

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

В. В. Колесников

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ
ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ И
ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Текст лекций

Санкт-Петербург
2006

УДК 621.3.072

ББК 31.211

К60

Колесников, В. В.

К60 Основы теории цепей. Переходные процессы и четырехполосники:
текст лекций / В. В. Колесников; ГУАП. – СПб., 2006. – 111 с.: ил.

Изложены теоретические основы анализа переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами при постоянных, гармонических и произвольных воздействиях во временной и частотной областях.

Рассмотрено применение метода переменных состояния как для пассивных, так и активных цепей. Даны понятия о переходных и импульсных характеристиках цепи и о расчете переходных процессов на их основе. Приведены основные сведения о четырехполосниках.

Текст лекций предназначен для студентов заочного и вечернего факультетов по специальностям: «Радиотехника», «Системотехника» и «Приборостроение».

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра теоретических основ электротехники
Санкт-Петербургского электротехнического университета;
кандидат технических наук, доцент *В. Е. Воробьев*

Утверждено

редакционно-издательским советом университета
в качестве текста лекций

© ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский
государственный университет
аэрокосмического приборостроения»,
2006

© В. В. Колесников, 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основное внимание в тексте лекций уделяется общим методам анализа переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами, наиболее эффективным методам формирования и решения дифференциальных уравнений цепи.

Наряду с традиционными разделами рассмотрено применение метода переменных состояния как для пассивных, так и активных цепей, содержащих зависимые источники напряжения и тока. Последние входят в схемы замещения электронных систем и поэтому представляют практический интерес для студентов многих специальностей.

В тексте лекций даны понятия о переходных и импульсных характеристиках цепи и о расчете цепей на их основе при произвольных воздействиях. Кроме этого, в тексте лекций изложен анализ переходных процессов на основе дискретных моделей во временной области. Применение частотного метода показано на примере дифференцирующих и интегрирующих цепей.

Текст лекций заканчивается разделом, посвященным четырехполусникам. Рассматриваются уравнения, передаточные функции и их частотные характеристики. В качестве примера использования четырехполусников приведены сведения о пассивных и активных фильтрах.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Цель исследования переходных процессов

Переходные процессы возникают в электрических цепях при переходе из одного режима в другой вследствие подключения источников в сеть, отключения от нее, изменения параметров сети или ее топологии. Любая причина, вызывающая переходный процесс, называется *коммутацией*.

В большинстве случаев переходные процессы возникают после срабатывания механического или электронного переключателя, работу которого сопровождают весьма сложные явления – горение дуги, перенос носителей в полупроводнике, пробой изоляции и другие. Учет всех этих факторов представляет собою трудную и часто практически неразрешимую задачу. Поэтому при анализе переходных процессов реальное устройство представляется схемой замещения, отражающей рассматриваемые физические процессы с достаточной для практики точностью. В результате получают идеализованную расчетную модель цепи, содержащую сосредоточенные параметры – активное сопротивление, индуктивность, емкость, взаимную индуктивность и идеализованный ключ мгновенного действия. Предполагается, что процесс переключения таким ключом совершается мгновенно за время $\Delta t \rightarrow 0$, в течение которого его сопротивление изменяется мгновенно от бесконечности до нуля при включение и от нуля до бесконечности – при выключение.

Задача исследования переходных процессов состоит в определении мгновенных значений напряжений $u(t)$, токов $i(t)$, потокосцеплений $\psi(t)$ и т. п. после коммутации. Обычно момент коммутации совмещается с началом отсчета времени $t = 0$. Момент времени непосредственно предшествующий коммутации обозначают $t = 0^-$ и непосредственно после коммутации $t = 0^+$, причем $\Delta t = t(0^+) - t(0^-) \rightarrow 0$.

На рис. 1.1 представлена кривая некоторой переменной (напряжение, тока и т. п.) $x_k(t)$ до и после коммутации. Расчету подлежит функция $x_k(t)$ при $t \geq 0^+$. Она определяется как решение системы интегродифференциальных уравнений цепи образующихся после коммутации, с учетом состояния цепи, предшествующего коммутации $x_k(0^-)$.

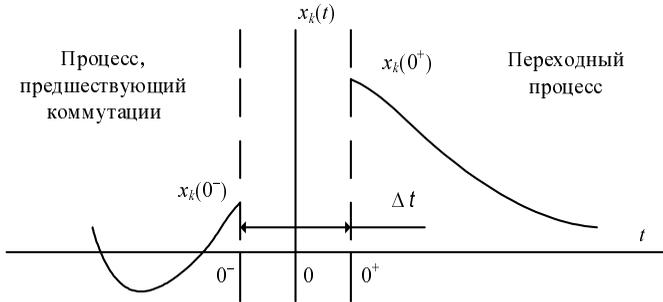
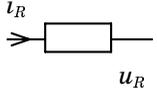
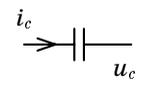
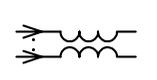


Рис. 1. 1

Классический метод анализа переходных процессов состоит в формировании и последующем решении системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений цепи. Они должны составляться для цепи после коммутации на основе законов Кирхгофа или с применением методов токов связей, узловых напряжений с использованием уравнений элементов, приведенных в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Уравнения элементов

Обозначение элемента	Изображение элемента	Зависимость напряжения от тока	Зависимость тока от напряжения
R, G		$u_R = Ri_R$	$i_R = Gu_R$
L		$u_L = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$	$i_L = i_L(0^+) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt$
C		$u_C = u_C(0^+) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt$	$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$
M		$u_M = \frac{d\psi_M}{dt} = M \frac{di}{dt}$	$i_M = i_M(0^+) + \frac{1}{M} \int_0^t u_M dt$
Ключ		$u \neq 0, I = 0$ – разомкнут	$i \neq 0, u = 0$ – замкнут

1.2. Дифференциальные уравнения линейной цепи с сосредоточенными параметрами

Система дифференциальных уравнений, описывающая переходный процесс, может быть представлена в различных видах. Полученные уравнения могут быть приведены к одному дифференциальному уравнению относительно искомой переменной. В общем случае будем иметь неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка, линейное с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t). \quad (1.1)$$

Это – неоднородное уравнение, так как правая часть $f(t) \neq 0$.

Как известно из математики, решение неоднородного уравнения складывается из двух решений:

$$x(t) = x'(t) + x''(t), \quad (1.2)$$

где $x'(t) = x_{\text{уст}}(t)$ – частное решение неоднородного уравнения, которое в электротехнике носит понятие установившейся (вынужденной) составляющей; $x''(t) = x_{\text{св}}(t)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n x_{\text{св}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{\text{св}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_{\text{св}}}{dt} + a_0 = 0. \quad (1.3)$$

Для определения установившейся составляющей необходимо рассмотреть цепь любым методом расчета в новом установившемся режиме.

Для нахождения свободной составляющей необходимо определить корни характеристического уравнения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и постоянные интегрирования A_1, A_2, \dots, A_n , так как общее решение однородного уравнения записывается следующим образом:

$$x''(t) = x_{\text{св}}(t) = A_n e^{\alpha_n t} + A_{n-1} e^{\alpha_{n-1} t} + \dots + A_1 e^{\alpha_1 t}. \quad (1.4)$$

Составим характеристическое уравнение. Для этого необходимо первую производную заменить на α , вторую $-\alpha^2$, а n -производную на α^n . В соответствии с выражением (1.3) имеем

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0. \quad (1.5)$$

Решая (1.3), найдем корни характеристического уравнения. Свободная составляющая всех реакций с течением времени затухает, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{i \text{ св}} \rightarrow 0$, так как энергия электрических полей емкостей и маг-

нитных полей индуктивностей цепи убывает при выключенных источниках. Как видно из (1.4), необходимо, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения были отрицательны $\text{Re}[\alpha_k] < 0$, т. е. корни должны быть либо отрицательными вещественными, либо комплексными сопряженными с отрицательной вещественной частью.

Произвольные постоянные интегрирования A_1, A_2, \dots, A_n находятся с использованием начальных условий – значений переменных или их производных в момент времени $t = 0^+$, т. е. сразу после коммутации. Требуемое число начальных условий равно числу определяемых постоянных интегрирования или порядку цепи n . Постоянные интегрирования A_1, A_2, \dots, A_n определяются из условий Коши, т. е. необходимо знать выражения и начальные значения (числа) для функции и $(n-1)$ -й ее производных. При этом используются так называемые *законы коммутации*.

1.3. Законы коммутации

Законы коммутации отражают тот физический факт, что энергия как магнитного поля индуктивности, так и электрического поля емкости мгновенно (скачком) изменится не может. В противном случае мощность в такой цепи $p(t) = \frac{dW}{dt}$ при скачкообразном изменении энергии должна быть бесконечно большой, что не может быть. Таким образом, энергия магнитного поля индуктивности и электрического поля емкости изменяются во время коммутации непрерывно. Энергия магнитного поля в индуктивности $W_m = \frac{Li^2}{2}$. Если во время коммутации $L = \text{const}$, то чтобы не изменилась энергия достаточно

$$i_L^- = i_L^+, \quad (1.6)$$

т. е. ток в индуктивности во время коммутации скачком измениться не может (ток в индуктивности до коммутации равен току индуктивности после коммутации). Условие (1.6) выражает закон коммутации тока в индуктивности. Если во время коммутации меняется величина индуктивности, то необходимо рассматривать более общий закон коммутации, гласящий, что потокосцепление контура во время коммутации скачком измениться не может

$$\Psi_L^- = \Psi_L^+. \quad (1.7)$$

Энергия электрического поля емкости, как известно, равна $W_e = \frac{CU_c^2}{2}$.

Поэтому имеем следующий закон коммутации для емкости:

$$U_C^- = U_C^+. \quad (1.8)$$

Напряжение емкости во время коммутации скачком изменится не может (напряжение на емкости до коммутации равно напряжению емкости после коммутации). В случае, если емкость меняется во время коммутации, то говорят о более общем законе: заряд узла, содержащего емкости, скачком измениться не может

$$Q_C^- = Q_C^+. \quad (1.9)$$

Определив свободную и установившуюся составляющие, окончательно записывают решение дифференциального уравнения в соответствии с выражением (1.2). В некоторых случаях для оценки сложности решаемой задачи представляет интерес определение порядка цепи n .

1.4. Расчет порядка цепи

Как известно из курса математики, порядок цепи (порядок системы дифференциальных уравнений) равен числу независимых начальных условий. Отсюда следует, что порядок цепи может быть определен по числу независимых начальных условий.

