МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Севастопольський національний технічний університет

С.Г. ГЛЕЧ, С.Ф. ЛЕДЯЄВ, І.В. ОЛЬШАНСЬКА

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів технічних
спеціальностей
вищих навчальних закладів

Севастополь 2011

УДК 519.2
ББК 22.17
Г 53

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф., лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, завідувач кафедри прикладної математики НАСОА Держкомстату України *Ф.В. Моцний*;

д-р техн. наук, проф. кафедри вищої математики Севастопольської філії Європейського університету *Ю.М. Осадчий*;

д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу *В.М. Мойсишин*.

Науковий редактор – д-р фіз.-мат. наук, проф., почесний професор Севастопольського національного технічного університету *О.Ф. Хрустальов*.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист №1/11-5577 від 04/07/11)

Глеч С.Г.

Г53 Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник/ С.Г. Глеч, С.Ф. Ледяєв, І.В. Ольшанська. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – 176 с.

ISBN 978 – 617 – 612 – 005 – 6

У навчальному посібнику викладено основні поняття теорії ймовірностей і математичної статистики згідно програм підготовки бакалаврів, спеціалістів та магістрів усіх спеціальностей технічного профілю денної та заочної форм навчання.

Розглянуто випадкові події, випадкові величини, системи випадкових величин, елементи математичної статистики. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням завдань загального та технічного профілю. У кінці кожного параграфа наведені контрольні запитання та завдання. Наведено варіанти індивідуальних завдань для самостійної роботи за темами модулів «Випадкові події», «Випадкові величини», «Математична статистика».

Студентам, аспірантам та викладачам вищих навчальних закладів технічного профілю.

Глеч С.Г.

Г 53 Теория вероятностей математическая статистика: учеб. пособие/ С.Г. Глеч, С.Ф. Ледяєв, И.В. Ольшанская. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – 176 с.

ISBN 978 – 617 – 612 – 005 – 6

В учебном пособии изложены основные понятия теории вероятностей и математической статистики в соответствии с программой подготовки бакалавров, специалистов и магистров всех специальностей технического профиля дневной и заочной форм обучения.

Рассмотрены случайные величины, системы случайных величин, элементы математической статистики. Изложение теоретического материала сопровождается решением задач общего и технического профиля. В конце каждого параграфа приведены контрольные вопросы и задания. Приведены варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы по темам модулей «Случайные события», «Математическая статистика».

Студентам, аспирантам и преподавателям высших учебных заведений технического профиля.

УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 978 – 617 – 612 – 005 – 6

Зміст

ВСТУП

Навчальний посібник підготовлений відповідно до навчальної програми загального курсу «Вища математика» з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» як один з розділів вищої математики. Структуризація за модульним принципом цієї навчальної дисципліни є складовою частиною впровадження кредитно-модульної системи навчального процесу в Севастопольському національному технічному університеті. Мета викладання цієї дисципліни полягає у тому, щоб допомогти студентам засвоїти відповідний математичний апарат, необхідний для обробки математичних моделей, пов'язаних з подальшою практичною діяльністю фахівців.

Важливим елементом опанування курсу й оволодінням його методами є самостійна робота студентів. Вона є суттєвою та вагомою складовою частиною при виконанні поточних домашніх завдань циклічної роботи з виконання індивідуальних модульних завдань. Результативність самостійної роботи студентів забезпечується ефективною системою контролю, що складається з опитування студентів за лекційним матеріалом, перевірки виконання поточних домашніх завдань, виконання завдань біля дошки, захисту індивідуальних модульних робіт.

Навчальний посібник є складовою частиною курсу «Вища математика» і завершальним з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика».

Висловлюємо щиру подяку професору кафедри вищої математики Національного гірничого університету України Сторчаю Володимиру Федоровичу за корисні зауваження, які враховані в остаточному варіанті навчального посібника.

Розділ 1. Випадкові події

1.1 Предмет теорії ймовірностей. Основні поняття. Дії над подіями

Предмет теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах.

Випадковим називається таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного і того ж досліду відбувається кожного разу неоднаково.

Теорія ймовірностей вивчає ті випадкові явища, які можуть спостерігатися практично необмежено.

Виявляється, що незалежно від конкретної природи випадкових явищ, які повторюються багато разів, їх кількість відповідає певним *імовірнісним закономірностям*.

Встановленням цих закономірностей і займається теорія ймовірностей.

Отже, предметом теорії ймовірностей є вивчення ймовірних закономірностей масовий однорідних випадкових явищ.

Основні поняття теорії ймовірностей

Випробування - наявність певного комплексу умов або дій, при яких спостерігається відповідне явище. Випробуванням є, наприклад, стрілянина в мішень, підкидання монети [13].

Подія - можливий результат випробування. Так, при стрілянині в мішень подіями будуть попадання і промах; при киданні монети - поява "герба" або "цифри". При киданні гральної кістки можуть відбутися шість рівно можливих результатів, відповідних випадання одного, двох, трьох, чотирьох, п'яти і шести очок.

Випадковою подією називають будь-яке можливе безліч результатів. Так при киданні гральної кістки випаданні парного числа очок, тобто поява або грані з двома очками, або з чотирма, або з шістьма очками, є випадковою подією. Також випадання межі з трьома очками є випадковою подією. Поява будь-якого числа очок (1, 2, 3, 4, 5, 6) також є випадковою подією. Це випадкова подія володіє однією особливістю, вона обов'язково наступає і тому називається *достовірною подією* [9].

Класифікація випадкових подій

1. Подію називають *достовірною*, якщо при випробуванні вона обов'язково відбудеться. Достовірну подію позначимо U .

2. Подію називають *неможливою*, якщо при випробуванні вона не відбудеться. Неможливу подію позначимо V .

3. Подію називають *випадковою*, якщо при випробуванні вона може відбутися, а може і не відбутися. Випадкові події позначають $A, \quad B, \quad C, .$

4. Події називають *несумісними*, якщо появу однієї з них виключає поява інших подій в одному й тому ж випробуванні.

5. Події називають *єдино можливими*, якщо поява в результаті випробування однієї і лише однієї з них є достовірною подією.

6. Події називають *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що жодна з цих подій не є більш можливою, ніж інші.

7. Події $A, \quad B, \quad C, .$ утворюють *повну групу подій*, якщо в результаті випробування відбудеться одна з них. При цьому події попарно несумісні і єдино можливі. Події, що утворюють повну групу подій, називають *елементарними*.

8. Випадки, за яких події відбуваються, називають *такими, що сприяють* появі цих подій.

9. Дві єдино можливі події, що створюють повну групу подій, називають *протилежними*. Дві протилежні події позначають A і $\overline{A}$. Наприклад, якщо A - подія (попадання в мішень при пострілі), то їй протилежна $\overline{A}$ (промах при пострілі у мішень).

Дії над подіями

Визначення. Сумою двох подій A і B називається подія C, яка полягає у появі події A або події B, або появі обох подій разом.

Позначається сума подій $C = A + B$, або $C = A \bigcup B$.

Сумою декількох подій називається подія, яка полягає у появі *хоч би однієї з цих подій*.

Позначається: $A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

З визначення випливає, що сума протилежних подій – достовірна подія: $A + \overline{A} = U$.

Визначення. Добутком двох подій A і B називається подія C, яка полягає в сумісній появі події A і події B.

Позначається добуток подій $C = A \cdot B$ або $C = A \bigcap B$. Добуток протилежних подій – неможлива подія: $A \cdot \overline{A} = V$.

Добутком кількох подій називається подія, що полягає в сумісній появі всіх цих подій.

Позначається добуток кількох подій $\prod_{i=1}^{n} A_i$ або $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Розглянемо графічну ілюстрацію наведених основних визначень.

Кожен нерозкладний на складові результат випробування назвемо *елементарною подією*. Позначимо через $\Omega = \{\omega\}$ безліч усіх елементарних подій. Ця множина називається *простором* елементарних подій.

Для наочності будемо зображувати простір Ω у вигляді прямокутника на площині, а елементи простору, елементарні події ω_i – точками в тому прямокутнику (рисунок 1.1). Простір Ω містить в собі всі можливі результати випробування.

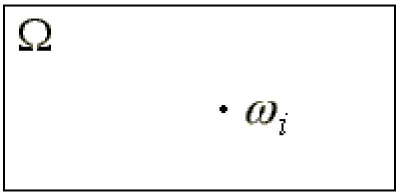


Рисунок 1.1 – Простір Ω

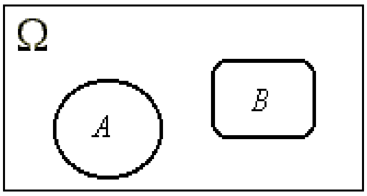


Рисунок 1.2 – Несумісні події

Будь-яка підмножина A простору Ω ($A \subset \Omega$) називається подією A, підмножина $B \subset \Omega$ називається подією B (Рисунок 1.2). Це означає, що коли в результаті випробування відбудеться елементарна подія з підмножини A, то і відбудеться подія A (графічно – в результаті випробування виявиться точка в області A).

На рисунку 1.2 сума двох подій A і B означає прояв точки ω_i або в підмножині A, або в підмножині B. Події A і B є *несумісними*.

На рисунку 1.3 сума двох подій A і B означає появу точки ω_i або в підмножині A, або в підмножині B, або в загальній частині підмножин. Події A і B є *сумісними*.

Рисунок 1.4 ілюструє суму подій $A+B+C+D$. Сума зазначених подій полягає в прояві точки ω_i у зафарбованій частині Ω.

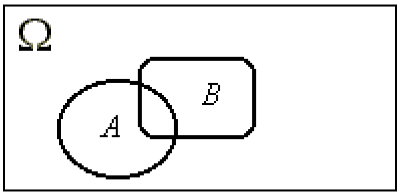


Рисунок 1.3 – Сумісні події

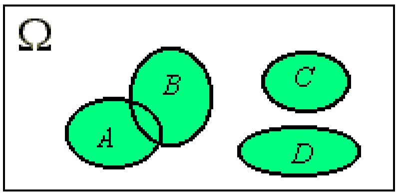


Рисунок 1.4 – Сума подій

На рисунку 1.5 зображено, що добуток двох подій $A \cdot B$ означає появу точки ω_i в спільній, зафарбованій області.

Добутком декількох подій називається подія, що полягає в сумісній появі всіх цих подій. На рисунку 1.6 появу точки ω_i в зафарбованій області означає добуток $A \cdot B \cdot C$.

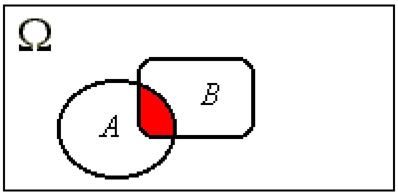


Рисунок 1.5 – Добуток подій

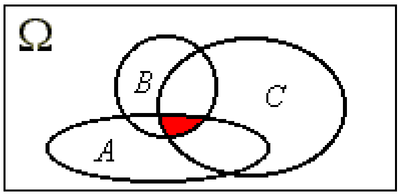


Рисунок 1.6 – Добуток A B C

Ілюстрація протилежних подій – на рисунку 1.7.

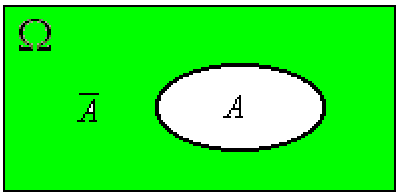


Рисунок 1.7 – Протилежні події

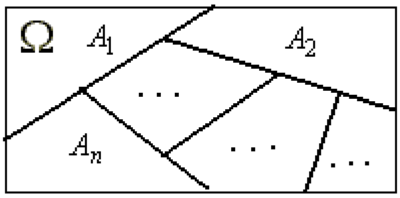


Рисунок 1.8 – Повна група подій

На рисунку 1.8 зображена повна група несумісних подій A_1, A_2, ... A_n. Тут події попарно несумісні $A_i \cdot A_k = V \ \ (i \neq k)$.

Нехай А, В і С– довільні випадкові події, V – неможлива подія. Введені операції над подіями задовольняють наступним законам.

1. $\overline{\overline{A}} = A$ - закон подвійного заперечення.
2. $A + B = B + A$ - комутативний закон додавання.
3. $A \cdot B = B \cdot A$- комутативний закон множення.
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$ - асоціативний закон додавання.
5. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$- асоціативний закон множення.
6. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$- перший дистрибутивний закон.
7. $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$- другий дистрибутивний закон.
8. $A + A = A$.
9. $A \cdot A = A$.
10. $A + \overline{A} = \Omega$.
11. $A \cdot \overline{A} = V$.
12. $A + \Omega = \Omega$.
13. $A \cdot \Omega = A$.
14. $A + V = A$.
15. $A \cdot V = V$.
16. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ - закон подвійності.
17. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ - закон подвійності.

Зауваження. Всі наведені вище визначення будуть справедливими, якщо події належатимуть одному простору елементарних подій. Якщо ж подія A належить простору Ω_1, подія B належить іншому простору Ω_2, то ні про суму, ні про добуток подій A і B мови не може бути.

Приклад 1. У мішень робиться два постріли. Позначимо A - подія, що полягає у попаданні у мішень при першому пострілі; B - попадання у мішень при другому пострілі. Їм протилежні події $\overline{A}$ - промах при першому пострілі, $\overline{B}$ - промах при другому пострілі.

Комбінуючи прості події A і B та їм протилежні, можна очікувати на появи таких подій:

а) попадання у мішень при одному або обох пострілах $A+B$;

б) попадання у мішень і при першому і при другому пострілах $A\cdot B$;

в) промах і при першому і при другому пострілах $\overline{A}\cdot\overline{B}$;

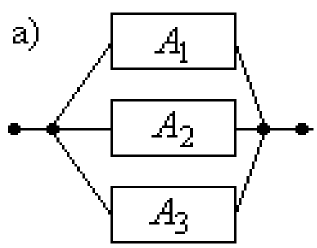
г) попадання у мішень тільки один раз при двох пострілах $A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$.

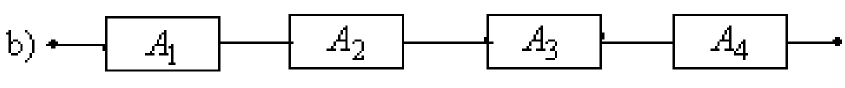
Контрольні запитання

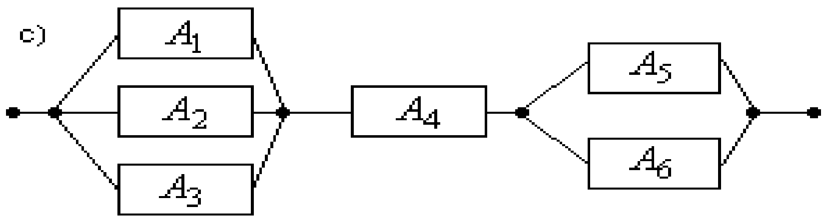
1. Що називається подією, елементарною подією, простором елементарних подій? Наведіть приклад досліду (випробування), в результаті якого може з'явитися або не з'явитися якась випадкова подія.
2. Які події називають сумісними, несумісними, достовірними, неможливими, протилежними?
3. Які події утворюють повну групу?
4. Що називається сумою подій, добутком подій?
5. Наведіть приклади додавання двох несумісних подій і двох подій, які можуть відбутися одночасно.
6. Наведіть приклад добутку двох подій. Наведіть приклад двох подій, добуток яких є неможливою подією, але які належать одній множині елементарних подій.

Завдання

Нехай події $A_1, A_2, ..., A_6$ позначають безвідмовну роботу відповідних елементів $A_1, A_2, ..., A_6$ на схемах a, b, c. При безвідмовній роботі елемента електричний сигнал проходить через елемент. Якщо елементи розташовані послідовно, сигнал проходить за схемою при безвідмовній роботі всіх елементів. Якщо елементи розташовані паралельно, сигнал проходить через схему, якщо працює хоч би один елемент. Комбінуючи події $A_1, A_2, ..., A_6$ і їм протилежні, подайте для кожної схеми a, b, c подію: сигнал проходить через схему.







1.2 Класична і геометрична ймовірності

Побудова логічно повноцінної теорії ймовірностей засноване на аксіоматичному визначенні випадкової події і його ймовірності. В системі аксіом, запропонованої А. Н. Колмогоровим у 1933 році [8], невизначені поняття є елементарне подія і ймовірність. Наведемо аксіоми, що визначають ймовірність:

1. Кожної події А поставлено у відповідність невід'ємне дійсне число P(A) ≥ 0. Це число називається ймовірністю події А.
2. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Ймовірність настання хоча б одного з попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій $P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k)$.

Виходячи з цих аксіом, властивості ймовірностей і залежності між ними виводять в якості теорем.

1.2.1 Класичне визначення ймовірності

Якщо множина Ω складається з n рівноможливих, несумісних елементарних подій, які утворюють повну групу, то

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де m - число елементарних подій, які сприяють появі події A.

Інакше: ймовірність події A дорівнює відношенню числа, що сприяє події результатів m при одному випробовуванні, до всіх рівноможливих результатів n.

П р и к л а д 2. В урні знаходиться 15 куль однакового діаметра: 4 червоних, 5 синіх, 6 білих. Знайти ймовірність того, що вийнята навмання куля буде синьою.

Розв'язання

Аналіз умови завдання. Виймання куль з урни, це:

1) повна група подій (множина Ω), оскільки при одному випробовуванні (вийманні кулі) обов'язково з'явиться куля;
2) поява куль – рівноможлива подія (кулі однакового розміру та кольору не видно при вийманні).

Висновок – виконання умов 1 – 2 дозволяє застосувати формулу (1.1).

Позначимо подію A - появу синьої кулі. За умовою завдання

$n = 15, \quad m = 5, \ \Rightarrow$

$$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

1.2.2 Геометричне визначення ймовірності

Нехай в результаті випробування точка з однаковою ймовірністю обов'язково може потрапити в будь-яке місце деякої області G. Вважаємо, що подія A відбулася, якщо точка при цьому потрапляє в область g, $g \subset G$. Геометричною ймовірністю події A називають ймовірність, обчислену за формулою

$$P(A) = \frac{міра \quad g}{міра \quad G}. \tag{1.2}$$

Під мірою розуміють довжину, площу, об'єм в одно-, двох і тривимірному випадках відповідно.

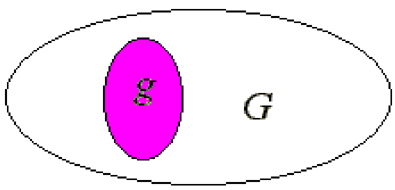
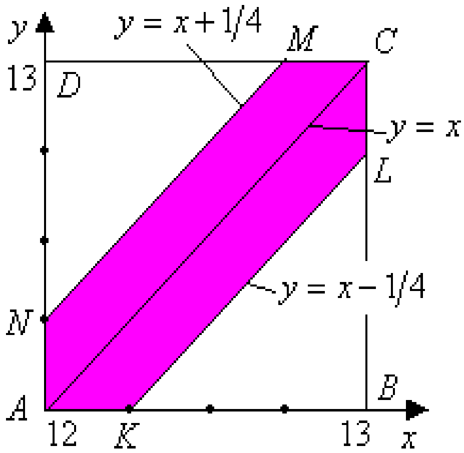


Рисунок 1.9 – Геометричне визначення ймовірностей

На рис. 1.9 простір Ω - сукупність усіх точок області G і складається з нескінченної кількості елементарних подій. Поняття «Геометричної ймовірності» можна розглядати як узагальнення поняття «Класичної ймовірності» на випадок з нескінченним числом результатів.

Геометричного визначення ймовірностей продемонструємо на прикладі «завдання про зустріч».



Приклад 3. «Завдання про зустріч».

Двоє людей умовилися зустрітися у визначеному місці між 12 і 13 годинами дня. Перша людина, що прийшла, чекає на другу впродовж чверті години, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна людина навмання, незалежно від іншої, вибирає момент свого приходу.

Рисунок 1.10 – Завдання про зустріч

Розв'язання

Позначимо x і y – моменти приходу на зустріч першої і другої людини $12 \le x \le 13$ $12 \le y \le 13$. Оскільки моменти появи людей можливі між 12 і 13 годинами, то точка $M(x, y)$ з однаковою ймовірністю потрапить до квадрата $ABCD$, зображеного на рисунку 1.10.

Точки, що знаходяться на діагоналі AC квадрата з рівнянням $y = x$ відповідають одночасній появі в обумовленому місці обох людей. Лінія NM з рівнянням $y = x + 1/4$ відповідає тому, що друга людина приходить на чверть години пізніше першої. Лінія KL з рівнянням $y = x - 1/4$ відповідає тому, що друга людина приходить на чверть години раніше першої. Зустріч відбудеться, якщо точка $M(x, y)$ потрапить у зону між лініями $y = x + 1/4$ і $y = x - 1/4$. Умови геометричної ймовірностей виконуються, можна застосувати формулу (1.2). Площа зони G (площа квадрата $ABCD$) дорівнює одиниці. Зона g –

зафарбована на рисунку 10. Площу зони g знаходимо, віднімаючи від площі квадрата $ABCD$ площі двох трикутників

$$S_g = S_{ABCD} - (S_{KBL} + S_{NMD}).$$

Якщо A – подія, що полягає в зустрічі, яка відбулася, то

$$P(A) = \frac{площа \quad g}{площа \quad G} = \frac{1-9/16}{1} = \frac{7}{16}.$$

Відповідь: $P(A) = \dfrac{7}{16}$.

Приклад 4. Супутник Землі рухається по орбіті, що розміщена між 60° північної широти і 60° південної широти. Визначити ймовірність того, що супутник упаде на поверхню Землі вище 30° північної широти.

Розв'язання

При розв'язанні будемо виходити з того, що математичною моделлю Землі є куля, радіус якій позначимо через R і падіння супутника рівно можливе в будь-якому «місці» кульового пояса між 60° північної широти і 60° південної широти. Оскільки площа S кульового пояса між зазначеними широтами дорівнює $S = 2\pi R(2H)$, де $H = R\sin 60°$ – половина висоти кульового шару (Рисунок 1.11), а площа s кульового пояса вище 30° північної широти і нижче 60° південної широти буде $s = 2\pi Rh$, де $h = R\sin 60° - R/2$, то шукана імовірність складатиме $P = \dfrac{s}{S}\dfrac{(3-\sqrt{3})}{6} = 0{,}2113$.

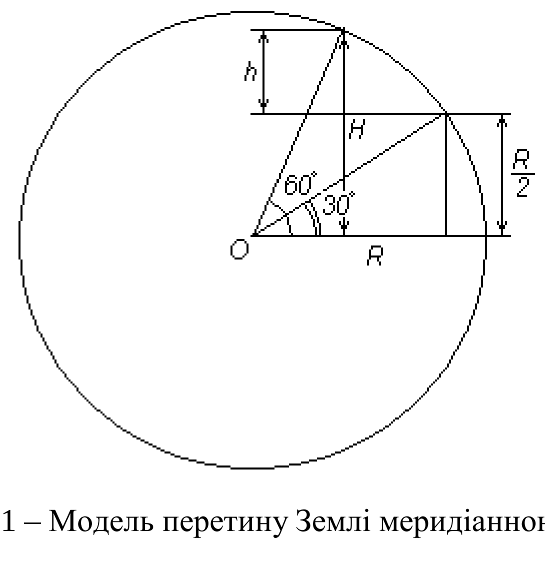


Рисунок 1.11 – Модель перетину Землі меридіанною площиною

Контрольні запитання

1. Що розуміють під ймовірністю події?
2. У яких межах змінюється ймовірність події?
3. Яка ймовірність достовірної та неможливої події?
4. Сформулюйте класичне визначення ймовірності.
5. Сформулюйте геометричне визначення ймовірності.

Задачі

1. Підкидається гральний кубик з цифрами на гранях 1, 2, 3, 4, 5, 6. Яка ймовірність: а) випадання парного числа; б) випадання числа, кратного трьом?

2. На п'ять лотерейних білетів з 120 випадає виграш. Яка ймовірність виграшу при придбанні одного квитка?

3. Стіл має форму квадрата із стороною 1 м. На столі намальовано коло діаметром 0,5 м. Яка ймовірність того, що кулька, кинута зверху на стіл, потрапить до кола (за умови, що кулька з однаковою ймовірністю потрапляє в будь-яку точку столу)?

4. Після буревію на ділянці між 50-м і 80-м кілометрами телефонної лінії відбулося обривання дроту. Яка ймовірність, що обривання відбувся між 60-м і 65-м кілометрами лінії, якщо міцність дроту однакова вздовж усієї лінії?

5. Цифри 1, 2, 3, ..., 9, зображені на окремих картках складають до скриньки і ретельно перемішують. Навмання виймають одну картку. Знайти ймовірність того, що число, написане на цій картці парне.

6. У прямокутнику 5 на 4 см знаходиться коло радіусом 1,5 см. Яка ймовірність того, що точка, випадковим чином поставлена в прямокутнику, опиниться у колі?

7. На відрізок OA довжиною L поставлена навмання точка B. Знайти ймовірність того, що менший з відрізків OB і BA має довжину, меншу ніж L/3. Передбачається, що ймовірність попадання крапки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

8. На відрізок [-2;3] ставиться навмання точка. Яка ймовірність того, що відстань від цієї точки до початку координат менше 1?

9. Всередину кола з радіусом 2 м кинута точка. Знайти ймовірність того, що ця точка належатиме вписаному в коло квадрату. Передбачається, що ймовірність попадання точці до кола пропорційна його площі і не залежить від розташування.

10. На площині накреслено два концентричні кола з радіусами 5 і 10 м. Яка ймовірність того, що точка поставлена у великому колі потрапить у кільце, що утворене цими колами?

11. Два пароплави повинні підійти до одного причалу. Час приходу пароплавів незалежний і рівноможливий упродовж доби. Знайти ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого пароплава 1 година, а другого – 2 години.

12. Навмання обрано два додатні числа, кожне з яких не перевищує 3. Яка ймовірність того, що їх сума буде не більше 1?

13. Кинуто дві гральні кості. Яка ймовірність того, що: а) сума очок на гранях, що випали, дорівнює 7; б) сума очок на гранях, що випали дорівнює 5, а добуток - 4?

Відповіді: 1) а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{24}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{4}{9}$; 6) $0{,}1125\pi$; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{2}{5}$; 9) $\frac{2}{\pi}$; 10) 0,75; 11) $\frac{139}{1152}$; 12) $\frac{1}{18}$; 13) а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{18}$.

1.3 Відносна частота, або статистична ймовірність події

Далеко не всякий дослід можна звести до схеми формул (1.1) або (1.2), і тоді ймовірність події не може бути визначена теоретичним шляхом, як у прикладах 2, 3 або в задачах до § 1.2. Наприклад, ймовірність таких подій, як «попадання в ціль при пострілі», «збій у роботі комп'ютера впродовж години» не може бути визначена за вказаними формулами. Разом з тим, перераховані події віддзеркалюють певну ступінь об'єктивної можливості, яку можна виміряти числами.

Експериментальне визначення ймовірностей події A полягає в проведенні серії n дослідів, у кожному з яких відбувається або не відбувається подія A. Якщо подія відбулася в m дослідах, то відношення m/n називається відносною частотою появи події A. Повторення серії випробувань (n_1, m_1) дасть, в загальному випадку, інший результат $m_1/n_1 \neq m/n$. Характерно, що при збільшенні числа дослідів, відносна частота події проявляє тенденцію стабілізуватися, наближаючись до деякої постійної величини.

Приклад 5. Багато разів виконували досліди з підкиданням монети, в яких підраховували число появи «герба». Результати кількох дослідів наведені у таблиці 1.1.

Імовірність появи «герба» при одному підкиданні визначається за класичною ймовірністю і дорівнює 0,5. Результати, що наведені в таблиці 1, переконують у тому, що при збільшенні кількості дослідів відносна частота наближається до теоретично обчисленої ймовірності появи «герба».

Таблиця 1.1 – результати дослідів з монетою

Число кидань	Число появи «герба»	Відносна частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Якщо дослідним шляхом встановлена відносна частота появи деякої події, то її можна взяти як наближене значення ймовірності.

Відносну частоту події називають її *статистичною ймовірністю* і позначають

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Я. Бернуллі довів, що при необмеженому збільшенні числа однорідних незалежних дослідів з практичною достовірністю можна стверджувати, що відносна частота події буде скільки завгодно мало відрізнятися від його ймовірності в окремому досліді.

Таким чином, ймовірність може бути визначена статистично, дослідним шляхом. Для цього необхідно мати можливість виконати необмежене число випробовувань. За цієї умови відносна частота повинна показати стабільність у різних серіях випробовувань.

Приклад 6. (Детская энциклопедия, Т.2, М.: Просвещение, 1965 – С.461) Рибоводові треба було визначити, скільки в озері риб, придатних до вилову. Дотримуючись рекомендацій теорії ймовірностей, рибовод закинув сітку із заздалегідь обраним розміром чарунок і, витягши її, перерахував здобич. Риб виявилося 38. Зробивши позначку на кожній рибці, рибовод відпустив всіх їх в озеро. На другій день він закинув ту ж саму сітку і тепер виловив вже 53 рибки, дві з яких виявилися міченими. За цими даними рибовод обчислив приблизно кількість риб в озері, що придатні для вилову даною сіткою. До якого висновку прийшов рибовод?

Розв'язання

Нехай кількість риб в озері, що придатні для вилову даною сіткою, дорівнює x. Тоді відношення числа мічених риб до числа всіх риб, знову-таки придатних для вилову даною сіткою, дорівнює $38/x$. У другий раз рибовод виловив 53 риби, з них дві мічені. Отже, відношення числа мічених риб до числа виловлених дорівнює 2/53. Будемо вважати, що мічені риби рівномірно розподілилися серед всіх риб у водоймі, тоді обидва відношення приблизно однакові: $\frac{38}{x} = \frac{2}{53}$, звідки $x = 1007$. Виходить, в озері є приблизно тисяча риб, придатних для вилову даною сіткою.

Контрольні запитання

1. Що називається відносною частотою події?
2. Чому відносна частота події називається його статистичною ймовірністю?
3. Наведіть приклад події, ймовірність якої можна визначити дослідним шляхом, обчисливши відносну частоту його появи.

1.4 Елементи комбінаторики

При класичному визначенні ймовірності деякої події за формулою (1.1) кількість усіх результатів n і число m результатів, що сприяють появі події, часто доводиться обчислювати, використовуючи елементи комбінаторики.

За наявності n яких-небудь елементів можна утворити з них різні комбінації (групи). Розрізняють перестановки, розміщення і сполучення елементів.

Існують дві схеми вибору m елементів ($0 < m \le n$) з початкової множини без повернення (без повторень) і з поверненням (з повторенням). У першому випадку обрані елементи не повертаються назад, можна відібрати відразу всі m елементів або послідовно відбирати їх поодинці.

У другій схемі вибір здійснюється поелементно з обов'язковим поверненням відібраного елементу на кожному кроці.

Схема вибору без повернень

1) Перестановки

Нехай A - деяка кінцева множина, що складається з n різних елементів $A = \{a_1, \quad a_2, \quad ..., \quad a_n\}$. Всілякі кінцеві *впорядковані* множини, що містять n різних елементів, називаються перестановками з n елементів.

Приклад 7. $A = \{3; 1; 2\}$. Всі перестановки: (1; 2; 3), (2; 3; 1), (3; 2; 1), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (3; 1; 2). Всього шість перестановок.

Число перестановок з n елементів (позначається P_n) знаходиться за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n = n! \tag{1.3}$$

Приклад 8. Сім книг можна розставити в ряд на одній полиці 7! способами, всього $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ варіантів.

2) Розміщення

Нехай A - деяка кінцева множина, що складається з n різних елементів $A = \{a_1, \quad a_2, \quad ..., \quad a_n\}$. Виберемо з них деяким чином m різних елементів, і складатимемо з цих m елементів *різні впорядковані* множини. Вони називаються розміщеннями з n елементів по m елементів.

Приклад 9. $A = \{3; 1; 2\}$. Всі розміщення з 3-х елементів по 2 елементи: (3; 1), (1; 3), (3; 2), (2; 3), (1; 2), (2; 1). Всього 6 розміщень.

Число розміщень з m елементів в кожному, складених з даних n елементів, позначають A_n^m.

Методом математичної індукції можна довести, що

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{або} \quad A_n^m = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)). \qquad (1.4)$$

Приклад 10. З восьми елементів можна скласти групи по три елементи, які відрізнялися б самими елементами чи їх порядком наступне число разів $A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336.$

3) Комбінації

Кінцеві *невпорядковані* множини, що містять m різних елементів, вибраних з n елементів заданої множини $A = \{a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n\}$, називаються комбінаціями з n елементів по m елементів.

Приклад 11. $A = \{3;1;2;4\}$. Всі комбінації з 4-х елементів по 2 елементи: (3; 1), (3; 2), (3; 4), (1; 2), (1; 4), (2; 4). Всього 6 комбінацій.

Число всіх комбінацій з n різних елементів по m елементів позначається C_n^m. На відміну від розміщень в таких групах виключаються перестановки:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.5)$$

Для числа комбінацій справедливі наступні властивості:

$$C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Приклад 12. Скількома способами можна вибрати дві деталі зі скрині, що містить десять деталей?

Розв'язання: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45.$

У наступних двох прикладах при визначенні класичної ймовірності використовуються комбінації.

Приклад 13. В урні 12 куль, пронумерованих $1,2,...,12$. Навмання виймають 8 куль. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль опиняться: 1) куля №3 (подія A); 2) кулі №5 і №6 (подія B).

Розв'язання

Число результатів, що сприяють події A, коли вийнята куля з потрібним номером, а решта сім куль мають інші номери, дорівнює C_{11}^{7}. Загальне число можливих результатів дорівнює C_{12}^{8}. Таким чином, відповідь на перше питання задачі

$$P(A)=\frac{C_{11}^{7}}{C_{12}^{8}}=\frac{11!8!4!}{7!4!12!}=\frac{8}{12}\approx 0{,}667.$$

Друга частина задачі вирішується аналогічно

$$P(B)=\frac{C_{10}^{6}}{C_{12}^{8}}=\frac{10!\cdot 8!\cdot 4!}{6!\cdot 4!\cdot 12!}=\frac{7\cdot 8}{11\cdot 12}\approx 0{,}424.$$

Приклад 14. У скрині знаходиться 20 деталей, серед яких 15 стандартних. Навмання обрали 10 деталей. Знайти ймовірність, що серед відібраних 8 деталей виявляться стандартними.

Розв'язання

Загальне число варіантів відбору 10 деталей з 20 деталей дорівнює C_{20}^{10}. Обчислимо число сприятливих результатів. Нам потрібно мати 8 стандартних деталей з 15 можливих і 2 нестандартні деталі, які візьмуть з 5 наявних нестандартних. Такий результат обчислюється добутком $C_{15}^{8}\cdot C_{5}^{2}$. Таким чином, шукана ймовірність дорівнює:

$$P=\frac{C_{15}^{8}C_{5}^{2}}{C_{20}^{10}}=\frac{15!5!10!10!}{8!7!2!3!20!}\approx 0{,}348.$$

Схема вибору з поверненнями

4) Перестановки з повтореннями

Нехай A - деяка скінченна множина, що складається з n елементів $A=\{a_1,\quad a_2,\quad ...,\quad a_n\}$ m різних типів $(m\le n)$. Елементи одного типу не вирізняються між собою. Нехай k_1 елементів належить 1-у типу, k_2 елементів належить 2-у типу, і так далі, k_m елементів належить типу m, причому $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.

Різні кінцеві впорядковані сукупності, що містять n елементів, з яких k_1 елементів належить 1-у типу, k_2 - належить 2-у типу, і так далі, k_m елементів належить типу m, називаються перестановками з повтореннями, що мають склад $(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_m)$.

Число таких перестановок з повтореннями

$$C_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}. \tag{1.6}$$

Приклад 15. Скільки різних шестизначних чисел можна утворити з 3-х одиниць, однієї двійки і двох трійок?

Розв'язання: $C_6(3,1,2) = \dfrac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 60$.

5) Розміщення з повтореннями

Якщо при вибірці m елементів з n елементи повертаються назад і упорядковуються, то говорять, що це є розміщення з повтореннями.

Розміщення з повтореннями можуть відрізнятися один від одного елементами, їх порядком і кількістю повторень елементів:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{1.7}$$

Приклад 16. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти, використовуючи цифри:

а) 2, 5, 7, 8

$$\overline{A}_4^5 = 4^5.$$

б) 0, 1, 9

$$\overline{A}_3^5 - \overline{A}_3^4 = 243 - 81 = 162.$$

6) Комбінації з повтореннями

Нехай є m різних типів елементів, число повторень яких скінченне, але не обмежене.

