_3}{z_4} \quad v_2 = -v_1 \cdot K$$

Find $(v_1, v_2, v_3)_2 \rightarrow z_4 \cdot \frac{(z_5 - z_3 \cdot K)}{(z_5 \cdot z_4 + z_4 \cdot K \cdot z_1 + z_3 \cdot z_4 + z_4 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_5 + z_5 \cdot z_1)}$

Отже, коефіцієнт передачі за напругою зі зворотним зв'язком:

$$K_{oc} := -z_4 \cdot \frac{(-z_5 + z_3 \cdot K)}{(z_5 \cdot z_4 + z_4 \cdot K \cdot z_1 + z_3 \cdot z_4 + z_4 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_5 + z_5 \cdot z_1)}$$

якщо $K \rightarrow \infty$, коефіцієнт передачі отримає вигляд:

$$K_{oc} := \lim_{K \rightarrow \infty} -z_4 \cdot \frac{(-z_5 + z_3 \cdot K)}{(z_5 \cdot z_4 + z_4 \cdot K \cdot z_1 + z_3 \cdot z_4 + z_4 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_5 + z_5 \cdot z_1)} \rightarrow \frac{-z_3}{z_1}$$

якщо $Z_5 \rightarrow 0$, коефіцієнт передачі отримає вигляд:

$$K_3 := \lim_{z_5 \rightarrow 0} -z_4 \cdot \frac{(-z_5 + z_3 \cdot K)}{(z_5 \cdot z_4 + z_4 \cdot K \cdot z_1 + z_3 \cdot z_4 + z_4 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_5 + z_5 \cdot z_1)} \rightarrow -z_3 \cdot \frac{K}{(K \cdot z_1 + z_3 + z_1)}$$

$$K_3 := \frac{-z_3}{(z_3 + z_1)} \cdot \left[\frac{K \cdot z_1}{(z_3 + z_1)} + 1 \right]$$

Вихідні напруга та струм підсилювача (струм в навантаженні Z_4): Нехай $z_4 := x$

$$v(x) := -x \cdot \frac{(-z_5 + z_3 \cdot K) \cdot v_0}{(z_5 \cdot x + x \cdot K \cdot z_1 + z_3 \cdot x + x \cdot z_1 + z_3 \cdot z_5 + z_5 \cdot z_1)}$$

$$i(x) := \frac{-[(-z_5 + z_3 \cdot K) \cdot v_0]}{z_5 \cdot x + x \cdot K \cdot z_1 + z_3 \cdot x + x \cdot z_1 + z_3 \cdot z_5 + z_5 \cdot z_1}$$

вихідний опір підсилювача зі зворотним зв'язком:

$$\frac{d}{dx} v(x) \text{ simplify } \rightarrow -(z_3 + z_1) \cdot \frac{z_5}{(z_5 + K \cdot z_1 + z_3 + z_1)} \Rightarrow Z_{out} := (z_3 + z_1) \cdot \frac{z_5}{(z_5 + K \cdot z_1 + z_3 + z_1)}$$

$$\frac{d}{dx} i(x) \Rightarrow Z_{out} := \frac{z_5}{\left(\frac{z_5 \cdot \beta}{z_1} + K \cdot \beta + 1 \right)} \quad \text{де } \beta = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$

Нехай

$$\begin{pmatrix} K \\ z_1 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 200 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 1 \cdot 10^3 \\ 75 \end{pmatrix} \quad Z_{out} := \frac{z_5}{\left[\frac{z_5}{(z_3 + z_1)} + K \cdot \frac{z_1}{(z_3 + z_1)} + 1 \right]} \Rightarrow Z_{out} = 7.5 \times 10^{-4}$$

Нехай частота зрізу ОП: $f_s := 6 \quad \omega_s := 2 \cdot \pi \cdot f_s \Rightarrow \tau := \frac{1}{\omega_s} \quad \tau = 0.027 \quad \omega_s = 37.699$

$$H(s) := K \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \quad Z_{out}(s) := \frac{z_5}{\left[\frac{z_5}{(z_3 + z_1)} + K \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \cdot \frac{z_1}{(z_3 + z_1)} + 1 \right]}$$

Рис. 15. Вплив від'ємного зворотного зв'язку на вихідний імпеданс підсилювача (продовження)

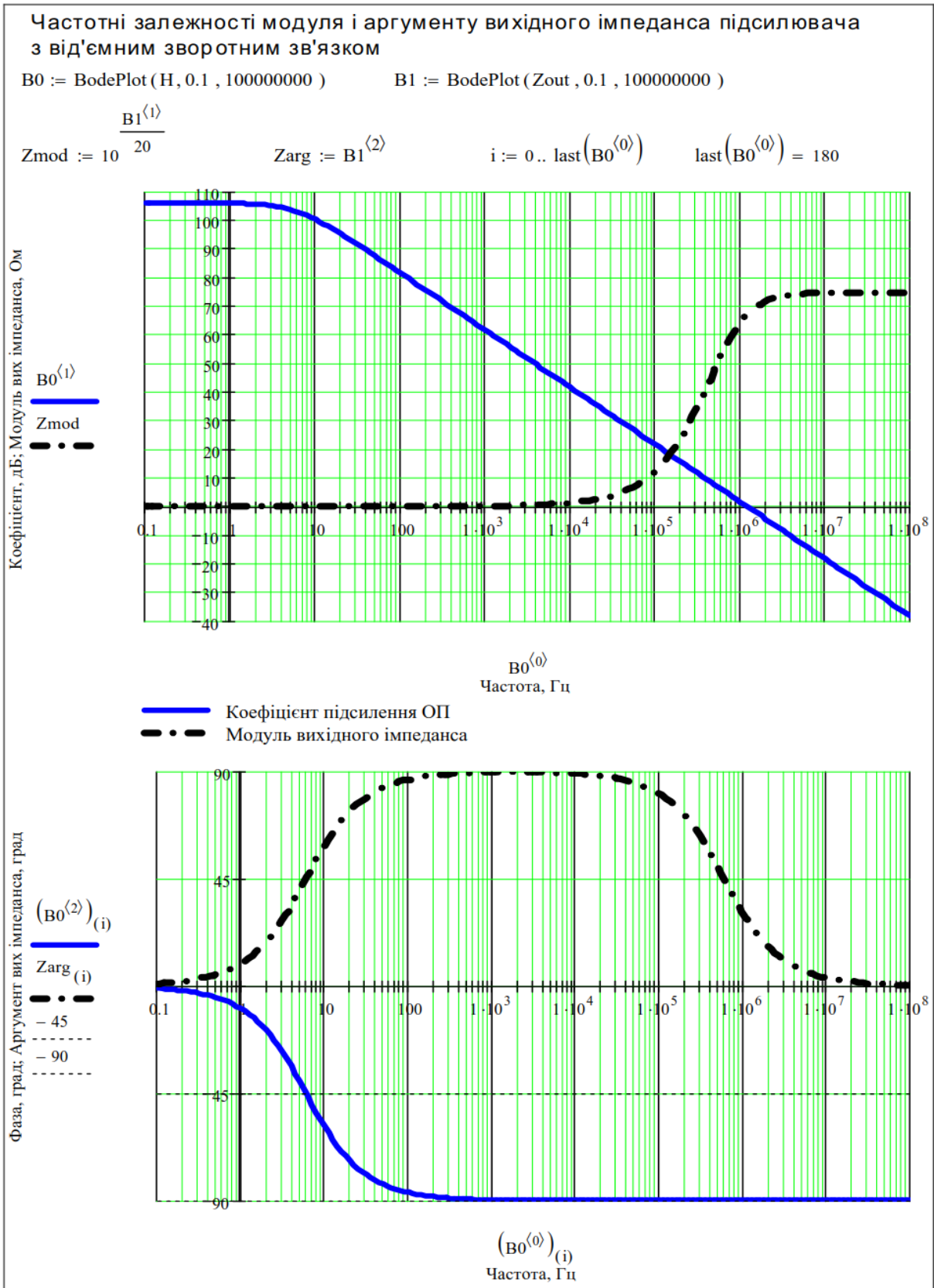


Рис. 16. Частотна залежність вихідного імпеданса підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком

Як бачимо (рис. 16), при $K\beta \gg 1$ має місце суттєве зменшення вихідного опору підсилювача в порівнянні опором без зворотного зв'язку.

Але повний вихідний опір (імпеданс) залежить від частоти. Очевидно, що невеликий вихідний опір має місце лише на низьких частотах. У разі збільшення частоти зменшується коефіцієнт підсилення ОП, тому збільшується вихідний опір підсилювача.

Зменшення впливу ємності кабелю

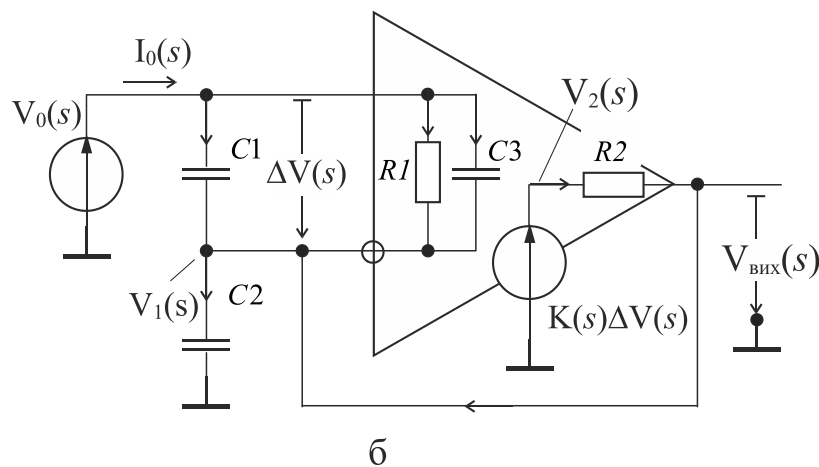
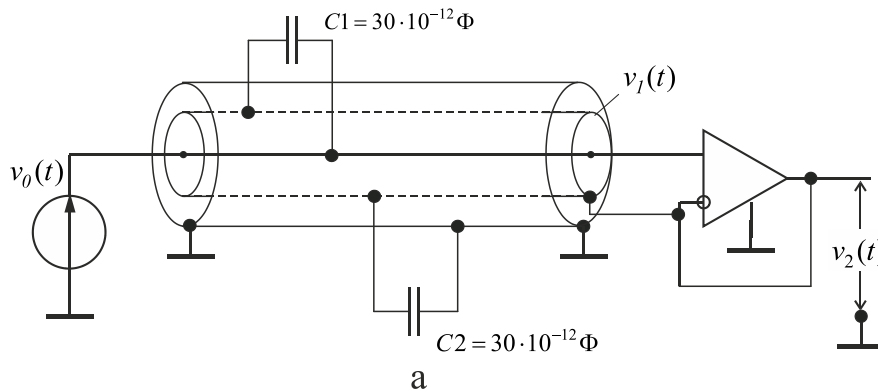


Рис. 17. Метод зменшення впливу вхідної ємності кабелю у вимірювальних приладах

На рис. 17 наступні позначення: C_1, C_2 – зосередженні ємності кабелю; R_1 – внутрішній вхідний активний опір підсилювача; C_3 – вхідна ємність підсилювача; R_2 – внутрішній вихідний опір підсилювача; K_0 – власний коефіцієнт підсилення ОП (розімкнений зворотний зв'язок) на постійному струмі; τ – постійна часу динамічної моделі підсилювача першого порядку.

Приклад 7

Зменшення впливу вхідної ємності вимірювальних приладів

$C1 := 30 \cdot 10^{-12}$ $C2 := 30 \cdot 10^{-12}$ - зосереджені ємності кабелю $TOL := 10^{-12}$

Нехай динамічна модель ОП має такі параметри

$K0 := 200000$ $f_s := 6$ $\omega_s := 2 \cdot \pi \cdot f_s$ $\tau := \frac{1}{\omega_s}$ $\tau = 0.027$ $\omega_s = 37.699$

$C3 := 2 \cdot 10^{-12}$ $R1 := 10 \cdot 10^6$ $R2 := 70$

$$H_{op}(s) := K0 \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$$

$v0(s) := 1$

система рівнянь за методом вузлових напруг

Given

$$(v0(s) - v1) \cdot \left(C1 \cdot s + \frac{1}{R1} + C3 \cdot s \right) + \frac{(v2 - v1)}{R2} = v2 \cdot C2 \cdot s$$

$$v2 = (v0(s) - v1) \cdot \frac{K0}{1 + \tau \cdot s}$$

$$v1(s) := \text{Find}(v1, v2)_0 \text{ float, 6} \rightarrow \frac{(2.35619 \cdot 10^{16} - 4.94578 \cdot 10^7 \cdot s + 7 \cdot s^2)}{(3.07554 \cdot 10^9 \cdot s + 7 \cdot s^2 + 2.35621 \cdot 10^{16})^1}$$

$$I0(s) := [(v0(s) - v1(s)) \cdot (C1 \cdot s)]$$

$$I0(s) \text{ float, 6} \rightarrow 3.00000 \cdot 10^{-11} \cdot \left[1 - 1 \cdot \frac{(2.35619 \cdot 10^{16} - 4.94578 \cdot 10^7 \cdot s + 7 \cdot s^2)}{(3.07554 \cdot 10^9 \cdot s + 7 \cdot s^2 + 2.35621 \cdot 10^{16})^1} \right] \cdot s$$

повна вхідна провідність приладу

$$Y(s) := \frac{I0(s)}{v0(s)} \text{ float, 6} \rightarrow 3.00000 \cdot 10^{-11} \cdot \left[1 - 1 \cdot \frac{(2.35619 \cdot 10^{16} - 4.94578 \cdot 10^7 \cdot s + 7 \cdot s^2)}{(3.07554 \cdot 10^9 \cdot s + 7 \cdot s^2 + 2.35621 \cdot 10^{16})^1} \right] \cdot s$$

еквівалентна вхідна ємність приладу

$$CE(s) := \frac{Y(s)}{s} \text{ float, 6} \rightarrow 3.00000 \cdot 10^{-11} - 3.00000 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(2.35619 \cdot 10^{16} - 4.94578 \cdot 10^7 \cdot s + 7 \cdot s^2)}{(3.07554 \cdot 10^9 \cdot s + 7 \cdot s^2 + 2.35621 \cdot 10^{16})^1}$$

Рис. 18. Метод зменшення впливу вхідної ємності кабелю у вимірювальних приладах (продовження)

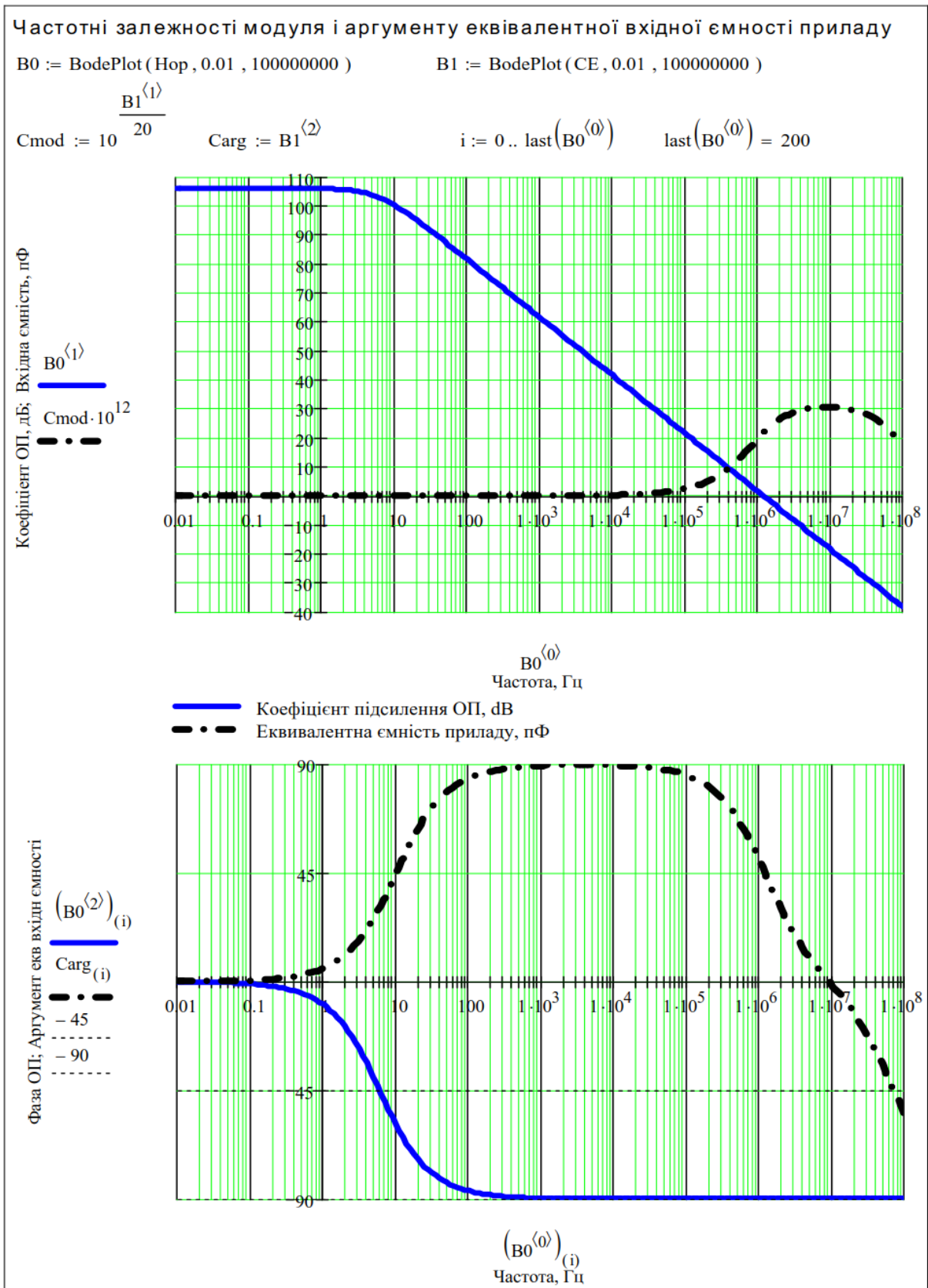


Рис. 19. Частотна залежність модуля і аргументу еквівалентної "вхідної ємності" приладу з кабелем

Але зворотний зв'язок має недоліки: такі, як поява *резонансних* властивостей у замкненій системі та збільшення коливальності перехідних процесів. При проектуванні багатокаскадних підсилювачів виникають принципові труднощі, пов'язані з тим, що у петлі зворотного зв'язку $\beta(j\omega)K(j\omega)$ на деяких частотах може відбутися інверсія фази. У цьому випадку від'ємний зворотний зв'язок стає додатним, підсилювач втрачає *стійкість* і *самозбуджується*. Тому при проектуванні реальної схеми підсилювача ще потрібен аналіз стійкості.

Аналіз у середовищі Micro-CAP

В Micro-CAP є три типи моделей операційних підсилювачів (**Opamp**), але доцільно використати найпростішу лінійну модель (LEVEL1). У такій моделі ОП має нескінченний вхідний опір та певний вихідний опір, значення якого $ROUT$ є сумою двох параметрів ОП: $ROUT = ROUTAC + ROUTDC$, де $ROUTAC$ – вихідний опір на змінному струмі, $ROUTDC$ - вихідний опір на постійному струмі. Параметр $A = V_{вих} / V_{вх}$ – коефіцієнт підсилення на постійному струмі. Оскільки така модель ОП не має реактивних елементів, то його АЧХ не має зрізу, що відповідає ідеальному підсилювачу.

Надалі для моделювання потрібно використовувати модель підсилювачів LEVEL1. Для цього виберіть деякий ОП, наприклад, типу LM741 та складіть свою модель ідеального підсилювача, як модель користувача. Для цього у вікні, яке відкривається після введення на схему операційного підсилювача (**Components** → **Analog Library** → **Opamp** → **General** → **L-** → **LM358** - → **LM741**) потрібно змінити тільки наступні параметри: LEVEL – 1, що відповідає рівню моделі LEVEL1; A – змінити на значення, яке зазначено у робочому завданні; ROUTDC – 0.001; ROUTAC – 0.001, та зберегти модель під новою назвою (наприклад, **MODEL = \$IDEAL**). Тобто, буде нова модель ОП **MODEL = \$IDEAL**. Але ні в якому разі не змінювати власні параметри моделі операційного підсилювача LM741.

Закрити вікно, натиснувши на кнопку **OK**.

Примітка. Значення інших параметрів не змінювати, оскільки вони не враховуються в моделі LEVEL1. Оскільки модель LEVEL1 не враховує значення напруг живлення, виводи живлення "плюс" і "мінус" операційного підсилювача можна заземлити.

Наприклад для схеми, що на рис. 20, частота зрізу в області верхніх частот f_{31} моделюється за допомогою фільтра на елементах $R1, C1$:

$$f_{31} = \frac{1}{2\pi R1C1}.$$

Тобто потрібно, наприклад, вибрати $R1 = 100$ кОм і розрахувати $C1$ за частотою зрізу. Приймаючи опір резистора $R4 = 1$ кОм, із формул

$$K_{0,33} = \frac{K_0}{1 + K_0\beta} \text{ і } \beta = \frac{R4}{R3 + R4} \text{ розрахувати опір резистора зворотного зв'язку}$$

$R3$. На рис. 21 наведено сімейство логарифмічних АЧХ і ФЧХ, якщо опір резистора зворотного зв'язку $R3$ змінюється від 900 Ом до 999 кОм.

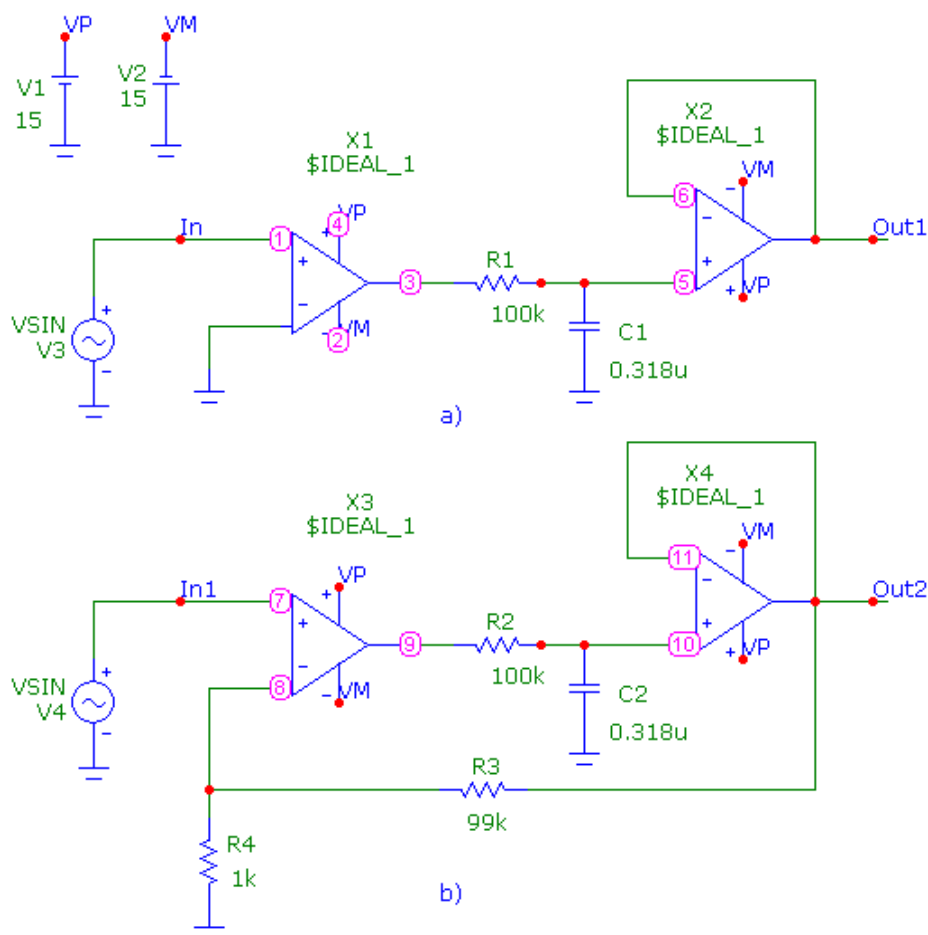


Рис. 20. Моделювання однієї частоти зрізу в області верхніх частот: а – схема без зворотного зв'язку; б – схема з від'ємним зворотним зв'язком

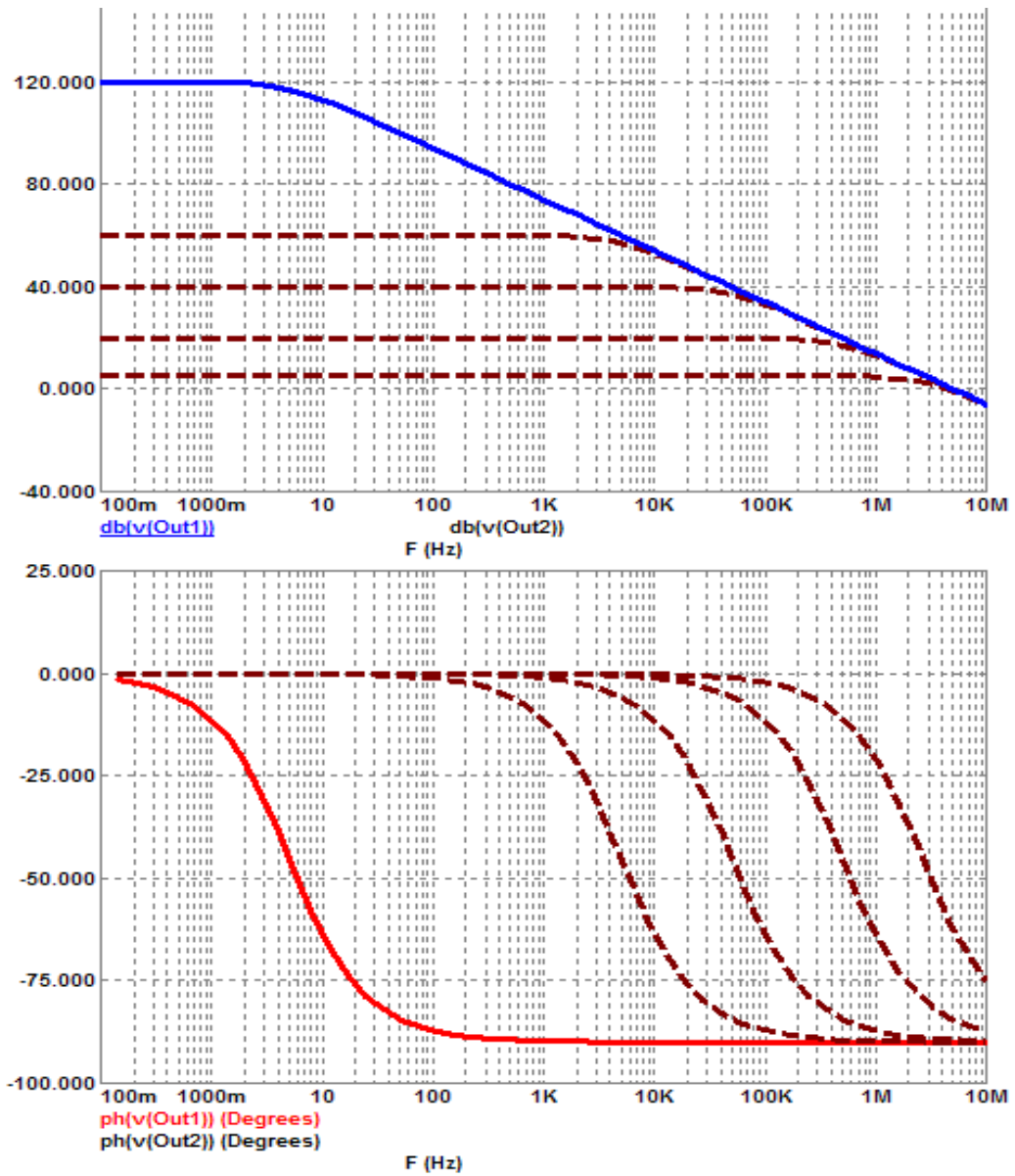


Рис. 21. Сімейство логарифмічних АЧХ і ФЧХ для схеми з однією частотою зрізу в області верхніх частот

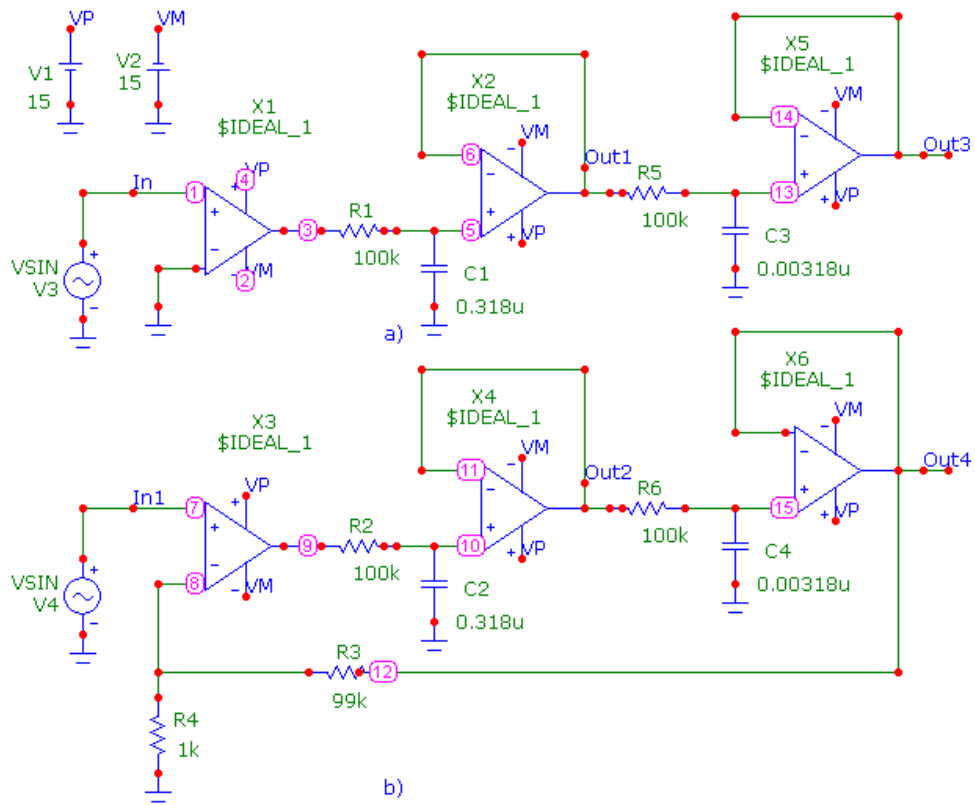


Рис. 22

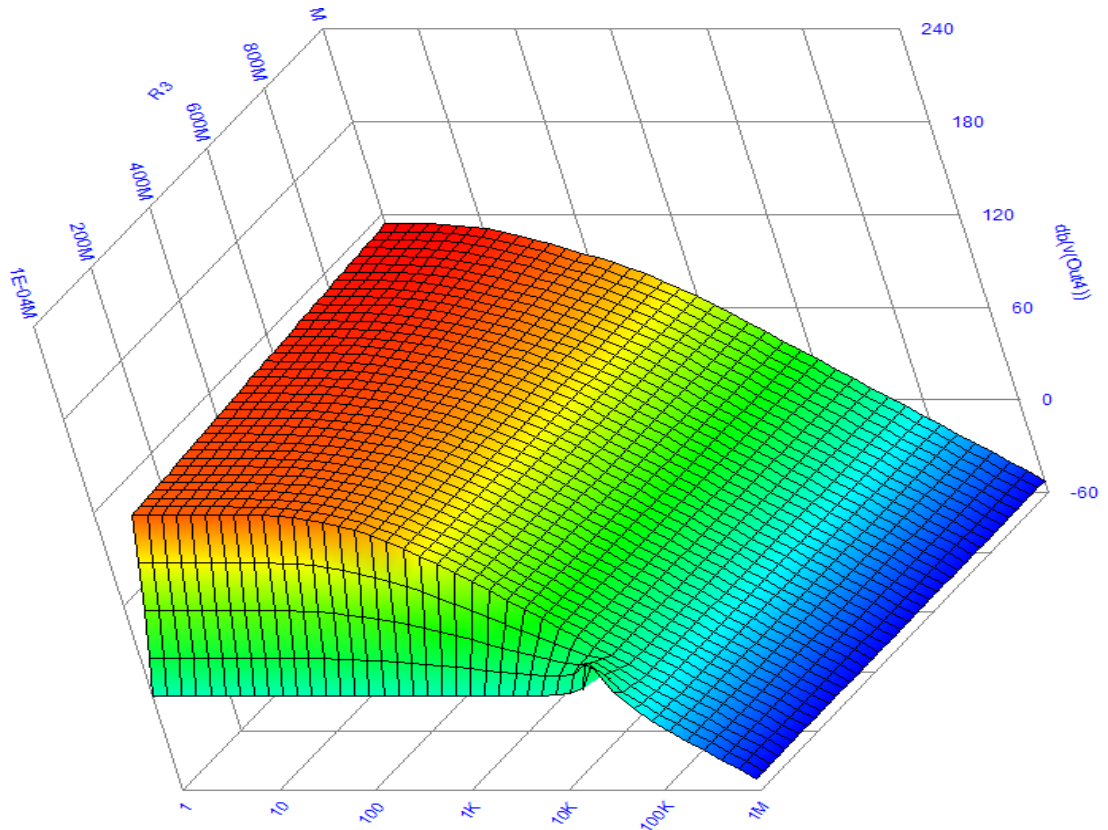


Рис. 23. Приклад моделювання залежності АЧХ від R_3 (до схеми на рис. 22) в середовищі Micro-CAP

Контрольні запитання та завдання

1. Що називається від'ємним зворотним зв'язком? Наведіть математичну модель системи з від'ємним зворотним зв'язком.
2. З якою метою використовується від'ємний зворотний зв'язок у підсилювачах у складі вимірювальних перетворювачів?
3. Дайте визначення інверсної системи. Чому дорівнює системна функція інверсної системи?
4. Який вигляд має АЧХ "частотне-скорегованого" операційного підсилювача?
5. Якою динамічною моделлю можна представити такий підсилювач у робочій області частот?
6. Дайте визначення частоти одиничного підсилювання.
7. Як впливає від'ємний зворотний зв'язок на коефіцієнт підсилення у смузі пропускання?
8. Як впливає від'ємний зворотний зв'язок на смугу пропускання за частотою?
9. Як впливає від'ємний зворотний зв'язок на час встановлення вихідного сигналу підсилювача?
10. Як впливає від'ємний зворотний зв'язок на стабільність параметрів схеми підсилювача у статистиці?
11. Як розрахувати смугу пропускання за частотою підсилювача зі зворотним зв'язком, якщо відомі частота одиничного підсилювання операційного підсилювача f_1 та коефіцієнт підсилення схеми зі зворотним зв'язком $K_{0,33}$?
12. За допомогою яких ланок моделюються частоти зрізу в області нижніх та верхніх частот?
13. Чим відрізняються діаграми Бode підсилювачів зі зворотним зв'язком, які мають одну, дві чи три частоти зрізу?
14. Як впливає величина петльового підсилення на форму АЧХ?

15. Як впливає від'ємний зворотний зв'язок на вхідний імпеданс підсилювача?

16. Як впливає від'ємний зворотний зв'язок на вихідний імпеданс підсилювача?

17. Поясніть метод зменшення впливу ємності кабелю у вимірювальних приладах.

18. Який характер має частотна залежність еквівалентної вхідної ємності приладу від частоти?

19. Як впливають статичні та динамічні характеристики операційного підсилювача на зменшення впливу вхідної ємності приладу?

ТЕМА 8. СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ З ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ

Лекція 17. Дослідження стійкості активних систем на підсилювачах з від'ємним зворотним зв'язком. Частотний критерій Найквіста

Поняття стійкості систем зі зворотним зв'язком. Умови стійкості системи зі зворотним зв'язком. Частотний критерій Найквіста. Логарифмічний частотний критерій стійкості Боде. Запас стійкості за амплітудою. Запас стійкості за фазою. Аналіз стійкості в середовищі Micro-CAP. Моделювання самозбудження нестійкого кола із замкненим зворотним зв'язком. Контрольні запитання та завдання.

Поняття стійкості систем зі зворотним зв'язком

Розглянемо ще раз систему (активна) з від'ємним зворотним зв'язком (рис. 1).

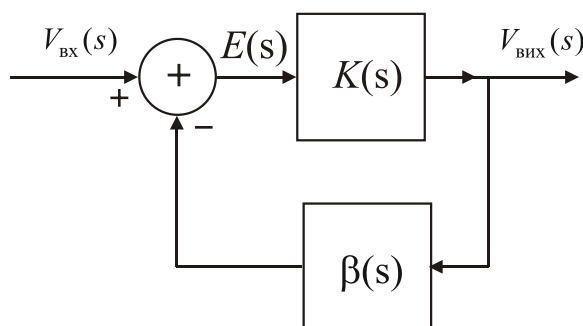


Рис. 1. Система з від'ємним зворотним зв'язком

Нехай зовнішній вхідний сигнал відсутній $V_{\text{вх}}(s) = 0$, тобто система автономна. Тоді маємо:

$$V_{\text{вих}}(s) = -K(s)\beta(s)V_{\text{вих}}(s) \rightarrow V_{\text{вих}}(s)[1 + K(s)\beta(s)] = 0 \quad (1)$$

Отже, якщо $V_{\text{вих}}(s) \neq 0$ (система збуджена), то рівність (1) має місце лише при тих значеннях s , які є коренями характеристичного рівняння

$$1 + K(s)\beta(s) = 0. \quad (2)$$

Якщо система лінійна, то вихідний сигнал дорівнює:

$$V_{\text{вих}}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots,$$

де s_1, s_2, \dots – корені характеристичного рівняння (2).

Цей сигнал є *скінченним і з часом затухає*, якщо всі корені мають *від'ємні дійсні частини* (тобто знаходяться у лівій півплощині комплексної змінної s). Коло зі зворотним зв'язком, що має такі властивості, буде *стійким* і навпаки.

В загальному випадку говорять, що фізична система є стійкою, якщо будь-які незначні варіації впливів, при яких система функціонує (вхідні дії, ненульові початкові стани тощо), призводять лише до малих змін у поведінці (реакції) системи.

Однак на практиці дуже часто потрібен такий критерій стійкості кіл зі зворотним зв'язком, який не вимагає знаходження всіх коренів характеристичного рівняння (2), що в загальному випадку для складних систем досить важка задача.

Умови стійкості системи зі зворотним зв'язком. Частотний критерій стійкості Найквіста

Розглянемо передатну функцію системи із розімкненим зворотним зв'язком (коефіцієнт підсилення за петлею зворотного зв'язку):

$$w(s) = K(s)\beta(s). \quad (3)$$

Формула (3) описує *відображення комплексної площини s на другу комплексну площину w* .

Якщо s_1, s_2, \dots – корені характеристичного рівняння $1 + K(s)\beta(s) = 0$, то всім цим кореням на площині w буде відповідати одна точка $w = (-1, j0)$. Звідси витікає принцип, який дозволяє судити про можливість самозбудження системи зі зворотним зв'язком.

Якщо образ правої півплощини змінної s при відображенні вигляду (3) містить точку $w = (-1, j0)$, то система із замкненим зворотним зв'язком буде нестійкою.

Важливу роль має крива на площині w , яка є образом уявної осі $j\omega$ на площині s (рис. 2). Рівняння цієї кривої в параметричному вигляді наступне:

$$\begin{aligned} w(j\omega) &= K(j\omega)\beta(j\omega) = \\ &= \operatorname{Re}[K(j\omega)\beta(j\omega)] + j \cdot \operatorname{Im}[K(j\omega)\beta(j\omega)] \end{aligned} \quad (4)$$

де роль параметра грає частота ω , яка змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Ця крива зветься *амплітудно-фазовою характеристикою АФЧХ розімкненої системи (частотний годограф)*.