Так как напряжения на индуктивностях $u_{L_k} = \frac{d\psi_k}{dt} = L_k \frac{di_k}{dt}$ и токи в емкостях $i_{C_k} = \frac{dq_k}{dt} = C_k \frac{du_{C_k}}{dt}$ определяются первыми производными по времени, то наибольший порядок цепи равен суммарному числу индуктивностей и емкостей, включенных в цепь. Обозначим это число N_{LC} . Однако индуктивности и емкости могут соединяться между собой так, что их начальные токи и напряжения окажутся зависимыми. Рассмотрим сечение цепи, которое включает в себя только ветви с индуктивностями и с источниками тока (рис. 1.2).

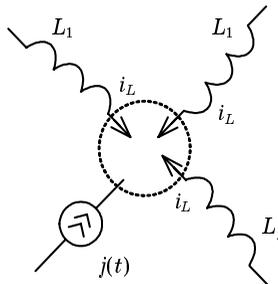


Рис. 1.2

По ЗТК для него можем записать уравнение в момент времени $t = 0^+$, из которого следует, что

$$i_{L_1}^+ + i_{L_2}^+ - i_{L_3}^+ - J^+ = 0 \quad (1.10)$$

одно из начальных условий является зависимым и такая подцепь имеет порядок не третий (по числу индуктивностей), а второй. Такое сечение, содержащее только ветви с индуктивностями и с источником тока, называют *индуктивным*. Если цепь содержит N_{LI} таких сечений, то порядок цепи $n = N_{LC} - N_{LI}$.

Рассмотрим контур схемы, состоящей из емкостей и источников напряжения, изображенный на рис. 1.3, и запишем для него уравнение ЗНК в момент времени $t = 0^+$.

$$u_{C_1}^+ + u_{C_2}^+ - u_{C_3}^+ + e^+ = 0. \quad (1.11)$$

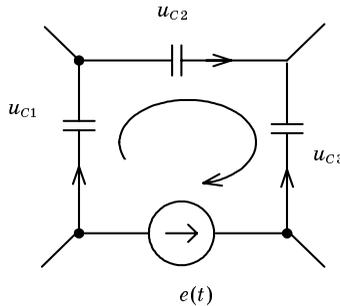


Рис. 1.3

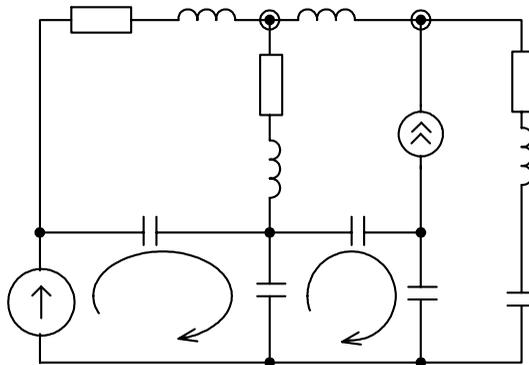


Рис. 1.4

Из уравнения (1.11) следует, что одно из начальных условий независимо и рассматриваемая подцепь имеет порядок не третий (по числу емкостей), а второй. Такой контур, образованный только емкостями и источниками напряжений, называют емкостным. Если цепь содержит N_{CE} таких контуров, то порядок уменьшается на это число. Итак, в общем случае порядок цепи

$$n = N_{LC} - N_{LI} - N_{CE}. \quad (1.12)$$

В качестве примера определим порядок цепи, изображенной на рис. 1.4. Здесь имеем $N_{LC} = 9$, два емкостных контура и два индуктивных сечения. Поэтому получим $n = 9 - 2 - 2 = 5$. Заметим, что порядок цепи может оказаться меньше, чем вычисленный по (1.12) вследствие определенного соотношения параметров схемы.

2. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

2.1. Общий случай

Цепь первого порядка с одним независимым источником описывается уравнением

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t). \quad (2.1)$$

Записываем общее решение

$$x(t) = x_{\text{уст}}(t) + x_{\text{св}}(t). \quad (2.2)$$

Приравнивая правую часть в (2.1) к нулю, получим однородное уравнение вида $a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = 0$, а затем из характеристического уравнения находим его корень

$$a_1 \alpha + a_0 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{a_0}{a_1}, \quad (2.3)$$

т. е. корень характеристического уравнения один, и он обязательно отрицательный, что характерно для пассивной цепи.

Величина, обратная корню характеристического уравнения, взятого по модулю, носит название *постоянной времени*, с

$$\tau = \left| \frac{1}{\alpha} \right|. \quad (2.4)$$

Записывая свободную составляющую в виде

$$x_{\text{св}}(t) = Ae^{\alpha t} \quad (2.5)$$

и подставляя (2.5) в (2.2) с учетом (2.4), имеем

$$x(t) = x_{\text{уст}}(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.6)$$

Решение (6) должно удовлетворять начальным значениям при $t = 0$

$$x(t)_{t=0} = x_{\text{уст}}^+ + A = x^+, \quad (2.7)$$

где $x_{\text{уст}}^+$ – значение установившейся составляющей реакции в начальный момент; x^+ – начальное значение реакции.

Откуда постоянная интегрирования

$$A = x^+ - x_{\text{уст}}^+. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.6), записываем окончательно решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x(t) = x_{\text{уст}}^+(t) + (x^+ - x_{\text{уст}}^+)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.9)$$

В соответствии с выражением (2.9) определяется решение для любой цепи первого порядка. Как видно из (2.9), в цепи первого порядка переходный процесс полностью характеризуется постоянной времени τ .

Рассмотрим подробнее понятие постоянной времени цепи. Для этого рассчитаем и построим график кривой свободной реакции в цепи первого порядка $x_{\text{св}} = Ae^{at}$. В табл. 2.1 приведены расчетные значения для конкретных значений времени t , кратных постоянной времени τ , а на рис. 2.1 в соответствии с данными табл. 2.1 построен график свободной реакции.

Таблица 2.1

Значения функций

t	0	1τ	2τ	3τ	4τ
$e^{-t/\tau}$	1	0,368	0,137	0,050	0,018
$1 - e^{-t/\tau}$	0	0,632	0,863	0,950	0,982

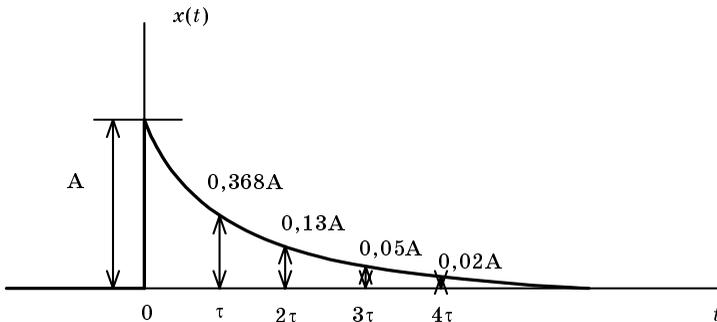


Рис. 2.1

Как видно из рис 2.1 и табл. 2.1, при $t = 3\tau$ сводная реакция составляет $0,05 A$, т. е. 5% от начального значения, при $t = 4\tau - 0,02 A$, т. е. 2% от начального значения, т. е. с погрешностью 5% для первого случая и 2% для второго случая можно считать, что сводная составляющая равна нулю и в цепи имеет место установившийся режим работы. Поэтому постоянная времени характеризует длительность переходного процесса. Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго, реально длительность переходного процесса $T_{п.п}$ принимается равной $3-4\tau$, т. е. $T_{п.п} \cong (3-4)\tau$.

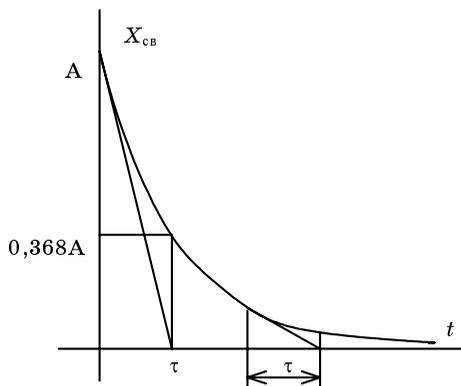


Рис. 2.2

Так как отрезок подкасательной в любой точке кривой $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ равен постоянной величине τ (рис. 2.1) и имеет размерность времени, то значение величины τ определяет скорость затухания свободной реакции, т. е. скорость изменения тока или напряжения во время переходного процесса. Экспериментально постоянная времени τ определяется либо как абсцисса точки на кривой сводной реакции (рис. 2.2), ордината которой равна $0,368A$, либо как отрезок, отсекаемый подкасательной на оси абсцисс подкасательной, т. е. постоянная времени численно равна отрезку времени, в течение которого ток или напряжение изменяются в e раз. Итак, в цепи первого порядка вид и длительность переходного процесса полностью определяется постоянной времени τ . Причем при включении цепи одной и той же топологии (конфигурации) на источник постоянного или переменного, гармонического напряжения постоянная времени одинакова, так как является величиной, обратной корню характеристического уравнения, взятому по модулю. Рассмотрим конкретные случаи переходных процессов в цепи первого порядка.

2.2. Включение цепи RL на источник постоянного напряжения

Определим закон изменения тока и напряжения во время переходного процесса в цепи, изображенной на рис. 2.3. Поэтому для цепи после коммутации составим уравнение по ЗНК. Будем иметь $u_R + u_L = E$ или

$$iR + L \frac{di}{dt} = E. \quad (2.10)$$

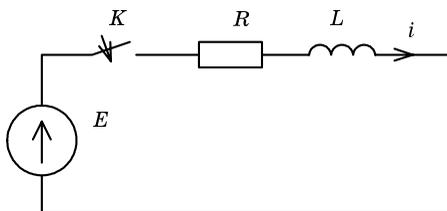


Рис. 2.3

Общее решение в соответствии с выражением (2.9) подразд. 2.1 имеет вид

$$i(t) = i_{\text{уст}}(t) + (i^+ - i_{\text{уст}}^+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.11)$$

Найдем установившуюся составляющую тока. Для этого составим эквивалентную расчетную схему для цепи в новом установившемся режиме работы. Если источник постоянный, то необходимо замкнуть ветви с индуктивностями (напряжение индуктивности $u_L = 0$ для постоянного тока) и разомкнуть ветви с емкостями (ток емкости $i_C = 0$ – постоянный ток через емкость не проходит). Из расчета полученной схемы находят установившуюся составляющую

$$i_{\text{уст}}(t) = \frac{E}{R}. \quad (2.12)$$

Начальное значение установившейся составляющей при $t = 0$

$$i_{\text{уст}}^+ = i_{\text{уст}}(t) = \frac{E}{R}, \quad (2.13)$$

Начальное значение тока в цепи по закону коммутации

$$i_L^+ = i_L^- = 0, \quad (2.14)$$

так как до коммутации ток в цепи не протекал.