Комбінаціями з m різних елементів по n елементів з повтореннями називаються *невпорядковані* множини, що складаються з n елементів, кожен з яких належить до одного з m типів.

Приклад 17. З 3-х різних елементів {1; 2; 3} можна скласти наступні комбінації по два елементи з повторенням:
(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3), (3; 3).

Число різних комбінацій з m елементів по n елементів з повтореннями позначається f_m^n і обчислюється за формулою:

$$f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n}. \qquad (1.7)$$

Приклад 18. В урні знаходяться одна чорна і одна біла кулі. З урни навмання виймається куля, запам'ятовується її колір і кулю повертають до урни. Так повторюється 4 рази. Визначити ймовірність того, що всі чотири рази з'явиться біла куля.

Розв'язання

За умовою, різних елементів 2, $m = 2$. Складається множина з 4-х елементів $n = 4$. Число всіляких комбінацій можна знайти безпосередньо: (бббб), (бббч), (ббчч), (бччч), (чччч). Тут "б" – означає поява білої кулі, "ч" – чорної. Обчислимо кількість комбінацій за формулою (1.7):

$$f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n} = C_5^4 = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5.$$

З 5-ти різних результатів тільки один сприяє появі 4-х білих куль. За формулою класичної ймовірностей $P = \dfrac{1}{5}$.

Контрольні запитання

1. Що називається перестановками з n елементів, позначення, обчислення.
2. Що називається розміщеннями з n елементів по m елементів, позначення, обчислення.
3. Що називається комбінаціями з n елементів по m елементів, позначення, обчислення. Властивості комбінацій.

4. Що називається перестановками з повтореннями, позначення, обчислення.
5. Що називається комбінаціями з повтореннями, позначення, обчислення.

Задачі

1. При наборі телефонного номера абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи тільки, що ці цифри непарні і різні. Знайти ймовірність того, що номер набраний правильно.

2. Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 вибраних навмання білети виявляться виграшними.

3. Дитина грає з чотирма літерами розрізної абетки А, А, М, М. Яка ймовірність того, що при випадковому розташуванні літер поруч вона отримає слово «МАМА»?

4. У ящику знаходяться 4 картки з цифрами 0, 0, 2, 6. Виймають навмання по черзі картки і ставлять поряд. Яка ймовірність того, що отримаємо число 2006?

5. На шести картках написані літери В Е І П Р Т. Після ретельного перемішування беруть по одній картці і викладають послідовно поруч. Яка ймовірність того, що отримаємо слово «ПРИВІТ»?

6. На восьми картках написані літери А В Е Ж К Л Р Х. Після ретельного перемішування беруть по одній картці і викладають послідовно п'ять карток поруч. Яка ймовірність того, що отримаємо слово «ХАКЕР»?

7. У ящику лежать упереміш 12 виробів одного типу двох різних кольорів - 7 штук синього та 5 штук червоного. Навмання вибрано 7 виробів. Яка ймовірність того, що серед них 3 червоних виробів?

8. В урні знаходяться три кулі однакового діаметру: одна чорна, одна біла і одна червона куля. З урни навмання виймається одна куля, запам'ятовується її колір і куля повертається до урни. Так повторюється 6 разів. Визначити ймовірність того, що чотири рази з'явиться біла куля і двічі – червона.

Відповіді:

1) $1/20$; 2) $1/495$; 3) $1/6$; 4) $1/12$; 5) $1/720$; 6) $1/6720$; 7) $0{,}442$; 8) $1/28$.

1.5 Теореми додавання і множення ймовірностей

1.5.1 Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Теорема 1. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.8}$$

Доведення

Нехай множина Ω складається з n рівноможливих елементарних подій, причому m - число елементарних подій, що входять в подію A, k - число елементарних подій, що входять в подію B. За формулою класичної ймовірності $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B)=\frac{k}{n}$. Оскільки події несумісні (див. Рисунок 2), до події $A+B$ входить $m+k$ елементарних подій. Тоді

$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B)$ що й треба було довести.

Теорема узагальнюється на суму трьох і більш несумісних подій:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C);$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\,. \tag{1.9}$$

Висновок із теореми 1. Якщо події A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1.$$

Доведення: оскільки A_1, A_2, ..., A_n - повна група подій, то поява хоч би однієї з них – достовірна подія: $P(A_1+A_2+...+A_n)=1$. Оскільки події несумісні, до них застосовна теорема додавання ймовірностей:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Важливий окремий випадок висновку: Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (1.10)$$

Приклад 19. На полиці у випадковому порядку розставлені 15 підручників, причому п'ять з них з математики. Ви берете три випадкові підручники. Знайти ймовірність того, що хоч би один з узятих підручників буде з математики.

Розв’язання

Нехай A - подія, яка полягає в тому, що хоч би один з трьох узятих підручників буде з математики. Тоді $\overline{A}$ – протилежна подія: всі три підручники не з математики. Сума ймовірностей протилежних подій $P(A)+P(\overline{A})=1.$ Число результатів, що сприяють тому, що обрані підручники не з математики, – кількість комбінацій по 3 з 10. Кількість усіх результатів – число комбінацій по 3 з 15. Ймовірність протилежної події $P(\overline{A})=\dfrac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}=\dfrac{10!3!12!}{3!7!15!}\approx 0{,}264.$

Отже, шукана ймовірність $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}264=0{,}736$.

Приклад 20. Стріляють у мішень, що складається з трьох концентричних кіл. Ймовірність попадання в центральну зону (1) дорівнює $0{,}05$; в кільце $(2)-0{,}1$; в кільце $(3)-0{,}17$ (Рисунок 1.12). Яка ймовірність попадання у мішень?

Розв’язання

Нехай A_1 – попадання в першу зону;

A_2 – попадання у другу зону; A_3 – попадання у третю зону, тоді $A=A_1+A_2+A_3$ - подія, що полягає в попаданні у мішень.

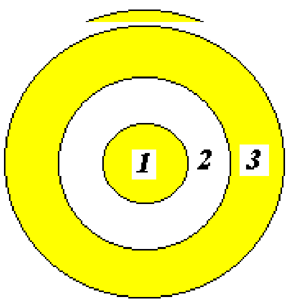


Рисунок 1.12 – До прикладу 20

Події A_1, A_2, A_3 – несумісні (не можна одним пострілом потрапити до яких-небудь двох різних частин мішені), тому згідно теореми маємо:

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}32.$$

1.5.2 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Теорема 2. Ймовірність суми сумісних подій A і B дорівнює сумі їх ймовірностей, без ймовірності їх сумісної появи, тобто:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{1.11}$$

Доведення

Нехай множина Ω складається з n рівноможливих елементарних подій, причому $m+l$ - число елементарних подій, що входять в подію A, $k+l$ - число елементарних подій, що входять в подію B, l - число елементарних подій, загальних для подій A і B. За формулою класичної ймовірності $P(A) = \dfrac{m+l}{n}$, $P(B) = \dfrac{k+l}{n}$. Оскільки події сумісні (див. Рисунок 1.3), до події $A+B$ входить $m+k+l$ елементарних подій. Тоді

$P(A+B) = \dfrac{m+k+l}{n} = \dfrac{m+l}{n} + \dfrac{k+l}{n} - \dfrac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, що й потрібно було довести.

Висновок із теореми 2. Ймовірність суми трьох сумісних подій

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) -$$
$$- P(BC) + P(ABC).$$

1.5.3 Теорема добутку подій

Подія A називається незалежною від події B, коли **ймовірність** події A не залежить від того, відбулася подія B, чи не відбулася.

Подія A називається залежною від події B, коли **ймовірність** події A змінюється залежно від того, відбулася подія B, чи не відбулася.

Приклад 21. а) При підкиданні 2-х монет позначимо через A - появу цифри на першій монеті, B - появу цифри на другій монеті. Події A і B - незалежні одна від одної.

б) В урні 2 білі і дві чорні кулі. Дві людини по черзі виймають по одній кулі. Нехай A - поява білої кулі у першої людини; B - поява білої кулі у другої людини. Якщо подія A відбулася, то $P(B)=\frac{1}{3}$. Якщо відбулася подія $\overline{A}$ - поява чорної кулі у першої людини, то $P(B)=\frac{2}{3}$. Якщо не відбулася ні подія A, ні подія $\overline{A}$, то $P(B)=1/2$. Таким чином, подія B є залежною від події A.

Ймовірність події B, обчислена за умови, що подія A відбулася, називається *умовною ймовірністю події* B і позначається символами $P(B|A)$ або $P_A(B)$.

З прикладу 21(б) зрозуміло, що $P(B)\neq P(B|A)$.

Теорема 3. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія відбулась:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B|A). \tag{1.12}$$

Доведення

Нехай множина Ω складається з n рівноможливих елементарних подій, причому $m+l$ - число елементарних подій, що входять в подію A, $k+l$ - число елементарних подій, що входять в подію B, l - число елементарних подій, загальних для подій A і B. Подія $A\cdot B$ відбудеться, якщо відбудеться одна з l елементарних подій. Ймовірність появи події $A\cdot B$: $P(A\cdot B)=\frac{l}{n}$. Нехай першою відбулася подія A, ймовірність якої $P(A)=\frac{m+l}{n}$. Отже, для події B залишаються можливими $m+l$ елементарних подій. Оскільки l елементарних подій сприятливі для події B, то $P(B|A)=\frac{l}{m+l}$. Підставимо вирази для $P(A\cdot B)$, $P(A)$, $P(B|A)$ у формулу (1.12):

$\frac{l}{n}=\frac{m+l}{n}\cdot\frac{l}{m+l}\Leftrightarrow\frac{l}{n}=\frac{l}{n}$ отримали тотожність, теорема доведена.

При застосуванні теореми 3 не має різниці, яку подію вважати першою, яку – другою, формулу (1.12) можна записати у вигляді

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B).$$

Висновок 1. Якщо подія А не залежить від події В, то і подія В не залежить від події А.

Висновок 2. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \tag{1.13}$$

У разі n незалежних подій

$$P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i).$$

Приклад 22. Ймовірність попадання в мішень першим стрільцем (подія А) дорівнює 0,8. Ймовірність попадання в мішень другим стрільцем (подія В) дорівнює 0,7. Визначити ймовірність попадання у мішень, якщо кожен із стрільців зробив по одному пострілу.

Розв’язання

Мішень вражена, якщо в неї попаде хоч би один стрілець, тобто відбудеться подія $A+B$. Події A і B сумісні і незалежні.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

$$P(A+B)=0{,}8+0{,}7-0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}94.$$

1.5.4 Ймовірність появи хоч би однієї події

Теорема 4. Ймовірність появи хоч би однієї з подій незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій

$$P(A)=1-q_1q_{2.}...q_n.$$

Доведення

Позначимо через A подію, яка полягає в появі хоч би однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Події A і $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ (жодна з подій не наступила) протилежні, отже, сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n)=1.$$

Звідси, користуючись теоремою множення, отримаємо

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n),$$

чи

$$P(A)=1-q_1q_{2.}...q_n.$$

Окремий випадок. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ мають однакову ймовірність, що дорівнює *p*, то ймовірність появи хоч би однієї з цих подій

$$P(A)=1-q^n.$$

Приклад 23. Пристрій містить два елементи, що працюють незалежно. Ймовірність відмови елементів відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Знайти ймовірність відмови пристрою, якщо для цього достатньо, щоб відмовив хоч би один елемент.

Розв'язання

Шукана ймовірність $P(A)=1-q_1q_{2.}=1-(1-0{,}05)(1-0{,}08)=0{,}126.$

Приклад 24. Ймовірність попадання в мішень кожним з двох стрільців дорівнює 0,3. Стрільці стріляють по черзі, причому кожен повинен зробити по два постріли. Той, хто попав в мішень першим, отримує приз. Знайти ймовірність того, що стрільці отримають приз.

Розв'язання

Для вручення призу досить, щоб хоч би одна з чотирьох спроб була успішною. Ймовірність успішної спроби $p=0{,}3$, неуспішної $q=1-0{,}3=0{,}7.$

Шукана ймовірність $P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}7^4 = 0{,}7599.$

Контрольні питання

1. Сформулюйте і доведіть теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
2. Сформулюйте висновок теореми додавання.
3. Сформулюйте і доведіть теорему додавання ймовірностей сумісних подій. Сформулюйте висновок теореми.
4. Які події називають залежними, незалежними; що означає умовна ймовірність події?
5. Сформулюйте і доведіть теорему множення ймовірностей.
6. Сформулюйте висновки теореми множення ймовірностей.

Задачі

1. Монету підкинуто двічі. Знайти ймовірність того, що хоч би один раз з'явиться «герб».

2. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі ввійшли три людини. Кожна з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на 4 поверсі.

3. Для сигналізації про аварію встановлені два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор запрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 – для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії запрацює тільки один сигналізатор.

4. Два стрільці стріляють у мішень. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень попаде хоч би один із стрільців.

5. З партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого ґатунку. Ймовірність того, що навмання узятий виріб виявиться вищого ґатунку дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох перевірених виробів тільки два виявляться вищого ґатунку.

6. У мішечку міститься 10 однакових кубиків з номерами 1, 2 ., 10. Навмання витягують поодинці три кубики. Знайти ймовірність того, що послідовно з'являться кубики з номерами 1, 2, 3, а) без повернень, б) з поверненнями.

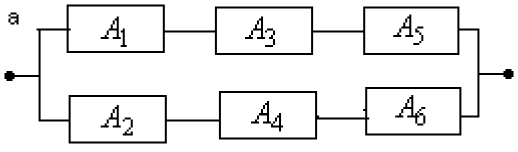
7. У «секретному» замку на загальній осі чотири диски, кожен з яких поділений на п'ять секторів, на яких написані різні цифри. Замок відкривається тільки в тому випадку, якщо диски встановлені так, що цифри на них утворюють певне чотиризначне число. Знайти ймовірність того, що при довільній установці дисків замок буде відкритий.

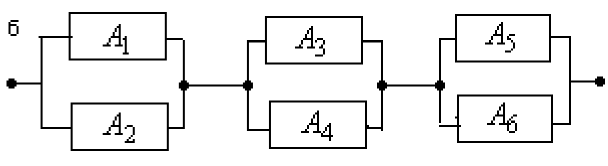
8. Три стрільці незалежно один від одного стріляють у ціль. Ймовірність попадання в ціль для першого стрільця дорівнює 0,75, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Визначити ймовірність того, що в ціль попаде хоч би один стрілець.

9. Знайти ймовірність проходження електричного сигналу через систему паралельно і послідовно сполучених вузлів A_1, A_2, ..., A_6 (див. Рисунок), якщо ймовірність безвідмовної роботи вузлів відповідно дорівнює

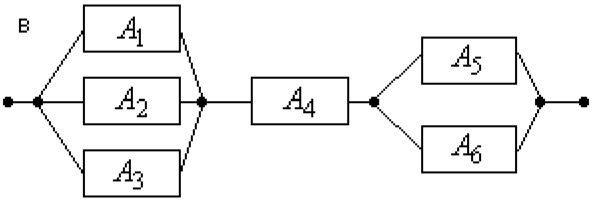
$$P(A_1) = p_1,\ P(A_2) = p_2, ..., P(A_6) = p_6.$$

	Ймовірність безвідмовної роботи вузлів					
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1 варіант для схем а, б, в, г	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
2 варіант для схем а, б, в, г	0,9	0,7	0,9	0,7	0,9	0,7

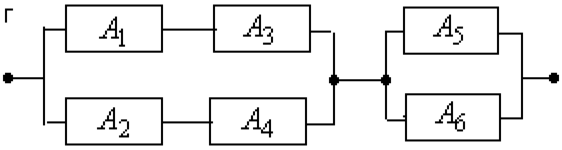




в



г



10. У ящику впереміш лежать 6 чорних, 4 сірих і 2 білих шкарпетки. Поспішаючи на роботу, людина навмання витягнула дві шкарпетки. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

11. Ймовірність хоч би одного попадання в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність попадання в ціль при одному пострілі.

12. Для сигналізації про аварію встановлені два незалежно працюючі сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 – для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один сигналізатор.

Відповіді: 1) 0,75; 2) $1/216$; 3) 0,14; 4) 0,94; 5) 0,384; 6) а)$1/720$, би) 0,001; 7) $1/625$; 8) 0,995; 9) 1 варіант а) 0,927; б) 0,97; в) 0,89; г) 0,954;
2 варіант а) 0,758; б) 0,913; в) 0,677; г) 0,837. 10)$1/3$; 11) 0,8. 12) 0,14.

1.6 Формула повної ймовірності

Формула повної ймовірності – висновки теорем додавання і множення ймовірностей.

Нехай деяка подія А може відбутися тільки разом з однією з подій H_1, H_2, ..., H_n.

Події H_1, H_2, ..., H_n складають повну групу несумісних подій і називаються *гіпотезами*.

Теорема 5. Ймовірність події А, яка може відбутись лише за умови появи однієї з несумісних подій $H_1, \ H_2, \ \ldots, \ H_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події А:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i). \tag{1.14}$$

Формула (1.14) називається *формулою повної ймовірності*.

Доведення. Оскільки $H_1, \ H_2, \ \ldots, \ H_n$ - повна група подій, то при випробуванні подія А відбудеться тільки разом з однією з гіпотез, то:

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A.$$

Гіпотези несумісні, тому і події $H_1 \cdot A, \ H_2 \cdot A, \ldots, H_n \cdot A$ також несумісні. Для визначення ймовірностей $P(A)$ застосовуємо теорему додавання ймовірностей несумісних подій:

$$P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \ldots + P(H_n \cdot A).$$

До подій $H_1 \cdot A, \ H_2 \cdot A, \ldots, H_n \cdot A$ застосовуємо теорему множення ймовірностей, отримаємо

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n),$$

що й потрібно було довести.

Приклад 25. Є три однакові корзини. У першій корзині 5 білих і 3 чорних куль, в другій – 4 білих і 6 чорних, в третій – 7 білих і 4 чорних. Знаходячись спиною до корзин, виймають одну кулю. Яка ймовірність, що вийнята куля буде білою?

Розв’язання

Оскільки корзини однакові, то передбачається, що ймовірність вибору будь-якої корзини однакова і дорівнює $\frac{1}{3}$. Нехай H_1, H_2, H_3 – події, що полягають у виборі першої, другої або третьої корзини. Тоді $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Позначимо через A подію, що полягає у вийманні білої кулі взагалі, а через A/H_1 – подія, за якою білу кулю виймуть з першої корзини, A/H_2 – з другої корзини, A/H_3 – з третьої корзини. Обчислимо умовну ймовірність цих подій:

$$P\left(A/H_1\right)=\frac{5}{8}; \quad P\left(A/H_2\right)=\frac{4}{10}; \quad P\left(A/H_3\right)=\frac{7}{11}.$$

Застосовуючи тепер формулу (1.14) при $n=3$, отримуємо, що ймовірність вилучення білої кулі (байдуже з якої корзини) буде дорівнювати

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{11}=0{,}551.$$

Примітка – при розв’язанні задач за формулою повної ймовірності висуваються гіпотези $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$. Важливо перевірити, що *сума ймовірності гіпотез дорівнює одиниці*: $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1.$

1.7 Формули Байєса

Нехай тепер деяка подія А *відбулася* разом з однією із подій $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$., що складають повну групу несумісних подій.

Визначимо ймовірність гіпотез $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ за умови, що подія А вже відбулася, тобто обчислимо умовні ймовірності $P(H_1|A),\ldots,P(H_n|A)$.

За теоремою множення $P(AH_1)=P(A)P(H_1|A)$, звідки $P(H_1|A)=\frac{P(AH_1)}{P(A)}=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}$. Ймовірність $P(A)$ обчислюємо за формулою (1.14), отримаємо: $P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}$. Аналогічно можна обчислити умовну ймовірність $P(H_2|A),\ldots,P(H_n|A)$. Тому загальну формулу запишемо у такому вигляді:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{1.15}$$

Формули Байєса (1.15) *дозволяють перерахувати ймовірність гіпотез після того, як подія A відбулася в результаті випробування.*

Приклад 26. На фабриці, що виготовляє прогоничі, перша машина виготовляє 25%, друга -35%, третя – 40% всіх виробів. У їхній продукції брак складає відповідно 5%, 4% і 2%.

1) Яка ймовірність того, що випадково обраний прогонич з дефектом?

2) Яка ймовірність того, що випадково обраний прогонич виготовлено третьою машиною?

Розв'язання

Сформулюємо три гіпотези: H_1 – обраний випадково прогонич виготовлений першою машиною, H_2 – другою, H_3 – третьою. Нехай подія A – обраний прогонич з дефектом. При таких позначеннях дані задачі можна записати так: $P(H_1) = 0{,}25$; $P(H_2) = 0{,}35$; $P(H_3) = 0{,}4$; оскільки перша машина допускає 5% браку: $P(A/H_1) = 0{,}05$; $P(A/H_2) = 0{,}04$; $P(A/H_3) = 0{,}02$.

1) Ймовірність події A (вилучення дефектного прогонича) визначається за формулою повної ймовірностей (1.14):

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345.$$

2) Для визначення ймовірностей того, що випадково обраний прогонич був виготовлений третьою машиною, потрібно скористатися формулою Байєса, згідно з якою

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02}{0{,}0345} \approx 0{,}23.$$

Контрольні питання

1. Запишіть формулу повної ймовірності. Як називаються події $H_1, \quad H_2, \quad ..., \quad H_n$, що їм властиво?
2. Доведіть формулу повної ймовірності.
3. Запишіть формули Байєса. У яких випадках вони застосовуються?

Задачі

1. В обчислювальній лабораторії є 6 японських і 4 корейських комп'ютери. Ймовірність того, що за час виконання лабораторної роботи японський комп'ютер не відмовить дорівнює 0,95, а корейський - 0,8. Студент виконує розрахунок на навмання обраній машині. Знайти ймовірність того, що студент закінчить виконання розрахунку.

2. У цеху працюють 20 верстатів. З них 10 верстатів марки А, 6 – марки В і 4 –марки С. Ймовірність того, що якість деталей виявиться відмінною, для цих верстатів відповідно дорівнює: 0,9; 0,8; і 0,7. Який відсоток відмінно виготовлених деталей випускає цех в цілому?

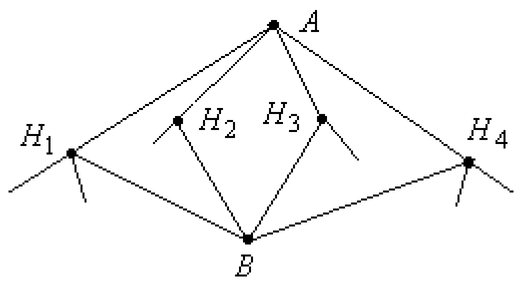
3. Пристрій може працювати в двох режимах: нормальному і аварійному. Нормальний режим спостерігається в 80% часу роботи приладу, а аварійний – в 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час T в нормальному режимі дорівнює 0,1, а в аварійному – 0,7. Знайти повну ймовірність виходу приладу з ладу за час T.

4. На підприємстві виготовляються вироби певного виду на трьох потокових лініях. На першій лінії виготовляється 40 % виробів від всього об'єму їх виробництва, на другій – 25%, на третій – 35%. Кожна з ліній характеризується відповідно наступними відсотками придатності виробів: 96, 93 і 95%. Треба визначити ймовірність того, що навмання взятий виріб, випущений підприємством, виявиться бракованим, а також ймовірність того, що цей бракований виріб зроблений на другій лінії.

5. Є дві урни: у першій 5 білих куль і 4 чорних; у другій 10 білих і 6 чорних. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, дві кулі. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

6. Є дві урни: у першій 3 білі кулі і 2 чорні; у другій – 4 білі і 4 чорні. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, дві кулі. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

7. На підприємстві виготовляються вироби певного вигляду на трьох потокових лініях. На першій лінії виготовляється 20 % виробів від всього їхнього об'єму виробництва, на другій – 30%, на третій – 50%. Кожна з ліній характеризується відповідно наступними відсотками придатності виробів: 95, 98 і 97%. Треба визначити ймовірність того, що навмання взятий виріб, виготовлений підприємством, виявиться бракованим, а також ймовірність того, що цей бракований виріб зроблений на першій, другій і третій лініях.



8. На рисунку зображена схема доріг. Хтось, вийшовши з пункту A, рухається зверху вниз за схемою. У кожному пункті він вибирає навмання один з можливих шляхів. Яка ймовірність того, що він потрапить до пункту B, якщо обірвані лінії позначають дороги, що не спрямовані до мети?

9. Випробовується прилад, що складається з двох вузлів I і II. Надійності (ймовірність безвідмовної роботи за час τ) вузлів I і II відомі й дорівнюють $p_1 = 0{,}8$ і $p_2 = 0{,}9$. Вузли відмовляють незалежно один від одного. Після закінчення часу τ з'ясувалося, що прилад несправний. Знайти з урахуванням цього ймовірність гіпотез: H_1= {несправний тільки перший вузол}; H_2= {несправний тільки другий вузол}; H_3 = несправні обидва вузли}.

10. З десяти студентів тих, що прийшли складати іспит з теорії ймовірностей, Іванов і Петров знають відповіді на 20 білетів з 30, Сидорів – 15, інше студенти знають відповіді на всі 30 білетів Після часу відведеного на підготовку екзаменатор навмання викликає студента. Визначити ймовірність того, що цей студент складе іспит, якщо знання відповідей на білет гарантує складання іспиту з ймовірністю 0,85, а при незнанні білета можна скласти іспит з ймовірністю 0,1.

11. У спеціалізовану лікарню направляють в середньому 50% хворих із захворюванням K, 30% – з захворюванням L, 20% – з захворюванням M.

Ймовірність повного вилікування хвороби К дорівнює 0,7, L – 0,8, M – 0,9. Один хворий вилікувався. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав на захворювання К.

12. У першій урні міститься 10 куль, з них 8 білих; у другій урні 20 куль, з них 4 білих. З кожної урни навмання вийняли по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання узяли одну кулю. Знайти ймовірність того, що взяли білу кулю.

13. Прилад може працювати у двох режимах: 1) нормальному і 2) ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80% випадках роботи приладу; ненормальний – в 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час t в нормальному режимі дорівнює 0,1; у ненормальному - 0,7. Знайдіть повну ймовірність виходу приладу з ладу за час t.

14. У піраміді поставлено 9 гвинтівок з яких 3 забезпечені оптичними прицілами. Ймовірність того, що стрілець уразить мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,95, а без оптичного прицілу - 0,5. Знайдіть ймовірність того, що ціль буде вражена.

15. Є три однакові урни з кулями. У першій з них 3 білі і 4 чорні кулі, в другій – 2 білі і 5 чорних, в третій – 10 чорних куль. З випадково обраної урни навмання вийнята куля. Знайти ймовірність того, що це куля біла.

16. Студент підготував до іспиту 20 білетів з 25. У якому випадку шанси узяти білет, який він підготував, більше - коли студент прийшов на іспит першим чи другим?

17. У складальний цех надійшли деталі з трьох верстатів. На першому верстаті виготовлено 51% деталей від їх загальної кількості, на другому верстаті - 24% і на третьому - 25%. При цьому на першому верстаті було виготовлено 90% деталей першого сорту, на другому - 80% і на третьому - 70%. Використавши формулу повної ймовірностей визначити, яка ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться першого сорту ?

18. У першій їдальні працюють офіціантами 5 чоловіків і 10 жінок. У другій їдальні 3 чоловіки і 10 жінок. З першої їдальні до другої переводять дві штатні одиниці. Яка ймовірність того, що клієнт, який прийшов до другої їдальні, буде обслуговуватися офіціанткою?

19. У групі 20 лижників, 6 велосипедистів і 4 бігуни. Ймовірність виконати кваліфікаційний норматив така: для лижника – 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бігуна – 0,75. Знайти ймовірність того, що спортсмен, обраний навмання, виконає кваліфікаційний норматив.

20. Припустимо, що 5 чоловіків зі 100 і 25 жінок з 10000 є дальтоніками. Навмання вибирається особа, котра, можливо, страждає дальтонізмом. Яка ймовірність, що це чоловік?

21. У водоймищі виявлено забруднення з перевищенням ПДК. Потенційні джерела - два підприємства, причому викиди на першому відбуваються в 9 разів частіше, ніж на другому. Тільки 15% викидів першого підприємства перевищують ПДК. Для другого підприємства ця ймовірність дорівнює 92% . Хто винен?!

22. Є три однакові на вигляд скрині. У першій скрині знаходиться 26 білих куль, в другій - 15 білих і 11 чорних, в третій скрині - 26 чорних куль. З обраної навмання скрині вийняли білу кулю. Обчислити ймовірність того, що білу кулю виймуть з першої скрині.

23. З 10 учнів, що прийшли на іспит, троє підготувалися відмінно, четверо добре, двоє задовільно і один зовсім не підготувався. У білетах 20 питань. Відмінники можуть відповісти на всі питання, четвірочники – на 16, трієчники – на 10, а двієчники – на 5 питань. Кожен учень отримує 3 питання. Запрошений першим учень відповів на три питання. Яка ймовірність, що він відмінник?

24. Три стрільці вистрілили, причому дві кулі попали в мішень. Знайти ймовірність того, що 3-й стрілець потрапив в мішень, якщо ймовірність попадання в мішень кожним із стрільців дорівнює відповідно 0,6, 0,5 і 0,4.

Відповіді: 1) 0,89; 2) 83%; 3) 0,22; 4) 0,051; 0,343; 5) 0,617; 6) 0,52; 7) 0,031; 0,322; 0,193; 0,483; 8) $5/12$; 9) 0,64; 0,29; 0,07; 10) 0,76; 11) 0,45; 12) 0,5; 13) 0,22; 14) 0,983; 15) 0,238; 16) першим; 17) 0,853; 18) 0,755; 19) 0,86; 20) 0,02625; 21) перше; 22) 0,634; 23) 0,5787; 24) 0,52.

1. 8 Повторення випробувань

1.8.1 Формула Бернуллі

Часто зустрічаються задачі, в яких один і той же дослід (випробування) повторюються неодноразово.

В результаті кожного випробування може з'явитися або не з'явитися подія A. Цікавить не результат окремого досліду, а загальне число появ події A в серії дослідів.

Наведемо умови для випробувань, що повторюються:

1) кількість випробувань – число обмежене, позначаємо n;
2) ймовірність появи події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, такі випробування називаються незалежними щодо події A;
3) ймовірність появи події A в кожному випробуванні – величина постійна, позначимо $P(A) = p$.

Зазначеним обмеженням відповідають, наприклад, декілька послідовних підкидань монети, при яких фіксується поява події A - появи цифри. При цьому $P(A) = 0{,}5$.

Повторення випробувань може бути обумовлене повторенням у часі випробування одного і того ж об'єкта, як згадане підкидання монети однією людиною. Проте, повторення випробувань може відбуватися незалежно від часу, коли випробуванню піддається декілька однакових об'єктів, як у розглянутих нижче прикладах 25 і 27.

Позначимо символом q ймовірність не появи події A: $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Нехай потрібно визначити ймовірність того, що подія A відбулася рівно m раз у n випробуваннях. Така ймовірність позначається $P_{m,n}(A)$. (Очевидно, що в загальному випадку $0 \le m \le n$).

Позначимо B_m - подію, яка полягає в тому, що подія A відбулася рівно m раз у n випробуваннях. Нехай A_i поява події в i - м випробуванні; $\overline{A}_k$ - непоява події в k - м випробуванні. Тоді

$$B_m = A_1A_2..A_m\overline{A}_{m+1}..\overline{A}_n + A_1A_2..A_{m-1}\overline{A}_m..\overline{A}_{n-1}A_n + ...$$
$$....+\overline{A}_1..\overline{A}_{n-m}A_{n-m+1}..A_n \quad .$$

У кожен добуток A входить m раз, $\overline{A}$ входить $(n-m)$ раз. Число всіх добуток дорівнює числу комбінацій з n елементів по m елементів: C_n^m. Ймовірність кожного добутку визначається за теоремою множення ймовірностей незалежних подій і дорівнює $p^m q^{n-m}$. Добутки між собою несумісні (у кожній парі добуток є протилежні події з однаковим індексом), тому ймовірність суми добуток визначається за теоремою складання несумісних подій:

$$P(B_m) = P(A_1A_2..A_m\overline{A}_{m+1}..\overline{A}_n) + ... + P(\overline{A}_1..\overline{A}_{n-m}A_{n-m+1}..A_n) =$$
$$= p^m q^{n-1} + p^m q^{n-1} + ... + p^m q^{n-1} = C_n^m p^m q^{n-1}.$$ Таким чином

$$P_{m,n}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}. \qquad (1.16)$$

Формула (1.16) називається *формулою Бернуллі.*

Ймовірність того, що у n випробуваннях подія A наступить:

а) менше m разів: $P_{0,n}(A) + P_{1,n}(A) + ... + P_{m-1,n}(A)$;

б) більше m разів: $P_{m+1,n}(A) + P_{m+2,n}(A) + ... + P_{n,n}(A)$;

в) не менше m разів: $P_{m,n}(A) + P_{m+1,n}(A) + ... + P_{n,n}(A)$;

г) не більше m разів: $P_{0,n}(A) + P_{1,n}(A) + ... + P_{m,n}(A)$.

Приклад 27. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,9. Визначити ймовірність появи події 4 рази у шести випробуваннях.

Розв'язання

За умовою завдання $n = 6,\ \ m = 4$, $P(A) = p = 0{,}9,\ \ q = 1 - p = 0{,}1$.

Окремо обчислимо число комбінацій з 6 по 4: $C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15.$ Шукану ймовірність визначаємо за формулою Бернуллі:

$$P_{4,6}(A) = C_6^4 p^4 q^2 = 15 \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}0984.$$

Відповідь: $P_{4,6}(A) = 0{,}0984.$

1.8.2 Наближена формула Пуассона при повторенні випробувань

Формула Бернуллі не може бути застосована, якщо число випробувань дуже велике, оскільки при цьому неприпустимо велика похибка обчислень.

Нехай $n \to \infty, p \to 0$, але величина $p \cdot n = \lambda$ зберігає постійне значення. У формулу Бернуллі підставимо $p = \dfrac{\lambda}{n}$ і визначимо межу при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-m)!n^m} \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}} \right)^{-\frac{\lambda}{n}(n-m)} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \cdot 1 \cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\lambda n + \lambda m}{n}} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot n^m} = 1$ як відношення нескінченно великих величин одного порядку зростання.

Отримана наближена формула

$$P_{m,n}(A) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \tag{1.17}$$

де $\lambda = p \cdot n$, називається формулою Пуассона і застосовується, коли n - велике, а ймовірність p - мала (орієнтування $p < 0{,}1, \quad npq < 9$).

Формула Пуассона використовується в завданнях, де розглядаються *рідкісні події*.

П р и к л а д 28. Ймовірність відмови елемента в схемі впродовж доби дорівнює 0,01. У схемі є 500 однакових елементів. Яка ймовірність того, що впродовж доби відмовлять 3 елементи?

Розв'язання

За умовою завдання, подія A - відмова елемента впродовж доби: $P(A) = p = 0{,}01$; $\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}01 = 5$; $m = 3$. Для розв'язання застосовуємо формулу Пуассона.

$$P_{3,500}(A) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} = \frac{125}{6} \cdot 0{,}00674 = 0{,}14037.$$

Примітка – шукана ймовірність, обчислена за точною формулою Бернуллі, складає $0{,}14022$; відносна похибка розв'язання за наближеною формулою Пуассона складає $0{,}1\%$.

1.8.3 Локальна та інтегральна теореми Муавра–Лапласа

Зазначені теореми є окремими випадками центральної граничної теореми (див. §1.16) і застосовуються, якщо число незалежних випробувань велике, але подія A не є рідкісною, тобто $0 < P(A) < 1$.

Локальна теорема Муавра – Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p $(0 < p < 1)$, подія наступить m раз (будь-якій послідовності), приблизно дорівнює

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.18}$$

Тут $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функція Гаусса. Таблиця значень функції $\varphi(x)$ є в додатку А посібника. Функція Гаусса – парна функція.

Приклад 29. Визначити ймовірність того, що при 1000 випробувань подія відбудеться 410 разів, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,4.

Розв'язання

За умовою $n = 1000$, $m = 410$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Тоді

$x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{410 - 1000 \cdot 0{,}4}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = 0{,}645$. З додатку А знаходимо

$\varphi(0{,}645) = 0{,}324$.

Отже, $P_{410,1000} = \dfrac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} \cdot 0{,}324 = 0{,}0209$.

