В. Е. ГМУРМАН

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования
СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
высших технических
учебных заведений

Москва «Высшая школа» 1979

ББК 22.171
Г11
УДК 519.2 (076)

Рецензент
докт. техн. наук, проф. Судаков Р. С.

Гмурман В. Е.

Г11 Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов втузов.—3-е изд., перераб. и доп.—М.: Высш. школа, 1979.—400 с., ил.

В пер.: 75 к.

В пособии приведены необходимые теоретические сведения и формулы, даны решения типовых задач, помещены задачи для самостоятельного решения, сопровождающиеся ответами и указаниями. Большое внимание уделено методам статистической обработки экспериментальных данных. Настоящее издание дополнено следующими новыми разделами: ранговая корреляция, моделирование случайных величин, случайные функции.

Предназначается для студентов втузов, может быть полезно лицам, применяющим вероятностные и статистические методы при решении практических задач.

Г $\frac{20203-135}{001(01)-79}$ 32—79 1702060000 517.8
ББК 22.171

Владимир Ефимович Гмурман

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Редактор Ж. И. Яковлева. Переплет художника В. И. Казаковой. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Н. В. Яшукова. Корректор Г. И. Кострикова.

ИБ № 1642

Изд. № ФМ-631. Сдано в набор 26.09.78. Подп. в печать 03.01.79. Формат 84×108/32. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 21 усл. печ. л. 21,24 уч.-изд. л. Тираж 130 000 экз. Зак. № 3177. Цена 75 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции и Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Москва, М-54, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть четвертая

Моделирование случайных величин

Часть пятая

Случайные функции

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем издании помещено более 900 задач, содержание которых соответствует новой программе для инженерно-технических и инженерно-экономических специальностей высших учебных заведений.

В начале каждого параграфа приведены необходимые теоретические сведения и формулы; затем даны решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения. Ко всем задачам имеются ответы, а к части задач — указания.

Автор стремился составить задачи так, чтобы они были доступны и по возможности не требовали большой затраты времени на вычисления. Задачи расположены в порядке постепенного возрастания трудности их решения. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой. Последовательность изложения и терминология соответствуют пятому изданию книги автора «Теория вероятностей и математическая статистика».

В связи с включением новых разделов (методы моментов и максимального правдоподобия, ранговая корреляция, метод Монте-Карло и его применение к расчету систем массового обслуживания и вычислению интегралов, случайные функции и др.) добавлено более 300 задач и частично изменена нумерация задач.

Книга предназначена для студентов высших технических учебных заведений и для лиц, применяющих вероятностные и статистические методы для решения задач практики.

Автор просит читателей присылать свои замечания и предложения в адрес издательства «Высшая школа».

Огромный труд по сплошной проверке решений задач выполнили Данилов Г. В. (Ухта) и Солоницын Л. В. (Ухта). Частично проверили ответы Купчикова Л. М. (Нижний Тагил) и Смирнов И. В. (Москва). Ценные советы прислали Алиев Г. А. (Баку), Данилов Г. В., Кудрявцев В. А. (Ленинград). Подготовить рукопись к печати помогла Пекарь П. Г. Всем названным выше лицам приношу искреннюю благодарность.

Особую признательность выражаю проф. Судакову Р. С. за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению книги.

Автор

Часть первая
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Глава первая
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1. Классическое и статистическое определение вероятности

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$$P(A) = m/n,$$

где m — число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A; n — общее число возможных элементарных исходов испытания. Предполагается, что элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны.

Относительная частота события A определяется равенством

$$W(A) = m/n,$$

где m — число испытаний, в которых событие A наступило; n — общее число произведенных испытаний.

При статистическом определении в качестве вероятности события принимают его относительную частоту.

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях — четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. На выпавшей грани «первой» игральной кости может появиться одно очко, два очка, ..., шесть очков. Аналогичные шесть элементарных исходов возможны при бросании «второй» кости. Каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй». Таким образом, общее число возможных элементарных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$. Эти исходы образуют полную группу и в силу симметрии костей равновозможны.

Благоприятствующими интересующему нас событию (хотя бы на одной грани появится шестерка, сумма выпавших очков — четная) являются следующие пять исходов (первым записано число очков, выпавших на «первой» кости, вторым — число очков, выпавших на «второй» кости; далее найдена сумма очков):

1) 6, 2; $6+2=8$, 2) 6, 4; $6+4=10$, 3) 6, 6; $6+6=12$, 4) 2, 6; $2+6=8$, 5) 4, 6; $4+6=10$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных элементарных исходов: $P = 5/36$.

2. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Решение. а) Извлеченная стандартная деталь, очевидно, не могла быть утеряна; могла быть потеряна любая из остальных 30 деталей ($21+10-1=30$), причем среди них было 20 стандартных ($21-1=20$). Вероятность того, что была потеряна стандартная деталь, $P=20/30=2/3$.

б) Среди 30 деталей, каждая из которых могла быть утеряна, было 10 нестандартных. Вероятность того, что потеряна нестандартная деталь, $P=10/30=1/3$.

3. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

4. Указать ошибку «решения» задачи: брошены две игральные кости; найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 3 (событие A).

«Решение». Возможны два исхода испытания: сумма выпавших очков равна 3, сумма выпавших очков не равна 3. Событию A благоприятствует один исход; общее число исходов равно двум. Следовательно, искомая вероятность $P(A)=1/2$.

Ошибка этого «решения» состоит в том, что рассматриваемые исходы не являются равновозможными.

Правильное решение. Общее число равновозможных исходов равно $6\cdot 6=36$ (каждое число очков, выпавших на одной кости, может сочетаться со всеми числами очков, выпавших на другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию A только два исхода (в скобках указаны числа выпавших очков): (1; 2) и (2; 1). Следовательно, искомая вероятность $P(A)=2/36=1/18$.

5. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность — четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение — четырем.

6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

7. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».

8. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

9. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести).

Решение. Общее число элементарных исходов испытания равно числу сочетаний из шести элементов по три, т. е. C_6^3.

Число исходов, благоприятствующих появлению шестерки на одной грани и различного числа очков (не равного шести) на гранях двух других костей, равно числу сочетаний из пяти элементов по два, т. е. C_5^2.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, к общему числу возможных элементарных исходов: $P = C_5^2/C_6^3 = 1/2$.

10. В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102, ... , 120 и произвольно расположенных. Перфораторщица наудачу извлекает две карты. Найти вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.

11. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ... , 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь № 1; б) детали № 1 и № 2.

Решение. а) Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь шесть деталей из десяти, т. е. C_{10}^6.

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди отобранных шести деталей есть деталь № 1 и, следовательно, остальные пять деталей имеют другие номера. Число таких исходов, очевидно, равно числу способов, которыми можно отобрать пять деталей из оставшихся девяти, т.е. C_9^5.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов: $P = C_9^5/C_{10}^6 = C_9^4/C_{10}^4 = 0{,}6$.

б) Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных деталей есть детали № 1 и № 2, следовательно, четыре детали имеют другие номера), равно числу способов, которыми можно извлечь четыре детали из оставшихся восьми, т. е. C_8^4.

Искомая вероятность $P = C_8^4/C_{10}^6 = 1/3$.

12. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

13. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

14. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

15. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

16. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры

17. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, т. е. C_N^m—числу сочетаний из N элементов по m.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^k способами; при этом остальные $m-k$ деталей должны быть нестандартными; взять же $m-k$ нестандартных деталей из $N-n$ нестандартных деталей можно C_{N-n}^{m-k} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P = C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k} / C_N^m.$$

18. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

19. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

20. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

21. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

22. В «секретном» замке на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

23. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

Решение. Относительная частота события A (появление бракованных книг) равна отношению числа испытаний, в которых появилось событие A, к общему числу произведенных испытаний: $W(A) = 5/100 = 0,05$.

24. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

25. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

§ 2. Геометрические вероятности

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством

$$P = \text{Длина } l/\text{Длина } L.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g, то вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

$$P = \text{Площадь } g/\text{Площадь } G.$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая составляет часть фигуры V:

$$P = \text{Объем } v/\text{Объем } V.$$

26. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок l длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

27. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

28. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

29. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

30. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

31. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см, наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

32. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

33. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

34. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

35. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $y \geqslant x$. (Координата точки C для удобства дальнейшего изложения обозначена через y). Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB (рис. 1, $а$). Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

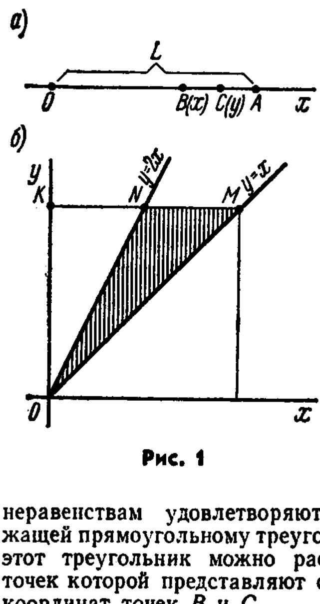

Рис. 1

Решение. Координаты точек B и C должны удовлетворять неравенствам $0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant L$, $y \geqslant x$. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. В этой системе указанным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей прямоугольному треугольнику OKM (рис. 1, $б$). Таким образом, этот треугольник можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют соответственно все возможные значения координат точек B и C.

Длина отрезка BC должна быть меньше длины отрезка OB, т. е. должно иметь место неравенство $y-x < x$, или $y < 2x$. Последнее неравенство выполняется для координат тех точек фигуры G (прямоугольного треугольника OKM), которые лежат ниже прямой $y=2x$ (прямая ON). Как видно из рис. 1, $б$, все эти точки принадлежат заштрихованному треугольнику ONM. Таким образом, этот треугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятствующими интересующему нас событию (длина отрезка BC меньше длины отрезка OB).

Искомая вероятность

$$P = \text{Пл. } g/\text{Пл. } G = \text{Пл. } ONM/\text{Пл. } OKM = 1/2.$$

36. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

37. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $y \geqslant x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $L/2$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

38. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $L/2$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

39. **Задача Бюффона** (французский естествоиспытатель XVIII в.). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

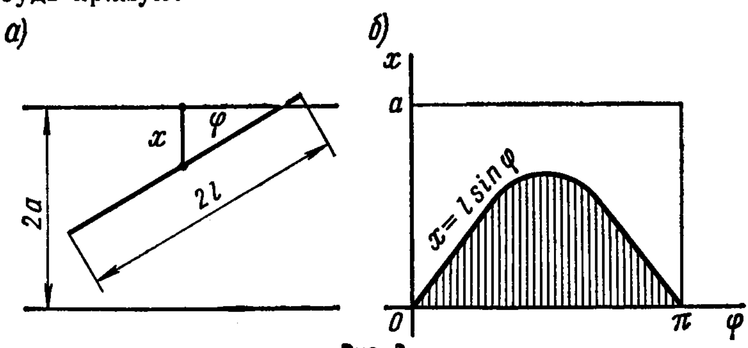

Рис. 2

Решение. Введем следующие обозначения: x — расстояние от середины иглы до ближайшей параллели; φ — угол, составленный иглой с этой параллелью (рис. 2, a).

Положение иглы полностью определяется заданием определенных значений x и φ, причем x принимает значения от 0 до a; возможные значения φ изменяются от 0 до π. Другими словами, середина иглы может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами a и π (рис. 2, *б*). Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как фигуру G, точки которой представляют собой все возможные положения середины иглы. Очевидно, площадь фигуры G равна πa.

Найдем теперь фигуру g, каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию, т. е. каждая точка этой фигуры может служить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель. Как видно из рис. 2, *а*, игла пересечет ближайшую к ней параллель при условии $x \leqslant l \sin\varphi$, т. е. если середина иглы попадет в любую из точек фигуры, заштрихованной на рис. 2, *б*.

Таким образом, заштрихованную фигуру можно рассматривать как фигуру g. Найдем площадь этой фигуры:

$$\text{Пл. } g = \int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi = -l\cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

Искомая вероятность того, что игла пересечет прямую

$$P = \text{Пл. } g/\text{Пл. } G = 2l/(\pi a).$$

40. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

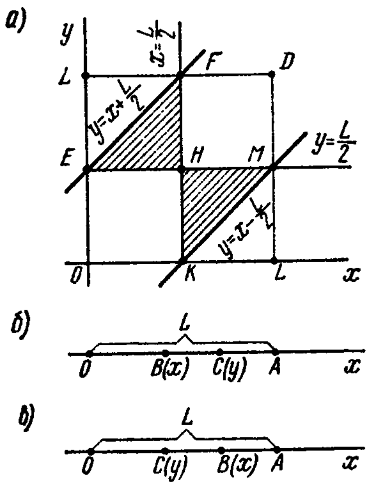

Рис. 3

Решение. Для того чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, каждый из отрезков должен быть меньше суммы двух других. Сумма всех трех отрезков равна L, поэтому каждый из отрезков должен быть меньше $L/2$.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. Координаты любых двух точек B и C должны удовлетворять двойным неравенствам: $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$. Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$, принадлежащей квадрату $OLDL$ (рис. 3, *а*). Таким образом, этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения координат точек B и C.

1. Пусть точка C расположена правее точки B (рис. 3, *б*). Как указано выше, длины отрезков OB, BC, CA должны быть меньше $L/2$, т. е. должны иметь место неравенства $x < L/2$, $y-x < L/2$, $L-y < L/2$, или, что то же,

$$x < L/2, \quad y < x + L/2, \quad y > L/2. \qquad (*)$$

2. Пусть точка C расположена левее точки B (рис. 3, в). В этом случае должны иметь место неравенства $y < L/2$, $x-y < L/2$, $L-x < L/2$, или, что то же,

$$y < L/2,\ y > x-L/2,\ x > L/2. \qquad (**)$$

Как видно из рис. 3, а, неравенства (*) выполняются для координат точек треугольника EFH, а неравенства (**) — для точек треугольника KHM. Таким образом, заштрихованные треугольники можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой благоприятствуют интересующему нас событию (из трех отрезков можно построить треугольник).

Искомая вероятность

$$P = \text{Пл. } g/\text{Пл. } G = (\text{Пл. } \triangle EFH + \text{Пл. } \triangle KHM)/\text{Пл. } \square OLDL = 1/4.$$

41. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t < T$). Найти вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

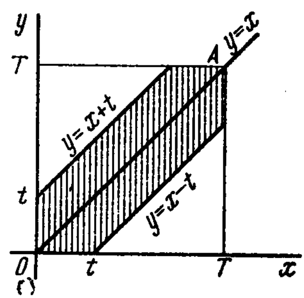

Рис. 4

Решение. Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств соответственно через x и y. В силу условия задачи должны выполняться двойные неравенства: $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. В этой системе двойным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OTAT$ (рис. 4). Таким образом, этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения моментов поступления сигналов.

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t, т. е. если $y-x < t$ при $y > x$ и $x-y < t$ при $x > y$, или, что то же,

$$y < x+t \quad \text{при} \quad y > x, \qquad (*)$$
$$y > x-t \quad \text{при} \quad y < x. \qquad (**)$$

Неравенство (*) выполняется для координат тех точек фигуры G, которые лежат выше прямой $y=x$ и ниже прямой $y=x+t$; неравенство (**) имеет место для точек, расположенных ниже прямой $y=x$ и выше прямой $y=x-t$.

Как видно из рис. 4, все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам (*) и (**) принадлежат заштрихованному шестиугольнику. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятствующими срабатыванию сигнализатора моментами времени x и y.

Искомая вероятность

$$P=\frac{\text{Пл. } g}{\text{Пл. } G}=\frac{T^2-2(T-t)^2/2}{T^2}=\frac{t(2T-t)}{T^2}.$$

42. Задача о встрече. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

43*. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков длиной не более L можно построить треугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в пространственную фигуру пропорциональна объему фигуры и не зависит от ее расположения.

Указание. Ввести в рассмотрение пространственную систему координат.

44. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.

45. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

Глава вторая

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, для трех совместных событий

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+$$
$$+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).$$

В частности, для независимых событий

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B),$$

т. е. *вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляют в предложении, что все предыдущие события уже наступили:*

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

где $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, ..., A_{n-1} наступили.

В частности, *вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\ldots P(A_n).$$

46. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

Решение. Первый способ. Требование — хотя бы один из трех взятых учебников в переплете — будет осуществлено, если произойдет любое из следующих трех несовместных событий: B — один учебник в переплете, C — два учебника в переплете, D — три учебника в переплете.

Интересующее нас событие A можно представить в виде суммы событий: $A=B+C+D$. По теореме сложения,

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D). \qquad (*)$$

Найдем вероятности событий B, C и D (см. решение задачи 17, гл. I, § 1):

$$P(B)=C_5^1\cdot C_{10}^2/C_{15}^3=45/91,\ P(C)=C_5^2\cdot C_{10}^1/C_{15}^3=20/91,$$
$$P(D)=C_5^3/C_{15}^3=2/91.$$

Подставив эти вероятности в равенство (*), окончательно получим

$$P(A)=45/91+20/91+2/91=67/91.$$

Второй способ. События A (хотя бы один из взятых трех учебников имеет переплет) и $\overline{A}$ (ни один из взятых учебников не имеет переплета) — противоположные, поэтому $P(A)+P(\overline{A})=1$ (сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице). Отсюда $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Вероятность появления события $\overline{A}$ (ни один из взятых учебников не имеет переплета)

$$P(\overline{A})=C_{10}^3/C_{15}^3=24/91.$$

Искомая вероятность

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-24/91=67/91.$$

47. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

48. Доказать, что если событие A влечет за собой событие B, то $P(B)\geqslant P(A)$.

Решение. Событие B можно представить в виде суммы несовместных событий A и $\overline{A}B$:

$$B=A+\overline{A}B.$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий получим

$$P(B)=P(A+\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A}B).$$

Так как $P(\overline{A}B)\geqslant 0$, то $P(B)\geqslant P(A)$.

49. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение. Введем обозначения событий: B_1 — появилось только событие A_1; B_2 — появилось только событие A_2.

Появление события B_1 равносильно появлению события $A_1\overline{A}_2$ (появилось первое событие и не появилось второе), т. е. $B_1=A_1\overline{A}_2$. Появление события B_2 равносильно появлению события $\overline{A}_1A_2$ (появилось второе событие и не появилось первое), т. е. $B_2=\overline{A}_1A_2$.

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2, достаточно найти вероятность появления одного, безразлично какого, из событий B_1 и B_2. События B_1 и B_2

несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2). \qquad (*)$$

Остается найти вероятности каждого из событий B_1 и B_2. События A_1 и A_2 независимы, следовательно, независимы события A_1 и $\overline{A}_2$, а также $\overline{A}_1$ и A_2, поэтому применима теорема умножения:

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)\cdot A(\overline{A}_2)=p_1q_2;$$
$$P(B_2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)=q_1p_2.$$

Подставив эти вероятности в соотношение (*), найдем искомую вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2:

$$P(B_1+B_2)=p_1q_2+q_1p_2.$$

50. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

51. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго — 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

52. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

53. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

54. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

55. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

56. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

57. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

58. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится пять очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

59. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на двух выпавших гранях появится одно очко, а на третьей грани — другое число очков; б) на двух выпавших гранях появится одинаковое число очков, а на третьей грани — другое число очков; в) на всех выпавших гранях появится разное число очков.

60. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?

Решение. Введем обозначения событий: A — ни на одной из выпавших граней не появится 6 очков; A_i — на выпавшей грани i-й кости ($i=1, 2, \ldots, n$) не появится 6 очков.

Интересующее нас событие A состоит в совмещении событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т. е. $A=A_1A_2 \ldots A_n$.

Вероятность того, что на любой выпавшей грани появится число очков, не равное шести, равна $P(A_i)=5/6$.

События A_i независимы в совокупности, поэтому применима теорема умножения:

$$P(A)=P(A_1A_2 \ldots P_n)=P(A_1)\cdot P(A_2) \ldots P(A_n)=(5/6)^n.$$

По условию, $(5/6)^n < 0,3$. Следовательно, $n \log(5/6) < \log 0,3$. Отсюда, учитывая, что $\log(5/6) < 0$, найдем: $n > 6,6$. Таким образом, искомое число игральных костей $n \geqslant 7$.

61. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

62. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены четыре точки. Найти вероятности следующих событий: а) все четыре точки попадут внутрь треугольника; б) одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадет на каждый «малый» сегмент. Предполагается, что вероятность попадания точки в фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

63. Отрезок разделен на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что на каждую из трех частей отрезка попадает по одной точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

64. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

Решение. Введем обозначения событий: A — первый взятый учебник имеет переплет, B — второй учебник имеет переплет. Вероятность того, что первый учебник имеет переплет, $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Вероятность того, что второй учебник имеет переплет, при условии, что первый взятый учебник был в переплете, т. е. условная вероятность события B, такова: $P_A(B) = 2/5$.

Искомая вероятность того, что оба учебника имеют переплет, по теореме умножения вероятностей событий равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 1/2 \cdot 2/5 = 0{,}2.$$

65. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

66. В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

Решение. Введем обозначения событий: A — первым отобран мужчина; B — вторым отобран мужчина, C — третьим отобран мужчина. Вероятность того, что первым будет отобран мужчина, $P(A) = 7/10$.

Вероятность того, что вторым отобран мужчина, при условии, что первым уже был отобран мужчина, т. е. условная вероятность события B следующая: $P_A(B) = 6/9 = 2/3$.

Вероятность того, что третьим будет отобран мужчина, при условии, что уже отобраны двое мужчин, т. е. условная вероятность события C такова: $P_{AB}(C) = 5/8$.

Искомая вероятность того, что все три отобранных лица окажутся мужчинами,

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = 7/10 \cdot 2/3 \cdot 5/8 = 7/24.$$

67. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

68. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий: а) последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5; б) извлеченные шары будут иметь номера 1, 4, 5 независимо от того, в какой последовательности они появились.

69. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

70. В мешочке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если кубики извлекаются: а) без возвращения; б) с возвращением (извлеченный кубик возвращается в мешочек).

71. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составили 5% обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья ($A\overline{B}$)—7,9%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья ($\overline{A}B$)—8,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья ($\overline{A}\overline{B}$)—78,2%. Найти связь между цветом глаз отца и сына.

Решение. По условию, $P(AB)=0{,}05$; $P(A\overline{B})=0{,}079$; $P(\overline{A}B)=0{,}089$; $P(\overline{A}\overline{B})=0{,}782$.

Найдем условную вероятность того, что сын темноглазый, если отец темноглазый:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(A\overline{B})}=\frac{0{,}05}{0{,}05+0{,}079}=0{,}39.$$

Найдем условную вероятность того, что сын светлоглазый, если отец темноглазый:

$$P_A(\overline{B})=1-P_A(B)=1-0{,}39=0{,}61.$$

Найдем условную вероятность того, что сын темноглазый, если отец светлоглазый:

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})}=\frac{0{,}089}{0{,}089+0{,}782}=0{,}102.$$

Найдем условную вероятность того, что сын светлоглазый, если отец светлоглазый:

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=1-P_{\overline{A}}(B)=1-0{,}102=0{,}898.$$

72. Найти вероятность $P(A)$ по данным вероятностям:

$$P(AB)=0{,}72, \quad P(A\overline{B})=0{,}18.$$

Решение. Событие A можно представить в виде суммы следующих двух несовместных событий: $A=AB+A\overline{B}$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий получим

$$P(A)=P(AB+A\overline{B})=P(A\overline{B})+P(AB)=0{,}72+0{,}18=0{,}9.$$

73. Найти вероятность $P(A\overline{B})$ по данным вероятностям: $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A+B)=c$.

Решение. Используя тождество $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$, найдем

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=a-P(AB). \qquad (*)$$

Из равенства $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ выразим $P(AB)$:

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=a+b-c. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), получим

$$P(A\overline{B})=a-(a+b-c)=c-b.$$

74. Найти вероятность $P(\overline{A}\overline{B})$ по данным вероятностям:

$$P(A)=a, \quad P(B)=b, \quad P(A+B)=c.$$

Решение. Используя тождество $P(\overline{B})=P(A\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B})$, найдем $P(\overline{A}\overline{B})$:

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{B})-P(A\overline{B})=(1-b)-P(A\overline{B}).$$

Подставив в последнее равенство $P(A\overline{B})=c-b$ (см. задачу 73), получим

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-b-(c-b)=1-c.$$

75. Наступление события AB необходимо влечет наступление события C. Доказать, что $P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1$.

Решение. По условию, наступление события AB влечет наступление события C, поэтому (см. задачу 48)

$$P(C)\geqslant P(AB). \qquad (*)$$

Используя тождества

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}), \quad P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B),$$
$$P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=1-P(\overline{A}\overline{B})$$

и учитывая неравенство (*), получим

$$P(A)+P(B)-P(C)\leqslant[P(AB)+P(A\overline{B})]+[P(AB)+P(\overline{A}B)]-$$
$$-P(AB)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=1-P(\overline{A}\overline{B})\leqslant 1.$$

Замечание. Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться, что и в частном случае, когда $C=AB$, справедливо неравенство

$$P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1.$$

76. Доказать, что

$$P_A(B)\geqslant 1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}.$$

Предполагается, что $P(A)>0$.

Решение. В силу замечания к задаче 75 справедливо неравенство

$$P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1. \qquad (*)$$

Воспользуемся тождествами

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B), \quad P(B)=1-P(\overline{B}). \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), получим

$$P(A)+1-P(\overline{B})-P(A)\cdot P_A(B)\leqslant 1,$$

или

$$P(A)\cdot P_A(B)\geqslant P(A)-P(\overline{B}).$$

Разделив обе части неравенства на положительное число $P(A)$, окончательно имеем

$$P_A(B)\geqslant 1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}.$$

77. Наступление события ABC необходимо влечет наступление события D. Доказать, что

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\leqslant 2.$$

Решение. По условию, наступление события ABC необходимо влечет наступление события D, следовательно (см. задачу 48), $P(D)\geqslant P(ABC)$. Таким образом, если будет доказано неравенство

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(ABC)\leqslant 2, \qquad (*)$$

то будет справедливо и неравенство, указанное в условии задачи.