Найдем постоянную времени цепи для данного случая. Характеристическое уравнение имеет вид

$$La+R=0.$$

Откуда постоянная времени для цепи с индуктивностью

$$\tau = \left| \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{L}{R}. \quad (2.15)$$

Исходя из (2.11) с учетом (2.13) – (2.15) записываем окончательно выражение для тока (реакции) во время переходного процесса

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (2.16)$$

Найдем изменение напряжения на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \left(\frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.17)$$

В соответствии с полученными выражениями на рис. 2.4, а и б построены зависимости тока и напряжения индуктивности во время переходного процесса при включении цепи RL на источник постоянного напряжения.

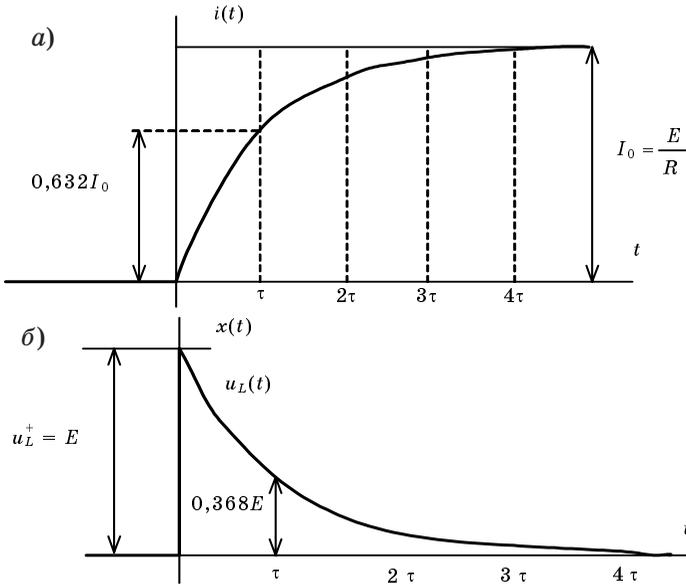


Рис. 2.4

Ток и напряжение индуктивности изменяются по экспоненциальным законам. При этом ток индуктивности изменяется непрерывно, а напряжение индуктивности в момент коммутации имеет скачок напряжения $U_L^+ = E$, равный напряжению источника. Постоянная времени может быть найдена по кривой тока (возрастающей экспоненциальной зависимости) как абсцисса точки, ордината которой равна $0,632 I_0$ от установившегося значения тока, для убывающей экспоненциальной зависимости – как абсцисса точки, ордината которой равна $0,368$ от начального значения.

2.3. Замыкание цепи RL на добавочное сопротивление

Во время коммутации ключ переводится из положения 1 в 2, т. е. цепь отключается от источника и замыкается на добавочное сопротивление R (рис. 2.5).

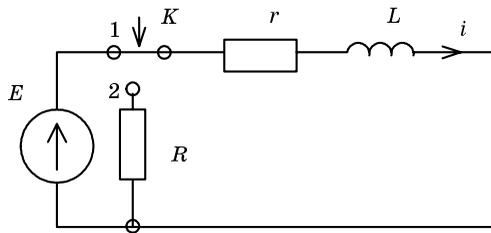


Рис. 2.5

Для цепи после коммутации уравнение по ЗНК имеет вид

$$i(r + R) + L \frac{di}{dt} = 0$$

или

$$\frac{di}{dt} + \frac{r + R}{L} i = 0, \quad (2.18)$$

т. е. получили однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Как известно, общее решение записывается в следующем виде:

$$i(t) = i_{\text{уст}}(t) + (i^+ - i_{\text{уст}}^+) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.19)$$

Составим характеристическое уравнение (производную $\frac{di}{dt}$ заменим на α)

$$\alpha + \frac{r+R}{L} = 0.$$

Откуда

$$\alpha = -\frac{R+r}{L}, \tau = \left| \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{L}{R+r}. \quad (2.20)$$

Из закона коммутации с учетом схемы цепи до коммутации (рис. 2.6) начальное значение тока в цепи (при $t = 0$)

$$i^+ = i^- = \frac{E}{r}. \quad (2.21)$$

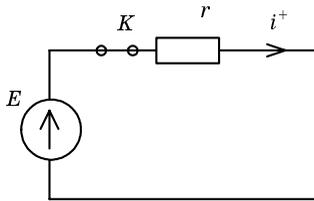


Рис. 2.6

Так как в новом установившемся режиме цепь отключена от источника, то установившаяся составляющая реакции равна нулю $i_{уст} = 0$, поэтому также начальное значение установившейся составляющей $i_{уст}^+ = 0$. С учетом (2.21) общее решение (2.19) имеет вид

$$i(t) = \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.22)$$

При этом напряжение

$$u_L(t) = \alpha \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = -\frac{R+r}{r} E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.23)$$

Как видно из рис. 2.7, во время коммутации напряжение на индуктивности имеет скачок напряжения (перенапряжение) $u_L^+ = -\frac{R+r}{r} E$, которое может значительно превосходить напряжение источника.

Пример

Напряжение источника $E = 12$ В. Сопротивление катушки $\rho = 1$ Ом.

Добавочное сопротивление $R = 1$ кОм. Тогда начальное значение напряжения на катушке (перенапряжение на катушке)

$$u_L^+ = -\frac{R+r}{r} E = \frac{1000+1}{1} \cdot 12 = 12000 = 12 \text{ кВ.}$$

Такое напряжение может привести к пробое межвитковой изоляции, вызвать межвитковое короткое замыкание, искрение контактов переключателя, горение дуги, т. е. привести к аварийному режиму работы.

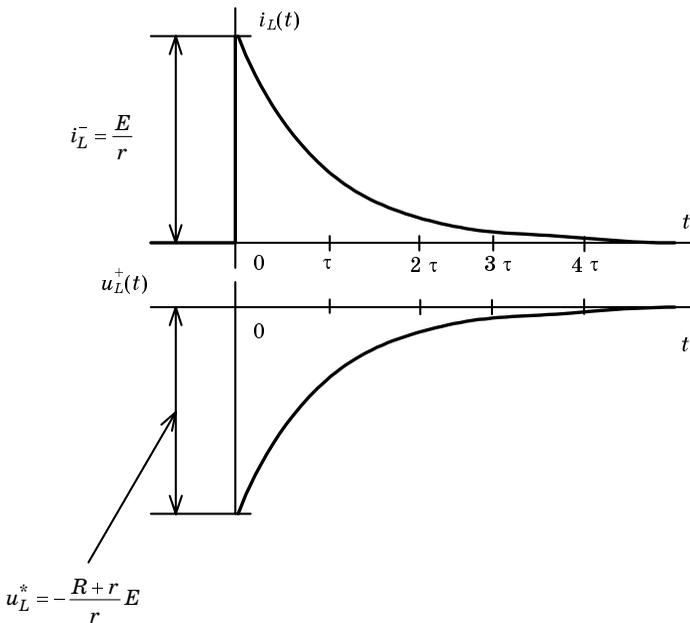


Рис. 2.7

Поэтому при отключении больших индуктивностей необходимо предусмотреть меры по снижению начального перенапряжения на индуктивности: либо реостатное выключение, либо шунтирование индуктивности гасящими цепочками (рис. 2.8, а, б)

При реостатном выключении индуктивности (рис. 2.8,а) ключ последовательно переводится из положения 1 в 2, затем в 3, 4. При этом значения сопротивлений $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$, т. е. каждый раз происходит ограничение перенапряжения на индуктивности на допустимом уровне и лишь затем индуктивность выключается. На рис. 2.8,б при выключении транзистора (отключении индуктивности) ток

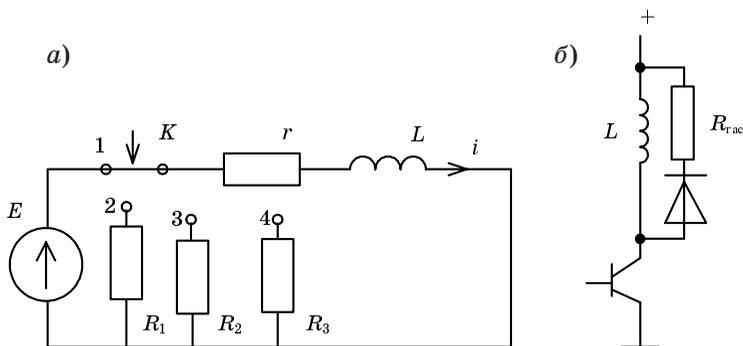


Рис. 2.8

протекает через гасящий диод с последовательно включенным сопротивлением. При этом происходит ограничение напряжения как на индуктивности, так и на транзисторе, которое уже не может вызвать пробой транзистора за счет обратного напряжения при выключении индуктивности.

2.4. Переходный процесс в цепи RL при включении на синусоидальное напряжение

Пусть напряжение источника на входе цепи (рис 2.9) изменяется по следующему закону:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

где ψ – начальная фаза, определяющая момент коммутации и называемая фазой включения.

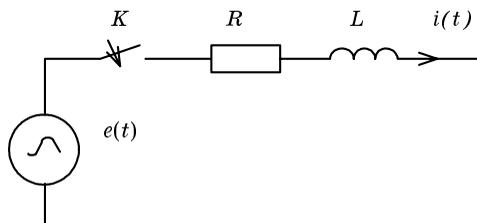


Рис. 2.9

В соответствии с ЗНК, составленного для цепи после коммутации, имеем неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$L \frac{di}{dt} + iR = e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

либо в нормальной форме

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_m}{L} \sin(\omega t + \psi). \quad (2.24)$$

Как известно решение можно записать

$$i(t) = i_{\text{ycm}}(t) + (i^+ - i_{\text{ycm}}^+) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.25)$$

Установившуюся составляющую тока найдем из расчета цепи (рис. 2.10) на основе метода комплексных амплитуд.

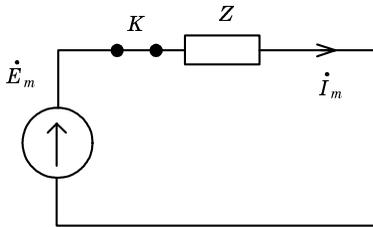


Рис. 2.10

По закону Ома:

$$I_m^* = \frac{E_m^*}{Z} = \frac{E_m^*}{z e^{j\varphi}} = \frac{E_m^*}{z} e^{j(\psi - \varphi)}, \quad (2.26)$$

где $Z = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi} = z e^{j\varphi}$ – комплексное сопротивление цепи; $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$ – угол сдвига между напряжением и током.