Інтегральна теорема Муавра–Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p $(0 < p < 1)$, подія наступить не менше m_1 разів і не більше m_2 разів, приблизно дорівнює

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.19)$$

Тут $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-(t^2/2)} dt$ – функція Лапласа. Таблиця значень функції Лапласа є в додатку Б даного посібника. Функція Лапласа – непарна функція.

Приклад 30. Кількість студентів в потоці 150 чоловік. Нехай, кожен із студентів відвідує лекцію з ймовірністю 0,8. Визначимо ймовірність того, що на лекції присутні від 115 до 140 студентів.

Розв’язання.

За умовою завдання $n = 150,$ $m_1 = 115,$ $m_2 = 140,$ $p = 0{,}8$ і $q = 1 - p = 0{,}2$.

Для розв’язання завдання застосовуємо локальну теорему Муавра – Лапласа.

$x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{115 - 150 \cdot 0{,}8}{\sqrt{150 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}021;$ $\quad x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{140 - 150 \cdot 0{,}8}{\sqrt{150 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 4{,}082.$

За таблицею додатка Б знаходимо $\Phi(-1{,}021) = -0{,}3464$, $\Phi(4{,}082) = 0{,}4999$.

Тоді $P_n(115{,}140) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}4999 - (-0{,}3464) = 0{,}8463.$

Відповідь: $P_n(115{,}140) = 0{,}8463$.

Контрольні питання

1. Наведіть умови, за яких відбувається повторення дослідів. Наведіть приклад повторення дослідів за такими умовами.

2. Доведіть формулу Бернуллі при повторенні дослідів.
3. У яких випадках при повторенні дослідів застосовується формула Пуассона? Доведіть формулу Пуассона.
4. У яких випадках при повторенні дослідів застосовується локальна формула Муавра-Лапласа? Запишіть формулу.
5. У яких випадках при повторенні дослідів застосовується інтегральна формула Муавра-Лапласа? Запишіть формулу.

Задачі

1. З партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого ґатунку. Ймовірність того, що навмання узятий виріб виявиться вищого ґатунку, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох перевірених виробів тільки два вироби вищого ґатунку.

2. Що вірогідніше виграти у рівносильного суперника (нічийний результат партії виключений): три партії з чотирьох чи п'ять з восьми?

3. Вироби деякого виробництва містять 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед п'яти взятих навмання виробів: а) немає жодного бракованого; б) будуть два браковані.

4. Монету підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде: а) менше двох разів, б) не менше двох разів.

5. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених буде 50 хлопчиків.

6. Схожість насіння даної рослини дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 900 посаджених насінин число проросших буде між 760 і 820.

7. У перші класи повинні були зарахувати 200 дітей. Визначити ймовірність того, що серед них буде не менше 100 дівчаток, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51.

8. Ймовірність появи події в одному досліді дорівнює 0,01. Зроблено 1000 незалежних дослідів. Яка ймовірність того, що подія відбулася в чотирьох дослідах.

9. Пристрій, що складається з п'яти незалежно працюючих елементів, вмикається за час Т. Ймовірність відмови кожного з них за цей час дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що відмовлять: а) три елементи; б) не менше чотирьох елементів; у) хоч би один елемент.
10. Знайти ймовірність того, що коли підкинути монету 200 разів, то "орел" випаде від 90 до 110 разів.

Відповіді: 1) 0,384; 2) ймовірніше – три з чотирьох; 3) а) 0,7738; б) 0,0214; 4) а) $3/16$, б) $13/16$; 5) 0,3910; 6) 0,865; 7) 0,387; 8) 0,019; 9) а) 0,0512; б) 0,00672; в) 0,67; 10) 0,8384.

Розділ 2. Випадкові величини

2.1. Дискретні випадкові величини. Закони розподілу

Випадковою називають величину, яка в результаті випробування набуває одне і лише одне з можливих значень, наперед не відоме і залежне від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані.

Розрізняють дискретні і неперервні випадкові величини.

Змінна величина X, що набуває числові значення x_i з ймовірністю p_i, називається *дискретною випадковою величиною.*

Таким чином, дискретна випадкова величина набуває окремі, ізольовані значення з певною ймовірністю. Наприклад, якщо випадкова величина X - кількість пасажирів маршрутного таксі, то її значення x_i набувають тільки невід'ємні цілі значення.

Функціональна залежність ймовірності p_i від x_i називається законом розподілу ймовірності дискретної випадкової величини X .

Закон розподілу можна зобразити у вигляді таблиці 2.1 або графічно.

Таблиця 2.1 – Закон розподілу дискретної випадкової величини

Можливі значення x_i випадкової величини _	x_1	x_2	...	x_k
Ймовірність p_i значень випадкової величини _	p_1	p_2	...	p_k

Графік або багатокутник розподілу ймовірностей зображується таким чином (див. рисунок 2.1)

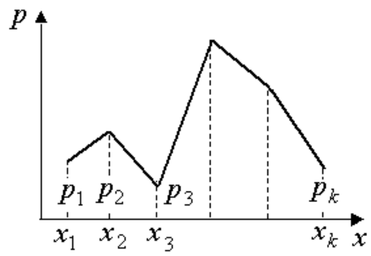


Рисунок 2.1 – Багатокутник розподілу ймовірностей

Те, що випадкова величина X набуває одне із значень x_k, є подія достовірне і тому повинна виконуватися умова $\sum p_k = 1$ (зазначимо, що послідовність значень x_k, p_k може бути як скінчена, так і нескінченна).

Приклад 1. Змінна величина X є число, що випадає на верхній грані гральної кості при її одноразовому підкиданні. Скласти таблицю розподілу випадкової величини X .

Розв'язання

На гранях гральної кості число очок 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поява кожного числа очок рівноможлива.

Таблиця 2.2 - Закон розподілу за прикладом 1

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Деякі закони розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити аналітично (у вигляді формули).

2.1.1. Біноміальний розподіл

Закон розподілу називається *біноміальним*, якщо ймовірність появи кожного значення випадкової величини X визначається за формулою Бернуллі.

Приклад 2. Змінна величина X - кількість появи цифри при підкиданні монети 5 разів. Скласти таблицю і багатокутник розподілу випадкової величини.

Розв'язання

Випадкова величина є дискретною, вона може набувати значення 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ймовірність появи кожного значення визначаємо за формулою Бернуллі (1.16).;

$$P(X=0)=\frac{5!}{0!\cdot 5!}(0{,}5)^{0}\cdot(1-0{,}5)^{5}=(0{,}5)^{5}=0{,}03125;$$

$$P(X=1)=\frac{5!}{1!\cdot 4!}(0{,}5)^{5}=5\cdot(0{,}5)^{5}=0{,}15625;$$

$$P(X=2)=P(X=3)=\frac{5!}{2!\cdot 3!}(0{,}5)^{5}=10\cdot(0{,}5)^{5}=0{,}3125;$$

$$P(X=4)=\frac{5!}{1!\cdot 4!}(0{,}5)^{5}=0{,}15625; \qquad P(X=5)=\frac{5!}{0!\cdot 5!}(0{,}5)^{5}=0{,}03125.$$

Таблиця 2.3 - Закон розподілу в прикладі 2

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Перевірка правильності складання закону розподілу:

$$2\times 0{,}03125+2\times 0{,}15625+2\times 0{,}3125=1.$$

Багатокутник розподілу ймовірностей зображено на рисунку 2.2.

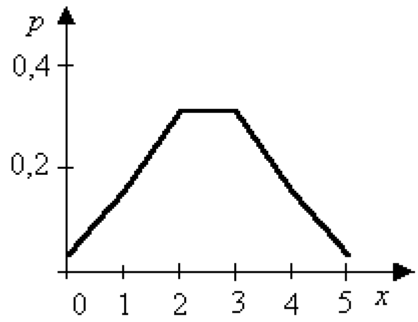


Рисунок 2.2 – Багатокутник розподілу ймовірностей

2.1.2. Розподіл Пуассона

Нехай дискретна випадкова величина X виражає кількість появ події A при масових випробуваннях (n - велике), але при цьому в кожному випробуванні ймовірність появи події $P(A) = p$ мала, і виконується умова $np = \lambda = \text{const}$. У таких випадках (див. §1.8.2) закон розподілу випадкової величини задається формулою Пуассона $P_{m,n}(A) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ і називається розподілом Пуассона.

Прикладами випадкових величин, що мають розподіл Пуассона, є: число викликів на телефонній станції за час t; число друкарських помилок у великому тексті; число бракованих деталей у великій партії і таке інше.

Приклад 3. У порту кожну добу може з'явитися одне великовантажне судно з ймовірністю $P = \dfrac{1}{6}$. Ймовірність появи більш одного судна протягом доби значно мала. Яка ймовірність того, що за місяць (30 днів) порт відвідають не більше 4 суден?

Розв'язання

За умовою $n = 30, \quad p = \dfrac{1}{6}.$

Знайдемо $\lambda = np = 30 \cdot \dfrac{1}{6} = 5, \;\; P_n(m) = \dfrac{e^{-5} \cdot 5^m}{m!}, \quad m = \overline{0,4}.$

За формулою Пуассона шукана ймовірність приблизно дорівнює

$$P(m \le 4) = \sum_{m=0}^{4} P_n(m) \; = P_{30}(0) + P_{30}(1) + P_{30}(2) + P_{30}(3) + P_{30}(4) =$$
$$= 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 + 0{,}1404 + 0{,}1755 = 0{,}4405.$$

2.1.3. Геометричний розподіл

Нехай відбуваються незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p $(0 < p < 1)$, ймовірність ні яви дорівнює $q = 1 - p$. Випробування закінчуються, як тільки з'явиться подія A. Якщо подія з'явилася в k-м випробуванні, то у всіх попередніх воно не з'являлась.

Позначимо через X дискретну випадкову величину – число випробувань, які потрібно зробити до першої появи події A. Можливими значеннями є натуральні числа $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$, і так далі. Якщо в перших $k-1$ випробуваннях подія не з'явилася, а в k-м випробуванні відбулася, то

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p\,. \tag{2.1}$$

Задаючи $k = 1, 2, 3, \ldots$, визначимо суму ймовірностей всіх значень випадкової величини X:

$$p + pq + pq^2 + pq^3 + \ldots + pq^n + \ldots$$

Отриманий числовий ряд – це нескінчена спадає геометрична прогресія зі знаменником $|q| < 1$. Тому ряд збігається, а сума ряду визначається за формулою

$$S = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Закон розподілу ймовірностей (1.20) називається *геометричним*.

Прикладами реальних випадкових величин, розподілених за геометричним законом, є: число пострілів до першого попадання, число випробувань приладу до першої відмови, число підкидань монети до першого випадання цифри і таке інше

Приклад 4. Студент A знає відповіді на 6 питань з десяти, студент $Б$ знає відповіді на 2 питання з десяти. Щоб скласти іспит, необхідно відповісти тільки на одне питання. Після 3-х невдалих спроб студента відраховують з університету. Визначити ймовірність того, що кожен із студентів A і $Б$ продовжить освіту.

Розв’язання

Нехай X - випадкова величина, що має геометричний розподіл (2.1), k – число випробувань до першої відповіді на екзаменаційне питання. За умовою завдання для студента A $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, для студента $Б$ $p = 0{,}2$ $q = 0{,}8$. Складемо таблицю розподілу для перших 5-ти значень випадкової величини.

Таблиця 2.4 – Геометричний закон розподілу

k	1	2	3	4	5	…
$P_A(X = k)$	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,01536	…
$P_Б(X = k)$	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,08192	…

Ймовірність складання іспиту за три спроби і можливість залишитися в університеті:

для студента A ймовірність 0,6+0,24+0,096=0,936;

для студента $Б$ ймовірність 0,2+0,16+0,128=0,488.

Контрольні питання

1. Яка величина називається випадковою, дискретною випадковою? Наведіть приклад дискретної випадкової величини.
2. Що називається законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини?
3. У яких випадках дискретна випадкова величина має біноміальний закон розподілу, розподіл Пуассона, геометричний розподіл?

Задачі

1. Підкидають дві гральні кості. Нехай X - сума цифр, що випали на їх верхніх гранях. Написати закон розподілу ймовірностей.

2. Здійснюються серія незалежних випробувань, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0,8. Випробування припиняються, як тільки

відбувається подія A. Написати закон розподілу випадкової величини X - числа виконаних дослідів.

3. Здійснюються 4 незалежних досліди, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0,6. Нехай випадкова величина X - частота появи події A в 4 – х дослідах. Написати закон розподілу X .

4. Здійснюються два незалежні постріли у мішень. Ймовірність попадання при кожному пострілі дорівнює 0,7. Розглядається випадкова величина X - різниця між числом попадань і числом промахів. Написати закон її розподілу.

5. Дві гармати стріляють у деяку ціль. Перша гармата стріляє двічі, а друга – один раз. Ймовірність попадання у ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,8, з другої – 0,6. Знайти закон розподілу випадкової величини X - загального числа попадань в ціль.

2.2 Функція розподілу

Функцією розподілу (позначається $F(x)$) називається ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого від значення змінної величини x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Для дискретної випадкової величини функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Приклад 5. Зроблено три незалежні постріли. Ймовірність попадання - $0{,}4$. Побудувати функцію розподілу числа попадань.

Розв'язання

Випадкова величина X набуває значення: $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$ Ймовірність можливих значень випадкової величини визначимо за формулою Бернуллі:

$$P(X = x_i) = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n - x_i}, \quad (n = 3, \ q = 0{,}6).$$

Маємо:

$P(X=1)=C_3^1\cdot 0{,}4^1\cdot 0{,}6^2=0{,}432;\ P(X=2)=C_3^2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^1=0{,}288;$

$P(X=3)=C_3^3\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^0=0{,}064.$

Складемо ряд (таблицю 2.5) розподілу.

Таблиця 2.5 – Ряд розподілу до прикладу 5

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Побудуємо функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при}\ x\le 0; \\ P(X=0)=0{,}216\ \textit{при}\ 0<x\le 1; \\ P(X=0)+P(X=1)=0{,}648\ \textit{при}\ 1<x\le 2; \\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}936\ \textit{при}\ 2<x\le 3; \\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1\ \textit{при}\ x>3. \end{cases}$$

Графік функції розподілу зображений на рисунку 2.3.

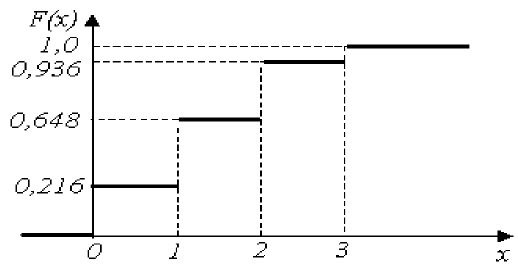


Рисунок 2.3 – Функція розподілу за прикладом 5

Розглянемо випадкову величину X як випадкову точку на числовій осі Ох, яка в результаті досліду може бути у будь-якому місці на цій осі. Тоді $F(x)$ - ймовірність того, що випадкова точка X в результаті досліду потрапить лівіше за точку x. За будь-яких $x_2>x_1$ виконується нерівність $P(X<x_2)\ge P(X<x_1)$, отже, функція розподілу така, що не спадає, $F(x_2)\ge F(x_1),$ якщо $x_2>x_1$. Також з погляду геометричної інтерпретації функції розподілу $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

Таким чином, функція розподілу має наступні властивості:

1) множина значень функції розподілу збігається з інтервалом значень ймовірностей $F(x) = P(X < x)$, $0 \le F(x) \le 1$;
2) функція розподілу не спадає, $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;
3) граничні значення функції розподілу $F(-\infty) = 0;\ F(+\infty) = 1$;
4) якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$, $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини має розриви з кінцевим стрибком в точках, де випадкова величина набуває свої значення. Величина стрибка в точці x_k дорівнює ймовірностей p_k (див. рисунок 2.3).

Якщо деяка випадкова величина X має неперервну функцію розподілу $F(x)$ (див. рисунок 2.4), то така випадкова величина називається *неперервною*. В цьому випадку $F(x)$ називається ще інтегральним законом розподілу.

Неперервна випадкова величина може набувати будь-яке значення на числовій осі Ox або на деякому інтервалі $(a;b)$.

Таким чином, функція розподілу є законом розподілу ймовірностей як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

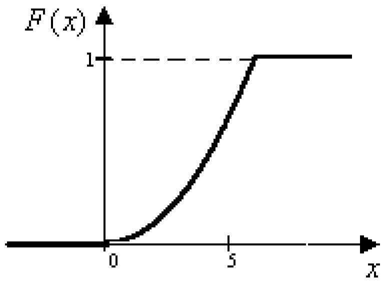


Рисунок 2.4 – Графік функції розподілу неперервної випадкової величини

Контрольні питання

1. Що називається функцією розподілу?
2. Назвіть і поясніть властивості функції розподілу.
3. Яка величина називається неперервною випадковою величиною?
4. Який вигляд має графік функції розподілу дискретної випадкової величини, неперервної випадкової величини?

Задачі

1. У партії 7% нестандартних деталей. Навмання взяли три деталі. Написати закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа стандартних деталей серед трьох відібраних. Побудувати функцію розподілу і її графік.

2. В урні є чотири кулі з номерами від 1 до 4. Вийняли дві кулі. Нехай випадкова величина X - сума номерів куль. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини X. Побудувати багатокутник розподілу та графік функції розподілу.

3. Троє студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший студент складе іспит, дорівнює 0,9, для другого і третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей, побудувати *F(x)* і накреслити її графік.

2.3 Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал

Нехай деяка випадкова величина X має функцію розподілу $F(x)$. Визначимо ймовірність того, що випадкова величина потрапляє в результаті випробування до інтервалу $[x_1;\, x_2)$, тобто $x_1 \le X < x_2$.

Введемо наступні позначення: подія A полягає в тому, що в результаті випробування $X < x_2$; подія B - у результаті випробування $X < x_1$; C - у результаті випробування $x_1 \le X < x_2$.

Тоді $A = B + C$. Події B і C - несумісні, отже $P(A) = P(B) + P(C) \Rightarrow$

$P(x_1 \le X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$ остаточно

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (2.2)$$

Ймовірність попадання випадкової величини до інтервалу $[x_1;\, x_2)$ *дорівнює приросту функції розподілу у цьому інтервалі.*

Зменшуватимемо інтервал $[x_1;\, x_2)$ при $x_2 \to x_1$.

$$\lim_{x_2 \to x_1} P(x_1 \le X < x_2) = \lim_{x_2 \to x_1} (F(x_2) - F(x_1)) = P(X = x_1).$$

Значення цієї границі залежить від того, чи неперервна функція $F(x)$ в точці $x = x_1$ або ж має розрив.

Якщо у точці $x = x_1$ функція розподілу має розрив, то границя дорівнює значенню стрибка функції в цій точці (див. рисунок 2.3 в точках $x = 0;\ 1;\ 2;\ 3$).

Якщо функція розподілу $F(x)$ в точці $x = x_1$ неперервна, то ця границя дорівнює нулю (див. рисунок 2.4 і рисунок 2.3 в інтервалах неперервності функції розподілу). Звідси маємо висновок:

Ймовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю.

На практиці це означає, що при необмеженому повторенні дослідів подія $X = x$ з'являтиметься скільки завгодно рідко.

Тому для неперервної випадкової величини (і лише для неперервної) формула (2.2) може бути записана:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

або $P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Приклад 6. Випадкова величина X задана на осі Ox функцією розподілу $F(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X набуде значення, що знаходиться в інтервалі $(0;\ 1)$.

Розв'язання

За формулою $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ знаходимо

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Контрольні питання

1. Як підрахувати ймовірність попадання випадкової неперервної величини до даного інтервалу, якщо відома її функція розподілу?
2. Чому дорівнює ймовірність появи будь-якого дискретного значення неперервної випадкової величини?

Задачі

1. Функція розподілу випадкової величини X має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \ x<0; \\ x-\dfrac{x^2}{4},\ \textit{если}\ \ 0\le x\le 2; \\ 1,\ \textit{если}\ \ x>2. \end{cases}$$

Визначити ймовірність попадання випадкової величини до інтервалу:

$[-3;\ -1];\ [-1;1];\ [0;\ 1];\ [0{,}5;\ 1{,}5];\ [0;\ 2];\ [1;\ 4];\ [3;\ \infty].$

2. Функція розподілу випадкової величини X має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \ x<-1; \\ \dfrac{1}{2}(x+1),\ \textit{если}\ \ -1\le x\le 1; \\ 1,\ \textit{если}\ \ x>1. \end{cases}$$

Визначити ймовірність попадання випадкової величини в інтервали:

$[-3;\ -1];\ [-1;1];\ [0;\ 1];\ [0{,}5;\ 1{,}5];\ [0;\ 2];\ [1;\ 4];\ [3;\ \infty].$

2.4 Щільність розподілу

Наочне уявлення про характер розподілу *неперервної* випадкової величини в околах різних точок дає функція, яка називається щільністю розподілу ймовірностей або диференціальним законом розподілу випадкової величини.

Обчислимо ймовірність попадання випадкової величини X на елементарну ділянку $(x,\,x+\Delta x)$, використовуючи формулу (2.2):

$$P(x\le X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x).$$

Щільністю розподілу $f(x)$ *ймовірностей випадкової величини* називають границю відношення приросту функції розподілу $\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)$, до Δx, при $\Delta x\to 0$, тобто $f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$. Інакше кажучи, щільність розподілу ймовірностей – похідна функції розподілу:

$$F'(x)=f(x). \tag{2.3}$$

Зміст $f(x)$ полягає в тому, що вона вказує на те, як часто з'являється випадкова величина X у деякому околі точки x при повторенні дослідів. Оскільки функція розподілу – неспадна, то *щільність розподілу – величина невід'ємна* $f(x) \geq 0$. Оскільки граничні значення функції розподілу $F(-\infty)=0;\ F(+\infty)=1$, то граничні значення щільності розподілу $f(-\infty)=f(+\infty)=0$.

Дискретна випадкова величина не може характеризуватися щільністю розподілу.

Графік щільності розподілу називають *кривою розподілу. Залежно від виду кривої розподілу розрізняють декілька типових законів розподілу, наприклад, закон рівномірної щільності, нормальний закон розподілу та інші.*

Визначимо ймовірність попадання неперервної випадкової величини на заданий відрізок $[x_1;x_2]$. Із співвідношення $F'(x)=f(x)$, проінтегрувавши його на відрізку $[x_1;x_2]$, маємо:

$$\int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx,\quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2)-F(x_1),\ \Rightarrow$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{2.4}$$

Остання формула показує, що ймовірність попадання неперервної випадкової величини на заданий відрізок $[x_1;x_2]$ дорівнює площі криволінійної трапеції під кривою розподілу на відрізку $[x_1;x_2]$. Тоді *площа під всією кривою розподілу дорівнює одиниці*: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Зокрема, якщо всі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Виразимо функцію розподілу $F(x)$ через щільність розподілу. Оскільки $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$, то, враховуючи (2.4), маємо: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Приклад 7. Нехай випадкова величина X підпорядкована закону розподілу з щільністю

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x < 0 \;\; и \;\; x > \pi. \end{cases}$$

Побудувати графік щільності розподілу. Знайти ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Розв'язання.

Побудуємо графік щільності розподілу (рисунок 2.5).

$$P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x \Big|_{0}^{\pi/4} \approx 0{,}15.$$

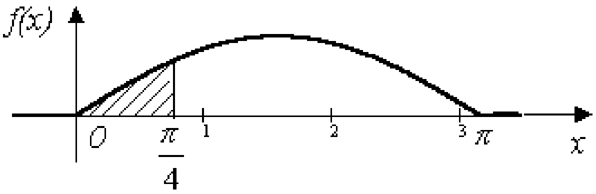


Рисунок 2.5 – Для прикладу 7

Контрольні питання

1. Що називається щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини, який її імовірнісний зміст?
2. Як визначити ймовірність попадання випадкової величини на заданий відрізок, якщо відома щільність розподілу?
3. Назвіть і поясніть властивості щільності розподілу.
4. Як називається графік щільності розподілу, чому дорівнює площа під графіком щільності розподілу?

5. Як знайти функцію розподілу випадкової величини, якщо відома щільність розподілу?
6. Чи може щільність розподілу набувати негативні значення, значення більше одиниці?

Задачі

1. Випадкова величина X має такий закон розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \ x<0; \\ \sin 2x,\ \textit{если}\ \ 0\le x\le \pi/2; \\ 0,\ \textit{если}\ \ x>\pi/2. \end{cases}$$

Потрібно: а) визначити функцію розподілу $F(x)$; б) знайти ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$;

в) побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

2. Задана функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \ x<0; \\ \sin x,\ \textit{если}\ \ 0\le x\le \pi/2; \\ 1,\ \textit{если}\ \ x>\pi/2. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$ і обчислити $P(\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{3})$.

3. Задається щільність ймовірностей функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \ x\le 1; \\ a\ln x,\ \textit{если}\ \ 1<x\le e; \\ 0,\ \textit{если}\ \ x>e. \end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$. Побудувати графіки $f(x)$ $F(x)$.

4. За даними функціями

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \ x\le 0; \\ 5\sqrt{x},\ \textit{если}\ \ 0<x\le 1; \\ 0,\ \textit{если}\ \ x>1. \end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \ x\le 0; \\ \dfrac{3}{5}\sqrt[5]{x},\ \textit{если}\ \ 0<x\le 1; \\ 0,\ \textit{если}\ \ x>1. \end{cases}$$

визначити, яка з них є щільністю випадкової величини *X*, визначеною на відрізку [0;1].

5. Випадкова величина X має закон розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0,\ если\ \ x<0;\\ C\cdot\cos x,\ если\ \ 0\le x\le \pi/6;\\ 0,\ если\ \ x>\pi/6.\end{cases}$$

Потрібно: а) обчислити коефіцієнт C; б) визначити функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

6. Випадкова величина X розподілена за "законом рівнобедреного трикутника", крива розподілу зображена на рисунку 2.6.

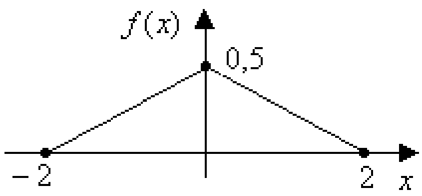


Рисунок 2.6 – До задачі 6

Потрібно: а) записати вираз щільності розподілу $f(x)$; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) знайти ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[-1;\ 1]$; на відрізок $[0;3]$.

7. Випадкова величина *X* розподілена за законом, зображеним на рисунку 2.7.

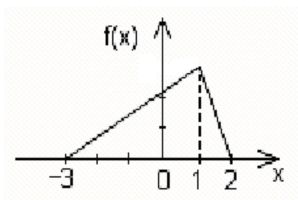


Рисунок 2.7 – До задачі 7

Записати вирази $f(x)$ і $F(x)$ і побудувати графік функції $F(x)$.

2.5 Числові характеристики випадкових величин

Повторюючи пройдене в параграфах 2.1, 2.2 і 2.4, зазначимо, що: всяке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та ймовірностями, що їм відповідають, називається *законом розподілу*.

Було розглянуто розподіли ймовірностей дискретної і неперервної випадкових величин. Дискретний розподіл зручно задати у вигляді таблиці (див. таблиці 2.1, 2.2, 2.3, 2.4).

Якщо випадкова величина – неперервна, тобто, набуває всі значення з деякого інтервалу, то її розподіл задається щільністю розподілу $f(x)$. Щільність розподілу і її графік (крива розподілу) називається також диференціальним законом розподілу.

І дискретні і неперервні випадкові величини можуть бути описані функцією розподілу $F(x) = P(X < x)$. Функція розподілу $F(x)$ і її графік називаються інтегральним законом розподілу.

Будь-який закон розподілу випадкової величини: таблиця, щільність або функція розподілу - найповніше описує випадкову величину з імовірнісної точки зору.

На практиці, часто, немає необхідності знати про випадкову величину все. Досить вказати декілька числових параметрів, що характеризують окремі властивості розподілу. Такі параметри, що виражають в стислій формі найбільш істотні особливості розподілу, називаються *числовими характеристиками* випадкової величини [3, стор. 83].

2.5.1 Математичне сподівання

Математичним сподіванням *дискретної* випадкової величини X називається сума добутків можливих значень цієї величини на ймовірність їх появ:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{2.5}$$

Математичне сподівання вказує середнє значення, біля якого групуються всі можливі значення випадкової величини.

Механічний зміст математичного сподівання: коли на осі Ox розташовані точки $x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n$ з масами $p_1, \quad p_2, \quad ..., \quad p_n$, причому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то $M(X)$ - абсциса центру ваги даної системи матеріальних точок.

Формула (2.5) не що інше, як скалярний добуток арифметичних векторів $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $p(p_1, p_2, ..., p_n)$.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X можна виразити вже не сумою добутків, а інтегралом

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx. \qquad (2.6)$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$, то математичне сподівання виражається інтегралом

$$M(X) = \int_{a}^{b} x \cdot f(x)dx. \qquad (2.7)$$

Механічна інтерпретація – така ж, як для дискретної випадкової величини – абсциса центру ваги Але при цьому маса, яка дорівнює одиниці, розподілена на осі Ox за законом щільності розподілу $f(x)$.

Інше позначення математичного сподівання - m_x.

Властивості математичного сподівання

Властивості справедливі як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній $M(C) = C$. При цьому постійна C - це випадкова величина, яка має одне значення C і набуває його з ймовірністю $p = 1$.
2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$. При цьому добуток CX - випадкова величина,

що набуває значення Cx_1, Cx_2, ..., Cx_n з такою ж ймовірністю, як величина X - значення x_1, x_2, ..., x_n.

3. Випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення набуває інша величина. Інакше випадкові величини *залежні*. Добуток незалежних випадкових величин XY - випадкова величина, можливі значення якої рівні добуткам кожного можливого значення X на кожне можливе значення Y. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.
4. Сумою випадкових величин $X + Y$ називається випадкова величина, можливе значення якої дорівнює сумі кожного можливого значення X та кожного можливого значенням Y. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Із властивостей математичного сподівання випливає теорема про математичне сподівання числа появи подій в незалежних випробуваннях.

Теорема 1. Якщо випадкова величина X - число появ події A в n незалежних випробуваннях, при яких в кожному випробуванні $P(A) = p$, то математичне сподівання $M(X)$ дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події в кожному випробуванні: $M(X) = np$.

2.5.2 Мода і медіана випадкової величини

Модою (Mo) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність його появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірностей: f(Mo)= max $f(x)$.

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл ймовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди – *двомодальним* і так далі. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною (Me) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність ймовірностей подій:

$$P(-\infty < X < Me) = P(Me < X < \infty);$$

$$=> F(Me) - F(-\infty) = F(\infty) - F(Me) =>$$

$$F(Me) = 0{,}5 \qquad (2.8)$$

Таким чином, медіану визначають з рівності (2.8).

Me можна знайти, скориставшись щільністю ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}, \qquad (2.9)$$

або при $X \in [a;b]$:

$$\int_{a}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{b} f(x)dx = \frac{1}{2}. \qquad (2.10)$$

Таким чином, Me - можливе значення випадкової величини X, причому таке, що пряма, проведена перпендикулярно до відповідної точки на площині X = Me, поділяє площу фігури, яку обмежує функція *f(x)*, на дві рівні частини.

Приклад 8. Задана щільність ймовірностей на рисунку 2.8.

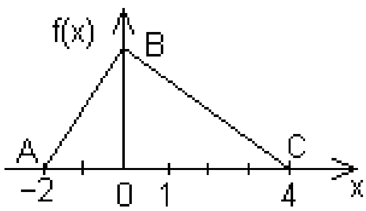


Рисунок 2.8 – До прикладу 8

Обчислити Me, знайти моду Mo.

Розв'язання.

На відрізку [-2;0] щільність ймовірностей змінюється за законом прямої пропорційної залежності $f_1(x) = k_1x + b_1$ $(k_1 > 0)$, а на відрізку [0;4] за аналогічним законом $f_2(x) = k_2x + b_2$ $(k_2 < 0)$. Для знаходження значень параметрів обчислимо координати вершини цього трикутника B(x,y). Абсциса цієї точки відома з умови завдання: x=0; ординату знайдемо з умови нормування, згідно з якою площа трикутника ABC повинна дорівнювати одиниці:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot y => y = \frac{1}{3}$$

Таким чином, шукані координати:

x = 2; y = 1/3.

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки A(-2;0) і B(0;1/3):

$$\frac{y-0}{x+2} = \frac{1/3-0}{0+2} => y = \frac{x+2}{6}.$$

Так, на відрізку [-2;0] маємо:

$$f_1(x) = \frac{x+2}{6}.$$

Рівняння прямої, що проходить через точки B(0;1/3) і C(4;0):

$$\frac{y-1/3}{x-0} = \frac{0-1/3}{4-0} => y = \frac{4-x}{12}.$$

Звідси на відрізку [0;4] отримуємо:

$$f_2(x) = \frac{4-x}{12}.$$

Таким чином, щільність ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -2; \\ \dfrac{x+2}{6}, \ -2 < x \le 0; \\ \dfrac{4-x}{12}, \ 0 < x \le 4; \\ 0, \ x > 4. \end{cases}$$

З рисунка видно, що Me належить відрізку [0;4]. Для знаходження Me скористаємося формулою (2.10):

$$\int_{Me}^{4} f(x)dx = \int_{Me}^{4} \frac{4-x}{12} dx = -\frac{(4-x)^2}{24}\bigg|_{Me}^{4} = -\frac{(4-x)^2}{24}\bigg|_{Me}^{4} = \frac{(4-Me)^2}{24} = \frac{1}{2}$$

$$=> Me = 4 \pm 2\sqrt{2}.$$

Виберемо те, значення, яке належить відрізку [0;4], тобто $Me = 4 - 2\sqrt{2}$.

Знайдемо моду.

$$f(\text{Mo}) = \max f(x);$$

$$f(0) = 1/3 - \max.$$

Отже, Mo = 0.

Відповідь: $Me = 4 - 2\sqrt{2}$; Mo = 0.

2.5.3 Дисперсія випадкової величини

Дисперсією випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{2.11}$$

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини щодо її математичного сподівання.

Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \tag{2.12}$$

Дисперсія неперервної випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx. \tag{2.13}$$

Якщо випадкова величина задана в інтервалі $(a;b)$, то

$$D(X) = \int_{a}^{b} (x - m_x)^2 f(x)dx. \tag{2.14}$$

Тут $m_x = M(X)$, $f(x)$ - щільність розподілу неперервної випадкової величини.

Розмірність дисперсії – квадрат розмірності випадкової величини, тому її не можна вказати на осі випадкової величини. Для наочності характеристики розсіювання зручніше користуватися величиною, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини – коренем квадратним з дисперсії.

Корінь квадратний з дисперсії називається ***середнім квадратичним відхиленням*** і позначається

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \text{ або } \sigma_x = \sqrt{D_x}. \tag{2.15}$$

Відхилення випадкової величини від її математичного сподівання називається *центрованою випадковою величиною*, позначатимемо її $\widehat{X}$. Таким чином, $\hat{X} = X - M(X)$ або $\hat{X} = X - m_x$.

На прикладі дискретної випадкової величини покажемо, що математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

$$M(\widehat{X}) = M(X - m_x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i =$$

$$= m_x - m_x = 0.$$

Математичне сподівання квадрата центрованої випадкової величини (дисперсію) можна обчислити іншими формулами, які відрізняються від формул (1.28) (1.29) (1.30). Для дискретної випадкової величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m_x \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m_x^2 \sum_{i=1}^{n} p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m_x^2 + m_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2.$$

Таким чином, *дисперсія дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання*:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2. \qquad (2.16)$$

Відповідно для неперервної випадкової величини мають місце такі формули:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2, \qquad (2.17)$$

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - (M(X))^2. \qquad (2.18)$$

Приклад 9. Група студентів складає іспит. Випадкова величина X (отримувана оцінка) набуває значення $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$. Ймовірність отримання цих оцінок навчальною групою відповідно дорівнює $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}2$. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання

Закон розподілу для даного завдання має вигляд (див. таблицю 2.6).

Таблиця 2.6 – Закон розподілу до прикладу 9

x_k	2	3	4	5
p_k	0,1	0,4	0,3	0,2

Математичне сподівання: $M(X) = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}2 = 3{,}6$.

Отримане число $3{,}6$ можна вважати середнім балом (математичне сподівання), на котрий вийде група на іспиті при даних ймовірностях отримання тих або інших оцінок.

Дисперсію визначаємо за формулою (2.16): $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2$.

$D(X) = (2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}3 + 5^2 \cdot 0{,}2) - 3{,}6^2 =$

$= 13{,}8 - 12{,}96 = 0{,}84$. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}917$.