Докажем неравенство (*). Воспользуемся тождествами:

$$\left.\begin{aligned}P(A)&=P(ABC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}\overline{C}),\\ P(B)&=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(AB\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C}),\\ P(C)&=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}\overline{B}C).\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Из трех событий A, B, C можно составить следующую полную группу «сложных событий», состоящих из появлений и непоявлений рассматриваемых трех событий:

ABC — появились все три события,

$\overline{A}BC$, $A\overline{B}C$, $AB\overline{C}$ — появились два события, а третье не появилось,

$A\overline{B}\overline{C}$, $\overline{A}B\overline{C}$, $\overline{A}\overline{B}C$ — появилось одно событие, а два других не появились,

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ — не появились все три события.

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице, поэтому

$$P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})+$$
$$+P(\bar{A}\bar{B}C)+P(\bar{A}B\bar{C})+P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1.$$

Отсюда

$$P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})=$$
$$=1-[P(\bar{A}\bar{B}C)+P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})]. \qquad (***)$$

Подставив (**) в (*) и используя (***), после упрощений получим

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(ABC)=$$
$$=2-[2P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)+P(A\bar{B}\bar{C})+P(A\bar{B}\bar{C})].$$

Учитывая, что каждое слагаемое в квадратной скобке неотрицательно, окончательно получим

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\leqslant 2.$$

78. Вывести теорему сложения вероятностей для трех совместных событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Предполагается, что для двух совместных событий теорема сложения уже доказана:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

Решение. Сведем сумму трех событий к сумме двух событий:

$$A+B+C=(A+B)+C.$$

Воспользуемся теоремой сложения вероятностей двух событий:

$$P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=$$
$$=P(A+B)+P(C)-P[(A+B)C]=$$
$$=P(A+B)+P(C)-P[(AC)+(BC)].$$

Применим теорему сложения вероятностей двух совместных событий дважды (для событий A и B, а также для событий AC и BC):

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-$$
$$-\{P(AC)+P(BC)-P[(AC)(BC)]\}.$$

Учитывая, что $P[(AC)(BC)]=P(ABC)$, окончательно получим

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

79*. Даны три попарно независимых события A, B, C, которые, однако, все три вместе произойти не могут. Предполагая, что все они имеют одну и ту же вероятность p, найти наибольшее возможное значение p.

Решение. Первый способ. По условию $P(ABC)=0$, $P(\bar{A})=P(\bar{B})=P(\bar{C})=1-p$, $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=p^2$, $P(AC)=p^2$, $P(BC)=p^2$.

Найдем вероятности каждого из следующих событий, образующих полную группу:

$$A\overline{B}\overline{C},\ B\overline{A}\overline{C},\ C\overline{A}\overline{B},\ AB\overline{C},\ AC\overline{B},\ BC\overline{A},\ ABC,\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

Для того чтобы найти вероятность события $AB\overline{C}$, представим событие AB в виде суммы двух несовместных событий: $AB = ABC + AB\overline{C}$. По теореме сложения,

$$P(AB) = P(ABC) + P(AB\overline{C}).$$

Отсюда

$$P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) = p^2.$$

Аналогично найдем

$$P(AC\overline{B}) = P(BC\overline{A}) = p^2.$$

Для того чтобы найти вероятность события $A\overline{B}\overline{C}$, представим событие $A\overline{B}$ в виде суммы двух несовместных событий: $A\overline{B} = A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}$. По теореме сложения,

$$P(A\overline{B}) = P(A\overline{B}C) + P(A\overline{B}\overline{C}).$$

Отсюда

$$P(A\overline{B}\overline{C}) = P(A\overline{B}) - P(A\overline{B}C) = p(1-p) - p^2 = p - 2p^2.$$

Аналогично найдем

$$P(B\overline{A}\overline{C}) = P(C\overline{A}\overline{B}) = p - 2p^2.$$

Найдем вероятность события $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$: для этого достаточно вычесть из единицы сумму вероятностей остальных событий, образующих полную группу:

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - [3(p-2p^2) + 3p^2] = 3p^2 - 3p + 1.$$

Учитывая, что любая вероятность заключена между нулем и единицей, потребуем, чтобы все найденные вероятности удовлетворяли этому условию:

$$\begin{cases} 0 \leqslant p^2 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant p - 2p^2 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant 3p^2 - 3p + 1 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Решив каждое из неравенств системы, найдем соответственно:

$$0 \leqslant p \leqslant 1, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1/2, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1.$$

Таким образом, наибольшее возможное значение p, которое удовлетворяет всем трем неравенствам системы (*), равно 1/2.

Второй способ. Введем обозначение $P(A+B+C) = k$. Пользуясь теоремой сложения для трех совместных событий и учитывая, что $P(A) = P(B) = P(C) = p$, $P(AB) = P(AC) = P(BC) = p^2$, $P(ABC) = 0$, получим

$$k = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 3p - 3p^2.$$

Решив это уравнение относительно p, получим

$$p = (1 \pm \sqrt{1 - 4k/3})/2.$$

Если $p = (1 - \sqrt{1 - 4k/3})/2$, то p достигает максимального значения $p = 1/2$ (при $k = 3/4$).

Если $p=(1+\sqrt{1-4k/3})/2$, то, на первый взгляд, $p \geqslant 1/2$. Покажем, что допущение $p > 1/2$ приводит к противоречию. Действительно, $p > 1/2$ при условии, что $1-4k/3 > 0$, или, так как $k=3p-3p^2$, при условии, что $p^2-p+1/4 > 0$. Отсюда

$$p=1/2 \pm \sqrt{1/4-1/4}=1/2.$$

Итак, наибольшее возможное значение $p=1/2$.

§ 2. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, причем $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$, ..., $P(A_n)=p_n$; пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.

Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P(A)=1-q_1q_2 \ldots q_n.$$

В частности, если все n событий имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A)=1-q_1q_2 \ldots q_n.$$

80. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}15$; $p_3=0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Решение. Элементы включены последовательно, поэтому тока в цепи не будет (событие A), если откажет хотя бы один из элементов.

Искомая вероятность

$$P(A)=1-q_1q_2q_3=1-(1-0{,}1)(1-0{,}15)(1-0{,}2)=0{,}388.$$

81. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

82. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

83. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины.

Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

84. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0,5. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причем каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым получает приз. Найти вероятность получения приза спортсменами.

Решение. Для вручения приза достаточно, чтобы хотя бы одна из четырех попыток была успешной. Вероятность успешной попытки $p=0,5$, а неуспешной $q=1-0,5=0,5$. Искомая вероятность

$$P=1-q^4=1-0,5^4=0,9375.$$

85. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получат приз.

86. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Решение. Вероятность попадания в мишень хотя бы при одном из трех выстрелов (событие A) равна

$$P(A)=1-q^3,$$

где q — вероятность промаха.

По условию, $P(A)=0,875$. Следовательно,

$$0,875=1-q^3, \text{ или } q^3=1-0,875=0,125.$$

Отсюда $q=\sqrt[3]{0,125}=0,5$.

Искомая вероятность

$$p=1-q=1-0,5=0,5.$$

87. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

88. Многократно измеряют некоторую физическую величину. Вероятность того, что при считывании показаний прибора допущена ошибка, равна p. Найти наименьшее число измерений, которое необходимо произвести, чтобы с вероятностью $P > \alpha$ можно было ожидать, что хотя бы один результат измерений окажется неверным.

§ 3. Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A), \qquad (*)$$

где $P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$.

Равенство (*) называют *формулой полной вероятности*.

89. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение. Обозначим через A событие — извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: B_1 — белых шаров нет, B_2 — один белый шар, B_3 — два белых шара.

Поскольку всего имеется три гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице (так как они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна 1/3, т. е. $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне не было белых шаров, $P_{B_1}(A)=1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне был один белый шар, $P_{B_2}(A)=2/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне было два белых шара $P_{B_3}(A)=3/3=1$.

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+$$
$$+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=1/3\cdot 1/3+1/3\cdot 2/3+1/3\cdot 1=2/3.$$

90. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

91. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

92. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

93. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей — на заводе № 2 и 18 деталей — на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

94. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

95. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

96. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

§ 4. Формула Бейеса

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

97. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Обозначим через A событие — деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотезы): B_1 — деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(B_1)=2/3$; B_2 — деталь произведена вторым автоматом, причем $P(B_2)=1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P_{B_1}(A)=0{,}6$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, $P_{B_2}(A)=0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=2/3\cdot 0{,}6+1/3\cdot 0{,}84=0{,}68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Бейеса равна

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{2/3\cdot 0{,}6}{0{,}68}=\frac{10}{17}.$$

98. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

99. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

100. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05; для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица. (Предполагается, что оба перфоратора были исправны.)

101. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% — с заболеванием L, 20% — с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

102. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму — 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым — 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

103. Событие A может появиться при условии появления лишь одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий. После появления события A были переоценены вероятности гипотез, т. е. были найдены условные вероятности $P_A(B_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = 1.$$

104. Событие A может появиться при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3, образующих полную группу событий. После появления события A были переоценены вероятности гипотез, т. е. были найдены условные вероятности этих гипотез, причем оказалось, что $P_A(B_1) = 0{,}6$ и $P_A(B_2) = 0{,}3$. Чему равна условная вероятность $P_A(B_3)$ гипотезы B_3?

105. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

Решение. Сбозначим через A событие — в каждом из двух испытаний (с возвращением) была извлечена стандартная деталь.

Можно сделать три предположения (гипотезы): B_1 — детали извлекались из первой партии; B_2 — детали извлекались из второй партии; B_3 — детали извлекались из третьей партии.

Детали извлекались из наудачу взятой партии, поэтому вероятности гипотез одинаковы:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3.$$

Найдем условную вероятность $P_{B_1}(A)$, т. е. вероятность того, что из первой партии будут последовательно извлечены две стандартные детали. Это событие достоверно, так как в первой партии все детали стандартны, поэтому

$$P_{B_1}(A) = 1.$$

Найдем условную вероятность $P_{B_2}(A)$, т. е. вероятность того, что из второй партии будут последовательно извлечены (с возвращением) две стандартные детали:

$$P_{B_2}(A) = 15/20 \cdot 15/20 = 9/16.$$

Найдем условную вероятность $P_{B_3}(A)$, т. е. вероятность того, что из третьей партии будут последовательно извлечены (с возвращением) две стандартные детали:

$$P_{B_3}(A) = 10/20 \cdot 10/20 = 1/4.$$

Искомая вероятность того, что обе извлеченные стандартные детали взяты из третьей партии, по формуле Бейеса равна

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} =$$

$$= \frac{1/3 \cdot 1/4}{1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 9/16 + 1/3 \cdot 1/4} = 4/29.$$

106. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}5$.

Решение. Обозначим через A событие — два орудия попали в цель. Сделаем два предположения (гипотезы): B_1 — первое орудие попало в цель; B_2 — первое орудие не попало в цель.

По условию, $P(B_1) = 0{,}4$; следовательно (событие B_2 противоположно событию B_1),

$$P(B_2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Найдем условную вероятность $P_{B_1}(A)$, т. е. вероятность того, что в цель попало два снаряда, причем один из них послан первым орудием и, следовательно, второй — либо вторым орудием (при этом третье орудие дало промах), либо третьим (при этом второе орудие дало промах). Эти два события несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P_{B_1}(A)=p_2\cdot q_3+p_3\cdot q_2=0,3\cdot0,5+0,5\cdot0,7=0,5.$$

Найдем условную вероятность $P_{B_2}(A)$, т. е. вероятность того, что в цель попало два снаряда, причем первое орудие дало промах. Другими словами, найдем вероятность того, что второе и третье орудия попали в цель. Эти два события независимы, поэтому применима теорема умножения:

$$P_{B_2}(A)=p_2\cdot p_3=0,3\cdot0,5=0,15.$$

Искомая вероятность того, что первое орудие дало попадание, по формуле Бейеса равна

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}=$$
$$=0,4\cdot0,5/(0,4\cdot0,5+0,6\cdot0,15)=20/29.$$

107. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6, 0,5 и 0,4.

108. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4 и 0,3.

Решение. Обозначим через A событие — отказали два элемента. Можно сделать следующие предположения (гипотезы):

B_1 — отказали первый и второй элементы, а третий элемент исправен, причем (поскольку элементы работают независимо, применима теорема умножения)

$$P(B_1)=p_1\cdot p_2\cdot q_3=0,2\cdot0,4\cdot0,7=0,056;$$

B_2 — отказали первый и третий элементы, а второй элемент исправен, причем

$$P(B_2)=p_1\cdot p_3\cdot q_2=0,2\cdot0,3\cdot0,6=0,036;$$

B_3 — отказали второй и третий элементы, а первый — исправен, причем

$$P(B_3)=p_2\cdot p_3\cdot q_1=0,4\cdot0,3\cdot0,8=0,096;$$

B_4 — отказал только один элемент; B_5 — отказали все три элемента; B_6 — ни один из элементов не отказал.

Вероятности последних трех гипотез не вычислены, так как при этих гипотезах событие A (отказали два элемента) невозможно и значит условные вероятности $P_{B_4}(A)$, $P_{B_5}(A)$ и $P_{B_6}(A)$ равны нулю, следовательно, равны нулю и произведения $P(B_4)\cdot P_{B_4}(A)$, $P(B_5)\times$ $\times P_{B_5}(A)$ и $P(B_6)\cdot P_{B_6}(A)$ [см. ниже соотношение (*)] при любых значениях вероятностей гипотез B_4, B_5 и B_6.

Поскольку при гипотезах B_1, B_2, B_3 событие A достоверно, то соответствующие условные вероятности равны единице:

$$P_{B_1}(A)=P_{B_2}(A)=P_{B_3}(A)=1.$$

По формуле полной вероятности, вероятность того, что отказали два элемента,

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \\ + P(B_4) \cdot P_{B_4}(A) + P(B_5) \cdot P_{B_5}(A) + P(B_6) \cdot P_{B_6}(A) = \\ = 0{,}056 \cdot 1 + 0{,}036 \cdot 1 + 0{,}096 \cdot 1 = 0{,}188. \qquad (*)$$

По формуле Бейеса, искомая вероятность того, что отказали первый и второй элементы,

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}056}{0{,}188} = 0{,}3.$$

109*. Две из четырех независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и вторая лампы, если вероятности отказа первой, второй, третьей и четвертой ламп соответственно равны: $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}3$ и $p_4 = 0{,}4$.

Глава третья

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 1. Формула Бернулли

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* A. В § 1—4 этой главы рассматриваются независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события одинакова.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, — находят соответственно по формулам:

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$
$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$
$$P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$$
$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$$

110. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение. Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша $p=1/2$; следовательно, вероятность проигрыша q также равна 1/2. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли.

Найдем вероятность того, что две партии из четырех будут выиграны:

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^2=4\cdot 3/(1\cdot 2)\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)^2=6/16.$$

Найдем вероятность того, что будут выиграны три партии из шести:

$$P_6(3)=C_6^3p^3q^3=6\cdot 5\cdot 4/(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1/2)^3\cdot(1/2)^3=5/16.$$

Так как $P_4(2)>P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

111. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

112. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

113. а) Найти вероятность того, что событие A появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4;

б) событие B появится в случае, если событие A наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события B, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8.

114. Устройство состоит из трех независимо работающих основных элементов. Устройство отказывает, если откажет хотя бы один элемент. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,1. Найти вероятность безотказной работы устройства за время t, если: а) работают только основные элементы; б) включен один резервный элемент; в) включены два резервных элемента. Предполагается, что резервные элементы работают в том же режиме, что и основные, вероятность отказа каждого резервного элемента также равна 0,1 и устройство отказывает, если работает менее трех элементов.

115. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

116. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две—правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

117. На отрезок AB длины a наудачу брошено пять точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем x, а три—на расстоянии, большем x. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

118. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошено восемь точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

§ 2. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Локальная теорема Лапласа. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей [функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$].

Интегральная теорема Лапласа. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна*

$$P(k_1;\ k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Здесь

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-(z^2/2)}\,dz$$

— функция Лапласа,

$$x'=(k_1-np)/\sqrt{npq},\quad x''=(k_2-np)/\sqrt{npq}.$$

Таблица функции Лапласа для положительных значений x ($0\leqslant x\leqslant 5$) приведена в приложении 2; для значений $x>5$ полагают $\Phi(x)=0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная $[\Phi(-x)=-\Phi(x)]$.

119. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение. По условию, $n=243$; $k=70$; $p=0{,}25$; $q=0{,}75$. Так как $n=243$ — достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x),$$

где $x=(k-np)/\sqrt{npq}$.

Найдем значение x:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-243\cdot 0{,}25}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}=\frac{9{,}25}{6{,}75}=1{,}37.$$

По таблице приложения 1 найдем $\varphi(1{,}37)=0{,}1561$. Искомая вероятность

$$P_{243}(70)=1/6{,}75\cdot 0{,}1561=0{,}0231.$$

120. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{nqp}}\,\varphi(x).$$

Вычислим x:

$$x=\frac{p-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1400-2400\cdot 0{,}6}{\sqrt{2400\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}=-\frac{40}{24}=-1{,}67.$$

Функция $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ — четная, поэтому $\varphi(-1{,}67)=\varphi(1{,}67)$.

По таблице приложения 1 найдем $\varphi(1{,}67)=0{,}0989$.

Искомая вероятность

$$P_{2400}(1400)=1/24\cdot 0{,}0989=0{,}0041.$$

121. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

122. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

123. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно N раз.

124. Монета брошена $2N$ раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет на $2m$ раз больше, чем надпись.

125. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p=0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1,\ k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа,

$$x'=(k_1-np)/\sqrt{npq},\quad x''=(k_2-np)/\sqrt{npq}.$$

а) По условию, $n=100$; $p=0{,}8$; $q=0{,}2$; $k_1=75$; $k_2=90$. Вычислим x' и x'':

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-1{,}25;$$

$$x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=2{,}5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т. е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, получим

$$P_{100}(75;\ 90)=\Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25).$$

По таблице приложения 2 найдем:

$$\Phi(2{,}5)=0{,}4938;\quad \Phi(1{,}25)=0{,}3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{100}(75;\ 90)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882.$$

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76, ..., либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $k_1=75$, $k_2=100$. Тогда

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-1{,}25;$$

$$x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=5.$$

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(1{,}25)=0{,}3944$; $\Phi(5)=0{,}5$.

Искомая вероятность

$$P_{100}(75;\ 100)=\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(5)+\Phi(1{,}25)=$$
$$=0{,}5+0{,}3944=0{,}8944.$$

в) События — «A появилось не менее 75 раз» и «A появилось не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность

$$P_{100}(0;\ 74)=1-P_{100}(75;\ 100)=1-0{,}8944=0{,}1056.$$

126. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

127. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

128. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что число выпадений «герба» будет заключено между числами $N-\sqrt{2N}/2$ и $N+\sqrt{2N}/2$.

129. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

Решение. По условию, $p=0{,}8$; $q=0{,}2$; $k_1=75$; $k_2=n$; $P_n=(75,\ n)=0{,}9$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1;\ n)=\Phi(x'')-\Phi(x')=\Phi\left[\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right]-\Phi\left[\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right].$$

Подставляя данные задачи, получим

$$0{,}9=\Phi\left[\frac{n-0{,}8n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right]-\Phi\left[\frac{75-0{,}8n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right],$$

или

$$0{,}9=\Phi\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]-\Phi\left[\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right].$$

Очевидно, число испытаний $n>75$, поэтому $\sqrt{n}/2>\sqrt{75}/2\simeq 4{,}33$. Поскольку функция Лапласа — возрастающая и $\Phi(4)\simeq 0{,}5$, то можно положить $\Phi(\sqrt{n}/2)=0{,}5$. Следовательно,

$$0{,}9=0{,}5-\Phi\left[\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right].$$

Таким образом,

$$\Phi\left[\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right]=-0{,}4. \qquad (*)$$

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(1{,}28)=0{,}4$. Отсюда и из соотношения (*), учитывая, что функция Лапласа нечетная, получим

$$(75-0{,}8n)/(0{,}4\sqrt{n})=-1{,}28.$$

Решив это уравнение, как квадратное относительно $\sqrt{n}$, получим $\sqrt{n}=10$. Следовательно, искомое число испытаний $n=100$.

130. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

§ 3. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{n/pq}$:

$$p\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

131. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Решение. По условию, $n=625$; $p=0,8$; $q=0,2$; $\varepsilon=0,04$. Требуется найти вероятность $P(|m/625-0,8| \leqslant 0,04)$. Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Имеем

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0,8\right| \leqslant 0,04\right) = 2\Phi\left(0,04\sqrt{\frac{625}{0,8\cdot 0,2}}\right) = 2\Phi\,(2,5).$$

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(2,5)=0,4938$. Следовательно, $2\Phi(2,5)=2\cdot 0,4938=0,9876$. Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9876.

132. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

133. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

134. Французский ученый Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз.

Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности появления «герба» по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.

135. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Решение. По условию, $p=0{,}5$; $q=0{,}5$; $\varepsilon=0{,}02$;

$$P(|m/n-0{,}5|\leqslant 0{,}02)=0{,}7698.$$

Воспользуемся формулой

$$P(|m/n-p|\leqslant\varepsilon)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В силу условия

$$2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=0{,}7698,$$

или $\Phi(0{,}04\sqrt{n})=0{,}3849$.

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(1{,}2)=0{,}3849$. Следовательно,

$$0{,}04\sqrt{n}=1{,}2,\quad \text{или}\quad \sqrt{n}=30.$$

Таким образом, искомое число испытаний $n=900$.

136. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы вероятность неравенства

$$|m/n-1/6|\leqslant 0{,}01$$

была не меньше чем вероятность противоположного неравенства, где m — число появлений одного очка в n бросаниях игральной кости?

Решение. Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

По условию, $p=1/6$, $q=5/6$, $\varepsilon=0{,}01$. Вероятность осуществления неравенства, противоположного заданному, т. е. неравенства $|m/n-1/6|>0{,}01$, равна

$$1-2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Согласно условию должно иметь место неравенство

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geqslant 1-2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

или

$$4\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geqslant 1.$$

Отсюда

$$\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geqslant 0{,}25. \qquad (*)$$

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(0{,}67) = 0{,}2486$; $\Phi(0{,}68) = 0{,}2517$. Выполнив линейную интерполяцию, получим $\Phi(0{,}6745) = 0{,}25$.

Учитывая соотношение (*) и принимая во внимание, что функция $\Phi(x)$ — возрастающая, имеем

$$\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \geqslant 0{,}6745, \text{ или } 0{,}01 \sqrt{\frac{n}{1/6 \cdot 5/6}} = 0{,}6745.$$

Отсюда искомое число бросаний монеты $n \geqslant 632$.

137. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний n, при котором с вероятностью 0,99 можно ожидать, что относительная частота появлений события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

138. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01?

139. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,8 не превысила ε.

Решение. По условию, $n = 400$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Следовательно,

$$2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{400/(0{,}8 \cdot 0{,}2)}\right) = 0{,}99 \quad \text{или} \quad \Phi(50\varepsilon) = 0{,}495.$$

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(2{,}57) = 0{,}495$, значит $50\varepsilon = 2{,}57$. Отсюда искомое число $\varepsilon = 0{,}05$.

140. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила ε.

141. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна 0,75. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,98 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,75 не превысила ε.

142. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей среди проверенных.

Решение. По условию, $n=900$, $p=0,9$, $q=0,1$. Следовательно,

$$2\Phi(\varepsilon\sqrt{900/(0,9\cdot 0,1)})=0,95, \text{ или } \Phi(100\varepsilon)=0,475.$$

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(1,96)=0,475$, значит $100\varepsilon=1,96$. Отсюда $\varepsilon\approx 0,02$.

Таким образом, с вероятностью 0,95 отклонение относительной частоты числа стандартных деталей от вероятности 0,9 удовлетворяет неравенству

$$|m/900-0,9|\leqslant 0,02, \quad \text{или} \quad 0,88\leqslant m/900\leqslant 0,92.$$

Отсюда искомое число m стандартных деталей среди 900 проверенных с вероятностью 0,95 заключено в следующих границах: $792\leqslant m\leqslant 828$.

143. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

144. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

§ 4. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют *наивероятнейшим*, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np-q\leqslant k_0 < np+p,$$

причем:

а) если число $np-q$ — дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число $np-q$ — целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно: k_0 и k_0+1;

в) если число np — целое, то наивероятнейшее число $k_0=np$.

145. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию, $n=15$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$. Найдем наивероятнейшее число k_0 из двойного неравенства

$$np-q \leqslant k_0 < np+p.$$

Подставив данные задачи, получим

$$15 \cdot 0{,}9-0{,}1 \leqslant k_0 < 15 \cdot 0{,}9+0{,}9, \text{ или } 13{,}5 \leqslant k_0 < 14{,}4.$$

Так как k_0—целое число и поскольку между числами 13,4 и 14,4 заключено одно целое число, а именно 14, то искомое наивероятнейшее число $k_0=14$.

146. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

147. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

Решение. По условию, $n=24$; $p=0{,}6$; $q=0{,}4$. Найдем наивероятнейшее число годных к продаже образцов товаров из двойного неравенства $np-q \leqslant k_0 < np+p$. Подставляя данные задачи, получим

$$24 \cdot 0{,}6-0{,}4 \leqslant k_0 < 24 \cdot 0{,}6+0{,}6, \quad \text{или} \quad 14 \leqslant k_0 < 15.$$

Так как $np-q=14$—целое число, то наивероятнейших чисел два: $k_0=14$ и $k_0+1=15$.

148. Найти наивероятнейшее число правильно набитых перфораторщицей перфокарт среди 19 перфокарт, если вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,1.

149. Два равносильных противника играют в шахматы. Найти наивероятнейшее число выигрышей для любого шахматиста, если будет сыграно $2N$ результативных (без ничьих) партий.