Исходя из (2.26) записываем мгновенное значение установившейся составляющей тока

$$\begin{aligned} i_{\text{ycr}}(t) &= \frac{E_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = \\ &= I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) \end{aligned} \quad (2.27)$$

и ее значение при $t = 0$

$$i_{\text{ycm}}^+ = i_{\text{ycm}} \Big|_{t=0} = I_m \sin(\psi - \varphi). \quad (2.28)$$

В соответствии с законом коммутации ток индуктивности скачком измениться не может, поэтому начальное значение тока в цепи

$$i^+ = i^- = 0, \quad (2.29)$$

так как до коммутации ток в цепи не протекал.

Найдем постоянную времени. Из уравнения (2.24), приравнявая правую часть нулю, получим однородное уравнение

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = 0,$$

которому соответствует характеристическое уравнение

$$\alpha + \frac{R}{L} = 0.$$

Откуда постоянная времени

$$\tau = \left| \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{L}{R}. \quad (2.30)$$

Записывая окончательно решение уравнения в соответствии с выражением (2.25) и с учетом (2.27)–(2.30), будем иметь

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.31)$$

Вид переходного процесса в этом случае определяется не только постоянной времени, но и существенно зависит от фазы включения ψ .

Если $\psi - \varphi = 0$, то свободный ток $i_{\text{св}}(t) = I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ и переходный процесс отсутствует, т. е. сразу после включения наступает установившийся режим. Если же $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$, то свободная составляющая $i_{\text{св}}(t) = I_m e^{-\frac{t}{\tau}}$ имеет наибольшее значение в начальный момент времени. В этом случае ток в цепи во время переходного процесса

$$i(t) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - I_m e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Кривая тока при условии, что $\tau \gg T = 2\pi/\omega$, приведена на рис. 2.11, из которой видно, что в цепи образуется сверхток $I_{mm} \leq 2I_m$. Величина сверхтока I_{mm} тем больше, чем больше постоянная времени τ . Электродинамическая сила, как известно, пропорциональна квадрату тока. Поэтому во время переходного процесса она может возрасти до четырех раз по сравнению со значением в установившемся режиме работы. Для нелинейной индуктивности (трансформатора) сверхток возрастает в десятки раз, следовательно, силы в сотни раз.

Поэтому, чтобы исключить механические повреждения обмоток и шихтованного магнитопровода, необходим бандаж для обмоток и для магнитопровода (стяжки).

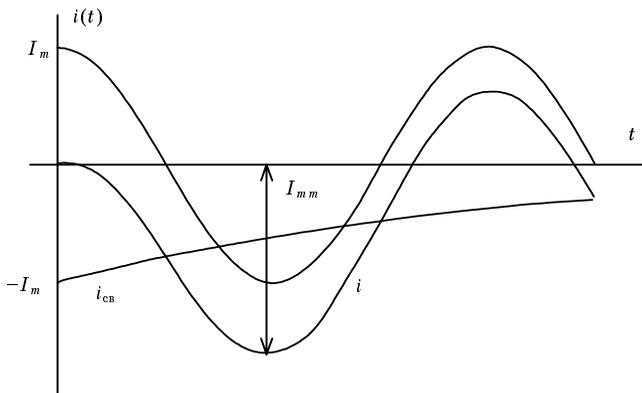


Рис. 2.11

Мощные трансформаторы (индуктивности) включают при фазе включения $\psi - \varphi = 0$, чтобы отсутствовал переходный процесс и сразу наступал установившейся режим работы.

2.5. Включение цепи RC на постоянное напряжение

В соответствии с ЗНК $iR + u_C = E$ и учитывая, что ток $i = C \frac{du_C}{dt}$, имеем следующее неоднородное дифференциальное уравнение для цепи:

$$CR \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

или в нормальной форме

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{CR} u_C = \frac{E}{CR}. \quad (2.32)$$

Общее решение запишем в следующем виде:

$$u_C(t) = u_{C_{уст}}(t) + (u_C^+ - u_{C_{уст}}^+) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.33)$$

Напряжение на емкости в новом установившемся режиме и его значение при $t = 0$ равны соответственно

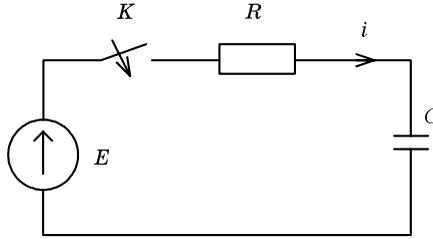


Рис. 2.12

$$u_{C_{\text{зем}}}(t) = E, u_{C_{\text{зем}}}^+ = E. \quad (2.34)$$

В соответствии с законом коммутации напряжение емкости во время коммутации скачком измениться не может, поэтому

$$u_C^+ = u_C^- = U_0, \quad (2.35)$$

т. е. пусть до коммутации на емкости имелось начальное значение U_0 .

Составляя характеристическое уравнение $a + \frac{1}{RC} = 0$, находим постоянная времени цепи RC

$$\tau = \left| \frac{1}{RC} \right| = RC. \quad (2.36)$$

В соответствии с (2.33) и с учетом (2.34)–(2.36) напряжение на емкости во время переходного процесса изменяется по закону

$$u_C(t) = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.37)$$

При этом ток

$$i(t) = C \frac{dU_C}{dt} = C(U_0 - E) \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U_0 - E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.38)$$

На рис. 2.13 в соответствии с (2.37) и (2.38) построены напряжение емкости и ток в цепи для трех случаев в зависимости от начального напряжения емкости.

1. Заряд емкости

Пусть напряжение $U_0 = 0$, из выражений (2.37) и (2.38)

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

2. До заряд емкости

Начальное напряжение емкости $0 < U_0 < E$, тогда напряжение и ток изменяются в соответствии с выражениями (2.37) и (2.38). При

этом, как видно из выражения (2.38), ток при дозаряде минимальный.

3. Перезаряд емкости

Напряжение емкости $U_0 < 0$, т. е. отрицательное, но по модулю $|U_0| < E$. Как видно из рис. 2.13, в начальный момент времени при включении

цепи RC имеет место скачок тока, $i^+ = -\frac{U_0 - E}{R}$, величина которого определяется значением источника ЭДС E , начальным напряжением на емкости U_0 и активным сопротивлением цепи R . Наибольшее значение скачок тока имеет место при перезаряде емкости, что необходимо учитывать при включении конденсаторов. Для ограничения тока заряда емкости необходимо подключать ограничительные сопротивления.

Замечание. Если рассмотреть энергетические процессы при включении цепи RC на источник постоянного напряжения, то окажется, что за время переходного процесса 50% энергии источника выделя-

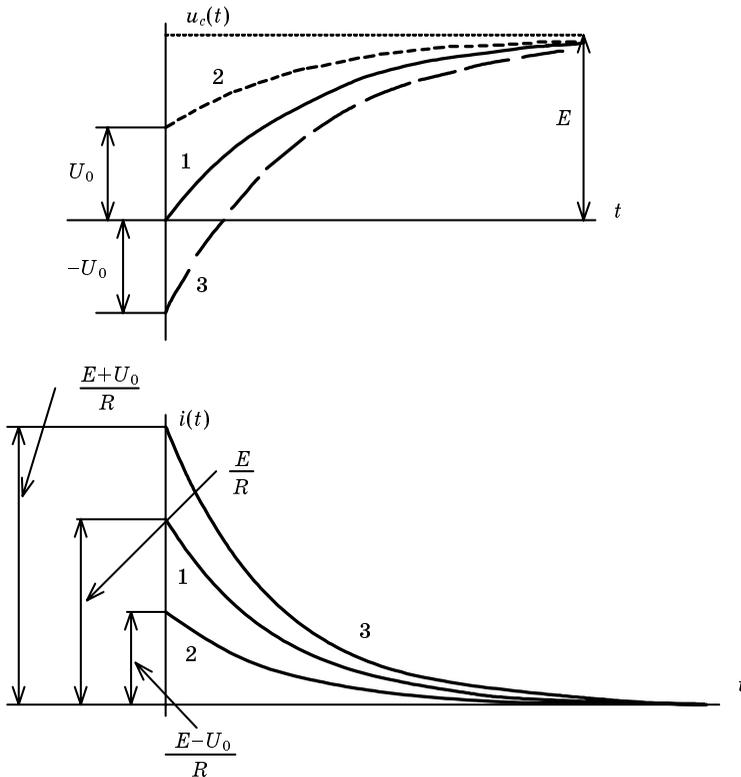


Рис. 2.13

ется на активном сопротивлении в виде тепла, а 50% запасается в виде энергии электрического поля емкости. При этом КПД такого устройства составляет 50 %.

Другими словами, если необходимо запастись в конденсаторе энергией 1 Дж, то от источника будет потреблена энергия в 2 Дж. Энергия в 1 Дж будет выделена в виде потерь на соединительных проводах.

2.6. Короткое замыкание цепи RC

Ключ во время коммутации переводится из положения 1 в 2 (рис. 2.14). Исходя из ЗНК для цепи после коммутации, $iR + u_C = 0$ дифференциальное уравнение относительно напряжения емкости имеет вид

$$\begin{aligned} RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0, \\ \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{CR} u_C &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

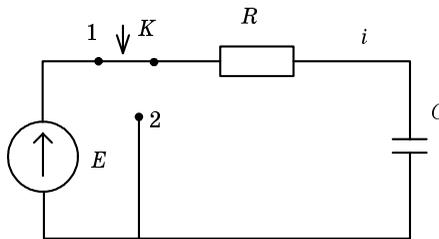


Рис. 2.14

Составляя характеристическое уравнение $\alpha + \frac{1}{CR} = 0$ и определяя его корень, найдем постоянную времени цепи RC

$$\tau = RC = \left| \frac{1}{\alpha} \right|. \quad (2.40)$$

В соответствии с законом коммутации начальное напряжение на емкости $U_C^+ = U_C^- = E$. Так как после коммутации цепь отключается от источника, то установившееся напряжение $u_{C_{уст}}(t) = u_{C_{уст}}^+ = 0$. Теперь, исходя из общего решения (см. выражение (2.33) раздела 2.5.), окончательно записываем решение дифференциального уравнения и находим ток цепи

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_C^+ e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

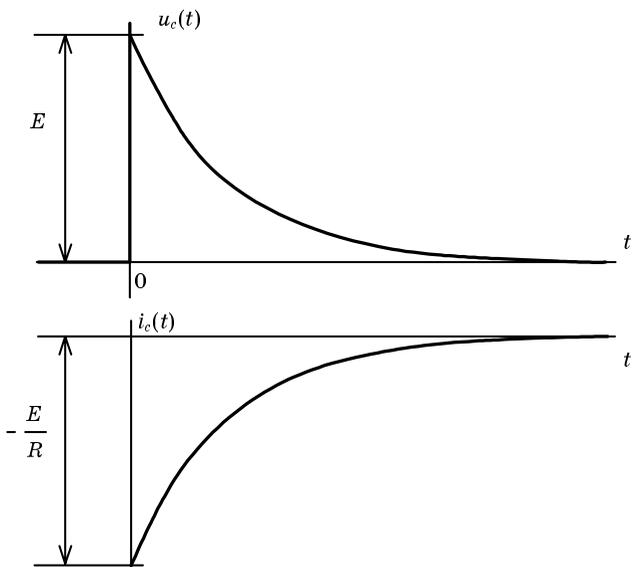


Рис. 2.15

Как видно из полученных кривых, процесс закорачивания цепи RC является неопасным режимом работы. Если рассматривать энергетические процессы в цепи, то окажется, что за время переходного процесса энергия, накопленная в электрическом поле емкости к моменту коммутации, полностью выделяется в виде тепла на активном сопротивлении.