Майже у всіх випадках, які мають практичний інтерес, модулі частотних коефіцієнтів передачі ланок $|K(j\omega)\beta(j\omega)|$ прагнуть до нуля зі зростанням частоти (характерно для всіх систем, стійких у розімкненому стані). Тому АФЧХ проходить через точку:

$$w = 0 + j0.$$

Крім того, АФЧХ симетрична відносно дійсної осі на площині w , тому що:

$$w(-j\omega) = w^*(j\omega).$$

Звісно, що АФЧХ для цих систем являє собою замкнені криві у площині w .

В теорії функції комплексної змінної відомо, що при відображенні вигляду (3) *образом* правої півплощини змінної s є *внутрішня область*, яка охоплюється кривою АФЧХ.

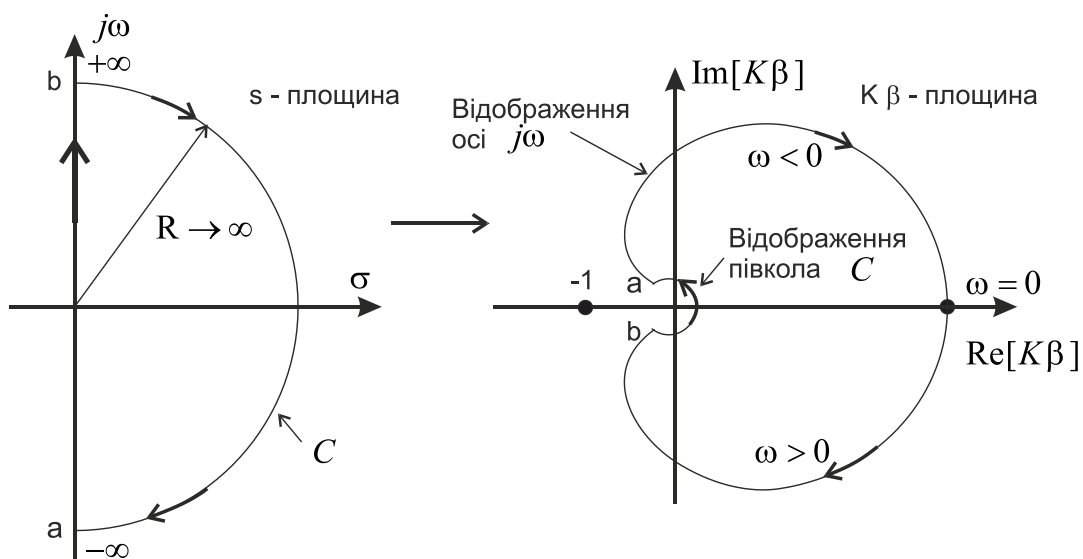


Рис. 2. Відображення правій півплощини змінної s на площину $w(s)$

Частотний критерій стійкості Найквіста для систем з від'ємним зворотним зв'язком:

Якщо АФЧХ розімкненої системи (коефіцієнту петльового підсилення) охоплює точку з координатами $(-1, j0)$, то замкнена система буде нестійкою.

На рис. 3 наведено фрагмент документа Mathcad, що пояснює процедуру дослідження стійкості кіл зі зворотним зв'язком за виглядом АФЧХ коефіцієнту петльового підсилення розімкненої системи, якщо ω змінюється від $-\infty$ до $+\infty$

Можна бачити, що кола, які мають одну чи дві постійних часу завжди стійкі, однак кола з трьома (рис. 4) і більше постійними часу за певних умов стають нестійкими.

Відмітимо, що наведене формулювання критерію Найквіста є вірним, якщо розімкнена система з комплексним коефіцієнтом передачі $w(s) = K(s)\beta(s)$ є стійкою. Для систем, які при розімкненому колі зворотного зв'язку є нестійкими, критерій Найквіста формулюється значно складніше.

Перевагою критерію Найквіста є *наочність* роботи з частотними характеристиками, а також те, що він може застосуватись для дослідження стійкості систем, у яких передатна функція не є дробово-раціональною.

Недоліком є те, що його важко застосувати до систем із багатопетльовим зворотним зв'язком.

Моделювання стійкості у середовищі Mathcad

Приклад 1

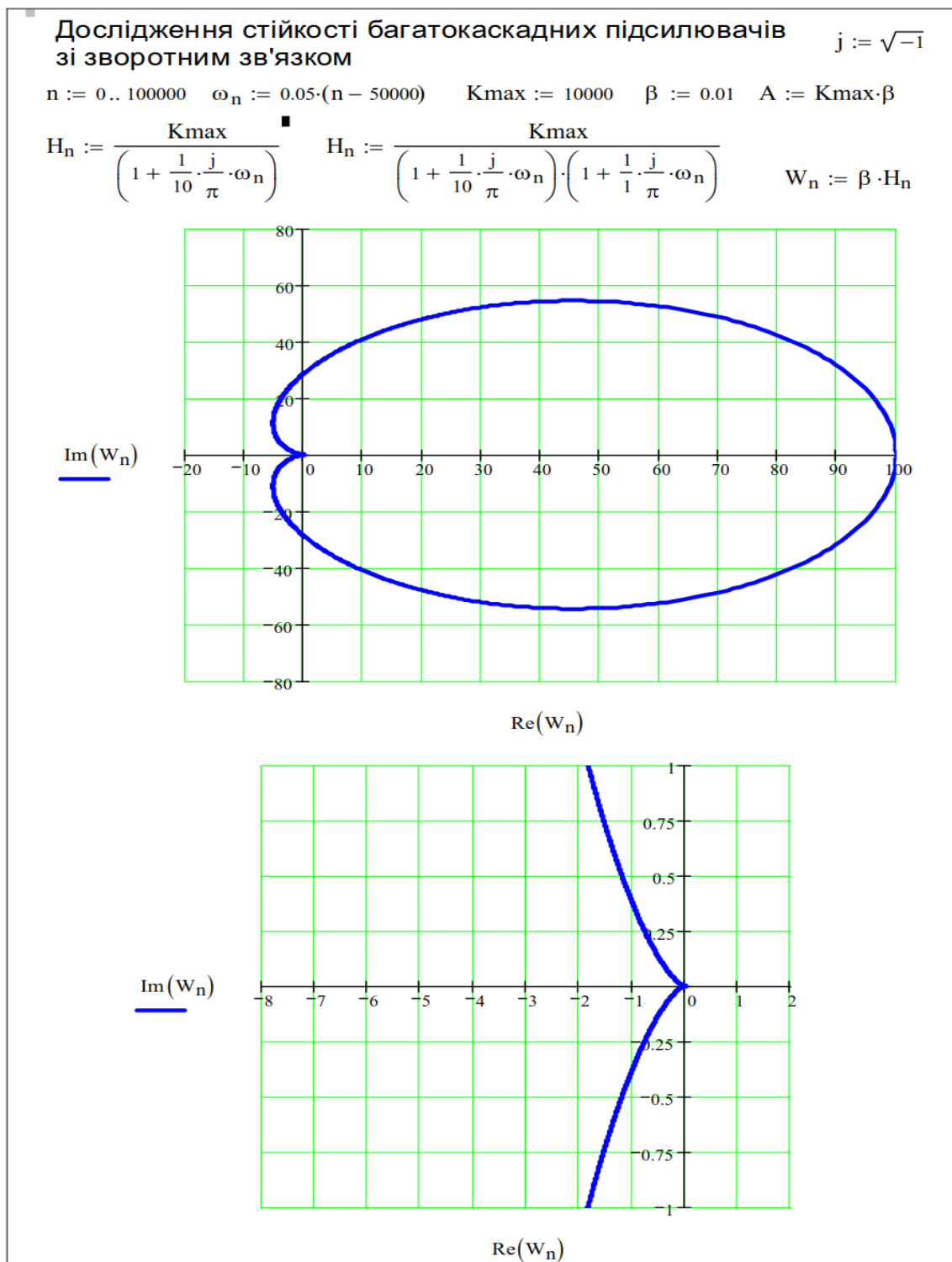


Рис. 3. Годограф стійкого кола за критерієм Найквіста

Приклад 2

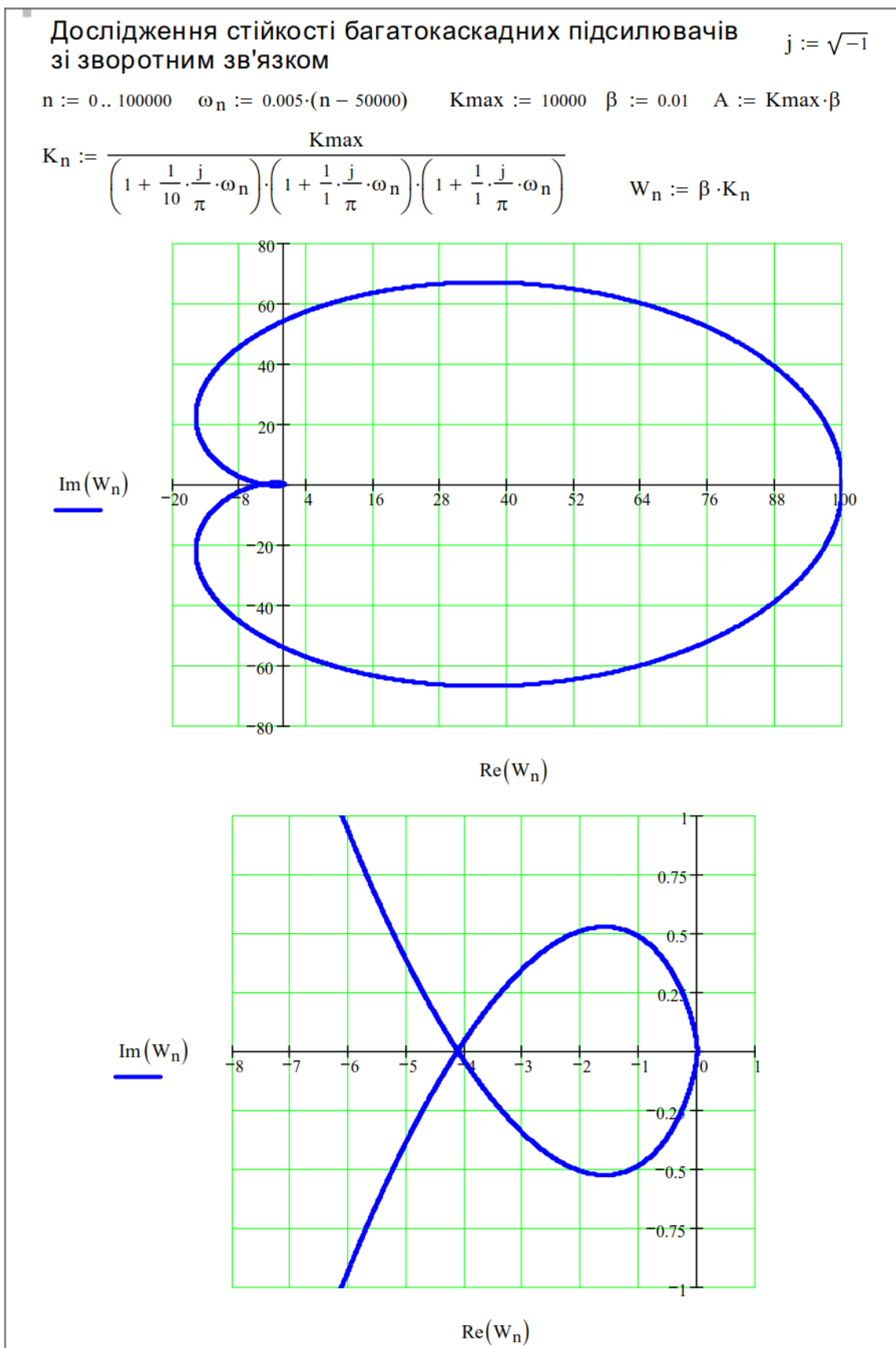
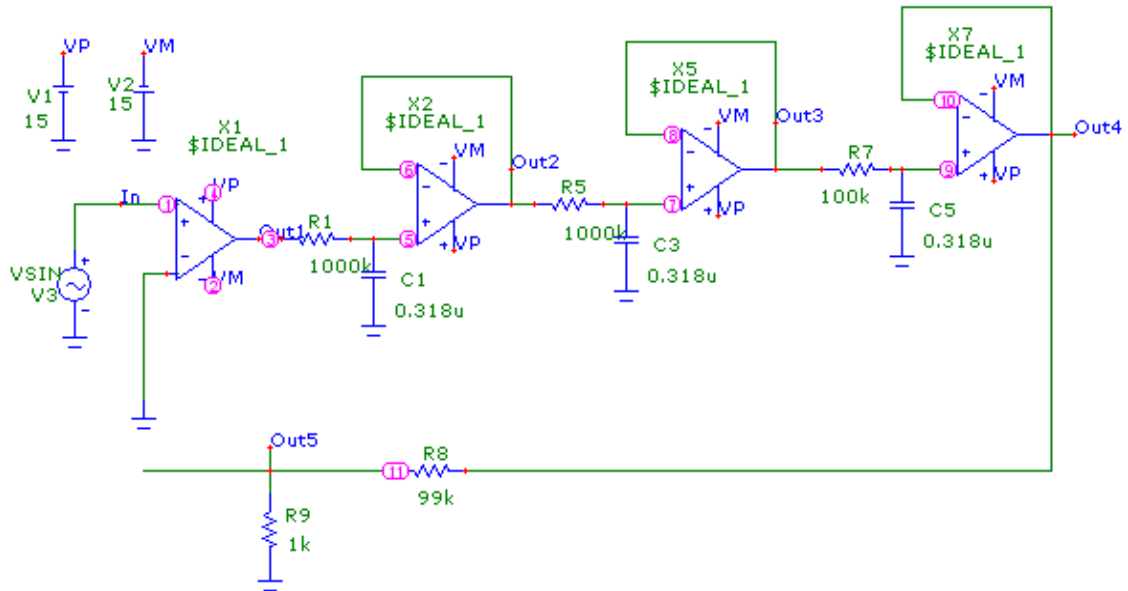


Рис. 4. Годограф нестійкого кола за критерієм Найквіста

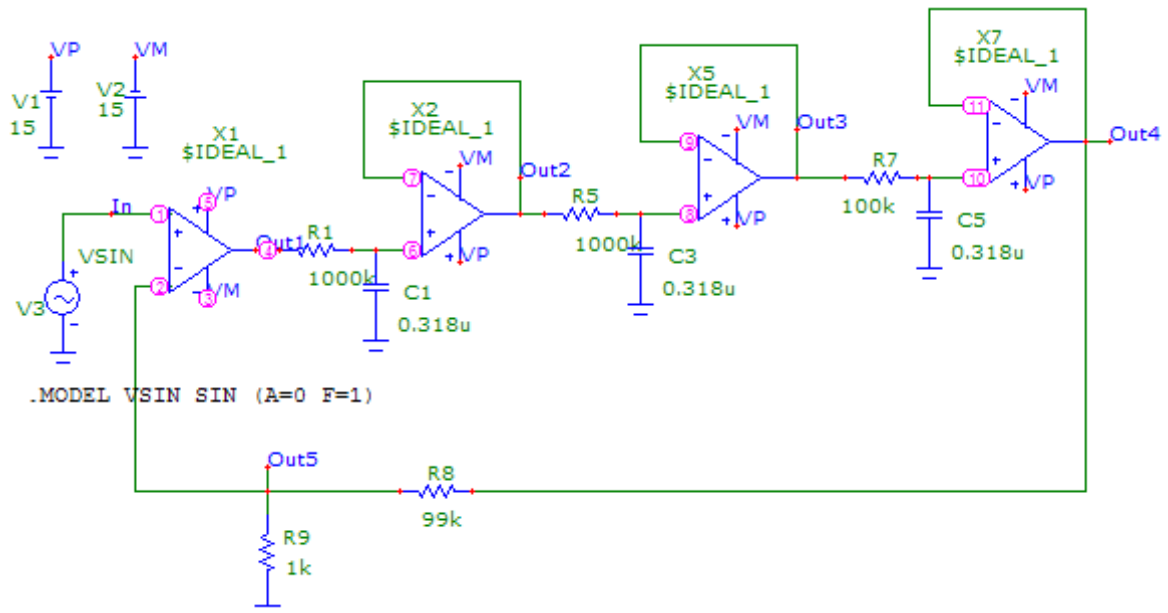
Моделювання стійкості у середовищі програми Micro-CAP

Приклад 3

На рис. 5 наведено приклад моделювання нестійкого підсилювача з багатьма каскадами, частотний годограф якого наведено на рис. 4.



a



б

Рис. 5. Моделювання нестійкого кола: а – зворотний зв'язок розімкнений ; б – зворотний зв'язок замкнений

На рис. 6 наведено АФЧХ (частотний годограф) коефіцієнта петльового підсилення, якщо зв'язок розімкнений. Бачимо, що АФЧХ розімкненої системи охоплює точку з координатами $(-1, j0)$. Під час замикання зворотного зв'язку – схема збудиться.

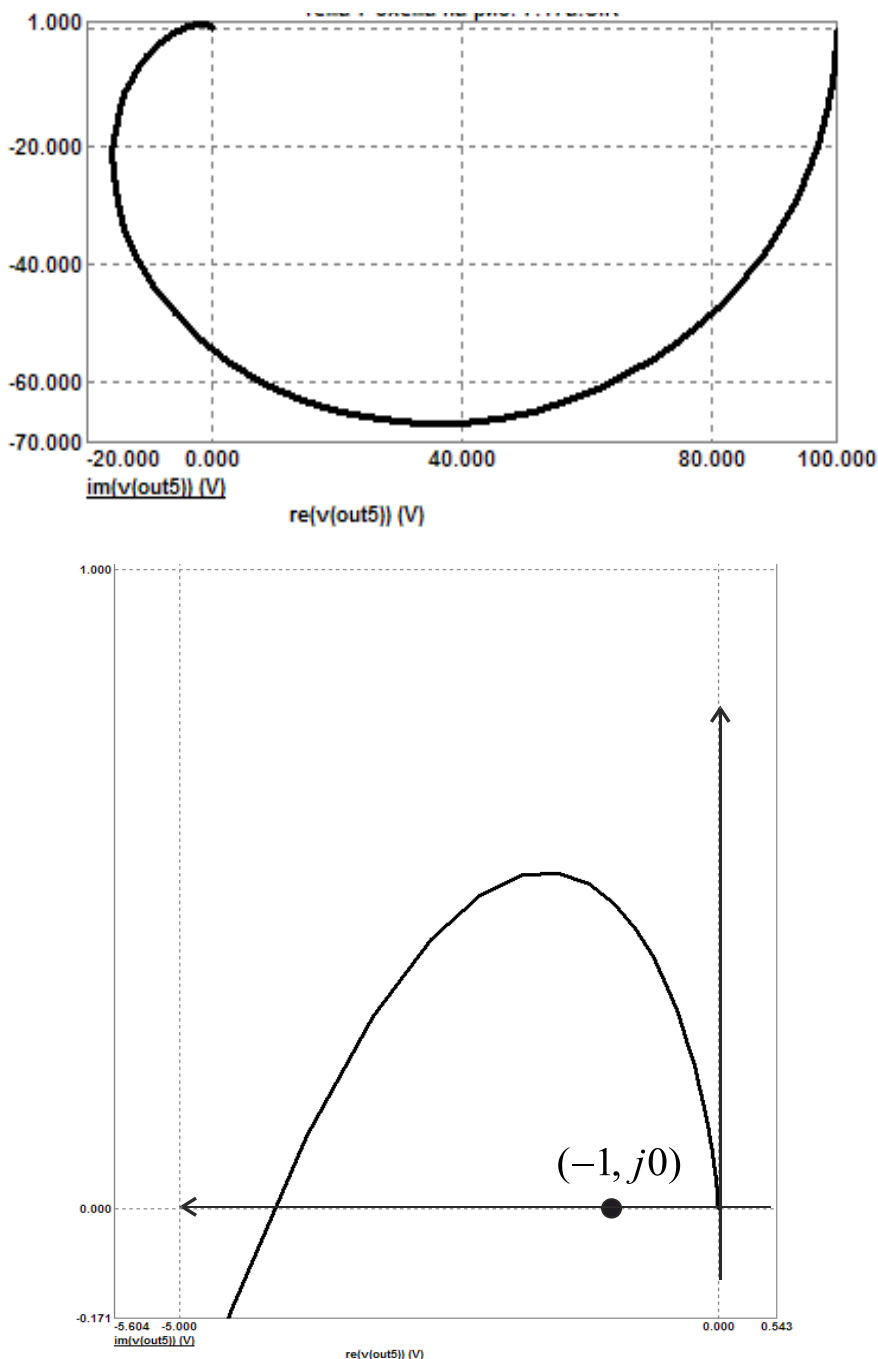


Рис. 6. Годограф коефіцієнта петльового підсилення схеми, що на рис. 5, якщо зв'язок розімкнений ($R7 = 100 \text{ кОм}$)

Логарифмічний частотний критерій стійкості Боде

За виглядом ЛАЧХ і ЛФЧХ (рис. 7), які відповідають годографу, наведеному на рис. 6, бачимо, що на частоті, коли фазовий зсув $\varphi(\omega) = -180^\circ$, модуль петльового підсилення $|K(j\omega)\beta(j\omega)| > 1$. Якщо врахувати, що сигнал зворотного зв'язку віднімається із вхідного сигналу системи, ще має місце зсув за фазою на -180° , загальний зсув становить -360° . Від'ємний зворотний зв'язок стане додатним. При цьому модуль петльового підсилення більше одиниці, що є умовою збудження підсилювача зі замкненим зворотним зв'язком на цій частоті.

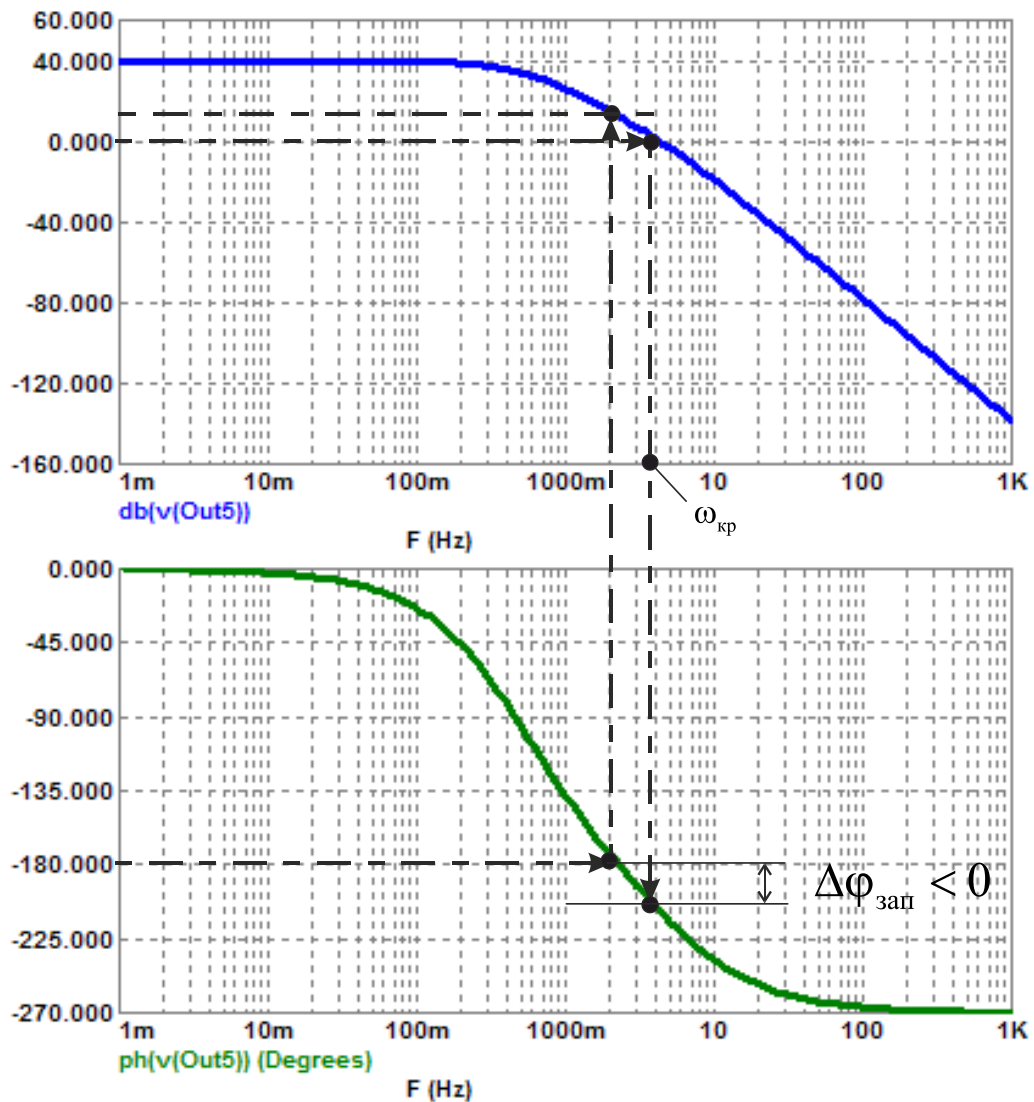


Рис. 7. ЛАЧХ і ЛФЧХ петльового підсилення нестійкого кола, якщо $R_7 = 100$ кОм – запас за фазою відсутній (від'ємне число)

Отже, умови стійкості системи з від'ємним зворотним зв'язком:

Замкнена система буде стійкою, якщо значення фазового зсуву на частоті, коли $|K(j\omega)\beta(j\omega)|_{\omega=\omega_{кр}}=1$ або $20\lg|K(j\omega)\beta(j\omega)|_{\omega=\omega_{кр}}=0$ дБ, за абсолютною величиною, менше 180° .

Якщо на рис. 5 вибрати $R7 = 1$ кОм – коло стане стійким (рис. 8).

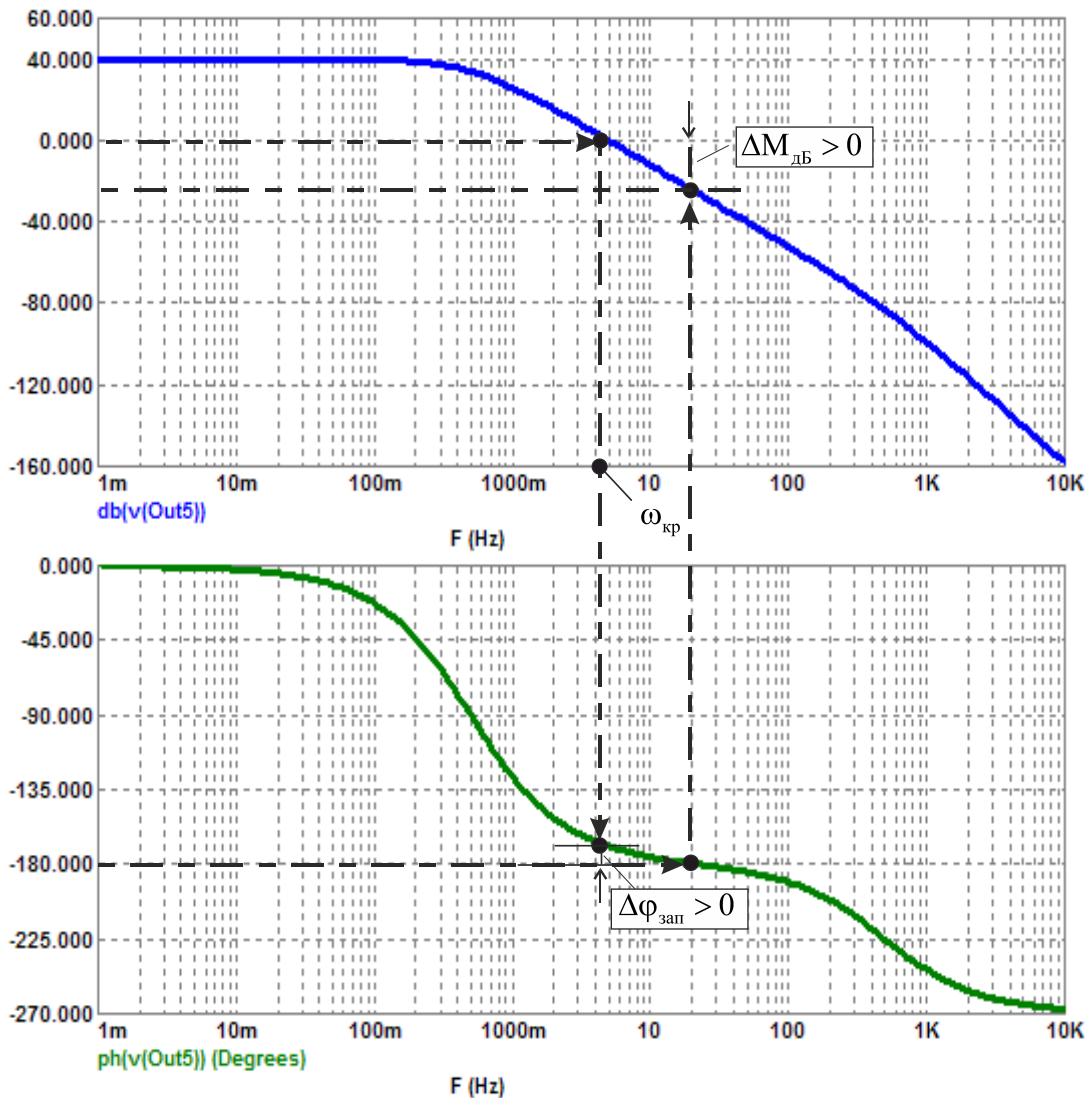


Рис. 8. ЛАЧХ і ЛФЧХ петльового підсилення стійкого кола (якщо вибрати $R7 = 1$ кОм – коло стає стійким)

Критична частота $\omega_{кр}$ – це частота, на якій коефіцієнт петльового підсилення стає $|K(j\omega)\beta(j\omega)|_{\omega=\omega_{кр}}=1$ (або $20\lg|K(j\omega)\beta(j\omega)|_{\omega=\omega_{кр}}=0$ дБ).

Схема перебуває на границі стійкості, якщо одночасно виконуються умови

$$20\lg|K(j\omega)\beta(j\omega)|_{\omega=\omega_{кр}} = 0\text{дБ}; \quad \varphi(\omega_{кр}) = -180^\circ.$$

Визначення: Запас стійкості за амплітудою $\Delta M_{\text{дБ}}$ – це число децибел, на яке потрібно збільшити підсилення схеми, щоб вона досягла границі стійкості.

Визначення: Запас стійкості за фазою – це запас відставання за фазою, яка на критичній частоті $\omega_{кр}$ ще не досягла -180° , і визначається за формулою $\Delta\varphi_{\text{зап}} = \varphi(\omega_{кр}) - 180^\circ$.

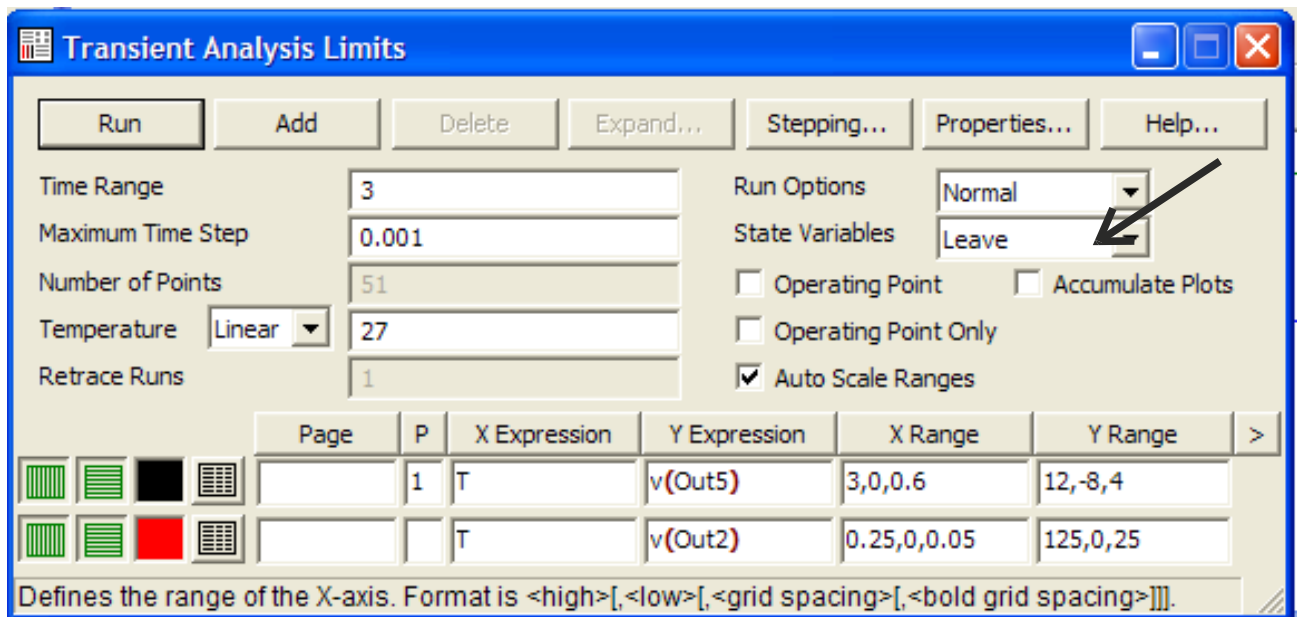


Рис. 9. Задання параметрів моделювання (схема рис. 5,б)

Для збудження підсилювача достатньо дати певний "поштовх", наприклад, у вигляді деяких ненульових початкових умов, скажімо, у вигляді початкової напруги на конденсаторі $C5$ порядку 1 мВ (рис. 10) або ненульового вхідного сигналу з амплітудою 1мВ.

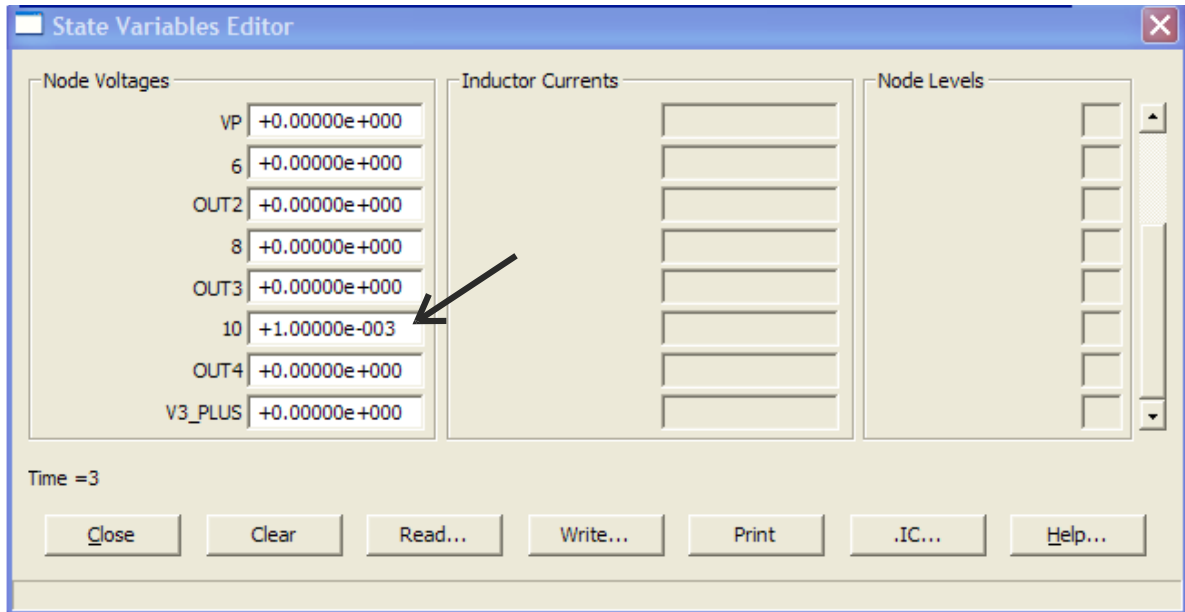


Рис. 10. Задання ненульових початкових умов (схема рис. 5,б):
- напруга 1 мВ на конденсаторі C5

На рис. 11 наведено вихідну реакцію підсилювача (рис. 5), якщо зв'язок замкнений. Бачимо, що підсилювач самозбуджується.

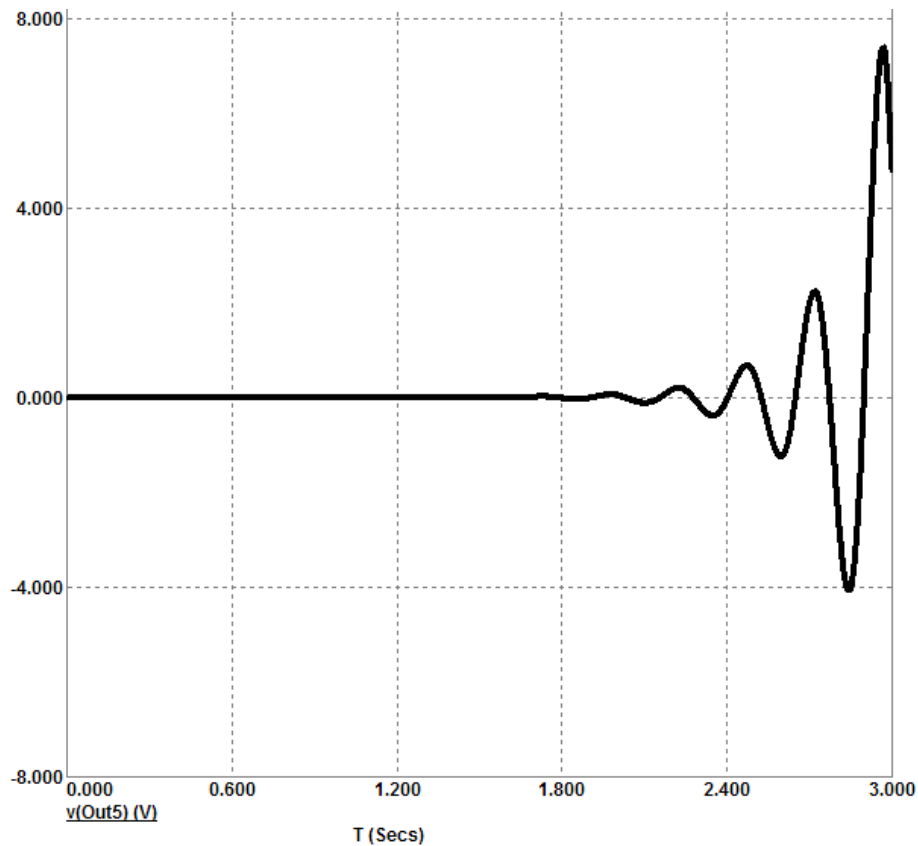



Рис. 11. Моделювання самозбудження нестійкого кола зі замкненим зворотним зв'язком за умови, що вхідний сигнал має нульовий рівень: **.MODEL VSIN SIN (A=0 F=1)**

Отже, якщо зворотний зв'язок замкнути, то власні коливання, які виникають у системі, наступні: спочатку деякий час їх практично не можна бачити, потім вони наростають по амплітуді за експоненціальним законом і з часом, теоретично, стають нескінченими (реально вони обмежені напругою живлення схеми).

Щоб можна було використовувати одні і теж самі початкові умови кожного разу при моделюванні (кнопка **Run**, клавіша **F2** або піктограма ) у вікні **Transient Analysis Limits** в опції **State Variables** треба встановити режим **Read** (режим читання початкових умов із файлу).

Але спочатку у вікні **State Variables Editor** треба встановити потрібні початкові умови та записати їх (**Write ...**) у файл (має розширення *.TOP).