Решение. Известно, что если произведение числа испытаний n на вероятность p появления события в одном испытании есть целое число, то наивероятнейшее число

$$k_0=np.$$

В рассматриваемой задаче число испытаний n равно числу сыгранных партий $2N$; вероятность появления события равна вероятности выигрыша в одной партии, т. е. $p=1/2$ (по условию противники равносильны).

Поскольку произведение $np=2N \cdot 1/2=N$—целое число, то искомое наивероятнейшее число k_0 выигранных партий равно N.

150. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, а для второго — 0,4. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.

Решение. Промахи стрелков есть независимые события, поэтому применима теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность того, что оба стрелка при одном залпе промахнутся, $p = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

Поскольку произведение $np = 25 \cdot 0{,}08 = 2$ — целое число, то наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания, $k_0 = np = 2$.

151. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго — 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

152. Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?

Решение. По условию, $k_0 = 25$; $p = 0{,}4$; $q = 0{,}6$. Воспользуемся двойным неравенством

$$np - q \leqslant k_0 < np + p.$$

Подставляя данные задачи, получим систему неравенств для определения неизвестного числа:

$$0{,}4n - 0{,}6 \leqslant 25, \quad 0{,}4n + 0{,}4 > 25.$$

Из первого неравенства системы найдем $n \leqslant 25{,}6/0{,}4 = 64$.
Из второго неравенства системы имеем $n > 24{,}6/0{,}4 = 61{,}5$.

Итак, искомое число испытаний должно удовлетворять двойному неравенству $62 \leqslant n \leqslant 64$.

153. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях будет равно 30.

154. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

155. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

Решение. По условию, $n=49$, $k_0=30$. Воспользуемся двойным неравенством $np-q \leqslant k_0 < np+p$. Подставляя данные задачи, получим систему неравенств для определения неизвестной вероятности p:

$$49p+p > 30, \quad 49p-(1-p) \leqslant 30.$$

Из первого неравенства системы найдем $p > 0{,}6$. Из второго неравенства системы найдем $p \leqslant 0{,}62$.

Итак, искомая вероятность должна удовлетворять двойному неравенству $0{,}6 < p \leqslant 0{,}62$.

156. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

157. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

Решение. По условию, $n=6$; $p=0{,}3$; $q=0{,}7$. а) Найдем наивероятнейшее число попаданий по формуле

$$np-q \leqslant k_0 < np+p.$$

Подставив данные задачи, получим

$$6 \cdot 0{,}3-0{,}7 \leqslant k_0 < 6 \cdot 0{,}3+0{,}3 \quad \text{или} \quad 1{,}1 \leqslant k_0 < 2{,}1.$$

Отсюда $k_0=2$.

б) Найдем вероятность наивероятнейшего числа попаданий по формуле Бернулли

$$P_6(2)=C_6^2 p^2 q^4=\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^4=0{,}324.$$

в) Найдем вероятность того, что объект будет разрушен. По условию, для этого достаточно, чтобы было или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 попаданий. Эти события несовместны, поэтому вероятность разрушения объекта равна сумме вероятностей этих событий:

$$P=P_6(2)+P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6).$$

Однако проще сначала найти вероятность Q противоположного события (ни одного попадания или одно попадание):

$$Q=P_6(0)+P_6(1)=q^6+C_6^1 pq^5=0{,}7^6+6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^5=0{,}42.$$

Искомая вероятность того, что объект будет разрушен,

$$P=1-Q=1-0{,}42=0{,}58.$$

158. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы четыре элемента.

§ 5. Производящая функция

В предыдущих параграфах этой главы рассматривались испытания с одинаковыми вероятностями появления события; рассмотрим испытания, в которых вероятности появления события различны.

Пусть производится n независимых испытаний, причем в первом испытании вероятность появления события A равна p_1, во втором — p_2, ..., в n-м испытании — p_n; вероятности непоявления события A соответственно равны $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $P_n(k)$ — вероятность появления события A в n испытаниях ровно k раз.

Производящей функцией вероятностей $P_n(k)$ называют функцию, определяемую равенством

$$\varphi_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) \ldots (p_n z + q_n).$$

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях, в первом из которых вероятность появления события A равна p_1, во втором p_2 и т. д., событие A появится ровно k раз, равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции по степеням z. Например, если $n=2$, то

$$\varphi_2(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) = p_1 p_2 z^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1) z + q_1 q_2.$$

Здесь коэффициент $p_1 p_2$ при z^2 равен вероятности $P_2(2)$ того, что событие A появится ровно два раза в двух испытаниях; коэффициент $p_1 q_2 + p_2 q_1$ при z^1 равен вероятности $P_2(1)$ того, что событие A появится ровно один раз; коэффициент при z^0, т. е. свободный член $q_1 q_2$ равен вероятности $P_2(0)$ того, что событие A не появится ни одного раза.

Заметим, что если в различных испытаниях появляются различные события (в первом испытании событие A_1, во втором — событие A_2 и т. д.), то изменяется лишь истолкование коэффициентов при различных степенях z. Например, в приведенном выше разложении коэффициент $p_1 p_2$ определяет вероятность появления двух событий A_1 и A_2.

159. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы элементов (за время t) соответственно равны: $p_1=0,7$; $p_2=0,8$; $p_3=0,9$. Найти вероятности того, что за время t будут работать безотказно: а) все элементы; б) два элемента; в) один элемент; г) ни один из элементов.

Решение. Вероятности безотказной работы элементов соответственно равны: $p_1=0,7$; $p_2=0,8$; $p_3=0,9$, поэтому вероятности того, что элементы откажут, $q_1=0,3$; $q_2=0,2$; $q_3=0,1$.

Составим производящую функцию:

$$\varphi_3(z) = (p_1z + q_1)(p_2z + q_2)(p_3z + q_3) =$$
$$= (0,7z + 0,3)(0,8z + 0,2)(0,9z + 0,1) =$$
$$= 0,504z^3 + 0,398z^2 + 0,092z + 0,006.$$

а) Вероятность того, что три элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при z^3: $P_3(3) = 0,504$.

б) Вероятность того, что два элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при z^2: $P_3(2) = 0,398$.

в) Вероятность того, что один элемент будет работать безотказно, равна коэффициенту при z^1: $P_3(1) = 0,092$.

г) Вероятность того, что ни один из элементов не будет работать безотказно, равна свободному члену: $P_3(0) = 0,006$.

Контроль: $0,504 + 0,398 + 0,092 + 0,006 = 1$.

160. Из двух орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго — 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) два попадания в цель; б) одно попадание; в) ни одного попадания; г) не менее одного попадания.

161. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго — 0,85, для третьего — 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

162. Четыре элемента вычислительного устройства работают независимо. Вероятность отказа первого элемента за время t равна 0,2, второго — 0,25, третьего — 0,3, четвертого — 0,4. Найти вероятность того, что за время t откажут: а) 4 элемента; б) 3 элемента; в) 2 элемента; г) 1 элемент; д) ни один элемент; е) не более двух элементов.

163. Две батареи по 3 орудия каждая производят залп по цели. Цель будет поражена, если каждая из батарей даст не менее двух попаданий. Вероятности попадания в цель орудиями первой батареи равны 0,4; 0,5; 0,6, второй — 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность поражения цели при одном залпе из двух батарей.

Часть вторая

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Глава четвертая

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Законы биномиальный и Пуассона

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа (т. е. между двумя соседними возможными значениями нет возможных значений), которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Другими словами, возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (в последнем случае множество всех возможных значений называют счетным).

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая—вероятности p_i:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$.

Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $p_1+p_2+\ldots$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть также задан аналитически (в виде формулы)

$$P(X=x_i)=\varphi(x_i)$$

или с помощью функции распределения (см. гл. VI, § 1).

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1; p_1)$, $M_2(x_2; p_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n; p_n)$ (x_i—возможные значения X, p_i—соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X—числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p; вероятность возможного значения $X=k$ (числа k появлений события) вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$$

где k — число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda = np$ (среднее число появлений события в n испытаниях), и говорят, что случайная величина распределена по *закону Пуассона*.

164. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.

Решение. Построим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат — соответствующие вероятности p_i. Построим точки

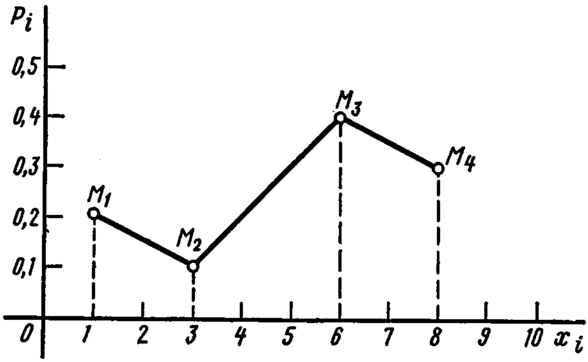

Рис. 5

$M_1(1;\ 0,2)$, $M_2(3;\ 0,1)$, $M_3(6;\ 0,4)$ и $M_4(8;\ 0,3)$. Соединив эти точки отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения (рис. 5).

165. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

а) X	2	4	5	6	б) X	10	15	20
p	0,3	0,1	0,2	0,4	p	0,1	0,7	0,2

Построить многоугольник распределения.

166. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Р е ш е н и е. Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения: $x_1=0$ (ни один из элементов устройства не отказал), $x_2=1$ (отказал один элемент), $x_3=2$ (отказали два элемента) и $x_4=3$ (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, $n=3$, $p=0,1$ (следовательно, $q=1-0,1=0,9$), получим:

$$P_3(0)=q^3=0,9^3=0,729;\quad P_3(1)=C_3^1pq^2=3\cdot0,1\cdot0,9^2=0,243;$$
$$P_3(2)=C_3^2p^2q=3\cdot0,1^2\cdot0,9=0,027;\quad P_3(3)=p^3=0,1^3=0,001.$$

К о н т р о л ь: $0,729+0,243+0,027+0,001=1$.

Напишем искомый биномиальный закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

167. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

168. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X — числа появлений «герба» при двух бросаниях монеты.

169. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X — числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

170. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных *).

Р е ш е н и е. Случайная величина X — число стандартных деталей среди отобранных деталей — имеет следующие возможные значения: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$. Найдем вероятности возможных значений X по формуле (см. задачу **17**, гл. 1, § 1)

$$P(X=k)=C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}/C_N^m$$

(N — число деталей в партии, n — число стандартных деталей в партии, m — число отобранных деталей, k — число стандартных деталей

---

*) Рассматриваемый закон называют *гипергеометрическим*. См.: Г м у р м а н В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1977, гл. VI, § 8.

среди отобранных), находим:

$$P(X=0)=\frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9/(1\cdot 2)}=\frac{1}{45};$$

$$P(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 2}{45}=\frac{16}{45};$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 7/(1\cdot 2)}{45}=\frac{28}{45}.$$

Составим искомый закон распределения:

X	0	1	2
p	1/45	16/45	28/45

Контроль: $1/45+16/45+28/45=1$.

171. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — числа стандартных деталей среди отобранных.

172. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется: а) составить закон распределения случайной дискретной величины X — числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту; б) найти наивероятнейшее число k_0 заданных студенту дополнительных вопросов.

Решение. а) Дискретная случайная величина X — число заданных дополнительных вопросов — имеет следующие возможные значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, ..., $x_k=k$, ... Найдем вероятности этих возможных значений.

Величина X примет возможное значение $x_1=1$ (экзаменатор задаст только один вопрос), если студент не ответит на первый вопрос. Вероятность этого возможного значения равна $1-0,9=0,1$. Таким образом, $P(X=1)=0,1$.

Величина X примет возможное значение $x_2=2$ (экзаменатор задаст только два вопроса), если студент ответит на первый вопрос (вероятность этого события равна 0,9) и не ответит на второй (вероятность этого события равна 0,1). Таким образом, $P(X=2)=0,9\cdot 0,1=0,09$.

Аналогично найдем

$$P(X=3)=0,9^2\cdot 0,1=0,081, \ \ldots, \ P(X=k)=0,9^{k-1}\cdot 0,1, \ \ldots$$

Напишем искомый закон распределения:

X	1	2	3	...	k	...
p	0,1	0,09	0,081	...	$0,9^{k-1}\cdot 0,1$	...

б) Наивероятнейшее число k_0 заданных вопросов (наивероятнейшее возможное значение X), т. е. число заданных преподавателем вопросов, которое имеет наибольшую вероятность, как следует из закона распределения, равно единице.

173. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X—числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

174. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3, вторым — 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y—числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

Решение. Пусть события A_i и B_i—попадание в цель соответственно первым и вторым орудием при i-м выстреле; $\bar{A}_i$ и $\bar{B}_i$—промахи.

Найдем закон распределения случайной величины X—числа израсходованных первым орудием снарядов. Первое орудие израсходует один снаряд ($X=1$), если оно попадет в цель при первом выстреле, или оно промахнется, а второе орудие при первом выстреле попадет в цель:

$$p_1=P(X=1)=P(A_1+\bar{A}_1B_1)=P(A_1)+P(\bar{A}_1B_1)=$$
$$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(B_1)=0,3+0,7\cdot 0,7=0,79.$$

Первое орудие израсходует два снаряда, если оба орудия при первом выстреле промахнутся, а при втором выстреле первое орудие попадет в цель, или если оно промахнется, а второе орудие при втором выстреле попадет в цель:

$$p_2=P(X=2)=P(\bar{A}_1\bar{B}_1A_2+\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2B_2)=$$
$$=0,7\cdot 0,3\cdot 0,3+0,7\cdot 0,3\cdot 0,7\cdot 0,7=0,21\ (0,3+0,49)=0,79\cdot 0,21.$$

Аналогично получим

$$P(X=k)=0,79\cdot 0,21^{k-1}.$$

Искомый закон распределения дискретной случайной величины X—числа снарядов, израсходованных первым орудием:

X	1	2	3	...	k	...
p	0,79	$0,79\cdot 0,21$	$0,79\cdot 0,21^2$	...	$0,79\cdot 0,21^{k-1}$	...

Контроль: $\sum p_i=0,79/(1-0,21)=0,79/0,79=1.$

Найдем закон распределения дискретной случайной величины Y—числа снарядов, израсходованных вторым орудием.

Если первое орудие при первом выстреле попадет в цель, то стрельба из второго орудия не будет произведена:

$$p_1=P(Y=0)=P(A_1)=0,3.$$

Второе орудие израсходует лишь один снаряд, если при первом выстреле оно попадет в цель, или если оно промахнется, а первое орудие попадет в цель при втором выстреле:

$$p_2 = P(Y=1) = P(\bar{A}_1 B_1 + \bar{A}_1 \bar{B}_1 A_2) = 0{,}7\cdot 0{,}7 + 0{,}7\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3 = 0{,}553.$$

Вероятность того, что второе орудие израсходует два снаряда,

$$p_3 = P(Y=2) = P(\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{A}_2 B_2 + \bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{A}_2 \bar{B}_2 A_3).$$

Выполнив выкладки, найдем $p_3 = 0{,}553\cdot 0{,}21$.

Аналогично получим

$$P(Y=k) = 0{,}553\cdot 0{,}21^{k-1}.$$

Искомый закон распределения дискретной случайной величины Y — числа снарядов, израсходованных вторым орудием:

Y	0	1	2	...	k	...
p	0,3	0,553	$0{,}553\cdot 0{,}21$	...	$0{,}553\cdot 0{,}21^{k-1}$	...

Контроль: $\sum p_i = 0{,}3 + (0{,}553/1 - 0{,}21) = 0{,}3 + (0{,}553/0{,}79) = 0{,}3 + 0{,}7 = 1$.

175. Два бомбардировщика поочередно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым бомбардировщиком равна 0,7, вторым — 0,8. Вначале сбрасывает бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения дискретной случайной величины X — числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками (т. е. ограничиться возможными значениями X, равными 1, 2, 3 и 4).

176. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение. По условию, $n = 100\,000$, $p = 0{,}0001$, $k = 5$. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k.$$

Найдем λ:

$$\lambda = np = 100\,000\cdot 0{,}0001 = 10.$$

Искомая вероятность

$$P_{100\,000}(5) = 10^5\cdot e^{-10}/5 = 10^5\cdot 0{,}000045/120 = 0{,}0375$$

177. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

Указание. Принять $e^{-2} = 0{,}13534$.

178. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

179. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

Решение. Число $n=500$ велико, вероятность $p=0{,}002$ мала и рассматриваемые события (повреждение изделий) независимы, поэтому имеет место формула Пуассона

$$P_n(k)=\lambda^k\cdot e^{-\lambda}/k!.$$

а) Найдем λ:

$$\lambda=np=500\cdot 0{,}002=1.$$

Найдем вероятность того, что будет повреждено ровно 3 ($k=3$) изделия:

$$P_{500}(3)=e^{-1}/3!=0{,}36788/6=0{,}0613.$$

б) Найдем вероятность того, что будет повреждено менее трех изделий:

$$P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)=e^{-1}+e^{-1}+e^{-1}/2=$$
$$=(5/2)\,e^{-1}=(5/2)\cdot 0{,}36788=0{,}9197.$$

в) Найдем вероятность P того, что будет повреждено более трех изделий. События «повреждено более трех изделий» и «повреждено не более трех изделий» (обозначим вероятность этого события через Q) — противоположны, поэтому $P+Q=1$. Отсюда

$$P=1-Q=1-[P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)+P_{500}(3)].$$

Используя результаты, полученные выше, имеем

$$P=1-[0{,}9197+0{,}0613]=0{,}019.$$

г) Найдем вероятность P_1 того, что будет повреждено хотя бы одно изделие. События «повреждено хотя бы одно изделие» и «ни одно из изделий не повреждено» (обозначим вероятность этого события через Q_1) — противоположные, следовательно, $P_1+Q_1=1$. Отсюда искомая вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие, равна

$$P_1=1-Q_1=1-P_{500}(0)=1-e^{-1}=1-0{,}36788=0{,}632.$$

180. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

Указание. Принять $e^{-3}=0{,}04979$.

181. а) Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

Решение. Из условия задачи следует (поскольку число элементов велико, элементы работают независимо и вероятность отказа каждого элемента мала), что число отказов распределено по закону Пуассона, причем требуется найти параметр λ (среднее число отказов).

Вероятность того, что откажет хотя бы один элемент, по условию равна 0,98, следовательно (см. задачу **179**, п. г), $1-e^{-\lambda}=0{,}98$. Отсюда

$$e^{-\lambda}=1-0{,}98=0{,}02.$$

По таблице функции e^{-x} находим $\lambda=3{,}9$. Итак, за время T работы устройства откажет примерно четыре элемента.

б) Найти среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

Указание. Принять $e^{-3}=0{,}05$.

182. Доказать, что сумма вероятностей числа появлений события в независимых испытаниях, вычисленных по закону Пуассона, равна единице. Предполагается, что испытания производятся бесчисленное количество раз.

Решение. В силу закона Пуассона

$$P_n(k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!.$$

Используем разложение функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x=1+x/1!+x^2/2!+\ldots$$

Известно, что этот ряд сходится при любом значении x, поэтому, положив $x=\lambda$, получим

$$e^{\lambda}=1+\lambda/1!+\lambda^2/2!+\ldots=\sum_{k=0}^{k=\infty}\lambda^k/k!.$$

Найдем искомую сумму вероятностей $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_n(k)$, учитывая, что $e^{-\lambda}$ не зависит от k и, следовательно, может быть вынесено за знак суммы:

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_n(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k e^{-\lambda}/k!=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k/k!=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=e^0=1.$$

Замечание. Утверждение задачи следует немедленно из того, что сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице. Приведенное доказательство преследует учебные цели.

183. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p=0{,}01$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P, не меньшей, чем 0,95?

Решение. Вероятность выигрыша мала, а число билетов, которое нужно купить, очевидно, велико, поэтому случайное число выигрышных билетов имеет приближенно распределение Пуассона.

Ясно, что события «ни один из купленных билетов не является выигрышным» и «хотя бы один билет—выигрышный»—противоположные. Поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$P_n(0)+P=1, \text{ или } P=1-P_n(0). \qquad (*)$$

Положив $k=0$ в формуле Пуассона $P_n(k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$, получим

$$P_n(0)=e^{-\lambda}.$$

Следовательно, соотношение (*) примет вид

$$P=1-e^{-\lambda}.$$

По условию, $P\geqslant 0{,}95$, или $1-e^{-\lambda}\geqslant 0{,}95$. Отсюда

$$e^{-\lambda}\leqslant 0{,}05. \qquad (**)$$

По таблице функции e^{-x} находим $e^{-3}=0{,}05$. Учитывая, что функция e^{-x}—убывающая, заключаем, что неравенство (**) выполняется при $\lambda\geqslant 3$, или при $np\geqslant 3$. Следовательно, $n\geqslant 3/p = 3/0{,}01=300$. Итак, надо купить не менее 300 билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них.

§ 2. Простейший поток событий

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает следующими тремя свойствами: стационарностью, «отсутствием последействия» и ординарностью.

Свойство стационарности состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка времени и не зависит от начала его отсчета. Другими словами, вероятность появления k событий за промежуток времени длительностью t есть функция, зависящая только от k и t.

Свойство «отсутствия последействия» состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, предыстория потока не влияет на вероятности появления событий в ближайшем будущем.

Свойство ординарности состоит в том, что появление двух или более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события за малый промежуток времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Если постоянная интенсивность потока λ известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Замечание. Поток, обладающий свойством стационарности, называют *стационарным*; в противном случае — *нестационарным*.

184. Показать, что формулу Пуассона, определяющую вероятность появления k событий за время длительностью t

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}, \qquad (*)$$

можно рассматривать как математическую модель простейшего потока событий; другими словами, показать, что формула Пуассона отражает все свойства простейшего потока.

Решение. Из формулы (*) видно, что вероятность появления k событий за время длительностью t, при заданной интенсивности λ, является функцией только k и t, что отражает свойство стационарности простейшего потока.

Формула (*) не использует информации о появлении событий до начала рассматриваемого промежутка времени, что отражает свойство отсутствия последействия.

Покажем, что рассматриваемая формула отражает свойство ординарности. Положив $k=0$ и $k=1$, найдем вероятность непоявления событий и вероятность появления одного события:

$$P_t(0) = e^{-\lambda t}, \quad P_t(1) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, вероятность появления более одного события

$$P_t(k > 1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}].$$

Используя разложение функции $e^{-\lambda t}$ в ряд Маклорена, после элементарных преобразований получим

$$P_t(k > 1) = (\lambda t)^2/2 + \ldots .$$

Сравнивая $P_t(1)$ и $P_t(k > 1)$, заключаем, что при малых значениях t вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события, что отражает свойство ординарности.

Итак, формула Пуассона отражает все три свойства простейшего потока, поэтому ее можно рассматривать как математическую модель этого потока.

185. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

Решение. По условию, $\lambda=3$, $t=2$, $k=4$. Воспользуемся формулой Пуассона

$$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k\cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

а) Искомая вероятность того, что за две 2 мин поступит четыре вызова

$$P_2(4)=\frac{6^4\cdot e^{-6}}{4!}=\frac{1296\cdot 0{,}0025}{24}=0{,}135.$$

б) Событие «поступило менее четырех вызовов» произойдет, если наступит одно из следующих несовместных событий: 1) поступило три вызова; 2) поступило два вызова; 3) поступил один вызов; 4) не поступило ни одного вызова. Эти события несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_2(k<4)=P_2(3)+P_2(2)+P_2(1)+P_2(0)=$$
$$=\frac{6^3\cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6\cdot e^{-6}}{1!}+e^{-6}=e^{-6}(36+18+6+1)=$$
$$=0{,}0025\cdot 61=0{,}1525.$$

в) События «поступило менее четырех вызовов» и «поступило не менее четырех вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 2 мин поступит не менее четырех вызовов,

$$P(k\geqslant 4)=1-P(k<4)=1-0{,}1525=0{,}8475.$$

186. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 мин поступит: а) три вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

187. Доказать, что для простейшего потока событий

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(k\geqslant 1)}{P(k=1)}=1.$$

Указание. Использовать теорему о сумме вероятностей противоположных событий:

$$P_t(k=0)+P_t(k\geqslant 1)=1.$$

При отыскании искомого предела применить правило Лопиталя.

§ 3. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Если дискретная случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:*

$$M(C)=C.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:*

$$M(CX)=CM(X).$$

Свойство 3. *Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:*

$$M(X_1X_2\ldots X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\ldots M(X_n).$$

Свойство 4. *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n).$$

Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X)=np.$$

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами.

Свойство 1. *Дисперсия постоянной равна нулю:*

$$D(C)=0.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Свойство 3. *Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:*

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X) = npq.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

188. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	-4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

; б)

X	0,21	0,54	0,61
p	0,1	0,5	0,4

.

Решение. а) Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$$M(X) = -4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}5 = 6.$$

189. Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математические ожидания X и Y: а) $Z = X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$; б) $Z = 3X + 4Y$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

Решение. а) Используя свойства математического ожидания (математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых; постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания), получим

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = \\ = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$$

190. Используя свойства метематического ожидания, доказать, что: а) $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$; б) математическое ожидание отклонения $X - M(X)$ равно нулю.

191. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0{,}5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0{,}3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 8$.

192. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X) = 0{,}1$, $M(X^2) = 0{,}9$. Найти вероятности

p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

Решение. Пользуясь тем, что сумма вероятностей всех возможных значений X равна единице, а также принимая во внимание, что $M(X)=0{,}1$, $M(X^2)=0{,}9$, составим следующую систему трех линейных уравнений относительно неизвестных вероятностей:

$$p_1+p_2+p_3=1,\ (-1)\,p_1+0\cdot p_2+1\cdot p_3=0{,}1,$$
$$(-1)^2\,p_1+0^2\cdot p_2+1^2\cdot p_3=0{,}9.$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности: $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}5$.

193. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X)=2{,}3$, $M(X^2)=5{,}9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

194. В партии из 10 деталей содержится три нестандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

Указание. Воспользоваться решением задачи 17, гл. 1, § 1.

195. а) Доказать, что математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании равно вероятности p появления события A.

Указание. Дискретная случайная величина X — число появлений события в одном испытании — имеет только два возможных значения: $x_1=1$ (событие A наступило) и $x_2=0$ (событие A не наступило).