2.7. Включение цепи RC на источник гармонического напряжения

Пусть исследуемая цепь RC (рис. 2.16) включается на гармоническое напряжение $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$ при нулевых начальных условиях, т. е. $U_C^- = 0$. Дифференциальное уравнение, составленное по ЗНК $Ri + u_C = e(t)$, запишем в нормальной форме

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{1}{C}e(t).$$

Затем составляем характеристическое уравнение $\alpha + \frac{1}{RC} = 0$ и находим постоянную времени $\tau = \left| \frac{1}{\alpha} \right| = RC$. По закону коммутации напряжение емкости во время коммутации скачком измениться не может

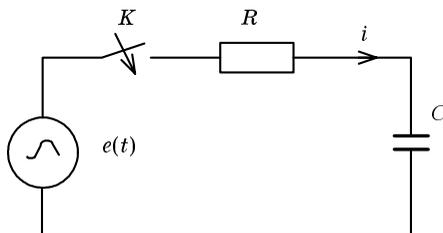


Рис. 2.16

$$U_C^+ = U_C^- = 0. \quad (2.42)$$

С учетом (2.42) напряжение емкости из (2.33) разд. 2.5 равно

$$u_C(t) = U_{C_{\text{уст}}} - U_{C_{\text{уст}}}^+ e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.43)$$

При гармоническом источнике $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$ установившийся ток в емкости $iy = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$, где $\varphi = \arctg(\omega RC)^{-1}$ – угол сдвига между током и напряжением источника. При этом установившиеся напряжение емкости

$$u_{C_{\text{уст}}}(t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{mC} \cos(\omega t + \psi - \varphi), \quad (2.44)$$

где $U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C}$ – амплитудное напряжение на емкости.

Тогда из выражению (2.43) с учетом (2.44) имеем

$$u_C = -U_{mC} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + U_{mC} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.45)$$

Вид переходного процесса зависит от фазы включения ψ .

Если $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$, то свободная составляющая напряжения емкости

$u_{C_{\text{св}}}(t) = U_{mC} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ и переходный процесс отсутствует. При $\psi - \varphi = 0$ свободная составляющая $u_{C_{\text{св}}}(t)$ имеет наибольшее значение.

Тогда напряжение емкости и ток имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= -U_{mC} \cos \omega t + U_{mC} e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ i &= C \frac{dU_C}{dt} = I_m \sin \omega t - \frac{I_m}{\omega \tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

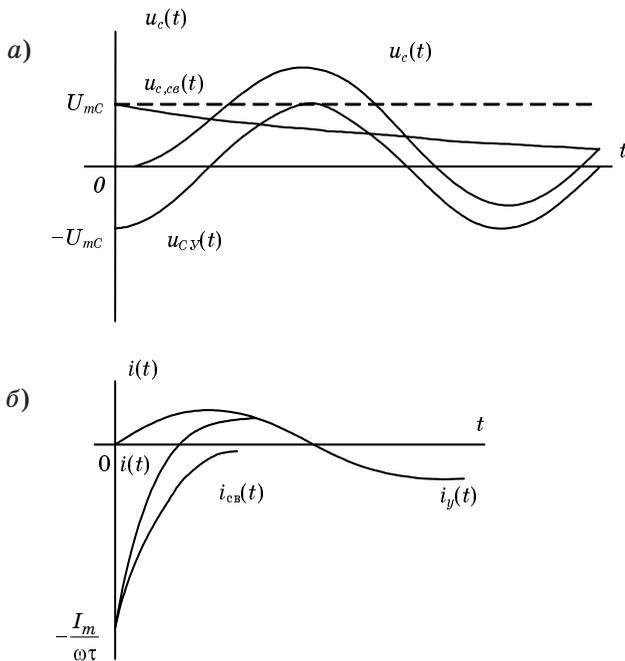


Рис. 2.17

На рис. 2.17,а приведена кривая напряжения $u_c(t)$ при $\tau \geq \frac{2\pi}{\omega}$, из которой видно, что в этом случае во время переходного процесса на емкости возникает перенапряжение. В другом случае при малой постоянной времени $\tau \ll \frac{2\pi}{\omega}$, в цепи в начальный момент времени возникает значительный бросок тока (сверхток), величина которого $i(0) = -\frac{I_m}{\omega\tau}$ (рис. 2.17,б). Сверхток может привести к аварийному режиму работы. Поэтому необходимо принимать меры по его ограничению.

3. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

3.1. Включение цепи RLC на источник постоянного напряжения

По ЗНК для цепи (рис. 3.1) после коммутации имеем

$$iR + u_C + u_L = E. \quad (3.1)$$

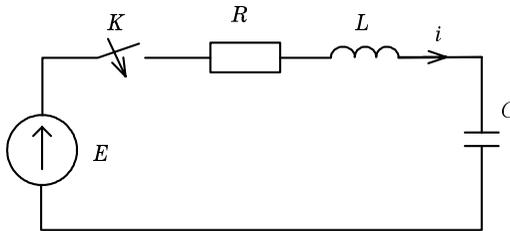


Рис. 3.1

Выражая напряжения на индуктивности и емкости через ток

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt, \quad (3.2)$$

получим интегродифференциальное уравнение для цепи в виде

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E. \quad (3.3)$$

Для его решения продифференцируем левую и правую части по времени поменяем местами слагаемые первое со вторым, и разделив на L , будем иметь линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \quad (3.4)$$

Обозначим:

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (3.5)$$

– коэффициент затухания;

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.6)$$

– частота сводных незатухающих колебаний.

С учетом (3.5) и (3.6) из выражения (3.4) получим однородное дифференциальное уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0. \quad (3.7)$$

Как известно, решение имеет вид

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (3.8)$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования; α_1, α_2 – корни характеристического уравнения.

Запишем характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad (3.9)$$

и найдем его корни

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (3.10)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения имеем три случая:

1. $\delta > \omega_0$ или $R > 2\rho$ $\left(\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$. Тогда корни характеристического уравнения α_1, α_2 обязательно отрицательные, вещественные, разные. Переходный процесс имеет аperiodический вид, т. е. ток не меняет своего направления.

2. $\delta = \omega_0$, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = -\sigma$, т. е. корни отрицательные вещественные равные.

Предельный аperiodический режим работы цепи.

3. Если $\delta < \omega_0$ или $R < 2\rho$, то из (3.10) получаем, что корни комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}, \quad (3.11)$$

где $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота свободных затухающих колебаний.

Переходный процесс в цепи в этом случае – колебательный, ток в цепи каждый полупериод меняет свое направление.

Рассмотрим *aperiodический режим*.

Найдем постоянные интегрирования. Как известно, в соответствии с условиями Коши для определения постоянных интегрирования

необходимо знать выражение для функции и ее производной в начальные моменты времени, приравненные к начальным условиям (числам). Найдем из (3.8) выражение для первой производной

$$\frac{di}{dt} = \alpha_1 A_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 A_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (3.12)$$

Определим начальные условия, исходя из законов коммутации и ЗНК для цепи

$$i^+ = i^- = 0, U_C^+ = U_C^- = 0,$$

тогда из ЗНК

$$i^+ R + U_L^+ + U_C^+ = E,$$

откуда

$$U_L^+ = E. \quad (3.13)$$

Положим $t = 0$ в выражениях (3.8) и (3.12) и учтем начальные значения (3.13), получим

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = i^+ = 0, \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = \frac{U_L^+}{L} = \frac{E}{L}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Откуда определим постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} A_1 &= -A_2, \\ A_1 &= \frac{E}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в общее решение (3.8) и используя (3.2), получим

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}), \\ u_L(t) &= L \frac{di}{dt} = \frac{E(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t})}{(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\ u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i dt + E = \frac{E(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t})}{(\alpha_1 - \alpha_2)} + E. \end{aligned} \quad (3.16)$$

На рис. 3.2. приведены кривые тока, напряжения на индуктивности и емкости для апериодического режима работы. Так как $|\alpha_1| < |\alpha_2|$,

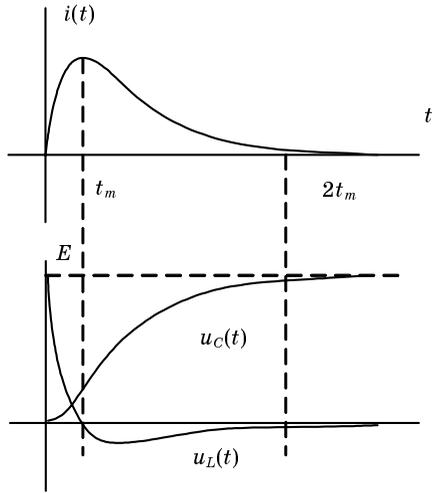


Рис. 3.2

то $(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) > 0$ в любой момент времени, исходя из (3.16) $i(t) > 0$, не меняет своего направления, поэтому режим работы – аperiodический. Переходный процесс при $\delta < \omega_0$ называется аperiodическим. В момент времени $t_m = \frac{\ln(\alpha_1/\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}$ ток достигает максимального значения, при этом напряжение на индуктивности – нулевое.