Контрольні запитання та завдання

1. *Які види зворотного зв'язку існують?*
2. *Дайте загальне визначення стійкості динамічних систем.*
3. *Дайте визначення комплексної площини $w(j\omega)$.*
4. *Як відображаються корені характеристичного рівняння $1 + K(s)\beta(s) = 0$ площини змінної s в комплексній площині w ?*
5. *Як відображається права півплощина змінної s на комплексній площині w ?*
6. *Як будується годограф коефіцієнта петльового підсилення?*
7. *Який зв'язок між частотним годографом та АЧХ і ФЧХ?*
8. *Поясніть сутність методу визначення стійкості багатокаскадних підсилювачів із загальним від'ємним зворотним зв'язком за частотним критерієм Найквіста.*
9. *Як визначається стійкість за виглядом логарифмічних АЧХ і ФЧХ?*
10. *Дайте визначення, що таке запас стійкості за амплітудою.*
11. *Дайте визначення, що таке запас стійкості за фазою.*
12. *Дайте визначення, що таке критична частота.*

13. Як впливає вибір запасу стійкості на форму встановлення перехідної характеристики підсилювача?

14. Чи є підсилювач з однією постійною часу з від'ємним зворотним зв'язком стійким колом? Чи є підсилювач з двома постійними часу з від'ємним зворотним зв'язком стійким колом?

15. За яких умов підсилювач з трьома постійними часу з від'ємним зворотним зв'язком стає нестійким?

ТЕМА 9. СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ СИГНАЛІВ

Лекція 18. Спектральний аналіз і синтез сигналів. Ряди Фур'є.

Спектральна діаграма. Рівність Парсеваля.

Ряди Фур'є. Спектральний аналіз і синтез періодичних сигналів довільної форми. Умови Діріхле. Тригонометрична форма ряду Фур'є. Амплітудно-фазова (косинусоїдальна) форма ряду Фур'є. Часткові суми ряду Фур'є. Явище Гіббса. Експоненціальна (комплексна) форма ряду Фур'є. Спектральна діаграма. Рівність Парсеваля. Дослідження спектра сигналів у середовищі Mathcad. Контрольні запитання та завдання.

Спектральний аналіз і синтез періодичних сигналів довільної форми. Ряди Фур'є

З математики відомо, що гармонічні функції складають ортогональний базис. Однак дуже важливо за базис розкладання брати такі ортогональні сигнали, які ще є *інваріантні* відносно перетворень у фізичних системах. Такі сигнали називають *власною функцією* деякої фізичної системи.

Відомо, що усталена реакція ЛПЧ-кола (системи) на гармонічний сигнал є гармонічною такої ж самої частоти. Отже, *гармонічний сигнал є власною функцією* ЛПЧ-кола, а реакція кола на кожен складову (в усталеному режимі) буде однаковою за формою і за частотою, як і самі сигнали, які складають базис.

Тому вказаний базис можна використати для аналізу реакції ЛПЧ-кол (чи системи) на дію періодичних сигналів довільної форми (якщо попередньо знайти його спектр), яка буде мати ті ж самі складові, як вхідний сигнал, але з новими параметрами – амплітудою та початковою фазою.

Спектральне подання періодичних сигналів

Відомо, що будь-який періодичний сигнал $x(t + mT) = x(t)$, що задовольняє умовам Діріхле (тобто, період T може бути розбитий на кінцеву кількість інтервалів, на яких функція $x(t)$ неперервна і монотонна; в будь-якій точці розривів функції $x(t)$ існують скінчені границі $x(t - 0)$ і $x(t + 0)$), може бути представлена у вигляді ряду Фур'є. Для реальних сигналів умови Діріхле

виконуються завжди. Для таких сигналів ряд Фур'є збігається до значень сигналу в точках неперервності, а в точках розриву дає значення

$$x(t) = \frac{x(t-0) + x(t+0)}{2}.$$

1. Тригонометрична форма ряду Фур'є:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \quad (1)$$

де коефіцієнти a_0, a_n, b_n визначаються формулами:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad n \neq 0. \quad (3)$$

Коефіцієнт a_n задовольняє умову парної симетрії, тобто є парною функцією відносно n , а коефіцієнт b_n - умову непарної симетрії, отже є непарною відносно n функцією. Звідси

$$a_{-n} = a_n; \quad b_{-n} = -b_n, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

2. Амплітудно-фазова (косинусоїдальна) форма ряду Фур'є:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} - \theta_n\right). \quad (4)$$

Тут використано те, що $A_{m_n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} - \theta_n\right)$ можна подати у вигляді:

$$A_{m_n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos \theta_n + A_{m_n} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \sin \theta_n = a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right).$$

Початкова фаза береться зі знаком "мінус", щоб ряд (4) можна було подати у вигляді суми косинусоїдальної і синусоїдальної складових. Звідси

$$a_n = A_{m_n} \cos \theta_n; \quad b_n = A_{m_n} \sin \theta_n \quad \rightarrow \quad A_{m_n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \operatorname{tg} \theta_n = \frac{b_n}{a_n}; \quad (5)$$

$$\Rightarrow \theta_n = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b_n/a_n), & a_n > 0; \\ \pm\pi + \operatorname{arctg}(b_n/a_n), & a_n < 0. \end{cases}$$

Отже, треба враховувати, в якій чверті перебуває кут.

Традиційно в теорії електричних кіл, радіотехніці використовується *косинусоїдальна* форма запису, в електротехніці – *синусоїдальна* форма.

Але якщо використовується синусоїдальна амплітудно-фазова форма, то маємо:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \psi_n\right). \quad (6)$$

Враховуючи те, що $A_{m_n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \psi_n\right)$ можна подати у вигляді

$$A_{m_n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \cos \Psi_n + A_{m_n} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \sin \Psi_n = a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right),$$

дістанемо:

$$a_n = A_{m_n} \sin \Psi_n; \quad b_n = A_{m_n} \cos \Psi_n.$$

$$\Rightarrow A_{m_n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \begin{cases} \arctg(a_n/b_n), & b_n > 0; \\ \pm\pi + \arctg(a_n/b_n), & b_n < 0. \end{cases}$$

де $\psi_n = \frac{\pi}{2} - \theta_n$, де $\theta_n = \begin{cases} \arctg(b_n/a_n), & a_n > 0; \\ \pm\pi + \arctg(b_n/a_n), & a_n < 0 \end{cases}$ – якщо ряд подається у

косинусоїдальній формі.

Розглянемо періодичну послідовність прямокутних імпульсів $x(t)$.

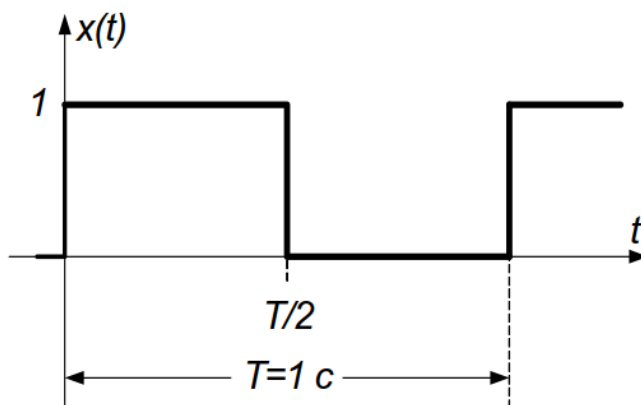


Рис. 1. Періодична послідовність прямокутних імпульсів

Оскільки $x(t)$ – непарна функція (без врахування постійної складової), то всі коефіцієнти a_n ($n \neq 0$) дорівнюватимуть нулю.

Коефіцієнт a_0 має значення $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 \cdot dt = \frac{1}{2}$.

Коефіцієнти b_n ($n \neq 0$) мають значення:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\pi n)}{\pi n}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Як наслідок, ряд Фур'є можна подати у вигляді:

$$x(t) = a_0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n-\text{непарні}}}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{2}{3\pi} \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right) + \frac{2}{5\pi} \sin\left(\frac{10\pi t}{T}\right) + \dots$$

На рис. 2 наведено графіки часткових сум $x_i(t)$ ряду Фур'є, які, як бачимо, все більше збігаються до функції $x(t)$ з кожним новим доданком

$$x_i(t) = a_0 + \sum_{n=1}^i b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right).$$

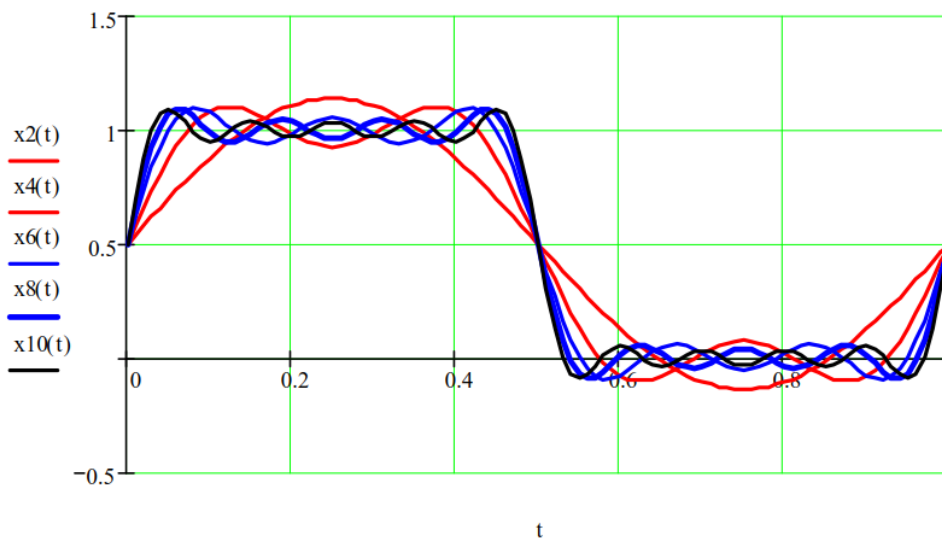


Рис. 2. Часткові суми ряду Фур'є

Ряди Фур'є забезпечують найкращу апроксимацію довільного сигналу за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки для заданого базису розкладання та фіксованої кількості членів ряду.

Явище Гіббса. При збільшенні кількості членів ряду часткові суми $x_i(t)$ все більше збігаються до $x(t)$. Збіжність спостерігається всюди, крім точок

розриву (перепаду) функції, де утворюється викид. При $n \rightarrow \infty$ величина цього викиду дорівнює $1,09E$, де E – величина перепаду в точці розриву. Цей ефект збіжності в математиці отримав назву явища Гіббса.

Незважаючи на те, що ряд Фур'є не збігається до даної функції в точках її розриву, ряд збігається в середньому. При $n \rightarrow \infty$ викиди стають нескінченно вузькими й не вносять ніякого вкладу в інтегральну середньоквадратичну оцінку похибки наближення функції скінченним числом членів ряду.

3. Експоненціальна (комплексна) форма ряду Фур'є

Найбільш компактною і зручною для розрахунків є *експоненціальна* (або *комплексна*) форма ряду Фур'є:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}[n] \cdot e^{j2\pi nt/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}[n] \cdot e^{j(2\pi n f_1) \cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}[n] \cdot e^{j(\omega_1 n) \cdot t}, \quad (7)$$

де $\dot{X}[n]$ – комплексні коефіцієнти ряду, які визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \dot{X}[n] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j(2\pi n f_1) \cdot t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j(n\omega_1) \cdot t} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

де f_1 – основна частота або частота першої гармоніки ($\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T$).

В останньому інтегралі межі інтегрування від 0 до T замінені на симетричні від $-T/2$ до $T/2$, що не змінює його значення.

В комплексній формі ряду Фур'є присутні не тільки додатні, а й від'ємні значення n . Але, якщо функція $x(t)$ є дійсною, то з (8) слідує:

$$\dot{X}[-n] = \dot{X}^*[n], \quad (9)$$

або

$$|\dot{X}[-n]| = |\dot{X}[n]|, \quad \arg \dot{X}[-n] = -\arg \dot{X}[n], \quad (10)$$

тобто комплексні коефіцієнти $\dot{X}[n]$ мають властивість *комплексно-спряженої симетрії*.

Для різних форм рядів Фур'є можна встановити наступні співвідношення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} a_0 &= X[0], & c_n &= 2|\dot{X}[n]|, \\ a_n &= 2\operatorname{Re}[\dot{X}[n]], & n \neq 0, & \theta_n = -\arg \dot{X}[n] \\ b_n &= 2\operatorname{Im}[\dot{X}[n]], & \dot{X}[n] &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}A_{m_n}e^{-j\theta_n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отже, частотний спектр періодичного коливання складається з частот, кратних основній частоті:

$$f_n = n \cdot f_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (12)$$

Сукупність комплексних коефіцієнтів $\dot{X}[n]$ даної функції утворює *комплексний спектр* цієї функції. Дійсні і уявні частини комплексних амплітуд $\dot{X}[n]$ утворюють відповідно *дійсний і уявний спектри* періодичних коливань.

Іноді використовується інша форма запису комплексного ряду Фур'є. Якщо у виразі (7) комплексні коефіцієнти подати у вигляді:

$$\dot{X}[n] = |\dot{X}[n]| \cdot e^{j\arg \dot{X}[n]} = \frac{1}{2}A_{m_n}e^{-j\theta_n}, \quad (13)$$

то величина A_{m_n} являтиме амплітуду гармонічної складової з кутовою частотою $\omega_n = n \cdot \omega_1$ ($\omega_n = 2\pi f_1 \cdot n = \frac{2\pi \cdot n}{T}$), а величина $-\theta_n$ – початкову фазу цієї гармоніки, яка має форму косинусоїди. Тобто переходимо до наступної форми ряду Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{m_n} \cdot e^{j(\omega_1 n) \cdot t}, \quad (14)$$

яка має прямий зв'язок з дійсною формою:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \dot{A}_{m_n} \cdot e^{j(\omega_1 n) \cdot t} = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\dot{A}_{m_n}| \cdot e^{-j\theta_n} \cdot e^{j(\omega_1 n) \cdot t} = \\ &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_{m_n} \cdot e^{j(\omega_1 n \cdot t - \theta_n)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cos(2\pi n f_1 t - \theta_n), \end{aligned} \quad (15)$$

де $\dot{A}_{m_n} = 2\dot{X}[n]$; $a_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$; $\dot{A}_{m_n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j(n\omega_1) \cdot t} dt$.

Ця форма зручніша для аналізу, бо комплексна амплітуда $\dot{A}_{m_n} = 2\dot{X}[n] = A_{m_n} e^{-j\theta_n}$ збігається з визначенням комплексної амплітуди у символічному методі розрахунку сталого гармонічного режиму ЛПЧ-кіл.

Примітка. Взаємозв'язок між дійсною і комплексною формами гармонічного коливання задається формулою Ейлера,

$$\cos(n\omega_1 t - \theta_n) = \frac{1}{2} \cdot [e^{j(n\omega_1 t - \theta_n)} + e^{-j(n\omega_1 t - \theta_n)}],$$

звідки випливає:

$$\begin{aligned} A_{m_n} \cdot \cos(n\omega_1 t - \theta_n) &= \frac{A_{m_n}}{2} \cdot [e^{j(n\omega_1 t - \theta_n)} + e^{-j(n\omega_1 t - \theta_n)}] = \\ &= \frac{\dot{A}_{m_n}}{2} \cdot e^{jn\omega_1 t} + \frac{\dot{A}_{m_n}^*}{2} \cdot e^{-jn\omega_1 t}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут коефіцієнти при $e^{jn\omega_1 t}$ і $e^{-jn\omega_1 t}$, щоб давати дійсну функцію, повинні бути спряженими, тоді одержимо:

$$\begin{aligned} A_{m_n} \cdot \cos(n\omega_1 t - \theta_n) &= \frac{A_{m_n}}{2} \cdot e^{-j\theta_n} e^{jn\omega_1 t} + \frac{A_{m_{-n}}}{2} \cdot e^{-j\theta_{-n}} \cdot e^{-jn\omega_1 t} = \\ &= \dot{X}_n \cdot e^{jn\omega_1 t} + \dot{X}_{-n} \cdot e^{-jn\omega_1 t} = \dot{X}_n \cdot e^{jn\omega_1 t} + \dot{X}_n^* \cdot e^{-jn\omega_1 t}, \end{aligned}$$

де

$$\dot{X}_{-n} = \frac{1}{2} A_{m_{-n}} e^{-j\theta_{-n}} = \frac{1}{2} A_{m_n} e^{j\theta_n} = \dot{X}_n^*$$

– величина, спряжена до \dot{X}_n ; $A_{m_n} = A_{m_{-n}}$; $\theta_n = -\theta_{-n}$.

Отже, гармонічний сигнал $\cos(n\omega_1 t - \theta_n)$ можна одержати в результаті геометричного додавання у кожний момент часу двох векторів $\dot{X}_n \cdot e^{jn\omega_1 t} + \dot{X}_n^* \cdot e^{-jn\omega_1 t}$. Ці вектори мають однакову величину $\frac{1}{2} A_{m_n} = \frac{1}{2} A_{m_{-n}}$, рівні, однак протилежні за знаком початкові фази $\theta_{-n} = -\theta_n$ та обертаються в різних напрямках (індекс $n = 1, 2, \dots, \infty$ і $n = -1, -2, \dots, -\infty$) з однаковою кутовою частотою $n\omega_1$.

Отже, "від'ємна" частота є умовним математичним поняттям при використанні комплексної форми ряду Фур'є, коли гармонічний сигнал надається у вигляді двох симетричних векторів, які обертаються в протилежних напрямках (на відміну від символічного методу, коли гармонічний сигнал надається у вигляді одного вектора). Однак спектр сигналу треба формально зображувати і в області від'ємних частот.

Ураховуючи умову

$$a_{-n} = a_n; \quad b_{-n} = -b_n, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

одержимо

$$\dot{A}_{m_n} = a_n - jb_n = A_{m_n} e^{-j\theta_n} = A_{m_{(-n)}}^* = a_n + jb_n = A_{m_n} e^{j\theta_n}$$

Комплекси амплітуд гармонік періодичного сигналу для протилежних за знаком, але однакових за абсолютним значенням, значень індексу n є величинами комплексно-спряженими.

Звідси модулі A_{m_n} комплексних амплітуд – функції парні, а їх аргументи θ_n – непарні відносно індексу n

Сукупність амплітуд спектральних складових періодичного сигналу називають *амплітудним спектром*, а сукупність початкових фаз – *фазовим спектром*.

Спектр *періодичного* сигналу в базисі комплексних експонент є комплексною функцією *дискретної частоти* ω_i, f_i . Спектр *неперіодичного* сигналу кінцевої тривалості в базисі комплексних експонент є комплексною функцією *неперервної частоти* ω, f .

Парний періодичний сигнал при використанні тригонометричної форми ряду Фур'є є сумою постійної складової і косинусних гармонік.

Парний періодичний сигнал із симетрією відносно осі абсцис має лише косинусні гармоніки з непарними частотами.

Непарний періодичний сигнал (сигнал з непарною симетрією) має лише суму синусних гармонік з нульовими початковими фазами або косинусних гармонік з початковими фазами $\pi/2$.

Періодичний сигнал із симетрією відносно осі абсцис має лише гармоніки з непарними частотами.

Зі збільшення частоти амплітуди гармонік зменшуються.

Графічне зображення амплітуд гармонік (амплітудного спектру) називають *спектральною діаграмою амплітуд*, а їхніх початкових фаз (фазового спектру) – *спектральною діаграмою початкових фаз*.

Спектральна діаграма – це сукупність вертикальних ліній, перпендикулярних до частотної осі абсцис і розміщених у точках, що відповідають частотам гармонік.

Особлива форма спектральних діаграм періодичних сигналів (процесів) зумовила назву їх спектрів – *лінійчасті спектри*.

Рівність Парсеваля

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} - \theta_n\right) \right]^2 dt =$$

$$= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{m_n}^2}{2} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{ef.n}^2}{2}$$

Середню потужність періодичного сигналу (процесу) можна визначити через квадрат функції, що описує його в часовій області, або за спектральними характеристиками.

У загальному випадку розмірність потужності [амплітуда²], енергії – [амплітуда²·с]. Зокрема, одиницею виміру електричної потужності є *ватт* (Вт), а енергії – *джоуль* (Дж)

Дослідження спектра сигналів у середовищі системи Mathcad

На рис. 3 наведено програмний модуль обчислення коефіцієнтів Фур'є із застосуванням їх інтегрального подання. Для визначення θ_n використовується функція $\text{atan2}(x, y)$, яка повертає значення кута (у радіанах) між віссю x і відрізком прямої з точками $(0,0)$ і (x, y) в інтервалі $\varphi \in (-\pi, +\pi]$. Величини x і y – дійсні.

На рис. 4 – рис. 6 наведено приклади спектрів сигналів, знайдені в середовищі системи Mathcad. Приклад, наведений на рис. 5, ілюструє прояв ефекту Гіббса при $n \rightarrow \infty$.

Приклад 1

Розкладання функції в ряд Фур'є і її гармонійний синтез

TOL := 10⁻⁶

$$FC(f,N,T) := \begin{matrix} R^{(0)} \leftarrow \left(\begin{matrix} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(x) dx \\ 0 \end{matrix} \right) \\ \text{for } n \in 1..N \\ R^{(n)} \leftarrow \left(\begin{matrix} \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi \cdot x}{T}\right) dx \\ \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot 2\pi \cdot x}{T}\right) dx \end{matrix} \right) \\ R^T \end{matrix}$$

Програмний модуль обчислення коефіцієнтів Фур'є із застосуванням їх інтегрального подання.

T := 1 - період коливаний

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq 0.5 \cdot T \\ 0 & \text{if } 0.5 \cdot T < t \leq T \end{cases}$$

Задання функції $f(t)$ на інтервалі $0 \leq t \leq T$ (функція періодична поза інтервалом $0 \leq t \leq T$)

N := 10 - число гармонік

res := FC(f,N,T) a := res⁽⁰⁾ b := res⁽¹⁾ - обчислення коефіцієнтів Фур'є

$$a = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.637 \\ 0 \\ 0.212 \\ 0 \\ 0.127 \\ 0 \\ 0.091 \\ 0 \\ 0.071 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Формула синтезу функції за рядом Фур'є – тригонометрична форма

$$p1(t) := a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi \cdot t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot 2\pi \cdot t}{T}\right) \right)$$

Синтез функції за рядом Фур'є – косинусоїдальна амплітудно-фазова форма

n := 1..N

$$A_n := \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \quad \Theta_n := \text{atan2}(a_n, b_n)$$

a₀ = 0.5 A₀ := a₀

$$p2(t) := a_0 + \sum_{n=1}^N \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi \cdot t}{T} - \Theta_n\right) \right)$$

n := 0..N

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.637 \\ 0 \\ 0.212 \\ 0 \\ 0.127 \\ 0 \\ 0.091 \\ 0 \\ 0.071 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Спектральний аналіз і синтез прямокутного імпульсу – меандру при числі гармонік N = 10

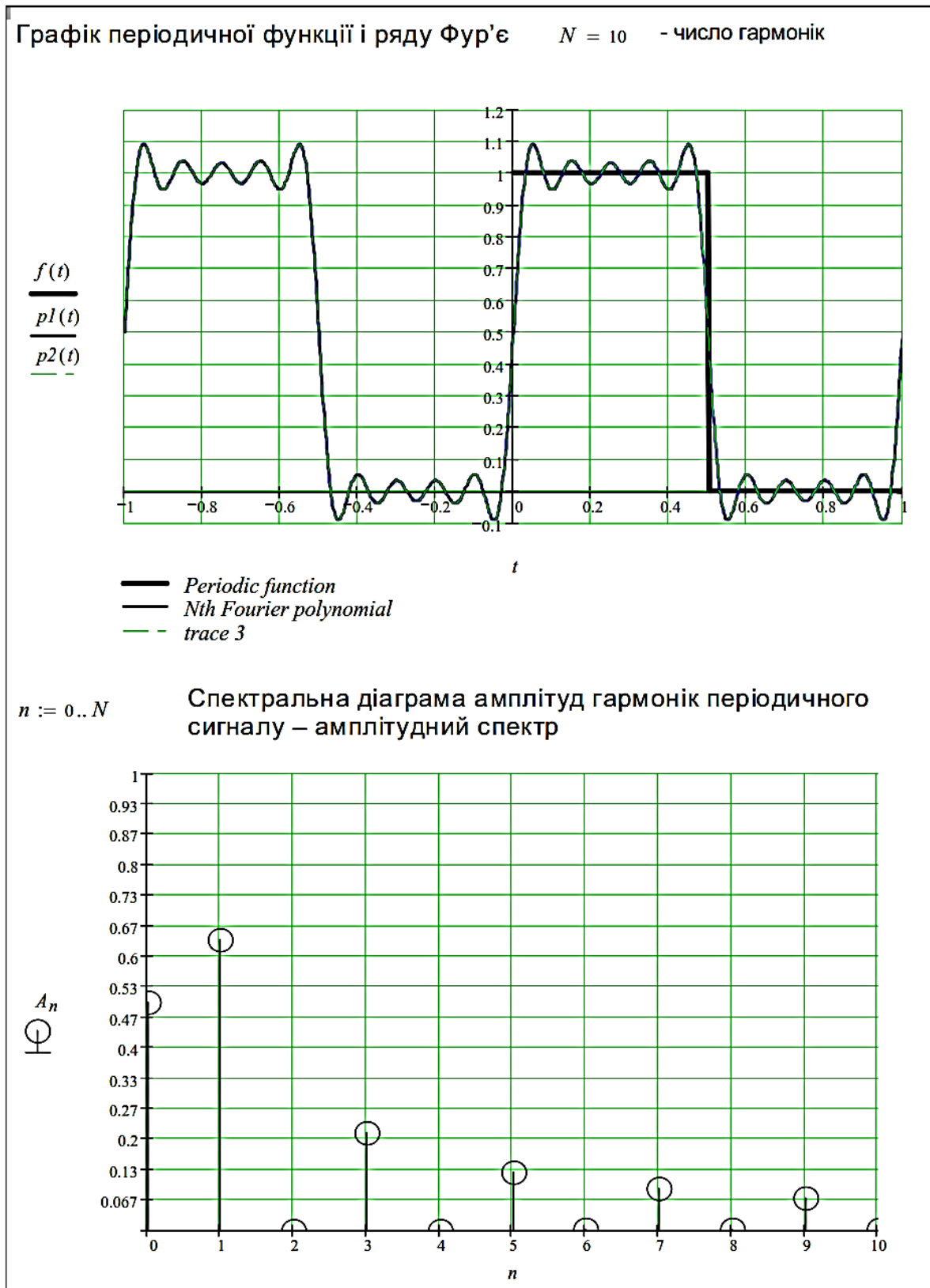


Рис. 4. Спектральний аналіз і синтез прямокутного імпульсу – меандру при числі гармонік $N = 10$ (продовження)

Приклад 2

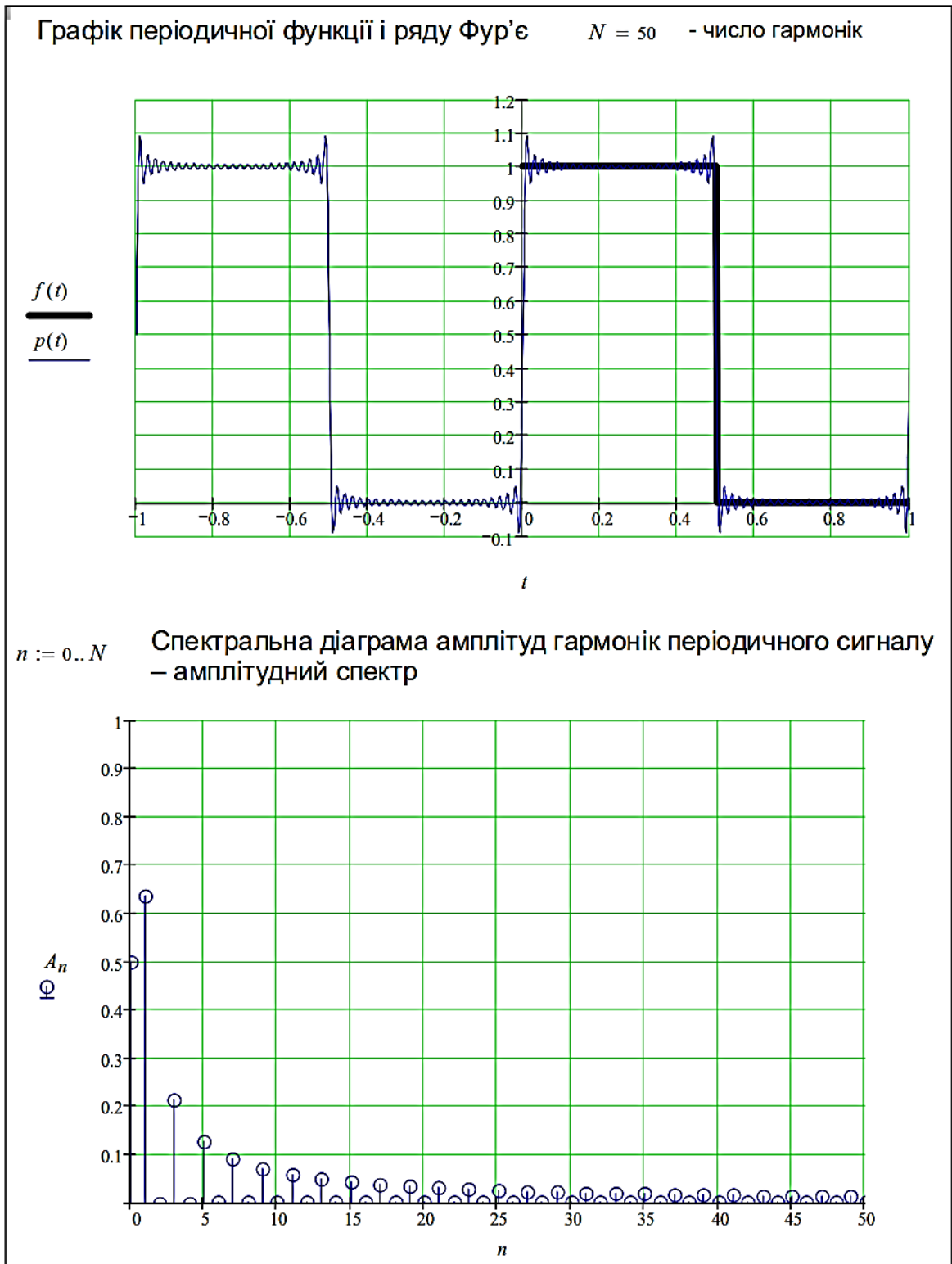


Рис. 5. Спектральний аналіз і синтез прямокутного імпульсу – меандру при числі гармонік $N = 50$

Приклад 3

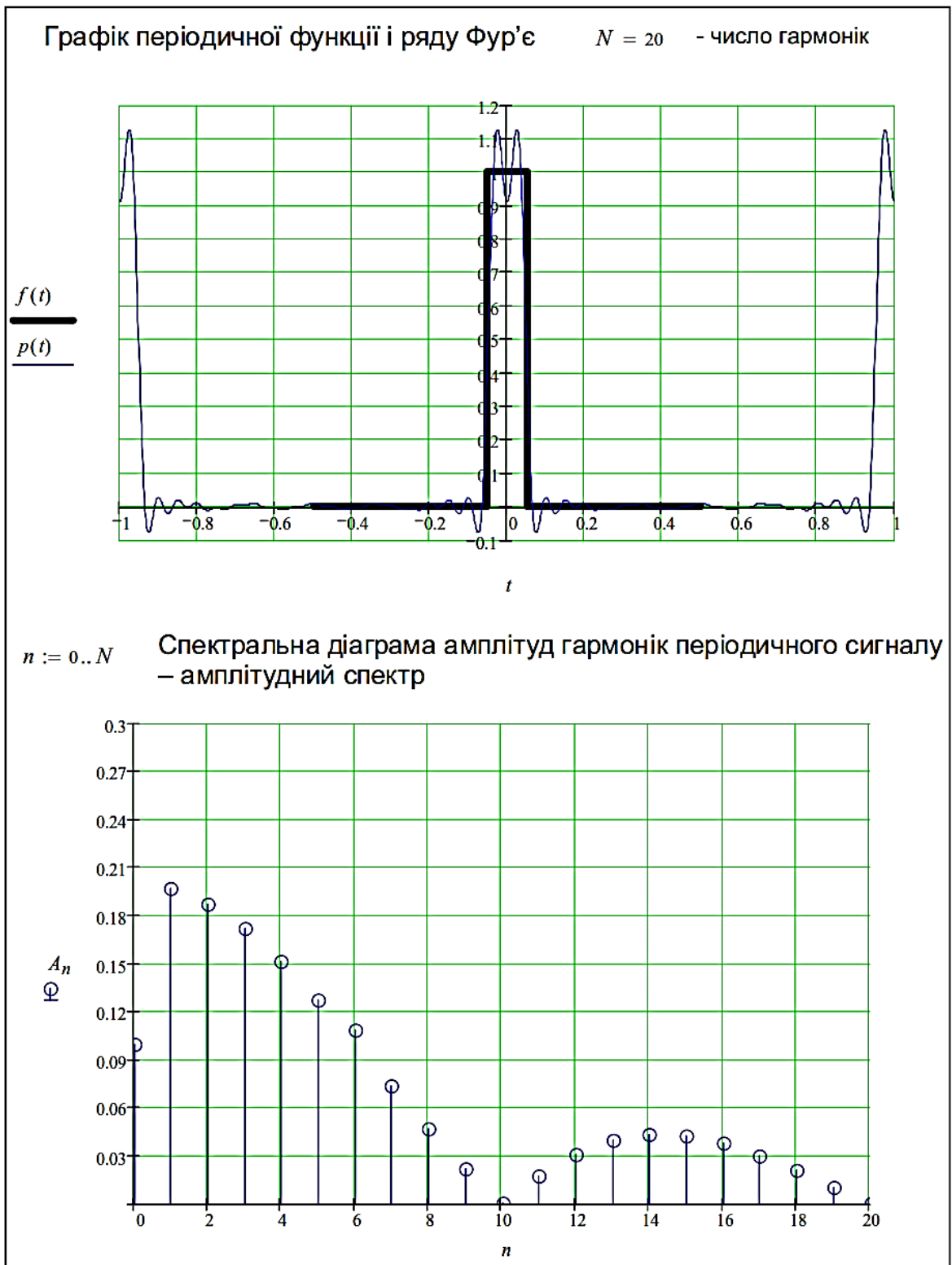


Рис. 6. Короткий прямокутний імпульс

Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть основні чинники, що зумовили використання на практиці для спектрального аналізу базисів з гармонічних сигналів. Які сигнали вважають власними функціями лінійної системи?
2. Яка функція ЛПЧ-кола чи системи відображає взаємозв'язок між спектральними характеристиками реакції та дії?
3. Який характер має спектр періодичного сигналу?
4. Який характер має спектр одиночного відео імпульсу?
5. Поясніть суть гармонічного аналізу та синтезу детермінованих сигналів.
6. Запишіть ряд Фур'є у тригонометричній, амплітудно-фазовій та комплексній формах.
7. Запишіть співвідношення між параметрами для різних форм ряду Фур'є.
8. Який сенс має від'ємна частота у комплексній формі ряду Фур'є?
9. Поясніть, у чому полягає ефект Гіббса.
10. Як впливає вибір початку відліку сигналу за часом на його спектр?
11. Який спектр мають сигнали, які описуються парними функціями?
12. Який спектр мають сигнали, які описуються непарними функціями?
13. Який спектр мають сигнали, які описуються функціями з симетрією відносно осі абсцис, якщо кожна половина хвилі повторює попередню зі зміною знака?
14. Який спектр має періодична послідовність імпульсів? Що таке нулі амплітудного спектра періодичної послідовності імпульсів? Як визначаються номери гармонік, амплітуди яких дорівнюють нулю?

Лекція 19. Спектральний метод. Визначення реакції кіл на дію періодичних сигналів довільної форми

Загальна характеристика частотного (спектрального) методу аналізу кіл. Визначення усталеної реакції кіл на дію періодичних сигналів довільної форми. Дослідження реакції кола спектральним методом у середовищі Mathcad. Розрахунок усталеної реакції послідовного коливального контуру. Розрахунок усталеної реакції ФНЧ Баттерворта на сигнал типу "випрямлена синусоїда". Аналіз в середовищі Micro-CAP. Робоче завдання. Контрольні запитання та завдання.

Загальна характеристика частотного (спектрального) методу аналізу кіл

Один з можливих шляхів розрахунку реакції кіл при дії несинусоїдальних сигналів заснований на поданні останніх у вигляді сукупності гармонійних (синусоїдальних або косинусоїдальних) складових з різними частотами – спектру сигналу. Математичною базою для спектрального подання сигналів є апарат рядів Фур'є для періодичних функцій і інтегралів Фур'є – для неперіодичних. Аналіз кола під дією кожної окремої гармонічної складової здійснюється за допомогою вже вивчених методів – наприклад, символічного (комплексного) методу. Для знаходження загальної реакції кола використовують принцип накладання. Описаний підхід і становить *частотний (спектральний) метод*.

Визначення усталеної реакції кіл на дію періодичних сигналів довільної форми

За формулою Ейлера, гармонічний сигнал можна подати:

$$\begin{aligned} x_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) &= \frac{x_m}{2} \cdot [e^{j(\omega t + \alpha)} - e^{-j(\omega t + \alpha)}] = \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \dot{x}_m^* \cdot e^{-j\omega t} = \dot{x}'(t) + \dot{x}''(t), \end{aligned}$$

де $\dot{x}_m^* = x_m e^{-j\alpha}$ – величина, комплексно спряжена до $\dot{x}_m = x_m e^{j\alpha}$.