б) Доказать, что математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p — равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании, т. е. доказать, что математическое ожидание биномиального распределения $M(X)=np$.

196. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно двадцати.

Решение. Воспользуемся формулой

$$M(X)=nP,$$

где n — общее число испытаний (бросаний пяти костей); X — число появлений интересующего нас события (на двух костях из пяти появится по одному очку) в n испытаниях; P — вероятность появления рассматриваемого события в одном испытании.

По условию, $n=20$. Остается найти P — вероятность того, что на гранях двух из пяти костей появится по одному очку. Эту вероятность вычислим по формуле Бернулли, учитывая, что вероятность появления одного очка на грани одной кости $p=1/6$ и, следовательно, вероятность непоявления $q=1-1/6=5/6$:

$$P=P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5\cdot 4\cdot 5^3}{1\cdot 2\cdot 6^5}=\frac{5^4}{3\cdot 6^4}.$$

Искомое математическое ожидание

$$M(X)=nP=20\cdot\frac{5^4}{3\cdot 6^4}\simeq 3.$$

197. Устройство состоит из n элементов. Вероятность отказа любого элемента за время опыта равна p. Найти математическое ожидание числа таких опытов, в каждом из которых откажет ровно m элементов, если всего произведено N опытов. Предполагается, что опыты независимы один от другого.

Решение. Обозначим через X число опытов, в которых откажет ровно m элементов. Так как опыты независимы и вероятности интересующего нас события (в одном опыте откажет ровно m элементов) в этих опытах одинаковы, то применима формула

$$M(X)=NP, \qquad (*)$$

где N — общее число опытов; P — вероятность того, что в одном опыте откажет ровно m элементов.

Найдем вероятность P по формуле Бернулли:

$$P=C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), получим искомое математическое ожидание:

$$M(X)=NC_n^m p^m q^{n-m}.$$

198. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание числа таких бросаний, в каждом из которых выпадет ровно m шестерок, если общее число бросаний равно N.

199. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.

Решение. Обозначим через X сумму числа очков, которые выпадут на всех гранях, через X_i ($i=1, 2, \ldots, n$) — число выпавших очков на грани i-й кости. Тогда, очевидно,

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Следовательно,

$$M(X)=M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=$$
$$=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n). \qquad (*)$$

Очевидно, все величины X_i имеют одинаковое распределение, а следовательно одинаковые числовые характеристики и, в частности, одинаковые математические ожидания, т. е. $M(X_1)=M(X_2)=$ $=\ldots=M(X_n)$.

В силу (*) получим

$$M(X)=nM(X_1). \qquad (^{**})$$

Таким образом, достаточно вычислить математическое ожидание величины X_1, т. е. математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости. Для этого напишем закон распределения X_1:

X_1	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Найдем $M(X_1)$:

$$M(X_1)=1\cdot 1/6+2\cdot 1/6+3\cdot 1/6+4\cdot 1/6+5\cdot 1/6+6\cdot 1/6=7/2. \qquad (^{***})$$

Подставив (***) в (**), окончательно получим

$$M(X)=(7/2)n.$$

200. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. В каждой партии содержится пять изделий. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа партий, в каждой из которых окажется ровно четыре стандартных изделия, — если проверке подлежит 50 партий.

201. Доказать: 1) $M(Y)=aM(X)+b$, если $Y=aX+b$; 2) $M(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i M(X_i)+b$, если $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i X_i)+b$.

202. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны и образуют полную группу; вероятности появления этих событий соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Если в итоге испытания появляется событие A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, то дискретная случайная величина X принимает возможное значение x_i, равное вероятности p_i появления события A_i. Доказать, что математическое ожидание случайной величины X имеет наименьшее значение, если вероятности всех событий одинаковы.

Решение. Возможные значения величины X по условию равны вероятности p_i событий A_i; вероятность возможного значения p_i, очевидно, также равна p_i. Таким образом, X имеет следующее распределение:

X	p_1	p_2	$\ldots$	p_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2. \qquad (^*)$$

Рассматриваемые события образуют полную группу, поэтому $p_1+p_2+ +\ldots+p_n=1$.

Из дифференциального исчисления известно, что если сумма независимых переменных постоянна, то сумма квадратов этих переменных имеет наименьшее значение в случае равенства переменных. Применительно к рассматриваемой задаче это означает: сумма (*), т. е. математическое ожидание $M(X)$, имеет наименьшее значение, если вероятности всех событий, образующих полную группу, равны между собой, что и требовалось доказать.

203. Доказать, что математическое ожидание дискретной случайной величины заключено между наименьшим и наибольшим ее возможными значениями.

Решение. Пусть X—дискретная случайная величина, заданная законом распределения:

$$\begin{array}{llll} X & x_1 & x_2\ldots x_n \\ p & p_1 & p_2\ldots p_n \end{array}$$

Обозначим наименьшее и наибольшее возможные значения X соответственно через m и M. Тогда

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n\leqslant Mp_1+Mp_2+\ldots+Mp_n= \\ =M(p_1+p_2+\ldots+p_n)=M.$$

Итак,

$$M(X)\leqslant M. \qquad (*)$$

Аналогично легко вывести, что

$$M(X)\geqslant m. \qquad (**)$$

Объединяя (*) и (**), окончательно получим

$$m\leqslant M(X)\leqslant M.$$

204. Дискретная случайная величина X принимает k положительных значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с вероятностями, равными соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Предполагая, что возможные значения записаны в возрастающем порядке, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=x_k.$$

Решение. Принимая во внимание, что

$$P\left(X^{n+1}=x_i^{n+1}\right)=P(X=x_i)=p_i \text{ и } P\left(X^n=x_i^n\right)=p_i,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^{n+1}p_1+\ldots+x_{k-1}^{n+1}p_{k-1}+x_k^{n+1}p_k}{x_1^np_1+\ldots+x_{k-1}^np_{k-1}+x_k^np_k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_k^{n+1}p_k\left[\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n+1}\cdot\frac{p_1}{p_k}+\ldots+\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n+1}\cdot\frac{p_{k-1}}{p_k}+1\right]}{x_k^np_k\left[\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n}\cdot\frac{p_1}{p_k}+\ldots+\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n}\cdot\frac{p_{k-1}}{p_k}+1\right]}=$$

$$=x_k\frac{\frac{p_1}{p_k}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n+1}+\ldots+\frac{p_{k-1}}{p_k}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n+1}+1}{\frac{p_1}{p_k}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n}+\ldots+\frac{p_{k-1}}{p_k}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n}+1}.$$

Так как по условию возможные значения X записаны в возрастающем порядке, т. е. $x_i < x_k$ $(i=1, 2, \ldots, k-1)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_i}{x_k}\right)^{n+1}=0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_i}{x_k}\right)^{n}=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=x_k.$$

205. Доказать, что если случайные величины X_1, X_2, ..., X_n независимы, положительны и одинаково распределены, то

$$M\left[\frac{X_1}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right]=\frac{1}{n}.$$

Решение. Введем в рассмотрение случайные величины

$$Y_1=\frac{X_1}{X_1+X_2+\ldots+X_n},\ Y_2=\frac{X_2}{X_1+X_2+\ldots+X_n},\ \ldots,\ Y_n=$$
$$=\frac{X_n}{X_1+X_2+\ldots+X_n}. \qquad (*)$$

Заметим, что знаменатели этих дробей не могут быть равными нулю, поскольку величины X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ положительны.

По условию, величины X_i одинаково распределены, поэтому и величины Y_i также одинаково распределены и, следовательно, имеют одинаковые числовые характеристики, в частности, одинаковые математические ожидания:

$$M(Y_1)=M(Y_2)=\ldots=M(Y_n). \qquad (**)$$

Легко видеть, что $Y_1+Y_2+\ldots+Y_n=1$, следовательно,

$$M(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)=M(1)=1.$$

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, поэтому

$$M(Y_1)+M(Y_2)+\ldots+M(Y_n)=1.$$

В силу (**) имеем $nM(Y_1)=1$. Отсюда $M(Y_1)=1/n$. Учитывая (*), окончательно получим

$$M\left[\frac{X_1}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right]=\frac{1}{n}.$$

206. Доказать, что если случайные величины X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 независимы, положительны и одинаково распределены, то

$$M\left[\frac{X_1+X_2+X_3}{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}\right]=\frac{3}{5}.$$

Указание. Представить дробь, стоящую под знаком математического ожидания, в виде суммы трех дробей и воспользоваться решением задачи 205.

207. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, распределенной по закону Пуассона:

$$\begin{array}{cccccccc} X & 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ p & e^{-\lambda} & \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} & \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} & \ldots & \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \ldots \end{array}$$

Решение. По определению математического ожидания для случая, когда число возможных значений X есть счетное множество,

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Учитывая, что при $k=0$ первый член суммы равен нулю, примем в качестве наименьшего значения k единицу:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Положив $k-1=m$, получим

$$M(X)=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}.$$

Принимая во внимание, что $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{\lambda}$, окончательно имеем

$$M(X)=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

Итак,

$$M(X)=\lambda,$$

т. е. математическое ожидание распределения Пуассона равно параметру этого распределения λ.

208. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z=3X+2Y$, если известно, что $D(X)=5$, $D(Y)=6$.

Решение. Так как величины X и Y независимы, то независимы также и величины $3X$ и $2Y$. Используя свойства дисперсии (дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых; постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат), получим

$$D(Z)=D(3X+2Y)=D(3X)+D(2Y)=9D(X)+4D(Y)=9\cdot 5+4\cdot 6=69.$$

209. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z=2X+3Y$, если известно, что $D(X)=4$, $D(Y)=5$.

210. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Дисперсию можно вычислить исходя из ее определения, однако мы воспользуемся формулой

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2,$$

которая быстрее ведет к цели.

Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=-5\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3.$$

Напишем закон распределения X^2:

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=25\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2=15{,}3.$$

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=15{,}3-(-0{,}3)^2=15{,}21.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15{,}21}=3{,}9.$$

211. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5;

б)

X	131	140	160	180
p	0,05	0,10	0,25	0,60

212. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем равновероятных. Доказать, что дисперсия величины X равна квадрату полуразности возможных значений:

$$D(X)=\left[\frac{x_2-x_1}{2}\right]^2.$$

Решение. Найдем математическое ожидание X, учитывая, что вероятности возможных значений x_1 и x_2 равны между собой и, следовательно, каждая из них равна $^1/_2$:

$$M(X)=x_1\cdot(1/2)+x_2\cdot(1/2)=(x_1+x_2)/2.$$

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=x_1^2\cdot(1/2)+x_2^2\cdot(1/2)=(x_1^2+x_2^2)/2.$$

Найдем дисперсию X:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-\left[\frac{x_1+x_2}{2}\right]^2=\left[\frac{x_2-x_1}{2}\right]^2.$$

213. Найти дисперсию дискретной случайной величины X—числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления событий A в каждом испытании равна 0,2.

Решение. Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях (с одинаковой вероятностью появления события в каждом испытании) равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события:

$$D(X)=npq.$$

По условию, $n=5$; $p=0,2$; $q=1-0,2=0,8$.

Искомая дисперсия

$$D(X)=npq=5\cdot 0,2\cdot 0,8=0,8.$$

214. Найти дисперсию дискретной случайной величины X—числа отказов элемента некоторого устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

215. Найти дисперсию дискретной случайной величины X—числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X)=1,2$.

Решение. Первый способ. Возможные значения величины X таковы: $x_1=0$ (событие не появилось), $x_2=1$ (событие появилось один раз) и $x_3=2$ (событие появилось два раза).

Найдем вероятности возможных значений по формуле Бернулли:

$P_2(0)=q^2$; $P_2(1)=C_2^1pq=2pq$; $P_2(2)=p^2$.

Напишем закон распределения X:

возможные значения	0	1	2
вероятности	q^2	$2pq$	p^2

Найдем $M(X)$:

$$M(X)=2pq+2p^2=2p(q+p)=2p.$$

В силу условия $M(X)=1,2$, т. е. $2p=1,2$. Отсюда $p=0,6$ и, следовательно, $q=1-0,6=0,4$.

Искомая дисперсия

$$D(X)=npq=2\cdot 0,6\cdot 0,4=0,48.$$

Второй способ. Воспользуемся формулой $M(X)=np$. По условию, $M(X)=1,2$; $n=2$. Следовательно, $1,2=2p$. Отсюда $p=0,6$ и, значит, $q=0,4$.

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X)=npq=2\cdot 0,6\cdot 0,4=0,48.$$

Разумеется, второй способ быстрее ведет к цели.

216. Найти дисперсию дискретной случайной величины X—числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X)=0,9$.

217. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

218. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,6. Найти закон распределения величины X, если математическое ожидание и дисперсия известны: $M(X)=1,4$; $D(X)=0,24$.

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что X примет значение x_2, равна $1-0,6=0,4$.

Напишем закон распределения X:

$$\begin{array}{ccc} X & x_1 & x_2 \\ p & 0,6 & 0,4 \end{array} \qquad (*)$$

Для отыскания x_1 и x_2 надо составить два уравнения, связывающие эти числа. С этой целью выразим известные математическое ожидание и дисперсию через x_1 и x_2.

Найдем $M(X)$:

$$M(X)=0,6x_1+0,4x_2.$$

По условию, $M(X)=1,4$, следовательно,

$$0,6x_1+0,4x_2=1,4. \qquad (**)$$

Одно уравнение, связывающее x_1 и x_2, получено. Для того чтобы получить второе уравнение, выразим известную дисперсию через x_1 и x_2.

Напишем закон распределения X^2:

$$\begin{array}{ccc} X^2 & x_1^2 & x_2^2 \\ p & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

Найдем $M(X^2)$:

$$M(X^2)=0,6x_1^2+0,4x_2^2.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=0,6x_1^2+0,4x_2^2-1,4^2.$$

Подставляя $D(X)=0,24$, после элементарных преобразований получим

$$0,6x_1^2+0,4x_2^2=2,2. \qquad (***)$$

Объединяя (**) и (***), имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}6x_1+0{,}4x_2=1{,}4, \\ 0{,}6x_1^2+0{,}4x_2^2=2{,}2. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем два решения:

$$x_1=1;\ x_2=2 \text{ и } x_1=1{,}8;\ x_2=0{,}8.$$

По условию $x_2 > x_1$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение:

$$x_1=1;\quad x_2=2. \tag{****}$$

Подставив (****) в (*), получим искомый закон распределения:

X	1	2
p	0,6	0,4

219. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X)=2{,}6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=0{,}8$.

220. Дискретная случайная величина X имеет только три возможных значения: $x_1=1$, x_2 и x_3, причем $x_1 < x_2 < x_3$. Вероятности того, что X примет значения x_1 и x_2 соответственно равны 0,3 и 0,2. Найти закон распределения величины X, зная ее математическое ожидание $M(X)=2{,}2$ и дисперсию $D(X)=0{,}76$.

221. Брошены n игральных костей. Найти дисперсию суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

Решение. Обозначим через X дискретную случайную величину — сумму числа очков, которые выпадут на всех гранях, через X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — число очков, выпавших на грани i-й кости. Тогда

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Очевидно, все величины X_i имеют одинаковое распределение, следовательно, одинаковые числовые характеристики и, в частности, одинаковые дисперсии, т. е.

$$D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_n). \tag{*}$$

Так как рассматриваемые случайные величины независимы, то дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X)=D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

В силу (*) получим

$$D(X)=nD(X_1). \tag{**}$$

Таким образом, достаточно вычислить дисперсию случайной величины X_1, т. е. дисперсию числа очков, которые могут выпасть на «первой» кости. Сделаем это. Напишем закон распределения X_1:

X_1	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Найдем $M(X_1)$:

$$M(X_1)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

Напишем закон распределения X_1^2:

X_1^2	1	4	9	16	25	36
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Найдем $M(X_1^2)$ и $D(X_1)$:

$$M(X_1^2)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6},$$

$$D(X_1)=M(X_1^2)-[M(X_1)]^2=91/6-(7/2)^2=35/12. \qquad (***)$$

Найдем искомую дисперсию, для чего подставим (***) в (**): $D(X)=(35/12)\,n$.

222*. Вероятность наступления события в каждом испытании равна p $(0<p<1)$. Испытания производятся до тех пор, пока событие не наступит. Найти: а) математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа испытаний, которые надо произвести до появления события; б) дисперсию величины X.

Решение. а) Составим закон распределения величины X — числа испытаний, которые надо произвести, пока событие не наступит:

X	1	2	3	...	k	...	
p	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...	(*)

Здесь $q=1-p$ — вероятность непоявления рассматриваемого события.

Найдем $M(X)$:

$$M(X)=1\cdot p+2\cdot qp+3\cdot q^2p+\ldots+k\cdot q^{k-1}p+\ldots=$$
$$=p(1+2q+3q^2+\ldots+kq^{k-1}+\ldots)=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

Итак, $M(X)=1/p$.

Пояснение. Покажем, что $1+2q+3q^2+\ldots+kq^{k-1}+\ldots=1/(1-q)^2$. Так как $0<q<1$, то степенной ряд (относительно q)

$$S=1+q+q^2+\ldots+q^k+\ldots=1/(1-q)$$

можно почленно дифференцировать и сумма производных членов ряда равна производной от суммы ряда, т. е.

$$S'=1+2q+3q^2+\ldots+kq^{k-1}+\ldots=1/(1-q^2). \qquad (**)$$

б) Будем искать дисперсию величины X по формуле

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Учитывая, что $M(X)=1/p$, получим

$$D(X)=M(X^2)-1/p^2. \qquad (***)$$

Остается найти $M(X^2)$. Напишем закон распределения X^2, используя распределение (*):

$$\begin{array}{lllllll} X^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & k^2 & \ldots \\ P & p & qp & q^2p & \ldots & q^{k-1}p & \ldots \end{array}$$

Найдем $M(X^2)$:

$$M(X^2)=1^2\cdot p+2^2\cdot qp+3^2\cdot q^2p+\ldots+k^2\cdot q^{k-1}p+\ldots=$$
$$=p(1^2+2^2\cdot q+3^2\cdot q^2+\ldots+k^2\cdot q^{k-1}+\ldots)=$$
$$=p\cdot\frac{1+q}{(1-q)^3}=p\cdot\frac{1+(1-p)}{p^3}=\frac{2-p}{p^2}.$$

Итак,

$$M(X^2)=(2-p)/p^2. \qquad (****)$$

Найдем искомую дисперсию, для чего подставим (****) в (***):

$$D(X)=(2-p)/p^2-1/p^2=(1-p)/p^2.$$

Пояснение. Покажем, что

$$1^2+2^2\cdot q+3^2\cdot q^2+\ldots+k^2\cdot q^{k-1}+\ldots=(1+q)/(1-q)^3.$$

Действительно,

$$\int_0^q (1^2+2^2q+3^2q^2+\ldots+k^2q^{k-1}+\ldots)\,dq=$$
$$=[q+2q^2+3q^3+\ldots+kq^k+\ldots]_0^q=$$
$$=q(1+2q+3q^2+\ldots+kq^{k-1}+\ldots)=q/(1-q)^2 \quad [\text{см. } (**)].$$

Дифференцируя обе части равенства по q, получим

$$1^2+2^2q+3^2q^2+\ldots+k^2q^{k-1}+\ldots=(1+q)/(1-q)^3.$$

223. Производятся многократные испытания некоторого элемента на надежность до тех пор, пока элемент не откажет. Найти: *а*) математическое ожидание дискретной случайной величины X—числа опытов, которые надо произвести; б) дисперсию X. Вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,1.

Указание. Воспользоваться результатами задачи 222.

224. Доказать неравенство $M[X-(x_i+x_k)/2]^2 \geqslant D(X)$, где x_i и x_k—любые два возможных значения случайной величины X.

Решение. 1) Допустим, что $(x_i+x_k)/2=M(X)$. Тогда

$$M\left[X-\frac{x_i-x_k}{2}\right]^2=D(X). \qquad (*)$$

2) Допустим, что $(x_i+x_k)/2 \neq M(X)$. Докажем, что в этом случае

$$M\left[X-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2>D(X).$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя свойства математического ожидания:

$$M\left[X-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2=M(X^2)-2\frac{x_i+x_k}{2}\cdot M(X)+\left[\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2.$$

Вычитая и прибавляя $[M(X)]^2$ в правой части равенства, получим

$$M\left[X-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2=D(X)+\left[M(X)-\frac{x_i+x_k}{2}\right]^2>D(X). \qquad (**)$$

Объединяя (*) и (**), окончательно имеем

$$M[X-(x_i+x_k)/2]^2\geqslant D(X).$$

225. Доказать, что если случайная величина X имеет наименьшее и наибольшее возможные значения, соответственно равные a и b, то дисперсия этой случайной величины не превышает квадрата полуразности между этими значениями:

$$D(X)\leqslant[(b-a)/2]^2.$$

Решение. Воспользуемся неравенством (см. задачу 224)

$$D(X)\leqslant M[X-(a+b)/2]^2. \qquad (*)$$

Докажем теперь, что

$$M[X-(a+b)/2]^2\leqslant[(b-a)/2]^2.$$

(Отсюда и из (*) следует справедливость доказываемого неравенства.) С этой целью преобразуем математическое ожидание:

$$M[(b-a)/2]^2=M[X-(a+b)/2+(b-X)]^2=$$
$$=M[X-(a+b)/2]^2+M[(b-X)(X-a)].$$

Второе слагаемое правой части равенства неотрицательно (это следует из того, что b — наибольшее и a — наименьшее возможные значения), поэтому первое слагаемое не превышает всей суммы:

$$M[X-(a+b)/2]^2\leqslant M[(b-a)/2]^2.$$

Учитывая, что математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, окончательно получим

$$M[X-(a+b)/2]^2\leqslant[(b-a)/2]^2.$$

226. Доказать, что если X и Y — независимые случайные величины, то

$$D(XY)=D(X)\cdot D(Y)+n^2D(X)+m^2D(Y),$$

где $m=M(X)$ и $n=M(Y)$.

Решение. По формуле для вычисления дисперсии

$$D(XY)=M[(XY)^2]-[M(XY)]^2.$$

Учитывая, что X и Y — независимые величины и, следовательно, X^2 и Y^2 также независимы и что математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, получим

$$D(XY)=M[X^2\cdot Y^2]-[M(X)\cdot M(Y)]^2=$$
$$=M(X^2)\,M(Y^2)-m^2n^2. \qquad (^*)$$

По определению дисперсии,

$$D(X)=M(X^2)-m^2,\ D(Y)=M(Y^2)-n^2.$$

Отсюда

$$M(X^2)=D(X)+m^2,\ M(Y^2)=D(Y)+n^2. \qquad (^{**})$$

Подставив (**) в (*), после упрощений окончательно имеем

$$D(XY)=D(X)\,D(Y)+n^2D(X)+m^2D(Y).$$

227. Найти дисперсию дискретной случайной величины X, распределенной по закону Пуассона:

X	0	1	2	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}/1!$	$\lambda^2e^{-\lambda}/2!$	...	$\lambda^k e^{-\lambda}/k!$	...

Решение. Воспользуемся формулой

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Так как $M(X)=\lambda$ (см. задачу 207), то

$$D(X)=M(X^2)-\lambda^2. \qquad (^*)$$

Напишем распределение случайной величины X^2, учитывая, что вероятность того, что X^2 примет значение k^2, равна вероятности того, что X примет значение k (это следует из того, что возможные значения X неотрицательны):

X^2	0^2	1^2	2^2	...	k^2	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}/1!$	$\lambda^2e^{-\lambda}/2!$	...	$\lambda^k e^{-\lambda}/k!$	...

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Учитывая, что при $k=0$ первый член суммы равен нулю, получим

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}=$$
$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}\right].$$

Положив $k-1=m$, имеем

$$M(X^2)=\lambda\left[\sum_{m=0}^{\infty} m\cdot\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\right].$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=\lambda \text{ (см. задачу 207)},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1,$$

имеем

$$M(X^2)=\lambda(\lambda+1)=\lambda^2+\lambda. \qquad (^{**})$$

Подставим (**) в (*):

$$D(X)=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda.$$

Итак, дисперсия распределения Пуассона равна параметру λ.

§ 4. Теоретические моменты

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k=M(X^k).$$

В частности, начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию:

$$\nu_1=M(X).$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $[X-M(X)]^k$:

$$\mu_k=M[X-M(X)]^k.$$

В частности, центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1=M[X-M(X)]=0;$$

центральный момент второго порядка равен дисперсии:

$$\mu_2=M[X-M(X)]^2=D(X).$$

Центральные моменты целесообразно вычислять, используя формулы, выражающие центральные моменты через начальные:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2,$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3,$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4.$$

228. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
p	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядков.

Решение. Найдем начальный момент первого порядка:

$$\nu_1=M(X)=1\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}6=2{,}2.$$

Напишем закон распределения величины X^2:

X^2	1	9
p	0,4	0,6

Найдем начальный момент второго порядка:

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,6 = 5,8.$$

Напишем закон распределения величины X^3:

X^3	1	27
p	0,4	0,6

Найдем начальный момент третьего порядка:

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,4 + 27 \cdot 0,6 = 16,6.$$

229. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядков.

230. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение. Центральный момент первого порядка равен нулю: $\mu_1 = 0$.

Для вычисления центральных моментов удобно воспользоваться формулами, выражающими центральные моменты через начальные, поэтому предварительно найдем начальные моменты:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1;\\
\nu_2 &= M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,6 = 10,9;\\
\nu_3 &= M(X^3) = 1 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,6 = 40,9;\\
\nu_4 &= M(X^4) = 1 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,3 + 256 \cdot 0,6 = 158,5.
\end{aligned}$$

Найдем центральные моменты:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40,9 - 3 \cdot 3,1 \cdot 10,9 + 2 \cdot 3,1^3 = -0,888;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 =$$
$$= 158,5 - 4 \cdot 40,9 \cdot 3,1 + 6 \cdot 10,9 \cdot 3,1^2 - 3 \cdot 3,1^4 = 2,7777.$$

231. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	5
p	0,2	0,8

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Указание. Найти предварительно начальные моменты и выразить через них центральные моменты.