Рассмотрим *предельный аperiodический режим* $\delta = \omega_0$ ($R = 2\rho$); $\alpha_1 = \alpha_2 = -\delta$. Выражения для тока и напряжений можно получить из (3.16) путем раскрытия пределов, например ток

$$i = \lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \frac{E \sin \omega_{\text{CB}} t}{L \alpha_1 - \alpha_2} e^{-\delta t} = \frac{E}{L} t e^{-\delta t}.$$

Кривые подобны рис 3.2, при этом время, когда ток достигает максимального значения

$$t_m = \frac{1}{\delta}.$$

Рассмотрим *колебательный режим* $\delta < \omega_0$ или $R < 2\rho$, корни характеристического уравнения комплексные сопряженные (см. выражение (3.11)).

Выражение для токов и напряжений получим из соответствующих выражений для аperiodического режима с учетом следующих преобразований:

$$\alpha_1 = -\delta + j\omega_{\text{CB}}; \alpha_2 = -\delta - j\omega_{\text{CB}}; \alpha_1 - \alpha_2 = (-\delta - j\omega_{\text{CB}}) - (-\delta + j\omega_{\text{CB}}) = 2j\omega_{\text{CB}};$$

$$\alpha_1 = -\delta + j\omega_{\text{CB}} = \sqrt{\delta^2 + \omega_{\text{CB}}^2} e^{j\gamma} = \omega_0 e^{j\gamma}; \quad \gamma = \arctg \frac{\omega_{\text{CB}}}{-\delta}; \quad \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi;$$

$$\alpha_2 = -\delta - j\omega_{\text{CB}} = \sqrt{\delta^2 + \omega_{\text{CB}}^2} e^{-j\gamma} = \omega_0 e^{-j\gamma};$$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{E}{\alpha} \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{E}{L} \frac{e^{-\delta t} e^{+j\omega t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega t}}{2j\omega_{\text{CB}}} = \frac{E}{\omega_{\text{CB}} L} e^{-\delta t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \\ &= \frac{E}{\omega_{\text{CB}} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{CB}} t. \end{aligned}$$

Итак, выражение для тока в колебательном режиме

$$i_L(t) = \frac{E}{\omega_{\text{CB}} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{CB}} t. \quad (3.17)$$

На рис. 3.3 изображена кривая тока в цепи $i_L(t)$, имеющая вид затухающей по амплитуде синусоидальной функции. Переходный процесс такого вида называется *колебательным*. Ток каждый полупериод меняет свое направление.

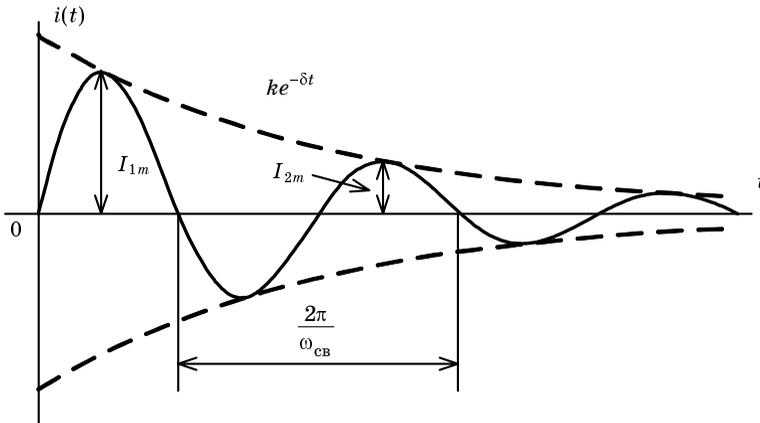


Рис. 3.3

Рассмотрим так называемый декремент колебаний, т. е. отношение амплитуд двух соседних максимумов или минимумов тока (двух значений токов, взятых через период)

$$\Delta = \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{E}{\omega L} e^{-\delta t_1} \frac{1}{\frac{E}{\omega L} e^{-\delta(t_1+T)}} = e^{\delta T} = e^{\delta t}. \quad (3.18)$$

Видно, что декремент колебаний определяется коэффициентом затухания и периодом затухающих колебаний. Поэтому декремент колебаний характеризует скорость затухания тока и тем самым определяет длительность переходного процесса в цепи второго порядка. Часто используют логарифмический декремент затухания

$$\nu = \ln \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \delta T. \quad (3.19)$$

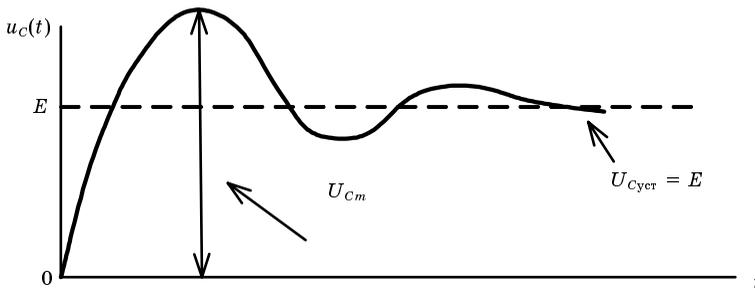


Рис. 3.4

Если рассмотреть напряжение на емкости (рис 3.4), то его максимальное значение U_{Cm} при $t = T/2$ превосходит значение источника тем больше, чем меньше декремент колебаний, однако U_{Cm} не превосходит удвоенного значения источника $U_{Cm} < 2E$. Это используется на практике в электронных схемах, когда необходимо получить удвоенное напряжение источника.

3.2. Включение цепи RLC на источник синусоидального напряжения

Пусть цепь RLC (рис.3.5) включается при нулевых начальных условиях на гармоническое напряжение $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Рассмотр-

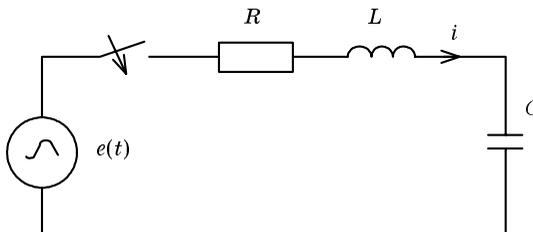


Рис. 3.5

рим процессы в цепи лишь качественно с целью выявления особенностей возникающих здесь процессов. Наибольший интерес здесь представляет случай, когда корни характеристического уравнения комплексные, т. е. случай $\delta < \omega_0$. В этом случае сводная составляющая тока может быть представлена $i_{\text{св}}(t) = A_1 \sin(\omega_{\text{св}} t + \Theta) e^{-\delta t}$, где A_1 и Θ – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Установившаяся составляющая тока определяется

$$i_{\text{св}}(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$; ψ_i – начальная фаза тока.

Тогда ток во время переходного процесса выражается

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}} = I_m \sin(\omega t + \psi_i) + A_1 \sin(\omega_{\text{св}} t + \Theta) e^{-\delta t}. \quad (3.20)$$

Если величина угловой частоты $\omega_{\text{св}}$ почти равна угловой частоте ω источника напряжения, а коэффициент затухания δ мал, то в резуль-

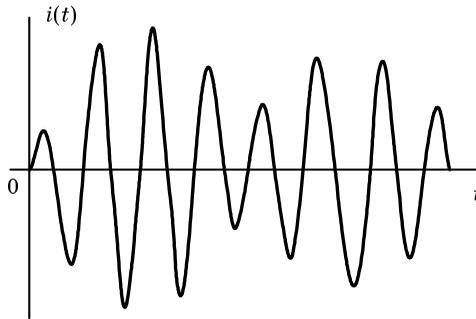


Рис. 3.6

тате сложения установившейся и свободной составляющих получаются колебания, для которых характерно биение амплитуды со сравнительно низкой частотой $\Omega = 0,5(\omega - \omega_{\text{св}})$, показанные на рис. 3.6.

Постепенно вследствие хотя и малого, но конечного затухания биения прекращаются и в цепи устанавливается синусоидальный режим. Если при том же условии $\delta \ll \omega_0$ угловые частоты $\omega = \omega_{\text{св}}$, то выражение (3.20) принимает более простой вид

$$i \approx I_m (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t + \psi_i). \quad (3.21)$$

Характерная особенность этого переходного процесса, называемого изохронизмом колебаний, состоит в том, что амплитуда тока (и других реакций) постепенно нарастает с момента включения до своего установившегося значения (рис. 3.7).

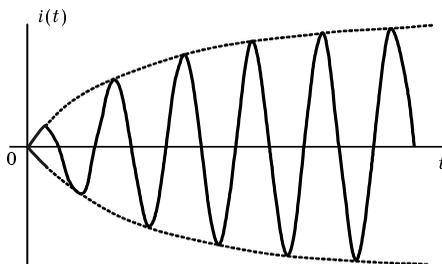


Рис. 3.7

Отметим, что в этом случае $\omega \approx \omega_0$, что соответствует условию резонанса напряжений в цепи. Поэтому амплитуда тока стремится к значению $I_m = U_m/R$, а амплитуда установившихся напряжений на индуктивности и емкости значительно превышает амплитуду приложенного напряжения вследствие высокой добротности цепи Q , что необходимо учитывать, чтобы избежать аварийного режима работы.

3.3. Расчет переходных процессов в сложных цепях. Способы составления характеристического уравнения

В общем случае методика расчета переходных процессов классическим методом включает следующие этапы:

1. Запись выражения для искомой переменной в виде

$$x(t) = x_{\text{уст}}(t) + x_{\text{св}}(t). \quad (3.22)$$

2. Определение установившейся составляющей $x_{\text{уст}}(t)$ общего решения на основании расчета цепи в новом установившемся режиме работы.

3. Составление характеристического уравнения и определение его корней для цепей, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка, вместо корней можно находить постоянную времени t .

4. Запись выражения свободной составляющей $x_{\text{св}}(t)$ в форме, определяемой типом найденных корней.

5. Подстановка полученных выражений установившейся $x_{уст}(t)$ и свободной $x_{св}(t)$ составляющих в выражение (3.22).

6. Определение начальных условий и на их основе – постоянных интегрирования.

7. Окончательная запись общего решения с учетом найденных постоянных интегрирования.

Как видно из приведенной методики расчета переходных процессов, она односторонна для цепей различной сложности. При этом всегда необходимо составлять характеристическое уравнение. Как известно, характеристическое уравнение составляется для цепи после коммутации. Оно может быть получено следующими способами:

1. Непосредственно на основе дифференциального уравнения (3.7), т. е. путем исключения из системы уравнений по законам Кирхгофа, составленных для цепи после коммутации, всех неизвестных величин, кроме одной, относительно которой и записывается уравнение (3.7).