Примітка. Тобто гармонічний сигнал можна подати у вигляді пари симетричних векторів $\frac{1}{2} \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t}$ і $\frac{1}{2} \dot{x}_m^* \cdot e^{-j\omega t}$ з протилежними напрямками обертання для кожної такої пари:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \dot{x}_m^* \cdot e^{-j\omega t} = \\ & = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} [x_m \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}] = x_m \cdot \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Отже, якщо вхідний сигнал $\dot{x}'(t) = \frac{1}{2} \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t}$, то реакція на нього:

$$y'(t) = H(j\omega) \cdot \frac{1}{2} \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t}.$$

Якщо вхідний сигнал $\dot{x}''(t) = \frac{1}{2} \dot{x}_m^* \cdot e^{-j\omega t}$, то реакція на нього:

$$y''(t) = H(-j\omega) \cdot \frac{1}{2} \dot{x}_m^* \cdot e^{-j\omega t}.$$

Для ЛПЧ-кіл виконується принцип *суперпозиції*. Тому реакція кола на косинусоїдальний сигнал становить:

$$\begin{aligned} y(t) &= \dot{y}'(t) + \dot{y}''(t) = \\ &= \frac{1}{2} H(j\omega) \cdot \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2} H(-j\omega) \cdot \dot{x}_m^* \cdot e^{-j\omega t} = \\ &= \frac{x_m \cdot [H(j\omega)e^{j(\omega t + \alpha)} + H(-j\omega)e^{-j(\omega t + \alpha)}]}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Цей вираз можна подати в іншому вигляді. Оскільки для ЛПЧ-кола комплексна передатна функція $H(j\omega)$ також має властивість спряженої симетрії $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$, то для складових реакції виконується умова $\dot{y}''(t) = \dot{y}'^*(t)$. Тоді сума $\dot{y}'(t)$ і $\dot{y}''(t)$ дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} y(t) &= \dot{y}'(t) + \dot{y}'^*(t) = \\ &= 2 \operatorname{Re} [\dot{y}'(t)] = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} H(j\omega) \cdot \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t} \right] = \\ &= \operatorname{Re} [H(j\omega) \cdot \dot{x}_m \cdot e^{j\omega t}] = x_m |H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t + \alpha + \arg H(j\omega)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо вхідний сигнал (дійсна функція часу) можна подати у вигляді

$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{x}_{m_n} \cdot e^{j\omega_n t}$, що містить як додатні так і від'ємні частоти (індекс $n = 1, 2, \dots, \infty$ і $n = -1, -2, \dots, -\infty$), тобто у вигляді суми пар векторів з

протилежними напрямками обертання і для кожної такої пари виконуються умови спряженої симетрії, а реакція на кожну його складову

$$\dot{y}_n(t) = H(j\omega_1 n) \cdot \frac{1}{2} \dot{x}_{m_n} \cdot e^{j\omega_1 n t} = \dot{Y}_{m_n} \cdot e^{j\omega_1 n t}, \text{ тоді, згідно з принципом суперпозиції,}$$

загальна реакція на дію $x(t)$ буде:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{y}_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{Y}_{m_n} e^{j\omega_1 n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(j\omega_1 n) \frac{1}{2} \dot{x}_{m_n} e^{j\omega_1 n t} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(j\omega_1 n)| \frac{x_{m_n}}{2} e^{j[\alpha_n + \arg(H(j\omega_1 n))]} e^{j\omega_1 n t} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(j\omega_1 n)| x_{m_n} e^{j[\alpha_n + \arg(H(j\omega_1 n))]} e^{j\omega_1 n t}. \end{aligned}$$

Але враховуючи властивість спряженої симетрії для кожної пари комплексних складових реакції з рівними за значеннями індексами n , вираз можна подати в іншій, більш зручній формі:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} x_{m_0} H(0) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |H(j\omega n)| x_{m_n} e^{j[\alpha_n + \arg(H(j\omega n))]} e^{j\omega n t} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} x_{m_0} H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} |H(j\omega n)| x_{m_n} \cos[\omega n t + \alpha_n + \arg H(j\omega n)]. \end{aligned}$$

Отже, якщо до сигналу $x(t)$ використовується комплексна форма ряду Фур'є:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}[n] \cdot e^{j(\omega_1 n)t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{m_n} \cdot e^{j(\omega_1 n)t},$$

то реакція ЛЧ-кола на вхідний сигнал становить:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(j\omega n) \cdot \dot{X}[n] \cdot e^{j\omega n t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(j\omega n) \cdot \dot{A}_{m_n} \cdot e^{j\omega n t}. \quad (3)$$

Коли ж використовується косинусоїдальна амплітудно-фазова форма ($\omega_n t = \omega_1 n t = 2\pi f_1 n t = \frac{2\pi n t}{T}$; $a_0 = \frac{A_0}{2}$):

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} - \theta_n\right),$$

то реакцію ЛПЧ-кола можна записати у вигляді:

$$y(t) = a_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \left| H\left(\frac{j2\pi nt}{T}\right) \right| \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} - \theta_n + \arg[H(j\frac{2\pi nt}{T})]\right), \quad (4)$$

де $a_0 H(0)$ – визначає реакцію електричного кола на постійну складову a_0 вхідного сигналу.

Якщо використовується *синусоїдальна* амплітудно-фазова форма:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \psi_n\right),$$

де

$$A_{m_n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \psi_n = \arctg\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{або} \quad \psi_n = \begin{cases} \arctg(a_n/b_n), & b_n > 0; \\ \pm\pi + \arctg(a_n/b_n), & b_n < 0, \end{cases}$$

то реакція ЛПЧ-кола буде:

$$y(t) = a_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \left| H\left(\frac{j2\pi nt}{T}\right) \right| \cdot \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \psi_n + \arg[H(j\frac{2\pi nt}{T})]\right). \quad (5)$$

Примітка: $\psi_n = \arctg\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\pi}{2} - \theta_n$, де $\theta_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$, або

$$\theta_n = \begin{cases} \arctg(b_n/a_n), & a_n > 0; \\ \pm\pi + \arctg(b_n/a_n), & a_n < 0 \end{cases} \quad \text{– якщо ряд надається у косинусоїдальній формі.}$$

Дослідження реакції кола спектральним методом у середовищі Mathcad

На рис. 1 наведено фрагмент документа Mathcad з прикладом обчислення реакції RC -кола за значеннями модуля та аргументу комплексної частотної функції кола та за спектральними коефіцієнтами вхідної напруги у вигляді ряду Фур'є.

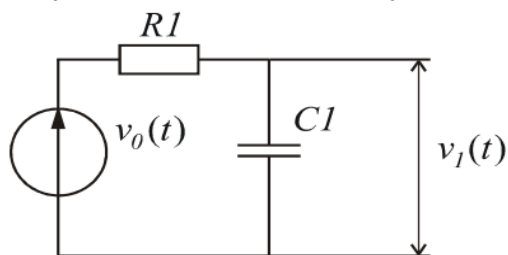
Примітка. Вхідна напруга (меандр) у вигляді ряду Фур'є $v_0(t) = p_2(t)$ взята з прикладу у лекції 20 (рис. 3-4).

Для порівняння дивись реакцію RC -кола на напругу у вигляді меандру (рис. 4, лек. 4), отриману шляхом розв'язку диференціального рівняння кола у часовій області.

Приклад 1

Розрахунок реакції RC- фільтра в усталеному режимі на вхідний періодичний сигнал спектральним методом

$$TOL := 10^{-6}$$



$$R1 := 1 \quad C1 := 0.5 \quad j := \sqrt{-1}$$

$$\tau := R1 \cdot C1 \quad \tau = 0.5$$

$$N := 10$$

$$T := 1$$

$$v0(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq 0.5 \cdot T \\ 0 & \text{if } 0.5 \cdot T < t \leq T \end{cases}$$

- вхідний сигнал (функція періодична поза інтервалом $0 \leq t \leq T$)

$$res := FC(v0, N, T) \quad a := res^{(0)} \quad b := res^{(1)} \quad \text{- обчислення коефіцієнтів Фур'є}$$

$$n := 1..N \quad A_n := \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \quad \Theta_n := atan2(a_n, b_n) \quad A_0 := a_0$$

$$p2(t) := a_0 + \sum_{n=1}^N \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi \cdot t}{T} - \Theta_n\right) \right) \quad \text{- вхідна напруга у вигляді ряду Фур'є}$$

комплексна частотна (передатна) функція

$$n := 0..N \quad H_n := \frac{1}{1 + j \cdot \frac{n \cdot 2\pi}{T} \cdot \tau}$$

реакція кола

$$v1(t) := a_0 \cdot H_0 + \sum_{n=1}^N \left(A_n |H_n| \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi \cdot t}{T} - \Theta_n + \arg(H_n)\right) \right) \quad a_0 = 0.5 \quad H_0 = 1$$

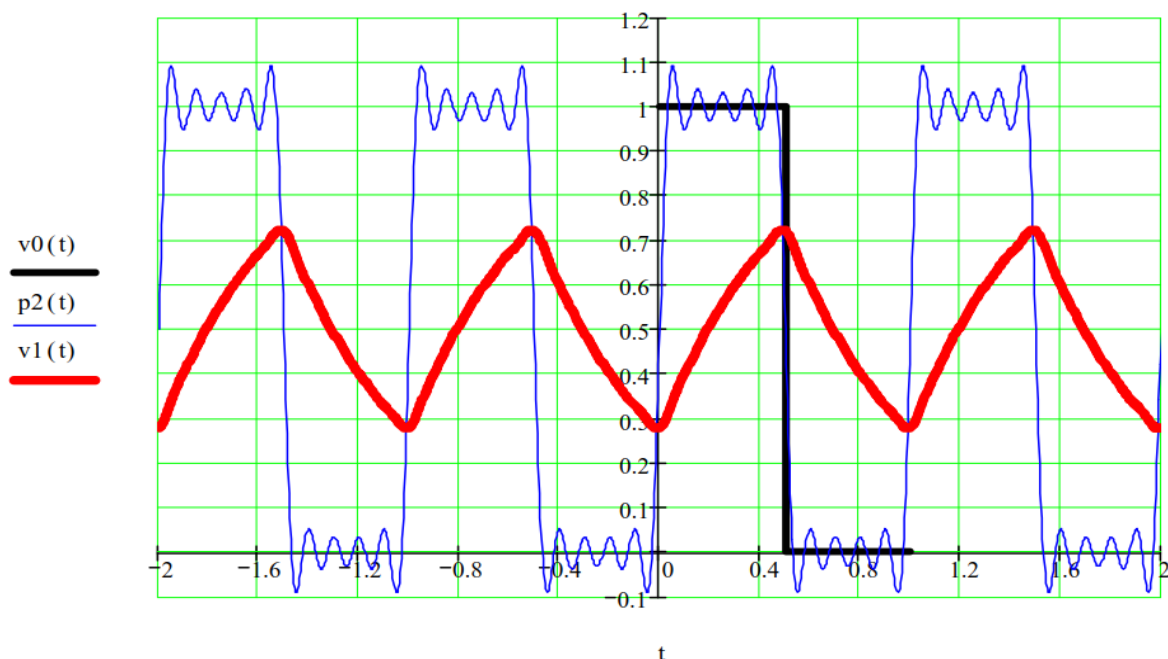


Рис. 1. Спектральний аналіз і синтез реакції RC- кола на сигнал у вигляді меандру

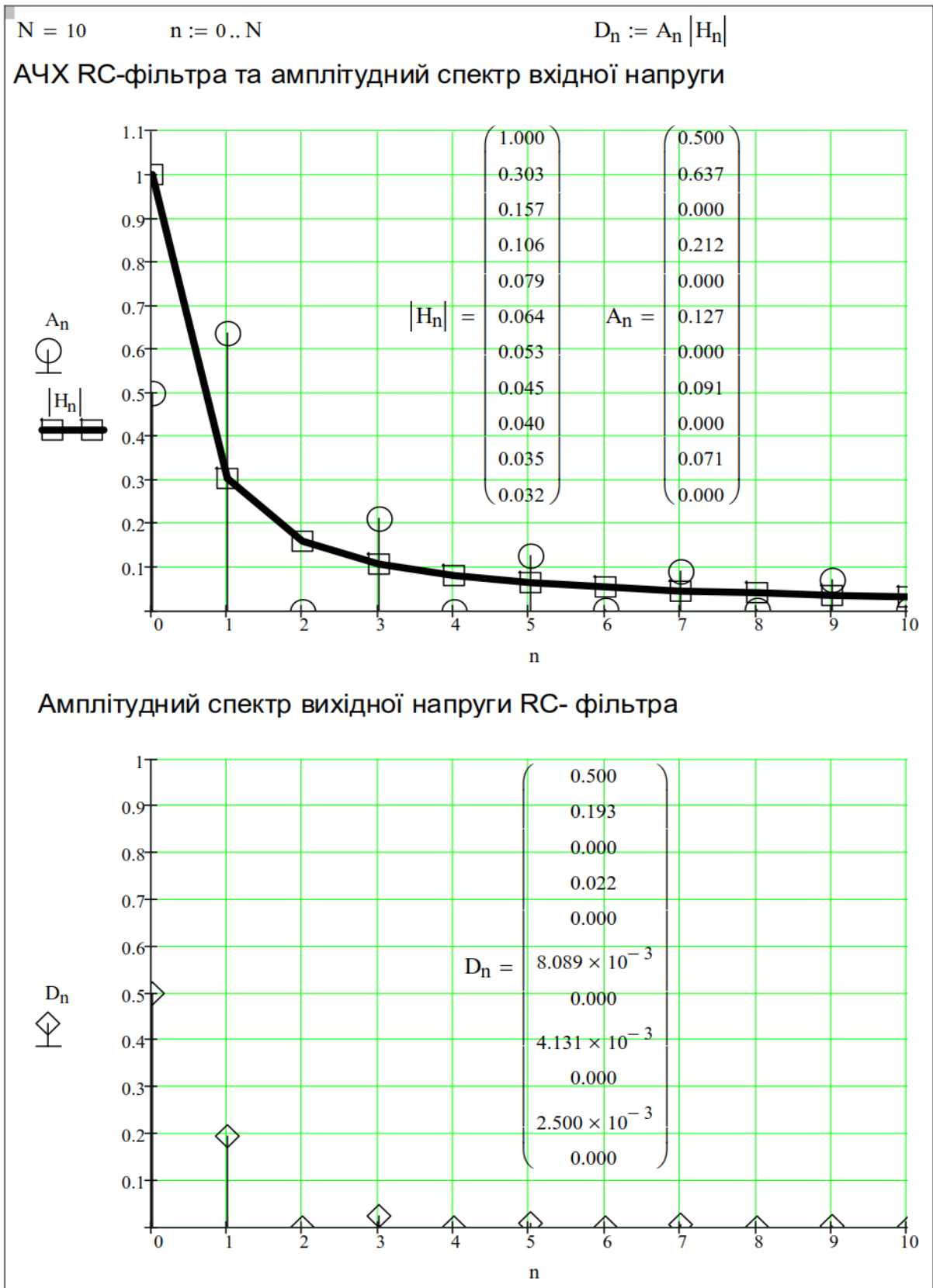


Рис. 2. Спектральний аналіз і синтез реакції RC- кола на сигнал у вигляді меандру (продовження)

Розрахунок усталеної реакції послідовного коливального контуру

Розглянемо розрахунок реакції послідовного коливального контуру спектральним методом, коли вихідний сигнал – це напруга на конденсаторі.

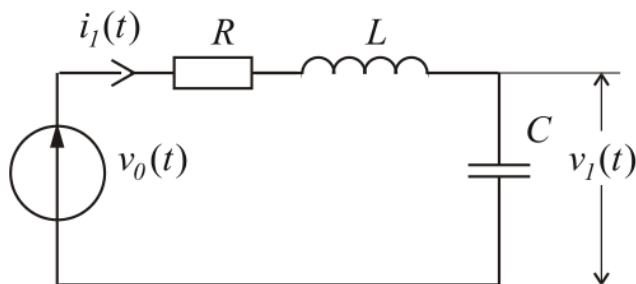


Рис. 3. Коливальний контур у режимі передачі напруги

Передатна функція за напругою дорівнює:

$$K_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{jR\omega C} \cdot \frac{1}{1 + j\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R}\right]} =$$

$$= \frac{1}{jR\omega C} \cdot \frac{1}{1 + j\left[Q_{\text{пл}}\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)\right]} = \frac{-jQ_{\text{пл}}}{\frac{\omega}{\omega_p}(1 + j\xi)}$$

де $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансна частота; $Q_{\text{пл}} = \frac{1}{R\omega_p C}$ – добротність контуру.

Вхідну періодичну напругу подаємо у вигляді ряду Фур'є:

$$v_0(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cos(\omega_1 n t - \theta_n).$$

Коефіцієнт передачі контуру на частоті кожної гармоніки дорівнює:

$$K_C(j\omega_1 n) = \frac{Q_{\text{пл}} \frac{\omega_p}{\omega_1 n}}{\sqrt{1 + \left[Q_{\text{пл}}\left(\frac{\omega_1 n}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_1 n}\right)\right]^2}} \cdot e^{j\varphi_{Cn}},$$

де $\varphi_{C_n} = -\frac{\pi}{2} - \arctg \left[Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega_1 n}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_1 n} \right) \right] = \varphi_{C_n}(\omega_1 n)$. Причому $|K_C(0)| = 1$.

Підставляючи значення модуля і аргументу $K_C(j\omega_1 n)$ в вираз (4), матимемо реакцію контуру у вигляді напруги на конденсаторі:

$$v(t) = a_0 K_C(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \frac{Q_{\text{пл}} \frac{\omega_p}{\omega_1 n}}{\sqrt{1 + \left[Q_{\text{пл}} \left(\frac{\omega_1 n}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega_1 n} \right) \right]^2}} \cos(\omega_1 n t - \theta_n + \varphi_{C_n}(\omega_1 n)).$$

З цього виразу бачимо, що вихідний сигнал суттєво залежить від добротності контуру та від співвідношення між резонансною частотою контуру і частотами гармонічних складових впливу.

У випадку, коли резонансна частота збігається з частотою n -ої гармоніки, а добротність достатньо велика, то напруга на конденсаторі буде майже синусоїдальна. У цьому випадку амплітуда n -ої гармоніки підсилюється в $Q_{\text{пл}}$ -разів.

Інші гармоніки, для яких $\omega_1 n \gg \omega_p$ або $\omega_1 n \ll \omega_p$, мають значно менші амплітуди і, відповідно, не впливають на форму сигналу.

Фрагмент документа Mathcad з прикладом обчислення реакції RLC – кола наведено на рис. 4³⁶.

Розрахунок здійснюємо за системною функцією кола $H(s)$, якщо зробити заміну $s = \frac{j2\pi n}{T}$. На рис. 5 наведено амплітудні спектральні діаграми вхідної і вихідної напруги за умови, коли резонансна частота контуру збігається з частотою першої гармоніки вхідного сигналу.

³⁶ Вхідна напруга (меандр) у вигляді ряду Фур'є $v_0(t) = p_2(t)$ також узятя з прикладу у лекції 20 (рис. 3-4).

Приклад 2

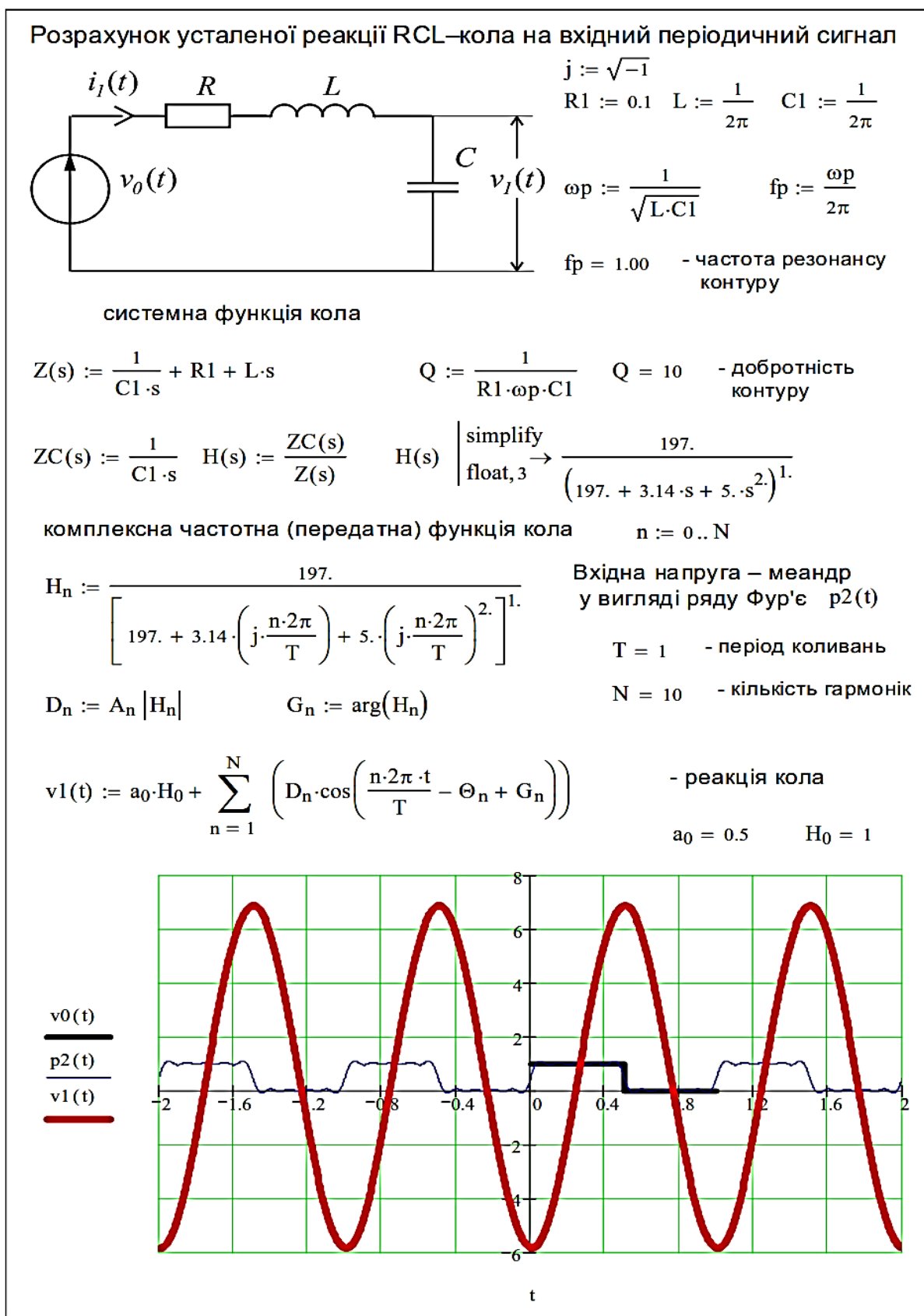


Рис. 4. Коливальний контур у режимі передачі напруги

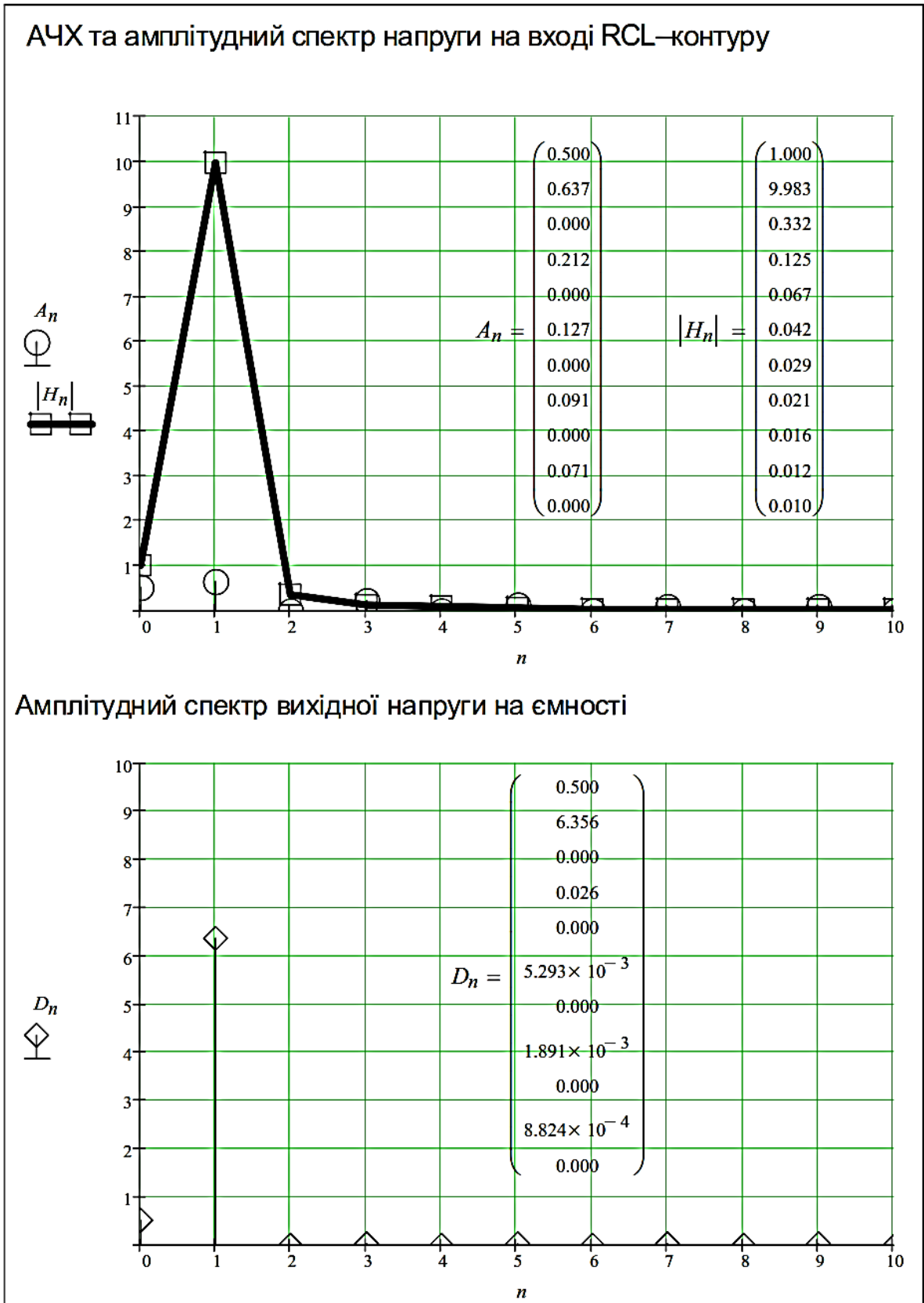


Рис. 5. Коливальний контур у режимі передачі напруги (продовження)

Розрахунок спектральним методом усталеної реакції ФНЧ

Баттерворта на сигнал типу "випрямлена синусоїда"

Приклад 3

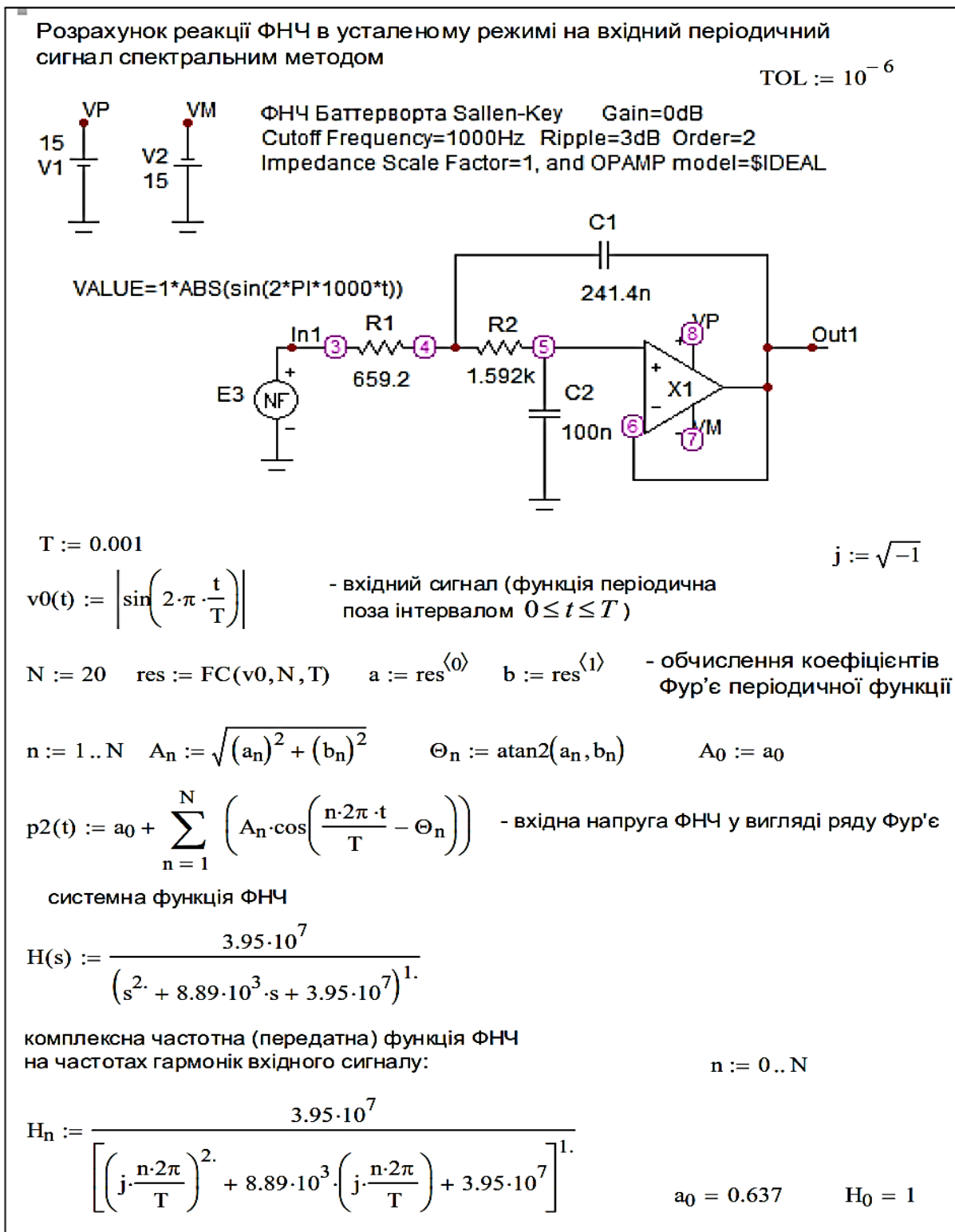


Рис. 6. Розрахунок усталеної реакції ФНЧ Баттерворта на сигнал типу "випрямлена синусоїда" спектральним методом

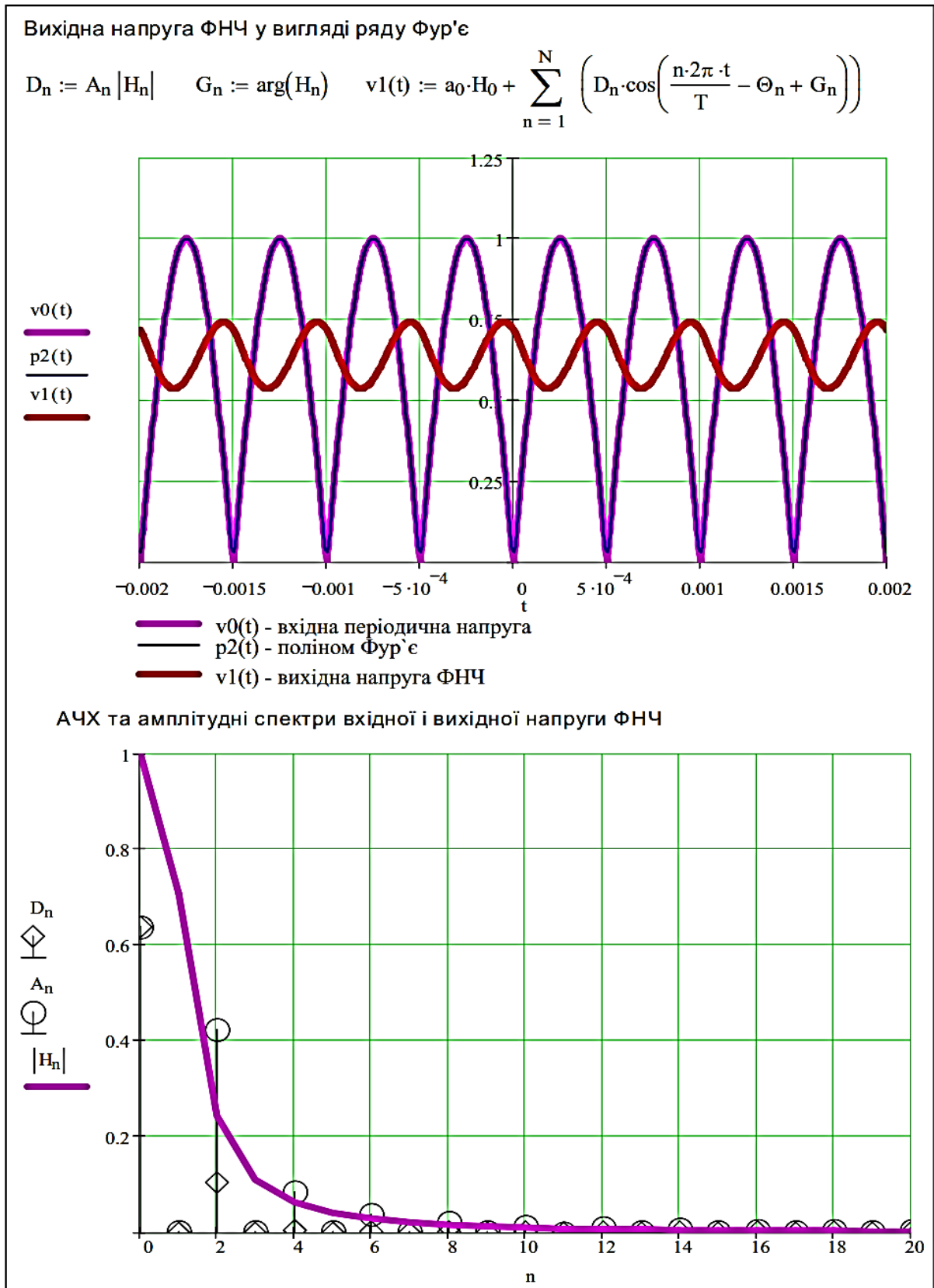


Рис. 7. Розрахунок усталеної реакції ФНЧ на сигнал типу "випрямлена синусоїда" спектральним методом (продовження)

Аналіз у середовищі Micro-Cap

Приклад 4

Розглянемо приклад спектрального аналізу вхідного сигналу і реакції RC -фільтра нижніх частот (рис. 8) в середовищі Micro-CAP.

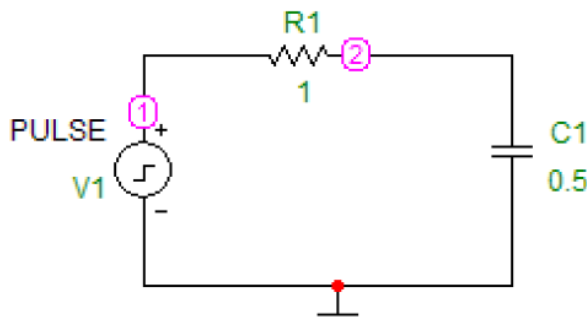


Рис. 8. RC -фільтр нижніх частот

Як джерело змінної напруги $v(t)$ використаємо **Pulse Source** з наступними параметрами:

VZERO	VONE	P1	P2	P3	P4	P5
0	1	0	0	0.5	0.5	1

Спектральний аналіз вхідної напруги проведемо у вузлі 1, вихідної напруги – в вузлі 2. Спектральний аналіз здійснюється в режимі **Transient Analysis**.

Примітка. Оператори обробки сигналів у режимі **Transient Analysis**:

THD... Cumulative total harmonic distortion in percent due to 2'nd through N/2 harmonics, relative to the 1'st harmonic.

HARM.. Returns the harmonic values in a complex array.

Re(harm(v(1))) shows the even harmonics of the waveform V(1).

Im(harm(v(1))) shows the odd harmonics of the waveform V(1).

Mag(harm(v(1))) shows the magnitude of the even and odd harmonics.

Ph(harm(v(1))) shows the phase angle.

FFT... Forward Discrete Fourier Transform:

$$X(k) = \text{Sum from } n=0 \text{ to } N-1 \text{ of } (x(n) * \exp(-2 * \pi * j * k * n / N))$$

IFT... Inverse Discrete Fourier Transform:

$$x(k) = (1/N) * \text{Sum from } n=0 \text{ to } N-1 \text{ of } (X(n) * \exp(2 * \pi * j * k * n / N))$$

RE... Real part of a complex expression.

IM... Imaginary part of a complex expression.

MAG... Magnitude of a complex expression.

PH... Phase angle of a complex expression.

Plots always show the magnitude of the final expression, $\sqrt{\text{realpart}^2 + \text{imagpart}^2}$.

FFT(u) – пряме перетворення Фур'є дискретних відліків сигналу $u(t)$. Відмінна від функції **HARM** добутком $N/2$ для гармонік з першої до N -ї і добутком N для нульової гармоніки, де N – кількість дискретних відліків вхідного сигналу $u(t)$;

Після переходу в режим аналізу у вікні **Transient Analysis Limits** треба задати параметри аналізу, наприклад, як це наведено на рис. 9.

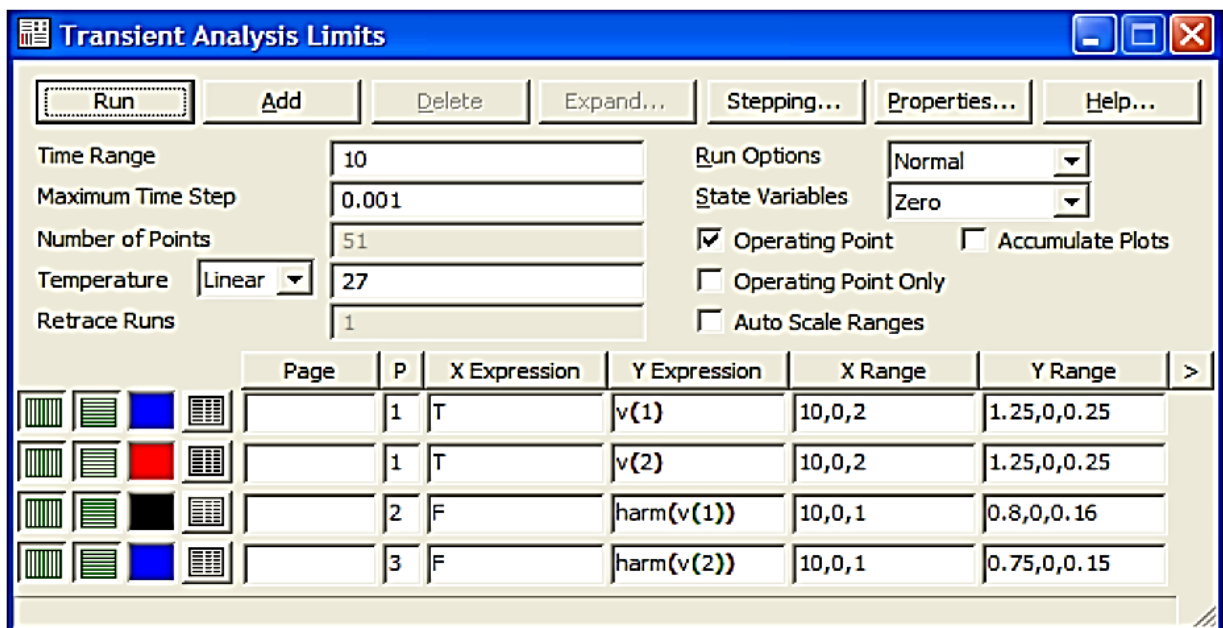


Рис. 9. Задання параметрів аналізу **HARM** в режимі **Transient Analysis**

Загальні рекомендації з задання параметрів у випадку спектрального аналізу наступні.

Крок 1. Якість обчислень **FFT** залежить від вдалого вибору *роздільної здатності* за частотою, DF (*sampling frequency*), достатньої кількості дискретних відліків сигналу, N (*number of data points*). Значення DF наступне:

$$DF = F1 = 1/t_{max} .$$

Формат поля **Time Range**:

$$\langle t_{max} \rangle [, \langle t_{min} \rangle] .$$

Якщо t_{min} нульове, як це зазвичай буває, то тільки t_{max} визначає значення **Time Range**. Тоді

$$DF = F1 = 1 / \text{Time Range value} .$$

Це вимагає наступного:

$$\text{крок 1: встановити } t_{max} \geq 1/FMIN ,$$

де $FMIN$ – найменш очікувана гармоніка. Якщо невідомо, яке значення має $FMIN$, то передбачається, що воно дорівнює найнижчій частоті сигналу.

Крок 2. Точність **FFT** визначається мінімальним кроком за часом DT . Чим менший крок, тим краще. Але при цьому зростає час аналізу. Як правило, рекомендується брати DT приблизно 0.1% від періоду $FMIN$.

Таким чином, **крок 2:** встановити мінімальний крок за часом $DT \leq 0.001/FMIN$.

Крок 3. Для будь-яких обчислень процесів з часовим аргументом, таким як **FFT** (пряме перетворення Фур'є дискретних відліків сигналу), **HARM** (розрахунок гармонік сигналу $v(t)$), в графі **X Expression** необхідно задати змінну **F** (частота). В графі **Y Expression** задати – **HARM(v(n))**, де n – номер полюса. Для розрахунку фазового зсуву (в градусах) кожної гармоніки в графі **Y Expression** потрібно записати **PH(HARM(v(n)))**.

Крок 4. Якщо N велике, то по горизонтальній осі автоматично встановлюється масштаб: $N \cdot DF$. Це звичайно дуже багато, щоб бачити цікаві нам частоти. Тому необхідно встановити в **X Range** діапазон невеликим і кратним DF , зазвичай в межах від $5 \cdot DF$ до $20 \cdot DF$.

Крок 5. Реалізація **FFT** обчислень при гармонічному аналізі припускає, що форма хвилі *періодична*.

Якщо спочатку має місце перехідний процес або деяка неперіодичність (рис. 11,а), то це буде призводити до помилок в обчисленнях.