232. Доказать, что центральный момент второго порядка (дисперсия) $\mu_2 = M[X - M(X)]^2$ меньше обычного момента второго порядка $\mu_2' = M[X - C]^2$ при любом $C \neq M(X)$.

Решение. Для простоты записи введем обозначение $M(X) = m$. Прибавим и вычтем m под знаком математического ожидания:

$$\mu_2' = M[X - C]^2 = M[(X - m) + (m - C)]^2 = \\ = M[(X - m)^2 + 2(m - C)(X - m) + (m - C)^2].$$

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, поэтому

$$\mu_2' = M[X - m]^2 + M[2(m - C)(X - m)] + M[m - C]^2.$$

Вынося постоянную величину $2(m - C)$ за знак математического ожидания и учитывая, что математическое ожидание постоянной $(m - C)^2$ равно самой постоянной и что по определению $M[X - m]^2 = \mu_2$, получим

$$\mu_2' = \mu_2 + 2(m - C) \cdot M[X - m] + (m - C)^2.$$

Принимая во внимание, что математическое ожидание отклонения $X - m$ равно нулю, имеем

$$\mu_2' = \mu_2 + (m - C)^2.$$

Отсюда

$$\mu_2 = \mu_2' - (m - C)^2.$$

Из этого равенства заключаем, что центральный момент второго порядка меньше обычного момента второго порядка при любом $C \neq m$.

233. Доказать, что центральный момент третьего порядка связан с начальными моментами равенством

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Решение. По определению центрального момента,

$$\mu_3 = M[X - M(X)]^3.$$

Используя свойства математического ожидания и учитывая, что $M(X)$ есть постоянная величина, получим

$$\mu_3 = M[X^3 - 3X^2 \cdot M(X) + 3X \cdot M^2(X) - M^3(X)] = \\ = M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^2(X) \cdot M(X) - M[M^3(X)] = \\ = M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^3(X) - M^3(X) = \\ = M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 2M^3(X). \qquad (*)$$

По определению начального момента,

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M(X^2), \quad \nu_3 = M(X^3). \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), окончательно получим

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

234. Доказать, что центральный момент четвертого порядка связан с начальными моментами равенством

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

235. Пусть $X = X_1 + X_2$, где X_1 и X_2 — независимые случайные величины, имеющие центральные моменты третьего порядка, соответственно равные μ_3^1 и μ_3^2. Доказать, что $\mu_3 = \mu_3^1 + \mu_3^2$, где μ_3 — центральный момент третьего порядка величины X.

Решение. Введем для простоты записи следующие обозначения математических ожиданий: $M(X_1) = a_1$, $M(X_2) = a_2$. Тогда

$$M(X) = M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = a_1 + a_2.$$

По определению центральный момент третьего порядка,

$$\mu_3 = M[X - M(X)]^3 = M[(X_1 + X_2) - (a_1 + a_2)]^3 = M[(X_1 - a_1) + (X_2 - a_2)]^3.$$

Используя свойства математического ожидания (математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, математическое ожидание произведения независимых величин равно произведению математических ожиданий сомножителей), получим

$$\mu_3 = M[(X_1 - a_1)^3 + 3(X_1 - a_1)^2 \cdot (X_2 - a_2) + 3(X_1 - a_1) \cdot (X_2 - a_2)^2 + (X_2 - a_2)^3] = M[X_1 - a_1]^3 + M[3(X_1 - a_1)^2] \cdot M[X_2 - a_2] + M[3(X_2 - a_2)^2] \cdot M[X_1 - a_1] + M[X_2 - a_2]^3.$$

Учитывая, что математическое ожидание отклонения (разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием) равно нулю, т. е. $M[X_1 - a_1] = 0$ и $M[X_2 - a_2] = 0$, окончательно имеем

$$\mu_3 = M[X_1 - a_1]^3 + M[X_2 - a_2]^3 = \mu_3^1 + \mu_3^2.$$

Глава пятая

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

§ 1. Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева. *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - D(X)/\varepsilon^2.$$

236. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания менее чем на три средних квадратических отклонения.

237. Доказать неравенство Чебышева в форме

$$P(|X-M(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant D(X)/\varepsilon^2.$$

Указание. Воспользоваться тем, что события $|X-M(X)|<\varepsilon$ и $|X-M(X)|\geqslant\varepsilon$ — противоположные.

238. Используя неравенство Чебышева в форме, приведенной в задаче 237, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на два средних квадратических отклонения.

239. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}2$, если $D(X)=0{,}004$.

240. Дано: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 0{,}9$ и $D(X)=0{,}009$. Используя неравенство Чебышева, оценить ε снизу.

241. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение. а) Обозначим через X дискретную случайную величину — число отказавших элементов за время T. Тогда

$$M(X)=np=10\cdot 0{,}05=0{,}5;$$
$$D(X)=npq=10\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95=0{,}475.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 1-D(X)/\varepsilon^2.$$

Подставив сюда $M(X)=0{,}5$; $D(X)=0{,}475$, $\varepsilon=2$, получим

$$P(|X-0{,}5|<2)\geqslant 1-0{,}475/4=0{,}88.$$

б) События $|X-0{,}5|<2$ и $|X-0{,}5|\geqslant 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно,

$$P(|X-0{,}5|\geqslant 2)\leqslant 1-0{,}88=0{,}12.$$

242. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

243. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 1/2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в 100 независимых испытаниях:

$$M(X)=np=100\cdot 1/2=50;\ D(X)=npq=100\cdot 1/2\cdot 1/2=25.$$

Найдем максимальную разность между заданным числом появлений события и математическим ожиданием $M(X)=50$:

$$\varepsilon=60-50=10.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 1-D(X)/\varepsilon^2.$$

Подставляя $M(X)=50$, $D(X)=25$, $\varepsilon=10$, получим

$$P(|X-50|<10)\geqslant 1-25/10^2=0{,}75.$$

244. Вероятность появления события в каждом испытании равна 1/4. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

245. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}2$.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X:

$$M(X)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}54;$$
$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=$$
$$=(0{,}3^2\cdot 0{,}2+0{,}6^2\cdot 0{,}8)-0{,}54^2=0{,}0144.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 1-D(X)/\varepsilon^2.$$

Подставляя $M(X)=0{,}54$, $D(X)=0{,}0144$, $\varepsilon=0{,}2$, окончательно получим

$$P(|X-0{,}54|<0{,}2)\geqslant 1-0{,}0144/0{,}04=0{,}64.$$

246. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<\sqrt{0{,}4}$.

§ 2. Теорема Чебышева

Теорема Чебышева. *Если последовательность попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ имеет конечные математические ожидания и дисперсии этих величин равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т. е. если ε — любое положительное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

В частности, среднее арифметическое последовательности попарно независимых величин, дисперсии которых равномерно ограничены и которые имеют одно и то же математическое ожидание a, сходится по вероятности к математическому ожиданию a, т. е. если ε—любое положительное число, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

247. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом распределения

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Решение. Для того чтобы к последовательности случайных величин была применима теорема Чебышева, достаточно, чтобы эти величины были попарно независимы, имели конечные математические ожидания и равномерно ограниченные дисперсии.

Поскольку случайные величины независимы, то они подавно попарно независимы, т. е. первое требование теоремы Чебышева выполняется.

Проверим, выполняется ли требование конечности математических ожиданий:

$$M(X_n) = -n\alpha(1/2n^2) + 0(1-1/n^2) + n\alpha(1/2n^2) = 0.$$

Таким образом, каждая случайная величина имеет конечное (равное нулю) математическое ожидание, т. е. второе требование теоремы выполняется.

Проверим, выполняется ли требование равномерной ограниченности дисперсий. Напишем закон распределения X_n^2:

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0	$n^2\alpha^2$
p	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

или, сложив вероятности одинаковых возможных значений,

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0
p	$1/n^2$	$1-1/n^2$

Найдем математическое ожидание $M(X_n^2)$:

$$M(X_n^2)=n^2\alpha^2\cdot 1/n^2=\alpha^2.$$

Найдем дисперсию $D(X_n)$, учитывая, что

$$D(X_n)=M(X_n^2)-[M(X_n)]^2=\alpha^2.$$

Таким образом, дисперсии заданных случайных величин равномерно ограничены числом α^2, т. е. третье требование выполняется.

Итак, поскольку все требования выполняются, к рассматриваемой последовательности случайных величин теорема Чебышева применима.

248. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом распределения

X_n	a	$-a$
p	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

249. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом распределения

X_n	$n+1$	$-n$
p	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

а) Убедиться, что требование теоремы Чебышева о равномерной ограниченности дисперсий не выполняется; б) можно ли отсюда заключить, что к рассматриваемой последовательности теорема Чебышева неприменима?

250*. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом распределения

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/2^n$	$1-1/2^{n-1}$	$1/2^n$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Решение. Поскольку случайные величины X_n независимы, то они подавно и попарно независимы, т. е. первое требование теоремы Чебышева выполняется.

Легко найти, что $M(X_n)=0$, т. е. требование конечности математических ожиданий выполняется.

Остается проверить выполнимость требования равномерной ограниченности дисперсий. По формуле

$$D(X_n)=M(X_n^2)-[M(X_n)]^2,$$

учитывая, что $M(X_n)=0$, найдем (выкладки предоставляется выполнить читателю)

$$D(X_n)=\frac{n^2}{2^{n-1}}\alpha^2.$$

Временно предположим, что n изменяется непрерывно (чтобы подчеркнуть это допущение, обозначим n через x), и исследуем на экстремум функцию $\varphi(x)=x^2/2^{x-1}$.

Приравняв первую производную этой функции нулю, найдем критические точки $x_1=0$ и $x_2=2/\ln 2$.

Отбросим первую точку как не представляющую интереса (n не принимает значения, равного нулю); легко видеть, что в точке $x_2=2/\ln 2$ функция $\varphi(x)$ имеет максимум. Учитывая, что $2/\ln 2 \simeq 2{,}9$ и что n — целое положительное число, вычислим дисперсию $D(X_n)=\frac{n^2}{2^{n-1}}\alpha^2$ для ближайших к числу 2,9 (слева и справа) целых чисел, т. е. для $n=2$ и $n=3$.

При $n=2$ дисперсия $D(X_2)=2\alpha^2$, при $n=3$ дисперсия $D(X_3)=(9/4)\alpha^2$. Очевидно,

$$(9/4)\alpha^2 > 2\alpha^2.$$

Таким образом, наибольшая возможная дисперсия равна $(9/4)\alpha^2$, т. е. дисперсии случайных величин X_n равномерно ограничены числом $(9/4)\alpha^2$.

Итак, все требования теоремы Чебышева выполняются, следовательно, к рассматриваемой последовательности эта теорема применима.

251. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом распределения

X_n	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
p	1/3	1/3	1/3

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Замечание. Поскольку случайные величины X_i одинаково распределены и независимы, то читатель, знакомый с теоремой Хинчина, может ограничиться вычислением лишь математического ожидания и убедиться, что оно конечно.

Глава шестая

ФУНКЦИИ И ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Функция распределения вероятностей случайной величины

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x)=P(X<x).$$

Часто вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция распределения».

Функция распределения обладает следующими свойствами:

Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* [0; 1]:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

Свойство 2. *Функция распределения есть неубывающая функция:*

$$F(x_2) \geqslant F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, например x_1, равна нулю:*

$$P(X = x_1) = 0.$$

Свойство 3. *Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то*

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leqslant a; \; F(x) = 1 \text{ при } x \geqslant b.$$

Следствие. *Справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Свойство 4. *Функция распределения непрерывна слева:*

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

252. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1, \\ (3/4)x + 3/4 & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 1/3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1/3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (0, 1/3).

Решение. Вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Положив $a = 0$, $b = 1/3$, получим

$$P(0 < X < 1/3) = F(1/3) - F(0) =$$
$$= [(3/4)x + 3/4]_{x=1/3} - [(3/4)x + 3/4]_{x=0} = 1/4.$$

253. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + (\operatorname{arctg} x)/\pi$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (0, 1).

254. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant -2, \\ 1/2+(1/\pi)\arcsin(x/2) & \text{при} \quad -2<x\leqslant 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(-1, 1)$.

255. Функция распределения непрерывной случайной величины X (времени безотказной работы некоторого устройства) равна $F(x)=1-e^{-x/T}$ $(x\geqslant 0)$. Найти вероятность безотказной работы устройства за время $x\geqslant T$.

256. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 2, \\ 0{,}5x & \text{при} \quad 2<x\leqslant 4, \\ 1 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение: а) меньшее 0,2; б) меньшее трех; в) не меньшее трех; г) не меньшее пяти.

Решение. а) Так как при $x\leqslant 2$ функция $F(x)=0$, то $F(0,2)=0$, т. е. $P(X<0,2)=0$;

б) $P(X<3)=F(3)=[0{,}5x-1]_{x=3}=1{,}5-1=0{,}5$;

в) события $X\geqslant 3$ и $X<3$ противоположны, поэтому $P(X\geqslant 3)+P(X<3)=1$. Отсюда, учитывая, что $P(X<3)=0{,}5$ [см. п. б)], получим $P(X\geqslant 3)=1-0{,}5=0{,}5$;

г) сумма вероятностей противоположных событий равна единице, поэтому $P(X\geqslant 5)+P(X<5)=1$. Отсюда, используя условие, в силу которого при $x>4$ функция $F(x)=1$, получим $P(X\geqslant 5)=1-P(X<5)=1-F(5)=1-1=0$.

257. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}25,\ 0{,}75)$.

258. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x)=1/2+(1/\pi)\,\mathrm{arctg}\,(x/2)$. Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию:

с вероятностью 1/4 случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

Решение. События $X \leqslant x_1$ и $X > x_1$ — противоположные, поэтому $P(X \leqslant x_1) + P(X > x_1) = 1$. Следовательно, $P(X \leqslant x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - 1/4 = 3/4$. Так как $P(X = x_1) = 0$, то

$$P(X \leqslant x_1) = P(X = x_1) + P(X < x_1) = P(X < x_1) = 3/4.$$

По определению функции распределения,

$$P(X < x_1) = F(x_1) = 1/2 + (1/\pi)\operatorname{arctg}(x_1/2).$$

Следовательно,

$$1/2 + (1/\pi)\operatorname{arctg}(x_1/2) = (3/4), \text{ или } \operatorname{arctg}(x_1/2) = \pi/4.$$

Отсюда $x_1/2 = 1$, или $x_1 = 2$.

259. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = (1/2) + (1/\pi)\operatorname{arctg}(x/2)$. Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью 1/6 случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

260. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и начертить ее график.

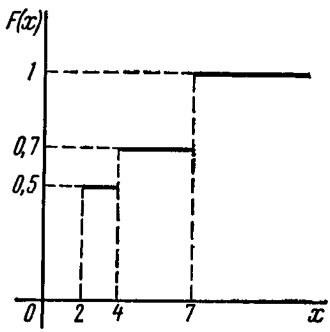

Рис. 6

Решение. 1. Если $x \leqslant 2$, то $F(x) = 0$. Действительно, значений, меньших числа 2, величина X не принимает. Следовательно, при $x \leqslant 2$ функция $F(x) = P(X < x) = 0$.

2. Если $2 < x \leqslant 4$, то $F(x) = 0,5$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,5.

3. Если $4 < x \leqslant 7$, то $F(x) = 0,7$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,5 и значение 4 с вероятностью 0,2; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0,5 + 0,2 = 0,7$.

4. Если $x > 7$, то $F(x) = 1$. Действительно, событие $X \leqslant 7$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ 0,5 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 0,7 & \text{при } 4 < x \leqslant 7, \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 6.

261. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

§ 2. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения: $f(x)=F'(x)$.

Часто вместо термина «плотность распределения» используют термины «плотность вероятностей» и «дифференциальная функция».

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), определяется равенством

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Знаая плотность распределения, можно найти функцию распределения $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

Свойство 1. *Плотность распределения неотрицательна, т. е.* $f(x)\geqslant 0$.

Свойство 2. *Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то $\int_a^b f(x)\,dx=1$.

262. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ \sin x & \text{при } 0<x\leqslant \pi/2, \\ 1 & \text{при } x>\pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \cos x & \text{при } 0<x\leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{при } x>\pi/2. \end{cases}$$

Заметим, что при $x=0$ производная $F'(x)$ не существует.

263. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leqslant \pi/4, \\ 1 & \text{при } x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

264. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=(3/2)\sin 3x$ в интервале $(0, \pi/3)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/6, \pi/4)$.

Решение. Воспользуемся формулой $P(a < X < b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

По условию, $a=\pi/6$, $b=\pi/4$, $f(x)=(3/2)\sin 3x$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(\pi/6 < X < \pi/4)=(3/2)\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x\,dx=\sqrt{2}/4$$

(выкладки предоставляется выполнить читателю).

265. Непрерывная случайная величина X в интервале $(0, \infty)$ задана плотностью распределения $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$ $(\alpha>0)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1, 2)$.

266. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ равна $f(x)=$ $=(2/\pi)\cos^2 x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях X примет ровно два раза значение, заключенное в интервале $(0, \pi/4)$.

267. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x \leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение. Используем формулу

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Если $x \leqslant 0$, то $f(x)=0$, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx=0.$$

Если $0 < x \leqslant \pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{x}\cos x\,dx=\sin x.$$

Если $x > \pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{x} 0\,dx=\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}=1.$$

Итак, искомая функция распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi/2, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

268. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

269. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ x-1/2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

270. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant \pi/6, \\ 3\sin 3x & \text{при } \pi/6 < x \leqslant \pi/3, \\ 0 & \text{при } x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

271. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)= 4C/(e^x+e^{-x})$. Найти постоянный параметр C.

Решение. Плотность распределения $f(x)$ должна удовлетворять условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$. Потребуем, чтобы это условие выполнялось для заданной функции:

$$4C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=1.$$

Отсюда

$$C=1\Big/\left(4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}\right). \qquad (*)$$

Найдем сначала неопределенный интеграл:

$$\int\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\int\frac{e^{x}\,dx}{1+e^{2x}}=\operatorname{arctg} e^{x}.$$

Затем вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} e^{x}\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} e^{x}\Big|_{0}^{b}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg} e^{a}]+\lim_{b\to\infty}[\operatorname{arctg} e^{b}-\operatorname{arctg}1]=\pi/2.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{\pi}{2}. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), окончательно получим $C=1/2\pi$.

272. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)=2C/(1+x^2)$. Найти постоянный параметр C.

273. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(0, \pi/2)$ равна $f(x)=C\sin 2x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

274. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана в интервале $(0, 1)$ равенством $f(x)=C\cdot\operatorname{arctg} x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

§ 3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — плотность распределения случайной величины X. Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a, b), то

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Все свойства математического ожидания, указанные выше для дискретных случайных величин (см. гл. IV, § 3), сохраняются и для непрерывных величин.

Если $Y = \varphi(X)$ — функция случайного аргумента X, возможные значения которого принадлежат всей оси Ox, то

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\,dx.$$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx.$$

Если математическое ожидание $M(X)$ существует и кривая распределения симметрична относительно прямой $x = C$, то $M(X) = C$.

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения. В частности, если распределение имеет два одинаковых максимума, то его называют *бимодальным*.

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которое определяется равенством

$$P[X < M_e(X)] = P[X > M_e(X)].$$

Геометрически медиану можно истолковать как точку, в которой ордината $f(x)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx,$$

или равносильным равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)\,dx,$$

или

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Все свойства дисперсии, указанные выше для дискретных случайных величин (см. гл. IV, § 3), сохраняются и для непрерывных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Если $Y=\varphi(X)$ — функция случайного аргумента X, причем возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-M[\varphi(x)]]^2 f(x)\,dx,$$

или

$$D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x) f(x)\,dx-[M[\varphi(X)]]^2.$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b[\varphi(x)-M[\varphi(X)]]^2 f(x)\,dx,$$

или

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b\varphi^2(x) f(x)\,dx-[M[\varphi(X)]]^2.$$

Начальный теоретический момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\,dx.$$

Центральный теоретический момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^k f(x)\,dx.$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$\nu_k=\int_a^b x^k f(x)\,dx, \qquad \mu_k=\int_a^b[x-M(X)]^k f(x)\,dx.$$

Очевидно, что если $k=1$, то $\nu_1=M(X)$, $\mu_1=0$; если $k=2$, то $\mu_2=D(X)$.

Центральные моменты выражаются через начальные моменты по формулам:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

275. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале $(0, 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

Решение. Используем формулу

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Подставив $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = 2x$, получим

$$M(X) = 2\int_0^1 x \cdot x\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = (2/3)\,x^3\Big|_0^1 = 2/3.$$

276. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = (1/2)\,x$ в интервале $(0;\ 2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

277. Случайная величина X в интервале $(-c,\ c)$ задана плотностью распределения $f(x) = 1/\left(\pi\sqrt{c^2 - x^2}\right)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

Решение. Используем формулу $M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$. Подставив $a = -c$, $b = c$, $f(x) = 1/\left(\pi\sqrt{c^2 - x^2}\right)$, получим

$$M(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{x\,dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}.$$

Учитывая, что подынтегральная функция нечетная и пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, заключаем, что интеграл равен нулю. Следовательно, $M(X) = 0$.

Этот результат можно получить сразу, если принять во внимание, что кривая распределения симметрична относительно прямой $x = 0$.

278. Случайная величина X задана плотностью вероятности (распределение Лапласа) $f(x) = (1/2)\,e^{-|x|}$. Найти математическое ожидание величины X.

279. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=c(x^2+2x)$ в интервале $(0, 1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти: а) параметр c; б) математическое ожидание величины X.

280. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0 \\ x/4 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения величины X:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 1/4 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 4, \\ 0 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найдем искомое математическое ожидание:

$$M(X)=\int_0^4 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^4 x\cdot(1/4)\,\mathrm{d}x=2.$$

281. Случайная величина X, возможные значения которой неотрицательны, задана функцией распределения $F(x)=1-\mathrm{e}^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$. Найти математическое ожидание величины X.

282. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=(1/2)\sin x$ в интервале $(0, \pi)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=\varphi(X)=X^2$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления математического ожидания функции $\varphi(X)$ от случайного аргумента X:

$$M[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где a и b — концы интервала, в котором заключены возможные значения X. Подставляя $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=(1/2)\sin x$, $a=0$, $b=\pi$ и интегрируя по частям, окончательно получим

$$M(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x=(\pi^2-4)/2.$$

283. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=\varphi(X)=X^2$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

284. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=x+0{,}5$ в интервале $(0,\ 1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=X^3$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

285. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2\cos 2x$ в интервале $(0,\ \pi/4)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти: а) моду; б) медиану X.

Решение. а) Легко убедиться, что функция $f(x)=2\cos 2x$ в открытом интервале $(0,\ \pi/4)$ не имеет максимума, поэтому X моду не имеет.

б) Найдем медиану $M_e(X)=m_e$, исходя из определения медианы. $P(X<m_e)=P(X>m_e)$, или, что то же, $P(X<m_e)=1/2$. Учитывая, что по условию возможные значения X положительны, перепишем это равенство так:

$$P(0<X<m_e)=1/2, \text{ или } 2\int\limits_0^{m_e}\cos 2x\,dx=\sin 2m_e=1/2.$$

Отсюда $2m_e=\arcsin 1/2=\pi/6$. Следовательно, искомая медиана $m_e=\pi/12$.

286. Случайная величина X в интервале $(2,\ 4)$ задана плотностью распределения $f(x)=-(3/4)x^2+(9/2)x-6$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X.

Решение. Представим плотность распределения в виде $f(x)=-(3/4)(x-3)^2+3/4$. Отсюда видно, что при $x=3$ плотность распределения достигает максимума; следовательно, $M_0(X)=3$. (Разумеется, можно было найти максимум методами дифференциального исчисления.)

Кривая распределения симметрична относительно прямой $x=3$, поэтому $M(X)=3$ и $M_e(X)=3$.

287. Случайная величина X в интервале $(3,\ 5)$ задана плотностью распределения $f(x)=-(3/4)x^2+6x-45/4$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану X.

288. Случайная величина X в интервале $(-1,\ 1)$ задана плотностью распределения $f(x)=1/(\pi\sqrt{1-x^2})$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти: а) моду; б) медиану X.

289. Случайная величина X при $x\geqslant 0$ задана плотностью вероятности (распределение Вейбулла)

$$f(x)=\frac{n}{x_0}x^{n-1}e^{-x^n/x_0};$$

$f(x)=0$ при $x<0$. Найти моду X.

290. Доказать, что математическое ожидание непрерывной случайной величины заключено между наименьшим и наибольшим ее возможными значениями.

Решение. Пусть X — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$; вне этого отрезка $f(x)=0$. Тогда $a \leqslant x \leqslant b$. Учитывая, что $f(x) \geqslant 0$, получим $af(x) \leqslant xf(x) \leqslant bf(x)$. Проинтегрируем это двойное неравенство в пределах от a до b:

$$a\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b xf(x)\,dx \leqslant b\int_a^b f(x)\,dx.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1, \quad \int_a^b xf(x)\,dx = M(X),$$

окончательно получим $a \leqslant M(X) \leqslant b$.

291. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to-\infty}[xF(x)]=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}[x(1-F(x))]=0$, то

$$M(X)=\int_0^{\infty}[1-F(x)]\,dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)\,dx.$$

Указание. Имеем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}xf(x)\,dx+\int_0^{\infty}xf(x)\,dx.$$

Заменить $f(x)$ в первом слагаемом на $F'(x)$, а во втором — на $[1-F(x)]'$.

292. Случайная величина X в интервале $(-c, c)$ задана плотностью распределения $f(x)=1/(\pi\sqrt{c^2-x^2})$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию X.

Решение. Будем искать дисперсию по формуле

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Подставляя $M(X)=0$ (кривая распределения симметрична относительно прямой $x=0$), $a=-c$, $b=c$, $f(x)=1/(\pi\sqrt{c^2-x^2})$, получим

$$D(X)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{c}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}.$$

Сделав подстановку $x=c\sin t$, окончательно имеем $D(X)=c^2/2$.