2. Путем использования выражения для входного сопротивления цепи на синусоидальном токе.

3. На основе главного определителя системы уравнений.

Ранее было получено дифференциальное уравнение относительно тока в последовательной $R-L-C$ -цепи, на базе которого дальше записывается характеристическое уравнение.

Следует отметить, что поскольку линейная цепь охвачена единым переходным процессом, корни характеристического уравнения являются общими для всех свободных составляющих напряжений и токов ветвей схемы, параметры которых входят в характеристическое уравнение. Поэтому по первому способу составления характеристического уравнения в качестве переменной, относительно которой оно записывается, может быть выбрана любая.

Применение второго и третьего способов составления характеристического уравнения рассмотрим на примере цепи рис. 3.8.

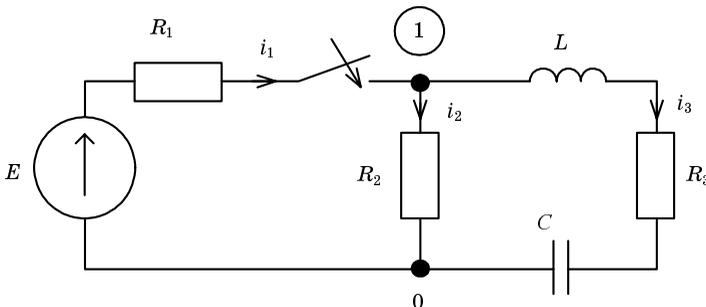


Рис. 3.8

На рис. 3.9 представлен граф рассматриваемой цепи.

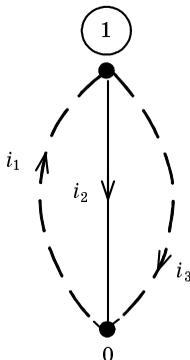


Рис. 3.9

Составление характеристического уравнения по методу входного сопротивления заключается в следующем:

- записываем входное сопротивление цепи на переменном токе;
- заменяем в выражении входного сопротивления $j\omega$ на оператор p ;
- приравниваем входное сопротивление $Z(p)$ к нулю.

Уравнение $Z(p) = 0$ совпадает с характеристическим уравнением цепи.

Следует подчеркнуть, что входное сопротивление может быть записано относительно места разрыва любой ветви схемы. При этом активный двухполюсник заменяется пассивным по аналогии с методом эквивалентного источника напряжения (генератора) или тока. Несмотря на то, что входные сопротивления различны для разных ветвей данной схемы, характеристическое уравнение получается одним и тем же, если нет короткозамкнутых ветвей. Объясняется это тем, что входные сопротивления разветвленных цепей представляют собой дроби, отличающиеся только знаменателями, числители у них одинаковые. Каждый числитель равен определителю системы алгебраизованных уравнений, полученных при решении системы на основе формул Крамера. Поэтому равенство нулю любого входного сопротивления эквивалентно равенству нулю определителя системы. Иногда проще исходить из представления о внешнем источнике тока. В этом случае характеристическое уравнение аналогично выражению для входной проводимости относительно любой пары узлов $Y_{\text{вх}}(p) = 0$.

Данный способ составления характеристического уравнения на основе входного сопротивления либо проводимости предполагает отсутствие в схеме магнитосвязанных ветвей; при наличии таковых необходимо осуществить их предварительное развязывание.

Для цепи на рис. 3.8 относительно зажимов источника входное сопротивление равно

$$Z(j\omega) = R_1 + \frac{R_2 \{j\omega L + R_3 + \frac{1}{j\omega C}\}}{R_2 + R_3 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Заменив в выражении входного сопротивления $j\omega$ на p и приравняв полученное выражение к нулю, получим характеристическое уравнение

$$CL(R_1 + R_2)p^2 + C(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)p + (R_1 + R_2) = 0$$

или каноническом виде

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0, \quad (3.23)$$

где $\delta = \frac{1}{2L} (R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2})$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – частота свободных колебаний.

Входная проводимость между узлами 1 и 0 равна

$$Y_{10} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + pL + \frac{1}{pC}}.$$

Приравнивая входную проводимость $Y_{10} = 0$, получим выражение, аналогичное характеристическому уравнению (3.23).

Рассмотрим теперь составление характеристического уравнения на основе выражения главного определителя. Число алгебраических уравнений, на базе которых он записывается, равно числу неизвестных свободных составляющих токов. Алгебраизация исходной системы интегродифференциальных уравнений, составленных, например, на основании законов Кирхгофа или по методу токов связей, осуществляется заменой символов дифференцирования и интегрирования, соответственно, на умножение и деление на оператор p . Характеристическое уравнение получается путем приравнивания записанного определителя к нулю. Поскольку выражение для главного определителя не зависит от правых частей системы неоднородных уравнений, его составление можно производить на основе системы уравнений, записанных для полных токов.

Для цепи на рис. 3.8 алгебраизованная система уравнений на основе метода токов связей имеет вид

$$i_1(R_1 + R_2) - i_2 R_2 = E,$$

$$-i_1 R_2 + (R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}) = 0.$$

Отсюда выражение для главного определителя этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = (R_1 + R_2) \left(R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC} \right) - R_2^2 = 0.$$

Приравнивая определитель к нулю и раскрывая скобки, получим выражение, аналогичное характеристическому уравнению цепи (3.23).

Таким образом, на основе трех рассмотренных выше случаев получают выражение и корни характеристического уравнения для цепей любой сложности.

4. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

4.1. Уравнения переменных состояния

При анализе переходных процессов необходимо выбрать переменные так, чтобы их число было минимальным, но и достаточным для анализа электромагнитных процессов в цепи. В качестве таких переменных удобно выбрать переменные, характеризующие энергетический запас в цепи. Будем называть энергетическое состояние цепи просто состоянием цепи, а переменные, характеризующие это состояние – переменными состояниями.

Переменные состояния – потокосцепление, ток индуктивности и заряд, либо напряжение емкости. Если во время коммутации емкость и индуктивность не меняется, то в качестве переменных берут ток индуктивности i_L и напряжение емкости U_C , в противном случае потокосцепление индуктивности ψ_L и заряд емкости Q_C .

Уравнения, составленные в нормальной форме относительно переменных состояний, называются уравнениями переменных состояния (слева первые производные от каких-то функций, справа – функции реакций и возмущений с некоторыми постоянными коэффициентами).

Для цепи второго порядка уравнения переменных состояния имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}e_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{12}e_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где x_1, x_2 – реакции; e_1, e_2 – возмущения; $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – некоторые постоянные коэффициенты, зависящие от параметров и конфигурации цепи.

Система уравнений (4.1) в матричном виде имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

где $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов переменных состояния; $[B]$ – матрица коэффициентов источников.

Для составления уравнений переменных состояния необходимо: для цепи после коммутации составить уравнения по законам Кирхгофа, затем исключить токи и напряжения резистивных ветвей, т. е. выразить их через переменные состояния. После этого необходимо найти напряжение индуктивности и ток емкости через переменные состояния и записать через соответствующие производные.

$$u_L = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad i_C = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Так поступают, если схема простая по топологии, если схема «сложная», то для составления уравнений необходимо воспользоваться графом с емкостным деревом. При составлении графа необходимо, чтобы ветви дерева содержали только емкости, активное сопротивление и источники, т. е. ветви дерева не должны содержать индуктивности. Затем составляют уравнения по законам Кирхгофа для главных сечений и главных контуров и опять исключают токи резистивных элементов.

Выбор емкостного дерева позволяет избежать математических трудностей при исключении токов и напряжений резистивных ветвей.

Составим уравнения переменных состояния.

Случай «простой» схемы (рис. 4.1).

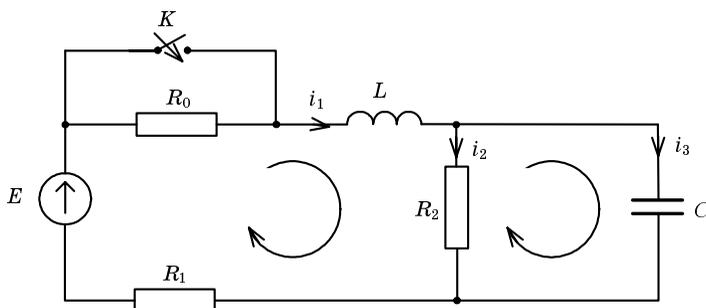


Рис. 4.1

Уравнения по законам Кирхгофа.

$$\begin{cases} -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0, \\ u_L(t) + i_1(t)R_1 + i_2(t)R_2 = E, \\ u_C(t) - i_2(t)R_2 = 0; \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} i_1(t) \\ u_C(t) \end{array} \right\}$$

– переменные состояния, так как характеризуют запас энергии.

Определяем из системы (4.2) напряжение индуктивности и ток емкости через переменные состояния, чтобы найти уравнения переменных состояния. Из третьего уравнения системы (4.2) имеем $i_2(t) = \frac{u_C(t)}{R_2}$. Из второго уравнения системы (4.2)

$$u_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} = E - i_1(t)R_1 - i_2(t)R_2 = E - i_1(t)R_1 - u_C(t)$$

или

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_1(t) - \frac{1}{L}u_C(t) + \frac{1}{L}E. \quad (4.3)$$

Из первого уравнения системы (4.2)

$$\begin{aligned} i_3(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) = i_1(t) - \frac{u_C(t)}{R_2}, \\ \frac{du_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i_1(t) - \frac{1}{CR_2}u_C(t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Записывая (4.3) и (4.4) в виде системы, получим уравнения переменных состояния

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_1(t) - \frac{1}{L}u_C(t) + \frac{1}{L}E, \\ \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_1(t) - \frac{1}{CR_2}u_C(t). \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Метод переменных состояния является дальнейшим развитием классического метода и получил широкое применение с бурным развитием вычислительной техники.

Система уравнений может быть решена:

1. Аналитически.
2. Численно на ЦВМ.
3. Численно на АВМ.

1. Для аналитического решения необходимо найти так называемые собственные числа матрицы $[A]$, другими словами – корни ха-

рактического уравнения [для этого необходимо составить выражение типа (4.6)]

$$\det[\alpha [1] - [A]] = 0, \quad (4.6)$$

где $[A]$ – матрица коэффициентов переменных состояний; $[1]$ – единичная матрица того же порядка, что и $[A]$; α – характеристическое число; \det – главный определитель матрицы $[A]$. Раскрывая выражение (4.6) и приравняв его к нулю, получаем характеристическое уравнение, находим корни и записываем решение, например для цепи 2-го порядка, аналогично вышеприведенному (см. цепь *RLC*).