Властивості дисперсії

Властивості справедливі як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

1. Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна, причому $D(X) = 0$ лише коли X - постійна. $M(C) = C \Rightarrow D(C) = M(C^2) - C^2 = 0$.
2. Якщо $C = \text{const}$, то $D(CX) = C^2 D(X)$. Дійсно $D(CX) = M(C^2 X^2) - (M(CX))^2 = C^2(M(X^2) - M^2(X))$.
3. Якщо випадкові величини X і Y - незалежні, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Висновок 1. Дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X_1 + X_2 + ...X_k) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_k).$$

Висновок 2. Дисперсія суми постійної величини і випадковою дорівнює дисперсії випадкової величини: $D(C+X)=D(X)$.

Висновок 3. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Із властивостей дисперсії випливає теорема про дисперсію числа появи подій у незалежних випробуваннях.

Теорема 2. *Дисперсія числа появ подій в* n *незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність* p *появи події постійна*, *дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи і не появи події в одному випробуванні:* $D(X)=npq$.

Примітка – теореми 1 і 2 належать до випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, тому їх можна сукупно сформулювати таким чином: *математичне сподівання біноміального розподілу з параметрами* n *і* p *дорівнює добутку* $n \cdot p$, *а дисперсія дорівнює твору* $n \cdot p \cdot q$.

Приклад 10. Ймовірність відмови деталі при випробуванні на надійність дорівнює 0,15. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення числа деталей, що відмовили, якщо випробуванню буде піддано 20 деталей.

Розв'язання

Нехай X - число відмов при випробуванні деталей. Відмова при випробуванні однієї деталі не залежить від результатів випробувань інших деталей, тому дані події незалежні. Отже, згідно теоремою 1

$$M(X)=np=20\cdot 0{,}15=3 \text{ (деталі)}.$$

Згідно з теоремою 2 $D(X)=npq=20\cdot 0{,}15\cdot 0{,}85=2{,}55$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2{,}55}=1{,}597$.

2.5.4 Поняття про моменти розподілу. Характеристики форми кривої щільності розподілу

Початковим моментом порядку s випадкової величини X (позначається $\alpha_s(X)$) називається математичне сподівання випадкової величини у степені s, тобто

$$\alpha_s(X) = M(X^s).$$

Відповідно до визначення обчислення початкових моментів здійснюється за формулами:

- для дискретної випадкової величини $\alpha_s(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i$;

- для неперервної випадкової величини $\alpha_s(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx$.

Математичне сподівання – перший початковий момент ($s = 1$):

$$\alpha_1(X) = M(X) = m_x.$$

Центральним моментом порядку s (позначається $\mu_s(X)$) називається математичне сподівання центрованої випадкової величини $\hat{X} = X - m_x$ в степені s, тобто $\mu_s(X) = M(\hat{X}^s) = M((X - m_x)^s)$.

Вище показано, що перший центральний момент дорівнює нулю

$$\mu_1(X) = M(\hat{X}) = 0.$$

Другий центральний момент – це дисперсія. Вище показано, що

$$\mu_2(X) = D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \alpha_2(X) - \alpha_1^2(X).$$

Центральні моменти вищих порядків використовуються як *характеристики форми кривої щільності розподілу*.

Характеристикою асиметрії кривої розподілу є математичне сподівання куба центрованої випадкової величини, тобто *третій центральний момент*:

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 f(x)dx.$$

Третій центральний момент має розмірність куба випадкової величини. Щоб отримати безрозмірну величину, μ_3 ділять на куб середнього квадратичного відхилення. Отримана величина називається коефіцієнтом асиметрії. Позначимо коефіцієнт асиметрії S. Тоді $S = \dfrac{\mu_3}{\sigma_x^3}$. Знак коефіцієнта залежить від форми кривої розподілу, що ілюструє рисунок 2.9.

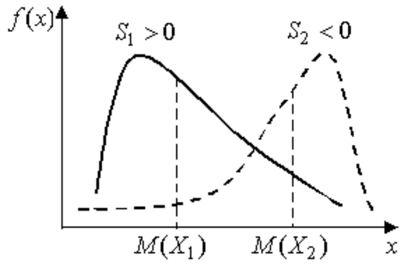


Рисунок 2.9 – Вплив форми кривою розподілу на знак коефіцієнта асиметрії

Крива розподілу випадкової величини може мати більш-менш плоску вершину.

Обчислюється математичне сподівання четвертого ступеня центрованої випадкової величини (четвертий центральний момент):

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^4 f(x)dx \cdot$$

Потім обчислюється безрозмірна величина $\dfrac{\mu_4}{\sigma_x^4}$. Ця величина для випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу, дорівнює 3 (про нормальний розподіл див. нижче).

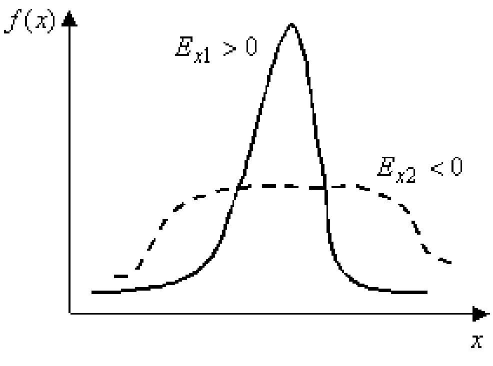


Рисунок 2.10 – Залежність ексцесу від форми кривої розподілу

Інші закони розподілу порівнюються з нормальним законом, коефіцієнт порівняння називається *ексцесом* (позначається E_x) і має вигляд: $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$.

Для кривої розподілу з гострішою вершиною, ніж у нормальної кривої $E_x > 0$, для кривої розподілу з „плоскішою” вершиною $E_x < 0$ (див. рисунок 2.10).

Приклад 11. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ c \cdot (x+1)^2, & 0 \le x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Потрібно:

1) визначити коефіцієнт c; 2) знайти функцію розподілу $F(x)$;

3) побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$; 4) обчислити математичне сподівання $M(\mathrm{X})$ і дисперсію $D(\mathrm{X})$; 5) знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення з інтервалу $(1;\,2)$; 6) визначити коефіцієнт асиметрії кривої розподілу S і ексцес E_x.

Розв’язання

1. Для визначення коефіцієнта c використовуємо властивість щільності розподілу (§2.4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Оскільки для нашого прикладу $f(x) = 0$ ÿêùî $x < 0$ ³ ÿêùî $x > 2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 c \cdot (x+1)^2 dx = c \cdot \frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{26}{3}c.$$ Звідси

$$\frac{26}{3}c = 1 \Rightarrow \quad c = \frac{3}{26}.$$

2. Функцію розподілу $F(x)$ виражаємо зі щільності розподілу $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$;

для нашого випадку

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{3}{26}(x+1)^2\,dx=\left.\frac{(x+1)^3}{26}\right|_{0}^{x}=\frac{(x+1)^3}{26}-\frac{1}{26};$$ таким чином

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{(x+1)^3}{26}-\dfrac{1}{26}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

3. Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ будуємо в одній системі координат (див. рисунок 2.11).

4. Математичне сподівання обчислюємо за формулою (2.6):

$M(X)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} x\cdot f(x)dx$; для нашого випадку

$$M(X)=\int\limits_{0}^{2} x\cdot\frac{3}{26}(x+1)^2\,dx=\frac{17}{13}.$$

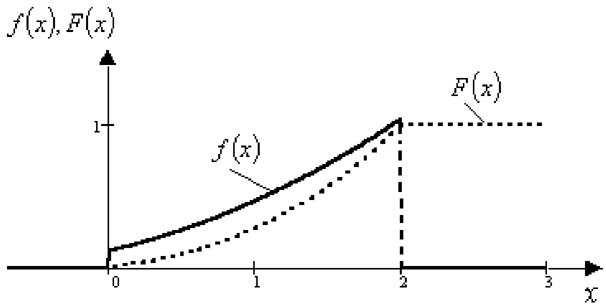


Рисунок 2.11 – До прикладу 11

Дисперсію випадкової величини X обчислюємо за формулою (2.18):

$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$, де $M^2(X)=\left(\frac{17}{13}\right)^2=\frac{289}{169}$;

величину $M\left(X^2\right)$ визначаємо окремо:

$$M\left(X^2\right)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2\cdot f(x)dx=\int\limits_{0}^{2} x^2\cdot\frac{3}{26}(x+1)^2\,dx=\frac{128}{65};$$

тоді $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\frac{128}{65}-\frac{287}{169}=\frac{219}{845}$.

5. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу $(1;2)$, знаходимо за формулою (2.2):

$$P(1<x<2)=F(2)-F(1)=1-\frac{7}{26}=\frac{19}{26}.$$

6. Для визначення коефіцієнта асиметрії обчислюємо третій центральний момент

$\mu_3=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^3 f(x)dx$, тобто

$$\mu_3=\int\limits_0^2\left(x-\frac{17}{13}\right)^3\cdot\frac{3}{26}\cdot(x+1)^2dx=-\frac{184}{2197}$$

Коефіцієнт асиметрії $S=\frac{\mu_3}{\sigma_x^3}=\frac{\mu_3}{\left(\sqrt{D(X)}\right)^3}=-0{,}635\cdot$

Визначаємо центральний момент четвертого порядку

$$\mu_4=\int\limits_0^2\left(x-\frac{17}{13}\right)^4\cdot\frac{3}{26}\cdot(x+1)^2dx=\frac{32883}{199927}\cdot$$

Потім обчислюємо ексцес

$$E_x=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3=\frac{\mu_4}{(D(X))^2}-3=-0{,}551.$$

Контрольні питання

1. Що називається математичним сподіванням дискретної випадкової величини X? Що вказує (характеризує) математичне сподівання?
2. Як обчислюється математичне сподівання дискретної і неперервної випадкової величини?
3. Яка механічна інтерпретація математичного сподівання дискретної і неперервної випадкової величини?
4. Як інтерпретується з імовірнісної точки зору постійна величина C? Чому дорівнює математичне сподівання C?

5. Поясніть на простому прикладі, що таке сума і добуток двох дискретних незалежних випадкових величин. Як скласти закон розподілу ймовірностей суми двох незалежних випадкових величин, якщо відомі закони розподілу доданків? Як скласти закон розподілу ймовірностей добутку двох незалежних випадкових величин, якщо відомі закони розподілу співмножників?
6. Назвіть основні властивості математичного сподівання.
7. Що називають модою (Мо) дискретної випадкової величини X ?
8. Що називають модою (Мо) неперервної випадкової величини X ?
9. Який розподіл ймовірностей називають антимодальним?
10. Який розподіл ймовірностей називають одномодальным, двомодальным?
11. Що називають медіаною (Ме) випадкової величини?
12. Чому дорівнює F(Ме)?
13. При якому значенні x виконується рівність $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{\infty} f(x)dx$?
14. Що називають дисперсією випадкової величини, що характеризує дисперсія?
15. Як можна обчислити дисперсію дискретної і неперервної випадкової величини?
16. Назвіть основні властивості дисперсії.
17. Що називається середнім квадратичним відхиленням випадкової величини від її математичного сподівання?
18. Як обчислюються математичне сподівання і дисперсія біноміального розподілу?
19. Яка розмірність а) функції розподілу; б) щільність розподілу; в) математичного сподівання; г) дисперсії; д) середнього квадратичного відхилення?
20. Що є характеристикою асиметрії кривої розподілу?
21. Що характеризує і як обчислюється ексцес?

Задачі

1. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X. Побудувати багатокутник розподілу ймовірностей. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Варіант 1а

Можливі значення x_i випадкової величини X	1	2	3	4	5
Ймовірність p_i значень випадкової величини X	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Варіант 1б

Можливі значення x_i випадкової величини X	1	3	5	7	9
Ймовірність p_i значень випадкової величини X	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4

Варіант 1в

Можливі значення x_i випадкової величини X	2	4	6	8	10
Ймовірність p_i значень випадкової величини X	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2

2. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої в задачі 1 §2.1.

3. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої в задачі 3 §2.1.

4. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої в задачі 5 §2.1.

5. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, підпорядкованої біноміальному закону з параметрами а) $n = 10, \quad p = 0{,}9$; б) $n = 20, \quad p = 0{,}8$.

6. За заданим імовірнісним багатокутником на рисунку 2.12 обчислити $M(-4X+1)$; $D(-4X+1)$.

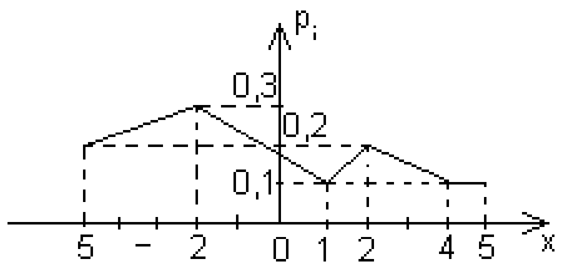


Рисунок 2.12 – До завдання 6

7. Задана

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0;\\ 0{,}5\cdot(1-\cos x), \text{ якщо } 0<x\le\pi;\\ 0, \text{ якщо } x>\pi.\end{cases}$$

Знайти *M(X), D(X)*, Mo, Me.

8. Закон розподілу ймовірностей зображений на рисунку 2.13.

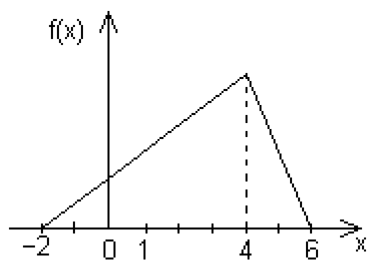


Рисунок 2.13 – До завдання 8

Знайти *M(X), D(X)*, Mo, Me.

9. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$. Потрібно:

1) визначити коефіцієнт C;
2) знайти функцію розподілу $F(x)$;
3) побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$;
4) обчислити математичне сподівання і дисперсію;
5) знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення з інтервалу (α,β).

9а. $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<-\dfrac{\pi}{2};\\ c\cdot\cos x, \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\ \alpha=0,\ \beta=\dfrac{\pi}{6};\\ 0, \text{ якщо } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

9б. $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<0;\\ c\cdot x, \text{ якщо } 0\le x\le 6;\ \alpha=1,\ \beta=3;\\ 0, \text{ якщо } x>6.\end{cases}$

9в. $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<0;\\ c\cdot\sin x, \text{ якщо } 0\le x\le\pi;\ \alpha=0,\ \beta=\dfrac{\pi}{3};\\ 0, \text{ якщо } x>\pi.\end{cases}$

10. Задано $F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<0;\\ 1-e^{-x}, \text{ якщо } x\ge 0.\end{cases}$

Знайти *As*; *Es*.

Відповіді:

1а. $M(X)=3{,}6;\quad D(X)=1{,}64;\quad \sigma(X)=1{,}281.$

1б. $M(X)=5{,}8;\quad D(X)=9{,}76;\quad \sigma(X)=3{,}124.$

1в. $M(X)=5{,}2;\quad D(X)=8{,}96;\quad \sigma(X)=2{,}993.$

2. $M(X)=7;\quad D(X)=5{,}833;\quad \sigma(X)=2{,}415.$

3. $M(X)=2{,}4;\quad D(X)=0{,}96;\quad \sigma(X)=0{,}9797.$

4. $M(X)=2{,}2;\quad D(X)=0{,}56;\quad \sigma(X)=0{,}7483.$

5а. $M(X)=9;\quad D(X)=0{,}9;\quad \sigma(X)=0{,}949.$

5б. $M(X)=16;\quad D(X)=3{,}2;\quad \sigma(X)=1{,}789.$

6. 1,8; 165,76.

7. p/2; (p2 – 4)/4; p/2; p/2.

8. 8/3; $\sqrt{26}$ /3; $\sqrt{24}$ - 2; 4.

9а. $c=\dfrac{1}{2},\quad M(X)=0,\quad D(X)=\dfrac{\pi^2}{4}-2,\quad P(\alpha<x<\beta)=\dfrac{1}{4}.$

9б. $c=\dfrac{1}{18},\quad M(X)=4,\quad D(X)=2,\quad P(\alpha<x<\beta)=\dfrac{2}{9}.$

9в. $c = \dfrac{1}{2}, \quad M(X) = \dfrac{\pi}{2}, \quad D(X) = \dfrac{\pi^2}{4} - 2, \quad P(\alpha < x < \beta) = \dfrac{1}{4}.$ 10. 2; 6.

2.6 Деякі закони розподілу неперервних випадкових величин

Багато типів реально існуючих випадкових величин вивчено, тобто теоретично встановлений і експериментально перевірений їх закон розподілу. При вивченні нової випадкової величини можна перевірити, чи не належить її закон розподілу до уже вивчених раніше.

У даному параграфі стисло розглянуті деякі закони розподілу. Найбільш важливому – нормальному розподілу присвячений окремий параграф.

2.6.1 Рівномірний

Широке застосування знаходять випадкові величини з *рівномірною щільністю розподілу*. В цьому випадку неперервна випадкова величина набуває з однаковою ймовірністю значення з певного інтервалу $[a;b]$. Функція щільності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a \le x \le b, \\ 0 \text{ при } x < a \;\; x > b. \end{cases}$$

Графік щільності рівномірного розподілу – відрізок прямої, паралельний осі $0x$. Ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[c;d]$, що належить відрізку $[a;b]$, визначається за формулою $P(c < X < d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

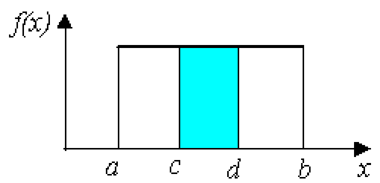


Рисунок 2.14 – Закон рівномірної щільності

Інтегральна функція $F(x)$ рівномірного закону розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Математичне сподівання – середина відрізка $[a;b]$:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{b+a}{2}.$$

Дисперсію обчислюємо за формулою $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

$$M(X^2)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3};$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

До випадкових величин, що мають рівномірний розподіл, належать: час сподівання пасажиром транспорту, що курсує з певним інтервалом; помилка округлення числа до цілого (вона рівномірно розподілена на відрізку від -0,5 до 0,5)

2.6.2 Експоненціальний

Експоненціальним називається розподіл неперервної випадкової величини X, щільність ймовірностей якої має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Тут $\lambda>0$ - параметр розподілу.

Інтегральна функція розподілу експоненціального закону

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}$. Отже

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

Графіки щільності і функції розподілу залежно від величини параметра розподілу зображені на рисунку 2.15.

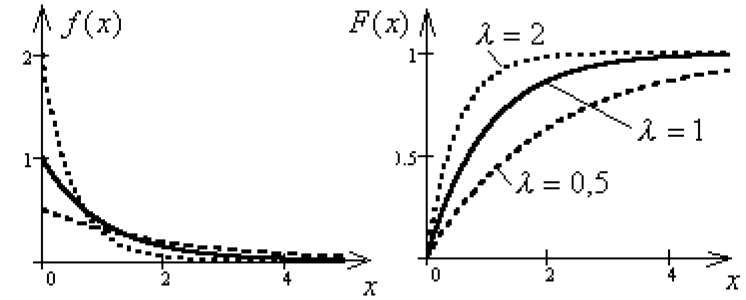


Рисунок 2.15 – Експоненціальний розподіл

Математичне сподівання $M(X) = \int\limits_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

Дисперсія $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}$.

Характерна ознака експоненціального розподілу – рівність $M(X) = \sigma(X)$.

Експоненціальний розподіл широко застосовується в теорії надійності, одним з основних понять якої є функція надійності.

Часто тривалість часу безвідмовної роботи елемента має експоненціальний розподіл.

Експоненціальний розподіл використовується в теорії масового обслуговування, у фізиці, в теорії надійності. Він використовується для опису розподілу випадкової величини вигляду: тривалість роботи приладу до першої відмови, тривалість часу обслуговування приладу в системі масового обслуговування і таке інше

2.6.3 Релея

Цей розподіл застосовується в радіотехніці, електротехніці та інше.

Розподілом Релея неперервної випадкової величини X називають розподіл, щільність ймовірностей якого має вигляд

$$f(x)=\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ при } x\geq 0$$

де a - параметр розподілу.

Інтегральна функція розподілу $F(x)=1-e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Графіки щільності і функції розподілу залежно від величини параметра розподілу зображені на рисунку 2.16.

Математичне сподівання і дисперсія виражаються через параметр a і мають вигляд:

$$M(X)=a\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ D(X)=2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

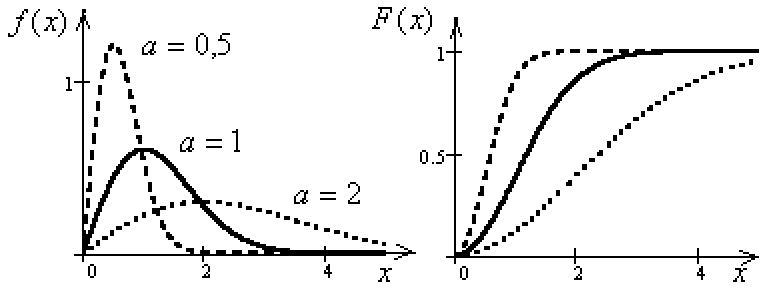


Рисунок 2.16 – Розподіл Релея

Контрольні питання

1. Який закон розподілу називається рівномірним, який вигляд має графік щільності розподілу і функції розподілу?
2. Наведіть приклад випадкової величини з рівномірною щільністю розподілу.
3. Який закон розподілу називається експоненціальним, де використовуються випадкові величини з експоненціальним розподілом?
4. Як визначається і де застосовується розподіл Релея?

Задачі

1. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Показання приладу округлюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка: а) менша 0,04; б) більша 0,05.

2. Автобуси деякого маршруту відбувають точно за розкладом. Інтервал руху 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше 3 хвилин.

3. Хвилинна стрілка електричного годинника переміщується стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більше ніж на 20 с.

4. Знайти математичне сподівання випадкової величини *X*, розподіленою рівномірно в інтервалі (2, 8).

5. Знайти математичне сподівання експоненціального розподілу, заданого при $x \ge 0$: а) щільністю $f(x) = 5e^{-5x}$; б) функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$.

6. Студент пам'ятає, що щільність експоненціального розподілу має вигляд $f(x) = 0$ якщо $x < 0$, $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ якщо $x \ge 0$; проте він забув чому дорівнює постійна *C*. Необхідно знайти *C*.

Відповіді: 1) а) $P(0 < X < 0{,}04) + P(0{,}16 < X < 0{,}2) = 0{,}4$; б) $P(0{,}05 < X < 0{,}15) = 0{,}5$; 2) $P(2 < X < 5) = 0{,}6$; 3) $P(0 < X < 1/3) + P(2/3 < X < 1) = 2/3$; 4) $M(X) = 5$; 5) а) $M(X) = 0{,}2$; б) $M(X) = 10$; 6) $C = \lambda$.

2.7 Нормальний розподіл (Гаусса)

Якщо випадкова величина X - результат підсумовування безлічі випадкових величин з довільними законами розподілу, причому кожна з них відіграє приблизно однакову роль в сумі, то закон розподілу випадкової величини X близький до закону розподілу, названого *нормальним*, або *розподілом Гаусса*.

При нормальному законі щільність розподілу задається формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) надзвичайна з багатьох причин. По-перше, формула містить дві виключно важливих константи – число π (пі) і число Непера e. По-друге, параметр a – математичне сподівання випадкової величини, параметр σ - середнє квадратичне відхилення. По-третє, при будь-яких значеннях параметрів a, σ площа під нормальною кривою дорівнює одиниці $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Графік функції розподілу називається *нормальною кривою*.

Відзначимо, наступне:

1) функція визначена на вздовж усієї осі Ox;
2) при всіх x значення функції додатне, тобто для $\forall x \in R,\ f(x) > 0$;
3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 0$, а це означає, що вісь Ox є горизонтальною асимптотою;
4) у точці $x = a$ функція має максимум, який дорівнює $y_{\max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Графік функції симетричний відносно прямої $x = a$.

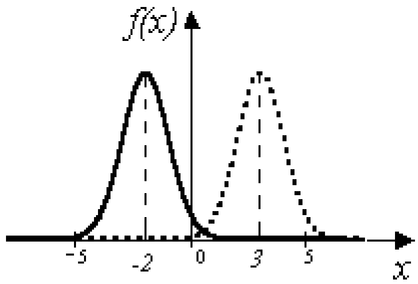


Рисунок 2.17 – Положення кривої на осі

При однаковому значенні параметра σ параметр a (математичне сподівання) визначає положення нормальної кривої на числовій осі. На рисунку 2.17 показані дві нормальні криві, для яких $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ і $a_1 = -2, \quad a_2 = 3$.

При однаковому значенні параметра a величина параметра σ (середнє квадратичне відхилення) визначає форму кривої.

На рисунку 2.18 показані криві, для яких $a_1 = a_2 = 2$ і $\sigma_1 = 0{,}5, \quad \sigma_2 = 1$.

Якщо параметри a і $\sigma > 0$ мають довільні значення, нормальний розподіл називається *загальним*. Нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$ називається *нормованим*. Крива нормованого розподілу симетрична щодо осі Oy.

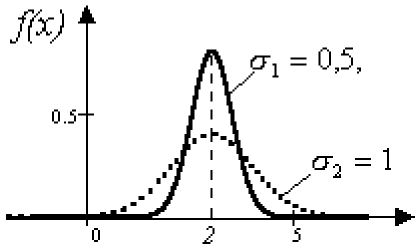


Рисунок 2.18 – Форма нормальної кривої

Таблиця щільності нормованого розподілу $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ наведена в додатку А.

Функція нормованого розподілу $F_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx$.

Інтеграл від щільності нормованого розподілу на відрізку $[0; x]$ називається функцією Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. Функція Лапласа дорівнює ймовірності попадання нормованої випадкової величини на відрізок $[0; x]$. Функція Лапласа – непарна функція. Функція Лапласа пов'язана з функцією розподілу $F_0(x)$ нормованого розподілу формулою $F_0(x) = 0{,}5 + \Phi(x)$.

Ймовірність попадання будь-якої випадкової величини в інтервал $(\alpha; \beta)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому інтервалі

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Якщо випадкова величина підпорядкована нормальному закону, часто замість функції розподілу застосовується функція Лапласа.

$$P(\alpha < X < \beta) = F_0(\beta) - F_0(\alpha) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Якщо випадкова величина задана загальним нормальним розподілом, то ймовірність попадання нормальної випадкової величини в інтервал $(\alpha;\beta)$ визначається за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (2.9)$$

У цьому посібнику функція Лапласа задана таблицею в додатку Б.

Правило трьох сигм. Часто зустрічається завдання обчислення ймовірностей попадання випадкової величини на ділянку, симетричну щодо центру розсіювання, тобто щодо математичного сподівання $m_x = a$.

$$P(a - l < X < a + l) = \Phi\left(\frac{a + l - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - l - a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) \text{ або}$$

$$P(|X - a| < l) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right). \qquad (2.10)$$

Так, якщо $l = \sigma$, то $P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6826$. Якщо $l = 2\sigma$, то $P(|X - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9544$.

Якщо $l = 3\sigma$, то $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$. Останнє число означає, що 99,73% усіх значень випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону, вміщується на ділянці $m_x \pm 3\sigma$. Це дозволяє, знаючи математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення (σ - сигма), вказати інтервал її практично можливих значень. Такий спосіб оцінки можливих значень випадкової величини називається «Правилом трьох сигм».

На рисунку 2.19 заштрихована область – площа під нормальною кривою на відрізку

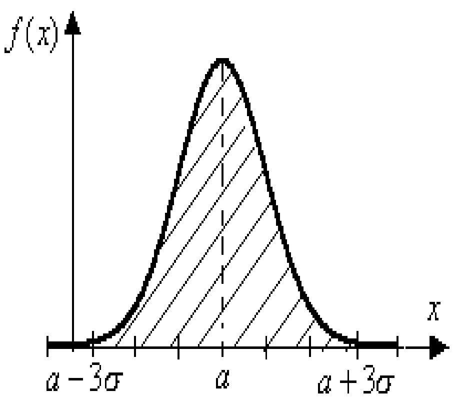


Рисунок 2.19 - Ілюстрація правила трьох сигм

Нормальний закон розподілу мають, наприклад, такі випадкові величини: помилки вимірювань, величини зносу деталей в механізмах, зростання людини, помилки стрілянини, величина шуму в радіоприймальному пристрої, коливання курсу акцій і таке інше

Приклад 12. Задана нормально розподілена випадкова величина X з параметрами $a=9$ і $\sigma=3$. Потрібно:

а) написати щільність розподілу випадкової величини X і побудувати її графік;

б) знайти ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $(7;13)$;

в) знайти інтервал, симетричний відносно a, ймовірність попадання в який даної випадкової величини X дорівнює $\gamma=0{,}95$.

Розв’язання

Щільність розподілу випадкової величини X визначається за формулою (2.8) при $a=9,\quad \sigma=3$:

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-9)^2}{18}};$$

крива нормального розподілу (графік щільності розподілу) побудована на рисунку 2.20 (побудова виконана в пакеті Mathcad).

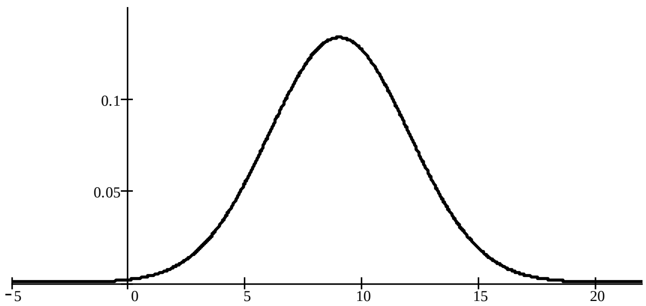


Рисунок 2.20 – Крива нормального розподілу

Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу $(7;13)$ знаходимо за формулою (2.9).

$$P(7 < x < 13) = \Phi\left(\frac{13-9}{3}\right) - \Phi\left(\frac{7-9}{3}\right) = \Phi(1{,}33) - \Phi(-0{,}66) =$$

$$= \Phi(1{,}33) + \Phi(0{,}66) = 0{,}40824 + 0{,}24537 = 0{,}65361.$$

Значення функції Лапласа $\Phi(1{,}33)$ і $\Phi(0{,}66)$ можна знайти в таблиці додатку Б.

Інтервал, симетричний щодо математичного сподівання a, ймовірність попадання в який даної випадкової величини X дорівнює γ визначаємо за формулою (2.10) $P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Тут відома ймовірність $P(|X-a| < \delta) = \gamma$, шуканий інтервал визначається величиною δ. З формули виходить, що $2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \gamma, \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \frac{\gamma}{2}.$ Знаючи $\frac{\gamma}{2}$, за таблицею функції Лапласа (додаток Б) визначаємо $x = \frac{\delta}{\sigma}$, δ. Шуканий інтервал: $(a-\delta;\ a+\delta)$.

Для нашого прикладу $\gamma = 0{,}95, \quad \sigma = 3, \quad a = 9$. Тоді $\Phi\left(\frac{\delta}{3}\right) = 0{,}475$; у таблиці додатку Б цьому значенню функції Лапласа відповідає значення аргументу $x = \frac{\delta}{3} = 1{,}96, \quad \delta = 5{,}88$; шуканий інтервал $(3{,}12;14{,}88)$.

Контрольні питання

1. Яка випадкова величина називається нормально розподіленою? Якими двома параметрами визначається нормально розподілена випадкова величина? Що означають два цих параметри?
2. Як впливають параметри a і σ на положення нормальної кривої щодо осі Ox і на форму кривої?
3. Який нормальний розподіл називається нормованим? Як розташована крива нормованого розподілу щодо осей координат?

4. Дайте визначення функції Лапласа. Поясніть, як за допомогою таблиці значень функції Лапласа знайти ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина з параметрами a і σ набуває значення з даного інтервалу $(\alpha;\ \beta)$?

5. У чому полягає «правило трьох сигм»?

Задачі

1. Задана нормально розподілена випадкова величина Х з параметрами α (математичне сподівання) і σ (середнє квадратичне відхилення). Потрібно:

а) написати щільність розподілу випадкової величини Х і побудувати її графік;

б) знайти ймовірність того, що Х набуде значення з інтервалу (x_1, x_2);

в) знайти інтервал, симетричний відносно α, ймовірність попадання в який даної випадкової величини Х дорівнює γ.

1.1 $a = 10;\quad \sigma = 1;\quad x_1 = 9;\quad x_2 = 12;\quad \gamma = 0{,}9$;

1.2 $a = 11;\quad \sigma = 2;\quad x_1 = 10;\quad x_2 = 13;\quad \gamma = 0{,}99$;

1.3 $a = 12;\quad \sigma = 3;\quad x_1 = 6;\quad x_2 = 15;\quad \gamma = 0{,}95$;

1.4 $a = 13;\quad \sigma = 4;\quad x_1 = 10;\quad x_2 = 17;\quad \gamma = 0{,}999$.

2. Математичне сподівання нормально розподіленої величини *X* дорівнює $a = 3$ і середнє квадратичне відхилення *у* = 2. Написати щільність ймовірностей *X*.

3.Нормально розподілена величина *X* задана щільністю $f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}$. Знайти математичне сподівання і дисперсію *X*.

4. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої величини *X* відповідно дорівнює 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування *X* набуде значення в інтервалі (15, 25).

5. Автомат штампує деталі. Контрольована довжина деталі *X*, яка розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), що дорівнює 50 мм. Фактично довжина деталей, що виготовляються, не менше 32 і не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі: а) більше 55 мм; б) менше 40 мм.

6. Випадкові помилки вимірювання підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням y = 20 мм і математичним сподіванням а = 0. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірювань помилка хоч би одного не перевершить за абсолютною величиною 4 мм.

7. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення її контрольованого розміру від проектного не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення контрольованого розміру від проектного підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням у = 5 мм і математичним сподіванням а = 0. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

8. Бомбардувальник, що пролетів уздовж моста, довжина якого 30 м і ширина 8 м, скинув бомби. Випадкові величини і (відстані від вертикальної і горизонтальної осей симетрії моста до місця падіння бомби) незалежні та розподілені нормально з середніми квадратичними відхиленнями, що дорівнюють 5 і 4 м, і математичними сподіваннями, що дорівнюють нулю. Знайти: а) ймовірність попадання в міст однієї скинутою бомбою; б) ймовірність руйнування моста, якщо скинуто дві бомби, причому відомо, що для руйнування моста достатньо одного попадання.

Відповіді: 2) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/8}$; 3) $M(X)=1$; $D(X)=25$;

4) $P(15<X<25)=0{,}6826$; 5) а) $P(55<X<68)=0{,}0823$;

б) $P(32<X<40)=0{,}0027$; 6) $P\approx 0{,}41$; 7) приблизно 95%;

8) а) $P(|X|<15)\cdot P(|Y|<4)=2\Phi(2{,}5)\cdot 2\Phi(1)=0{,}6741$;

б) $P=1-(1-0{,}6741)^2=0{,}8938$.

2.8 Закон великих чисел і центральна гранична теорема

За деяких умов поведінка суми великого числа випадкових величин втрачає випадковий характер і стає закономірною. Ці умови вказуються в теоремах, які носять загальну назву закону великих чисел.

Нерівність Чебишева. *Ймовірність того, що відхилення випадкової величини* X *від її математичного сподівання за абсолютною величиною менше додатного числа* ε, *не менше, ніж* $1-D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Якщо число ε достатньо мале, нерівність дозволяє оцінити ймовірність того, що X набуде значення, близькі до свого математичного сподівання. Нерівність справедлива як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

Приклад 13. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X-M(X)|<0{,}2$, якщо $D(X)=0{,}004$.

Розв'язання

За умовою завдання $\varepsilon=0{,}2$. Підставимо в нерівність Чебишева:

$$P(|X-M(X)|<0{,}2)\geq 1-\frac{0{,}004}{0{,}2^2}=1-0{,}1=0{,}9.$$

Відповідь: $P(|X-M(X)|<0{,}2)\geq 0{,}9$.

Примітка – оскільки події $|X-M(X)|<\varepsilon$ і $|X-M(X)|\geq\varepsilon$ - протилежні, нерівність Чебишева має іншу форму:

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (*)$$

Основною теоремою закону великих чисел є теорема Чебишева.

Теорема Чебишева. *Якщо* X_1, X_2, ..., X_n - *попарно незалежні випадкові величини, причому дисперсії їх не перевищують деякого постійного числа* C, *то, яким би малим не було додатне число* ε, *ймовірність нерівності*

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

буде скільки завгодно близькою до одиниці, якщо число випадкових величин достатньо велике.

Суть теореми Чебишева полягає в тому, що середнє арифметичне достатньо великого числа незалежних випадкових величин втрачає характер випадкової величини – воно набуває значення, близьке до величини $(M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n))/n$.