293. Случайная величина X в интервале $(-3, 3)$ задана плотностью распределения $f(x) = 1/(\pi\sqrt{9-x^2})$; вне этого интервала $f(x) = 0$. а) Найти дисперсию X; б) что вероятнее: в результате испытания окажется $X < 1$ или $X > 1$?

294. Доказать, что дисперсию непрерывной случайной величины X можно вычислить по формуле

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

Указание. Воспользоваться формулой

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx$$

и равенствами $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = M(X)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

295. Случайная величина X в интервале $(0, \pi)$ задана плотностью распределения $f(x) = (1/2)\sin x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

Решение. Найдем дисперсию по формуле

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

Подставив сюда $M(X) = \pi/2$ (кривая распределения симметрична относительно прямой $x = \pi/2$), $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = (1/2)\sin x$, получим

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx - \left[\frac{\pi}{2}\right]^2. \qquad (*)$$

Дважды интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \pi^2 - 4. \qquad (**)$$

Подставив $(**)$ в $(*)$, окончательно получим $D(X) = (\pi^2 - 8)/4$.

296. Случайная величина X в интервале $(0, 5)$ задана плотностью распределения $f(x) = (2/25)\,x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

297. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -2, \\ x/4 + 1/2 & \text{при} \quad -2 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -2, \\ 1/4 & \text{при} \quad -2 < x < 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-2}^{2} xf(x)\,dx=\int_{-2}^{2} x\cdot\frac{1}{4}\,dx=0$$

(подынтегральная функция нечетная, пределы интегрирования симметричны относительно начала координат).

Найдем искомую дисперсию, учитывая, что $M(X)=0$:

$$D(X)=\int_{-2}^{2}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx=\int_{-2}^{2} x^2\cdot\frac{1}{4}\,dx=\frac{2}{4}\int_{0}^{2} x^2\,dx=\frac{4}{3}.$$

298. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 1-x_0^3/x^3 & \text{при} \quad x \geqslant x_0 \ (x_0>0), \\ 0 & \text{при} \quad x < x_0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

Указание. Найти сначала плотность распределения, использовать формулу

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

299. Случайная величина X в интервале $(0, \pi)$ задана плотностью распределения $f(x)=(1/2)\sin x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию функции $Y=\varphi(X)=X^2$, не находя предварительно плотности распределения Y.

Решение. Используем формулу

$$D[\varphi(X)]=\int_{a}^{b}\varphi^2(x)f(x)\,dx-[M[\varphi(X)]]^2.$$

Подставив $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=(1/2)\sin x$, $a=0$, $b=\pi$, $M[\varphi(X)]=M[X^2]=(\pi^2-4)/2$ (см. задачу 282), получим

$$D(X^2)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x^4\sin x\,dx-\left[\frac{\pi^2-4}{2}\right]^2. \qquad (*)$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_{0}^{\pi} x^4\sin x\,dx=\pi^4-12\pi^2+48. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), окончательно имеем $D(X^2)=(\pi^4-16\pi^2+80)/4$.

300. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию функции $Y=\varphi(X)=X^2$, не находя предварительно плотности распределения Y.

Указание. Использовать формулу

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi^2(x) f(x)\,dx-[M[\varphi(X)]]^2$$

и то, что $M(X^2)=(\pi^2-8)/4$ (см. задачу 283).

301. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=x^n e^{-x}/n!$ при $x \geqslant 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию X.

Решение. а) Найдем математическое ожидание:

$$M(X)=\int_0^\infty xf(x)\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x\cdot x^n e^{-x}dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}\,dx.$$

Воспользуемся так называемой гамма-функцией, которая определяется равенством

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx. \qquad (*)$$

Как видим, аргумент (целое число n), стоящий под знаком гамма-функции, на единицу больше показателя степени буквы x, стоящей под знаком интеграла. Следовательно,

$$\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}\,dx=\Gamma(n+2). \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), получим

$$M(X)=\frac{\Gamma(n+2)}{n!}. \qquad (***)$$

Воспользуемся следующим свойством гамма-функции:

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Как видим, гамма-функция от целого аргумента равна факториалу от аргумента, уменьшенного на единицу. Следовательно,

$$\Gamma(n+2)=(n+1)! \qquad (****)$$

Подставив (****) в (***), получим

$$M(X)=\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}=n+1.$$

б) Найдем дисперсию. Учитывая, что

$$M(X)=n+1, \quad \int_0^\infty x^{n+2}e^{-x}\,dx=\Gamma(n+3),$$

получим

$$D(X)=\int_0^\infty x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^2\cdot x^n\cdot e^{-x}\,dx-$$

$$-(n+1)^2=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+2}e^{-x}\,dx-(n+1)^2=\frac{\Gamma(n+3)}{n!}-(n+1)^2=$$

$$=\frac{(n+2)!}{n!}-(n+1)^2=\frac{n!\,(n+1)\,(n+2)}{n!}-(n+1)^2=n+1.$$

Итак, $D(X)=n+1$.

302. Случайная величина X при $x\geqslant 0$ задана плотностью распределения (гамма-распределение)

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha e^{-x/\beta}\quad(\alpha>-1,\ \beta>0);$$

$f(x)=0$ при $x<0$. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию X.

Указание. Сделать подстановку $y=x/\beta$ и использовать гамма-функцию.

303. Доказать, что для любой непрерывной случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю.

Решение. По определению центрального момента первого порядка,

$$\mu_1=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]\,f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx-M(X)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=M(X)\quad\text{и}\quad\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1,$$

получим

$$\mu_1=M(X)-M(X)=0,$$

304. Доказать, что обычный момент второго порядка

$$\mu_2'=\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^2 f(x)\,dx$$

имеет наименьшее значение, если $c=M(X)$.

Решение. Преобразуем μ_2' так:

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [(x-M(X)) +$$

$$+ (M(X)-c)]^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)]^2 f(x)\,dx +$$

$$+2[M(X)-c] \int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)] f(x)\,dx + [M(X)-c]^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Принимая во внимание равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)] f(x)\,dx = \mu_1 = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)]^2 f(x)\,dx = \mu_2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

получим

$$\mu_2' = \mu_2 + [M(X)-c]^2. \qquad (*)$$

Отсюда видно, что μ_2' имеет наименьшее значение при $c=M(X)$, что и требовалось доказать,

Заметим, что из (*) следует, что $\mu_2 = \mu_2' - [M(X)-c]^2$, т. е. центральный момент второго порядка меньше любого обычного момента второго порядка, если $c \neq M(X)$.

305. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=0{,}5x$ в интервале $(0,\ 2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение. По формуле

$$\nu_k = \int_0^2 x^k f(x)\,dx$$

найдем начальные моменты:

$$\nu_1 = \int_0^2 x\cdot(0{,}5x)\,dx = \frac{4}{3}; \qquad \nu_2 = \int_0^2 x^2\cdot(0{,}5x)\,dx = 2;$$

$$\nu_3 = \int_0^2 x^3\cdot(0{,}5x)\,dx = 3{,}2; \qquad \nu_4 = \int_0^2 x^4\cdot(0{,}5x)\,dx = \frac{16}{3}.$$

Найдем центральные моменты. Центральный момент первого порядка любой случайной величины $\mu_1 = 0$.

Воспользуемся формулами, выражающими центральные моменты через начальные:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2;\ \mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3;\ \mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4.$$

Подставив в эти формулы ранее найденные начальные моменты, получим: $\mu_2=2/9$, $\mu_3=-8/135$, $\mu_4=16/135$.

306. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале $(0, 1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

§ 4. Равномерное распределение

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения X, плотность сохраняет постоянное значение, а именно $f(x)=1/(b-a)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

307. Плотность равномерного распределения сохраняет в интервале (a, b) постоянное значение, равное C; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти значение постоянного параметра C.

308. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение. Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения $f(x)=1/(b-a)$, где $(b-a)$ — длина интервала, в котором заключены возможные значения X; вне этого интервала $f(x)=0$. В рассматриваемой задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения X, равна 0,1, поэтому $f(x)=1/0,1=10$. Легко сообразить, что ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0,02, 0,08).

По формуле $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ получим

$$P(0,02<X<0,08)=\int\limits_{0,02}^{0,08} 10\,dx=0,6.$$

309. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

310. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

311. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

312. Закон равномерного распределения задан плотностью вероятности $f(x)=1/(b-a)$ в интервале (a, b); вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$.

313. Найти математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной в интервале (a, b).

Решение. График плотности равномерного распределения симметричен относительно прямой $x=(a+b)/2$, поэтому $M(X)=(a+b)/2$.

Итак, математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной в интервале (a, b), равно полусумме концов этого интервала. Разумеется, этот же результат можно получить по формуле

$$M(X)=\int_a xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

В частности, математическое ожидание случайной величины R, распределенной равномерно в интервале $(0, 1)$, равно

$$M(R)=(0+1)/2=1/2.$$

314. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2, 8)$.

315. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (a, b).

Решение. Используем формулу

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x-[M(X)]^2.$$

Подставив $f(x)=1/(b-a)$, $M(X)=(a+b)/2$ (см. задачу **313**) и выполнив элементарные выкладки, получим искомую дисперсию

$$D(X)=(b-a)^2/12.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X равно квадратному корню из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=(b-a)/(2\sqrt{3}).$$

В частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины R, распределенной равномерно в интервале $(0, 1)$, соответственно равны: $D(R)=1/12$, $\sigma(R)=1/(2\sqrt{3})$.

316. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2, 8).

317. Равномерно распределенная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=1/(2l)$ в интервале $(a-l,\ a+l)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

318. Диаметр круга x измерен приближенно, причем $a \leqslant x \leqslant b$. Рассматривая диаметр как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (a, b), найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

Решение. 1. Найдем математическое ожидание площади круга — случайной величины $Y=\varphi(K)=\pi X^2/4$ — по формуле

$$M[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx.$$

Подставив $\varphi(x)=\pi x^2/4$, $f(x)=1/(b-a)$ и выполнив интегрирование, получим

$$M[\pi X^2/4]=\pi(b^2+ab+a^2)/12.$$

2. Найдем дисперсию площади круга по формуле

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi^2(x) f(x)\, dx-[M[\varphi(X)]]^2.$$

Подставив $\varphi(x)=\pi x^2/4$, $f(x)=1/(b-a)$ и выполнив интегрирование, получим

$$D[\pi X^2/4]=(\pi^2/720)(b-a)^2(4b^2+7ab+4a^2).$$

319. Ребро куба x измерено приближенно, причем $a \leqslant x \leqslant b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (a, b), найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

320. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X — в интервале (a, b), Y — в интервале (c, d). Найти математическое ожидание произведения XY.

Указание. Воспользоваться решением задачи 313.

321. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X — в интервале (a, b), Y — в интервале (c, d). Найти дисперсию произведения XY.

Решение. Воспользуемся формулой

$$D(XY)=M[(XY)^2]-[M(XY)]^2=M(X^2Y^2)-[M(XY)]^2.$$

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, поэтому

$$D(XY)=M(X^2)\cdot M(Y^2)-[M(X)\cdot M(Y)]^2. \qquad (*)$$

Найдем $M(X^2)$ по формуле

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx.$$

Подставляя $\varphi(x) = x^2$, $f(x) = 1/(b-a)$ и выполняя интегрирование, получим

$$M(X^2) = (b^2 + ab + a^2)/3. \qquad (**)$$

Аналогично найдем

$$M(Y^2) = (c^2 + cd + d^2)/3. \qquad (***)$$

Подставив $M(X) = (a+b)/2$, $M(Y) = (c+d)/2$, а также (**) и (***) в (*), окончательно получим

$$D(XY) = (a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2)/9 - [(a+b)^2 (c+d)^2/16].$$

§ 5. Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)},$$

где a—математическое ожидание, σ—среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β),

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\, dx$—функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ,

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

В частности, при $a = 0$ справедливо равенство

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

Асимметрия, эксцесс, мода и медиана нормального распределения соответственно равны:

$$A_s = 0, \ E_k = 0, \ M_0 = a, \ M_e = a, \text{ где } a = M(X).$$

322. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $a = 3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$. Написать плотность вероятности X.

323. Написать плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X, зная, что $M(X) = 3$, $D(X) = 16$.

324. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/50}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

325. Дана функция распределения нормированного нормального закона $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt$. Найти плотность распределения $f(x)$.

326. Доказать, что параметры a и σ — плотности нормального распределения — являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением X.

Указание. При нахождении $M(X)$ и $D(X)$ следует ввести новую переменную $z=(x-a)/\sigma$ и использовать интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz=\sqrt{2\pi}$.

327. Доказать, что функция Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-z^2/2}\,dz$$

нечетна: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Указание. Положить $z=-t$ в равенстве

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{-x}e^{-z^2/2}\,dz.$$

328. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение. Воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha=12$, $\beta=14$, $a=10$ и $\sigma=2$, получим $P(12 < X < 14)=\Phi(2)-\Phi(1)$. По таблице приложения 2 находим: $\Phi(2)=0{,}4772$, $\Phi(1)=0{,}3413$. Искомая вероятность $P(12 < X < 14)=0{,}1359$.

329. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

330. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

Указание. Из равенства $P(32 < X < 68) = 1$ предварительно найти σ.

331. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Решение. Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, поэтому применима формула $P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$. Положив $\delta = 15$, $\sigma = 10$, находим $P(|X| < 15) = 2\Phi(1,5)$. По таблице приложения 2 находим: $\Phi(1,5) = 0,4332$. Искомая вероятность

$$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

332. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

333. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

334. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Решение. Так как X — отклонение (диаметра шарика от проектного размера), то $M(X) = a = 0$.

Воспользуемся формулой $P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$. Подставив $\delta = 0,7$, $\sigma = 0,4$, получим

$$P(|X| < 0,7) = 2\Phi\left(\frac{0,7}{0,4}\right) = 2\Phi(1,75) = 2\cdot 0,4599 = 0,92.$$

Таким образом, вероятность отклонения, меньшего 0,7 мм, равна 0,92. Отсюда следует, что примерно 92 шарика из 100 окажутся годными.

335. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

336. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста, длина которого 30 м и ширина 8 м, сбросил бомбы. Случайные величины X и Y (расстояния от вертикальной и горизонтальной осей симметрии моста до места падения бомбы) независимы и распределены нормально со средними квадратическими отклонениями, соответственно равными 6 и 4 м, и математическими ожиданиями, равными нулю. Найти: а) вероятность попадания в мост одной сброшенной бомбы; б) вероятность разрушения моста, если сброшены две бомбы, причем известно, что для разрушения моста достаточно одного попадания.

337. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал (10, 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0, 10)?

Решение. Так как нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a = 10$, то площади, ограниченные сверху нормальной кривой и снизу — интервалами (0, 10) и (10, 20), равны между собой. Поскольку эти площади численно равны вероятностям попадания X в соответствующий интервал, то

$$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0,3.$$

338. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал (10, 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35, 40)?

339. Доказать, что

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t),$$

т. е., что значение удвоенной функции Лапласа при заданном t определяет вероятность того, что отклонение

$X-a$ нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше σt.

Указание. Использовать формулу $P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)$, положив $\delta/\sigma=t$.

340. Вывести «правило трех сигм»: вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973.

Указание. Использовать решение задачи 339, положив $t=3$.

341. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.

342. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma=5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

343. Станок-автомат изготовляет валики, причем контролируется их диаметр X. Считая, что X — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $a=10$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma=0,1$ мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

344. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Найти моду и медиану X.

Решение. Модой $M_0(X)$ называют то возможное значение X, при котором плотность распределения имеет максимум. Легко убедиться, что при $x=a$ производная $f'(a)=0$; при $x<a$ производная $f'(x)>0$, при $x>a$ производная $f'(x)<0$; таким образом, точка $x=a$ есть точка максимума, следовательно, $M_0(X)=a$.

Медианой $M_e(X)$ называют то возможное значение X, при котором ордината $f(x)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения. Так как нормальная кривая [график функции $f(x)$] симметрична относительно прямой $x=a$, то ордината $f(a)$ делит пополам площадь, ограниченную нормальной кривой. Следовательно, $M_e(X)=a$.

Итак, мода и медиана нормального распределения совпадают с математическим ожиданием a.

345. Случайная величина X распределена нормально, причем математическое ожидание $a=0$ и среднее квадратическое отклонение равно σ. Найти значение σ, при котором вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) $(\alpha > 0,\ \beta > \alpha)$, будет наибольшей.

Указание. Воспользоваться формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\beta/\sigma) - \Phi(\alpha/\sigma) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz = \varphi(\sigma);$$

найти σ из уравнения $\varphi'(\sigma)=0$.

§ 6. Показательное распределение и его числовые характеристики

Показательным (*экспоненциальным*) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \qquad (*)$$

где λ — постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределения соответственно равны:

$$M(X) = 1/\lambda,\quad D(X) = 1/\lambda^2,\quad \sigma(X) = 1/\lambda.$$

Таким образом, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

346. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=5$.

Решение. Подставив $\lambda=5$ в соотношения (*) и (**), получим

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ 5e^{-5x} & \text{при } x\geqslant 0; \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ 1-e^{-5x} & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$$

347. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=6$.

348. Найти параметр λ показательного распределения: а) заданного плотностью $f(x)=0$ при $x<0$, $f(x)=2e^{-2x}$ при $x\geqslant 0$; б) заданного функцией распределения $F(x)=0$ при $x<0$ и $F(x)=1-e^{-0,4x}$ при $x\geqslant 0$.

349. Доказать, что если непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, то вероятность попадания X в интервал (a, b) равна $e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

Решение. Первый способ. Пусть величина X задана функцией распределения $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x\geqslant 0)$. Тогда вероятность попадания X в интервал (a, b) (см. гл. VI, § 1)

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=[1-e^{-\lambda b}]-[1-e^{-\lambda a}]=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Второй способ. Пусть величина X задана плотностью распределения $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(x\geqslant 0)$. В этом случае (см. гл. VI, § 2)

$$P(a<X<b)=\int_a^b e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_a^b=$$

$$=-[e^{-\lambda b}-e^{-\lambda a}]=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

350. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\geqslant 0$; при $x<0$ $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,13, 0,7).

Решение. Используем формулу

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Учитывая, что, по условию, $a=0{,}13$, $b=0{,}7$, $\lambda=3$, и пользуясь таблицей значений функции e^{-x}, получим

$$P(0{,}13<X<0{,}7)=e^{-3\cdot 0{,}13}-e^{-3\cdot 0{,}7}=e^{-0{,}39}-e^{-2{,}1}=$$

$$=0{,}677-0{,}122=0{,}555.$$

351. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $x\geqslant 0$ плотностью распределения $f(x)=0{,}04\cdot e^{-0{,}04x}$; при $x<0$ функции $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1, 2).

352. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения $F(x)=1-e^{-0,6x}$ при $x\geqslant 0$; при $x<0$ $F(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(2, 5)$.

353. Найти математическое ожидание показательного распределения

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad (x\geqslant 0); \quad f(x)=0 \quad (x<0).$$

Решение. Используем формулу

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

Учитывая, что $f(x)=0$ при $x<0$ и $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x\geqslant 0$, получим

$$M(X)=\lambda\int_{0}^{\infty} x\cdot e^{-\lambda x}dx.$$

Интегрируя по частям по формуле

$$\int_{0}^{\infty} u\,dv=uv\Big|_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty} v\,du,$$

положив $u=x$, $dv=e^{-\lambda x}\,dx$ и выполнив выкладки, окончательно получим $M(X)=1/\lambda$.

Итак, математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ.

354. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при $x\geqslant 0$: а) плотностью $f(x)=5e^{-5x}$; б) функцией распределения $F(x)=1-e^{-0,1x}$.

355. а) Доказать, что если непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, то вероятность того, что X примет значение, меньшее математического ожидания $M(X)$, не зависит от величины параметра λ; б) найти вероятность того, что $X>M(X)$.

356. Найти: а) дисперсию; б) среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x\geqslant 0$; $f(x)=0$ при $x<0$.

Решение. а) Используем формулу

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Учитывая, что $f(x)=0$ при $x<0$, $M(X)=1/\lambda$ (см. задачу **353**), получим

$$D(X)=\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}\,dx-(1/\lambda)^2.$$

Интегрируя дважды по частям, найдем

$$\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}\,dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Следовательно, искомая дисперсия

$$D(X)=2/\lambda^2-1/\lambda^2=1/\lambda^2,$$

т. е. дисперсия показательного распределения равна величине, обратной λ^2.

б) Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1/\lambda^2}=1/\lambda,$$

т. е. среднее квадратическое отклонение показательного распределения равно величине, обратной λ.

357. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности $f(x)=10e^{-10x}$ $(x\geqslant 0)$.

358. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного закона, заданного функцией распределения $F(x)=1-e^{-0,4x}$ $(x\geqslant 0)$.

359. Студент помнит, что плотность показательного распределения имеет вид $f(x)=0$ при $x<0$, $f(x)=Ce^{-\lambda x}$ при $x\geqslant 0$; однако он забыл, чему равна постоянная C. Требуется найти C.

Указание. Использовать свойство плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1.$$

360. Найти теоретический центральный момент третьего порядка $\mu_3=M[X-M(X)]^3$ показательного распределения.

Указание. Использовать решения задач **353** и **356**.

361. Найти асимметрию $A_s=\mu_3/\sigma^3(X)$ показательного распределения.

Указание. Использовать решения задач **356** и **360**.

362. Найти теоретический центральный момент четвертого порядка $\mu_4 = M[X - M(X)]^4$ показательного распределения.

363. Найти эксцесс $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3$ показательного распределения.

364. Доказать, что непрерывная случайная величина T — время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока с заданной интенсивностью λ (см. гл. IV, § 2) — имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \geqslant 0)$.

Решение. Предположим, что в момент t_0 наступило событие A_1 потока. Пусть $t_1 = t_0 + t$ (рекомендуем для наглядности начертить ось времени и отметить на ней точки t_0 и t_1).

Если хотя бы одно событие потока, следующее за событием A_1, произойдет в интервале, заключенном *внутри* интервала (t_0, t_1), например, в интервале (t_0, t_2), то время T между появлениями двух последовательных событий окажется меньшим t, т. е. окажется, что $T < t$.

Для того чтобы найти вероятность $P(T < t)$, примем во внимание, что события — «внутри интервала (t_0, t_1) появилось хотя бы одно событие потока» и «внутри интервала (t_0, t_1) не появилось ни одного события потока» — противоположны (сумма их вероятностей равна единице).

Вероятность непоявления за время t ни одного события потока $P_t(0) = \frac{[(\lambda t)^0 \cdot e^{-\lambda t}]}{0!} = e^{-\lambda t}$. Следовательно, интересующая нас вероятность противоположного события $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, или [по определению функции распределения $F(t) = P(T < t)$] имеем $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, что и требовалось доказать.

365. Задана интенсивность простейшего потока $\lambda = 5$. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины T — времени между появлениями двух последовательных событий потока.

Указание. Использовать решение задачи 364.

366. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T — времени ожидания очередной машины контролером,— если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t) = 5e^{-5t}$.

Указание. Время ожидания машины контролером и время прохождения машин через контрольный пункт распределены одинаково.

§ 7. Функция надежности

Элементом называют некоторое устройство, независимо от того, «простое» оно или «сложное». Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0=0$, а в момент t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину — длительность времени безотказной работы элемента, а через λ — интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t} \quad (\lambda>0)$$

определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t.

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t)=e^{-\lambda t}.$$

367. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0,01t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=50$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. а) Так как функция распределения $F(t)=1-e^{-0,01t}$ определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t, то, подставив $t=50$ в функцию распределения, получим вероятность отказа:

$$F(50)=1-e^{-0,01\cdot 50}=1-e^{-0,5}=1-0,606=0,394;$$

б) события «элемент откажет» и «элемент не откажет» — противоположные, поэтому вероятность того, что элемент не откажет

$$P=1-0,394=0,606.$$

Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь функцией надежности $R(t)=e^{-\lambda t}$, которая определяет вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(50)=e^{-0,01\cdot 50}=e^{-0,5}=0,606.$$

368. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0,03t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=100$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

369. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0,02t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=6$ ч: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

Решение. а) Вероятность отказа первого элемента

$$P_1 = F_1(6) = 1 - e^{-0{,}02 \cdot 6} = 1 - e^{-0{,}12} = 1 - 0{,}887 = 0{,}113.$$

Вероятность отказа второго элемента

$$P_2 = 1 - e^{-0{,}05 \cdot 6} = 1 - e^{-0{,}3} = 1 - 0{,}741 = 0{,}259.$$

Искомая вероятность того, что оба элемента откажут, по теореме умножения вероятностей

$$P_1 P_2 = 0{,}113 \cdot 0{,}259 = 0{,}03.$$

б) Вероятность безотказной работы первого элемента

$$q_1 = R_1(6) = e^{-0{,}02 \cdot 6} = e^{-0{,}12} = 0{,}887.$$

Вероятность безотказной работы второго элемента

$$q_2 = R_2(6) = e^{-0{,}05 \cdot 6} = e^{-0{,}3} = 0{,}741.$$

Искомая вероятность безотказной работы обоих элементов

$$q_1 \cdot q_2 = 0{,}887 \cdot 0{,}741 = 0{,}66.$$

в) Вероятность того, что откажет только один элемент

$$P_1 q_2 + P_2 q_1 = 0{,}113 \cdot 0{,}741 + 0{,}259 \cdot 0{,}887 = 0{,}31.$$

г) Вероятность того, что хотя бы один элемент откажет

$$P = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0{,}66 = 0{,}34.$$

370. Испытывают три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$; для второго $F_2(t) = -e^{-0{,}2t}$, для третьего элемента $F_3(t) = 1 - e^{-0{,}3t}$. Найти вероятности того, что в интервале времени (0, 5) ч откажут: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

371. Производится испытание трех элементов, работающих независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $f_1(t) = 0{,}1e^{-0{,}1t}$, для второго $f_2(t) = 0{,}2e^{-0{,}2t}$, для третьего элемента $f_3(t) = 0{,}3e^{-0{,}3t}$. Найти вероятности того, что в интервале времени (0, 10) ч откажут: а) хотя бы один элемент; б) не менее двух элементов.