Отже, **крок 5:** за допомогою (натиснути **F10**) діалогового вікна **Properties for Ttransient Analysis** → **FFT** (панель установки параметрів **FFT** аналізу)

необхідно встановить нижню межу діапазону аналізу *Lower Time Limit*, що виключає перехідні процеси (рис. 10).

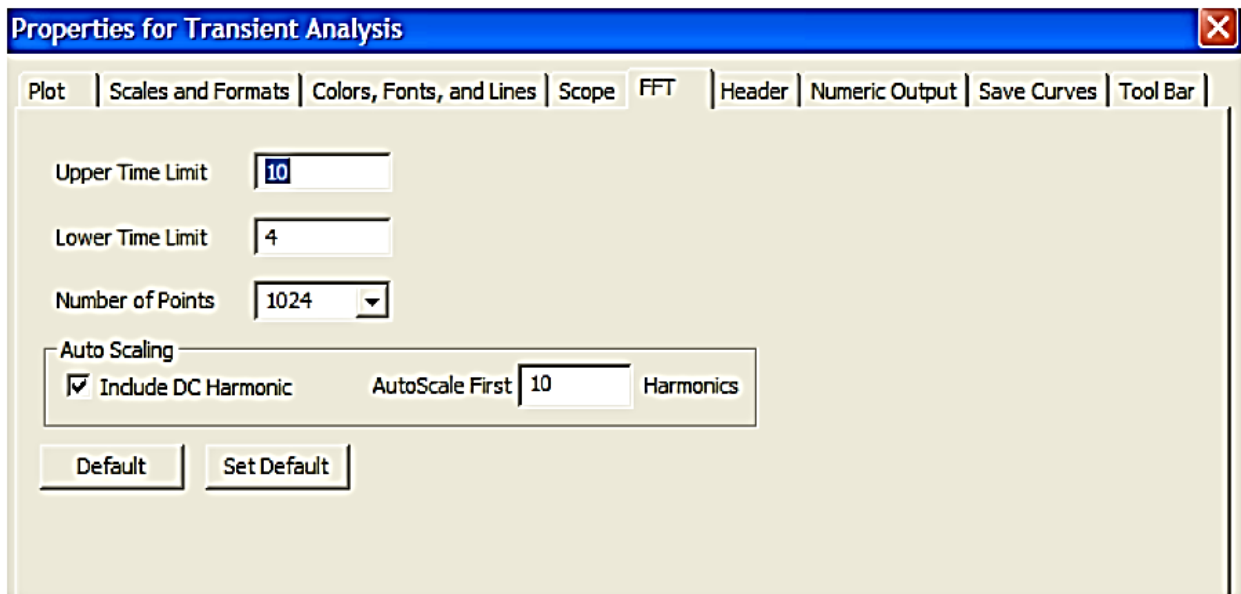


Рис. 10. FFT Parameters dialog box

Зазвичай *Lower Time Limit* вибирається кратною періоду основної гармоніки, наприклад 2-4 періоди. Величина *Upper Time Limit* вибирається також кратною періоду основної гармоніки, наприклад 5-10 періодів.

Отже, при розрахунках спектрів періодичних процесів інтервал часу *Upper Time Limit* – *Lower Time Limit* виділяє частку сигналу, що відповідає усталеному режимові, рівну цілому числу періодів першої гармоніки.

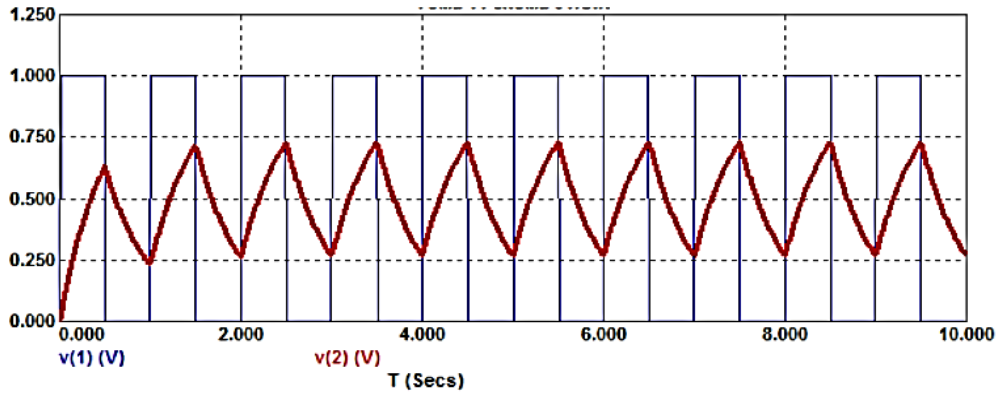
Number of Points – задання кількості точок часової функції, заданої в межах *Upper Time Limit* – *Lower Time Limit*, для проведення FFT аналізу. Зазвичай 1024, 2048, 4096 тощо.

Include DC Harmonic – врахування постійної складової при автомасштабуванні.

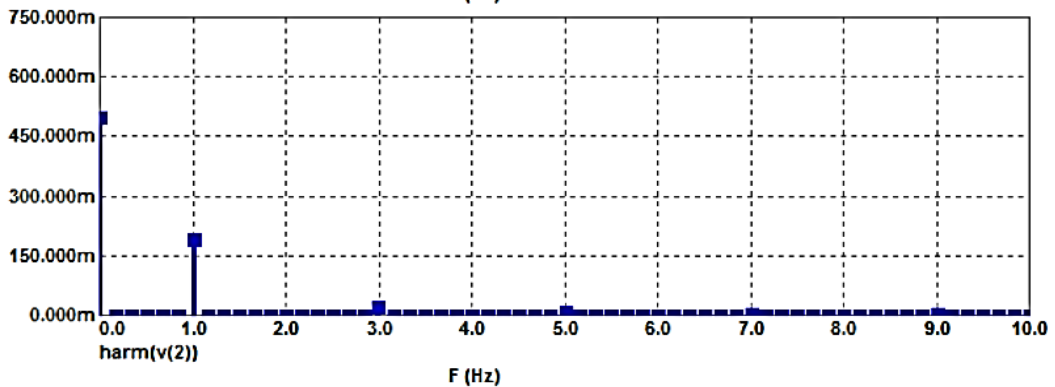
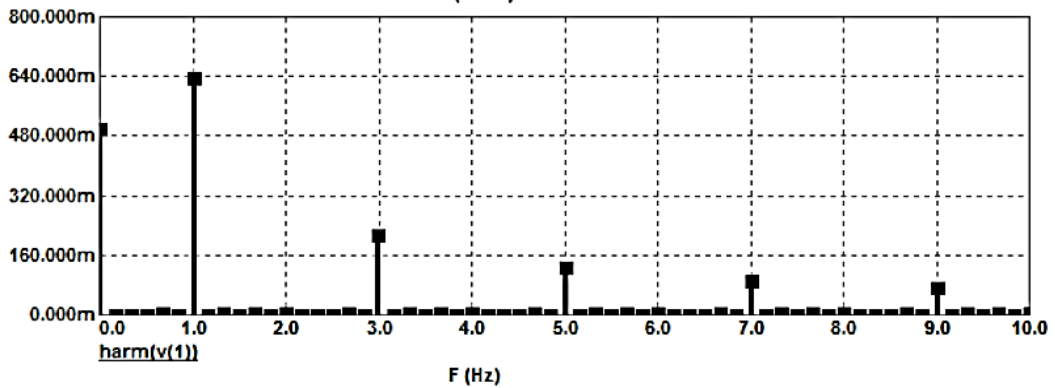
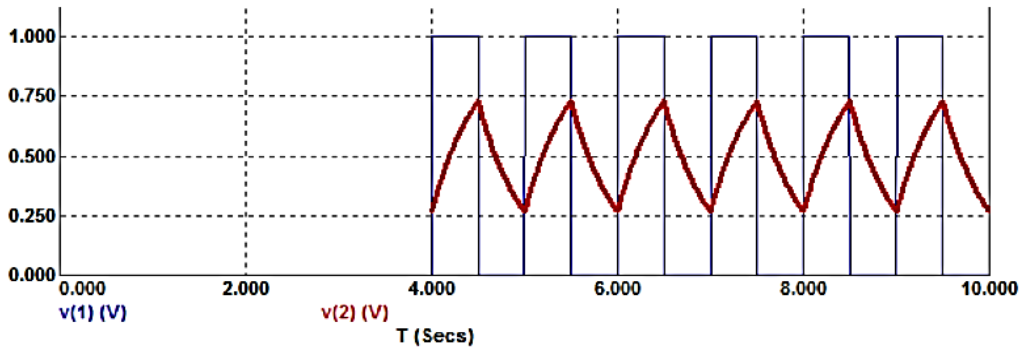
Auto Scale First Harmonics – визначає кількість гармонік, починаючи з першої, які враховуються при автомасштабуванні.

Після проведення аналізу (**Run** або **F2**) відкривається вікно з результатами (рис. 11,б).

Бачимо, що усталена реакція, а також амплітудний спектр сигналів на вході і на виході RC-фільтра збігаються з результатами розрахунку в середовищі Mathcad.



а



б

Рис. 11. Форма (а) та амплітудний спектр сигналів на вході і на виході RC-фільтра (б), якщо вхідний сигнал задається *Pulse Source*

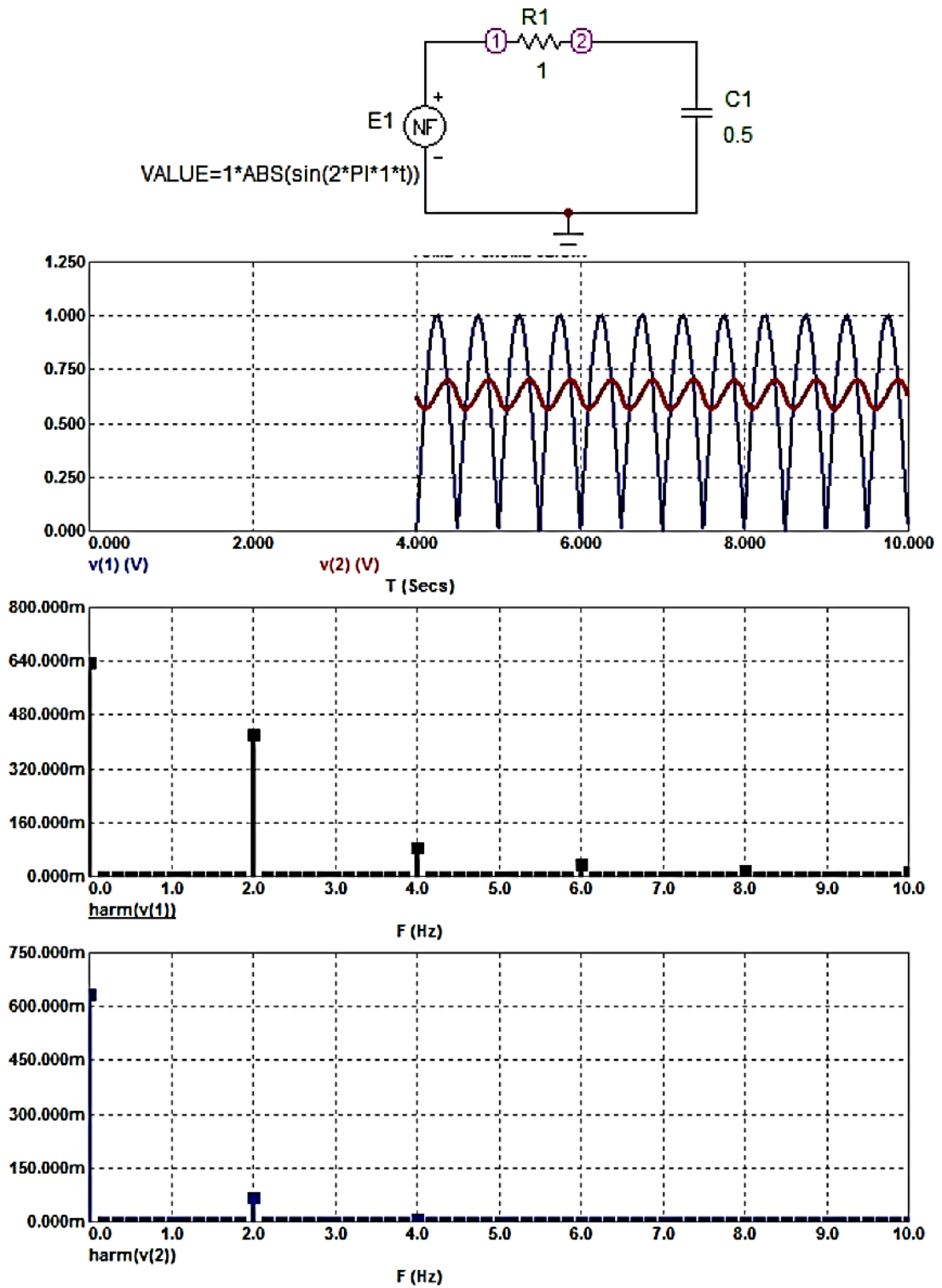


Рис. 12. Дослідження форми та амплітудного спектру сигналів на вході та на виході RC-кола, якщо вхідний сигнал задається *Function Source* (формулою)

Приклад 5

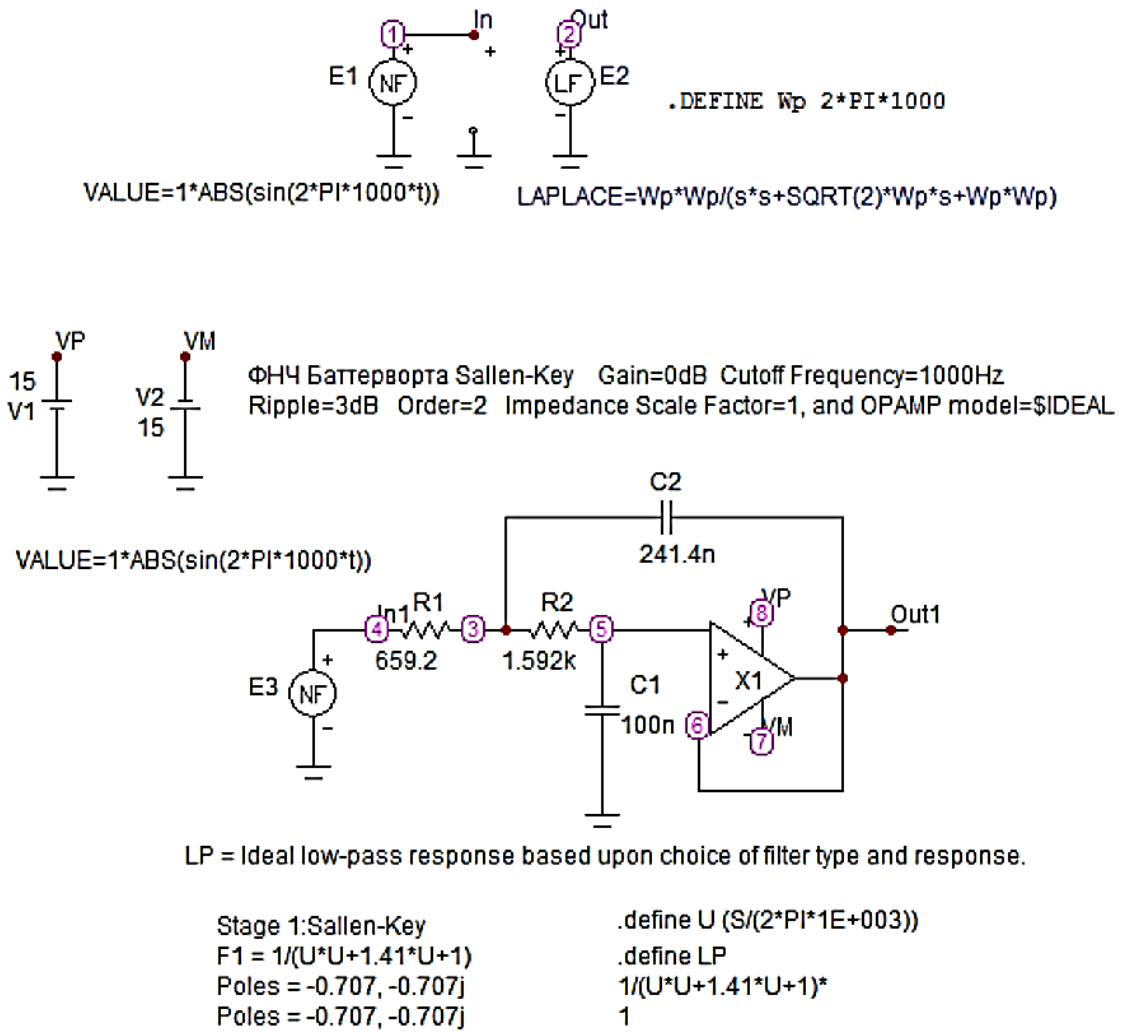


Рис. 13. Дослідження форми та амплітудного спектру сигналів на вході та на виході ФНЧ Баттєрворта, якщо вхідний сигнал задається **Function Source** (формулою)

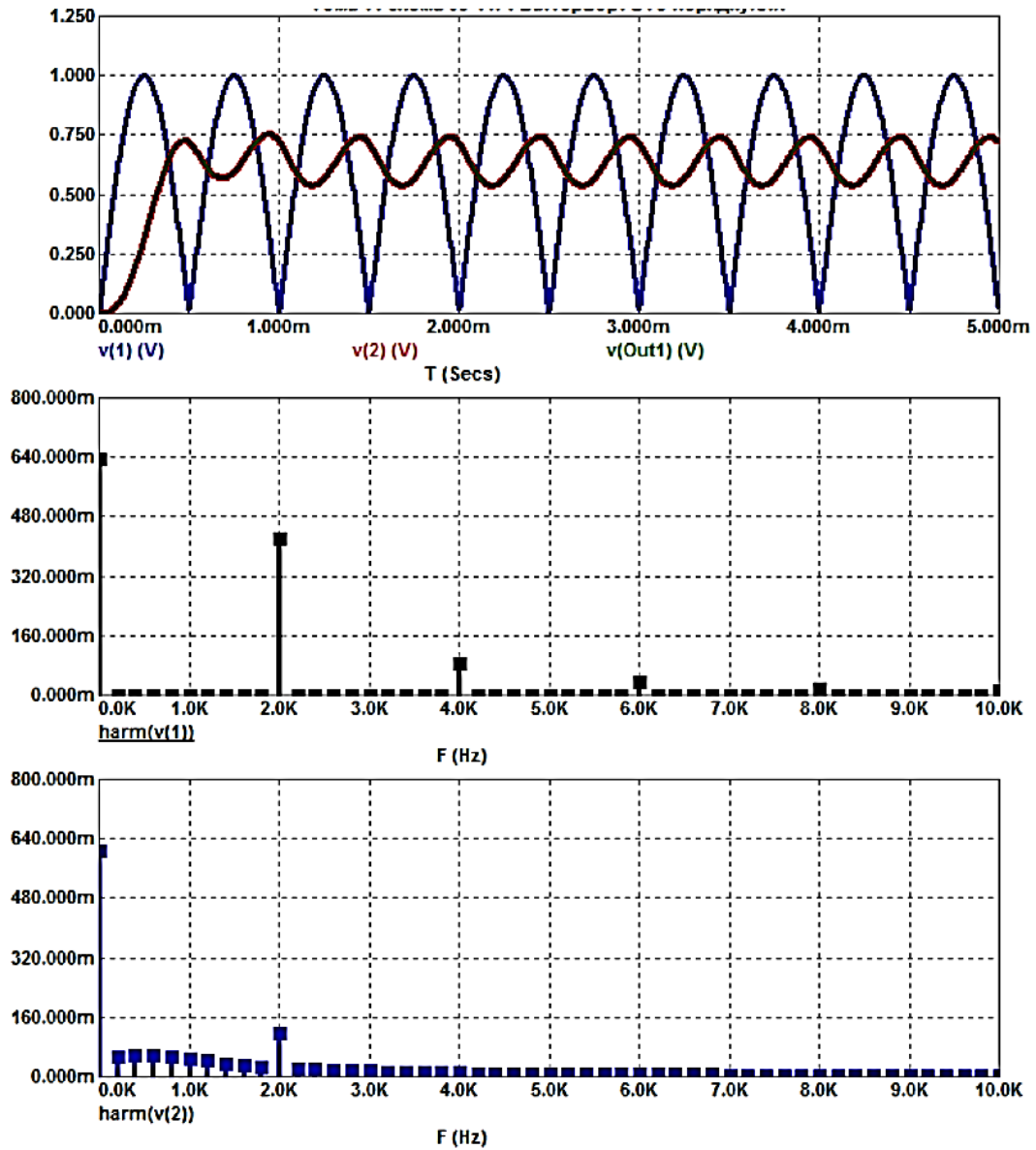


Рис. 14. Дослідження форми та амплітудного спектру сигналів на вході та на виході ФНЧ Баттерворта, якщо вхідний сигнал задається *Function Source* (продовження)

Контрольні запитання та завдання

1. Які сигнали вважають власними функціями ЛЧ-системи?
2. Яка функція ЛЧ-системи відображає взаємозв'язок між спектральними параметрами її реакції та дії?
3. У чому полягає аналіз ЛЧ-систем за спектральним методом?
4. Запишіть аналітичний вираз реакції ЛЧ-кола за спектральним методом, якщо ряд Фур'є, що описує вхідний сигнал, задається в комплексній формі.
5. Поясніть, який сенс мають від'ємні частоти, якщо ряд Фур'є задається в комплексній формі.
6. Запишіть аналітичний вираз реакції ЛЧ-кола за спектральним методом, якщо ряд Фур'є, що описує вхідний сигнал, задається в косинусоїдальній амплітудно-фазовій формі.
7. Запишіть аналітичний вираз реакції ЛЧ-кола за спектральним методом, якщо ряд Фур'є, що описує вхідний сигнал, задається в синусоїдальній амплітудно-фазовій формі.

ДОДАТКИ

Додаток А. Синтез активних фільтрів за заданою апроксимацією АЧХ

Етапи синтезу фільтрів. Функція квадрата АЧХ. Вимоги до АЧХ. Нормування частот і характеристик фільтрів. Нормований ФНЧ-прототип. Вимоги до АЧХ нормованого ФНЧ-прототипу.

Функція квадрата АЧХ

Розглянемо квадрат модуля комплексного коефіцієнта передачі чотирьохполосника:

$$K_p(\omega) = K(j\omega) \cdot K^*(j\omega) = K(j\omega) \cdot K(-j\omega) = |K(j\omega)|^2. \quad (\text{A.1})$$

Функція $K_p(\omega)$ (коефіцієнт передачі потужності або квадрат АЧХ), на відмінність від $K(j\omega)$, є дійсною функцією від дійсної змінної ω і тому зручна для синтезу фільтрів³⁷⁾.

Функція $K_p(\omega)$ є парною функцією від частоти і може надаватися у вигляді:

$$K_p(\omega) = \frac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)}. \quad (\text{A.2})$$

Якщо зробити заміну $j\omega = s$, то функція $K_p(\omega)$ буде аналітично продовжена з уявної осі $j\omega$ на всю площину комплексних частот:

$$K_p(s) = K(s) \cdot K(-s). \quad (\text{A.3})$$

Формула (A.3) встановлює наступне: якщо $a + jb$ – особлива точка (нуль чи полюс) функції $K(s)$, то $K_p(s)$ буде мати таку саму особливу точку, як при $s = a + jb$, так і при $s = -a - jb$ (тобто подвійний набір нулів і полюсів). У лівій s -півплощині – нулі і полюси функції $K(s)$, в правій s -півплощині –

³⁷⁾ До речі, дії з функціями від комплексної змінної досить складні для розв'язку задачі апроксимації, іноді їх не можливо виконати.

нулів і полюси функції $K(-s)$. Отже, особливі точки $K_p(s)$ мають квадрантну симетрію на комплексній площині, при цьому центр симетрії розташовується на початку координат. Використовуючи цей факт, можна легко відновити функцію $K(s)$: тобто, якщо в процесі синтезу визначені $2n$ нулів і $2n$ полюсів $K_p(s)$, то для реалізації передатної функції фільтра $K(s)$ треба обрати тільки ті n з них, які розташовані в лівій s – півплощині.

Етапи синтезу фільтрів

Синтез частотних фільтрів починають з вибору деякої ідеалізованої функції, яка описує частотну залежність коефіцієнта передачі потужності (квадрат АЧХ). Ніяких обмежень на вигляд ФЧХ при цьому немає. Тому такий підхід зветься *синтезом фільтра за заданою АЧХ*. Як правило, ідеалізовану частотну характеристику фізично реалізувати не можна. Тому другий етап синтезу полягає в *апроксимації* цієї характеристики деякої функцією, яка відповідає фізично реалізованому колу. Далі за апроксимованою частотною характеристикою передачі потужності $K_p(\omega)$ (квадрату АЧХ) знаходять передатну функцію $K(s)$ фільтра. Якщо відомі нулі і полюси $K(s)$, то можна побудувати принципову схему фільтра, включаючи визначення параметрів окремих елементів схеми.

Фільтри нижніх частот

Основне призначення цих пристроїв (ФНЧ, *low-pass filter*) – передавати з мінімальним загасанням на вихід коливання, частота яких не більша деякої заданої граничної частоти, що зветься частотою зрізу фільтра ω_c . В той час коливання, котрі мають більшу частоту, повинні значно загасати. Тобто для ФНЧ з частотою зрізу ω_c ідеальна частотна залежність коефіцієнту передачі потужності (квадрат АЧХ) виглядає:

$$K_p(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_c ; \\ 0, & \omega > \omega_c . \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

де маємо на увазі фізичні частоти $\omega > 0$.

Таку частотну характеристику не можна фізично нереалізувати. Тому її треба апроксимувати функціями, які виражають частотні характеристики електричних кіл, для чого потрібно ввести деякі *допустимі відхилення* характеристики від ідеальної, які зветься – *вимоги до АЧХ*.

Вимоги до АЧХ

Звичайно смуги пропускання і затримки розділяються вузькою перехідною зоною в межах $\omega_c \leq \omega \leq \omega_s$, де $\omega_c = 2\pi f_c$ – зветься граничною частотою смуги пропускання (*Passband Frequency* (F_c)) або частотою зрізу; $\omega_s = 2\pi f_s$ – граничною частотою смуги затримки (*Stopband Frequency* (F_s)). Смуга затримки – $\omega_s \leq \omega \leq \infty$. У смузі пропускання $0 \leq \omega \leq \omega_c$ задається допустиме відхилення δ_1 нормованої АЧХ від 1.

У смузі затримки $\omega \geq \omega_s$ задається допустиме відхилення δ_2 нормованої АЧХ від 0. Ширина смуги затримки W_s необмежена, бо простягається від ω_s до нескінченності.

На практиці вимоги зазвичай даються у децибелах:

- $a_{\max} = \Delta a = 20 \lg(1 - \delta_1) < 0$ – максимальне допустиме *послаблення* в смузі пропускання (якщо використовується термін *загасання*³⁸, то $a_{\max} = -20 \lg(1 - \delta_1) > 0$);

- Δa – *нерівномірність* АЧХ в смузі пропускання (*Passband Ripple* R_p);

- $a_0 = 20 \lg \delta_2 < 0$ – мінімально допустиме *послаблення* в смузі затримки (якщо *загасання*, то $a_0 = -20 \lg \delta_2 > 0$).

³⁸⁾ Традиційно в системах радіозв'язку використовується *характеристика послаблення*, а в багатоканальних системах зв'язку – *характеристика загасання*.

Нормування частот і характеристик фільтрів

Для зручності розв'язку задачі апроксимації для різних типів селективних фільтрів використовують рішення, знайдені для відповідних *нормованих ФНЧ* – так званих *фільтрів прототипів*. Для цього застосовують *функції перетворення частот* фільтрів у відповідні частоти нормованого ФНЧ.

Розрахувавши такий НЧ-прототип, після нескладних перетворень, його можна перетворити назад у фільтр верхніх частот (ФВЧ) чи в смуговий фільтр (СФ) або в режекторний фільтр (РФ) із заданими частотами.

В якості нормуючої частоти ω_1 використовується частота зрізу ω_c ФНЧ або ФВЧ, а також середнє геометричне $\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$, де ω_{c1} , ω_{c2} – відповідно нижня і верхня границі смуги пропускання (частоти зрізу) СФ або смуги затримки ЗФ.

Нормований ФНЧ-прототип

Вимоги до АЧХ нормованого ФНЧ-прототипу зображено на рис. 1.

Отже, нормована частота для ФНЧ-прототипу:

$$\Omega = \omega / \omega_c . \quad (\text{A.5})$$

Нормована частота зрізу ФНЧ-прототипу завжди:

$$\Omega_c = \omega_c / \omega_c = 1. \quad (\text{A.6})$$

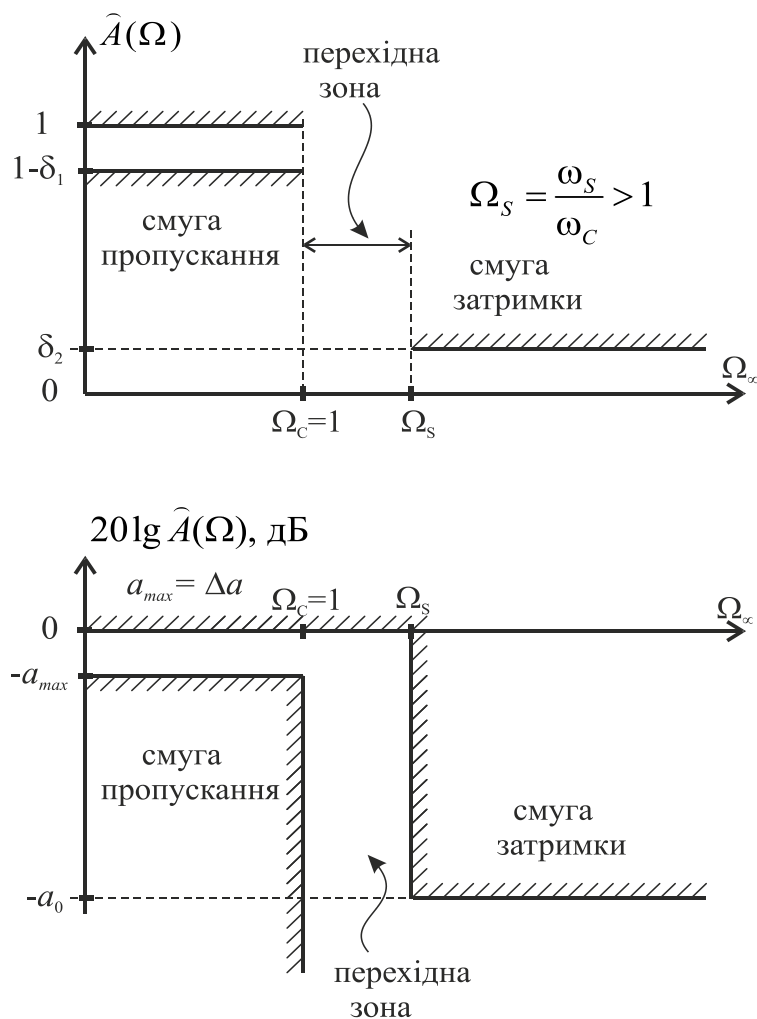


Рис. А.1. Вимоги до АЧХ нормованого ФНЧ-прототипу

Нормована гранична частота смуги затримки ФНЧ-прототипу:

$$\Omega_s = \omega_s / \omega_c > 1. \quad (\text{A.7})$$

Аналогічно вводиться нормований оператор Лапласа:

$$\Lambda = \hat{s} = s / \omega_c .$$

Нормується також комплексна частотна характеристика фільтра відносно максимуму АЧХ $\max A(\omega) = \max |K(j\omega)|$:

$$\hat{K}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{\max |K(j\omega)|} = \frac{K(j\omega)}{\max A(\omega)} \text{ або } \hat{A}(\Omega) = \frac{|K(j\Omega)|}{\max |K(j\Omega)|} = \frac{A(\Omega)}{\max A(\Omega)},$$

тобто одержуємо нормовану амплітудно-частотну характеристику.

Отже, синтез нормованого ФНЧ відбувається за наступними параметрами:

- a_{\max} чи Δa нерівномірність АЧХ в смузі пропускання $0 \leq \Omega \leq \Omega_c$;
- a_0 – мінімальне послаблення (чи загасання) в смузі затримки;
- Ω_s – гранична частота смуги затримки $\Omega_s \leq \Omega \leq \infty$;
- нормована частота зрізу ФНЧ завжди $\Omega_c = 1$.

Смуга $\Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_s$ – перехідна зона від пропускання до затримки.

Після розрахунку фільтру із нормованою АЧХ (НЧ-прототипу) роблять денормування і перехід до фільтру заданого типу.

Далі розглянемо другий етап синтезу – потрібно підібрати апроксимуючу функцію, *оптимальну* за деяким критерієм якості ³⁹⁾. Потім за апроксимованою частотною характеристикою передачі потужності $K_p(\Omega)$ (квадрату АЧХ) – знайти передатну функцію $K(s)$ фільтра.

Контрольні запитання та завдання

1. *Що таке задача синтезу?*
2. *Який вигляд має АЧХ ідеального ФНЧ. Пояснить, чому вона фізично не реалізується?*
3. *Дайте визначення селективних фільтрів різних типів.*
4. *Що таке активний RC-фільтр? Які переваги мають активні RC-фільтри, якщо їх порівнювати з фільтрами на пасивних RLC-елементах? Які переваги мають пасивні RLC-фільтри?*
5. *Чому для синтезу фільтрів обрана функція квадрата АЧХ? Чи існують інші підходи до синтезу фільтрів?*
6. *Що таке вимоги до АЧХ?*
7. *Як здійснюється нормування частот і характеристик фільтрів?*
8. *Що таке нормований ФНЧ-прототип?*
9. *За якою апроксимацією АЧХ будуються фільтри Баттерворта?*
10. *Наведіть основні етапи синтезу фільтрів за заданою АЧХ.*

³⁹⁾ Розглядаємо лише два типи простих поліноміальних фільтрів – Баттерворта і Чебишева 1-го роду, передатні функції яких мають тільки полюси.

Додаток Б. Синтез активних фільтрів Баттерворта

Фільтри Баттерворта (*Butterworth filter*). Вибір порядку фільтра. Полюси та нормована передатна функція прототипу. Порядок розрахунку фільтрів Баттерворта. Денормування за частотою. Розрахунок електричної схеми фільтра. Розрахунок елементів електричної схеми фільтра за параметрами синтезованої моделі в середовищі Mathcad. Основні властивості фільтрів Баттерворта. Контрольні запитання та завдання.

Фільтри Баттерворта (*Butterworth filter*).

Максимально плоска апроксимація за Тейлором у точці $\Omega = 0$:

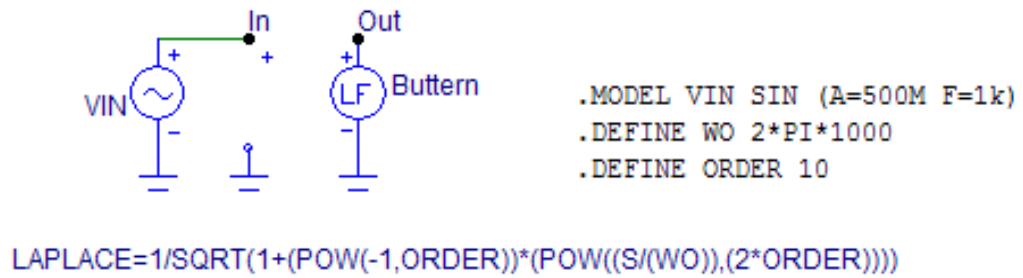
$$K_p(\Omega) = |K(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}; \quad \Omega = \omega/\omega_c. \quad (\text{Б.1})$$

Якщо розглядатимемо нормовану АЧХ фільтра, то $\hat{A}(\Omega) = 1/\sqrt{1 + \Omega^{2n}}$ (рис. Б.1). Оптимальність полягає в тому, що АЧХ фільтра НЧ порядку n на частотах $\Omega = 0$ і $\Omega = \infty$ має рівні нулю перші $2n - 1$ похідних, тобто максимальну кількість.

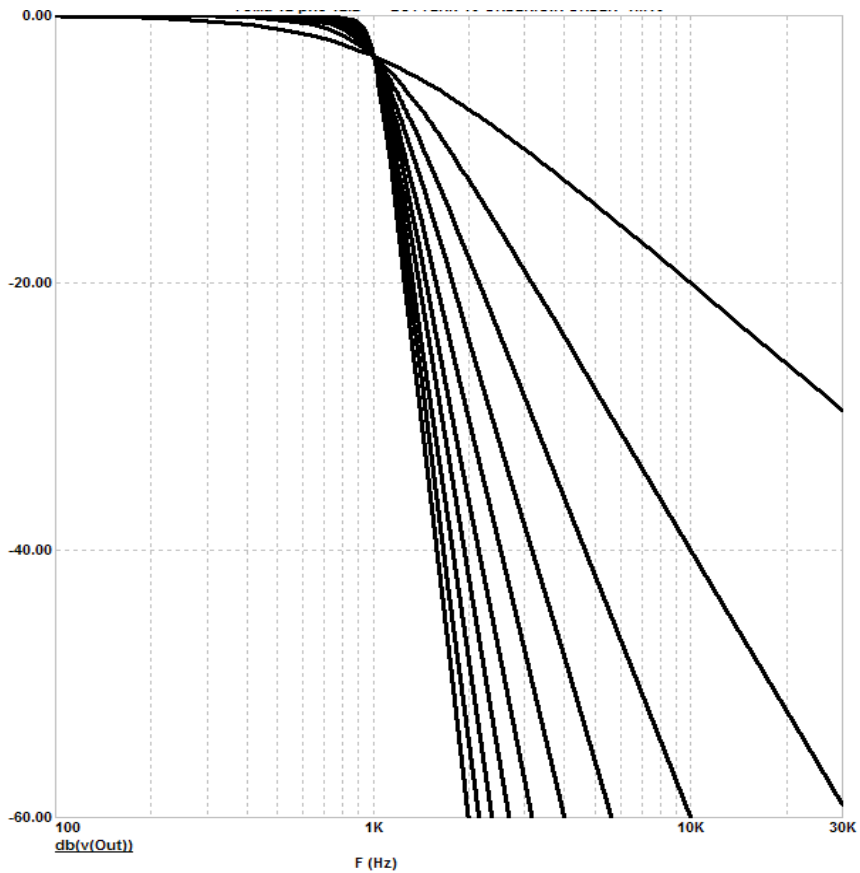
АЧХ фільтра Баттерворта є монотонною як у смузі пропускання, так і в смузі затримки. Чим більший порядок n , тим більше плоска АЧХ і тим більше вона наближається до ідеальної. На частоті зрізу $\Omega_c = 1$ значення АЧХ фільтра незалежно від порядку n завжди дорівнюють $1/\sqrt{2}$ (або -3дБ). Нерівномірність АЧХ у смузі пропускання фільтрів Баттерворта завжди $\Delta a = -3\text{дБ}$ (досягає свого максимуму на частоті $\Omega_c = 1$, тобто $a(1) = -3\text{дБ}$).

На частоті $\Omega = 0$ завжди $|K(j\Omega)| = 1$ (послаблення $a(0) = 0\text{дБ}$). При $\Omega \rightarrow \infty$ АЧХ $|K(j\Omega)| \rightarrow 0$ (послаблення $a(\infty) \rightarrow -\infty$). Нормована частота зрізу ФНЧ Баттерворта $\Omega_c = 1$.

Butterworth Filter Circuit



a



б

*Рис. Б.1. Моделювання в середовищі Micro-CAP **Butterworth Filter**:
 а – моделювання фільтру за допомогою джерела **Laplace Sources**;
 б – залежність крутизни спаду АЧХ фільтрів Баттерворта від порядку n*

Вибір порядку фільтра

Після вибору типу ФНЧ потрібно визначити порядок фільтра n . Порядок n визначається з (Б.2), якщо задати a_0 і Ω_s .