Теорема Чебишева має велике практичне значення. На теоремі заснований вживаний у статистиці вибірковий метод, суть якого полягає в тому, що з порівняно невеликої випадкової вибірки роблять висновок про всю сукупність досліджуваних об'єктів. Наприклад, про якість зерна в багатотонній вантажівці на елеваторі роблять висновок з невеликої його проби. Адже якщо для проби відібраний кілограм зерна, то кількість зерен в ньому достатньо велика.

Іншою формою закону великих чисел є теорема Бернуллі.

Теорема Бернуллі. *Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події А постійна, то як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від ймовірностей p за абсолютною величиною буде скільки завгодно малим, якщо число випробувань достатньо велике, тобто при скільки завгодно малому* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|m/n - p| < \varepsilon\right) = 1.$$

Остання рівність означає, що відносна частота $\frac{m}{n}$ прагне до ймовірностей p, але не в значенні границі $\lim\limits_{n\to\infty}(m/n) = p$, оскільки нерівність $|m/n - p| < \varepsilon$ може при окремих значеннях n порушуватися. Теорема Бернуллі стверджує, що відносна частота при $n \to \infty$ прямує за ймовірністю до p. У теоремах закону великих чисел не враховуються закони розподілу випадкових величин. Граничні закони розподілу складають предмет *центральної граничної теореми*. Всі форми центральної граничної теореми присвячені встановленню умов, за яких виникає нормальний закон розподілу.

Теорема. *Якщо* X_1, X_2, ..., X_n *- незалежні випадкові величини, що мають один і той же закон розподілу з математичним сподіванням* m *і* *дисперсією* σ^2, *то при необмеженому збільшенні* n *закон розподілі суми* $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *необмежено наближається до нормального.*

У загальному випадку, складові випадкові величини розподілені неоднаково.

Практично центральною граничною теоремою можна користуватися і тоді, коли мова йде про суми порівняно невеликого числа випадкових величин. Коли число доданків близько десяти, закон розподілу суми вже може бути замінений нормальним.

Контрольні питання

1. Сформулюйте нерівність Чебишева. Що дозволяє оцінити нерівність?
2. Сформулюйте теорему Чебишева. У чому суть теореми?
3. Сформулюйте теорему Бернуллі. Що означає вираз «прямувати за ймовірністю»?
4. У чому суть центральної граничної теореми?

Задачі

1. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що будь-яка випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання менш ніж на три середні квадратичні відхилення цієї величини.

2. Використовуючи нерівність Чебишева у формі (*), оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання не менше чим на два середні квадратичні відхилення.

3. Яким повинне бути значення величини ε в нерівності Чебишева, щоб $P(|X - a| < \varepsilon) \approx 0{,}99$, коли відомо, що $D(X) = 4$.

4. З якою надійністю середнє арифметичне вимірювання деякої величини відповідає дійсному розміру цієї величини, якщо було зроблено 500 вимірювань з точністю 0,1 і при цьому дисперсія випадкових величин – результатів вимірювань – не перевищує 0,3.

5. Скільки необхідно провести вимірювань діаметра втулки, щоб середнє арифметичне цих вимірювань відрізнялося від дійсного розміру діаметра втулки

не більш ніж на 0,05 з надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірювань) не перевищують 0,2.

6. Випадкова величина $\overline{X}$ – середнє арифметичне 10000 незалежних випадкових величин, які мають один і той же закон розподілу, і середнє квадратичне відхилення кожною з них дорівнює 2. Яке максимальне відхилення величини $\overline{X}$ від його математичного сподівання можна чекати з ймовірністю 0,9544?

Відповіді: 3) ε = 20; 4) 0,94; 5) n = 800; 6) 0,04.

Розділ 3. Система випадкових величин

3.1 Система випадкових величин

Якщо результат досліду описується не однією, а декількома випадковими величинами, вони утворюють систему випадкових величин.

Наприклад, погода в кожен момент часу характеризується такими випадковими величинами, як температура (позначимо X), вологість (позначимо Y), швидкість вітру (позначимо Z). Три цих величини утворюють систему неперервних випадкових величин, яку позначимо (X,Y,Z). Систему випадкових величин (X,Y,Z) можна також розглядати як одну тривимірну випадкову величину, геометричний образ якої – випадкова точка в тривимірному просторі.

Якщо результат досвіду описується двома випадковими величинами X і Y, то маємо систему двох випадкових величин(X,Y), геометричний образ якої – випадкова точка на площині. Нехай випадкова величина X - зростання людини, випадкова величина Y - вага людини. Для кожної конкретної людини двовимірна випадкова величина (X,Y) набуває своє значення і фіксується двома числами.

Властивості двох, три- або багатовимірної випадкової величини не вичерпуються сумою властивостей окремих величин, але вміщують також взаємні залежності випадкових величин між собою.

Складові багатовимірної випадкової величини можуть бути дискретними або неперервними. Також і багатовимірна випадкова величина – дискретна або неперервна.

Контрольні питання

1. Наведіть приклад, коли результат випробування описується системою двох або трьох випадкових величин.
2. Який геометричний образ системи двох і трьох випадкових величин?

3.2 Закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини

Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини (X,Y) називають сукупність всіх можливих значень цієї величини, тобто пара чисел $(x_i,\ y_j)$ і їх ймовірностей $p(x_i,\ y_j)$. Закон розподілу задається у вигляді таблиці з подвійним входом (див. таблицю 3.1).

Перший рядок таблиці містить всі можливі значення складової X, перший стовпчик містить всі можливі значення складової Y. У клітинці, що стоїть на перетині «стовпчика x_i» і «рядка y_j» вказана ймовірність $p(x_i,\ y_j)$ того, що двовимірна випадкова величина набуде значення $(x_i,\ y_j)$.

Події $(X = x_i, Y = y_j)$, де $i = 1,2,..,n; \quad j = 1,2,...,m$, утворюють повну групу, тобто при кожному досліді відбудеться одна з цих подій. Тому сума ймовірностей у клітинках таблиці дорівнює одиниці.

Таблиця 3.1 – Закон розподілу дискретної двовимірної величини

Y	X					
	x_1	x_2	.	x_i	.	x_n
y_1	$p(x_1,\, y_1)$	$p(x_2,\, y_1)$	.	$p(x_i,\, y_1)$	.	$p(x_n,\, y_1)$
.	.	.	.	.	.	.
y_j	$p(x_1,\, y_j)$	$p(x_2,\, y_j)$	.	$p(x_i,\, y_j)$	.	$p(x_n,\, y_j)$
.	.	.	.	.	.	.
y_m	$p(x_1,\, y_m)$	$p(x_2,\, y_m)$	.	$p(x_i,\, y_m)$	.	$p(x_n,\, y_m)$

За законом таблиці 3.1 можна знайти закон розподілу кожної складової випадкової величини.

Наприклад, події $(X = x_1, Y = y_1)$, $(X = x_2, Y = y_1)$, ... , $(X = x_i, Y = y_i)$, ... , $(X = x_n, Y = y_1)$ несумісні, тому ймовірність $P(y_1)$ того, що Y набуде значення y_1, обчислюється за теоремою складання:

$$P(y_1) = p(x_1,\, y_1) + p(x_2,\, y_1) + ... + p(x_i,\, y_1) + ... + p(x_n,\, y_1).$$

Складаючи ймовірності одного рядка, отримаємо ймовірність одного значення випадкової величини Y. Якщо ж складати ймовірності одного стовпчика, отримаємо ймовірність одного значення X.

Приклад 1. Закон розподілу дискретної двовимірної величини задається таблицею 3.2. Визначити закони розподілу випадкових величин X і Y.

Таблиця 3.2 – Розподіл

Y	X	
	x_1	x_2
y_1	0,1	0,15
y_2	0,25	0,2
y_3	0,2	0,1

Розв’язання

Склавши ймовірність у стовпчиках, отримаємо ймовірність можливих значень X: $P(x_1) =$ 0,1+0,25+0,2=0,55; $P(x_2) =$ 0,45.

Таблиця 3.3 - Закон розподілу випадкової величини X

X	x_1	x_2
$P(x_i)$	0,55	0,45

Контроль обчислень: 0,55+0,45=1.

Склавши ймовірність у рядках, отримаємо ймовірність можливих значень Y :
$P(y_1)=$0,1+0,15=0,25; $P(y_2)=$0,25+0,2=0,45; $P(y_3)=$0,2+0,1=0,3.

Таблиця 3.4 - Закон розподілу випадкової величини Y

Y	y_1	y_2	y_3
$P(y_i)$	0,25	0,45	0.3

Контроль обчислень: 0,25+0,45+0,3=1.

Контрольні питання

1. Що називають законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини?
2. Опишіть таблицю, яка задає закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини.

Задача: Заданий закон розподілу дискретної двовимірної величини (X, Y).

Y	X	
	x_1	x_2
y_1	0,2	0,15
y_2	0,35	0,3

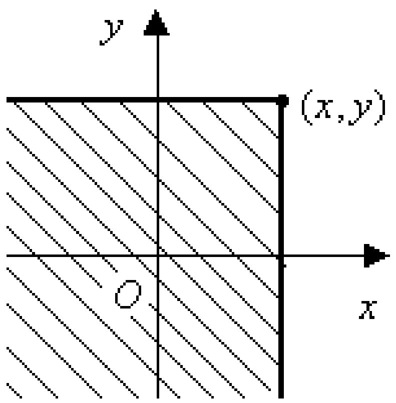
Визначити закони розподілу випадкових величин X та Y.

3.3 Функція розподілу двовимірної випадкової величини

Як наголошувалося раніше, функція розподілу одновимірної випадкової величини – універсальний закон розподілу ймовірностей як дискретної, так і неперервної випадкової величини. Те ж справедливо для двовимірної випадкової величини.

Функцією розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) називають функцію $F(x,y)$, що визначає для кожної пари чисел (x,y) ймовірність того, що X набуде значення менше x, і при цьому Y набуде значення, менше y:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y).$$



Геометрично це можна тлумачити так: $F(x,y)$ - ймовірність того, що випадкова точка (X,Y) потрапляє до нескінченного квадранта з вершиною (x,y), вказаною на рисунку 3.1. Чим більше заштрихована область, тим більше значення функції розподілу.

Рисунок 3.1 – Геометричне тлумачення для функції розподілу $F(x,y)$

З визначення функції розподілу $F(x,y)$ випливають такі її властивості:

1. Значення функції розподілу належать відрізку $[0;1]$, тобто $0 \le F(x,y) \le 1$.
2. Функція $F(x,y)$ - неспадна за кожним з аргументів; дійсно, якщо точка (x,y) на рисунку 3.1 рухається паралельно осі Ox зліва направо, то заштрихована область не зменшується. Те ж саме і при русі точки (x,y) уздовж осі Oy від низу до верху.
3. Мають місце граничні співвідношення: $F(-\infty,y) = 0$, $F(x,-\infty) = 0$, $F(-\infty,-\infty) = 0$ (площа заштрихованого квадранта дорівнює нулю на рисунку 3.1); $F(+\infty,+\infty) = 1$ (попадання випадкової точки на площину xOy - достовірна подія).
4. При $y \to +\infty$ функція розподілу системи стає функцією розподілу складової X: $F(x,+\infty) = F_1(x)$; при $x \to +\infty$ $F(+\infty,y) = F_2(y)$.

За допомогою функції розподілу можна визначити ймовірність попадання випадкової точки $(x;y)$ в заданий прямокутник. Нехай потрібно визначити ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник $ABCD$, координати вершин якого показані на рисунку 3.2.

Шукана ймовірність визначається формулою:

$$P(x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2) = (F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)) -$$
$$(F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)).$$

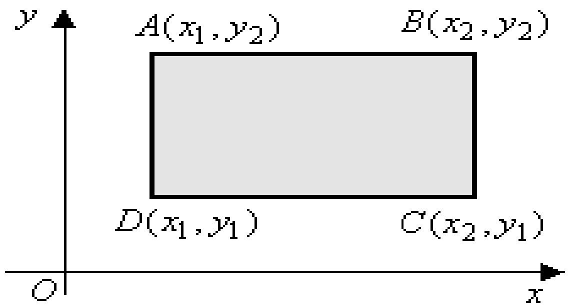


Рисунок 3.2 – Ймовірність попадання до квадрата $ABCD$

Контрольні питання

1. Що називається функцією розподілу двовимірної випадкової величини, як її тлумачити геометрично?
2. Якими властивостями володіє функція розподілу двовимірної випадкової величини?
3. Як визначити ймовірність попадання випадкової точки $(x; y)$ в заданий прямокутник?

3.4 Щільність сумісного розподілу ймовірностей неперервної двовимірної випадкової величини, її застосування і властивості

Щільністю сумісного розподілу ймовірностей $f(x, y)$ двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y) називають другу змішану часткову похідну від функції розподілу:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \, \partial y}.$$

Геометрично цю функцію можна тлумачити як рівняння поверхні, яку називають *поверхнею розподілу*.

Якщо відома щільність сумісного розподілу $f(x,y)$, то можна знайти функцію розподілу $F(x,y)$ за формулою:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv,$$

що зрозуміло з визначення щільності розподілу.

Застосування двовимірної щільності розподілу

Вище ми розглянули, як за допомогою функції розподілу можна визначити ймовірність попадання випадкової точки $(x;y)$ в заданий прямокутник. Щільність розподілу дозволяє визначити ймовірність попадання випадкової точки в *довільну область* D на площині xOy. Указана ймовірність визначається подвійним інтегралом від щільності розподілу по області D:

$$P((X,Y)\subset D)=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Якщо відома щільність сумісного розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин, то можна визначити щільність розподілу кожної зі складових за формулами:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \qquad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \ .$$

Властивості двовимірної щільності розподілу

1) Двовимірна щільність ймовірностей величина невід'ємна: $f(x,y)\geq 0$. Ця властивість випливає з того, що функція розподілу $F(x,y)$ - неспадна функція своїх аргументів.
2) Подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами від двовимірної щільності дорівнює одиниці: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$. Межі інтегруванні

показують, що область інтегрування – вся площина xOy. Попадання випадкової точки на площину – подія достовірна, її ймовірність дорівнює одиниці.

Контрольні питання

1. Що називається щільністю розподілу ймовірностей неперервної двовимірної випадкової величини?
2. Для чого застосовується і які властивості має двовимірна щільність розподілу?

3.5 Умовні закони розподілу складових системи дискретних і неперервних випадкових величин

У параграфі 1.5 розглянуті ймовірностей добутку залежних і незалежних подій. Випадкові величини також можуть бути залежними або незалежними одна від одної. Для залежних подій

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

звідки, умовна ймовірність події B, за умови, що подія A вже відбулася, обчислюється так:

$$P(B|A) = P(AB) / P(A). \qquad (*)$$

Для незалежних подій $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Щоб охарактеризувати залежність між складовими двовимірної випадкової величини, введено поняття умовного розподілу.

Нехай задана двовимірна *дискретна випадкова величина* (див. параграф 3.2, таблиця 3.1). Якщо, наприклад, величина Y набула значення $Y = y_1$, то величина X при цьому набуває одне зі своїх можливих значень x_1, x_2, ..., x_n. Позначимо умовну ймовірність того, що X набуде значення x_i за умови, що $Y = y_1$ через $p(x_i|y_1)$. Ця ймовірність, в загальному випадку, не дорівнює безумовній ймовірностей $p(x_i)$.

Взагалі, умовні ймовірності позначаються $p(x_i | y_j)$.

Умовним розподілом складової X, при $Y = y_j$, називають сукупність умовних ймовірностей $p(x_1 | y_j)$ $p(x_2 | y_j)$ $p(x_n | y_j)$, обчислених у припущенні, що подія $Y = y_j$ вже наступила. Аналогічно визначається умовний розподіл складової Y.

Умовний закон розподілу X, в припущенні, що подія $Y = y_j$ вже відбулася, може бути знайдений за формулою, що аналогічна формулі (*):

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (**)$$

Сума ймовірностей умовного розподілові дорівнює одиниці, також як і безумовного.

У прикладі 1 з §3.2 за заданим таблицею 3.2 розподілу (X, Y) обчислені розподіли складових. Знайдемо умовний закон розподілу складової X за умови, що складова $Y = y_1$.

Розв'язання. Шуканий закон визначається сукупністю наступних умовних ймовірностей:

$$p(x_1 | \ y_1), \ p(x_2 | \ y_1).$$

Використовуємо формулу (**), враховуючи, що $p(y_1) = 0{,}25$.

$$p(x_1 / y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$$

$$p(x_2 / y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6$$

Контроль обчислень: 0,4+0,6=1.

Для порівняння, (див. приклад 1 в §3.2), $P(x_1) = 0{,}55$; $P(x_2) = 0{,}45$.

Умовний закон розподілу *неперервної випадкової величини* можна задавати як функцією розподілу, так і щільністю.

Для системи двох випадкових величин (X, Y) справедлива теорема множення законів розподілу, яка аналогічна теоремі множення ймовірностей подій.

Теорема. *Щільність розподілу системи двох випадкових величин дорівнює щільності розподілу однієї з величин, помноженою на умовну щільність розподілу іншої величини, обчисленої за умови, що перша величина набула заданого значення*:

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f(y|x),$$

або $f(x,y) = f_2(y)\cdot f(x|y)$.

З приведених формул теореми виразимо умовні закони розподілу через безумовні закони розподілу:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}\ ,\quad f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Формули обчислення безумовних законів розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ приведені в §3.4.

Контрольні питання

1. Що називається умовним розподілом однієї складової двовимірної дискретної випадкової величини?
2. Сформулюйте теорему множення законів розподілу.
3. Як обчислюються безумовні і умовні закони розподілу складових неперервної двовимірної випадкової величини?

Задача

Використовуючи закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини із завдання до параграфа 3.2, знайти умовні закони розподілу складових.

3.6 Залежні і незалежні випадкові величини

Складові двовимірної випадкової величини (X,Y) можуть більш чи менш сильно залежати одна від одної. Але ця залежність не є функціональною, тобто, якщо відомо, яке значення набула одна випадкова величина, то не можна точно вказати, яке значення при цьому набуде інша випадкова величина. Найчастіше, можна лише прослідкувати тенденцію зміни однієї величини при зміні іншої випадкової величини. Можливо, що випадкові величини взагалі не залежать один від одного.

Випадкові величини X *і* Y *називаються незалежними, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, яке значення набула інша випадкова величина*. Інакше величини X і Y називаються *залежними.*

Для незалежних дискретних випадкових величин

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j), \quad i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Для незалежних неперервних випадкових величин X, Y теорема множення законів розподілу набуває вигляд:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

тобто щільність розподілу системи незалежних випадкових величин дорівнює добутку щільності розподілу окремих величин, що входять до системи.

Якщо закон розподілу системи відомий, і якщо щільність розподілу $f(x, y)$ може бути записана добутком двох функцій, кожна з яких залежить тільки від одного аргументу, то можна стверджувати, що величини X і Y - незалежні.

Таким чином, умова $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ - необхідна і достатня для незалежності випадкових величин X і Y.

Контрольні питання

1. У яких випадках випадкові величини X і Y називаються незалежними, а в яких називаються залежними?
2. Запишіть необхідну і достатню умову для незалежності випадкових величин X і Y.

3.7 Числові характеристики системи двох випадкових величин

Також як для однієї випадкової величини, для системи двох випадкових величин найважливішими числовими характеристиками є математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення кожної складової X і Y системи випадкових величин (X, Y).

Математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$ в сукупності є характеристика положення системи. Геометрично це координати точки на площині, навколо якої відбувається розсіювання точок (X, Y).

Математичні сподівання обчислюються за формулами:

- для дискретних випадкових величин

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\cdot p(x_i,y_j),\quad M(Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}y_j\cdot p(x_i,y_j);$$

- для неперервних випадкових величин

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x,y)dxdy,\ M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(x,y)dxdy.$$

Дисперсії випадкових величин $D(X)$ і $D(Y)$ характеризують міру розсіювання значень двовимірної випадкової величини у напрямі осей Ox і Oy. Дисперсія складових величин обчислюється за формулами:

- для дискретних випадкових величин

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)^2\cdot p(x_i,y_j),$$

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(y_j-m_y)^2\cdot p(x_i,y_j);$$

- для неперервних випадкових величин

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x,y)dxdy,$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2 f(x,y)dxdy.$$

У наведених формулах $m_x=M(X),\quad m_y=M(Y)$.

Середні квадратичні відхилення випадкових величин $\sigma_x=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$, $\sigma_y=\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}$.

Для системи випадкових величин (X, Y) особливе значення має математичне сподівання добутку центрованих випадкових величин, що входять до системи, та звуться ***кореляційним моментом*** *випадкових величин* X і Y. Кореляційний момент позначається

$$K_{xy} = M((X - m_x) \cdot (Y - m_y)).$$

Для дискретних випадкових величин кореляційний момент обчислюється за формулою:

$$K_{xy} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)(y_j - m_y) p(x_i, y_j)$$

.

Для неперервних випадкових величин кореляційний момент обчислюється за формулою:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dxdy.$$

Кореляційний момент окрім того, що характеризує розсіювання випадкової двовимірної величини, *характеризує також зв'язок між її складовими* X і Y. Щоб переконається в останньому, обчислимо кореляційний момент для незалежних випадкових величин X і Y, що входять в систему (X, Y). Як було зазначено вище, для незалежних неперервних випадкових величин теорема множення законів розподілу набуває вигляду $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Тоді

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy = (m_x - m_x)(m_y - m_y) = 0.$$

Кореляційний момент незалежних випадкових величин дорівнює нулю. Отже, якщо $K_{xy} \neq 0$, то існує залежність між випадковими величинами X і Y.

Щоб в характеристиці зв'язку між випадковими величинами X і Y не була присутня характеристика розсіювання, від кореляційного моменту переходять до безрозмірної характеристики $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Величина r_{xy} називається *коефіцієнтом кореляції* випадкових величин X і Y. Для незалежних випадкових величин X і Y коефіцієнт кореляції дорівнює нулю $r_{xy}=0$. Проте, ця умова необхідна, але недостатня для незалежності випадкових величин. Існують залежні випадкові величини, для яких $r_{xy}=0$ (див.[1], приклад на стор. 171).

Якщо $r_{xy}\neq 0$, то випадкові величини називають *корельованими*. В цьому випадку коефіцієнт кореляції характеризує степінь тісноти лінійної залежності між величинами X і Y.

У разі точної лінійної залежності випадкова точка (X,Y) потрапляє при одному досліді в одне з указаних на рисунку 3.3 положень, заздалегідь невідомо, яке саме. Але всі ці положення належать прямій $Y=aX+b$. При $a>0$ коефіцієнт $r_{xy}=1$, при $a<0$ коефіцієнт $r_{xy}=-1$ (див. рисунок 3.3).

У загальному випадку, коефіцієнт кореляції може мати значення в межах $-1<r_{xy}<1$. При позитивній кореляції $r_{xy}>0$ при зростанні однієї випадкової величини, інша випадкова величина в середньому зростає, див. рисунок 3.4a. При негативній кореляції зростання однієї випадкової величини спричиняє зменшення в середньому іншої випадкової величини, див. рисунок 3.4b.

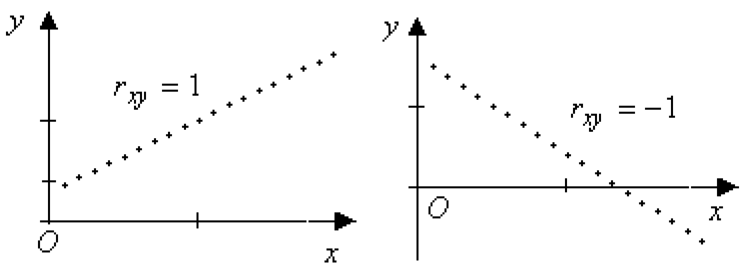


Рисунок 3.3 – Точна лінійна залежність між X і Y

Контрольні питання

1. Що в системі двох випадкових величин характеризують математичні сподівання $M(X)$ та $M(Y)$, дисперсії $D(X)$ та $D(Y)$?
2. Що називається кореляційним моментом випадкових величин X і Y, що в системі випадкових величин характеризує кореляційний момент?

3. Чим коефіцієнт кореляції відрізняється від кореляційного моменту, який зв'язок між величинами X і Y характеризує коефіцієнт кореляції?
4. Поясніть за допомогою малюнка, в яких числових значеннях змінюється коефіцієнт кореляції.

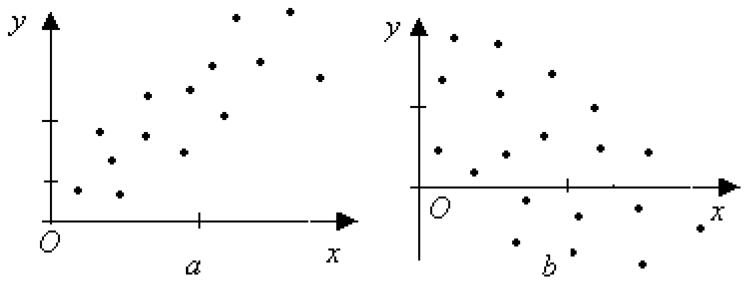


Рисунок 3.4 – Додатна (a) і від'ємна (b) кореляція

Розділ 4. Елементи математичної статистики

4.1 Основні завдання математичної статистики

Вивчені вище математичні закони теорії ймовірностей – математичне вираження реальних закономірностей, що існують в масових випадкових явищах. Ці реальні закономірності вивчаються дослідним шляхом, шляхом обробки спостережень над масовими випадковими явищами. Це є предметом спеціальної науки – математичної статистики. Вона займається визначенням за дослідними даними тих самих ймовірностей окремих елементарних подій або законів розподілу, які в першій частині передбачалися заданими.

Типові задачі математичної статистики

1. *Задача визначення закону розподілу* випадкової величини, або системи випадкових величин, за статистичними даними. При обробці статистичних даних потрібно зберегти типові риси спостережуваного явища і відкинути випадкові. Виникає завдання представлення закону розподілу в простій аналітичній формі.
2. *Задача перевірки правдоподібності висунутої гіпотези* про те, що випадкова величина має той чи інший закон розподілу.
3. *Задача визначення невідомих параметрів розподілу* й оцінка їх точності.

4.2 Генеральна сукупність і вибірка. Проста статистична сукупність. Статистична функція розподілу

Найважливішими поняттями математичної статистики є генеральна сукупність і вибірка.

Генеральна сукупність – це безліч всіх значень випадкової величини X. Функція розподілу цієї випадкової величини $F(x)$ - дійсна функція розподілу, на відміну від експериментальної, наближеної функції розподілу, яка визначається дослідним шляхом.

З випадковою величиною X виконують n незалежних дослідів (спостережень) і отримують n значень x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Вся сукупність цих значень називається *вибірковою сукупністю* або просто *вибіркою.*

За вибірковою сукупністю роблять висновки про генеральну сукупність, об'єм якої – фіксований або може бути прийнятий нескінченно великим.

Вибірка оформляється в таблицю 4.1. Перший рядок таблиці – номер досліду i, другий рядок таблиці – зафіксоване значення x_i випадкової величини X. Така сукупність значень випадкової величини називається *простою статистичною сукупністю*.

Таблиця 4.1 – Проста статистична сукупність

Дослід №	1	2	3	4	5	.	.	n
Значення X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	.	.	x_n

Проста статистична сукупність може бути отримана не тільки шляхом незалежних дослідів, що повторюються, над одним об'єктом. Нехай потрібно вивчити сукупність однорідних об'єктів щодо деякої кількісної або якісної ознаки.

Якщо кількість об'єктів невелика, то виконують суцільне обстеження. У перший рядок таблиці 4.1 записується номер об'єкта, в другу – характеристика ознаки.

Якщо кількість об'єктів велика і суцільне обстеження неможливе, то зі всієї сукупності відбирають обмежене число об'єктів і піддають їх вивченню.

Один із способів обробки простої статистичної сукупності – побудова статистичної функції розподілу $F^*(x) = P^*(X < x)$.

Знайти значення $F^*(x)$ при конкретному значенні x означає підрахувати кількість дослідів, в яких величина X набула значення, менше ніж x і розділити на загальне число n проведених дослідів.

Приклад 1. Отримана проста статистична сукупність, задана таблицею 4.2. Побудувати статистичну функцію розподілу.

Таблиця 4.2 – До прикладу 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3	5	2	6	4	3	1	5	4	6

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	3	2	5	6	3	4	1	2	5	3

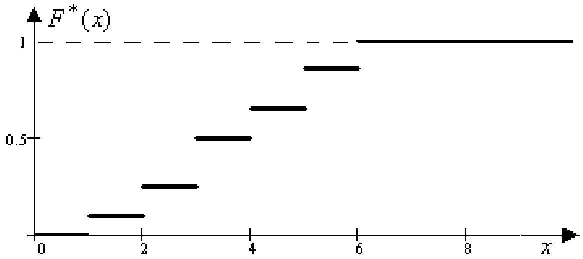


Рисунок 4.1 – Статистична функція розподілу

Контрольні питання

1. Поясніть поняття генеральної сукупності і вибіркової сукупності.
2. Що називається простою статистичною сукупністю, якій первісній обробці піддається проста статистична сукупність?

4.3 Статистичний ряд. Графічне представлення статистичного ряду

При великому об'ємі n (близько сотні) проста статистична сукупність піддається первинній обробці – будується *статистичний ряд*.

У вибірці відшукується *максимальне* $x_{\max}$ і *мінімальне* $x_{\min}$ значення, за якими визначається *масштаб варіювання* $R = x_{\max} - x_{\min}$. Зручно перед початком обробки вибірки упорядкувати вибіркові значення в порядку зростання. Така впорядкована в порядку зростання вибірка називається *варіаційним рядом*.

Весь інтервал $[x_{\min}, x_{\max}]$ зафіксованих значень випадкової величини X розділимо на інтервали (розряди) і підрахуємо кількість значень m_i, що припадають на кожен i- й розряд. Величини m_i називають *частотами*. Потім знайдемо *відносну частоту*, що відповідає кожному розряду $h_i = \dfrac{m_i}{n}$.

Сума відносних частот дорівнює одиниці: $\sum\limits_{i=1}^{k} h_i = 1$, де k – кількість розрядів. Складаємо таблицю 4.3, що називається статистичним рядом.

Таблиця 4.3 – Статистичний ряд

Розряд	$x_1; x_2$	$x_2; x_3$	•	$x_i; x_{i+1}$	•	x_k, x_{k+1}
Частота m_i	m_1	m_2	•	m_i	•	m_k
Відносна частота h_i	h_1	h_2	•	h_i	•	h_k

Тут $x_i; x_{i+1}$ – межі i-го розряду. При групуванні значень X за розрядами значення, що знаходяться на межах розрядів, можна віднести або до лівих, або до правих розрядів.

Кількість розрядів 7 – 20. Довжини розрядів можна брати однаковою. Проте якщо випадкова величина розподілена дуже нерівномірно, то в ділянці найбільшої щільності вибираються розряди меншої ширини, ніж в ділянці меншої щільності.

Найбільш наглядна форма графічного зображення статистичного ряду – *гістограма*.

Нехай δ_1, δ_2, ..., δ_k – довжини інтервалів групувань $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_k$ – їхні середини. *Гістограмою частот* є ступінчата фігура, що складається з прямокутників, основою яких є частини інтервали довжиною δ_i, а висоти дорівнюють відношенню m_i/δ_i (щільність частоти). Можна побудувати також *гістограму відносних частот* – ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основою яких є частинні інтервали довжиною δ_i, а висоти дорівнюють відношенню h_i/δ_i (щільність відносної частоти).

Інша форма графічного представлення статистичного ряду – полігон частот. *Полігон відносних частот* – це ламана лінія, що сполучає точки з координатами $(\bar{x}_i, h_i)$, тобто з абсцисами, що дорівнюють серединам інтервалів угрупування, і ординатами, що відповідають відповідним відносним частотам.

Можна також побудувати *полігон накопичених частот.* Графік буде такою ламаною, що сполучає точки з координатами $\left(x_{i+1},\ \sum_{j=1}^{i} h_j \right)$.

Гістограма і полігон відносних частот є статистичним аналогом кривої розподілу, а полігон накопичених частот – статистичний аналог графіка функції розподілу. За статистичними аналогами можна висувати гіпотези про теоретичні (істинні) закони розподілу.

Приклад 2. Отримана вибірка об'ємом $n = 100$ (таблиця 4.4).

Таблиця 4.4 – Вибірка об'ємом n = 100

1	3,59	1,31	2,93	4,57	1,84	2,47	2,09	2,26	1,54
1,41	4,16	1,29	1,6	1,25	2,73	2,94	3,44	3,42	1
2,42	2,29	2,78	2,75	1,02	1,02	2,38	2,05	2,66	3,24
1,78	2,07	1,97	2,89	2,26	1,6	1,32	4,48	3,41	1,45
3,32	3,52	4,27	1,25	2,48	2,43	1,97	2,96	1,23	2,33
1,36	3,12	1,32	3,37	1,35	3,39	2,22	1,41	1,69	1,23
2,85	4,77	3,31	2,22	2,04	2,13	3,01	3,4	1,62	3,01
1,66	2,51	1,4	1,97	1,12	2,98	1,35	2,17	1,29	2,3
1,19	1,57	3,29	4,1	3,14	2,06	2,15	1,06	3,37	2
1,31	3,4	1,32	2,32	2,23	2,98	2,81	2,38	2,47	2,8

Потрібно:

1) побудувати статистичний ряд;
2) побудувати гістограму, полігон відносних частот, полігон накопичених частот.

Розв'язання

$x_{\max} = 4{,}77$; $x_{\min} = 1$; $R = x_{\max} - x_{\min} = 3{,}77$. Вибираємо кількість розрядів $k = 10$. Довжини інтервалів групувань будемо вважати однаковими, такими, що дорівнюють 0,38. Визначаємо межі розрядів і записуємо їх в перший рядок таблиці 4.5. Підраховуємо частоти m_i, відносні частоти h_i і записуємо до таблиці. У четвертому рядку таблиці проставляємо середини кожного інтервалу $\bar{x}_i$.

Таблиця 4.5

Розряд	1-1,38	1,38-1,76	1.76-2,14	2.14-2,52	2,52-2,9	2,9-3,28	3,28-3,66	3,66-4,04	4,04-4,42	4,42-4,8
m_i	21	11	12	19	8	10	13	0	3	3
h_i	0,21	0,11	0,12	0,19	0,08	0,1	0,13	0	0,03	0,03
$\bar{x}_i$	1,19	1,57	1,95	2,33	2,71	3,09	3,47	3,85	4,23	4,61

Гістограму можна, звичайно, побудувати вручну, але краще скористатися програмними засобами. На рисунку 4.2 побудована гістограма відносних частот в пакеті Excel.

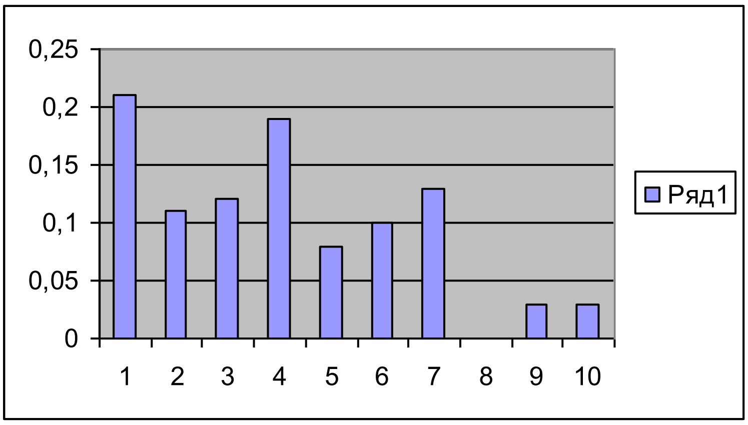


Рисунок 4.2 – Гістограма відносних частот, виконана в Excel

Гістограму можна також побудувати в пакеті Mathcad (див. рисунок 4.3). Для цього задається вектор X середин інтервалів групувань і вектор відносних частот h. При побудові графіка в декартових координатах вибирається тип лінії «bar».

Полігон відносних частот і полігон накопичених частот будуємо в Mathcad. Для побудови полігону відносних частот (див. рисунок 4.4) використовуємо ті ж дані, що і для побудови гістограми (вектори x і h). Відмінність полягає у виборі типу лінії на графіку. Тут потрібно вибрати тип лінії «draw».