Указание. Воспользоваться результатами, полученными при решении задачи 370.

372. Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством $R(t) = e^{-\lambda t}$, где положительное число λ — интенсивность отказов. Доказать характеристическое свойство показательного закона надежности: вероятность безотказной работы элемента в интервале времени длительностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности интервала t (при заданной интенсивности отказов λ).

Решение. Введем обозначения событий: A — безотказная работа элемента в интервале $(0, t_0)$ длительностью t_0; B — безотказная работа элемента в интервале (t_0, t_0+t) длительностью t.

Тогда AB — безотказная работа в интервале $(0, t_0+t)$ длительностью t_0+t.

По формуле $R(t)=e^{-\lambda t}$ найдем вероятности этих событий:

$$P(A)=e^{-\lambda t_0},\ P(B)=e^{-\lambda t},\ P(AB)=e^{-\lambda(t_0+t)}=e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}.$$

Найдем условную вероятность того, что элемент будет работать безотказно в интервале (t_0, t_0+t) при условии, что он уже проработал безотказно в предшествующем интервале $(0, t_0)$:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}}=e^{-\lambda t}.$$

Так как в полученной формуле не содержится t_0, а содержится только t, то это и означает, что время работы в предшествующем интервале не влияет на величину вероятности безотказной работы на последующем интервале, а зависит только от длины t последующего интервала (t_0+t), что и требовалось доказать.

Другими словами, условная вероятность $P_A(B)$ безотказной работы в интервале времени длительностью t, вычисленная в предположении, что элемент проработал безотказно на предшествующем интервале, равна безусловной вероятности $P(B)$.

Глава седьмая

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО И ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

§ 1. Функция одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют *функцией случайного аргумента* X и записывают $Y=\varphi(X)$.

Если X — дискретная случайная величина и функция $Y=\varphi(X)$ монотонна, то различным значениям X соответствуют различные значения Y, причем вероятности соответствующих значений X и Y одинаковы. Другими словами, возможные значения Y находят из равенства

$$y_i=\varphi(x_i),$$

где x_i — возможные значения X; вероятности возможных значений Y находят из равенства

$$P(Y=y_i)=P(X=x_i).$$

Если же $Y=\varphi(X)$ — немонотонная функция, то, вообще говоря, различным значениям X могут соответствовать одинаковые значения Y (так будет, если возможные значения X попадут в интервал, в котором функция $\varphi(X)$ не монотонна). В этом случае для отыскания вероятностей возможных значений Y следует сложить вероятности тех возможных значений X, при которых Y принимает одинаковые значения. Другими словами, вероятность повторяющегося значения Y равна сумме вероятностей тех возможных значений X, при которых Y принимает одно и то же значение.

Если X — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y=\varphi(x)$ — дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находят из равенства

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|.$$

Если функция $y=\varphi(x)$ в интервале возможных значений X не монотонна, то следует разбить этот интервал на такие интервалы, в которых функция $\varphi(x)$ монотонна, и найти плотности распределений $g_i(y)$ для каждого из интервалов монотонности, а затем представить $g(y)$ в виде суммы:

$$g(y)=\sum g_i(y).$$

Например, если функция $\varphi(x)$ монотонна в двух интервалах, в которых соответствующие обратные функции равны $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$, то

$$g(y)=f[\psi_1(y)]\cdot|\psi_1'(y)|+f[\psi_2(y)]\cdot|\psi_2'(y)|.$$

373. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5

Найти закон распределения случайной величины $Y=3X$.

Решение. Найдем возможные значения величины $Y=3X$. Имеем: $y_1=3\cdot1=3$; $y_2=3\cdot3=9$; $y_3=3\cdot5=15$. Видим, что различным возможным значениям X соответствуют различные значения Y. Это объясняется тем, что функция $y=\varphi(x)=3x$ монотонна. Найдем вероятности возможных значений Y. Для того чтобы $Y=y_1=3$ достаточно, чтобы величина X приняла значение $x_1=1$. Вероятность же события $X=1$ по условию равна 0,4; следовательно, и вероятность события $Y=y_1=3$ также равна 0,4.

Аналогично получим вероятности остальных возможных значений Y:

$$P(Y=9)=P(X=3)=0,1;$$
$$P(Y=15)=P(X=5)=0,5.$$

Напишем искомый закон распределения Y:

Y	3	9	15
p	0,4	0,1	0,5

374. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	3	6	10
p	0,2	0,1	0,7

Найти закон распределения случайной величины $Y = 2X+1$.

375. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-1	-2	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2$.

Решение. Найдем возможные значения Y:

$$y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1, \quad y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4,$$
$$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1, \quad y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4.$$

Итак, различным значениям X соответствуют одинаковые значения Y. Это объясняется тем, что возможные значения X принадлежат интервалу, на котором функция $Y = X^2$ не монотонна.

Найдем вероятности возможных значений Y. Для того чтобы величина Y приняла значение $Y=1$, достаточно, чтобы величина X приняла значение $X = -1$ или $X = 1$. Последние два события несовместны, их вероятности соответственно равны 0,3 и 0,2. Поэтому вероятность события $Y=1$ по теореме сложения

$$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5.$$

Аналогично найдем вероятность возможного значения $Y=4$:

$$P(Y=4) = P(X=-2) + P(X=2) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5.$$

Напишем искомый закон распределения величины Y:

Y	1	4
p	0,5	0,5

376. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,2	0,7	0,1

Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

377. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, возможные значения которой заключены в интервале (a, b). Найти плотность распределения случайной величины $Y = 3X$.

Решение. Так как функция $y = 3x$ дифференцируемая и строго возрастает, то применима формула

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|, \qquad (*)$$

где $\psi(y)$ — функция, обратная функции $y = 3x$.

Найдем $\psi(y)$:

$$\psi(y) = x = y/3.$$

Найдем $f[\psi(y)]$:

$$f[\psi(y)] = f(y/3). \qquad (**)$$

Найдем производную $\psi'(y)$:

$$\psi'(y) = (y/3)' = 1/3.$$

Очевидно, что

$$|\psi'(y)| = 1/3. \qquad (***)$$

Найдем искомую плотность распределения, для чего подставим (**) и (***) в (*): $g(y) = (1/3) f \mid (y/3)$.

Так как x изменяется в интервале (a, b) и $y = 3x$, то $3a < y < 3b$.

378. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, возможные значения которой заключены в интервале (a, b). Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y, если: а) $Y = -3X$; б) $Y = AX + B$.

379. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3 + 2$.

380. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, возможные значения которой заключены в интервале $(0, \infty)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y, если: а) $Y = e^{-X}$; б) $Y = \ln X$; в) $Y = X^3$; г) $Y = 1/X^2$; д) $Y = \sqrt{X}$.

381. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, возможные значения которой заключены в интервале $(-\infty, \infty)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y, если: а) $Y = X^2$; б) $Y = e^{-X^2}$; в) $Y = |X|$; г) $Y = \cos X$; д) $Y = \operatorname{arctg} X$; е) $Y = 1/(1 + X^2)$.

382. В прямоугольной системе координат xOy из точки $A\,(4; 0)$ наудачу (под произвольным углом t) проведен луч, пересекающий ось Oy. Найти дифференциальную функцию $g(y)$ распределения вероятностей ординаты y точки пересечения проведенного луча с осью Oy.

Решение. Угол t можно рассматривать как случайную величину, распределенную равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, причем в этом интервале плотность распределения

$$f(t) = \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)} = \frac{1}{\pi};$$

вне рассматриваемого интервала $f(t) = 0$.

Из рис. 7 следует, что ордината y связана с углом t следующей зависимостью: $y = 4 \operatorname{tg} t$. Эта функция в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ монотонно возрастает, поэтому для отыскания искомой плотности распределения $g(y)$ применима формула

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|, \qquad (*)$$

где $\psi(y)$ — функция, обратная функции $y=4\,\mathrm{tg}\,t$.

Найдем $\psi(y)$:

$$\psi(y)=t=\mathrm{arctg}\,(y/4).$$

Найдем $\psi'(y)$:

$$\psi'(y)=4/(16+y^2).$$

Следовательно,

$$|\psi'(y)|=4/(16+y^2). \qquad (**)$$

Найдем $f[\psi(y)]$. Так как $f(t)=1/\pi$, то

$$f[\psi(y)]=1/\pi. \qquad (***)$$

Подставив (**) и (***) в (*), окончательно получим

$$g(y)=\frac{4}{\pi(16+y^2)},$$

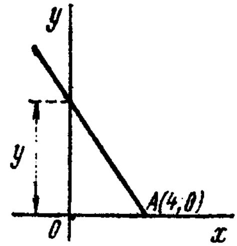

Рис. 7

причем $-\infty < y < \infty$ (последнее следует из того, что $y=4\,\mathrm{tg}\,t$ и $-\pi/2 < t < \pi/2$).

Контроль:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy=\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2}=\frac{4}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2}=\frac{4\cdot 2\cdot \pi}{\pi\cdot 4\cdot 2}=1.$$

383. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y=\sin X$.

Решение. Найдем плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, поэтому в этом интервале

$$f(x)=\frac{1}{\pi/2-(-\pi/2)}=\frac{1}{\pi};$$

вне рассматриваемого интервала $f(x)=0$.

Функция $y=\sin x$ в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ монотонна, следовательно, в этом интервале она имеет обратную функцию $x=\psi(y)=\arcsin y$. Найдем производную $\psi'(y)$:

$$\psi'(y)=1/\sqrt{1-y^2}.$$

Найдем искомую плотность распределения по формуле

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|.$$

Учитывая, что $f(x)=1/\pi$ (следовательно, $f[\psi(y)]=1/\pi$) и $|\psi'(y)|=1/\sqrt{1-y^2}$, получим

$$g(y)=1/(\pi\sqrt{1-y^2}).$$

Так как $y=\sin x$, причем $-\pi/2 < x < \pi/2$, то $-1 < y < 1$. Таким образом, в интервале $(-1, 1)$ имеем $g(y)=1/(\pi\sqrt{1-y^2})$; вне этого интервала $g(y)=0$.

Контроль:

$$\int_{-1}^{1} g(y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_0^1=$$
$$=2/\pi\cdot\pi/2=1.$$

384. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, \pi/2)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y=\sin X$.

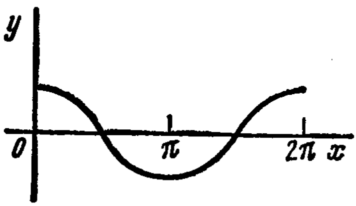

Рис. 8

385. Задана плотность распределения случайной величины X: $f(x)=1/\pi$ в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y=\operatorname{tg} X$.

386. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y=\cos X$.

Решение. Найдем плотность распределения $f(x)$ случайной величины X: в интервале $(0, 2\pi)$ имеем

$$f(x)=1/(2\pi-0)=1/2\pi;$$

вне этого интервала $f(x)=0$.

Из уравнения $y=\cos x$ найдем обратную функцию $x=\psi(y)$. Так как в интервале $(0, 2\pi)$ функция $y=\cos x$ не монотонна, то разобьем этот интервал на интервалы $(0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi)$, в которых эта функция монотонна (рис. 8). В интервале $(0, \pi)$ обратная функция $\psi_1(y)=\arccos y$; в интервале $(\pi, 2\pi)$ обратная функция $\psi_2(y)=-\arccos y$. Искомая плотность распределения может быть найдена из равенства

$$g(y)=f[\psi_1(y)]\cdot|\psi_1'(y)|+f[\psi_2(y)]\cdot|\psi_2'(y)|. \qquad (*)$$

Найдем производные обратных функций:

$$\psi_1'(y)=(\arccos y)'=-1/\sqrt{1-y^2},\quad \psi_2'(y)=(-\arccos y)'=1/\sqrt{1-y^2}.$$

Найдем модули производных:

$$|\psi_1'(y)|=1/\sqrt{1-y^2},\quad |\psi_2'(y)|=1/\sqrt{1-y^2}. \qquad (**)$$

Учитывая, что $f(x)=1/2\pi$, получим

$$f[\psi_1(y)]=1/2\pi,\quad f[\psi_2(y)]=1/2\pi. \qquad (***)$$

Подставляя (**) и (***) в (*), имеем

$$g(y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Так как $y=\cos x$, причем $0<x<2\pi$, то $-1<y<1$. Таким образом, в интервале $(-1, 1)$ искомая плотность распределения $g(y)=1/(\pi\sqrt{1-y^2})$; вне этого интервала $g(y)=0$.

Контроль:

$$\int\limits_{-1}^{1} g(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin 1=$$
$$=2/\pi\cdot\pi/2=1.$$

387. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y=\cos X$.

388. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным a, и средним квадратическим отклонением, равным σ. Доказать, что линейная функция $Y=AX+B$ также распределена нормально, причем

$$M(Y)=Aa+B, \quad \sigma(Y)=|A|\sigma.$$

Решение. Напишем плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Функция $y=Ax+B$ монотонна, поэтому применима формула

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|. \qquad (*)$$

Найдем $x=\psi(y)$ из уравнения $y=Ax+B$:

$$\psi(y)=(y-B)/A.$$

Найдем $f[\psi(y)]$:

$$f[\psi(y)]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{[(y-B)/A-a]^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{[y-(Aa+B)]^2}{2(A\sigma)^2}}. \qquad (**)$$

Найдем $\psi'(y)$:

$$\psi'(y)=[(y-B)/A]'=1/A.$$

Найдем $|\psi'(y)|$:

$$|\psi'(y)|=1/|A|. \qquad (***)$$

Подставляя (**) и (***) в (*), имеем

$$g(y)=\frac{1}{(|A|\sigma)\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{[y-(Aa+B)]^2}{2(A\sigma)^2}}.$$

Отсюда видно, что линейная функция $Y=AX+B$ распределена нормально, причем $M(Y)=Aa+B$ и $\sigma(Y)=|A|\sigma$, что и требовалось доказать.

389. Задана плотность $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $(-\infty<x<\infty)$ нормально распределенной случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Из уравнения $y=x^2$ найдем обратную функцию. Так как в интервале $(-\infty, \infty)$ функция $y=x^2$ не монотонна, то разобьем этот интервал на интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, в которых рассматриваемая функция монотонна. В интервале $(-\infty, 0)$ обратная функция $\psi_1(y)=-\sqrt{y}$; в интервале $(0, \infty)$ обратная функция $\psi_2(y)=\sqrt{y}$.

Искомая плотность распределения может быть найдена из равенства

$$g(y)=f[\psi_1(y)]\cdot|\psi_1'(y)|+f[\psi_2(y)]\cdot|\psi_2'(y)|. \qquad (*)$$

Найдем производные обратных функций:

$$\psi_1'(y)=-1/(2\sqrt{y}), \qquad \psi_2'(y)=1/(2\sqrt{y}).$$

Найдем модули производных:

$$|\psi_1'(y)|=1/(2\sqrt{y}), \qquad |\psi_2'(y)|=1/(2\sqrt{y}). \qquad (**)$$

Учитывая, что $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $\psi_1(y)=-\sqrt{y}$, $\psi_2(y)=\sqrt{y}$, получим

$$f[\psi_1(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}, \qquad f[\psi_2(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}. \qquad (***)$$

Подставляя (**) и (***) в (*), имеем

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}.$$

Так как $y=x^2$, причем $-\infty<x<\infty$, то $0<y<\infty$.

Таким образом, в интервале $(0, \infty)$ искомая плотность распределения

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2};$$

вне этого интервала $g(y)=0$.

Контроль:

$$\int_0^\infty g(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y/2}\,dy.$$

Положив $y=t^2$ и, следовательно, $dy=2t\,dt$, получим

$$\int_0^\infty g(y)\,dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt.$$

Учитывая, что интеграл Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, найдем

$$\int\limits_0^\infty g(y)\,dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.$$

390. Задана плотность $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ нормально распределенной случайной величины X. Найти плотность распределения случайной величины $Y = (1/2)X^2$.

391. Задана плотность распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $y = (1/4)X^2$.

392. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = (1/2)\sin x$ в интервале $(0, \pi)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \varphi(X) = X^2$, определив предварительно плотность распределения $g(Y)$ величины Y.

Решение. Найдем сначала плотность $g(y)$ случайной величины Y. Так как функция $y = \varphi(x) = x^2$ для рассматриваемых значений x $(0 < x < \pi)$ строго возрастающая, то плотность $g(y)$ будем искать по формуле

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|,$$

где $\psi(y) = \sqrt{y}$ — функция, обратная функции $Y = x^2$. Подставляя $\psi(y) = \sqrt{y}$ и учитывая, что $f(x) = (1/2)\sin x$, $|\psi'(y)| = |(\sqrt{y})'| = 1/(2\sqrt{y})$, получим

$$g(y) = \sin\sqrt{y}/(4\sqrt{y}).$$

Найдем искомое математическое ожидание величины Y, учитывая, что возможные значения Y заключены в интервале $(0, \pi^2)$ [так как $y = x^2$ и $0 < x < \pi$, то $0 < y < \pi^2$]:

$$M(Y) = \int\limits_0^{\pi^2} y g(y)\,dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi^2} \frac{y\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy.$$

Пользуясь подстановкой $y = t^2$, получим

$$M(Y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} t^2 \sin t\,dt.$$

Интегрируя дважды по частям, окончательно имеем

$$M(Y) = M(X^2) = (\pi^2 - 4)/2.$$

Замечание. Решение, приведенное выше, преследует учебные цели. Гораздо быстрее ведет к цели формула

$$M[X^2]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x \,dx=(\pi^2-4)/2.$$

Это же замечание относится и к задаче **393**.

393. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=\varphi(X)=X^2$.

394. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=(1/2)\sin x$ в интервале $(0, \pi)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию функции $Y=\varphi(X)=X^2$, используя плотность распределения $g(y)$.

Решение. Используем формулу

$$D(Y)=\int_c^d y^2 g(y)\,dy-[M(Y)]^2,$$

где c и d — концы интервала, в котором заключены возможные значения Y. Подставляя $g(y)=\sin\sqrt{y}/4\sqrt{y}$, $M(Y)=(\pi^2-4)/2$ (см. задачу **392**) и учитывая, что $c=0$ и $d=\pi^2$ (так как $y=x^2$ и $0<x<\pi$, то $0<y<\pi^2$), получим

$$D(Y)=D(X^2)=\int_0^{\pi^2} y^2\cdot\frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}\,dy-\left[\frac{\pi^2-4}{2}\right]^2. \qquad (*)$$

Интегрируя сначала с помощью подстановки $y=t^2$, а потом четырежды по частям, имеем

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{y^2\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy=\frac{\pi^4}{2}-6\pi^2+24. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), окончательно получим

$$D(X^2)=(\pi^4-16\pi^2+80)/4.$$

395. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию функции $Y=\varphi(X)=X^2$.

Указание. Предварительно найти плотность распределения $g(y)=\cos\sqrt{y}/2\sqrt{y}$ величины $Y=X^2$; использовать формулу

$$D(Y)=\int_0^{\pi^2/4} y^2 g(y)\,dy-[M(Y)]^2,$$

где $M(Y)=(\pi^2-8)/4$ (см. задачу 393). При вычислении интеграла сначала воспользоваться подстановкой $y=t^2$, а затем интегрировать по частям.

396. Ребро куба измерено приближенно, причем $a \leqslant x \leqslant b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (a, b), найти: а) математическое ожидание объема куба; б) дисперсию объема куба.

Указание. Предварительно найти плотность распределения

$$g(y)=\frac{1}{3(b-a)\,y^{2/3}}$$

случайной величины $y=X^3$. Использовать формулы

$$M(Y)=\int_{a^3}^{b^3} yg(y)\,dy, \qquad D(Y)=\int_{a^3}^{b^3} y^2g(y)\,dy-[M(Y)]^2.$$

397. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $G(y)$ случайной величины $Y=3X+2$.

Решение. По определению функции распределения, $G(y)=P(Y<y)$. Поскольку функция $y=3x+2$ — возрастающая, то неравенство $Y<y$ выполняется, если имеет место неравенство $X<x$, поэтому

$$G(y)=P(Y<y)=P(X<x)=F(x). \qquad (*)$$

Из уравнения $y=3x+2$ выразим x:

$$x=(y-2)/3. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), окончательно получим

$$G(y)=F[(y-2)/3].$$

398. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $G(y)$ случайной величины $Y=-(2/3)X+2$.

Решение. По определению функции распределения,

$$G(y)=P(Y<y).$$

Поскольку функция $y=-(2/3)x+2$ — убывающая, то неравенство $Y<y$ выполняется, если имеет место неравенство $X>x$, поэтому $G(y)=P(Y<y)=P(X>x)$.

События $X<x$ и $X>x$ противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице: $P(X<x)+P(X>x)=1$. Отсюда

$$P(X>x)=1-P(X<x)=1-F(x);$$

следовательно,

$$G(y)=1-F(x). \qquad (*)$$

Из уравнения $y=-(2/3)x+2$ выразим x:

$$x=3(2-y)/2. \qquad (^{**})$$

Подставив (**) в (*), окончательно получим

$$G(y)=1-F[3(2-y)/2].$$

399. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $G(y)$ случайной величины Y, если: а) $Y=4X+6$; б) $Y=-5X+1$; в) $Y=aX+b$.

§ 2. Функция двух случайных аргументов

Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют *функцией двух случайных аргументов* X и Y и пишут

$$Z=\varphi(X, Y).$$

Если X и Y — дискретные независимые случайные величины, то, для того чтобы найти распределение функции $Z=X+Y$, надо найти все возможные значения Z, для чего достаточно сложить каждое возможное значение X со всеми возможными значениями Y; вероятности найденных возможных значений Z равны произведениям вероятностей складываемых значений X и Y.

Если X и Y — непрерывные независимые случайные величины, то плотность распределения $g(z)$ суммы $Z=X+Y$ (при условии, что плотность распределения хотя бы одного из аргументов задана в интервале $(-\infty, \infty)$ одной формулой) может быть найдена по формуле

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)\,dx,$$

либо по равносильной формуле

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)\,dy,$$

где f_1 и f_2 — плотности распределения аргументов; если возможные значения аргументов неотрицательны, то плотность распределения $g(z)$ величины $Z=X+Y$ находят по формуле

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(x)f_2(z-x)\,dx,$$

либо по равносильной формуле

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(z-y)f_2(y)\,dy.$$

В том случае, когда обе плотности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ заданы на конечных интервалах, для отыскания плотности $g(z)$ величины $Z=X+Y$ целесообразно сначала найти функцию распределения

$G(z)$, а затем продифференцировать ее по z:

$$g(z) = G'(z).$$

Если X и Y — независимые случайные величины, заданные соответствующими плотностями распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, то вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D равна двойному интегралу по этой области от произведения плотностей распределения:

$$P[(X, Y) \subset D] = \iint\limits_{(D)} f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy.$$

400. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями:

X	1	3 ;		Y	2	4
P	0,3	0,7		P	0,6	0,4

Найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Для того чтобы составить распределение величины $Z = X + Y$, надо найти все возможные значения Z и их вероятности.

Возможные значения Z есть суммы каждого возможного значения X со всеми возможными значениями Y:

$$z_1 = 1 + 2 = 3; \quad z_2 = 1 + 4 = 5; \quad z_3 = 3 + 2 = 5; \quad z_4 = 3 + 4 = 7.$$

Найдем вероятности этих возможных значений. Для того чтобы $Z = 3$, достаточно, чтобы величина X приняла значение $x_1 = 1$ и величина Y — значение $y_1 = 2$. Вероятности этих возможных значений, как следует из данных законов распределения, соответственно равны 0,3 и 0,6. Так как аргументы X и Y независимы, то события $X = 1$ и $Y = 2$ независимы и, следовательно, вероятность их совместного наступления (т. е. вероятность события $Z = 3$) по теореме умножения равна $0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.

Аналогично найдем:

$$P(Z = 1 + 4 = 5) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12;$$
$$P(Z = 3 + 2 = 5) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42;$$
$$P(Z = 3 + 4 = 7) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28.$$

Напишем искомое распределение, сложив предварительно вероятности несовместных событий $Z = z_2 = 5$, $Z = z_3 = 5$ $(0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54)$:

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

Контроль: $0{,}18 + 0{,}54 + 0{,}28 = 1$.

401. Дискретные случайные величины X и Y заданы распределениями:

а)	X	10	12	16	Y	1	2 ;
	P	0,4	0,1	0,5,	P	0,2	0,8
б)	X	4	10		Y	1	7
	P	0,7	0,3,		P	0,8	0,2 .

Найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

402. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений:

$$f_1(x)=e^{-x} \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad f_2(y)=(1/2)e^{-y/2} \quad (0 \leqslant y < \infty).$$

Найти композицию этих законов, т. е. плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$.

Решение. Так как возможные значения аргументов неотрицательны, то применима формула

$$g(z)=\int_0^z f_1(x) f_2(z-x)\, dx.$$

Следовательно,

$$g(z)=\int_0^z e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{-(z-x)/2}\right] dx.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$g(z)=e^{-z/2}\left[1-e^{-z/2}\right].$$

Здесь $z \geqslant 0$, так как $Z=X+Y$ и возможные значения X и Y неотрицательны.

Итак, $g(z)=e^{-z/2}\left[1-e^{-z/2}\right]$ в интервале $(0, \infty)$, вне этого интервала $g(z)=0$.

Рекомендуем для контроля убедиться, что $\int\limits_0^\infty g(z)\, dz=1$.

403. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений:

$$f_1(x)=(1/3)e^{-x/3} \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad f_2(y)=(1/5)e^{-y/5} \quad (0 \leqslant y < \infty).$$

Найти композицию этих законов, т. е. плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$.

404. Независимые нормально распределенные случайные величины X и Y заданы плотностями распределений:

$$f_1(x)=\left(1/\sqrt{2\pi}\right)e^{-x^2/2}, \quad f_2(y)=\left(1/\sqrt{2\pi}\right)e^{-y^2/2}.$$

Доказать, что композиция этих законов, т. е. плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$, также есть нормальный закон.