Приклад 1

Знайти порядок фільтра Баттерворта, якщо для частот, починаючи з $\Omega_s = 3$, мінімальне послаблення сигналу $a_0 = -40$ дБ (тобто $\delta_2 = 0,01$) по відношенню до рівня при $\Omega = 0$.

Отже, маємо

$$|K(j\Omega_s)|_{\text{дБ}} = 20\lg \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega_s^{2n}}} = -10\lg(1 + \Omega_s^{2n}) = a_0 < 0. \quad (\text{Б.2})$$

Якщо $\Omega_s^{2n} \gg 1$, то $|K(j\Omega_s)| \approx 1/\Omega_s^n$. Отже, матиме $a_0 = 20\lg|K(j\Omega_s)| \approx -20\lg(\Omega_s^n) = -20n\lg\Omega_s$. Тоді послаблення в дБ:

$$a_0 = |K(j\Omega_s)|_{\text{дБ}} \approx -20n\lg\Omega_s. \quad (\text{Б.3})$$

Треба вибрати ціле число:

$$n \geq |a_0| / (20 \cdot \lg\Omega_s), \quad (\text{Б.4})$$

$n \geq 40 / (20 \cdot \lg 3) = 4,19181$, тобто вибираємо $n = 5$.

Або, що майже те саме, вибираємо найменше ціле, яке задовольняє нерівності:

$$n \geq \lg \sqrt{10^{-0,1a_0} - 1} / \lg\Omega_s. \quad (\text{Б.5})$$

Далі, щоб синтезувати структуру кола, потрібно від $|K(j\Omega)|^2$ перейти до нормованої передатної функції фільтра $K(\hat{s})$, потім, виконавши денормування, перейти до функції $K(s)$.

* * *

Полюси та нормована передатна функція прототипу

Передатна функція фільтра буде відома, якщо знайдемо її нулі і полюси. Для цього приведемо (Б.1) до вигляду, зручному для визначення нулів і полюсів. Якщо $\Lambda = s/\omega_c$, то при $\sigma = 0$ нормована комплексна змінна отримає значення:

$$\Lambda = \hat{s} = \frac{s}{\omega_c} = \frac{j\Omega}{\omega_c} = j\Omega \Rightarrow \Omega = -j\hat{s}. \quad (\text{Б.6})$$

Тоді вираз (Б.1) перетворюється до вигляду:

$$|K(\hat{s})|^2 = \frac{1}{1 + (-j\hat{s})^{2n}}. \quad (\text{Б.7})$$

Побудову АЧХ за виразом (Б.7) у середовищі Micro-CAP із використанням **Laplace source**, передатна функція якого задається формулою, наведено на рис. Б.1,б.

Функція (Б.7) не має нулів. Знайдемо $2n$ полюсів \hat{s}_{p_k} , для чого прирівнюємо нулю знаменник (Б.7):

$$1 + (-j\hat{s})^{2n} = 0.$$

Звідси $-j\hat{s}_{p_k} = \sqrt[2n]{-1}$. Якщо врахуємо

$$-1 = e^{j\pi} = e^{j(2k-1)\pi}, \quad \sqrt[2n]{-1} = e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}},$$

то дістанемо:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{p_k} &= j e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}} = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}} = e^{j\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right]} = \\ &= \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right] + j \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right]; \\ \hat{s}_{p_k} &= -\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + j \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right], \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Отже, $2n$ полюсів функції $|K(\hat{s})|^2$ рівномірно розташовані на одиничній окружності \hat{s} -площині на відстані π/n один від одного. Полюси в загальному випадку комплексно-спряжені, розташовані симетрично відносно уявної осі, не потрапляючи на неї. Полюс може перебувати на дійсній осі тільки для непарних n , тільки в цьому випадку полюс є дійсним.

Для формування передатної функції вибираємо лише ті n полюси, які відповідають функції $K(\hat{s})$, вони розташовані в лівій \hat{s} -півплощині, мають від'ємну дійсну частину; тому це корені в (Б.8) з індексами $k = 1, 2, \dots, n$, оскільки при цих індексах значення синусу додатні.

До речі, інші полюси, які розташовані в правій \hat{s} -півплощині, відносяться до функції $K(-\hat{s})$. Вони мають додатну дійсну частину, що не відповідає умовам стійкості електричного кола.

Нормована передатна функція визначається, як

$$K(\hat{s}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\hat{s} - \hat{s}_{p_k})} = \frac{1}{\hat{s}^n + c_1 \hat{s}^{n-1} + \dots + c_n}, \quad (\text{Б.9})$$

де поліном знаменника зветься поліномом Баттерворта (за прізвищем автора, який вперше використав апроксимацію за Тейлором в задачі синтезу поліноміальних фільтрів нижніх частот). Враховуючи те, що корені в (Б.9) утворюють комплексно-спряжені пари, тобто

$$(\hat{s} - \hat{s}_{p1})(\hat{s} - \hat{s}_{p2}) = \hat{s}^2 - 2\text{Re}[\hat{s}_{p1}] \cdot \hat{s} + |\hat{s}_{p1}|^2, \quad \hat{s}_{p2} = \hat{s}_{p1}^*,$$

отримаємо наступні вирази поліномів Баттерворта⁴⁰⁾:

$$v_1(\hat{s}) = \hat{s} + 1;$$

$$v_2(\hat{s}) = \hat{s}^2 + 1,414 \cdot \hat{s} + 1;$$

$$v_3(\hat{s}) = \hat{s}^3 + 2\hat{s}^2 + 2\hat{s} + 1 = (\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + \hat{s} + 1);$$

$$v_4(\hat{s}) = \hat{s}^4 + 2,613\hat{s}^3 + 3,414\hat{s}^2 + 2,613\hat{s} + 1 = (\hat{s}^2 + 0,7654\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 1,848\hat{s} + 1);$$

$$v_5(\hat{s}) = (\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 0,618\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 1,618\hat{s} + 1)$$

.....

Порядок розрахунку фільтрів Баттерворта

1. Задаються вимоги до АЧХ нормованого НЧ-прототипу: a_0 – мінімально допустиме послаблення $a_0 < 0$ (чи загасання $a_0 > 0$) в смузі затримки; Ω_s – гранична частота смуги затримки $\Omega_s \leq \Omega \leq \infty$ (нерівномірність в смузі пропускання завжди $\Delta a = -3\text{дБ}$; частота зрізу $\Omega_c = 1$).

3. Визначається порядок фільтра n відповідно до (Б.4) або (Б.5), з врахуванням a_0 і Ω_s .

⁴⁰⁾ Докладніші таблиці поліномів наведені в спеціальній літературі з даної тематики (Lam, H.Y-F. *Analog and Digital Filters: Design and Realization*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1979).

4. Розраховуються полюси прототипу \hat{s}_{*k} за формулою (Б.8) та визначаємо передатну функцію нормованого фільтра (Б.9).

5. Потім роблять денормування за частотою та перехід до фільтра заданого типу.

6. За знайденої передатної функцією фільтра розраховується його електрична схема .

Приклад 2

Визначити передатну функцію ФНЧ з характеристикою фільтра Баттерворта 2-го порядку.

Отже, за формулою (Б.8), передатна функція визначається двома полюсами, розташованими в лівій \hat{s} – півплощині:

$$\hat{s}_{p1} = -1/\sqrt{2} + j1/\sqrt{2}; \quad \hat{s}_{p2} = -1/\sqrt{2} - j1/\sqrt{2}.$$

$$\text{Тоді} \quad K(\hat{s}) = \frac{1}{(\hat{s} - \hat{s}_{p1})(\hat{s} - \hat{s}_{p2})} = \frac{1}{\hat{s}^2 + c_1\hat{s} + c_2} = \frac{1}{\hat{s}^2 + 1,414 \cdot \hat{s} + 1},$$

де $c_1 = \sqrt{2}$; $c_2 = 1$.

Денормування за частотою

Далі, денормуємо за формулою $\hat{s} = s/\omega_c$ (без перетворення типу фільтра, тобто робимо тільки масштабування частоти, де $\omega_c = 2\pi f_c$ - потрібна частота зрізу) і переходимо до функції $K(s)$, за якої можна розраховувати, включаючи окремі елементи, електричну схему фільтра. Передатна функція "розтягується" або "стягується" таким чином, що те, що робилося на частоті $\Omega_c = 1$ рад/с, тепер відбувається з нею на частоті $\omega/\omega_c = 1$ рад/с, тобто, коли $\omega = \omega_c$.

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{1}{(s/\omega_c - \hat{s}_{p1})(s/\omega_c - \hat{s}_{p2})} = \frac{1}{(s/\omega_c)^2 + c_1(s/\omega_c) + c_2} = \\ &= \frac{\omega_c^2}{s^2 + c_1\omega_c \cdot s + c_2\omega_c^2} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 1,414 \cdot \omega_c \cdot s + 1 \cdot \omega_c^2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

Розрахунок електричної схеми фільтра

Для реалізації ФНЧ при $n = 2$ потрібна динамічна система 2-го порядку, яка має КЧФ вигляду:

$$H(j\omega) = \frac{K_{LP_0} \omega_p^2}{(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + \omega_p^2},$$

наприклад, пасивне коливальне RLC – коло. Але зручніші активні схеми на операційних підсилювачах, наприклад, за структурою Саллена і Кея або за структурою Рауха, за допомогою яких можна реалізувати прості поліноміальні передатні функції вигляду (Б.10).

Приклад 3

Розглянемо синтез схеми, яка реалізує передатну функцію (Б.10).

Вибираємо вже відому структуру Саллена і Кея (рис. Б.2). Системна функція

$$H(s) = \frac{K_{01}/C_1C_2R_1R_2}{s^2 + [1/C_1R_1 + 1/C_1R_2 + 1/C_2R_2 - K_{01}/C_2R_2] \cdot s + 1/C_1C_2R_1R_2}. \quad (\text{Б.11})$$

Прирівнюючи знаменники в виразах (Б.10) і (Б.11), одержимо рівняння, з яких можна визначити параметри елементів схеми:

$$\begin{aligned} 1/C_1R_1 + 1/C_1R_2 + 1/C_2R_2 - K_{01}/C_2R_2 &= c_1\omega_c = \sqrt{2}\omega_c; \\ 1/C_1C_2R_1R_2 &= c_2\omega_c^2 = 1 \cdot \omega_c^2. \end{aligned}$$

Зазвичай вибирають $\omega_c = 1/C_2R_2$. Тоді з другого рівняння отримаємо $1/C_1R_1 = c_2\omega_c = 1 \cdot \omega_c \Rightarrow C_1R_1 = 1/\omega_c$. З першого рівняння матимемо:

$$\begin{aligned} 1/C_1R_1 + C_2/C_1C_2R_2 + 1/C_2R_2 - K_{01}/C_2R_2 &= c_1\omega_c \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + C_2/C_1 + 1 - K_{01} &= c_1 \Rightarrow K_{01} = 1 + C_2/C_1 + 1 - c_1 \\ K_{01} &= 1 + 1 + C_2/C_1 - \sqrt{2} \approx 0,5858 + C_2/C_1. \end{aligned}$$

Задаючи $C_2/C_1 = 0,4142$ (відповідно $R_2/R_1 = 2,4142$), одержимо $K_{01} \approx 1$ (повторювач напруги, коли резистор R_3 відсутній). Нехай частота зрізу $f_c = 1000$ Гц ($\omega_c = 2\pi f_c$), вибираємо $C_2 = 0,1$ мкФ. Тоді:

$$C_1 = C_2/0,4142 \approx 0,2414 \text{ мкФ}; R_2 = 1/2\pi f_c C_2 \approx 1592 \text{ Ом};$$

$$R_1 = 1/C_1 2\pi f_c \approx 659,3 \text{ Ом.}$$

На рис. Б.2 - рис. Б.4 наведено фрагменти документів Mathcad, які ілюструють техніку розрахунку електричної схеми відповідного ФНЧ та його характеристик.

Розрахунки можна спростити, якщо припустити $R_1 = R_2 = R$ і $C_1 = C_2 = C$. В цьому випадку передатна функція набирає вигляду:

$$H(s) = \frac{K_{01} \cdot \frac{1}{C^2 R^2}}{s^2 + \frac{(3 - K_{01})}{CR} s + \frac{1}{C^2 R^2}}.$$

Звідси система рівнянь, з якої можна визначити параметри елементів схеми:

$$c_1 \omega_c = (3 - K_{01})/CR; \quad c_2 \omega_c^2 = 1/C^2 R^2,$$

де $c_1 = \sqrt{2}$; $c_2 = 1$ для фільтра Баттерворта. Отже, якщо $\omega_c = 1/CR$, то

$$(3 - K_{01}) = c_1 = \sqrt{2}. \quad \text{Звідси } K_{01} = 3 - c_1 = 3 - \sqrt{2} \approx 1,586.$$

Отже, K_{01} не дорівнюватиме 1. Вибираємо $R_3 = 10 \text{ кОм}$. Тоді одержимо:

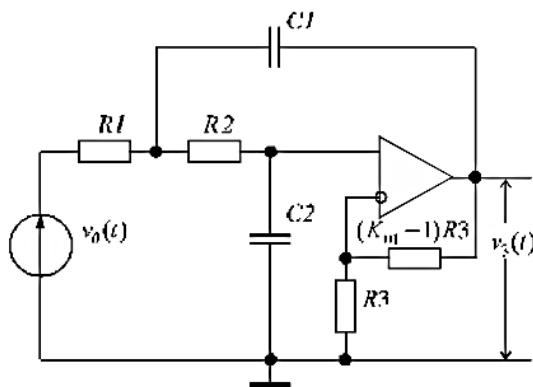
$$R_4 = (K_{01} - 1)R_3 = (1,586 - 1) \cdot 10 \times 10^3 = 5,86 \times 10^3 \text{ Ом.}$$

Розрахунки значно проще робити в Mathcad.

Аналіз в середовищі Mathcad

Приклад 4

Розрахунок електричної схеми за параметрами моделі кола



системна функція ФНЧ
Баттерворта 2-го порядку

$$K(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 1,414 \cdot \omega_c \cdot s + \omega_c^2}$$

системна функція ФНЧ за
структурою Саллена і Кея

$$H(s) := \frac{\frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2} \cdot K01}{s^2 + \left(\frac{1}{C1 \cdot R1} + \frac{1}{R2 \cdot C2} + \frac{1}{R2 \cdot C1} - \frac{K01}{R2 \cdot C2} \right) \cdot s + \frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2}}$$

Прирівнюючи знаменники в виразах, одержимо рівняння, з яких можна визначити параметри елементів електричної схеми

$$f_c := 1000 \quad \omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c \quad \omega_c = 6.283 \times 10^3$$

Given

- система рівнянь

$$\frac{1}{C1 \cdot R1} + \frac{1}{R2 \cdot C2} + \frac{1}{R2 \cdot C1} - \frac{K01}{R2 \cdot C2} = \sqrt{2} \cdot \omega_c \quad \omega_c^2 = \frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2} \quad \omega_c = \frac{1}{R2 \cdot C2}$$

$$\frac{C2}{C1} = 0.4142 \quad C2 = 0.1 \cdot 10^{-6}$$

- розв'язок

$$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ R1 \\ R2 \\ K01 \end{pmatrix} := \text{Find}(C1, C2, R1, R2, K01) \text{ float, 4} \rightarrow \begin{pmatrix} 2.414 \cdot 10^{-7} \\ 1.000 \cdot 10^{-7} \\ 659.2 \\ 1592. \\ 1.000 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ R1 \\ R2 \\ K01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.414 \times 10^{-7} \\ 1.000 \times 10^{-7} \\ 659.200 \\ 1.592 \times 10^3 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Далі, за системною функцією побудуємо частотні характеристики

$$H(s) := \frac{\frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2} \cdot K01}{s^2 + \left(\frac{1}{C1 \cdot R1} + \frac{1}{R2 \cdot C2} + \frac{1}{R2 \cdot C1} - \frac{K01}{R2 \cdot C2} \right) \cdot s + \frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2}} \text{ float, 3} \rightarrow \frac{3.95 \cdot 10^7}{(s^2 + 8.89 \cdot 10^3 \cdot s + 3.95 \cdot 10^7)^1}$$

Рис. Б.2. Схема ФНЧ з додатним зворотним зв'язком (структура Саллена і Кея)

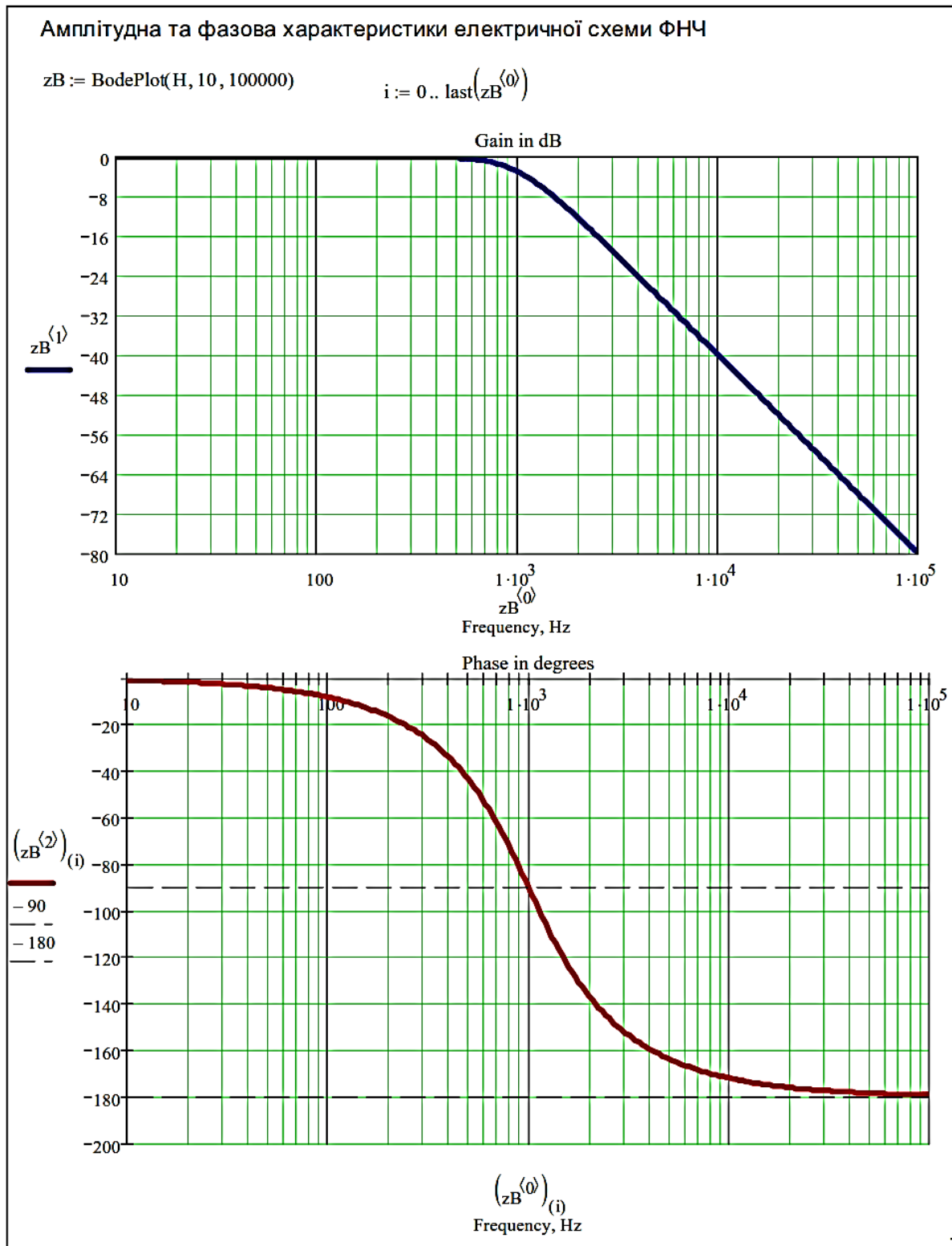


Рис. Б.3. Частотні характеристики розрахованої електричної схеми ФНЧ Баттерворта

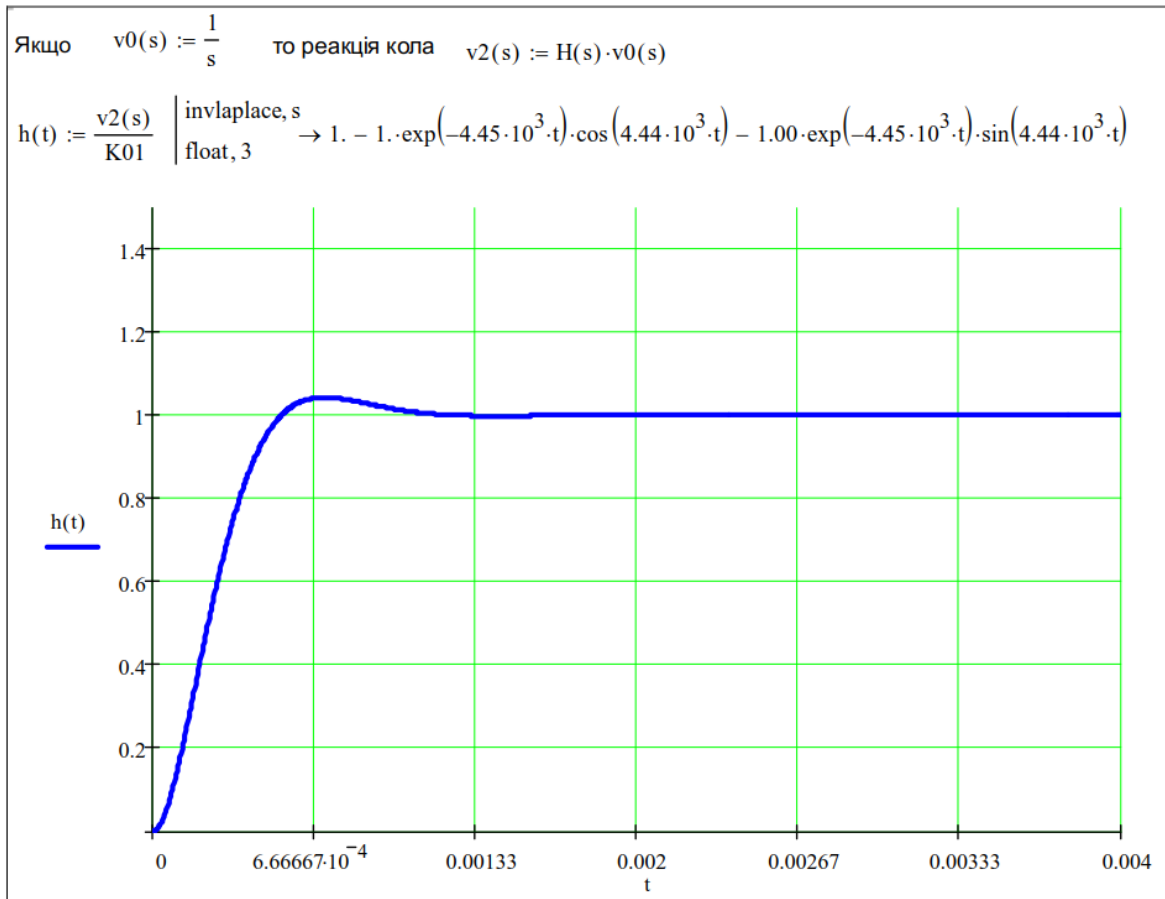


Рис. Б.4. Викид і "дзвін" на вершині перехідної характеристики фільтра Баттерворта 2-го порядку незначний

Основні властивості фільтрів Баттерворта

1. АЧХ фільтра Баттерворта в смузі пропускання є максимально-плоскою, а в смузі затримки є монотонною;

2. ФЧХ фільтрів Баттерворта близька до лінійної в смузі пропускання. Але деяка її нелінійність призводить до фазових спотворень, так як сигнали різних частот матимуть різний час затримки. При цьому на вершині перехідної характеристики з'являється незначний викид та "дзвін".

3. За великих n викид та "дзвін" на вершині перехідної характеристики збільшуються.

Фільтри Баттерворта найбільше відповідають вимогам передачі сигналів без амплітудно-фазових спотворень. Однак порядок фільтрів Баттерворта, за інших рівних умов, завжди більший порядку інших фільтрів, наприклад, фільтрів Чебишева.

Контрольні запитання та завдання

1. *За якою апроксимацією АЧХ будуються фільтри Баттерворта?*
2. *Наведіть основні етапи синтезу фільтрів за заданою АЧХ.*
3. *Як обрати порядок фільтру Баттерворта за вимогами до АЧХ?*
4. *Як знайти полюси передатної функції фільтра-прототипу Баттерворта за відомим порядком фільтру?*
5. *Як одержати передатну функцію фільтру за відомими полюсами, яка би відповідала моделям типових ланок електричних кіл другого та першого порядків на операційних підсилювачах?*
6. *Як здійснюється денормування передатної функції фільтру-прототипу за частотою і коефіцієнтом передачі на нульовій частоті?*
7. *Наведіть приклад розрахунку елементів електричної схеми ФНЧ Баттерворта другого порядку (структура Саллена і Кея або структура Рауха) за математичною моделлю передатної функції синтезованого фільтру.*
8. *Назвіть основні властивості фільтрів Баттерворта.*

Додаток В. Синтез активних фільтрів Чебишева

Поліноміальні фільтри Чебишева 1-го роду (Chebyshev type 1 filter). Вибір порядку фільтра. Полюси та нормована передатна функція прототипу. Порядок розрахунку фільтрів Чебишева 1-го роду. Денормування за частотою. Розрахунок електричної схеми фільтра. Розрахунок елементів електричної схеми фільтра за параметрами синтезованої моделі в середовищі Mathcad. Основні властивості фільтрів Чебишева 1-го роду. Контрольні запитання та завдання.

Фільтри Чебишева (*Chebyshev filter*)

Вимоги до фільтра можуть бути забезпечені за менших порядків, якщо похибку апроксимації рівномірно розподілити по смузі пропускання (фільтр Чебишева 1-го роду) або по смузі затримки (фільтр Чебишева 2-го роду); ще краще, якщо похибка розподілена по обох вказаних смугах (фільтри *Золотарьова-Кауера*, або *еліптичні* фільтри). Тоді отримаємо рівнохвильову апроксимацію і порядок фільтра буде значно менший порядку фільтра Баттерворта.

Поліноміальні фільтри Чебишева 1-го роду (*Chebyshev type 1 filter*)

АЧХ фільтрів Чебишева 1-го роду в смузі пропускання має рівнохвильовий характер, а в смузі затримки – монотонно затухає.

Функція квадрата АЧХ фільтра n -го порядку має вигляд:

$$K_P(\Omega) = |G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)}; \quad \Omega = \omega/\omega_c, \quad (\text{B.1})$$

де $T_n(\Omega)$ – поліном Чебишева n -порядку; ε – параметр, який задає нерівномірність у смузі пропускання. Якщо розглядати нормовану АЧХ фільтра, то маємо:

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)}}. \quad (\text{B.2})$$

Поліном Чебишева визначається так:

$$T_n(\Omega) = \cos(n \cdot \arccos \Omega). \quad (\text{B.3})$$

Функція $T_n(\Omega)$ може бути знайдена з відомого в математиці рекурентного співвідношення:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x); \quad T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x.$$

Так маємо:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x; \quad \dots$$

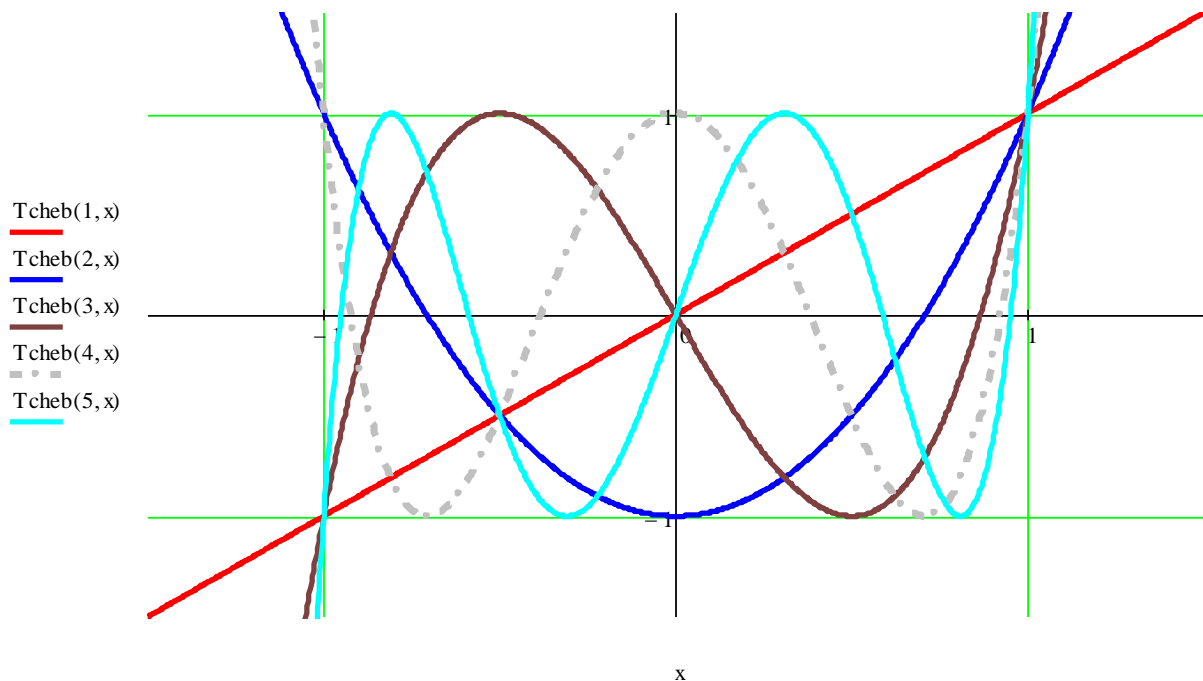


Рис. В.1. Поліноми Чебишева

$$A(n, x) := \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot Tcheb(n, x)^2}}.$$

Якщо $\varepsilon := 0.50$, то одержимо

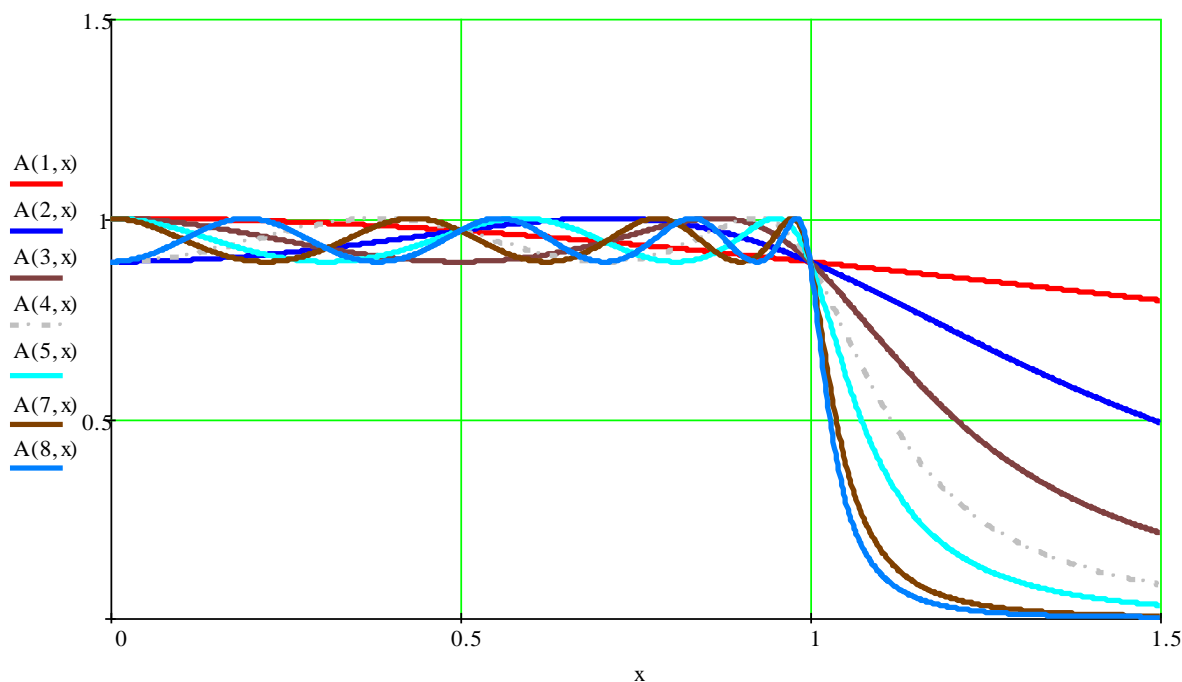


Рис. В.2. АЧХ фільтрів Чебишева 1-го роду
 $(\varepsilon_{\text{ддд}} := 0.50^{\text{ддд}}$, лінійний масштаб за змінної x)

Серед всіх поліномів n -ступеня з однаковими коефіцієнтами при старшому ступені x поліном Чебишева найменше всіх відхиляється від нуля на інтервалі $-1 < x < +1$. Отже, поліном $T_n(\Omega)$ за $|\Omega| \leq 1$ коливається в діапазоні $-1 \dots +1$, але коли $|\Omega| > 1$, безмежно зростає за абсолютною величиною. Асимптотично при $|\Omega| \gg 1$ зростає за законом $T_n(\Omega) \approx 2^{n-1} \Omega^n$.

Тому з формули (В.2) бачимо, що АЧХ фільтра в смузі пропускання (при $|\omega| \leq \omega_c$) коливається між значеннями $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ і 1 , а поза смугою пропускання ($|\omega| > \omega_c$) монотонно затухає до нуля.

За формулою (В.2), коефіцієнт передачі на нульовій частоті $\omega = 0$ дорівнює 1 за *непарного* порядку фільтра і $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ – за *парного*. На частоті зрізу коефіцієнт передачі фільтра дорівнює $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ тому, що $T_n(1) = 1$ при

кожному n , тобто рівню пульсацій АЧХ в смузі пропускання⁴¹⁾. При $\omega \rightarrow \infty$ АЧХ прагне до нуля.

Через це для нормування АЧХ до одиниці при $\omega=0$ в формулі (В.2) у чисельник при парному порядку фільтра треба ввести коефіцієнт $\sqrt{1+\varepsilon^2}$. Так на рис. 6 зображено вже нормовані АЧХ, побудовані в середовищі Мікро-САР.

Порівняно з фільтром Баттерворта того ж порядку, фільтр Чебишева забезпечує більш крутий спад АЧХ в області переходу від смузі пропускання до смузі затримки.

При $\omega \rightarrow \infty$ АЧХ фільтра Чебишева першого роду є максимально плоскою.

Значення параметра ε і рівень пульсацій R_p (в децибелах) пов'язані наступним чином:

$$R_p = 20\lg(\sqrt{1+\varepsilon^2}) = 10\lg(1+\varepsilon^2) \text{ дБ} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \quad (\text{В.4})$$

або визначається з максимально допустимого загасання $a_{\max} > 0$ в смузі пропускання (до речі $R_p = a_{\max}$):

$$a_{\max} = -20\lg \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \quad (\text{В.5})$$

R_p , дБ	0,5	1	2	3
ε	0,349	0,509	0,765	0,998

Наприклад, за $R_p = 3$ дБ дістанемо $\varepsilon = 0,9976$. Збільшення ε веде до більшої величини пульсацій, але і до більшого послаблення сигналів поза смугою пропускання.

⁴¹⁾ Відмітимо, що частота зрізу ФНЧ Чебишева 1 роду, на відмінність від фільтрів Баттерворта, визначається не за рівнем $1/\sqrt{2}$, а за рівнем пульсацій $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ в смузі пропускання (Lam, H.Y-F. *Analog and Digital Filters: Design and Realization*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1979).

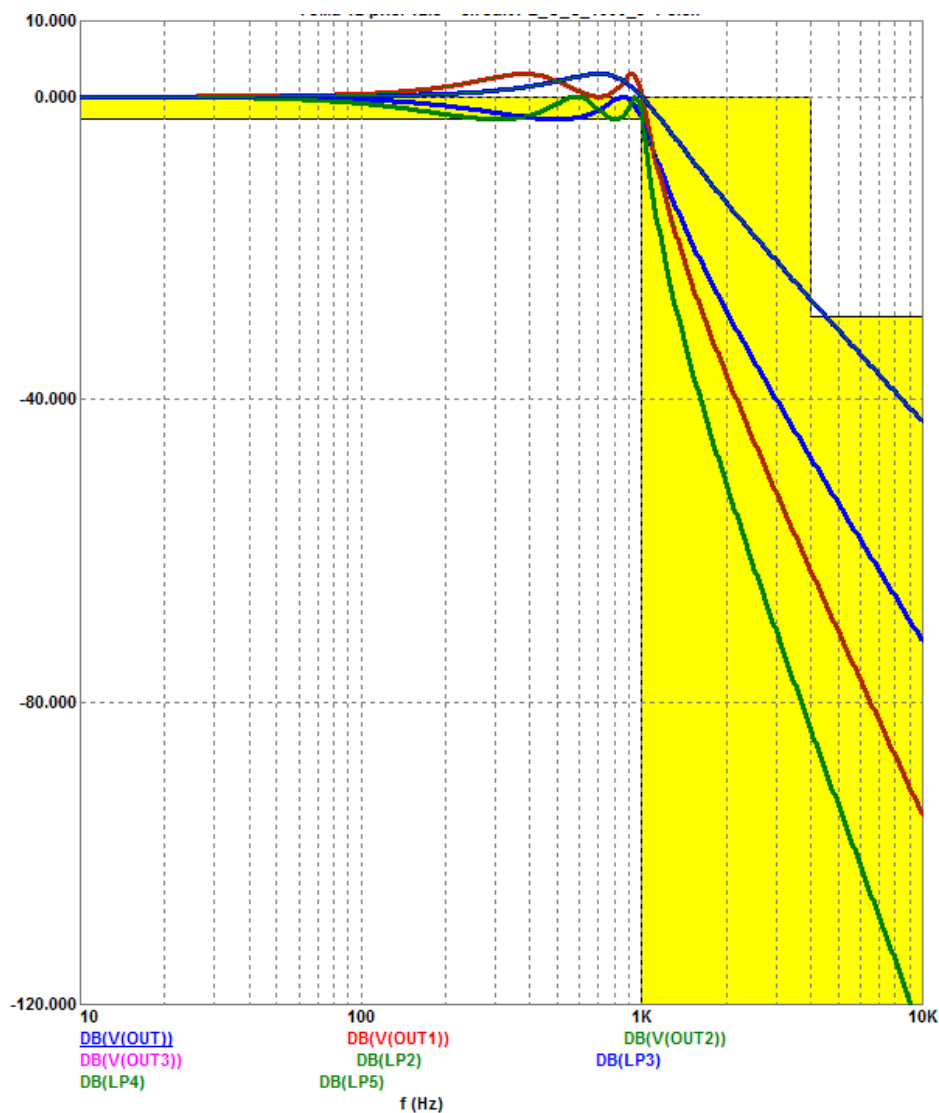


Рис. В.3. Нормовані характеристики фільтра Чебишева 1-го роду 2, 3, 4 та 5-го порядків з рівнем пульсацій в смузі пропускання 3 дБ (побудовані в середовищі Micro-CAP)

Поза смугою пропускання за великих $|\Omega| \gg 1$, коли $\varepsilon^2 T_n^2(\Omega) \gg 1$, передаточна функція монотонно зменшується за законом:

$$A(\Omega) \approx \frac{1}{\varepsilon \cdot |T_n(\Omega)|}. \quad (\text{В.6})$$

Вибір порядку фільтра

Виходячи з R_p (рівень пульсацій в дБ) або ε – параметр, який визначає нерівномірність АЧХ в смузі пропускання, а також виходячи з потрібного

послаблення сигналу a_0 (або загасання) починаючи з деякої частоти $\Omega_s = \omega_s/\omega_c$ в смузі затримки, за формулою (В.6) визначається порядок фільтра.