Полігон накопичених частот побудований на рисунку 4.5. Змінна b_k позначає праві межі інтервалів.

$$x := (\ 1.19\ \ 1.57\ \ 1.95\ \ 2.33\ \ 2.71\ \ 3.09\ \ 3.47\ \ 3.85\ \ 4.23\ \ 4.61\ ) \qquad x := x^T$$

$$h := (\ 0.21\ \ 0.11\ \ 0.12\ \ 0.19\ \ 0.08\ \ 0.1\ \ 0.13\ \ 0\ \ 0.03\ \ 0.03\ ) \qquad h := h^T$$

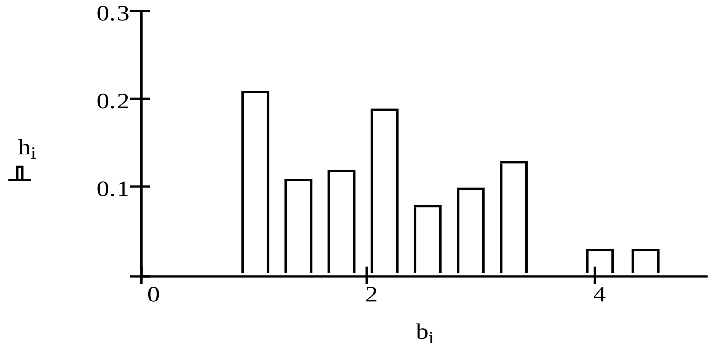


Рисунок 4.3 – Гістограма відносних частот, виконана в пакеті Mathcad

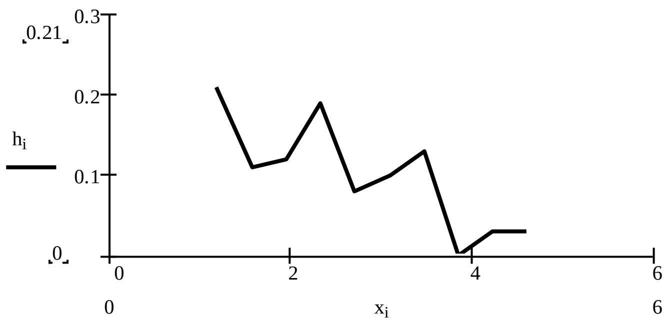


Рисунок 4.4 – Полігон відносних частот

$$b_0 := 1 \qquad k := 1..10$$

$$b_k := 1 + 0.38 \cdot k \qquad F_k := \sum_{j=1}^{k} h_{j-1} \qquad i := 0..10$$

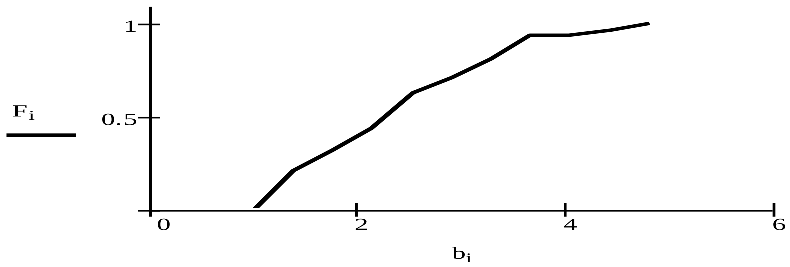


Рисунок 4.5 – Полігон накопичених частот

Контрольні питання

1. Поясніть побудову статистичного ряду (що таке розмах вибірки, розряд, частота, відносна частота).
2. Поясніть побудову гістограми частот, відносних частот, полігону відносних і накопичених частот.

Практичне завдання. Перепишіть вибірку свого варіанту з додатку 3. Побудуйте статистичний ряд, гістограму частот і відносних частот, полігон відносних частот і накопичених частот.

4.4 Статистичні оцінки параметрів розподілу

У попередньому параграфі було розглянуто завдання статистичного визначення законів розподілу. На основі статистичного матеріалу можна визначити числові характеристики випадкової величини – математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. Чим більше вибірка, тим точніше обчислюються числові характеристики. Проблема полягає в тому, що часто доводиться задовольнятися вибіркою малого об'єму. Обчислені при цьому числові характеристики випадкової величини значно відрізняються від дійсних числових характеристик. Наближене значення числової характеристики називають її ***оцінкою***. Оцінки, які визначаються одним числом, називаються *точковими*. Про точкові оцінки піде мова в поточному і в наступному параграфах.

Використовуються також *інтервальні оцінки*, які визначаються двома числами – кінцями інтервалів (у інтервалі розміщена оцінювана величина із заданою ймовірністю). Інтервальні оцінки розглянуто в §2.6.

Точкові оцінки повинне задовольняти таким вимогам: незміщеність, ефективність, спроможність.

Незміщеною називають статистичну оцінку Θ^*, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру Θ при будь-якому об'ємі вибірки, тобто

$$M(\Theta^*) = \Theta.$$

Дотримання вимоги $M(\Theta^*) = \Theta$ гарантує від отримання систематичних помилок.

Зміщеною називають оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює оцінюваному параметру.

Ефективною називають статистичну оцінку, яка (при заданому об'ємі вибірки) має найменшу дисперсію, тобто $D(\Theta^*) = \min$. Дотримання вимоги $D(\Theta^*) = \min$ гарантує мінімізацію помилки при обчисленні параметра.

При розгляді вибірок великого об'єму (n велике), статистичні оцінки повинне бути спроможними.

Спроможною називають статистичну оцінку, яка при $n \to \infty$ прямує за ймовірністю до оцінюваного параметра. Наприклад, якщо для незміщеної оцінки $D(\Theta^*) \to 0$ при $n \to \infty$, то така оцінка є спроможною.

Контрольні питання

1. Що називається оцінкою числового параметра?
2. Які оцінки називаються точковими?
3. Дайте визначення незміщеної, ефективної, спроможної оцінки.

4.5 Точкові оцінки математичного сподівання і дисперсії

Оцінкою $M^*(X)$ математичного сподівання $M(X)$ випадкової величини X є середнє арифметичне зафіксованих значень випадкової величини:

$$M^*(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,, \tag{4.1}$$

де X_i - значення випадкової величини, зафіксоване в i-му досліді, n- число дослідів (див. таблицю 4.1). При великому числі дослідів обчислення оцінки здійснюється не за первинним статистичним матеріалом таблиці 4.1, а за статистичним рядом таблиці 4.4:

$$M^*(X) = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \cdot h_i \,, \tag{4.2}$$

де $\bar{x}_i$ - середнє значення розряду, h_i - відносна частота розряду, k - кількість розрядів.

Обчислена за формулами (4.1) і (4.2) оцінка математичного сподівання є незміщеною і спроможною. Формула (4.2) не що інше, як скалярний добуток арифметичних векторів $x(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k)$ і $h(h_1, h_2, ..., h_k)$. За тією ж формулою скалярного добутку обчислюється математичне сподівання дискретної випадкової величини в §2.5, формула (2.5).

Можна обчислювати оцінку дисперсії за статистичним рядом як дисперсію дискретної випадкової величини (формула (2.12). При цьому роль можливих значень x_i випадкової величини X виконують $\bar{x}_i$ - середні значення розрядів, роль ймовірностей p_i виконують h_i - відносні частоти розрядів, замість математичного сподівання m_x треба підставити оцінку математичного сподівання $M^*(X)$. Таким чином, оцінку дисперсії можна визначити за формулою, аналогічною формулі (2.12):

$$D^*(X) = \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - M^*(X))^2 \cdot h_i \,. \tag{4.3}$$

Проте, обчислена таким чином оцінка математичного сподівання є зміщеною у бік зменшення. Доведено (див. [1], [2]), що зсув оцінки можна виправити, якщо помножити її на коефіцієнт $k/(k-1)$. Тоді виправлена, незміщена і спроможна оцінка дисперсії обчислюється за формулою

$$D^*(X) = \frac{k}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - M^*(X))^2 \cdot h_i \,. \tag{4.4}$$

При обчисленні незміщеної і спроможної оцінки математичного сподівання за первинною вибіркою використовується формула

$$D^*(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M^*(X))^2 \,, \tag{4.5}$$

де x_i - значення випадкової величини, зафіксоване в i-му досліді, n - число дослідів, $M^*(X)$ - оцінка математичного сподівання.

Незміщена, «виправлена» оцінка середнього квадратичного відхилення обчислюється як корінь квадратний з «виправленої» дисперсії

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} \, . \qquad (4.6)$$

Приклад 3. Використовуючи дані прикладу 2, обчислити за статистичним рядом оцінки математичного сподівання і дисперсії.

Розв'язання. Оцінки обчислюємо в пакеті Mathcad, використовуючи створені в прикладі вектори x і h. Математичне сподівання обчислюємо за формулою (4.2) як скалярний добуток векторів x і h:

$$M := x \cdot h \qquad M = 2.341$$

Дисперсію обчислюємо за формулою (4.4), враховуючи, що нумерація елементів арифметичних векторів x і h починається з нуля, а всього елементів, як і розрядів таблиці 4.5 - десять.

$$D := \frac{10}{9} \cdot \sum_{i=0}^{9} \left(x_i - M\right)^2 \cdot h_i \qquad D = 0.951$$

Таким чином, оцінка математичного сподівання $M^*(X) = 2{,}34$; оцінка дисперсії $D^*(X) = 0{,}95$.

Контрольні питання

1. Як обчислюється незміщена і спроможна оцінка математичного сподівання випадкової величини за первинним статистичним матеріалом і за статистичним рядом?
2. Як обчислюється незміщена і спроможна оцінка дисперсії випадкової величини за первинним статистичним матеріалом і за статистичним рядом?

Практичне завдання. Обчисліть для вибірки свого варіанту точкові оцінки математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення.

4.6 Надійний інтервал і надійна ймовірність

У попередньому параграфі розглянуто методи визначення точкових оцінок числових характеристик вибірки. При малому числі спостережень точкова оцінка значною мірою випадкова, змінюється від вибірки до вибірки. Тому важливо знати, які помилки може спричинити заміна параметра його оцінкою, і в яких можливих межах лежить дійсне значення оцінюваного параметра.

Щоб мати уяву про точність і надійність оцінки в математичній статистиці користуються так званими надійними інтервалами і надійною ймовірністю.

Нехай для параметра Θ отримана з досліду незміщена оцінка Θ^*. Яка можлива помилка? Візьмемо деяку велику ймовірність (наприклад, $\beta = 0{,}9$ або $\beta = 0{,}95$, або $\beta = 0{,}99$), таку, щоб подію з ймовірністю β можна було вважати практично достовірною. Далі знайдемо таке значення ε, для якого

$$P(\left|\Theta^* - \Theta\right| < \varepsilon) = \beta. \qquad (4.7)$$

Діапазон практичних значень помилки, що виникає при заміні параметра Θ його оцінкою Θ^*, буде $\pm\varepsilon$. Рівність (2.7) перепишемо у вигляді

$$P(\Theta^* - \varepsilon < \Theta < \Theta^* + \varepsilon) = \beta. \qquad (4.8)$$

Рівність (4.8) означає, що з ймовірністю β невідоме значення параметра Θ потрапляє до інтервалу

$$I_\beta = (\Theta^* - \varepsilon;\ \Theta^* + \varepsilon) \qquad (4.9)$$

Величина Θ - невипадкова, а інтервал I_β - випадковий. Тому β потрібно тлумачити як ймовірність того, що випадковий інтервал I_β «накриє» точку Θ.

Ймовірність β називається *надійною ймовірністю*, інтервал I_β - *надійним інтервалом*. Межі інтервалу I_β називають *надійними межами*.

Якщо невідомий закон розподілу випадкової величини X, то надійні межі визначаються наближеними методами і досить складно [3].

Якщо випадкова величина X розподілена по нормальному закону розподілу, то розроблені точні методи визначення інтервальних оцінок математичного сподівання і дисперсії.

Інтервальні оцінки математичного сподівання

1. Інтервальною оцінкою (з надійною ймовірністю β) математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини X за вибірковою середньою $M^*(X)$ при відомому середньому квадратичному відхиленні σ генеральній сукупності є надійний інтервал

$$M^*(X) - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < M^*(X) + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{4.10}$$

де $t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \varepsilon$ - точність оцінки, n - об'єм вибірки, t - значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \frac{\beta}{2}$ (див. додаток Б).

2. Якщо невідоме точне значення середнього квадратичного відхилення σ, а відома його виправлена оцінка σ^*, обчислена за формулою (2.6), то надійний інтервал має вигляд

$$M^*(X) - t_\beta\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}\right) < a < M^*(X) + t_\beta\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}\right), \tag{4.11}$$

де t_β знаходять за таблицею додатку В за заданими n і β.

За допомогою формули (4.11) можна оцінити дійсне значення деякої вимірюваної величини, якщо проведено n рівноточних незалежних вимірювань.

Інтервальні оцінки середнього квадратичного відхилення

Інтервальною оцінкою (з надійною ймовірністю β) середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини X за «виправленим» вибірковим середнім квадратичним відхиленням σ^* є надійний інтервал

$$\sigma^*(1-q) < \sigma < \sigma^*(1+q) \quad \text{(при } q<1\text{)}$$

$$0 < \sigma < \sigma^*(1+q) \quad \text{(при } q>1\text{)} \tag{4.12}$$

де q знаходять по таблиці додатка Г по заданих n і β.

Формула (4.12) застосовується для оцінки точності вимірювання (точність приладу), оскільки точність вимірювань прийнято характеризувати за допомогою середнього квадратичного відхилення випадкових помилок вимірювань.

Приклад 4. За вибіркою об'єму $n = 50$ нормально розподіленої випадкової величини визначені точкові оцінки математичного сподівання $M^*(X) = 3{,}45$ і середнього квадратичного відхилення $\sigma^* = 1{,}56$. З ймовірністю визначити $\beta = 0{,}99$ визначити інтервальні оцінки для $M^*(X)$ і σ^*.

Розв'язання

Оскільки невідоме точне значення середнього квадратичного відхилення, а визначена його статистична оцінка, то для визначення надійного інтервалу математичного сподівання застосовуємо формулу (4.11):

$$M^*(X) - t_\beta\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}\right) < a < M^*(X) + t_\beta\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}\right).$$

Величину t_β визначаємо за таблицею додатку В при $n = 50$ і $\beta = 0{,}99$. Отже $t_\beta = 2{,}679$. Підставляємо дані у формулу (4.11):

$$3{,}45 - 2{,}679\left(\frac{1{,}56}{\sqrt{50}}\right) < a < 3{,}45 + 2{,}679\left(\frac{1{,}56}{\sqrt{50}}\right)$$

$$3{,}45 - 0{,}59 < a < 3{,}45 + 0{,}59$$

$$2{,}86 < a < 4{,}04.$$

Визначення надійного інтервалу для середнього квадратичного відхилення починаємо з таблиці додатку Г, де знаходимо величину $q = 0{,}30$ при $n = 50$ і $\beta = 0{,}99$. Потім використовуємо формулу (4.12):

$$\sigma^*(1-q) < \sigma < \sigma^*(1+q).$$

$$1{,}56(1-0{,}30) < \sigma < 1{,}56(1+0{,}30),\quad 1{,}09 < \sigma < 2{,}03.$$

Таким чином, з ймовірністю $\beta = 0{,}99$ дійсні значення математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення знаходяться всередині інтервалів $2{,}86 < a < 4{,}04$ і $1{,}09 < \sigma < 2{,}03$.

Приклад 5. Наведено 12 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини. Результати вимірювань наведені в таблиці 4.6. Оцінити дійсне значення виміряної величини і точність вимірювань.

Таблиця 4.6 – результати 12 вимірів

№ вимірювання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_i	6,6	6,7	6,8	6,7	6,6	6,8	6,5	6,7	6,6	6,8	6,5	6,6

Розв’язання.

Дійсне значення вимірюваної величини дорівнює її математичному сподіванню. Тому оцінюємо математичне сподівання за допомогою надійного інтервалу. Знаходимо середнє арифметичне результатів вимірів за формулою (4.1):

$$M^*(X) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} X_i = 6{,}67 .$$

Далі знаходимо «виправлену» дисперсію і середнє квадратичне відхилення за формулами (4.5) і (4.6).

$$D^*(X) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(X_i - M^*(X))^2 = 0{,}012, \quad \sigma^* = \sqrt{D^*(X)} = 0{,}108.$$

Надійний інтервал для математичного сподівання будемо знаходити за формулою (4.11). Величину t_β визначаємо за таблицею додатку В при $n = 12$ і надійній ймовірності $\beta = 0{,}95$. Отже $t_\beta = 2{,}2$.

$$6{,}67 - 2{,}2\left(\frac{0{,}108}{\sqrt{12}}\right) < a < 6{,}67 + 2{,}2\left(\frac{0{,}108}{\sqrt{12}}\right), \qquad 6{,}59 < a < 6{,}73$$

Для оцінки точності вимірювань надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення знаходимо за формулою (4.12). Знаходимо величину $q = 0{,}55$ при $n = 12$ і $\beta = 0{,}95$ за таблицею додатку Г.

$$\sigma^*(1-q) < \sigma < \sigma^*(1+q).$$

$$0{,}108(1-0{,}55) < \sigma < 0{,}108(1+0{,}55), \quad 0{,}049 < \sigma < 0{,}167.$$

Відповідь: з надійністю 0,95 істинне значення вимірюваної величини розміщено в надійному інтервалі $6{,}59 < a < 6{,}73$; точність вимірювань з надійністю 0,95 оцінюємо надійним інтервалом $0{,}049 < \sigma < 0{,}167$.

Контрольні питання

1. Яке значення мають рівності (4.7) і (4.8)?
2. Поясніть поняття надійної ймовірності і надійного інтервалу.
3. Для якого закону розподілу справедливі формули надійних інтервалів (4.10) -(4.12)?

Задачі

1. Знайти надійний інтервал для оцінки з надійністю 0,95 і 0,99 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини, якщо $\sigma = 3, \quad M^*(X) = 12$ об'єм вибірки $n = 20$.

2. Проведено 8 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини. Наведені результати вимірювань

№ вимірювання	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	3,34	3,35	3,33	3,34	3,32	3,35	3,34	3,32

Оцінити істинне значення виміряної величини і точність вимірювань.

3. Отримана вибірка випадкової величини X, що підпорядкована нормальному закону (об'ємом від 5 до 9, залежно від варіанту). Потрібно:

   1) обчислити вибіркову середню, виправлену дисперсію і середнє квадратичне відхилення;
   2) визначити надійні інтервали для математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення з надійною ймовірністю

Варіант 1

9,1	4,9	8,2	4,7	3,2

Варіант 2

2,1	4,0	-1,1	1,0	-0,5	3,8

Варіант 3

-4,1	-3,1	6,6	6,5	1,1	-3,6	1,9

Варіант 4

1,9	-0,9	-4,9	0,8	-6,3	-1,2	2,5	-3,5

Варіант 5

-2,5	-2,2	1,2	2,4	-3,0	0,6	1,1	-3,3	-1,1

Варіант 6

-2,3	0,2	-1,5	-1,0	5,6	-0,5	-3,1	0,5	0,5

4.7 Статистичні гіпотези. Помилки першого і другого роду. Статистичний критерій. Критичні точки

Обробивши статистичні дані (вибірку) і побудувавши гістограму, ми можемо припустити, який закон розподілу має генеральна сукупність. Якщо за виглядом гістограми є підстави припустити, що закон розподілу має певний вигляд (назвемо його A), висувається *гіпотеза*: генеральна сукупність розподілена згідно із законом A. Можливі і інші гіпотези, наприклад, про значення невідомого параметра відомого закону розподілу і таке інше.

Гіпотези про вид розподілу або про параметри відомих розподілів називають *статистичними*.

Разом з висунутою гіпотезою розглядають і гіпотезу, що суперечить їй. Висунуту гіпотезу називають *нульовою* H_0, або основною. Гіпотезу, яка суперечить основній, називають *такою, що конкурує*, або альтернативною, позначають H_1.

Наприклад, якщо нульова гіпотеза полягає в припущенні, що математичне сподівання a нормального розподілу дорівнює 5, то конкуруюча гіпотеза може полягати в припущенні, що $a \neq 5$. Коротко можна записати: $H_0 : a = 5;\ H_1 : a \neq 5$.

Гіпотези, що містять тільки одне припущення, називають *простими*. Гіпотези, що містять відразу декілька припущень, називають *складними*.

Статистичні гіпотези і перевіряють статистичними методами. При статистичній перевірці можуть бути допущені помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна гіпотеза.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде використана неправильна гіпотеза.

Ймовірність здійснення помилки першого роду позначають через α; її називають *рівнем значущості*. Найчастіше рівень значущості дорівнює 0,05 або 0,01.

Статистичним критерієм (або просто *критерієм*) називають випадкову величину з відомим законом розподілу, яка служить для перевірки нульової гіпотези.

Для перевірки гіпотези за даними вибірки обчислюють частинні значення вхідних в критерій величин і набувають *спостережене значення* критерію.

Спостережуваним значенням K_{cn} називають значення критерію, обчислене за вибіркою.

Безліч усіх можливих значень критерію розбивається на дві множини, що не перетинаються: одне з них містить значення критерію, при яких нульова гіпотеза відкидається, інша – при яких вона приймається.

Критичною областю називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають.

Область ухвалення гіпотези називають сукупність значень критерію, при яких гіпотезу ухвалюють.

Критичними точками (межами) $k_{кр}$ називають точки, що відокремлюють критичну область від області ухвалення гіпотези. Для кожного критерію є відповідні таблиці, за якими знаходять критичну точку.

Контрольні питання

1. Які гіпотези називаються статистичними, яка гіпотеза називається нульовою, яка – є конкуруючою?
2. У чому полягає помилка першого роду, другого роду?
3. Що називається критерієм, спостережуваним критерієм, критичними точками?

4.8 Критерій узгодженості Пірсона

Коли закон розподілу невідомий, але є підстава припустити, що він може мати вигляд A, то перевіряють нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена згідно за законом A.

Критерієм згоди називають критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу. Є декілька критеріїв згоди. Найбільш універсальний з них – критерій узгодженості Пірсона χ^2 («хі квадрат»). Універсальність полягає в тому, що критерій застосовується для різних законів розподілу.

Таким чином, нехай з вибірки об'єму n отриманий емпіричний розподіл (див. §4.3, таблиця 4.5).

Середини розрядів $\bar{x}_i$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\cdot$	$\bar{x}_k$
Емпіричні частоти m_i	m_1	m_2	$\cdot$	m_k

Припускаємо, що генеральна сукупність розподілена згідно із законом A, і обчислюємо теоретичні частоти m_i' (докладніше – нижче). Зазвичай емпіричні і теоретичні частоти розрізняються. Розбіжність частот може бути *незначною,* і буде пояснюватися або малим числом спостережень, або випадковими причинами. Розбіжність частот може бути *значною,* і буде пояснюватися тим, що теоретичні частоти обчислювалися виходячи з неправильної нульової гіпотези.

Як міру розбіжності та як критерій перевірки нульової гіпотези беруть випадкову величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}.$$

Пірсон довів, що закон розподілу випадкової величини χ^2 не залежить від закону розподілу A і числа дослідів n, а залежить тільки від числа *ступенів вільності* $r = k - 1 - s$. Тут k - кількість розрядів вибірки; s - число параметрів передбачуваного розподілу, які оцінені за даними вибірки.

Якщо передбачуваний розподіл – нормальний або рівномірний, то оцінюють два параметри (для нормального розподілу оцінюється математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення; для рівномірного розподілу оцінюються межі відрізка розподілу). Тому число ступенів вільності $r = k - 1 - 2 = k - 3$. Коли ж передбачається, що генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона, то оцінюється один параметр λ, тому $s = 1$ і $r = k - 2$.

Правило застосування критерію узгодженості Пірсона

1. Щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 (генеральна сукупність підкоряється закону розподілу A), треба спочатку обчислити теоретичні частоти, а потім спостережуване значення критерію

$$\chi^2_{спос} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i^{'})^2}{m_i^{'}}. \qquad (4.13)$$

2. У таблиці критичних точок розподілу χ^2 (додаток Д) за заданим рівнем значущості α і числом ступенів вільності $r = k - 1 - s$ знайти критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha, r)$.

3. Коли $\chi^2_{спос} < \chi^2_{кр}$ - немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Коли $\chi^2_{спос} > \chi^2_{кр}$ - нульову гіпотезу відкидають.

Контрольні питання

1. У чому полягає універсальність критерію узгодженості Пірсона?
2. Сформулюйте правило застосування критерію узгодженості Пірсона?

4.9 Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності

На конкретних прикладах розглянемо застосування правила, розглянутого в попередньому параграфі.

Приклад 6. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні і теоретичні частоти

Емпіричні частоти	7	13	37	74	105	86	29	15
Теоретичні частоти	3	14	42	82	99	76	37	13

Розв'язання

Обчислюємо спостережуване значення критерію в Mathcad. Для цього створюємо вектор e емпіричних частот і вектор t теоретичних частот, а потім з цими позначеннями e і t застосовуємо формулу (4.13). Шукану величину «хі-квадрат» позначимо x2.

$$e := \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 37 \\ 74 \\ 105 \\ 86 \\ 29 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad t := \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 42 \\ 82 \\ 99 \\ 76 \\ 37 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$x2 := \sum_{i=0}^{7} \frac{(e_i - t_i)^2}{(t_i)} \qquad x2 = 10.497$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (див. додаток Д), за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і числом $r = 8 - 3 = 5$ знаходимо $\chi^2_{кр}(0{,}05;5) = 11{,}1$.

Оскільки $\chi^2_{спос} < \chi^2_{кр}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Інакше кажучи, розбіжність емпіричних і теоретичних частот незначуща. Дані спостережень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

У цьому прикладі теоретичні частоти були задані. Коли ж обробляється вибірка, то теоретичні частоти необхідно ще визначати.

Приклад 7. Отримана вибірка об'ємом $n = 100$. Потрібно:

1. побудувати статистичний ряд;
2. побудувати гістограму, за гістограмою висунути гіпотезу про закон розподілу генеральної сукупності;
3. за допомогою критерію Пірсона перевірити висунуту гіпотезу.

Таблиця 4.7 – Вибірка об'ємом $n = 100$

6,56	7,99	6,28	4,10	6,59	7,43	6,98	7,14	7,54	7,79
6,32	7,86	6,48	4,84	6,33	6,52	7,03	8,70	7,22	7,14
6,53	7,92	7,56	7,21	6,87	6,30	7,26	6,68	7,41	5,99
6,05	7,67	6,76	6,38	8,02	10,05	7,49	4,97	5,84	6,07
5,31	5,96	7,09	5,80	7,18	6,71	7,24	5,59	5,89	6,12
7,04	7,07	8,26	7,10	7,51	5,72	6,32	5,67	5,90	7,28
6,88	6,24	6,29	7,77	7,74	7,76	5,39	6,48	6,59	6,60
7,56	7,70	7,00	7,31	6,98	6,61	8,41	7,06	5,69	8,30
9,19	6,82	8,11	7,01	7,28	5,80	7,97	6,40	4,16	5,62
7,81	6,36	7,89	6,24	7,16	5,96	5,84	6,67	8,28	7,38

Розв'язання

$$\max(x) = 10.05 \qquad \min(x) = 4.1 \qquad R := \max(x) - \min(x) \qquad R = 5.95$$

Візьмемо кількість розрядів $k = 10$. Довжини інтервалів групування нехай будуть однаковими, і дорівнюватимуть 0,595. Перший рядок таблиці 4.8 – межі інтервалів, другий рядок – середини інтервалів, третій рядок – частоти.

Записуємо дані другого і третього рядків у два вектори і будуємо гістограму на рисунку 4.6.

Математичне сподівання вибірки $M^*(X) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i = 6{,}85$, дисперсія вибірки $D^*(X) = \frac{1}{99}\sum_{i=1}^{100}\left(x_i - M^*(X)\right)^2 = 0{,}964$, середнє квадратичне відхилення $\sigma^*(X) = \sqrt{D^*} = 0{,}982$.

Таблиця 4.8 – Розв'язання прикладу 7

Розряд	4,1-4,69	4,69-5,29	5,29-5,88	5,88-6,48	6,48-7,07	7,07-7,67	7,67-8,26	8,26-8,86	8,86-9,45	9,45-10,05
$\bar{x}_i$	4,40	4,99	5,59	6,18	6,78	7,37	7,97	8,56	9,16	9,75
m_i	2	2	11	19	23	22	14	5	1	1
z_i; z_{i+}	$-\infty$; -2,2	-2,2 - 1,59	-1,59 -0,98	-0,98 -0,38	-0,38 0,23	0,23 0,83	0,83 1,44	1,44 2,05	2,05 2,65	2,65 $+\infty$
p_i	0,01	0,04	0,11	0,18	0,24	0,21	0,13	0,06	0,02	0,004
m_i'	1	4	11	18	24	21	13	6	1	1

Побудова гістограми в Mathcad

x := (4.4 4.99 5.59 6.18 6.78 7.37 7.97 8.56 9.16 9.75)

m := (2 2 11 19 23 22 14 5 1 1)

$x := x^T \qquad m := m^T$

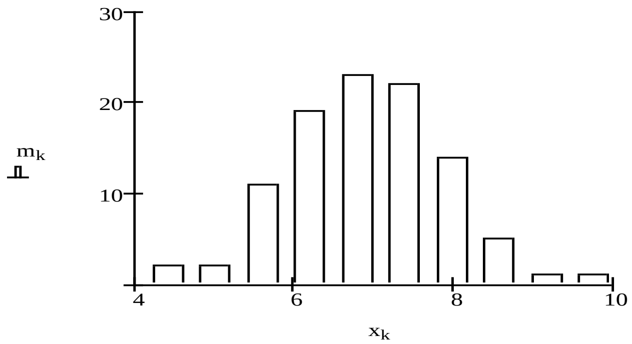


Рисунок 4.6 – Гістограма частот до прикладу 7

Гістограма дає підставу висунути гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності $a^* = 6{,}85$, $\sigma^* = 0.982$.

Обчислимо теоретичні частоти нормального розподілу.

1) Нормуємо задану випадкову величину, тобто переходимо до величини $Z = \dfrac{X - a^*}{\sigma^*}$ і знаходимо кінці інтервалів:

найменше значення Z дорівнює $-\infty$, найбільше – $+\infty$. Результати записуємо в четвертому рядку таблиці 4.8.

2) Обчислюємо теоретичну ймовірність p_i попадання Z в інтервали $(z_i;\ z_{i+1})$ за формулою ($p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$, значення функції Лапласа див. додаток Б). Теоретичну ймовірність записуємо в п'ятому рядку таблиці 4.8.

3) Теоретичні частоти визначаємо за формулою $m_i' = n \cdot p_i$ і записуємо в шостому рядку таблиці 4.8.

Обчислюємо спостережуване значення критерію Персона.

За рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$ і числом $r = 10 - 3 = 7$ знаходимо $\chi^2_{кр}(0{,}01;7) = 18{,}5$ (додаток Д).

Оскільки $\chi^2_{спос} < \chi^2_{кр}$, то результати спостережень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

4.10 Перевірка гіпотези про рівномірний розподіл генеральної сукупності

Як зазначалося в параграфі 4.8, критерій узгодженості Пірсона можна застосовувати для різних законів розподілу. Розглянемо приклад перевірки гіпотези про рівномірний розподіл генеральної сукупності.

Приклад 8. Отримана вибірка об'ємом $n = 100$.

Потрібно:

1. побудувати статистичний ряд;
2. побудувати гістограму;
3. за гістограмою висунути гіпотезу про закон розподілу генеральної сукупності;
4. за допомогою критерію Пірсона перевірити висунуту гіпотезу.

Таблиця 4.9 – Вибірка об'ємом $n = 100$

3,00	5,97	5,36	4,13	4,80	3,44	5,20	4,42	4,59	3,76
3,58	3,36	5,87	5,03	5,21	3,42	3,84	5,54	5,53	3,00
4,76	3,03	4,62	3,03	4,72	5,08	5,05	4,37	4,97	5,42
4,05	4,59	4,39	3,83	3,45	4,28	5,17	5,95	5,53	3,63
5,47	4,81	5,59	4,76	4,28	5,90	3,37	5,22	3,33	4,66
3,52	3,50	5,34	5,51	4,55	3,46	5,50	3,59	3,94	3,34
5,13	4,35	5,99	4,45	5,25	5,47	4,55	3,52	3,86	5,26
3,91	3,17	4,38	5,23	3,51	3,57	4,28	4,50	3,42	4,63
3,27	5,35	3,80	4,37	4,48	5,45	5,85	3,08	5,50	4,31
3,44	4,56	5,52	5,23	5,10	3,47	4,65	4,72	4,80	5,09

Розв'язання

$$\max(x) = 5.99 \qquad \min(x) = 3 \qquad R := \max(x) - \min(x) \qquad R = 2.99$$

Вибираємо кількість розрядів $k = 10$. Довжини інтервалів групування вважаємо однаковими та такими, що дорівнюють 0,3. Перший рядок таблиці 4.10 – межі інтервалів, другий рядок – середини інтервалів, третій рядок – частоти.

Таблиця 4.10 – Рішення прикладу 8

Розряд	3-3,3	3,3-3,6	3,6-3,9	3,9-4,2	4,2-4,5	4,5-4,8	4,8-5,1	5,1-5,4	5,4-5,7	5,7-6
$\bar{x}_i$	3,15	3,45	3,75	4,05	4,35	4,65	4,95	5,25	5,55	5,85
m_i	7	17	6	4	11	14	9	12	14	6
m_i'	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Будуємо гістограму частот, Рисунок 4.7.

$x := (\ 3.15\ \ 3.45\ \ 3.75\ \ 4.05\ \ 4.35\ \ 4.65\ \ 4.95\ \ 5.25\ \ 5.55\ \ 5.85\ )$ $\qquad x := x^T$

$m := (\ 7\ \ 17\ \ 6\ \ 4\ \ 11\ \ 14\ \ 9\ \ 12\ \ 14\ \ 6\ )$ $\qquad m := m^T$

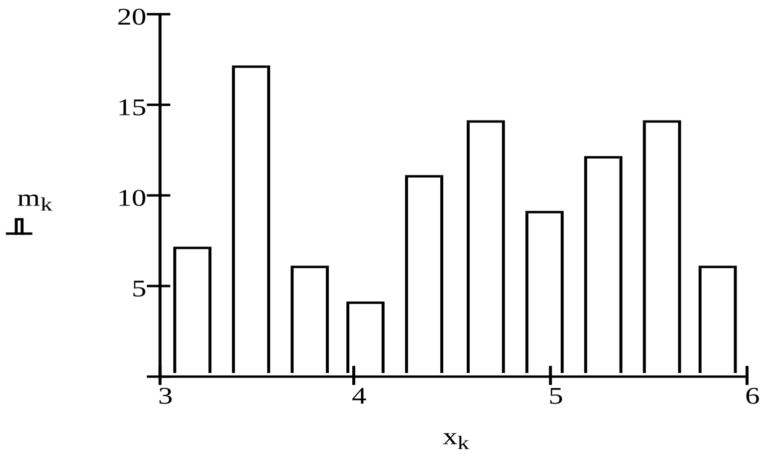


Рисунок 4.7 – Гістограма частот до прикладу 8

Гістограма частот дає підставу висунути гіпотезу про рівномірний розподіл генеральної сукупності.

Розраховуємо теоретичні частоти. Оскільки інтервали всіх розрядів однакової довжини, то і частоти повинні бути однакові: $m_i = \frac{n}{k}$, де k - число розрядів. У нашому випадку $m_1' = m_2' = ... = m_{10}' = 10$.

Обчислюємо спостережуване значення критерію Пірсона.

$$\chi^2_{спос} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i^{'})^2}{m_i^{'}} = 16{,}4\,.$$

Пригадаємо (див. §4.7), що помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна гіпотеза.

Ймовірність зробити помилку першого роду позначають через α; її називають рівнем значущості. За таблицею додатку Д визначаємо критичне значення параметра. Число $r = 10 - 3 = 7$.

Залежно від рівня значущості маємо різні критичні значення параметра. Так при $\alpha = 0{,}01$ $\chi^2_{кр}(0{,}01;7) = 18{,}5$, при $\alpha = 0{,}02$ $\chi^2_{кр}(0{,}025;7) = 16{,}0$, при

$\alpha = 0{,}05 \ \ \chi^2_{кр}(0{,}025; 7) = 14{,}1.$

Спостережуване значення критерію близьке до критичного значення, тому вибираємо $\alpha = 0{,}01 \quad \chi^2_{кр}(0{,}01; 7) = 18{,}5$. В цьому випадку $\chi^2_{спос} < \chi^2_{кр}$, і результати спостережень узгоджуються з гіпотезою про рівномірний розподіл генеральної сукупності.