Затем определяем постоянные интегрирования, как и в классическом методе.

2. Для численного решения уравнения переменных состояний используются сервисные стандартные программы численного интегрирования: метод Эйлера, метод Рунге–Кутты, метод Ньютона–Рафсона и т. д.

Особую роль играет вопрос числовой устойчивости, т. е. каким должен быть шаг интегрирования, с одной стороны – достаточно малым (для повышения точности расчетов), но при этом увеличивается время расчетов, с другой стороны – при увеличении шага интегрирования возрастает накопленная погрешность и процесс расчета может быть расходящимся (потеря числовой устойчивости).

3. При расчете на АВМ уравнения интегрируются с помощью электронных усилителей-интеграторов

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}e_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{12}e_2. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение системы, получим

$$x_1 = \int a_{11}x_1 dt + \int a_{12}x_2 dt + \int b_{11}e_1 dt.$$

Условное обозначение усилителя инвертора показана на рис. 4.2.

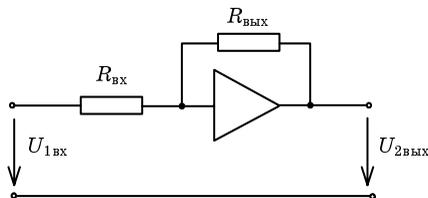


Рис. 4.2

Выходное напряжение пропорционально входному напряжению, но в противофазе

$$U_2 = -k_y U_1,$$

где $k_y = \frac{R_{\text{ВЫХ}}}{R_{\text{ВХ}}}$ – коэффициент усиления.

Условное обозначение усилителя-интегратора приведено на рис. 4.3.

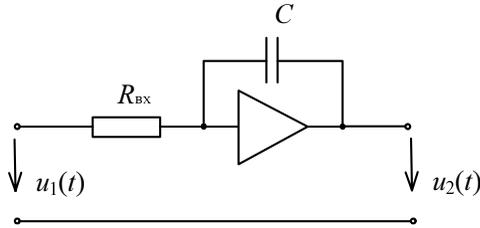


Рис. 4.3

Выходное напряжение является интегралом от входного напряжения

$$u_2(t) = \int u_1(t) dt.$$

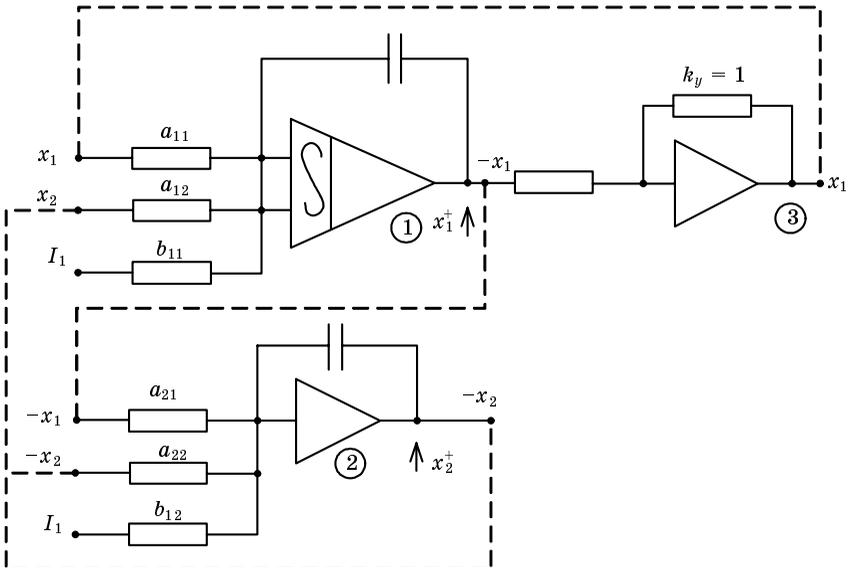


Рис. 4.4

Для моделирования процесса собирается схема набора: совокупность инверторов и интеграторов, на которой соединяются между

собой одинаковые входы и выходы. Число входов у интегратора равно числу слагаемых в правой части уравнений переменных состояния. На выход интегратора подается напряжение, соответствующее начальному значению переменной: x_1^+, x_2^+ (рис. 4.4).

Для изменения знака переменной x используется инвертор (схема набора АВМ).

Метод переменных состояний применим для расчета линейных и нелинейных цепей, поэтому это основной числовой метод расчета переходных процессов.

4.2. Уравнения состояния активных цепей

Уравнение состояний для цепей, содержащих зависимые источники, составляются по общим правилам. При этом вначале зависимые источники принимаются независимыми. После этого уравнения напряжения и токи зависимых источников выражаются через переменные состояния подставляются в уравнения и группируются члены при одинаковых переменных.

Пример

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 4.5,а.

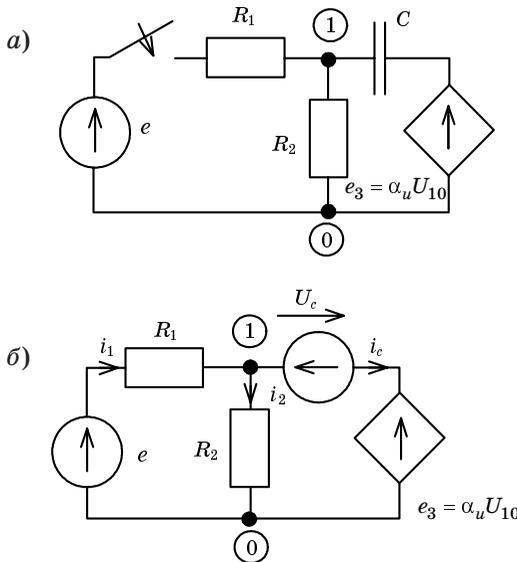


Рис. 4.5

Цепь содержит один реактивный элемент – емкость, следовательно, в качестве переменной состояния выбираем напряжение на емкости. Составим уравнения для схемы замещения (рис. 4.5,б)

$$i_c + i_2 - i_1 = 0, \quad R_1 i_1 = e - U_c - e_3, \quad R_2 i_2 = e_3 + U_c,$$

где $e_3 = \alpha_u U_{10} = \alpha_u R_2 i_2$.

Из второго и третьего уравнений находим

$$i_2 = \frac{U_c}{R_2(1-\alpha_u)}, \quad i_1 = \frac{e - \frac{U_c}{1-\alpha_u}}{R_1}.$$

Подставляя i_1 и i_2 в третье уравнение, находим i_c , учитывая что $i_c = C \frac{dU_c}{dt}$ и получим уравнение состояния

$$\frac{dU_c}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2(1-\alpha_u)} U_c + \frac{1}{R_1 C} e.$$

Для цепей с зависимыми источниками порядок или степень сложности зависит не только от топологических вырождений (индуктивных сечений и емкостных контуров), но также от параметрических вырождений, т. е.

$$n = N_{LC} - N_{Ce} - N_{Lj} - N_p,$$

где N_p — число параметрических вырождений. Параметрические вырождения возникают за счет дополнительных условий, которые определяются зависимыми источниками. Приведем несколько примеров.

Для схемы, изображенной на рис. 4.6, запишем уравнения Кирхгофа

$$-i_1 + i_2 + i_l = 0,$$

$$R_1 i_1 + L \frac{di_l}{dt} - \alpha_u U_1 = e,$$

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = e.$$

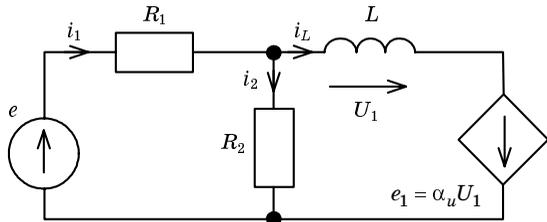


Рис. 4.6

В результате преобразования уравнений получим

$$L(1-\alpha_u) \frac{di_l}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_l = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e.$$

Если $\alpha_u \neq 1$, уравнение состояния

$$\frac{di_l}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)(1-\alpha_u)} i_l + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)(1-\alpha_u)} e,$$

имеет порядок $n = 1$.

Если $\alpha_u = 1$, то порядок цепи оказывается нулевым, так как

$$i_l = \frac{e}{R_1}.$$

Для цепи, изображенной на рис. 4.7, запишем уравнение законов тока Кирхгофа

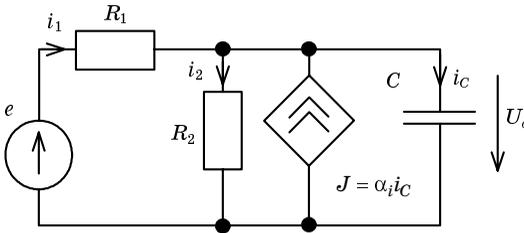


Рис. 4.7

$$i_c - \alpha_i i_c + i_2 - i_1 = 0.$$

Выразим токи i_1 и i_2 через переменную состояния U_c при помощи закона напряжений Кирхгофа

$$i_1 = \frac{e - U_c}{R_1}, \quad i_2 = \frac{U_c}{R_2}.$$

и получим

$$(1 - \alpha_i) i_c + \frac{U_c}{R_2} + \frac{U_c - e}{R_1} = 0.$$

Если $\alpha_i \neq 1$, то учитывая, что $i_c = C \frac{dU_c}{dt}$, получим

$$\frac{dU_c}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2 (1 - \alpha_i)} U_c + \frac{e}{CR_1 (1 - \alpha_i)},$$

т. е. уравнение первого порядка.

Если же $\alpha_i = 1$, то

$$U_c = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e$$

и порядок будет нулевым. Для схемы рис. 4.8, нет CE -контуров, но есть контур с емкостью C и зависимым источником напряжения. Простой анализ цепи показывает, что

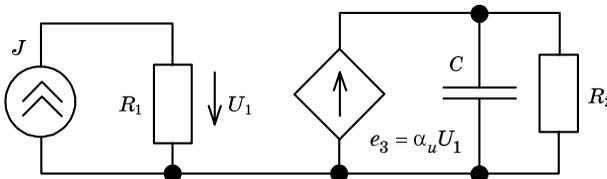


Рис. 4.8

$$U_c = \alpha_u R_1 J.$$

Таким образом, U_c не является независимым напряжением, а поэтому порядок цепи равен 0.

Приведенные примеры показывают, что определение порядка или степени сложности может стать искомой задачей. Кроме этого, для цепей с зависимыми источниками не всегда можно записать уравнение в нормальной форме. Это объясняется тем, что для идеализированных моделей схемы замещения могут возникнуть противоречивые условия, приводящие к нарушению условия единственности решения.