Приклад 1

Нехай фільтр Чебишева 3-го порядку на частоті зрізу забезпечує послаблення потужності в два рази, тобто як фільтр Баттерворта. Визначити послаблення на частоті, в три рази більшій за частоту зрізу.

Передусім знайдемо параметр ε . Як виходить з (В.3) $T_n(1) = 1$ при кожному n . Тому, якщо $K_p(\Omega) = |G(j\Omega)|^2 = 1/2$ (або $A(\Omega) = 1/\sqrt{2}$), то параметр $\varepsilon = 1$. Поліном Чебишева 3-го порядку $T_3(x) = 4x^3 - 3x$. Звідси послаблення на частоті $\Omega = 3$ складе $\Delta a_{\text{Ch}} = 10 \lg \left[1/(1 + 1 \cdot 99^2) \right] = -39,9 \text{ dB}$.

Фільтр Баттерворта 3-го порядку за аналогічних умов дає послаблення $\Delta a_{\text{But}} = 10 \lg \left[1/(1 + 3^{2 \cdot 3}) \right] = -28,6 \text{ dB}$.

* * *

Полюси та нормована передатна функція прототипу

Визначимо полюси передатної функції фільтра Чебишева з рівняння:

$$|K(\hat{s})|^2 = K(\hat{s})K(-\hat{s})_{/\hat{s}=j\Omega} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)}. \quad (\text{В.7})$$

Отже, функція (В.25) не має нулів. Полюси (В.25) є розв'язки рівняння:

$$1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega) = 0 \Rightarrow T_n(\Omega) = \frac{j}{\varepsilon},$$

де $\Omega = -j\hat{s}$. Полюси (В.7) розраховуються за формулою:

$$\hat{s}_{p_k} = -\text{sh}(v_0) \cdot \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] + j \cdot \text{ch}(v_0) \cdot \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \quad k = 1, 2, \dots, 2n \quad (\text{В.8})$$

або як

$$\hat{s}_{p_k} = \text{sh}(v_0) \cdot \hat{\sigma}_{p\text{But}_k} + j \cdot \text{ch}(v_0) \cdot \hat{\omega}_{p\text{But}_k},$$

якщо відомі полюси $\hat{s}_{p_k} = \hat{\sigma}_{p_{But_k}} + j \cdot \hat{\omega}_{p_{But_k}}$ відповідного фільтра Баттерворта того ж порядку і з тією ж частотою зрізу, де

$$v_0 = \frac{1}{n} \cdot \text{Arsh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right). \quad (\text{B.9})$$

Вибираємо ті полюси, які розташовані в лівій \hat{s} – півплощині ($k = 1, 2, \dots, n$).

Отримавши координати полюсів, можна записати вираз для передатної функції нормованого ФНЧ:

$$K(\hat{s}) = \frac{c_n}{\prod_{k=1}^n (\hat{s} - \hat{s}_{p_k})} = \frac{c_n}{\hat{s}^n + c_1 \hat{s}^{n-1} + \dots + c_n}. \quad (\text{B.10})$$

На відмінність від фільтрів Баттерворта, коефіцієнт c_n не дорівнює одиниці, бо полюси фільтрів Чебишева 1-го роду розташовані не на окружності, а на *еліпсі*⁴²⁾. Тому в чисельник вводиться коефіцієнт c_n для *нормування АЧХ до одиниці при $\omega = 0$* (відповідно $\hat{s} = 0$)

Порядок розрахунку фільтрів Чебишева 1-го роду

1. Задаються вимоги до нормованого НЧ-прототипу за допустимим відхиленням АЧХ в смузі пропускання і затримки, Ω_s – гранична частота смуги затримки (частота зрізу завжди $\Omega_c = 1$).

2. Розраховується параметр ε відповідно до (В.4).

3. Визначається порядок фільтра n відповідно до (В.6), із врахуванням ε і мінімально допустимого затухання $a_0 > 0$ (чи послаблення) в смузі затримки $\Omega_s \leq \Omega \leq \infty$.

⁴²⁾ Числові значення коефіцієнтів c_1, c_2, \dots, c_n , а також полюсів $\hat{s}_{p1}, \hat{s}_{p2}, \dots, \hat{s}_{pn}$ в залежності від порядку n і від коефіцієнта нерівномірності ε наведено у спеціальній літературі по розрахунку фільтрів.

4. Розраховуються полюси нормованого НЧ-прототипу \hat{s}_{pk} за формулою (В.26) та визначається передатна функція нормованого фільтра.

5. Потім роблять денормування за частотою та перехід до фільтра заданого типу.

6. За знайденою передатною функцією фільтра розраховується його електрична схема .

Приклад 2

Синтезувати фільтр Чебишева за наступними параметрами: нерівномірність в смузі пропускання 3 дБ, затухання при $\Omega = \omega/\omega_c = 4$ – не менше 30 дБ.

Отже, за формулою (В.4) $\varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} = 0,9976$, вибираємо $\varepsilon = 1$.

Далі за формулою (В.6) знайдемо потрібне значення порядку фільтра:

$$|T_n(\Omega)| = |T_n(4)| \geq \frac{1}{\varepsilon \cdot A(4)}.$$

Послабленню на 30 дБ відповідає наступне зменшення АЧХ:

$$20 \lg A(\Omega) = -30 \Rightarrow A(\Omega) = 10^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 1/32.$$

При максимальному значенні АЧХ, рівному одиниці, одержимо наступні умови для визначення порядку полінома Чебишева:

$$|T_n(4)| \geq 32.$$

Якщо перебирати поліноми перших трьох ступенів, визначимо, що поліном другого ступеня при $\Omega = 4$, тобто

$$T_2(4) = 2\Omega^2 - 1 = 31,$$

забезпечує потрібну швидкість спадання АЧХ у смузі затримки. Далі, використовуючи формули (В.8) і (В.9), дістанемо:

$$\nu_0 = \frac{1}{n} \cdot \text{Arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + 1}\right) = 0,441;$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_{p1} &= -\text{sh}(0,441) \cdot \sin\left[\frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 2} \cdot \pi\right] + j \cdot \text{ch}(0,441) \cdot \cos\left[\frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 2} \cdot \pi\right] = \\ &= -0,322 + j \cdot 0,777; \quad \hat{s}_{p2} = \hat{s}_{p1}^* = -0,322 - j \cdot 0,777.\end{aligned}$$

Що збігається з полюсами, які дає розрахунок у середовищі Micro-CAP для фільтрів 2-го порядку. Отже, передатна функція фільтра за формулою (В.10) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}K(\hat{s}) &= \frac{c_2}{(\hat{s} - \hat{s}_{p1})(\hat{s} - \hat{s}_{p2})} = \frac{c_2}{\hat{s}^2 - 2\text{Re}[\hat{s}_{p1}]\hat{s} + |\hat{s}_{p1}|^2} = \\ &= \frac{c_2}{\hat{s}^2 + c_1\hat{s} + c_2} = \frac{0,708}{\hat{s}^2 + 0,645\hat{s} + 0,708}; \quad \Rightarrow c_1 = 0,645; c_2 = 0,708.\end{aligned}$$

* * *

Денормування за частотою

Далі денормуємо за формулою $\hat{s} = s/\omega_c$, де $\omega_c = 2\pi f_c$ – потрібна частота зрізу, і переходимо до функції $K(s)$, за якої можна розраховувати електричну схему фільтра:

$$\begin{aligned}K(s) &= \frac{c_2}{(s/\omega_c - \hat{s}_{p1})(s/\omega_c - \hat{s}_{p2})} = \frac{c_2}{(s/\omega_c)^2 + c_1 \cdot (s/\omega_c) + c_2} = \\ &= \frac{0,708\omega_c^2}{s^2 + 0,645\omega_c s + 0,708\omega_c^2}.\end{aligned}\tag{B.11}$$

Розрахунок електричної схеми фільтра

Приклад 3

Вибираємо відому структуру Саллена і Кея, що на рис. В.4. Системна функція схеми дорівнює:

$$H(s) = \frac{K_{01}/C_1C_2R_1R_2}{s^2 + [1/C_1R_1 + 1/C_1R_2 + 1/C_2R_2 - K_{01}/C_2R_2] \cdot s + 1/C_1C_2R_1R_2}.\tag{B.12}$$

Порівнюючи знаменники у виразах (В.11) і (В.12), дістанемо:

$$1/C_1R_1 + 1/C_1R_2 + 1/C_2R_2 - K_{01}/C_2R_2 = c_1\omega_c = 0,645\omega_c;$$

$$1/C_1C_2R_1R_2 = c_2\omega_c^2 = 0,708\omega_c^2.$$

Звідси, задаючи $\omega_c = 1/C_2 R_2$, з другого рівняння дістанемо:

$$1/C_1 R_1 = c_2 \omega_c = 0,708 \omega_c.$$

З першого рівняння дістанемо:

$$\begin{aligned} 1/C_1 R_1 + C_2/C_1 C_2 R_2 + 1/C_2 R_2 - K_{01}/C_2 R_2 &= c_1 \omega_c = 0,645 \omega_c \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,708 + C_2/C_1 + 1 - K_{01} &= c_1 = 0,645 \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{01} &= 0,708 + C_2/C_1 + 1 - c_1 = 0,708 + C_2/C_1 + 1 - 0,645. \end{aligned}$$

Також задаючи $C_2/C_1 = 0,4$, матимемо:

$$K_{01} = 0,708 + C_2/C_1 + 1 - 0,645 = 0,708 + 0,4 + 1 - 0,645 = 1,463.$$

Нехай частота зрізу $f_c = 1000$ Гц ($\omega_c = 2\pi f_c$). Вибираємо $C_2 = 0,1$ мкФ.

Тоді дістанемо:

$$C_1 = C_2/0,4 = 0,25 \text{ мкФ}; \quad R_2 = 1/2\pi f_c C_2 \approx 1591 \text{ Ом};$$

$$R_1 = 1/(0,708 C_1 2\pi f_c) \approx 899 \text{ Ом}.$$

Вибираємо $R_3 = 10$ кОм, тоді резистор у зворотному зв'язку ОП дорівнюватиме:

$$R_4 = R_3(K_{01} - 1) = R_3(1,463 - 1) = R_3 \cdot 0,463 = 4,63 \text{ кОм}.$$

Але на постійному струмі, коли $\omega = 0$, коефіцієнт підсилення буде дорівнювати:

$$K(0) = K_{01} = 1,463.$$

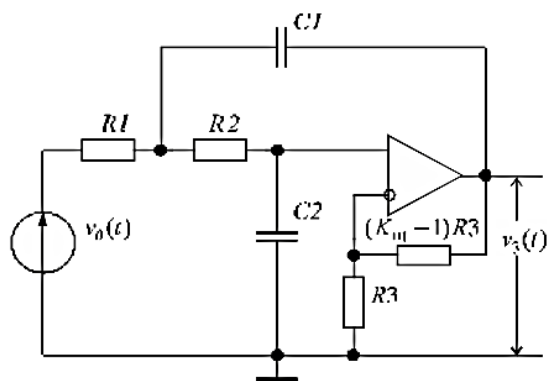
Отже, на базі однієї і тієї ж схеми, змінюючи трохи K_{01} , R_1, R_2 або C_1, C_2 , можна перейти від фільтра Баттерворта до фільтра Чебишева.

Аналіз в середовищі Mathcad

На рис. В.4 – рис. В.6 наведено фрагменти документів Mathcad, які ілюструють розрахунок електричної схеми відповідного ФНЧ та його характеристик. Як бачимо, викид на перехідній характеристиці зростає у порівнянні з фільтром Баттерворта.

Приклад 4

Розрахунок електричної схеми за параметрами моделі кола



системна функція ФНЧ
Чебишева 1-го роду 2-го порядку

$$K(s) = \frac{0,708\omega_c^2}{s^2 + 0,645\omega_c s + 0,708\omega_c^2}$$

- системна функція ФНЧ за структурою Саллена і Кея

$$H(s) := \frac{\frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2} \cdot K01}{s^2 + \left(\frac{1}{C1 \cdot R1} + \frac{1}{R2 \cdot C2} + \frac{1}{R2 \cdot C1} - \frac{K01}{R2 \cdot C2} \right) \cdot s + \frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2}}$$

Прирівнюючи знаменники в виразах, отримаємо рівняння, з яких можна визначити параметри елементів схеми

$$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot 1000 \quad \omega_c = 6.283 \times 10^3$$

Given

- система рівнянь

$$\frac{1}{C1 \cdot R1} + \frac{1}{R2 \cdot C2} + \frac{1}{R2 \cdot C1} - \frac{K01}{R2 \cdot C2} = 0.645 \cdot \omega_c \quad 0.708 \cdot \omega_c^2 = \frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2} \quad \omega_c = \frac{1}{R2 \cdot C2}$$

$$C2 = 0.1 \cdot 10^{-6} \quad \frac{C2}{C1} = 0.4$$

- розв'язок

$$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ R1 \\ R2 \\ K01 \end{pmatrix} := \text{Find}(C1, C2, R1, R2, K01) \text{ float, 4} \rightarrow \begin{pmatrix} 2.500 \cdot 10^{-7} \\ 1.000 \cdot 10^{-7} \\ 899.2 \\ 1592. \\ 1.463 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ R1 \\ R2 \\ K01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.500 \times 10^{-7} \\ 1.000 \times 10^{-7} \\ 899.200 \\ 1.592 \times 10^3 \\ 1.463 \end{pmatrix}$$

$$R3 := 10 \cdot 10^3 \quad R4 := R3 \cdot (K01 - 1) = (4.630 \times 10^3)$$

Далі, за системною функцією побудуємо частотні характеристики

$$H(s) := \frac{\frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2} \cdot K01}{s^2 + \left(\frac{1}{C1 \cdot R1} + \frac{1}{R2 \cdot C2} + \frac{1}{R2 \cdot C1} - \frac{K01}{R2 \cdot C2} \right) \cdot s + \frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot R2 \cdot C2}} \text{ float, 3} \rightarrow \frac{4.09 \cdot 10^7}{(s^2 + 4.05 \cdot 10^3 \cdot s + 2.79 \cdot 10^7)^1}$$

Рис. В.4. Схема ФНЧ з додатним зворотним зв'язком (структура Саллена і Кея)

Приклад 5

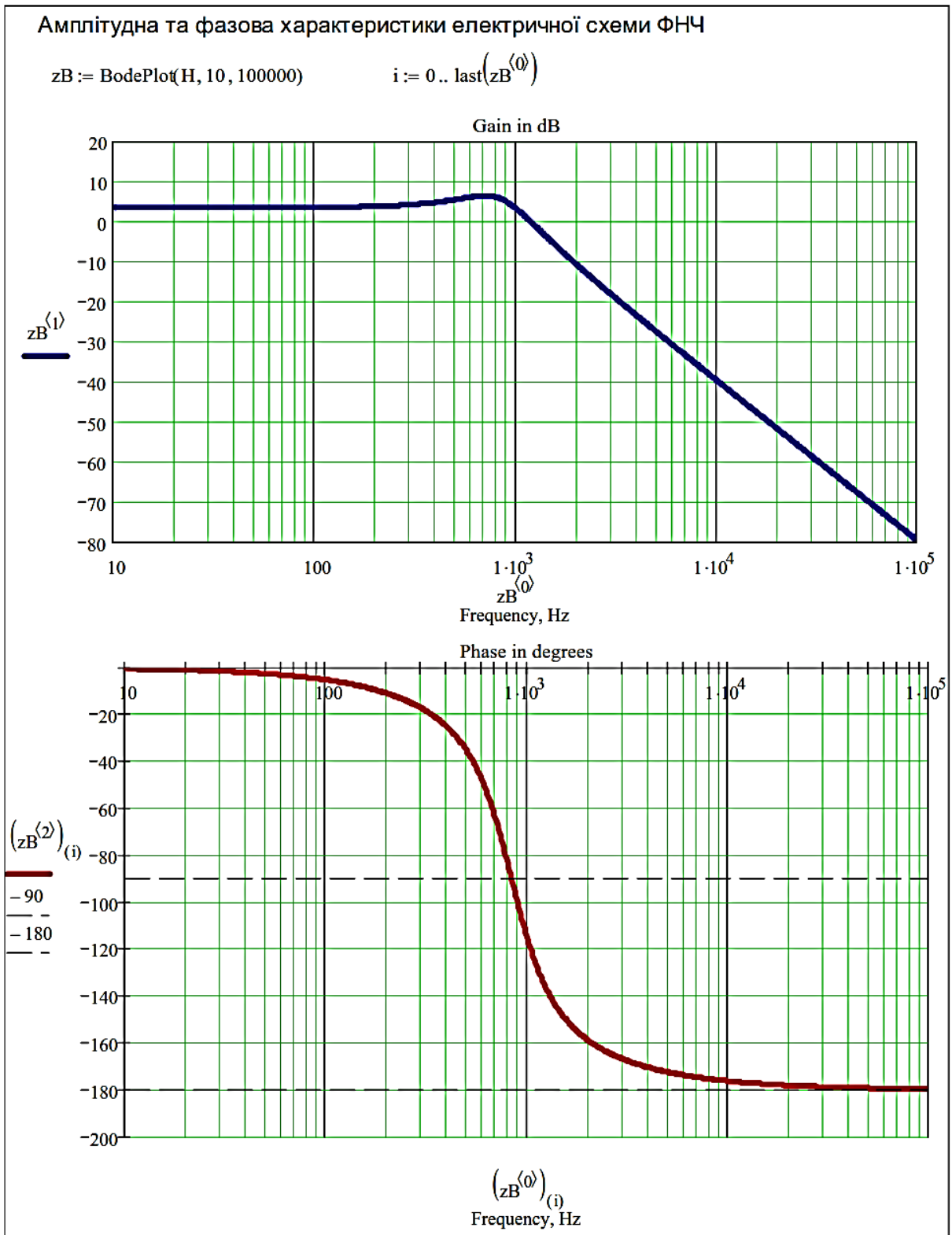


Рис. В.5. Частотні характеристики розрахованої електричної схеми ФНЧ Чебишева

Приклад 6

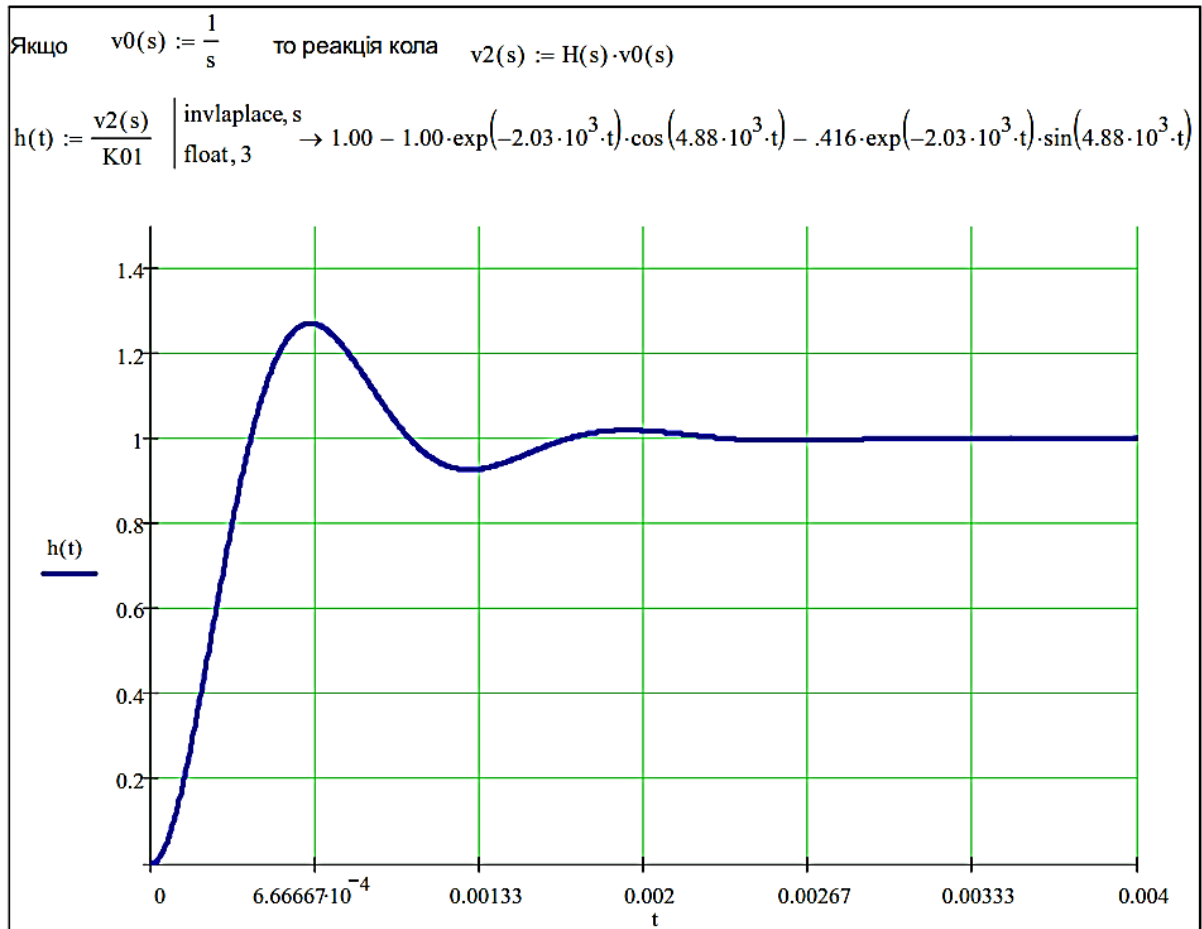


Рис. В.6. Викид і "дзвін" на вершині перехідної характеристики фільтра Чебишева 2-го порядку значні

Основні властивості фільтрів Чебишева 1-го роду

- фільтри Чебишева 1-го роду мають рівнохвильову нерівномірність у смузі пропускання, але більшу крутизну спадання АЧХ у перехідній зоні ніж у фільтрів Баттерворта;
- фільтри Чебишева використовуються тоді, коли потрібна значна швидкість спадання зовні смузі пропускання і не пред'являються жорсткі вимоги до спотворень АЧХ (в смузі пропускання);
- за рахунок більшої нелінійності ФЧХ фільтрів Чебишева у смузі пропускання, викид та "дзвін" на вершині перехідної характеристики значно більше у порівнянні з фільтрами Баттерворта.

Серед всіх поліноміальних фільтрів Чебишевські фільтри мають *найкращі селективні властивості за частотою*, проте, коли треба зменшити спотворення форми сигналів, то фільтри Баттерворта ліпші.

Контрольні запитання та завдання

1. *Які переваги мають активні RC-фільтри, якщо їх порівнювати з фільтрами на пасивних RLC-елементах?*
2. *Які переваги мають пасивні RLC-фільтри?*
3. *За якою формулою визначаються поліноми Чебишева? Вкажіть основні властивості поліномів Чебишева.*
4. *Який вигляд має нормована функція АЧХ фільтрів Чебишева 1-го роду?*
5. *Наведіть процедуру синтезу фільтрів Чебишева 1-го роду.*
6. *Як визначити порядок фільтру Чебишева за вимогами до АЧХ?*
7. *Як знайти полюси нормованої передатної функції фільтра-прототипу Чебишева за відомим порядком фільтру?*
8. *Як за відомими полюсами одержати передатну функцію фільтру, яка би відповідала моделям типових ланок електричних кіл другого і першого порядків на операційних підсилювачах?*
9. *Як здійснюється денормування передатної функції фільтру-прототипу за частотою і коефіцієнтом передачі на нульовій частоті?*
10. *Наведіть приклад розрахунку елементів електричної схеми ФНЧ Чебишева другого порядку (структура Саллена і Кея або структура Рауха) за математичною моделлю передатної функції синтезованого фільтру.*
11. *Назвіть основні властивості фільтрів Чебишева 1-го роду.*
12. *Поясніть процедуру синтезу активних фільтрів у середовищі програми Micro-CAP.*

Додаток Д. Синтез ФНЧ n – порядку. Перетворення типу фільтрів

Синтез ФНЧ n -порядку. Денормування (масштабування) за частотою та перетворення типу фільтрів. Перетворення НЧ-прототипу в ФВЧ. Перетворення НЧ-прототипу в СФ. Перетворення НЧ-прототипу в ЗФ. Перетворення в середовищі Mathcad. Визначення граничних частот Ω_c , Ω_s нормованого НЧ-прототипу за частотами фільтрів, які синтезуються. Моделювання фільтрів n -порядку в середовищі Micro-CAP. Контрольні запитання та завдання.

Синтез ФНЧ n – порядку

Фільтри n – порядку зручно будувати на базі активних каскадів на ОП. Невеликий вихідний опір схем на ОП, на відмінність від структур на основі пасивних LC – елементів, дозволяє вважати окремі каскади *незалежними* один від одного, знехтувати залежністю передатних функцій окремих ланок від навантаження. Тоді кожний окремий каскад реалізує один з співмножників, на які може бути розбита передатна функція всього фільтра. Зазвичай – це передатні функції першого і другого порядків.

Отже, *каскадування* дозволяє звести задачу синтезу ФНЧ n – порядку у вигляді складного чотиріполюсника до синтезу простих ланок першого і другого порядків. Інакше треба реалізовувати весь вираз

$$K(\hat{s}) = \frac{c_n}{\prod_{k=1}^n (\hat{s} - \hat{s}_{p_k})} = \frac{c_n}{\hat{s}^n + c_1 \hat{s}^{n-1} + \dots + c_n}$$

однією електричною схемою відразу.

Приклад 1

Розрахувати фільтр Баттерворта, якщо коефіцієнт підсилення на постійному струмі $|K(0)| = 10$, тобто $K_0 = 10$; частота зрізу смуги пропускання $f_c = 1000$ Гц; гранична частота смуги затримки $f_s = 3000$ Гц; мінімальне послаблення в смузі затримки $a_0 = -40$ дБ ($\delta_2 = 0,01$).

Отже, нормовані частоти $\Omega_c = 1$, $\Omega_s = 3$. Для $a_0 = -40$ дБ і $\Omega_s = 3$ порядок $n \geq 40/20 \cdot \lg 3 = 4,19181$, вибираємо $n = 5$. Нормована передатна функція ФНЧ Баттерворта 5-го порядку:

$$K(\hat{s}) = \frac{K_0}{(\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 0,618\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 1,618\hat{s} + 1)}. \quad (Д.1)$$

Ураховуючи $\hat{s} = s/\omega_c$, денормуємо передатну функцію (30):

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{K_0}{(s/\omega_c + 1)[(s/\omega_c)^2 + 0,618(s/\omega_c) + 1][(s/\omega_c)^2 + 1,618(s/\omega_c) + 1]} = \\ &= K_0 \frac{\omega_c}{(s + \omega_c)} \cdot \frac{\omega_c^2}{(s^2 + 0,618\omega_c s + \omega_c^2)} \cdot \frac{\omega_c^2}{(s^2 + 1,618\omega_c s + \omega_c^2)}. \end{aligned}$$

Вибираємо схему (рис. Д.1) з двох типових ланок 2-го порядку за схемою Саллена і Кея та однієї ланки 1-го порядку:

$$H_i(s) = \frac{K_{0i} \cdot \frac{1}{C^2 R^2}}{s^2 + \frac{(3 - K_{0i})}{CR} s + \frac{1}{C^2 R^2}}, \quad i = 1, 2; \quad H_3(s) = \frac{K_{03} \cdot (1/CR)}{s + 1/CR}.$$

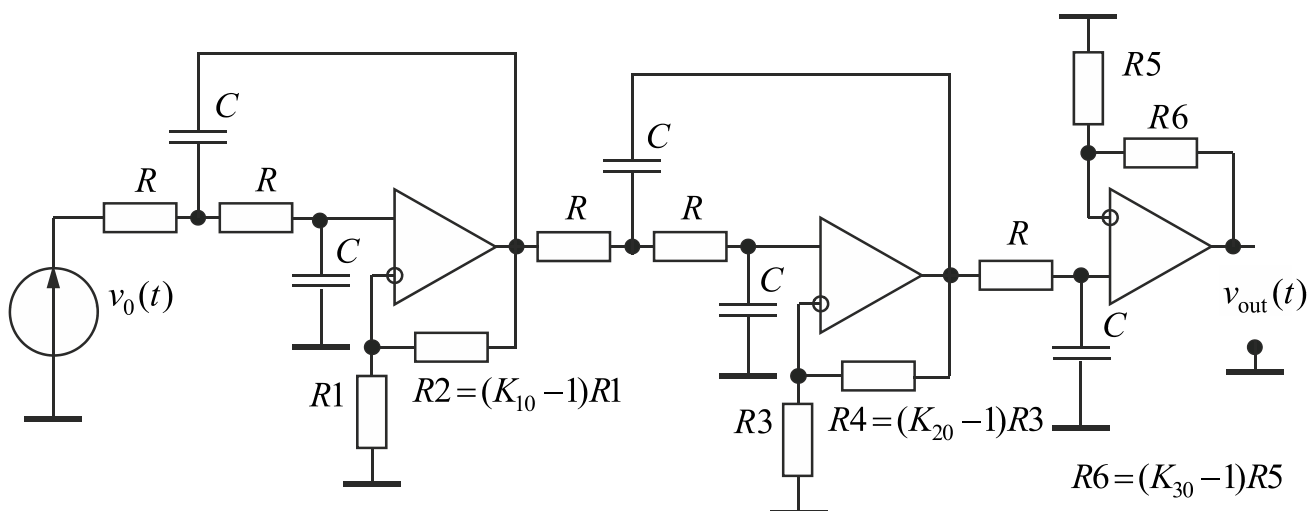


Рис. Д.1. ФНЧ п'ятого порядку

Отже, дістанемо систему рівнянь:

$$\omega_c = 2\pi f_c = 1/CR.$$

$$3 - K_{01} = 0,618;$$

$$3 - K_{02} = 1,618.$$

Звідси дістанемо $K_{01} = 2,382$; $K_{02} = 1,382$.

Якщо $K_0 = K_{01} \cdot K_{02} \cdot K_{03} = 10 \Rightarrow K_{03} = 10/(2,382 \cdot 1,382) \approx 3,038$.

Якщо $C = 0,01$ мкФ, то $R = 1/C2\pi f_c = 1/(0,01 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 1000) \approx 15,9$ кОм.

Для операційних підсилювачів $\mu 741$ у схемі зі зворотним зв'язком за вказаних значень K_{0i} , частота зрізу $f_c = 1000$ Гц потрапляє у смугу пропускання. Так смуга пропускання першого каскаду зі зворотним зв'язком з коефіцієнтом передачі K_{01} за рівнем -3 дБ буде:

$$\Delta f_{-3\text{дБ}} = \frac{\omega_1}{2\pi K_{01}} = \frac{7,6 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 3} \approx 400 \cdot 10^3 \text{ Гц.}$$

Примітка. Вибір значень опору резисторів $R1 - R6$ у кожному з каскадів є досить довільним. Але для симетрії входів операційних підсилювачів за постійним струмом зазвичай опори резисторів обирають за умовою: $R1 \parallel R2 = 2R$, $R3 \parallel R4 = 2R$ – у перших двох каскадах; $R5 \parallel R6 = R$ – в останньому каскаді. У цьому випадку початкові струми вхідних транзисторів операційних підсилювачів не викликають зміщення нуля вихідної напруги каскадів.

* * *

Денормування (масштабування) за частотою та перетворення типу фільтрів

Знайдені раніше передатні функції відповідали нормованим фільтрам (нормований НЧ-прототип) із передатним коефіцієнтом 0 дБ у смузі пропускання і граничною частотою 1 рад/с.

Масштабування за коефіцієнтом передачі. Масштабування за коефіцієнтом передачі в смузі пропускання відбувається множенням передатної функції на потрібний коефіцієнт.

Масштабування за частотою. Перетворення НЧ-прототипу \rightarrow ФНЧ. Зміна частоти зрізу нормованого НЧ-прототипу зводиться до простого масштабування частотній осі та відбувається наступною заміною змінної \hat{s} у виразу для передатної функції:

$$\hat{s} \rightarrow s/\omega_{c_{\text{НЧ}}},$$

де $\omega_{c_{\text{НЧ}}} = 2\pi f_{c_{\text{НЧ}}}$ – потрібна частота зрізу ФНЧ.

Передатна функція "розтягується" або "стягується" таким чином: те, що відбувалося на частоті $\Omega_{\text{нч}} = 1 \text{ рад/с}$, тепер відбувається з нею на частоті $\omega/\omega_{\text{нч}} = 1 \text{ рад/с}$, тобто, коли $\omega = \omega_{\text{нч}}$.

Перетворення типу фільтрів

1. Перетворення НЧ-прототипу \rightarrow ФВЧ

Перетворення НЧ-прототипу в фільтр верхніх частот (ФВЧ) потребує інверсії частотній осі та виконується шляхом наступної заміни змінної \hat{s} у виразу для передатної функції прототипу (з урахуванням нормування за частотою):

$$\hat{s} = s/\omega_{\text{нч}} \rightarrow (\text{ФНЧ в ФВЧ}) \rightarrow \omega_{\text{вч}}/s.$$

При цьому одержимо передатну функцію ФВЧ, що має такий самий коефіцієнт передачі на частоті $\omega_{\text{вч}}$, як нормований НЧ-прототип на частоті $\Omega_{\text{нч}} = 1 \text{ рад/с}$ (або як ненормований ФНЧ на частоті $\omega_{\text{нч}}$).

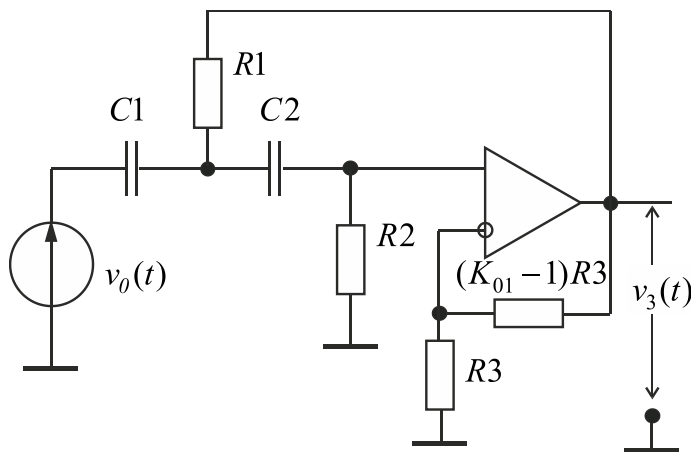


Рис. Д.2. Дуальний ФВЧ за структурою Селлена і Кея

2. Перетворення НЧ-прототипу \rightarrow СФ

Перетворення потребує більш складної трансформації частотній осі. Так, нульова та нескінченна частоти на частотній осі СФ повинні перетворюватися у нескінченні значення на частотній осі нормованого НЧ-прототипу, там, де його коефіцієнт передачі прагне до нуля. Частоти, які відповідають границям

потрібної смуги пропускання, повинні після перетворення давати значення ± 1 , які дорівнюють частоті зрізу нормованого НЧ-прототипу. Крім того, перетворення повинно виконуватися за допомогою дробово-раціональної функції, щоб зберегти дробово-раціональну структуру функції передачі.

Отже, заміна при переході від нормованого НЧ-прототипу наступна:

$$\hat{s} = s/\omega_{\text{нч}} \rightarrow (\text{ФНЧ в СФ}) \rightarrow \frac{(s^2 + \omega_{0\text{сф}}^2)}{\Delta\omega_{\text{сф}} \cdot s}.$$

де $\omega_{0\text{сф}}$ – центральна частота смуги пропускання СФ:

$$\omega_{0\text{нч}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}} \text{ або } \omega_{0\text{нч}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}}.$$

Причому формули мусять давати однакові значення центральної частоти $\omega_{0\text{сф}}$, тобто повинні виконуватися умови *геометричної симетрії*:

$$\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}} = \omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}.$$

На практиці звичайно $\omega_{0\text{сф}}$ розраховують за формулою $\omega_{0\text{сф}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}}$, не змінюючи смугу пропускання СФ. Параметр $\Delta\omega_{\text{сф}} = \omega_{\text{с2}} - \omega_{\text{с1}}$ – ширина смуги пропускання; $\omega_{\text{с1}}$, $\omega_{\text{с2}}$ – відповідно нижня та верхня частоти зрізу смуги пропускання фільтра.

Отже, одержаний фільтр буде мати ті ж самі значення коефіцієнта передачі на частотах $\omega_{\text{с1}}$ і $\omega_{\text{с2}}$, як нормований НЧ-прототип на частоті $\Omega_{\text{нч}} = 1$ рад/с або як ненормований ФНЧ на частоті $\omega_{\text{с1}}$. Відповідне перетворення частот зображене на рис. 3.

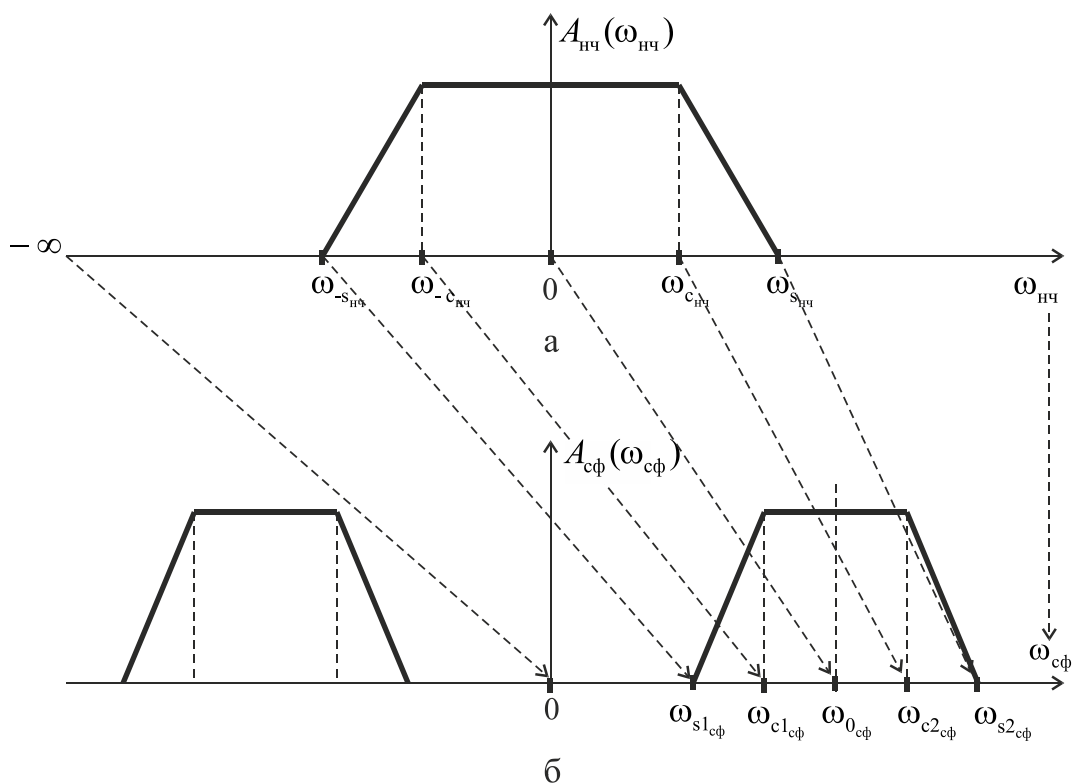


Рис. Д.3. Перетворення частот ненормованого ФНЧ-прототипу (а) в частоти СФ (б)

Примітка: перетворення ФНЧ – СФ подвоює порядок фільтра.