Практичне завдання. За гістограмою свого варіанту вибірки потрібно висунути гіпотезу про закон розподілу генеральної сукупності (нормальний закон, рівномірний закон). Перевірити висунуту гіпотезу критерієм Пірсона і сформулювати висновок.

Розділ 5. Завдання для самостійної роботи

5.1 Тест

1. Чому дорівнює ймовірність того, що при підкиданні гральній кості на грані випадуть цифри 1, 6 або 4?

А	Б	В	Г
1/2	1/11	1/24	інша відповідь

2. Вкажіть, яке твердження справедливе, коли події А і В - несумісні

А	Б	В	Г
А спричиняє за собою В, а В спричиняє за собою А	P(A+B)= P(A)+ P(B) - P(AB)	P(A+B)= P(A)+ P(B)	Жодне твердження не справедливе

3. Скількома способами можна розселити 5 туристів у 12 вільних одномісних номерах?

А	Б	В	Г
792	475200	95040	120

4. Скількома способами можна з колоди з 36 карт вийняти шість карт так, щоб серед цих шести карт були чотири дами?

А	Б	В	Г
1260	630	992	496

5. Є полиця на 5 книг. Скількома способами можна розставити на полиці сім різних книг?

А	Б	В	Г
2520	21	5040	інша відповідь

6. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, за умови , що цифри не повинні повторюватися?

А	Б	В	Г
120	75	100	125

7. У класі навчаються *а* дівчаток і *б* хлопчиків. Першим пішов відповідати хлопчик. Яка ймовірність того, що другою відповідати буде дівчинка?

А	Б	В	Г
а/(а+б)	*а/(а+б-1)*	*(б-1)/(а+б-1)*	*(а-1)/(а+б)*

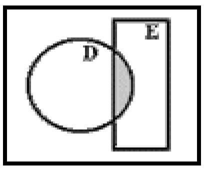
8. Після того, як з шафи, в якій було 70 книг, узяли 10 книг з математики, ймовірність узяти ще одну книгу з математики склала 1/3. Скільки книг з математики було в шафі спочатку?

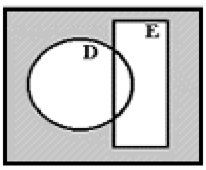
А	Б	В	Г
20	25	30	інша відповідь

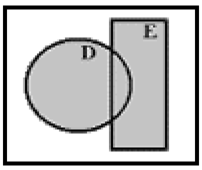
9. На кожній з чотирьох карток написана по одній літері Е, Р, Про, М. Яка ймовірність того, що розклавши навмання в ряд картки, отримаємо слово МОРЕ?

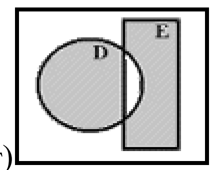
А	Б	В	Г
1/24	1/4	1/2	інша відповідь

10. Укажіть Рисунок на якому заштриховано подія DE.

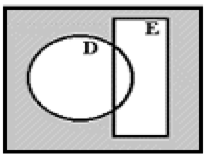
а) 

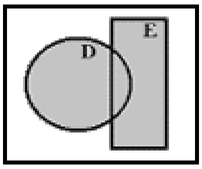
б) 

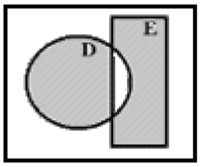
в) 

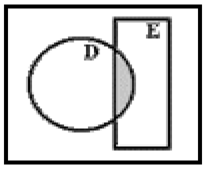
г) 

11. Вкажіть Рисунок на якому заштрихована подія D + E.

а) 

б) 

в) 

г) 

12 . Яке твердження неправильне, коли говорять про протилежні події:

а) Ймовірність появи однієї з протилежних подій завжди більше ймовірності другої.

б) Подія протилежна достовірній є неможливою

в) Якщо дві події єдино можливі і несумісні, то їх називають протилежними

г) Сума ймовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці

13. У ящику лежать 10 чорних шкарпеток і 6 зелених, всі одного розміру. Ви, не дивлячись, витягнули 3 шкарпетки, яка ймовірність того, що утворилася хоч би одна пара?

А	Б	В	Г
1	1/2	1/8	інша відповідь

14. Визначте ймовірність того, що при підкиданні гральної кості випаде цифра 2, або непарне число очок.

А	Б	В	Г
2/3	1/6	1/4	інша відповідь

15. На прямокутнику задана геометрична ймовірність і позначені події А (ліва половина поля) і В (трикутник нижче від діагоналі). З яким твердженням Ви не згодні?

А	Б	В	Г
$P(A+B)= 7/8$	$P(AB)= P(A)* P(B)= 1/4$	$P(A)= P(B)= 1/2$	$P(A)+ P(B)= 1$

16. Ймовірність попадання в ціль при стрілянні із першого та другого пристроїв дорівнює відповідно 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність попадання при одному залпі (з обох пристроїв) хоч би одним із пристроїв.

А	Б	В	Г
0,94	0,15	0,56	0,6

17. Електричний ланцюг складається з двох паралельно сполучених лампочок. Ймовірність відмови першої лампочки дорівнює 0,1, другої - 0,3. Знайти ймовірність того, що обидві лампочки не світять.

А	Б	В	Г
0,03	0,63	0,07	0,27

18. Стрілець 15 разів стріляв у мішень. Знайти найімовірніше число попадань по мішені, за умови, що ймовірність потрапити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,9.

А	Б	В	Г
12	13	14	15

19. До магазину привезли два холодильники, виготовлені на різних заводах. На першому заводі брак складає 1%, на другому - 2%. Знайти ймовірність того, що обидва холодильники браковані.

А	Б	В	Г
0,02	0,0002	0,002	0,2

20. Є чотири урни. У першій урні лежать 5 білих і 5 зелених куль, в другій - 1 біла і 2 зелені, в третій - 2 білі і 5 зелених, в четвертій - 3 білі і 7 зелених. Навмання вибирається урна з неї беруть 1 кулю. Яка ймовірність того, що вона виявиться зеленою?

А	Б	В	Г
203/400	271/420	293/400	313/420

21. У першій урні знаходиться 3 білі і 7 чорних куль. У другій урні – 5 білих і 15 чорних куль. З навмання взятої урни взяли одну кулю. Тоді ймовірність того, що ця куля виявиться білою, дорівнює:

А	Б	В	Г
0,275	0,276	0,725	0,733

22. У першій їдальні працюють офіціантами 5 чоловіків і 10 жінок. У другій – 3 чоловіків і 10 жінок. З першої їдальні в другу переводять 2 штатні одиниці. Яка ймовірність того, що клієнт, який прийшов до другої їдальні, буде обслуговуватися жінкою-офіціантом?

А	Б	В	Г
1/14	61/105	1/2	2/27

23. З 10 учнів, що прийшли на іспит, троє підготувалися відмінно, четверо - добре, двоє - задовільно і один зовсім не підготувався. У білетах 20 питань. Відмінники можуть відповісти на всі питання, четвірочники – на 16, трієчники – на 10, а двієчники – на 5 питань. Кожен учень отримує 3 питання. Перший учень відповів на три питання. Яка ймовірність, що він відмінник?

А	Б	В	Г
0,578	0,234	0,512	інша відповідь

24. Що вірогідніше у грі з рівними “за силою суперниками (без нічиїх): виграти три партії з чотирьох або шість партій з восьми?

А	Б	В	Г
три з чотирьох	шість з восьми	ймовірність однакова	не вистачає даних для розв’язання

25. Серед 20 екзаменаційних білетів є 5 "легких". Студенти підходять за квитками один за іншим. У кого більше ймовірність узяти "легкий" білет: у першого чи у другого?

А	Б	В	Г
у першого	у другого	однакова	не вистачає даних для розв’язання

26. В урні 9 куль, з них 4 білі і 5 зелених. Навмання беруть 6 куль. Яка ймовірність того, що серед вийнятих куль буде 2 білі?

А	Б	В	Г
1/14	2/7	5/14	3/7

27. Яка з подій найймовірніше при підкиданні грального кубика?

А	Б	В	Г
Випадання будь-якого непарного числа очок	Поява 6 очок	Поява будь-якого парного числа очок	Поява будь-якої грані, окрім 6

28. Страхується 1750 автомобілів. Вважається, що кожен з них може потрапити в аварію з ймовірністю 0,04. Для обчислення ймовірностей того, що кількість аварій серед усіх застрахованих перевершить 80, використовують формулу:

А	Б	В	Г
Формулу Пуассона	Формулу Бернуллі	Локальну формулу Муавра-Лапласса	Інтегральну формулу Муавра-Лапласса

29. На складі 2000 кулькових ручок. Ймовірність того, що одна ручка з браком дорівнює 0,001. Знайти приблизну ймовірність того, що на складі є хоч би дві браковані ручки.

А	Б	В	Г
0,632	0,478	0,594	0,702

30. Поява тайфуну в мексиканській затоці очікується щодня з ймовірністю 0,1. Скільки разів можна чекати появу тайфуну в червні з ймовірністю 0,2?

А	Б	В	Г
1	2	3	інша відповідь

31. У магазині три каси. Ймовірність того, що каса працює, дорівнює 0,9. Знайти математичне сподівання випадкової величини - кількості працюючих кас.

А	Б	В	Г
2,484	2,652	2,7	2,9

32. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу ймовірностей

X	-1	1	3
P	0,1	0,1	0,8

Тоді дисперсія випадкової величини X дорівнює:

А	Б	В	Г
1,64	1,28	7,4	2,4

33. Знайти дисперсію числа очок, що випали при киданні однієї гральної кості.

А	Б	В	Г
7/12	35/12	55/12	70/12

34. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням, що дорівнює 5. Відомо, що ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення між 4,4 і 5,6 дорівнює 0,95. Знайти дисперсію цієї випадкової величини.

А	Б	В	Г
0,3	0,09	0,6	1,2

5.2 Варіанти індивідуальних завдань до модуля «Випадкові події»

Завдання 1. Знайти ймовірність проходження електричного сигналу через систему паралельно і послідовно сполучених вузлів $A_1, A_2, \ldots, A_5$, якщо ймовірність безвідмовної роботи вузлів відповідно дорівнює $P(A_1) = p_1,\ P(A_2) = p_2, ..., P(A_5) = p_5$. Для кожного варіанту – своя схема і ймовірність безвідмовної роботи вузлів

№ варіанту	№ схеми	Ймовірність безвідмовної роботи вузлів				
		1	2	3	4	5
1	1	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
2	2	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
3	3	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
4	4	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
5	5	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
6	6	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
7	7	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
8	8	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
9	9	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
10	10	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
11	1	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
12	2	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
13	3	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
14	4	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
15	5	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
16	6	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
17	7	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
18	8	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
19	9	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
20	10	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
21	1	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
22	2	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
23	3	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8

№ варіанту	№ схеми	Ймовірність безвідмовної роботи вузлів				
		1	2	3	4	5
24	4	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
25	5	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
26	6	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
27	7	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
28	8	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
29	9	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8
30	10	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8

Схема 1

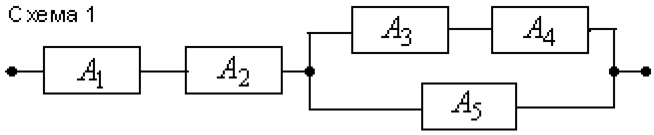


Схема 2

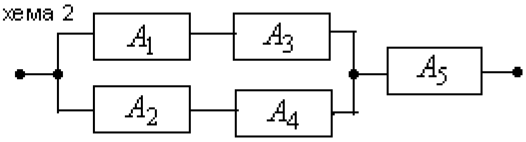


Схема 3

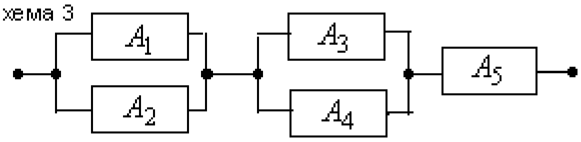


Схема 4

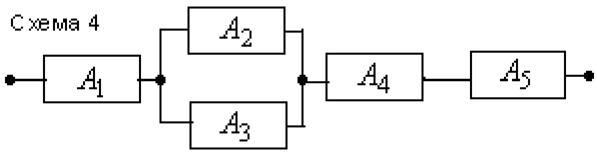


Схема 5

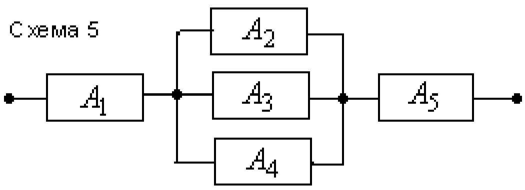


Схема 6

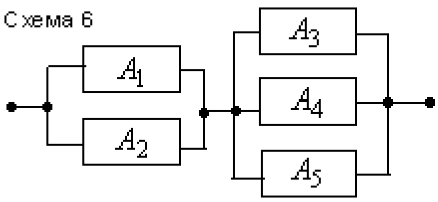


Схема 7

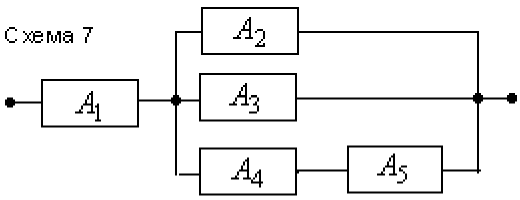


Схема 8

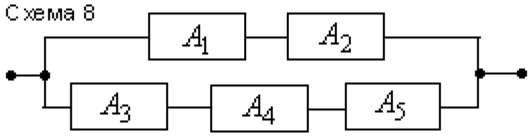


Схема 9

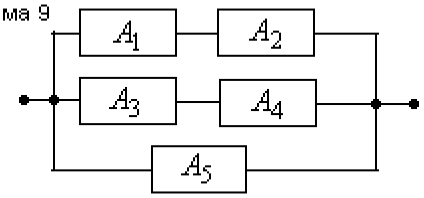
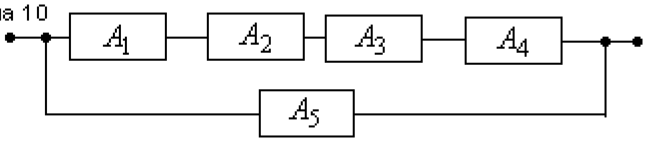


Схема 10



Завдання 2. В урні №1 лежить m чорних і n білих куль. В урні №2 лежить k чорних і r білих куль. З урни №1 навмання переклали 2 кулі. Потім з урни №2 навмання вийняли одну кулю. Визначити ймовірність того, що куля, вийнята з урни №2, виявиться білою (для непарних варіантів) або чорною (для парних варіантів).

№ варіанту	1 урна		2 урна		№ варіанту	1 урна		2 урна		№ варіанту	1 урна		2 урна	
	m	n	k	r		m	n	k	r		m	n	k	r
1	2	8	4	4	7	8	2	6	2	13	4	6	6	2
2	3	7	4	4	8	9	1	6	2	14	3	7	6	2
3	4	6	4	4	9	8	2	6	2	15	2	8	6	2
4	5	5	5	3	10	7	3	7	1	16	3	7	5	3
5	6	4	5	3	11	6	4	7	1	17	4	6	5	3
6	7	3	5	3	12	5	5	7	1	18	5	5	5	4
19	6	4	4	3	23	8	2	6	4	27	4	6	8	6
20	7	3	4	5	24	7	3	6	4	28	3	7	7	3
21	8	2	4	5	25	6	4	8	4	29	2	8	7	3
22	9	1	6	4	26	5	5	8	4	30	1	9	7	4

Завдання 3. Іспит складали студенти трьох груп, причому в і-й групі навчаються m_i студентів, і=1,2,3. Ймовірність скласти іспит на позитивну оцінку для студента і-й групи p_i. Навмання обраний студент іспит не склав. Визначити ймовірність того, що цей студент з і-ої групи?

№ варіанту	m_1	m_2	m_3	p_1	p_2	p_3	і
1	40	20	40	0,9	0,9	0,8	1
2	30	10	30	0,4	0,5	0,3	2
3	25	20	30	0,1	0,7	0,1	3
4	20	18	25	0,2	0,6	0,2	1
5	30	25	26	0,3	0,5	0,3	2
6	35	30	28	0,4	0,4	0,4	3

№ варіанту	m_1	m_2	m_3	p_1	p_2	p_3	i
7	45	26	30	0,3	0,3	0,5	1
8	20	24	20	0,4	0,2	0,6	2
9	35	29	30	0,5	0,1	0,7	3
10	22	32	40	0,6	0,65	0,8	1
11	32	36	34	0,8	0,55	0,9	2
12	38	38	26	0,9	0,45	0,25	3
13	34	40	34	0,3	0,35	0,35	1
14	28	30	26	0,2	0,25	0,45	2
15	26	20	22	0,4	0,15	0,55	3
16	40	20	40	0,9	0,9	0,8	1
17	34	22	24	0,8	0,1	0,4	2
18	36	24	38	0,7	0,2	0,1	3
19	38	26	25	0,6	0,3	0,2	1
20	40	28	26	0,5	0,4	0,3	2
21	22	32	28	0,4	0,5	0,4	3
22	24	34	30	0,3	0,6	0,3	1
23	26	36	38	0,2	0,7	0,4	2
24	28	42	28	0,1	0,8	0,5	3
25	30	25	30	0,65	0,9	0,6	1
26	32	35	40	0,55	0,25	0,8	2
27	34	18	34	0,45	0,35	0,9	3
28	36	22	30	0,35	0,45	0,3	1
29	38	20	26	0,25	0,55	0,2	2
30	40	27	32	0,15	0,65	0,4	3

Завдання 4.

Варіанти 1-6.

Ймовірність появи події А дорівнює p. Яка ймовірність того, що при n випробуваннях подія А з'явиться не більш m разів?

№ варіанту	1	2	3	4	5	6
p	0,2	0,34	0,42	0,26	0,38	0,4
n	5	6	7	5	6	5
m	2	3	4	3	4	4

Варіанти 7-12.

В урні n білих і m чорних куль. Вийняли підряд k куль, причому кожну вийняту кулю повертають до урни перед вилученням наступної. Кулі в урні перемішують. Яка ймовірність того, що з чотирьох вийнятих куль дві будуть білими?

№ варіанту	7	8	9	10	11	12
k	2	2	2	3	3	3
n	10	15	8	6	12	9
m	5	5	4	4	6	3

Варіанти 13-18.

Виконали n незалежних випробувань. Яка ймовірність того, що буде m успішних випробувань, якщо відомо, що ймовірність успішного випробування дорівнює p.

№ варіанту	13	14	15	16	17	18
p	0,2	0,34	0,42	0,26	0,38	0,4
n	5	6	7	5	6	5
m	2	3	4	3	4	4

Варіанти 19-24.

Партія виробів містить k % браку. Знайти ймовірність того, що серед узятих навмання n виробів виявиться m бракованих.

№ варіанту	19	20	21	22	23	24
k	2	3	4	2	3	4
n	5	6	7	5	6	5
m	2	3	4	3	4	4

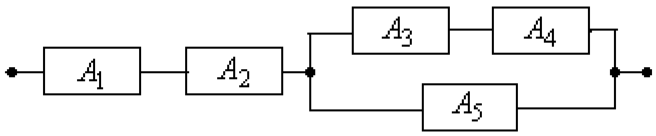
Варіанти 25-30.

Ймовірність виходу на лінію кожного з n автобусів дорівнює p. Яка ймовірність чіткої роботи автобази впродовж дня, якщо для цього необхідно мати на лінії не менше m автобусів.

№ варіанту	25	26	27	28	29	30
p	0,92	0,84	0,82	0,86	0,88	0,94
n	5	6	7	5	6	5
m	2	3	4	3	4	4

Зразок виконання контрольного завдання

Задача 1. Знайти ймовірність проходження електричного сигналу через систему паралельно і послідовно сполучених вузлів, $A_1\ A_2\ A_5$, якщо ймовірність безвідмовної роботи вузлів відповідно дорівнює $P(A_1)=0{,}8$ $P(A_2)=0{,}7$ $P(A_3)=0{,}6$ $P(A_4)=0{,}9$ $P(A_5)=0{,}5$.



Розв'язання.

Позначимо подією В безвідмовну роботу паралельно сполучених ланок A_3, A_4, A_5. Щоб електричний сигнал пройшов через ці ланки, достатньо, щоб він пройшов або через A_3, A_4 або через A_5, або через всі разом. Події A_5 і A_3, A_4 сумісні, тому визначаємо ймовірність суми сумісних подій:

$$P(B)=P(A_3\cdot A_4+A_5)=P(A_3)\cdot P(A_4)+P(A_5)-P(A_3A_4A_5)=$$
$$=0{,}6\cdot 0{,}9+0{,}5-0{,}6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}5=0{,}77$$

Позначимо подією С проходження електричного сигналу через послідовно сполучені ланки A_1, A_2, B. Подія С відбудеться лише в тому випадку, якщо відбудуться одночасно події A_1, A_2, B, тому

$$P(A_1\cdot A_2\cdot B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}77=0{,}4312.$$

Задача 2. В урні №1 лежить 6 чорних і 8 білих куль. В урні №2 лежить 5 чорних і 7 білих куль. З урни №1 до урни №2 навмання взяті 2 кулі. Потім з урни №2 навмання вийняли одну кулю. Визначити ймовірність того, що куля, з урни №2, виявиться білою.

Розв'язання.

Позначимо через А подію – куля, вийнята з урни №2, виявилася білою.

З першої урни могли бути вийняті 2 білі кулі (подія B_1), 2 чорні кулі (подія B_2), 1 чорну і 1 білу кулі (подія B_3).

$$P(B_1)=\frac{C_8^2}{C_{14}^2}=\frac{28}{91};$$

$$P(B_2)=\frac{C_6^2}{C_{14}^2}=\frac{15}{91};\ P(B_3)=\frac{C_6^1\cdot C_8^1}{C_{14}^2}=\frac{48}{91}.$$

Умовна ймовірність того, що з другої урни дістали білу кулю, за умови, що відбулася подія B_1, дорівнює (у другій урні стало 5 чорних і 9 білих куль) $P_{B_1}(A)=\frac{9}{14}$; умовна ймовірність того, що з другої урни дістали білу кулю, за умови, що відбулася подія B_2, дорівнює (у другій урні стало 7 чорних і 7 білих куль) $P_{B_2}(A)=\frac{7}{14}$; умовна ймовірність того, що з другої урни дістали білу кулю, за умови, що відбулася подія B_3, дорівнює (у другій урні стало 6 чорних і 8 білих куль)

Шукана ймовірність того, що куля, вийнята з другої урни виявиться білою, за формулою повної ймовірностей дорівнює

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=$$
$$=\frac{28}{91}\cdot\frac{9}{14}+\frac{15}{91}\cdot\frac{7}{14}+\frac{48}{91}\cdot\frac{8}{14}=\frac{741}{1274}$$

Задача 3. Іспит складали студенти трьох груп, причому в і-й групі навчаються m_i студентів, і=1,2,3. Ймовірність скласти іспит на позитивну оцінку для студента і-й групи p_i. Навмання обраний студент іспит не склав. Визначити ймовірність того, що цей студент з 2-ої групи?

$$m_1=20;\ m_2=30;\ m_3=26;\ p_1=0{,}3;\ p_2=0{,}6;\ p_3=0{,}4.$$

Розв'язання.

Позначимо через А подію – навмання обраний студент іспит не склав.

Зробимо наступні припущення:

1) Навмання обраний студент з першої групи (гіпотеза B_1) ;

2) Навмання обраний студент з другої групи (гіпотеза B_2) ;

3) Навмання обраний студент з третьої групи (гіпотеза B_3).

Шукану ймовірність того, що навмання обраний студент з другої групи, знайдемо за формулою Байєса:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}.$$

$P(B_1) = 0{,}2;\ \ P(B_2) = 0{,}3;\ \ \ P(B_3) = 0{,}26.$

$P_{B_1}(A) = 0{,}7;\ \ P_{B_1}(A) = 0{,}4;\ \ \ P_{B_1}(A) = 0{,}6.$

Шукана ймовірність

$$P_A(B_2) = \frac{0{,}2\cdot 0{,}7}{0{,}3\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}7 + 0{,}26\cdot 0{,}6} = 0{,}34.$$

Задача 4. Ймовірність появи події А дорівнює 0,4. Яка ймовірність того, що при 6 випробуваннях подія А з'явиться не більше 2 разів?

Розв'язання.

Скористаємося формулою Бернуллі (1.16). В цьому випадку n=6, p=0,4, q=0,6. Ймовірність того, що при 6 випробуваннях подія А з'явиться не більше 2 разів можна знайти за формулою:

$$P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0\cdot p^0\cdot q^6 + C_6^1\cdot p^1\cdot q^5 + C_6^2\cdot p^2\cdot q^4 =$$
$$= q^6 + 6\cdot p\cdot q^5 + \frac{6!}{2!4!}\cdot p^2\cdot q^4 = q^4(q^2 + 6pq + 10p^2) = 0{,}44$$

5.3 Варіанти індивідуальних завдань до модуля „Випадкові величини”

Задача 1. Знайти закон розподілу вказаної дискретної випадкової величини Х і її функцію розподілу F(x). Обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення. Побудувати графік функції розподілу F(x).

У партії з n виробів m бракованих. Для контролю їх якості випадковим чином відбирають k виробів. Випадкова величина Х – число бракованих виробів.

№ варіанту	n	m	k	№ варіанту	n	m	k	№ варіанту	n	m	k
1	20	5	3	11	16	7	4	21	10	4	2
2	15	4	3	12	20	5	3	22	11	4	3
3	25	6	4	13	26	6	4	23	12	5	4
4	22	5	3	14	18	5	3	24	13	5	3
5	23	7	5	15	23	6	3	25	14	5	2
6	24	8	5	16	22	7	4	26	15	4	3
7	18	5	3	17	21	5	2	27	16	4	2
8	26	4	3	18	20	6	2	28	17	6	4
9	20	6	4	19	15	5	3	29	18	6	3
10	16	4	2	20	10	6	3	30	19	6	2

Задача 2. Даний перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: x1, x2, x3, а також відомі математичні сподівання цієї величини та її квадрата: M (X)=a; M (X2)=b. Знайти ймовірностей, відповідно можливі значенням X.

№ варіанту	x1	x2	x3	a	b	№ варіанту	x1	x2	x3	a	b
1	2	3	4	3,5	9,2	16	2	4	6	3,5	9,2
2	1	2	3	3,6	9,3	17	1	3	5	6,7	11,4
3	4	5	6	3,7	9,4	18	1	4	5	3,7	14,2
4	3	4	5	3,8	9,5	19	1	4	7	5,4	12,3
5	5	6	7	6,5	10,2	20	2	3	5	6,2	13,6
6	2	3	4	4,2	8,5	21	3	4	7	5,6	9,2
7	1	2	3	5,3	11,1	22	2	7	9	6,3	11,4
8	4	5	6	2,4	5,3	23	6	7	8	3,5	9,5
9	3	4	5	3,5	6,4	24	2	3	4	3,6	10,2
10	5	6	7	6,7	11,3	25	1	2	3	3,7	8,5
11	2	3	4	3,7	9,2	26	4	5	6	3,8	11,1
12	1	4	7	5,4	11,4	27	3	4	5	6,5	5,3
13	2	5	8	6,2	14,2	28	5	6	7	4,2	6,4
14	3	4	7	5,6	12,3	29	3	4	6	5,3	9,2
15	4	6	8	6,3	13,6	30	2	6	8	2,4	9,3

Задача 3. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$. Потрібно: 1) визначити коефіцієнт; 2) знайти функцію розподілу $F(x)$; 3) побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$; 4) обчислити математичне сподівання $M(x)$ та дисперсію *D(X)*; 5) Знайти імовірність того, що випадкова величина набуде значення із інтервалу *(α;β)*.

Варіанти 1-10

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ c\cdot(x-n)^2, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Варіанти 11-20

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ c\cdot(x+n)^3, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Варіанти 21-30

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ c\cdot\sin nx, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{a};\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{a}.\end{cases}\qquad \alpha=\frac{\pi}{c};\quad \beta=\frac{\pi}{d}.$$

№ варіанту	**n**	**a**	**b**	α	β
1	1	-4	2	-3	0
2	2	2	5	3	4
3	3	-6	-2	-4	-3
4	4	0	5	2	3
5	5	1	6	2	4
6	6	2	8	4	6
7	7	-3	4	0	3
8	8	0	7	2	5
9	8	1	4	2	3
10	9	3	6	4	5
11	3	0	7	2	5
12	4	1	4	2	3
13	5	3	6	4	5
14	6	5	1	6	2
15	7	6	2	8	4
16	8	7	-3	4	0
17	7	-4	2	-3	0
18	6	2	5	3	4
19	5	-6	-2	-4	-3
20	3	0	5	2	3

№ варіанту	**n**	**a**	**c**	**d**
21	9	2	6	4
22	6	3	6	4
23	8	1	6	3
24	5	1	4	3
25	2	2	4	3
26	3	2	6	4
27	4	3	6	4
28	5	1	6	3
29	6	1	4	3
30	7	2	4	3

Зразок виконання контрольного завдання

Задача 1. Знайти закон розподілу вказаної дискретної випадкової величини X і її функцію розподілу F(x). Обчислити математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення. Побудувати графік функції розподілу F(x).

У партії з n=25 виробів m=6 бракованих. Для контролю їх якості випадковим чином відбирають k=4 вироби. Випадкова величина X – число бракованих виробів.

Розв'язання.

Випадкова величина X– число бракованих виробів серед відібраних виробів має наступні можливі значення: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ \ x_3 = 2;\ x_4 = 3;\ x_5 = 4.$

Ймовірність можливих значень знайдемо за формулою $P(x = r) = \dfrac{C_m^r \cdot C_{n-m}^{k-r}}{C_n^k}$.

$$P(x=0) = \frac{C_6^0 \cdot C_{19}^4}{C_{25}^4} = \frac{1938}{6325} = 0{,}306;$$

$$P(x=1) = \frac{C_6^1 \cdot C_{19}^3}{C_{25}^4} = \frac{2907}{6325} = 0{,}459;$$

$$P(x=2) = \frac{C_6^2 \cdot C_{19}^2}{C_{25}^4} = \frac{513}{2530} = 0{,}204;$$

$$P(x=3) = \frac{C_6^3 \cdot C_{19}^1}{C_{25}^4} = \frac{38}{1265} = 0{,}03;$$

$$P(x=4) = \frac{C_6^4 \cdot C_{19}^0}{C_{25}^4} = \frac{3}{2530} = 0{,}001.$$

Складемо шуканий закон розподілу:

X	0	1	2	3	4
P	0,306	0,459	0,204	0,03	0,001

Побудуємо функцію розподілу. Для різних значень x знайдемо $F(x) = P\{X < x\}$:

1) Якщо $x \le 0$, то, $F(x) = P\{X < 0\} = 0;$

2) Якщо $0 < x \le 1$, то $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = 0{,}306;$

3) Якщо $1 < x \le 2$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0{,}306 + 0{,}459 = 0{,}765;$

4) Якщо $2 < x \le 3$, то

$$F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0{,}306 + 0{,}459 + 0{,}204 = 0{,}969;$$

5) Якщо $3 < x \le 4$, то

$$F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} =$$
$$= 0{,}306 + 0{,}459 + 0{,}204 + 0{,}03 = 0{,}999;$$

4) Якщо $4 < x$, то

$$F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + P\{X = 4\} =$$
$$= 0{,}306 + 0{,}459 + 0{,}204 + 0{,}03 + 0{,}001 = 1.$$

Отже,

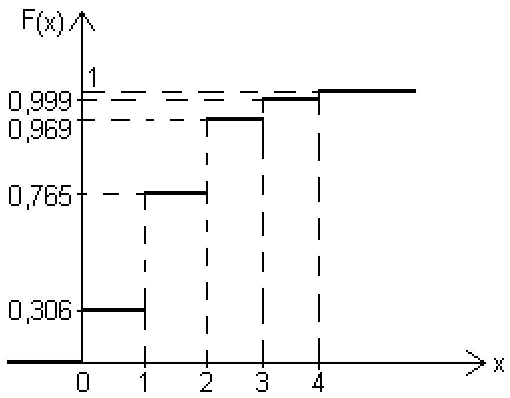


Рисунок 5.1 – Графік функції розподілу

Математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення обчислимо відповідно за формулами (2.5), (2.18) і (2.15).

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 0 \cdot 0{,}306 + 1 \cdot 0{,}459 + 2 \cdot 0{,}204 + 3 \cdot 0{,}03 + 4 \cdot 0{,}001 = 0{,}961.$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - M^2(X) = 0^2 \cdot 0{,}306 + 1^2 \cdot 0{,}459 + 2^2 \cdot 0{,}204 + 3^2 \cdot 0{,}03 +$$
$$+ 4^2 \cdot 0{,}001 - (0{,}961)^2 = 0.637.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}798.$$

Задача 2. Відомі можливі значення дискретної випадкової величини Х: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а також відомі математичні сподівання цієї величини і її квадрата: $M(X) = 2{,}3$, $M(X^2) = 5{,}9$. Знайти ймовірність, відповідну можливим значенням Х.

Розв'язання.

Користуючись тим, що сума ймовірностей усіх можливих значень Х дорівнює одиниці, а також беручи до уваги, що $M(X) = 2{,}3$, $M(X^2) = 5{,}9$, складемо систему трьох лінійних рівнянь щодо невідомих її ймовірностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 = 2{,}3, \\ 1^2 \cdot p_1 + 2^2 \cdot p_2 + 3^2 \cdot p_3 = 5{,}9. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо шукані ймовірність: $p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}3;\ \ p_3 = 0{,}5.$

Задача 3. Неперервна випадкова величина Х задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ c \cdot x^2, & -3 \le x \le 0;. \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Необхідно: 1) визначити коефіцієнт; 2) знайти функцію розподілу $F(x)$;

3) побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$; 4) обчислити математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$; 5) Знайти ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу (-2; -1).

Розв'язання.

1) Для визначення коефіцієнта С використовуємо наступну властивість щільності розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-3} 0dx + c\int_{-3}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{\infty} 0dx = c\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{0} = 9c.$$

Звідси 9c=1. Отже $c = \frac{1}{9}.$

2) Функцію розподілу $F(x)$ знаходимо таким чином:

При $x < -3$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$

При $-3 \le x \le 0$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-3} 0dx + \int\limits_{-3}^{x} \frac{1}{9}x^2dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-3}^{x} = \frac{1}{27}(x^3+27) = 1+\frac{x^3}{27};$$

При $0 < x$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-3} 0dx + \int\limits_{-3}^{0} \frac{1}{9}x^2dx + \int\limits_{0}^{x} 0dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-3}^{0} = 1.$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ 1+\dfrac{x^3}{27}, & -3 \le x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

3) побудуємо графіки $f(x)$ і $F(x)$.

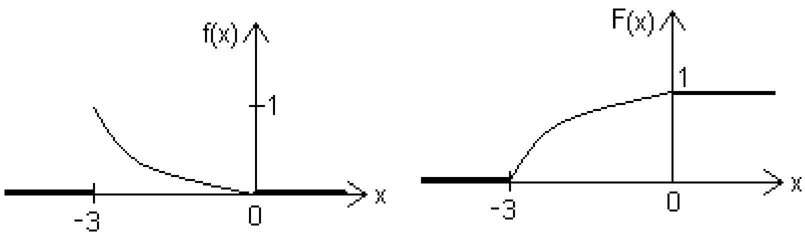


Рисунок 5.2 – Графіки щільності розподілу та функції розподілу

4) Математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X обчислюємо відповідно за формулами (2.7) і (2.18).

$$M(x) = \int\limits_{-3}^{0} x\cdot\frac{1}{9}\cdot x^2dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_{-3}^{0} = -\frac{9}{4};$$

$$D(x) = \int\limits_{-3}^{0} x^2\cdot\frac{1}{9}\cdot x^2dx - \frac{81}{16} = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_{-3}^{0} - \frac{81}{16} = \frac{27}{80}.$$

5) Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу

(-2;-1) визначаємо за формулою (2.2):

$$P(-2 < x < -1) = F(-1) - F(-2) = (1 - \frac{1}{27}) - (1 - \frac{8}{27}) = \frac{7}{27}.$$

5.4 Варіанти індивідуальних завдань до модуля «Математична статистика»

Дається вибірка об'єму $n = 100$.

Потрібно: 1) побудувати статистичний ряд; 2) побудувати гістограму, полігон відносних частот, полігон накопичених частот; 3) обчислити вибіркове середнє, дисперсію і середнє квадратичне відхилення; 4) за гістограмою висунути гіпотезу про закон розподілу генеральної сукупності (нормальний, рівномірний); 5) за допомогою критерію Пірсона перевірити висунуту гіпотезу.