3. Перетворення НЧ-прототипу \rightarrow ЗФ

Перетворення потребує зворотній трансформації частотній осі, ніж у попередньому випадку. Так, нульова та нескінченна частоти на частотній осі ЗФ повинні перетворюватися у нульове значення на частотній осі ФНЧ-прототипу, там, де його коефіцієнт передачі великий. Частоти, які відповідають границям потрібної смуги затримки, повинні після перетворення давати значення ± 1 , які дорівнюють частоті зрізу нормованого НЧ-прототипу. Крім того, певне значення частоти у смузі затримки повинно перетворюватися у нескінченність, там, де коефіцієнт передачі нормованого НЧ-прототипу прагне до нуля. Перетворення повинно виконуватися за допомогою дробово-раціональної функції, щоб зберегти дробово-раціональну структуру функції передачі.

Отже, заміна при переході від нормованого НЧ-прототипу наступна:

$$\hat{s} = s/\omega_{\text{НЧ}} \rightarrow (\text{ФНЧ в ЗФ}) \rightarrow \frac{\Delta\omega_{\text{ЗФ}} \cdot s}{(s^2 + \omega_{0\text{ЗФ}}^2)},$$

де $\omega_{0\text{ЗФ}}$ – центральна частота смуги затримки:

$$\omega_{0\text{ЗФ}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}} \text{ або } \omega_{0\text{ЗФ}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}}.$$

Причому формули мусять давати однакові значення центральної частоти $\omega_{0\text{ЗФ}}$, отже, як і в попередньому випадку, повинні виконуватися умови *геометричної симетрії*:

$$\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}} = \omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}.$$

На практиці звичайно $\omega_{0\text{ЗФ}}$ розраховують за формулою $\omega_{0\text{ЗФ}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}}$, не змінюючи смугу затримки ЗФ.

Параметр $\Delta\omega_{\text{ЗФ}} = \omega_{\text{с2}} - \omega_{\text{с1}}$ – ширина смуги затримки; $\omega_{\text{с1}}$, $\omega_{\text{с2}}$ – відповідно частоти зрізу нижній та верхній смуг пропускання ЗФ.

Одержаний фільтр буде мати ті самі значення коефіцієнта передачі в смузі пропускання на частотах $\omega_{\text{с1}}$ і $\omega_{\text{с2}}$, як нормований НЧ-прототип на частоті $\Omega_{\text{сНЧ}} = 1$ рад/с або як ненормований ФНЧ на частоті $\omega_{\text{сНЧ}}$. Для частоти $\omega_{0\text{ЗФ}}$ значення передатної функції дорівнює нулю.

Примітка: перетворення ФНЧ – ЗФ подвоює порядок фільтра.

Перетворення в середовищі Mathcad

На рис. 4 – рис. 5 наведено фрагменти документів Mathcad, які ілюструють перетворення типу і частоти фільтрів.

Приклад 2

Перетворення типу, масштабування коефіцієнту і частоти фільтрів

Нормований ФНЧ-прототип - *Butterworth filter 2-го порядку* $j := \sqrt{-1}$

$$sp1 := \frac{-1}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad sp2 := \frac{-1}{\sqrt{2}} - j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$H(u) := \frac{1}{(u - sp1) \cdot (u - sp2)} \rightarrow \frac{1}{\left(u + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(u + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right)}$$

Перетворення нормованого ФНЧ-прототипу \Rightarrow
 Не нормований фільтр нижніх частот ФНЧ (*low-pass filter*)

$fc := 1000 \quad \omega_c := 2 \cdot \pi \cdot fc \quad \omega_c = 6.283 \times 10^3 \quad K0 := 10$

$$u := \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot fc}$$

$$HLPF(s) := K0 \cdot \frac{1}{(u - sp1) \cdot (u - sp2)} \rightarrow \frac{10}{\left(\frac{1}{2000} \cdot \frac{s}{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2000} \cdot \frac{s}{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right)}$$

Перетворення нормованого ФНЧ-прототипу \Rightarrow
 Фільтр верхніх частот ФВЧ (*high-pass filter*):

$$u := \frac{2 \cdot \pi \cdot fc}{s}$$

$$HNPF(s) := K0 \cdot \frac{1}{(u - sp1) \cdot (u - sp2)} \rightarrow \frac{10}{\left(2000 \cdot \frac{\pi}{s} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(2000 \cdot \frac{\pi}{s} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right)}$$

Перетворення нормованого ФНЧ-прототипу \Rightarrow
 Смуговий фільтр СФ (*band-pass filter*)

$f1 := 100 \quad f2 := 10000 \quad f0 := \sqrt{f1 \cdot f2} \quad \Delta f := f2 - f1 \quad K0 := 10$

$$u := \frac{s^2 + (2 \cdot \pi \cdot f0)^2}{\Delta f \cdot 2 \cdot \pi \cdot s} \quad HBPF(s) := K0 \cdot \frac{1}{(u - sp1) \cdot (u - sp2)}$$

$$HBPF(s) \rightarrow \frac{10}{\left[\frac{1}{19800} \cdot \frac{(s^2 + 4000000 \cdot \pi^2)}{\pi \cdot s} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right] \cdot \left[\frac{1}{19800} \cdot \frac{(s^2 + 4000000 \cdot \pi^2)}{\pi \cdot s} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right]}$$

Перетворення нормованого ФНЧ-прототипу \Rightarrow
 Загороджувальний фільтр ЗФ (*band-stop filter*)

$f1 := 100 \quad f2 := 10000 \quad f0 := \sqrt{f1 \cdot f2} \quad \Delta f := f2 - f1 \quad K0 := 10$

$$u := \frac{\Delta f \cdot 2 \cdot \pi \cdot s}{s^2 + (2 \cdot \pi \cdot f0)^2} \quad HBSF(s) := K0 \cdot \frac{1}{(u - sp1) \cdot (u - sp2)}$$

$$HBSF(s) \rightarrow \frac{10}{\left[19800 \cdot \pi \cdot \frac{s}{(s^2 + 4000000 \cdot \pi^2)} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right] \cdot \left[19800 \cdot \pi \cdot \frac{s}{(s^2 + 4000000 \cdot \pi^2)} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{2}\right]}$$

Рис. Д.4. Перетворення нормованого ФНЧ-прототипу в фільтр заданого типу, а також масштабування за коефіцієнтом і частотою

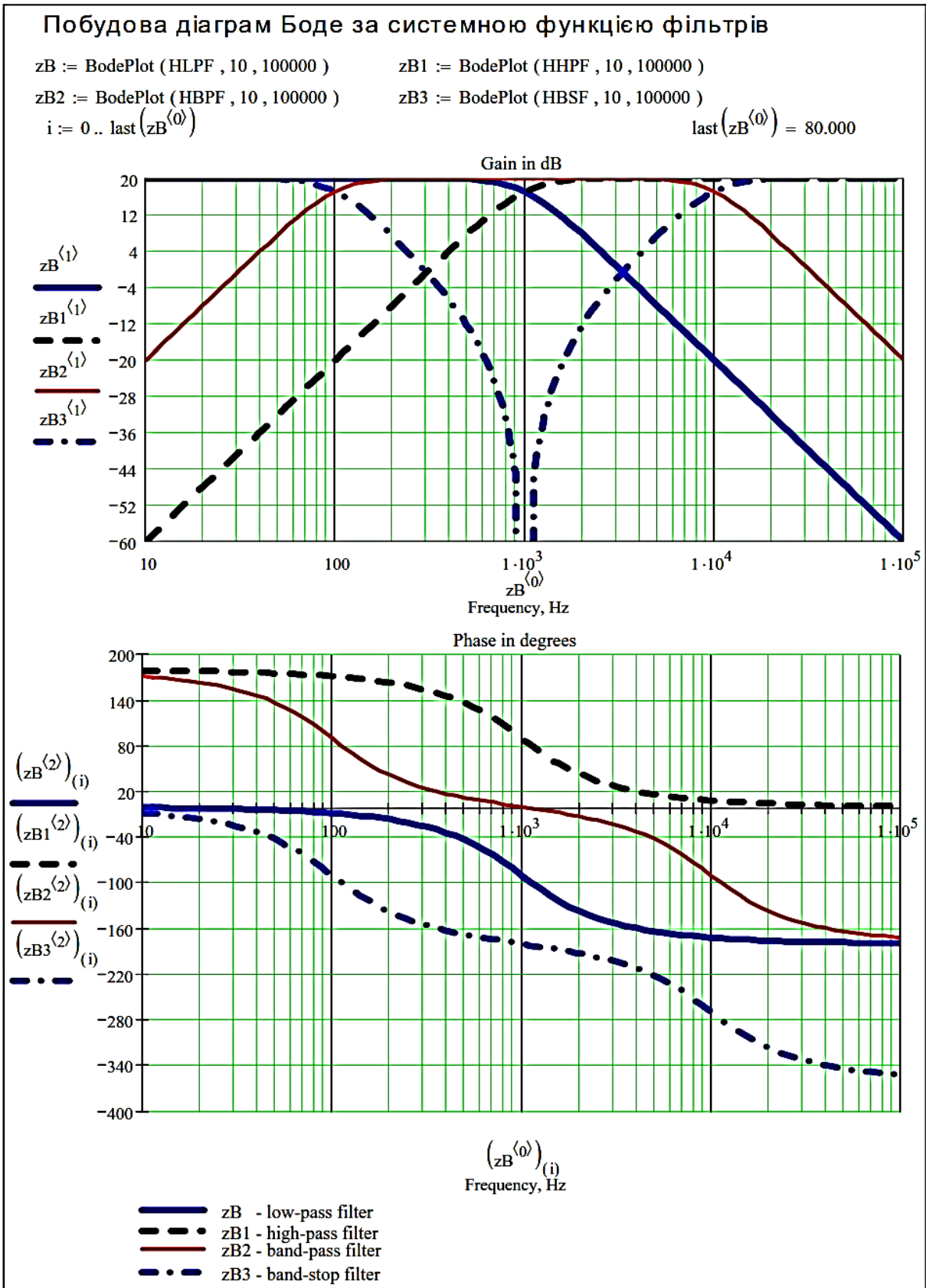


Рис. Д.5. Перетворення ФНЧ-прототипу в фільтр заданого типу, а також масштабування за коефіцієнтом і частотою (продовження)

Визначення граничних частот Ω_c , Ω_s нормованого НЧ-прототипу

Як було вказано раніше, розрахунок фільтра будь-якого типу здійснюється на основі відповідного йому нормованого НЧ-прототипу. Загальна процедура розрахунків наступна:

1. Граничні частоти $\omega_{s1}, \omega_{c1}, \omega_{c2}, \omega_{s2}$ фільтрів, які розраховуються, перетворюються у частоти $\omega_{c_{НЧ}}, \omega_{s_{НЧ}}$ ненормованого НЧ-прототипу.

2. Частоти $\omega_{c_{НЧ}}, \omega_{s_{НЧ}}$ за формулами (6), (7) перетворюються у частоти $\Omega_{c_{НЧ}}, \Omega_{s_{НЧ}}$ нормованого НЧ-прототипу:

$$\Omega_{s_{НЧ}} = \omega_{s_{НЧ}} / \omega_{c_{НЧ}} > 1, \quad \Omega_{c_{НЧ}} = \omega_{c_{НЧ}} / \omega_{c_{НЧ}} = 1.$$

3. Розраховується нормований НЧ-прототип за допустимими відхиленнями АЧХ в смугах пропускання і затримки та за вибраним методом її апроксимації. *Результатом розрахунку є нулі і полюси нормованого НЧ-прототипу. Будується передатна функція НЧ-прототипу.*

4. Здійснюється денормування за частотою та перетворення передатної функції НЧ-прототипу за типом у відповідний фільтр. *Результатом є нова передатна функція (нулі та полюси) фільтра, який синтезується.*

Отже, для синтезу відповідного фільтра потрібно визначити вимоги до НЧ-прототипу за частотами Ω_c і Ω_s .

Перетворення частот $\omega_{c_{НЧ}}, \omega_{s_{НЧ}}$ ФНЧ у відносні частоти $\Omega_{c_{НЧ}}, \Omega_{s_{НЧ}}$ нормованого НЧ-прототипу

Розрахунки частот нормованого НЧ-прототипу здійснюється за вже відомою формулою (5):

$$\Omega_{НЧ} = \omega / \omega_{c_{НЧ}},$$

яка відповідає перетворенню **НЧ-прототип** \rightarrow **ФНЧ**: $\hat{s} \rightarrow s / \omega_{c_{f \times}}$.

Отже, гранична частота смуги затримки нормованого НЧ-прототипу:

$$\Omega_{s_{НЧ}} = \omega_{s_{НЧ}} / \omega_{c_{НЧ}} > 1.$$

Частота зрізу нормованого НЧ-прототипу $\Omega_{\text{снч}} = \omega_{\text{снч}} / \omega_{\text{снч}} = 1$.

Перетворення частот $\omega_{\text{свч}}$, $\omega_{\text{снч}}$ ФВЧ у відносні частоти

$\Omega_{\text{снч}}$, $\Omega_{\text{снч}}$ нормованого НЧ-прототипу

Спочатку частоти $\omega_{\text{свч}}$, $\omega_{\text{снч}}$ ФВЧ перетворюється у частоти $\omega_{\text{снч}}$, $\omega_{\text{снч}}$ деякого ненормованого НЧ-прототипу (*інверсія частотної осі*):

$$\omega_{\text{снч}} = 1/\omega_{\text{свч}}, \quad \omega_{\text{снч}} = 1/\omega_{\text{свч}}.$$

Тоді гранична частота смуги затримки нормованого НЧ-прототипу дорівнюватиме:

$$\Omega_{\text{снч}} = \omega_{\text{снч}} / \omega_{\text{снч}} = \omega_{\text{свч}} / \omega_{\text{свч}} > 1.$$

Отже, розрахунки частот нормованого НЧ-прототипу здійснюється за формулою:

$$\Omega = \frac{\omega_{\text{свч}}}{\omega},$$

яка відповідає перетворенню **НЧ-прототип** \rightarrow **ФВЧ**: $\hat{s} \rightarrow \frac{\omega_{\text{свч}}}{s}$.

Частота зрізу нормованого НЧ-прототипу завжди $\Omega_{\text{снч}} = \omega_{\text{снч}} / \omega_{\text{снч}} = 1$.

Перетворення частот $\omega_{\text{с1}}$, $\omega_{\text{с2}}$, $\omega_{\text{с2}}$, $\omega_{\text{с2}}$ СФ у відносні

частоти $\Omega_{\text{снч}}$, $\Omega_{\text{снч}}$ нормованого НЧ-прототипу

Спочатку перетворюється верхня частота зрізу $\omega_{\text{с2сф}}$ СФ у частоту зрізу деякого ненормованого НЧ-прототипу:

$$\omega_{\text{снч}} = \frac{\omega_{\text{с2сф}}^2 - \omega_{\text{0сф}}^2}{\omega_{\text{с2сф}}},$$

де $\omega_{\text{0сф}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}}$ – центральна частота смуги пропускання СФ.

Примітка. Центральна частота смуги пропускання СФ розраховується за формулами:

$$\omega_{\text{0сф}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}} \quad \text{або} \quad \omega_{\text{0сф}} = \sqrt{\omega_{\text{с1}}\omega_{\text{с2}}}.$$

Формули повинні давати однакові значення центральної частоти $\omega_{0\text{CF}}$, тому повинна виконуватися умова геометричної симетрії $\omega_{c1}\omega_{c2} = \omega_{s1}\omega_{s2}$, але це не завжди так. Так як важливо зберегти задану смугу пропускання $\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$, то на практиці $\omega_{0\text{CF}}$ розраховується за частотами зрізу ω_{c1}, ω_{c2} смуги пропускання СФ, тобто за формулою $\omega_{0\text{CF}} = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$. За рахунок цього вони залишаються незмінними.

Розраховується гранична частота смуги затримки ненормованого НЧ-прототипу за формулами:

$$\omega_{s\text{НЧ}} = \frac{\omega_{s2\text{CF}}^2 - \omega_{0\text{CF}}^2}{\omega_{s2\text{CF}}} \quad \text{або} \quad \omega_{s\text{НЧ}} = \frac{\omega_{0\text{CF}}^2 - \omega_{s1\text{CF}}^2}{\omega_{s1\text{CF}}}$$

та вибирається найменша. Тоді хоч одна з перехідних смуг розрахованого СФ стане менше заданої, що допустимо, оскільки означає виконання вимог до фільтру із запасом.

Тоді гранична частота смуги затримки нормованого НЧ-прототипу дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} \Omega_{s\text{НЧ}} &= \omega_{s\text{НЧ}} / \omega_{c\text{НЧ}} = \\ &= \frac{\omega_{c2\text{CF}} (\omega_{s2\text{CF}}^2 - \omega_{0\text{CF}}^2)}{\omega_{s2\text{CF}} (\omega_{c2\text{CF}}^2 - \omega_{0\text{CF}}^2)} = \frac{(\omega_{s2\text{CF}}^2 - \omega_{0\text{CF}}^2)}{\omega_{s2\text{CF}} (\omega_{c2\text{CF}} - \omega_{c1\text{CF}})} = \frac{(\omega_{s2\text{CF}}^2 - \omega_{0\text{CF}}^2)}{\omega_{s2\text{CF}} \cdot \Delta\omega_{\text{CF}}} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \Omega_{s\text{НЧ}} &= \omega_{s\text{НЧ}} / \omega_{c\text{НЧ}} = \\ &= \frac{\omega_{c2\text{CF}} (\omega_{0\text{CF}}^2 - \omega_{s1\text{CF}}^2)}{\omega_{s1\text{CF}} (\omega_{c2\text{CF}}^2 - \omega_{0\text{CF}}^2)} = \frac{(\omega_{0\text{CF}}^2 - \omega_{s1\text{CF}}^2)}{\omega_{s1\text{CF}} (\omega_{c2\text{CF}} - \omega_{c1\text{CF}})} = \frac{(\omega_{0\text{CF}}^2 - \omega_{s1\text{CF}}^2)}{\omega_{s1\text{CF}} \cdot \Delta\omega_{\text{CF}}} \end{aligned}$$

Вибирається найменша.

Отже, розрахунки частот нормованого НЧ-прототипу відповідають перетворенню НЧ-прототип \rightarrow СФ: $\hat{s} \rightarrow \frac{(s^2 + \omega_{0\text{CF}}^2)}{\Delta\omega_{\text{CF}} \cdot s}$.

Частота зрізу нормованого НЧ-прототипу завжди $\Omega_{c\text{НЧ}} = \omega_{c\text{НЧ}} / \omega_{c\text{НЧ}} = 1$.

Перетворення частот $\omega_{s1}, \omega_{c1}, \omega_{c2}, \omega_{s2}$ ЗФ у відносні частоти $\Omega_{сНЧ}, \Omega_{sНЧ}$ нормованого НЧ-прототипу

Спочатку перетворюється верхня частота зрізу $\omega_{c23\Phi}$ ЗФ у частоту зрізу деякого ненормованого НЧ-прототипу:

$$\omega_{сНЧ} = \frac{\omega_{c23\Phi}}{\omega_{c23\Phi}^2 - \omega_{03\Phi}^2},$$

де $\omega_{03\Phi} = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$ – центральна частота смуги затримки ЗФ.

Примітка. Центральна частота смуги затримки ЗФ розраховується за формулами:

$$\omega_{03\Phi} = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}} \text{ або } \omega_{03\Phi} = \sqrt{\omega_{s1}\omega_{s2}}.$$

Як і у попередньому випадку, формули повинні давати однакові значення центральної частоти $\omega_{03\Phi}$, тому повинна виконуватися умова геометричної симетрії $\omega_{c1}\omega_{c2} = \omega_{s1}\omega_{s2}$.

Подібно СФ, щоб зберегти задану смугу затримки $\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$, центральну частоту $\omega_{03\Phi}$ розраховується за частотами зрізу ω_{c1}, ω_{c2} смуг пропускання ЗФ, тобто за формулою $\omega_{03\Phi} = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$.

Розраховується гранична частота смуги затримки ненормованого НЧ-прототипу за формулами:

$$\omega_{sНЧ} = \frac{\omega_{s23\Phi}}{\omega_{s23\Phi}^2 - \omega_{03\Phi}^2} \text{ або } \omega_{sНЧ} = \frac{\omega_{s13\Phi}}{\omega_{03\Phi}^2 - \omega_{s13\Phi}^2},$$

та вибирається найменша.

Тоді гранична частота смуги затримки нормованого НЧ-прототипу дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} \Omega_{sНЧ} &= \omega_{sНЧ} / \omega_{сНЧ} = \\ &= \frac{\omega_{s23\Phi} (\omega_{c23\Phi}^2 - \omega_{03\Phi}^2)}{\omega_{c23\Phi} (\omega_{s23\Phi}^2 - \omega_{03\Phi}^2)} = \frac{\omega_{s23\Phi} (\omega_{c23\Phi} - \omega_{c13\Phi})}{(\omega_{s23\Phi}^2 - \omega_{03\Phi}^2)} = \frac{\omega_{s23\Phi} \cdot \Delta\omega_{3\Phi}}{(\omega_{s23\Phi}^2 - \omega_{03\Phi}^2)} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \Omega_{sНЧ} &= \omega_{sНЧ} / \omega_{сНЧ} = \\ &= \frac{\omega_{s13\Phi} (\omega_{c23\Phi}^2 - \omega_{03\Phi}^2)}{\omega_{c23\Phi} (\omega_{03\Phi}^2 - \omega_{s13\Phi}^2)} = \frac{\omega_{s13\Phi} (\omega_{c23\Phi} - \omega_{c13\Phi})}{(\omega_{03\Phi}^2 - \omega_{s13\Phi}^2)} = \frac{\omega_{s13\Phi} \cdot \Delta\omega_{3\Phi}}{(\omega_{03\Phi}^2 - \omega_{s13\Phi}^2)} \end{aligned}$$

та вибирається найменша.

Отже, розрахунки частот нормованого НЧ-прототипу відповідають перетворенню НЧ-прототип \rightarrow ЗФ: $\hat{s} \rightarrow \frac{\Delta\omega_{3\phi} \cdot s}{(s^2 + \omega_{03\phi}^2)}$.

Частота зрізу нормованого НЧ-прототипу завжди $\Omega_{\text{нч}} = \omega_{\text{нч}} / \omega_{\text{нч}} = 1$.

Синтез і аналіз активних RC – фільтрів у середовищі Micro-CAP

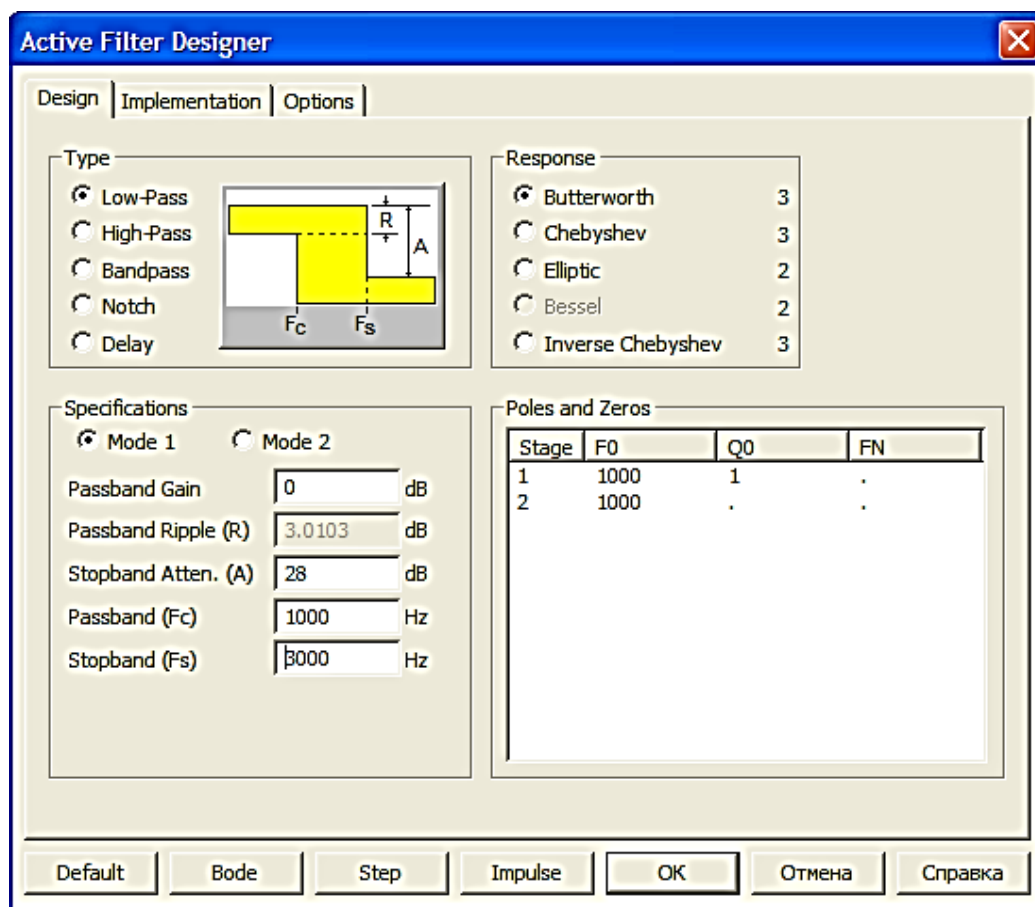


Рис. Д.6. Задання параметрів синтезу ФНЧ

Примітка. Позначення на рис. Д.6 наступні:

Passband Gain - This is the low frequency gain in dB.

Passband Ripple (R) - This is the variation in gain (in dB) across the passband.

Stopband Attenuation (A) - This is the maximum gain in dB in the passband minus the maximum gain in dB at the stopband. Attenuation is a positive number.

Passband Frequency (Fc) - This is the frequency below which the gain is equal to the passband gain \pm ripple.

Stopband Frequency (Fs) - The frequency at which the gain has dropped by the stopband attenuation from the passband gain \pm ripple.

For Chebyshev and elliptic filters the passband gain varies with the order of the filter as follows:

Order	Gain at DC	Gain at passband edge
Even	Passband Gain	Passband Gain + Ripple
Odd	Passband Gain	Passband Gain – Ripple

Butterworth and inverse-Chebyshev passband gain varies as follows:

Type	Gain at DC	Gain at passband edge
Butterworth	Passband Gain	Passband Gain - Ripple
Inverse-Chebyshev	Passband Gain	Passband Gain - Ripple

Приклад 3

Синтезувати фільтр Баттерворта, який забезпечує загасання на частоті $\Omega = \omega/\omega_c = 3$ – не менше 28 дБ (відносно коефіцієнту передачі на нульовій частоті); $K(0) = 10\text{дБ}$; частота зрізу $f_c = 1000$ Гц).

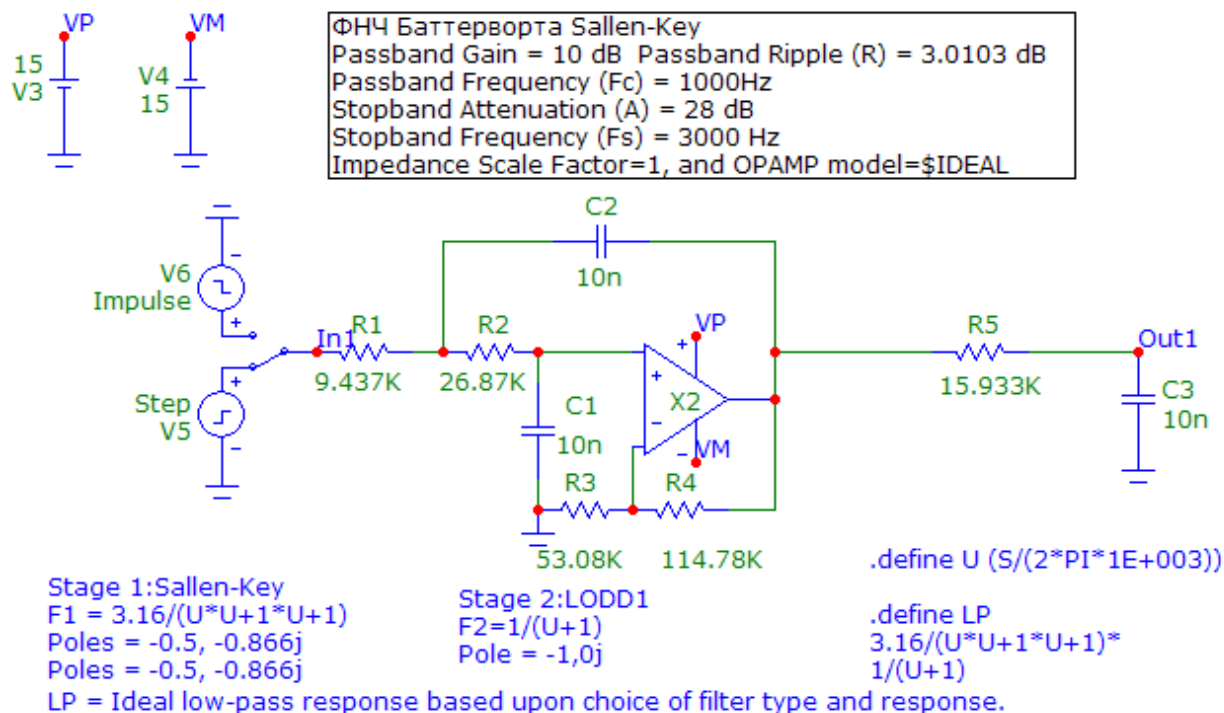


Рис. Д.7. Моделювання схеми фільтру Баттерворта 3-го порядку (із загасанням при $\Omega = \omega/\omega_c = 3$ не менше 28 дБ відносно $K(0) = 10\text{дБ}$, частота зрізу $f_c = 1000$)

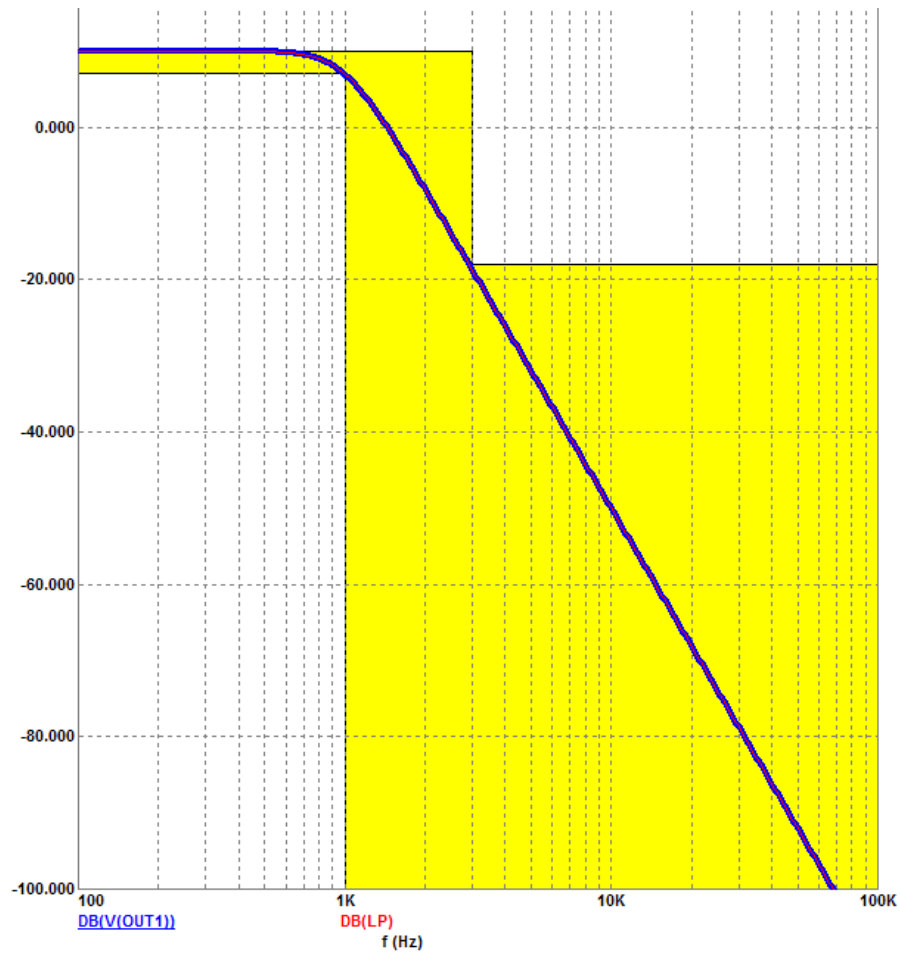
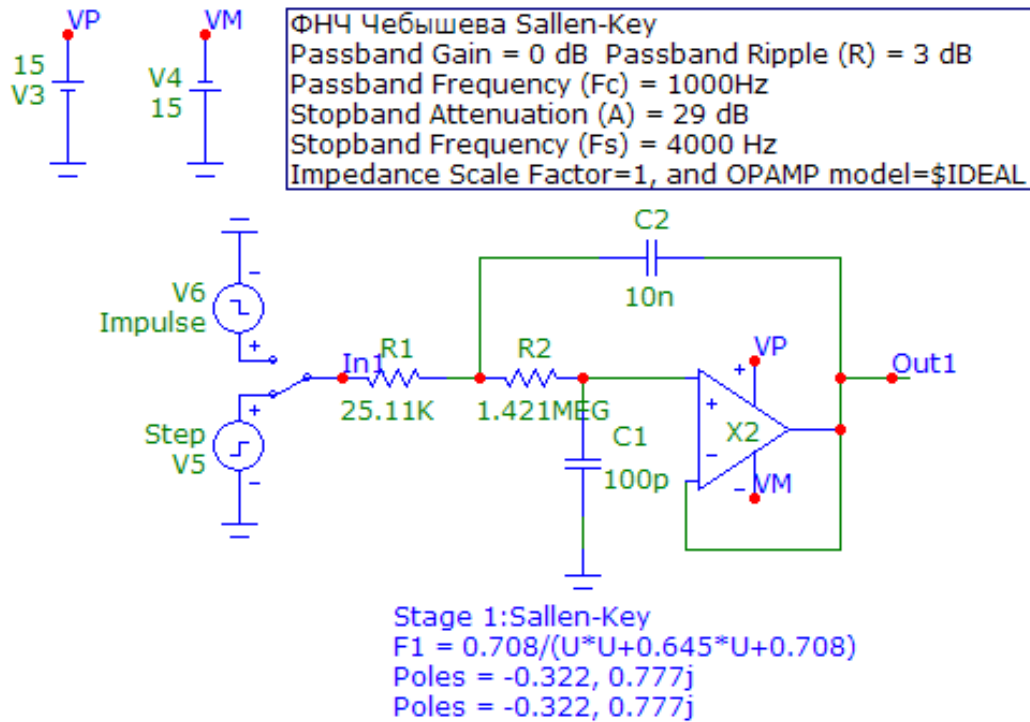


Рис. Д.8. ФНЧ Баттерворта 3-го порядку (із загасанням при $\Omega = \omega/\omega_c = 3$ не менше 28 дБ відносно $K(0) = 10\text{дБ}$, частота зрізу $f_c = 1000$)

Приклад 4

Синтезувати фільтр Чебишева 1-го роду за наступними параметрами: нерівномірність у смузі пропускання 3 дБ, загасання при $\Omega = \omega/\omega_c = 4$ – не менше 29 дБ.



LP = Ideal low-pass response based upon choice of filter type and response.

```
.define U (S/(2*PI*1E+003))
.define LP
0.708/(U*U+0.645*U+0.708)*
1
```

Рис. Д.9. Фільтр Чебишева 2-го порядку з рівнем пульсацій в смузі пропускання 3 дБ і з загасанням при $\Omega = \omega/\omega_c = 4$ – не менше 29 дБ⁴³

⁴³ Отже, передатна функція збігається з одержаним раніше виразом. Але вибір елементів електричної схеми здійснено дещо інакше.



Рис. Д.10. АЧХ фільтра Чебишева 2-го порядку з рівнем пульсації в смузі пропускання 3 дБ і з загасанням при $\Omega = \omega/\omega_c = 4$ не менше 29 дБ

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає принцип каскадування при схемній реалізації фільтрів n -порядку?
2. На базі яких ланок зручніше будувати фільтри n -порядку і чому? Наведіть приклади.
3. Що відбувається з АЧХ фільтра, якщо його порядок збільшити?
4. У який спосіб здійснюється перетворення типу фільтру: НЧ-прототипу у ФВЧ, який синтезується?
5. У який спосіб здійснюється перетворення типу фільтру: НЧ-прототипу у СФ, який синтезується?
6. У який спосіб здійснюється перетворення типу фільтру: НЧ-прототипу у ЗФ, який синтезується?

7. *Чи змінюється порядок фільтру під час перетворення типу фільтру НЧ-прототипу?*
8. *Поясніть процедуру синтезу активних фільтрів у середовищі програми Micro-CAP.*

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Туз, Ю.М. Теорія електричних кіл і сигналів [Текст]: навч. посібн. / Ю. М. Туз, Ю. С. Шумков; за заг. ред. Ю.М. Туза. – К.: "Корнійчук", 2012. – 448 с. – ISBN 978-966-7599-73-7. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46984>
2. *Основи* технічної електроніки. У 2 кн. Кн. 1. Теорія електронних кіл [Текст]: Підручник / М.Б. Гумен, А.М. Гуржій, В.М. Співак та ін. – К.: Вища шк., 2008. – 727 с. ISBN 978-966-642-341-5.
3. *Основи* теорії кіл [Текст]: Підручник. Ч. 1 / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милотченко, О.І. Рибін. – 2-ге вид. – Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 492 с. ISBN 966-8530-59-4.
4. Desoer, C.A., and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New-York: McGraw-Hill, 1969.
5. Siebert, W. McC. *Circuits, Signals, and Systems*. Cambridge, Mass. : MIT Press ; New York : McGraw-Hill Book Company, 1986.
6. Doetsch, G. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*. Munchen, 1967.

Додаткова

7. *Теорія* електричних сигналів і кіл: Лабораторний практикум [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інформаційні вимірювальні технології» спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю.М. Туз, Ю.С. Шумков, О.В. Козир. – Електронні текстові дані (1 файл: 11,88 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 158 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/45799>
8. Туз, Ю.М. Автоматизація аналізу вимірювальних пристроїв [Текст]: навчальний посібник / Ю.М. Туз, Ю.С. Шумков, О.В. Козир; за заг. ред. Ю.М. Туза. – Одеса: Видавничий дім «Гельветика», 2022. – 312 с. ISBN 978-966-992-770-5. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46983>

9. Зінковський, Ю.Ф. Моделювання елементної бази електронних апаратів у комп'ютерному середовищі Micro-Cap [Текст]: моногр. / Ю.Ф. Зінковський, А.В. Коваль. – К.: НТУУ "КПІ", 2010. – 464 с. ISBN 978-966-622-376-3.

10. *Mathcad 2001 Professional Reference Manual*. MathSoft, Inc. 101 Main Street Cambridge, MA 02142. – 528 p. – <http://www.mathsoft.com>

11. Vlach, J. and Singhal, K. *Computer Methods for Circuit Analysis and Design*. Department of Electrical Engineering and Systems Design University of Waterloo, Ontario, Canada. New-York: Van Nostrand Reinhold Company, 1988.

12. Chua, L.O., and Pen-Min Lin. *Computer-aided Analysis of Electronic Circuits*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975.

13. Antognetti P., Massobrio G. *Semiconductor Device Modeling with SPICE*. – McGraw-Hill, Second Edition, 1993. – <http://www.spectrum-soft.com>

14. *Micro-CAP 9 Electronic Circuit Analysis Program Reference Manual*. Copyright 1982-2008 by Spectrum Software 1021 South Wolfe Road Sunnyvale, CA 94088. – 916 p. – <http://www.spectrum-soft.com>

15. *Book-mc.rar*
http://drive.google.com/file/d/0B_zuGjoSJdggdW5NbnlGcl9KZG8/edit?usp=sharing

16. Peyton, A.J. and Volsh, V. *Analog electronics on operational amplifiers*. Cambridge University Press, 1993.

17. Туз Ю.М., Серпилін К.Л., Гапченко Л.М. Електронні вольтметри змінного струму (основи проектування). – Київ, Техніка, 1970. – 180 с.

18. Lam, H.Y-F. *Analog and Digital Filters: Design and Realization*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1979.