Варіант 1

3,75	1,88	3,31	5,05	2,07	1,13	6,35	3,78	4,47	4,4
3,89	5,16	2,97	4,34	5,4	3,08	-0,41	2,82	1,93	4,74
4,31	5,84	1,74	4,09	8,36	2,35	4,51	3,95	5,54	5,36
4,07	8,25	2,89	5,79	3,18	4,21	2,27	4,39	5,83	4,94
5,5	6,24	7,23	5,99	6,57	2,98	3,41	4,7	-0,19	4,06
4,25	1,57	6,89	4,84	4,75	3,81	3,78	3,05	2,61	4,5
4,45	2,25	6,52	5,17	2,76	6,89	4,51	4,43	3,19	3,29
7,58	9,79	2,88	5,84	6,45	6,61	5,66	4,29	6,64	5,61
5,39	6,47	4,17	3,46	5,58	4,33	7,27	2,71	7,13	3,3
9,17	4,99	8,21	4,73	3,24	1,4	3,78	4,81	3,4	4,0

Варіант 2

3,18	5,66	1,92	5,56	3,73	4,05	4,44	1,66	1,84	3,87
3,89	5,47	3,78	4,64	3,04	1,36	4,03	5,76	2,7	3,74
4,14	2,14	2,21	4,34	3,33	4,27	1,03	1,14	2,84	2,56
3,52	3,05	4,02	2,58	1,76	1,52	1,5	1,28	5,01	5,04
4,48	4,14	3,92	2,53	4,69	2,14	5,32	1,66	3,63	2,42
1,95	3,26	3,47	1,54	5,13	5,6	4,74	5,32	4,99	5,48
1,89	3,99	4,7	5,26	5,37	4,31	2,9	4,61	1,72	4,72
3,29	5,27	4,1	1,77	2,5	3,46	3,76	1,07	3,01	2,81
1,49	4,12	5,02	1,4	1,64	3,48	5,78	4,54	1,68	2,14
1,47	3,83	3,88	4,2	4,92	3,55	1,88	2,09	1,33	2,15

Варіант 3

0,24	4,14	-6,3	-1,82	-5,07	3,7	0,13	2,57	-0,15	-1,73
-1,99	5,57	-0,09	-7,21	3,97	-0,21	-2,23	2,67	2,22	-1,64
0,22	-5,87	1,47	-6,55	-4,68	-1,48	1,65	-3,24	6,09	5,44
-3,28	5,15	3,12	0,91	-0,11	-7,97	-2,68	-4,85	-6,59	-3,94
-0,19	-4,66	6,47	2,06	-1,3	-3,81	-3,88	-2,48	-1,91	-1,49
-1,01	-5,6	-2,44	-3,66	-3,86	4,32	2,95	-4,37	0,88	-4,89
0,08	-2,06	0,55	-6,76	-0,69	-6,43	2,82	-0,97	-1,6	6,56
7,14	-0,71	-4,76	2,38	1,39	-1,13	-1,81	0,31	0,82	-8,18
-0,29	2,57	-10,4	5,19	2,57	4,48	-2,33	2,06	2,7	4,88
-1,88	-0,83	6,05	1,93	-0,86	0,92	-1,14	4,27	0,92	-4,14

Варіант 4

0,83	0,8	0,89	1,06	1,06	0,97	1,13	1,01	1,01	0,91
0,81	1,02	0,86	0,97	0,95	1,04	1,06	0,97	0,89	1,07
0,98	1,06	1,07	0,95	0,99	0,78	0,91	1,15	0,96	1
0,81	0,77	1,05	0,81	1,04	0,95	1,01	0,84	1	0,71
0,94	0,89	1,09	1,03	1,1	0,95	0,85	0,74	1,05	1,12
0,89	0,98	1,06	0,96	0,96	0,62	1,04	0,87	1,06	1,06
0,98	1,07	0,92	1,08	1,03	1,16	0,99	1,05	0,88	0,92
0,91	0,98	0,85	0,91	1	1,03	0,85	0,95	1,01	0,82
0,93	1,03	1,08	0,98	0,92	0,81	0,81	0,83	0,88	0,97
1,01	0,63	0,86	0,93	0,99	0,97	0,94	1,01	1,06	0,77

Варіант 5

2,12	4,07	-1,15	1,09	-0,54	3,85	2,07	3,29	1,92	1,14
1	4,78	1,95	-1,61	3,99	1,9	0,88	3,33	3,11	1,18
2,11	-0,93	2,73	-1,27	-0,34	1,26	2,02	0,38	5,05	4,72
0,36	4,58	3,56	2,45	1,94	-1,99	0,66	-0,42	-1,3	0,03
1,91	-0,33	5,23	3,03	1,35	0,1	0,06	0,76	1,05	1,25
1,5	-0,8	0,78	0,17	0,07	4,16	3,47	-0,18	2,44	-0,45
2,04	0,97	2,28	5,28	-1,38	1,66	-1,22	3,41	1,52	1,2
5,57	1,64	-0,38	3,19	2,7	1,44	1,09	2,16	2,41	-2,09
1,86	3,28	-3,19	4,59	3,29	4,24	0,83	3,03	3,35	4,44
1,06	1,59	5,02	2,97	1,57	2,46	1,43	4,14	2,46	-0,07

Варіант 6

2,63	3,84	2,8	3,18	1,72	1,12	3,83	2,32	3,69	2,1
1,16	2,6	2,73	1,09	3,71	1,57	2,74	2,19	3,19	1,33
2,57	3,08	1,67	2,93	3,71	1,46	1,77	2,78	2,18	1,61
1,28	1,78	1,01	1,26	1,24	3,66	2,06	3,85	3,71	2,96
3,67	2,58	1,25	3,84	1,52	1,59	3,39	2,18	2,16	3,06
1,44	2,2	3,57	1,82	3,33	2,94	1,21	1,56	2,06	1,24
3,79	2,76	3,43	3,95	1,63	3,73	2,77	2,72	3,24	1,08
1,14	3,05	3,07	1,88	1,01	3,76	1,59	2,88	3,22	1,92
2,01	2,31	2,59	2,1	1,34	1,45	2,93	1,15	1,6	1,43
2,2	1,02	1,43	1,66	1,93	2,71	2,81	1,78	3,04	1,2

Варіант 7

-0,43	-0,67	-1,64	-0,33	-2,48	1,05	0,7	0,36	-0,98	1,85
0,32	0,6	-1,78	-0,31	0,81	0,71	0,95	-0,81	0,8	-1
0,88	-0,77	1,89	0,14	-0,35	-0,99	-0,71	1,56	0,34	1,09
0,16	0,15	1,54	-0,96	0,55	-1,51	0,97	-1,57	-0,53	-0,21
0,03	-0,29	-0,15	0,88	0,71	-0,35	-0,84	1,67	-0,13	-0,39
-0,45	-1,58	-1,15	0,37	-1,02	0,28	1,42	3,83	0,13	-0,16
-0,64	-0,87	1,27	1,02	0,97	1,01	1,93	1,43	-1,17	0,67
-2,79	-0,43	-0,54	0,31	0,08	-0,88	0,64	-0,68	-0,9	-0,87
1,02	0,12	-0,55	-0,18	-0,35	-2,87	-0,55	-0,72	2,72	-0,61
0,03	-0,41	-0,89	1,85	0,38	-5,51	0,42	1,1	-0,78	-0,68

Варіант 8

1,24	9,83	-2,46	9	2,54	3,34	4,37	-3,66	-2,78	2,89
2,94	8,42	2,66	4,95	0,9	-5,66	3,3	10,94	0,02	2,58
3,58	-1,67	-1,41	4,09	1,59	3,91	-13,4	-8,66	0,37	-0,38
2,05	0,92	3,28	-0,33	-3,14	-4,43	-4,57	-6,48	6,2	6,31
4,48	3,57	3,03	-0,46	5,11	-1,67	7,53	-3,66	2,32	-0,77
-2,35	1,42	1,93	-4,32	6,69	9,33	5,25	7,55	6,12	8,44
-2,58	3,19	5,15	7,23	7,79	4,03	0,53	4,86	-3,33	5,2
1,49	7,32	3,47	-3,09	-0,54	1,91	2,64	-10,6	0,81	0,29
-4,68	3,53	6,24	-5,35	-3,78	1,96	11,21	4,66	-3,53	-1,65
-4,78	2,79	2,92	3,74	5,88	2,11	-2,62	-1,84	-5,94	-1,63

Варіант 9

-4,15	-3,16	6,58	6,59	1,19	-3,65	1,99	2,37	4,05	3,58
-1,37	4,2	-6,62	2,22	1,96	4,49	5,97	-7,37	2,37	-2,12
3,58	-3,25	2,79	2,32	3,82	0,37	0,73	-2,94	-2,13	3,01
3,26	-2,78	0,94	-2,66	-1,75	6,3	0,57	1,58	1,9	0,35
0,23	8,61	3,77	-1,76	0,42	-0,39	-1,21	-2,85	3,02	1,11
-0,06	2,52	5,26	1,58	2,15	5,63	-2,12	0,7	6,36	2,21
2,45	5,67	1,23	0,88	0,94	4,13	4,53	1,05	2,8	-1,22
-5,65	2,83	5,41	5,21	3,27	5,07	2,83	-0,53	0,41	1,42
2,68	4,56	-3,64	-3,79	-2,96	1,37	4,15	-3,09	2,58	1,09
-0,69	0,26	8,73	4,04	5,34	5,48	2,89	3,43	4,49	3,77

Варіант 10

2,9	0,68	3,45	3,17	2,14	0,33	3,83	2,32	3,69	2,1
2,78	1,24	1,23	2,36	3,12	3,42	2,74	2,19	3,19	1,33
2,62	0,85	0,11	2,28	0,79	1,23	1,77	2,78	2,18	1,61
0,39	1,94	1,56	2,69	3,19	1,89	2,05	3,85	3,71	2,96
0,2	1,76	0,12	0,04	3,4	0,77	3,39	2,18	2,16	3,06
1,86	2,42	3,43	1,37	2,51	3,98	1,21	1,56	2,06	1,24
2,91	1,6	1,61	3,08	2,47	2,59	2,77	2,72	3,24	1,08
2,72	3,37	2,45	3,48	1	0,7	1,59	2,88	3,22	1,92
1,49	2,49	3,5	2,9	3,15	1,1	2,93	1,15	1,6	1,43
0,2	0,21	2,38	3,58	2,86	3,36	2,81	1,78	3,04	1,2

Варіант 11

2,17	2,01	2,07	2,2	2,96	2,91	2,17	2,25	2,95	2,44
2,07	2,29	2,91	2,19	2,33	2,37	2,96	2,51	2,47	2,38
2,96	2,86	2,76	2,96	2,89	2,21	2,2	2,99	2,92	2,56
2,45	2,71	2,1	2,74	2,43	2,05	2,05	2,12	2,37	2,84
2,18	2,92	2,68	2,68	2,27	2,25	2,04	2,71	2,66	2,01
2,47	2,09	2,82	2,92	2,53	2,14	2,08	2,29	2,51	2,04
2,25	2,08	2,27	2,84	2,79	2,61	2,57	2,53	2,28	2,26
2,28	2,38	2,87	2,11	2,49	2,2	2,22	2,52	2,79	2,71
2,82	2,52	2,97	2,9	2,56	2,76	2,23	2,83	2,86	2,13
2,63	2,14	2,22	2,89	2,35	2,64	2,41	2,1	2,46	2,86

Варіант 12

0,98	1,18	0,85	0,95	0,77	0,84	1,14	0,87	1,19	1
0,85	1,1	1,12	1,15	0,88	1,04	0,81	1	0,93	0,8
1,19	0,92	0,72	1,09	0,93	1,2	1,16	0,95	0,87	0,7
1,11	1,07	0,63	1,26	0,96	1,11	0,86	0,86	1,09	0,72
0,85	0,99	0,77	0,87	0,99	0,96	1,08	1	1,04	0,89
0,63	1,05	0,94	1,06	1,21	0,67	0,53	1,02	0,92	1,04
1,09	0,71	0,66	0,74	1,09	0,97	0,79	0,74	0,81	0,79
0,99	0,98	1,07	1,01	0,89	0,95	0,88	0,89	0,94	0,93
0,98	0,98	0,7	1,05	0,89	1,03	1,01	0,95	1,04	1,13
0,85	1,1	1,16	0,72	1,16	0,79	0,93	0,74	0,81	0,71

Варіант 13

0,61	-3,08	-1,33	1,44	-2,67	-6,54	-2,47	0,31	2,79	2,15
-1,38	0,75	-1,91	-3,1	-2,25	6,55	-4,47	-4,26	-2,22	-3,47
-3,16	-0,13	2,32	-0,48	-3,68	2,06	-2,51	-1,91	-3,63	-0,9
1,95	-0,96	-4,96	0,8	-6,36	-1,23	2,55	-3,51	-2,38	-3,24
-2,57	-9,53	-0,84	-0,62	-1,66	-2,36	-1,45	-3,58	0,62	-3,32
4,25	0,43	-6,11	2,56	-0,98	-0,08	1,76	-0,7	-1,11	-2,97
-6,09	-1,57	1,92	2,39	-1,98	-5,97	1,69	-0,05	0,13	-2,76
3,58	1,22	0,81	-3,86	0,16	1,24	-2,59	-2,45	1,14	-8,5
6,17	-6,92	3,56	-1	0,67	-1,03	-5,18	2,86	0,51	-0,31
-1,7	-3,24	2,54	0,73	2,77	-3,51	-4,33	-3,34	0,32	-1,95

Варіант 14

0,75	-0,43	0,24	0,42	-0,77	-0,25	-0,16	1,69	0,02	0,52
0,22	1,67	0,8	-0,92	0,07	0,04	1,95	-0,02	0,45	-0,8
0,5	-0,91	0,43	0,36	0,23	0,99	0,78	0,71	1,51	1,95
1,62	-0,82	1,85	-0,59	-0,11	1,8	-0,6	0,04	0,62	0,85
1,34	-0,23	1,5	-0,36	1,23	-0,68	0,8	-0,13	0,71	0,1
0,77	-0,65	1,4	1,39	-0,83	0,67	0,07	1,77	0,92	1,58
-0,16	0,48	1,61	0,98	0,08	1,69	0,44	1,42	1,28	-0,27
1,62	-0,85	1,82	1,34	-0,52	1,62	1,84	1,06	-0,53	-0,85
-0,1	0,01	1,83	1,53	-0,6	0,16	1,95	1,3	1,36	-0,48
1,6	0,55	-0,62	0,5	-0,46	1,02	0,54	1,17	0,32	-0,34

Варіант 15

-0,9	0,91	-0,25	1,01	1,93	1,16	0,45	1,39	0,08	1,09
2,09	-0,18	-0,45	0,18	-1,08	0,56	-1,9	-1,15	0,68	-0,3
0,3	0,51	-1,85	1,35	0,16	-0,07	1,75	0,01	0,43	-0,1
-3,46	0,83	-1,91	0,76	0,02	-0,28	-0,01	2,08	1,91	-1,81
1,74	-0,52	-2,22	0,6	0,63	-0,56	-0,51	-0,94	0,7	-1,51
-1,15	0,32	2,8	-0,15	0,3	3,03	1,69	-1	-0,67	-0,3
-0,71	-0,67	-0,75	2,5	2,33	-2,25	-0,98	0,43	-0,69	-1,89
-1,5	0,55	0,32	0,27	-1,03	0,41	0,1	-0,88	-0,49	-1,72
0,59	2,15	-1,7	4,51	-1,44	0,43	1,6	-1,13	1,23	0,17
-1,06	1,07	3,95	0,15	-0,8	-1,37	0,23	0,33	-0,66	-1,1

Варіант 16

0,51	8,6	1,24	2,95	-3,45	-9,65	8,42	-0,71	6,44	-1,62
-8,6	0,41	0,93	-10,3	6,67	-4,36	0,95	-1,26	2,96	-6,29
0,3	2,45	-3,76	1,79	6,68	-5,12	-3,21	1,12	-1,3	-4,1
-6,77	-3,15	-16,3	-7,11	-7,32	6,13	-1,85	8,8	6,72	1,92
6,32	0,31	-7,24	8,7	-4,72	-4,24	4,07	-1,32	-1,37	2,37
-5,29	-1,23	5,32	-2,91	3,73	1,8	-7,75	4,44	-1,81	-7,34
7,84	1,04	4,37	11,96	-3,96	6,91	1,1	0,9	3,22	-10,7
-9,02	2,32	2,42	-2,65	-16,7	7,38	-4,2	1,56	3,13	-2,44
-2,04	-0,78	0,36	-1,63	-6,15	-5,19	1,78	-8,86	-4,16	-5,38
-1,23	-14,8	-5,38	-3,82	-2,38	0,84	1,27	-3,13	2,27	-7,88

Варіант 17

2,15	2,18	1,42	1,69	-0,59	0,61	0,58	0,67	1,08	1,94
-0,67	1,54	0,45	-0,98	-0,89	1,63	0,27	2,11	-0,97	-0,67
-0,45	1,38	2,9	1,42	0,04	2,78	2,41	-0,4	2,08	2,39
1,25	-0,22	2,58	0,16	-0,09	-0,99	-0,21	-0,65	2,88	0,44
1,53	-0,07	2,81	1,99	2,45	-0,8	0,88	0,89	2,62	-0,62
0,81	-0,04	-0,19	2,65	-0,81	0,69	0,73	0,33	-0,11	-0,25
0,34	0,63	0,42	1,42	-0,78	1,42	0,68	1,46	0,91	2,65
0,13	0,09	0,16	2,14	-0,66	1,32	0,12	0,65	0,24	0,66
2,49	0,52	-0,6	1,17	2,85	1,49	0,35	0,76	2,37	0,37
2,47	-0,17	1,84	0,58	2,51	-0,98	2,8	-0,12	0,71	0,09

Варіант 18

-1,05	1,67	-3,57	-2,49	-1,26	-0,96	1,47	0,12	-2,83	-1,2
2,52	-3,57	-2,32	-1,45	-1,45	-2,07	-1,44	-1,65	-3,87	-1,22
-4,01	1,83	-2,06	-3,77	-0,69	-3,15	2,3	-0,12	-0,62	0,15
2,3	-1,15	0,25	-3,2	1,79	-1,62	1,19	-5,9	-3,16	5.12
-0,57	-3,56	-2,35	-3,78	-1,48	-2,8	2,05	-1,04	-0,82	-5,06
-3,01	-2,51	-2,23	1,18	2,44	0,56	1,17	-3,31	-1,1	0,51
-1,66	-2,36	0,05	1,03	0,54	-0,77	0,21	-2,44	1,25	-3,58
-2,09	-2,51	-2,49	-1,6	-4,31	-0,67	-2,25	-1,54	1,77	-1,53
-2,05	-0,75	2,06	-1,6	2,63	-1,43	1,34	-3,05	-3,83	1,47
-3,79	-1,96	-1,56	-3,23	-1,19	2,94	-1,32	0,13	-2,74	-3,03

Варіант 19

1,21	0,85	0,87	0,73	1,32	1,4	1,43	0,96	0,25	0,47
1,42	1,11	0,54	0,32	0,66	1,58	0,99	1,4	1,12	0,49
0,57	0,97	0,72	0,72	0,89	1,09	1,06	0,86	0,66	1,26
0,41	0,89	1,29	0,64	0,73	1	0,55	0,98	0,53	0,69
1,31	0,58	0,87	0,75	1,44	1,36	1,44	1,06	0,89	0,42
0,24	0,61	0,84	0,16	0,46	1,02	1,22	0,86	0,54	1,09
0,91	0,95	0,27	0,61	0,92	1	1	1,48	1,12	0,62
1,28	0,44	0,9	1,23	0,57	0,46	0,57	0,26	1,11	0,73
1,25	0,72	0,73	1,18	0,91	1,46	1,04	0,66	1,35	0,34
0,9	1,3	0,71	1,73	0,9	0,82	1,21	0,48	1,15	1,25

Варіант 20

0,74	1,4	1,63	1,79	1,47	0,43	0,65	1,92	1	0,86
0,47	1,32	1,63	1,09	0,25	1,54	0,4	1,58	0,53	0,77
0,46	1,07	1,8	1,05	0,75	1,11	0,25	1,64	1,29	0,02
1,94	0,11	0,54	2	1,83	1,7	1,79	0,27	0,53	1,73
0,05	0,52	0,46	1,73	0,06	1,08	0,44	0,04	0,92	1,4
0,3	1,73	1,75	0,29	0,9	1,74	1,12	1,5	0,7	1,2
0,02	0,17	1,69	0,57	0,46	0,46	0,85	1,8	0,95	1,12
1,29	1,42	0,08	1,95	0,31	0,74	1,73	1,54	0,81	0,76
0,83	1,73	0,37	1,43	1	0,07	0,53	1,26	0,08	1,87
0,18	0,59	0,9	1,29	1,51	0,8	1,36	1,36	1,19	1,93

Варіант 21

1,26	0,86	0,52	0,84	0,85	0,62	0,81	0,75	0,94	0,82
1,15	1,09	0,78	1,12	0,97	0,52	0,52	1,3	1,19	0,82
1,12	0,85	0,59	0,71	0,78	0,94	1,01	1,33	1,05	0,56
1	0,76	0,92	0,64	0,6	0,96	1,08	1	0,79	0,74
0,71	1,04	1,01	0,96	0,66	0,99	0,94	0,77	0,64	0,81
0,95	0,51	0,66	0,85	1,27	0,61	1,11	0,81	1,2	1,27
0,97	0,81	1,02	0,75	1,11	1,08	0,99	0,7	1,36	1,33
0,89	1,18	1,01	1,04	0,92	0,84	0,84	0,56	1	0,65
1,13	1,38	0,46	1,19	1,12	0,76	0,62	0,55	1	1,09
0,71	0,68	0,41	0,9	0,94	0,67	1,1	1,02	0,45	1,23

Варіант 22

-1,77	0,3	2,08	-0,83	1,37	-0,2	1,11	-1,66	2,56	-2,55
0,32	-0,61	0,22	-1,75	0,63	1,77	2,52	1,83	-1,48	1,56
-3,61	-1,26	-2,39	4,61	2,68	2,84	0,44	0,37	-2,73	2,75
-2,33	0,24	-1,5	-1,09	5,69	-0,58	-3,18	0,5	0,55	3,17
1,12	0,7	2,06	-1,2	2,01	0,82	-0,04	3,1	-1,19	-0,94
-2,99	-1,8	2,91	-3,83	1,44	-0,14	0,47	-1,61	-0,24	1,2
0,46	-2,6	1,97	0,62	1,36	1,27	0,4	1,89	1,05	-1,97
-1,04	1,28	-0,39	-2,83	0,21	-0,14	0,24	-0,66	0,94	1,55
-6,85	2,91	-0,89	0,55	-0,84	-0,38	-2,55	-0,39	3,01	-2,22
-3,8	-1,64	-0,9	4,87	2,88	-1,39	0,73	-1,91	-2,54	-1,24

Варіант 23

-1,42	0,05	-1,96	0,62	0,8	0,06	-1,73	1,89	0,22	0,66
0,46	2,2	-0,12	0,23	-2,03	1,05	-0,49	0,11	2,81	1,68
-0,19	0,5	-2,07	-1,04	1,19	0,37	0,19	-0,18	0,24	-1,17
0,06	-0,23	2,78	2,48	-0,68	-2,59	-2,52	-1,05	-1,41	0,48
1,55	-0,98	-0,77	1,1	-0,44	1,04	-0,53	1,83	1,95	0,25
-1,81	0,83	0,02	-2,12	-1,2	0,06	0,92	0,6	0,22	1,05
-0,49	-0,44	-0,89	-0,34	-0,73	1,03	0,32	-0,5	0,14	0,83
0,58	0,11	0,69	-0,8	-0,95	0,93	1,92	-1,74	-0,3	-0,77
-0,92	0,96	-1,84	-1,28	1,6	-0,11	2,41	0,16	-0,58	-1,11
0,01	0,36	-0,28	0,47	-0,87	1,31	-0,94	1,37	0,48	-0,57

Варіант 24

4,85	-7,94	9,22	6,72	0,71	-12,1	-2,63	4,22	2,98	3,86
4,09	-3,99	-4,08	1,83	6,33	8,88	-5,97	3,26	7,88	-8,51
3,2	-6,55	-18,0	1,39	-7,01	-4,06	-5,99	0,71	9,59	-14,9
-11,1	-0,31	-2,21	3,6	6,85	-0,54	17,56	-14,3	11,72	-19,8
-14,8	-1,21	-17,2	-22,9	8,99	-7,19	-18,8	-5,23	-1,2	3,04
-0,72	2,15	8,99	-3,28	2,63	26,5	-8,6	9,22	-3,01	11,83
4,92	-2,0	-1,99	6,07	2,38	3,04	-23,4	-11,7	-1,46	-1,37
3,77	8,39	2,27	9,5	-5,48	-7,78	2,96	4,46	-35,2	-5,69
-2,62	2,52	9,75	4,86	6,57	-4,85	-1,73	9,25	6,14	3,18
-14,7	-14,4	1,92	10,66	4,57	8,25	-11,5	-4,4	-11,6	-18,8

Варіант 25

3,7	0,34	2,74	0,98	7,46	0,09	2,77	4,23	3,79	2,28
4,34	3,34	10,54	-4,25	4,13	-0,27	4,73	4,84	5,82	5,58
4,59	7,59	3,38	4,36	5,62	-5,11	2,31	0,91	0,69	-0,14
-0,75	2,35	8,83	3,72	0,5	1,66	0,64	5,02	7,48	7,28
9,44	2,46	4,3	7,33	6,53	2,33	-1,44	-1,2	8,47	2,83
3,57	-1,64	3,04	2,9	1,57	-3,83	5,55	4,11	4,13	4,85
2,69	8,24	4,45	3,77	3,82	2,59	4,3	0,85	12,75	-0,5
-1,57	1,83	0,75	2,38	3,73	1,6	-0,72	1,88	-0,82	1,68
-4,66	1,78	1,15	7,62	2,29	3,56	1,73	4,19	5,51	-1,63
7,79	0,05	8,55	1,17	2,76	8,41	5,45	-0,28	2,41	1,62

Додаток А

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	39986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	0,3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	0,1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0,0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0,0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0,0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0,0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0,0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0,0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0,0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0,0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0,0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0,0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0,0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0,0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0,0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0,0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0,0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0,0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0,0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток Б

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,0000	0,51	0,1950	1,02	0,3461	1,53	0,4370	2,14	0,4838
0,01	0,0040	0,52	0,1985	1,03	0,3485	1,54	0,4382	2,16	0,4846
0,02	0,0080	0,53	0,2019	1,04	0,3508	1,55	0,4394	2,18	0,4854
0,03	0,0120	0,54	0,2054	1,05	0,3531	1,56	0,4406	2,20	0,4861
0,04	0,0160	0,55	0,2088	1,06	0,3554	1,57	0,4418	2,22	0,4868
0,05	0,0199	0,56	0,2123	1,07	0,3577	1,58	0,4429	2,24	0,4875
0,06	0,0239	0,57	0,2157	1,08	0,3599	1,59	0,4441	2,26	0,4881
0,07	0,0279	0,58	0,2190	1,09	0,3621	1,60	0,4452	2,28	0,4887
0,08	0,0319	0,59	0,2224	1,10	0,3643	1,61	0,4463	2,30	0,4893
0,09	0,0359	0,60	0,2257	1,11	0,3665	1,62	0,4474	2,32	0,4898
0,10	0,0398	0,61	0,2291	1,12	0,3686	1,63	0,4484	2,34	0,4904
0,11	0,0438	0,62	0,2324	1,13	0,3708	1,64	0,4495	2,36	0,4909
0,12	0,0478	0,63	0,2357	1,14	0,3729	1,65	0,4505	2,38	0,4913
0,13	0,0517	0,64	0,2389	1,15	0,3746	1,66	0,4515	2,40	0,4918
0,14	0,0557	0,65	0,2422	1,16	0,3770	1,67	0,4525	2,42	0,4922
0,15	0,0596	0,66	0,2454	1,17	0,3790	1,68	0,4535	2,44	0,4927
0,16	0,0636	0,67	0,2486	1,18	0,3810	1,69	0,4545	2,46	0,4931
0,17	0,0675	0,68	0,2517	1,19	0,3830	1,70	0,4554	2,48	0,4934
0,18	0,0714	0,69	0,2549	1,20	0,3849	1,71	0,4564	2,50	0,4938
0,19	0,0753	0,70	0,2580	1,21	0,3869	1,72	0,4573	2,52	0,4941
0,20	0,0793	0,71	0,2611	1,22	0,3883	1,73	0,4582	2,54	0,4945
0,21	0,0832	0,72	0,2642	1,23	0,3907	1,74	0,4591	2,56	0,4948
0,22	0,0871	0,73	0,2673	1,24	0,3925	1,75	0,4599	2,58	0,4951
0,23	0,0910	0,74	0,2703	1,25	0,3944	1,76	0,4608	2,60	0,4953
0,24	0,0948	0,75	0,2734	1,26	0,3962	1,77	0,4616	2,62	0,4956
0,25	0,0987	0,76	0,2764	1,27	0,3980	1,78	0,4625	2,64	0,4959
0,26	0,1026	0,77	0,2794	1,28	0,3997	1,79	0,4633	2,66	0,4961
0,27	0,1064	0,78	0,2823	1,29	0,4015	1,80	0,4641	2,68	0,4963
0,28	0,1103	0,79	0,2852	1,30	0,4032	1,81	0,4649	2,70	0,4965
0,29	0,1141	0,80	0,2881	1,31	0,4049	1,82	0,4656	2,72	0,4967
0,30	0,1179	0,81	0,2910	1,32	0,4066	1,83	0,4664	2,74	0,4969
0,31	0,1217	0,82	0,2939	1,33	0,4082	1,84	0,4671	2,76	0,4971
0,32	0,1255	0,83	0,2967	1,34	0,4099	1,85	0,4678	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,84	0,2995	1,35	0,4115	1,86	0,4686	2,84	0,4977
0,34	0,1331	0,85	0,3023	1,36	0,4131	1,87	0,4693	2,88	0,4980
0,35	0,1368	0,86	0,3051	1,37	0,4147	1,88	0,4699	2,92	0,4982
0,36	0,1406	0,87	0,3078	1,38	0,4162	1,89	0,4706	2.96	0,4985
0,37	0,1443	0,88	0,3106	1,39	0,4177	1,90	0,4713	3,00	0,4986
0,38	0,1480	0,89	0,3133	1,40	0,4192	1,91	0,4719	3,20	0,4993
0,39	0,1517	0,90	0,3159	1,41	0,4207	1,92	0,4726	3,40	0,4996
0,40	0,1554	0,91	0,3186	1,42	0,4222	1,93	0,4732	3,60	0,4998
0,41	0,1591	0,92	0,3212	1,43	0,4236	1,94	0,4738	3,80	0,4999
0,42	0,1628	0,93	0,3238	1,44	0,4251	1,95	0,4744	4,00	0,4999
0,43	0,1664	0,94	0,3264	1,45	0,4265	1,96	0,4750	4,50	0,4999
0,44	0,1700	0,95	0,3289	1,46	0,4279	1,97	0,4756	5.00	0,4999
0,45	0,1736	0,96	0,3315	1,47	0,4292	1,98	0,4761		
0,46	0,1772	0,97	0,3340	1,48	0,4306	1,99	0,4767		
0,47	0,1808	0,98	0,3365	1,49	0,4319	2,00	0,4772		
0,48	0,1844	0,99	0,3389	1,50	0,4332	2,02	0,4783		
0,49	0,1879	1,00	0,3413	1,51	0,4345	2,04	0,4793		
0,50	0,1915	1,01	0,3438	1,52	0,4357	2,06	0,4803		

Додаток В – таблиця значень $t_\beta = t(\beta, n)$

n	$\beta = 0{,}95$	$\beta = 0{,}99$	n	$\beta = 0{,}95$	$\beta = 0{,}99$
5	2,78	4,60	20	2,093	2,861
6	2,57	4,03	25	2,064	2,797
7	2,45	3,71	30	2,045	2,756
8	2,37	3,50	35	2,032	2,720
9	2,31	3,36	40	2,023	2,708
10	2,26	3,25	45	2,016	2,692
11	2,23	3,17	50	2,009	2,679
12	2,20	3,11	60	2,001	2,662
13	2,18	3,06	70	1,996	2,649
14	2,16	3,01	80	1,991	2,640
15	2,15	2,98	90	1,987	2,633
16	2,13	2,95	100	1,984	2,627
17	2,12	2,92	120	1,980	2,617
18	2,11	2,90	∞	1,960	2,576

Додаток Г – таблиця значень $q = q(\beta,\ n)$

n	$\beta = 0{,}95$	$\beta = 0{,}99$	n	$\beta = 0{,}95$	$\beta = 0{,}99$
5	1,37	2,67	20	0,37	0,58
6	1,09	2,01	25	0,32	0,49
7	0,92	1,62	30	0,28	0,43
8	0,80	1,38	35	0,26	0,38
9	0,71	1,20	40	0,24	0,35
10	0,65	1,08	45	0,22	0,32
11	0,59	0,98	50	0,21	0,30
12	0,55	0,90	60	0,188	0,269
13	0,52	0,83	70	0,174	0,245
14	0,48	0,78	80	0,161	0,226
15	0,46	0,73	90	0,151	0,211
16	0,44	0,70	100	0,143	0,198
17	0,42	0,66	150	0,115	0,160
18	0,40	0,63	200	0,099	0,136

Додаток Д – критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи	Рівень значності α			Число ступенів свободи	Рівень значності α		
	0,01	0,025	0,05		0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8	11	24,7	21,9	19,7
2	9,2	7,4	6,0	12	26,2	23,3	21,0
3	11,3	9,4	7,8	13	27,7	24,7	22,4
4	13,3	11,1	9,5	14	29,1	26,1	23,7
5	15,1	12,8	11,1	15	30,6	27,5	25,0
6	16,8	14,4	12,6	16	32,0	28,8	26,3
7	18,5	16,0	14,1	17	33,4	30,2	27,6
8	20,1	17,5	15,5	18	34,8	31,5	28,9
9	21,7	19,0	16,9	19	36,2	32,9	30,1
10	23,2	20,5	18,3	20	37,6	34,2	31,4

Бібліографічний список

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вертцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2003. – 256 с.
3. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – К.: Вища школа, 1988. – 438 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1977.-479 с.
6. Гнеденко Б.В. Элементарное введение в теорию вероятностей / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. – М.: ГПТИ, 1946. – 128 с.
7. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностуй і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2ч. Ч.1. Теорія ймовірностей / В.І.Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2000.–304с.
8. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1974. – 130 с.
9. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. – М.: Наука, 1982. – 160 с.
10. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – М.: Юнити-Дана, 2007. – 573 с.
11. Ластівка І.О. Вища математика. Модуль Теорія ймовірностей. Випадкові величини: навч. посібник / І.О. Ластівка, В.П. Мартиненко, Ю.А. Паламарчук, І.В. Шевченко. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 164 с.
12. Ледяев С.Ф. Основы высшей математики: учеб. пособие / С.Ф. Ледяев, Ю.М. Рудов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 278 с.: ил..
13. Моцний Ф.В. Курс лекцій з теорії ймовірностей: навч. посіб./ Ф.В. Моцний. – К.: ДП „Інформаційно-аналітичне агенство”, 2010. – 122 с.

14. Плис А.И. MATHCAD 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. - М.: Финансы и статистика, 2000.- 656 с.: ил.
15. Хрустальов О.Ф. Основи математичного моделювання: навч. посібник/ О.Ф. Хрустальов.– Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2009.–214 с.
16. Черняк О.І. Теорія ймовірностей та математична статистика / О.І. Черняк, О.М. Обушна, А.В. Ставицький. – К.: Знання, 2002. – 200 с.

Наочний покажчик

Іменний покажчик

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальний посібник

Глеч Сергій Гарійович
Ледяєв Сергій Федорович
Ольшанська Ірина Володимирівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Глеч Сергей Гариевич
Ледяев Сергей Фёдорович
Ольшанская Ирина Владимировна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Коректор Л.П.Светлих
Нормоконтролер І.О.Черевкова
Авторський комп'ютерний набір

Підп. до друку 05.10.2011 р. Формат 89 х 124/16. Ум. друк. арк. 22,4. Тираж 300 пр. Зам. № __
Видавець та виготовлювач — Севастопольський національний технічний університет. Адреса: вул. Університетська, 33, м. Севастополь, 99053
тел. (0692) 435-210; 435-019. E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1272 від 17.03.2003 р