Решение. Используем формулу $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\, dx$.

Тогда

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-(z-x)^2/2}\, dx.$$

Выполнив элементарные выкладки, получим

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-z^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2-zx)}\,dx.$$

Дополнив показатель степени показательной функции, стоящей под знаком интеграла, до полного квадрата, вынесем $e^{z^2/4}$ за знак интеграла:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-z^2/2}e^{z^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-z/2)^2}\,dx.$$

Учитывая, что интеграл Пуассона, стоящий в правой части равенства, равен $\sqrt{\pi}$, окончательно имеем $g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/4}$.

Рекомендуем для контроля убедиться, что $\int_{-\infty}^{\infty}g(z)\,dz=1$. Для этого следует воспользоваться подстановкой $z=\sqrt{2}\cdot t$ и принять во внимание, что интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}$.

Заметим, что в рассматриваемой задаче легко убедиться, что

$$M(Z)=M(X)+M(Y) \text{ и } \sigma(Z)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}.$$

Можно доказать, что эти формулы справедливы и при композиции общих нормальных законов (т. е. если математическое ожидание отлично от нуля и среднее квадратическое отклонение не равно единице).

405. Заданы плотности распределений независимых равномерно распределенных случайных величин X и Y:

$f_1(x)=1/2$ в интервале $(0, 2)$, вне этого интервала $f_1(x)=0$;

$f_2(y)=1/2$ в интервале $(0, 2)$, вне этого интервала $f_2(y)=0$.

Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$. Построить график плотности распределения $g(z)$.

Решение. По условию, возможные значения X определяются неравенством $0<x<2$, возможные значения Y — неравенством $0<y<2$. Отсюда следует, что возможные случайные точки $(X; Y)$ расположены в квадрате $OABC$ (рис. 9, *a*).

По определению функции распределения,

$$G(z)=P(Z<z)=P(X+Y<z).$$

Неравенству $x+y<z$ удовлетворяют те точки $(x;\ y)$ плоскости xOy, которые лежат ниже прямой $x+y=z$ (эта прямая отсекает на осях Ox и Oy отрезки, равные z): если же брать только возможные значения x и y, то неравенство $x+y<z$ выполняется только для точек, лежащих в квадрате $OABC$ ниже прямой $x+y=z$.

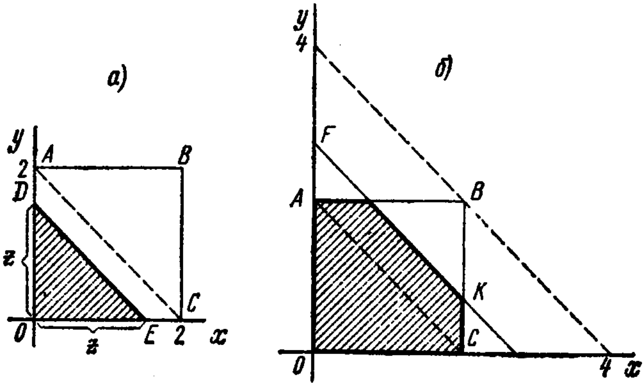

Рис. 9

С другой стороны, так как величины X и Y независимы, то

$$G(z)=\iint\limits_{(s)} f_1(x)\,f_2(y)\,dx\,dy=\frac{1}{4}\iint\limits_{(s)} dx\,dy=\frac{1}{4}S,$$

где S — величина той части площади квадрата $OABC$, которая лежит ниже прямой $x+y=z$. Очевидно, величина площади S зависит от значения z.

Если $z\leqslant 0$, то $S=0$, т. е. $G(z)=(1/4)\cdot 0=0$.

Если $0<z<2$, то (рис. 9, *а*) $G(z)=(1/4)\,S_{\triangle ODE}=1/4\cdot z^2/2=z^2/8$.

Если $2<z<4$, то (рис. 9, *б*) $G(z)=(1/4)\,S_{OAHKC}=1-(4-z)^2/8$.

Площадь фигуры $OAHKC$ найдена как разность между площадью квадрата $OABC$, которая, очевидно, равна $2^2=4$, и площадью прямоугольного треугольника HBK: $S_{\triangle HBK}=HB^2/2$, причем $HB=2-AH=2-AF=2-(z-2)=4-z$.

Если $z>4$, то $G(z)=(1/4)\,S_{OABC}=1/4\cdot 4=1$.

Итак, искомая функция распределения такова:

$$G(z)=\begin{cases} 0 & \text{при } z\leqslant 0,\\ z^2/8 & \text{при } 0<z<2,\\ 1-(4-z)^2/8 & \text{при } 2<z<4,\\ 1 & \text{при } z>4.\end{cases}$$

Найдем плотность распределения:

$$g(z)=\begin{cases} 0 & \text{при } z\leqslant 0,\\ z/4 & \text{при } 0<z<2,\\ 1-z/4 & \text{при } 2<z<4,\\ 0 & \text{при } z>4.\end{cases}$$

График плотности распределения $g(z)$ изображен на рис. 10. Рекомендуем для контроля убедиться, что площадь, ограниченная кривой распределения $g(z)$, равна единице.

406. Заданы плотности равномерно распределенных независимых случайных величин X и Y: $f_1(x)=1$ в интервале (0, 1), вне этого интервала $f_1(x)=0$; $f_2(y)=1$ в интервале (0, 1), вне этого интервала $f_2(y)=0$.

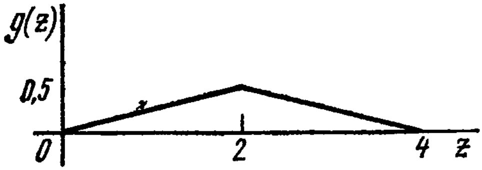

Рис. 10

Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$. Построить график плотности распределения $g(z)$.

407. Заданы плотности распределений равномерно распределенных независимых случайных величин X и Y: $f_1(x)=1/2$ в интервале (1, 3), вне этого интервала $f_1(x)=0$; $f_2(y)=1/4$ в интервале (2, 6), вне этого интервала $f_2(y)=0$. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$. Построить график плотности распределения $g(z)$.

Глава восьмая

СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Закон распределения двумерной случайной величины

Двумерной называют случайную величину (X, Y), возможные значения которой есть пары чисел (x, y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют *систему* двух случайных величин.

Двумерную величину геометрически можно истолковать как случайную точку $M(X; Y)$ на плоскости xOy либо как случайный вектор OM.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны.

Непрерывной называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения вероятностей двумерной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины может быть задан: а) в виде таблицы с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности; б) аналитически, например в виде функции распределения.

Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел (x, y) вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y:

$$F(x, y)=P(X < x, Y < y).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Функция распределения обладает следующими свойствами:

Свойство 1. *Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству*

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1.$$

Свойство 2. *Функция распределения есть неубывающая функция по каждому аргументу:*

$$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1,$$
$$F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$

Свойство 3. *Имеют место предельные соотношения:*

$$1)\ F(-\infty, y)=0, \qquad 2)\ F(x, -\infty)=0,$$
$$3)\ F(-\infty, -\infty)=0, \qquad 4)\ F(\infty, \infty)=1.$$

Свойство 4. а) *При $y=\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X:*

$$F(x, \infty)=F_1(x).$$

б) *При $x=\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y:*

$$F(\infty, y)=F_2(y).$$

Используя функцию распределения, можно найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $x_1 < X < x_2$, $y_1 < Y < y_2$:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2)=[F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)]-$$
$$-[F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)].$$

Плотностью совместного распределения вероятностей (двумерной плотностью вероятности) непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения:

$$f(x, y)=\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Иногда вместо термина «двумерная плотность вероятности» используют термин «дифференциальная функция системы».

Плотность совместного распределения можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy к площади этого прямоугольника, когда обе его стороны стремятся к нулю; геометрически ее можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения*.

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D определяется равенством

$$P[(X, Y) \subset D] = \iint_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Двумерная плотность вероятности обладает следующими свойствами:

Свойство 1. *Двумерная плотность вероятности неотрицательна:*

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

Свойство 2. *Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности вероятности равен единице:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

В частности, если все возможные значения (X, Y) принадлежат конечной области D, то

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

408. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Сложив вероятности «по столбцам», получим вероятности возможных значений X: $p(3) = 0{,}27$, $p(10) = 0{,}43$, $p(12) = 0{,}30$.

Напишем закон распределения составляющей X:

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Контроль: $0{,}27 + 0{,}43 + 0{,}30 = 1$.

Сложив вероятности «по строкам», аналогично найдем распределение составляющей Y:

Y	4	5
p	0,55	0,45

Контроль: $0{,}55+0{,}45=1$.

409. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих.

410. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y)=\begin{cases} \sin x\cdot\sin y & \text{при } 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\ 0\leqslant y\leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$.

Решение. Используем формулу

$$P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2)=[F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)]-[F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)].$$

Положив $x_1=0$, $x_2=\pi/4$, $y_1=\pi/6$, $y_2=\pi/3$, получим

$$P=[\sin(\pi/4)\cdot\sin(\pi/3)-\sin 0\cdot\sin(\pi/3)]-[\sin(\pi/4)\cdot\sin(\pi/6)-\sin 0\cdot\sin(\pi/6)]=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4=0{,}26.$$

411. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, если известна функция распределения

$$F(x, y)=\begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & \text{при } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0. \end{cases}$$

412. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y)=\begin{cases} 1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y} & \text{при } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы.

Решение. Используем формулу $f(x, y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\ln 3\cdot(3^{-x}-3^{-x-y}),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}.$$

Итак, искомая двумерная плотность вероятности

$$f(x, y)=\begin{cases} \ln^2 3\cdot 3^{-x-y} & \text{при} \quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x<0 \text{ или } y<0. \end{cases}$$

Рекомендуем читателю для контроля убедиться, что

$$\ln^2 3\int_0^\infty\int_0^\infty 3^{-x-y}\,dx\,dy=1.$$

413. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y)=\begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}) & \text{при} \quad x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{при} \quad x<0,\ y<0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы (X, Y).

414. Задана двумерная плотность вероятности системы случайных величин (X, Y)

$$f(x, y)=\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Найти функцию распределения системы.

Указание. Использовать формулу

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x, y)\,dx\,dy.$$

415. Задана двумерная плотность вероятности системы двух случайных величин: $f(x, y)=(1/2)\cdot\sin(x+y)$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$; вне квадрата $f(x, y)=0$. Найти функцию распределения системы (X, Y).

416. В круге $x^2+y^2\leqslant R^2$ двумерная плотность вероятности $f(x, y)=C(R-\sqrt{x^2+y^2})$; вне круга $f(x, y)=0$. Найти: а) постоянную C; б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в круг радиуса $r=1$ с центром в начале координат, если $R=2$.

Решение. а) Используем второе свойство двумерной плотности вероятности:

$$\iint\limits_{(D)} C(R-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy=1.$$

Отсюда

$$C=1\Big/\iint\limits_{(D)}(R-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy.$$

Перейдя к полярным координатам, получим

$$C=1\Big/\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R-\rho)\,\rho\, d\rho = 3/(\pi R^3).$$

б) По условию, $R=2$; следовательно, $C=3/(8\pi)$ и

$$f(x,\ y)=(3/8\pi)\,(2-\sqrt{x^2+y^2}).$$

Вероятность попадания случайной точки $(X,\ Y)$ в круг радиуса $r=1$ с центром в начале координат (область D_1)

$$P\,[(X,\ Y)\subset D_1]=(3/8\pi)\iint\limits_{(D_1)} (2-\sqrt{x^2+y^2})\, dx\, dy.$$

Перейдя к полярным координатам, окончательно получим искомую вероятность:

$$P=(3/8\pi)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2-\rho)\,\rho\, d\rho = 1/2.$$

417. Поверхность распределения системы случайных величин (X, Y) представляет собой прямой круговой конус, основание которого — круг с центром в начале координат. Найти двумерную плотность вероятности системы.

Указание. Перейти к полярным координатам.

418. Задана двумерная плотность вероятности $f(x,\ y)=C/[(9+x^2)(16+y^2)]$ системы (X, Y) двух случайных величин. Найти постоянную C.

419. Задана двумерная плотность вероятности $f(x,\ y)=C/(x^2+y^2+1)^3$ системы случайных величин $(X,\ Y)$. Найти постоянную C.

Указание. Перейти к полярным координатам.

420. В первом квадранте задана функция распределения системы двух случайных величин: $F(x,\ y)=1+2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}$. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) вероятность попадания случайной точки $(X,\ Y)$ в треугольник с вершинами $A\,(1;\ 3)$, $B\,(3;\ 3)$, $C\,(2;\ 8)$.

§ 2. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной случайной величины

Пусть составляющие X и Y дискретны и имеют соответственно следующие возможные значения: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$.

Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ (j сохраняет одно и то же значение при всех возможных значениях X) называют совокупность условных вероятностей

$$p(x_1 \mid y_j),\ p(x_2 \mid y_j),\ \ldots,\ p(x_n \mid y_j).$$

Аналогично определяется условное распределение Y.

Условные вероятности составляющих X и Y вычисляют соответственно по формулам

$$p(x_j \mid y_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна единице.

421. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

Y	X		
	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0,8$	0,05	0,12	0,03

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=0,4$; в) условный закон распределения Y при условии, что $X=x_2=5$.

Решение. а) Сложив вероятности «по столбцам», напишем закон распределения X:

X	2	5	8
p	0,20	0,42	0,38

Сложив вероятности «по строкам», найдем закон распределения y:

y	0,4	0,8
p	0,80	0,20

б) Найдем условные вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=0,4$:

$$p(x_1 \mid y_1) = p(x_1, y_1)/p(y_1) = 0,15/0,80 = 3/16,$$
$$p(x_2 \mid y_1) = p(x_2, y_1)/p(y_1) = 0,30/0,80 = 3/8,$$
$$p(x_3 \mid y_1) = p(x_3, y_1)/p(y_1) = 0,35/0,80 = 7/16.$$

Напишем искомый условный закон распределения X:

X	2	5	8
$p(X \mid y_1)$	3/16	3/8	7/16

Контроль: $3/16+3/8+7/16=1$.

в) Аналогично найдем условный закон распределения Y:

Y	0,4	0,8
$p(y \mid x_2)$	5/7	2/7

Контроль: $5/7+2/7=1$.

422. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

Y	X	
	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти: а) условный закон распределения X при условии, что $Y = 10$; б) условный закон распределения Y при условии, что $X = 6$.

§ 3. Отыскание плотностей и условных законов распределения составляющих непрерывной двумерной случайной величины

Плотность распределения одной из составляющих равна несобственному интегралу с бесконечными пределами от плотности совместного распределения системы, причем переменная интегрирования соответствует другой составляющей:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx.$$

Здесь предполагается, что возможные значения каждой из составляющих принадлежат всей числовой оси; если же возможные значения принадлежат конечному интервалу, то в качестве пределов интегрирования принимают соответствующие конечные числа.

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении $Y = y$ называют отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей Y:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx}.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей Y:

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy}.$$

Если условные плотности распределения случайных величин X и Y равны их безусловным плотностям, то такие величины независимы.

Равномерным называют распределение двумерной непрерывной случайной величины (X, Y), если в области, которой принадлежат все возможные значения (x, y), плотность совместного распределения вероятностей сохраняет постоянное значение.

423. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi} e^{-(1/2)(x^2+2xy+5y^2)}.$$

Найти: а) плотности распределения составляющих; б) условные плотности распределения составляющих.

Решение. а) Найдем плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)(x^2+2xy+5y^2)}\,dy.$$

Вынесем за знак интеграла множитель $e^{-x^2/2}$, не зависящий от переменной интегрирования y, и дополним оставшийся показатель степени до полного квадрата; тогда

$$f_1(x)=(1/\pi)\cdot e^{-x^2/2}\cdot e^{x^2/10}\cdot\sqrt{2/5}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{5/2}y+\sqrt{2/5}x)^2}\times$$

$$\times d\,(\sqrt{5/2}y+\sqrt{2/5}x).$$

Учитывая, что интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}$, окончательно получим плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x)=\sqrt{2/(5\pi)}\,e^{-0,4x^2}.$$

Аналогично найдем плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y)=\sqrt{2/\pi}\,e^{-2y^2}.$$

б) Найдем условные плотности распределения составляющих. Выполнив элементарные выкладки, получим:

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-0,5(x+y)^2},$$

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{f(x, y)}{f_1(x)}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-0,1(x+5y)^2}.$$

424. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(x, y)=Ce^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

Найти: а) постоянный множитель C; б) плотности распределения составляющих; в) условные плотности распределения составляющих.

425. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x, y)=\cos x\cdot\cos y$

в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$; вне квадрата $f(x, y)=0$. Доказать, что составляющие X и Y независимы.

Указание. Убедиться, что безусловные плотности распределения составляющих равны соответствующим условным плотностям.

426. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности распределения составляющих.

427*. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно внутри прямоугольной трапеции с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; 4)$, $B(3; 4)$, $C(6; 0)$. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности распределения составляющих.

428. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена внутри прямоугольного треугольника с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; 8)$, $B(8;0)$. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности распределения составляющих.

429*. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена внутри трапеции с вершинами $A(-6; 0)$, $B(-3; 4)$, $C(3; 4)$, $D(6; 0)$. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности распределения составляющих.

§ 4. Числовые характеристики непрерывной системы двух случайных величин

Зная плотности распределения составляющих X и Y непрерывной двумерной случайной величины (X, Y), можно найти их математические ожидания и дисперсии:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,\mathrm{d}x, \quad M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,\mathrm{d}y;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx-[M(X)]^2;$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}[y-M(Y)]^2 f_2(y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)\,\mathrm{d}y-[M(Y)]^2.$$

Иногда удобнее использовать формулы, содержащие двумерную плотность вероятности (двойные интегралы берутся по области возможных значений системы):

$$M(X)=\iint xf(x, y)\,dx\,dy, \qquad M(Y)=\iint yf(x, y)\,dx\,dy;$$

$$D(X)=\iint [x-M(X)]^2 f(x, y)\,dx\,dy=\iint x^2 f(x, y)\,dx\,dy-[M(X)]^2.$$

$$D(Y)=\iint [y-M(Y)]^2 f(x, y)\,dx\,dy=\iint y^2 f(x, y)\,dx\,dy-[M(Y)]^2.$$

Начальным моментом $\nu_{k, s}$ порядка $k+s$ системы (X, Y) называют математическое ожидание произведения X^kY^s:

$$\nu_{k, s}=M[X^kY^s].$$

В частности,

$$\nu_{1, 0}=M(X), \quad \nu_{0, 1}=M(Y).$$

Центральным моментом $\mu_{k, s}$ порядка $k+s$ системы (X, Y) называют математическое ожидание произведения отклонений соответственно k-й и s-й степеней:

$$\mu_{k, s}=M\{[X-M(X)]^k\cdot[Y-M(Y)]^s\}.$$

В частности,

$$\mu_{1, 0}=M[X-M(X)]=0, \quad \mu_{0, 1}=M[Y-M(Y)]=0;$$

$$\mu_{2, 0}=M[X-M(X)]^2=D(X), \quad \mu_{0, 2}=M[Y-M(Y)]^2=D(Y).$$

Корреляционным моментом μ_{xy} системы (X, Y) называют центральный момент $\mu_{1, 1}$ порядка $1+1$:

$$\mu_{xy}=M\{[X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)]\}.$$

Коэффициентом корреляции величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy}=\mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y).$$

Коэффициент корреляции — безразмерная величина, причем $|r_{xy}|\leq 1$. Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты линейной связи между X и Y: чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее; чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к нулю, тем связь слабее.

Коррелированными называют две случайные величины, если их корреляционный момент отличен от нуля.

Некоррелированными называют две случайные величины, если их корреляционный момент равен нулю.

Две коррелированные величины также и зависимы; если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Из независимости двух величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя сделать вывод о независимости этих величин (для нормально распределенных величин из некоррелированности этих величин вытекает их независимость).

Для непрерывных величин X и Y корреляционный момент может быть найден по формулам:

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]\,[y-M(Y)]\,f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x, y)\,dx\,dy-M(X)\,M(Y).$$

430. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y):

$$f(x, y)=\begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2} & (x>0,\ y>0), \\ 0 & (x<0 \text{ или } y<0). \end{cases}$$

Найти: а) математические ожидания; б) дисперсии составляющих X и Y.

Решение. а) Найдем сначала плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x)=\int_0^\infty f(x, y)\,dy=4xe^{-x^2}\int_0^\infty ye^{-y^2}\,dy=2xe^{-x^2} \quad (x>0).$$

Аналогично получим

$$f_2(y)=2ye^{-y^2} \quad (y>0).$$

Найдем математическое ожидание составляющей X:

$$M(X)=\int_0^\infty xf_1(x)\,dx=\int_0^\infty x\cdot(2xe^{-x^2}\,dx).$$

Интегрируя по частям и учитывая, что интеграл Пуассона $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=$ $=\sqrt{\pi}/2$, получим $M(X)=\sqrt{\pi}/2$. Очевидно, что $M(Y)=\sqrt{\pi}/2$.

б) Найдем дисперсию X:

$$D(X)=\int_0^\infty x^2f_1(x)\,dx-[M(X)]^2=$$

$$=\int_0^\infty x^2(2xe^{-x^2}\,dx)-(\sqrt{\pi}/2)^2=1-\pi/4.$$

Очевидно, что $D(Y)=1-\pi/4$.

431. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(x, y)=\begin{cases} 36xye^{-(x^2+y^2)} & (x>0,\ y>0), \\ 0 & (x<0 \text{ или } y<0). \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

432. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y)=$ $=2\cos x\cos y$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant\pi/4$, $0\leqslant y\leqslant\pi/4$; вне квадрата $f(x, y)=0$. Найти математические ожидания составляющих.

433. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y) = (1/2)\sin(x+y)$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

434. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y) = (1/4)\sin x \sin y$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Найти: а) математические ожидания и дисперсии составляющих; б) корреляционный момент.

435. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины (X, Y):

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 5e^{-5x} & \text{при} \quad x > 0; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y < 0, \\ 2e^{-2y} & \text{при} \quad y > 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность совместного распределения системы; б) функцию распределения системы.

Указание. Если составляющие системы независимы, то двумерная плотность вероятности равна произведению плотностей составляющих, а функция совместного распределения системы равна произведению функций распределения составляющих.

436. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в круге радиуса r с центром в начале координат. Доказать, что X и Y зависимы, но некоррелированны.

Указание. Сравнить безусловные и условные плотности распределения составляющих; убедиться, что корреляционный момент равен нулю.

437. Доказать, что если двумерную плотность вероятности системы случайных величин (X, Y) можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от y, то величины X и Y независимы.

Решение. По условию,

$$f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y). \qquad (*)$$

Найдем плотности распределения составляющих:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,dy, \qquad (**)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx = \psi(y) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx. \qquad (***)$$

Выразим $\varphi(x)$ из (**) и $\psi(y)$ из (***):

$$\varphi(x)=f_1(x)\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\,dy,\quad \psi(y)=f_2(y)\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx.$$

В силу (*)

$$f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot 1\Big/\left(\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx\right).$$

Учитывая, что, по второму свойству двумерной плотности вероятности, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy=1$ и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\,dy=1,$$

окончательно получим $f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Таким образом, двумерная плотность вероятности рассматриваемой системы равна произведению плотностей вероятности составляющих. Отсюда следует, что X и Y независимы, что и требовалось доказать.

438. Доказать, что если X и Y связаны линейной зависимостью $Y=aX+b$, то абсолютная величина коэффициента корреляции равна единице.

Решение. По определению коэффициента корреляции,

$$r_{xy}=\mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y),$$

где

$$\mu_{xy}=M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}. \quad (*)$$

Найдем математическое ожидание Y:

$$M(Y)=M[aX+b]=aM(X)+b. \quad (**)$$

Подставив (**) в (*), после элементарных преобразований получим

$$\mu_{xy}=aM[X-M(X)]^2=aD(X)=a\sigma_x^2.$$

Учитывая, что

$$Y-M(Y)=(aX+b)-(aM(X)+b)=a[X-M(X)],$$

найдем дисперсию Y:

$$D(Y)=M[Y-M(Y)]^2=a^2M[X-M(X)]^2=a^2\sigma_x^2.$$

Отсюда $\sigma_y=|a|\sigma_x$. Следовательно, коэффициент корреляции

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x(|a|\sigma_x)}=\frac{a}{|a|}.$$

Если $a>0$, то $r_{xy}=1$; если $a<0$, то $r_{xy}=-1$.

Итак, $|r_{xy}|=1$, что и требовалось доказать.

Часть третья

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава девятая

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

§ 1. Статистическое распределение выборки

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, \ldots, x_k$ объема n. Наблюдавшиеся значения x_i признака X называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке,—*вариационным рядом*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объему выборки n) или относительных частот w_i (сумма всех относительных частот равна единице).

Статистическое распределение выборки можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты интервала принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

439. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

Решение. Найдем объем выборки: $n=1+3+6=10$. Найдем относительные частоты:

$$w_1=1/10=0{,}1; \quad w_2=3/10=0{,}3; \quad w_3=6/10=0{,}6.$$

Напишем искомое распределение относительных частот:

x_i	2	5	7
w_i	0,1	0,3	0,6

Контроль: $0{,}1+0{,}3+0{,}6=1$.

440. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Найти распределение относительных частот.

§ 2. Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения (*функцией распределения выборки*) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = n_x/n,$$

где n_x — число вариант, меньших x; n — объем выборки.

Эмпирическая функция обладает следующими свойствами.

Свойство 1. *Значения эмпирической функции принадлежат отрезку* [0; 1].

Свойство 2. $F^*(x)$ — *неубывающая функция.*

Свойство 3. *Если x_1 — наименьшая варианта, а x_k — наибольшая*, то $F^*(x)=0$ при $x \leq x_1$ и $F^*(x)=1$ при $x > x_k$.

441. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Решение. Найдем объем выборки: $n = 10+15+25=50$.

Наименьшая варианта равна единице, поэтому $F^*(x)=0$ при $x \leq 1$.

Значение $X < 4$, а именно $x_1 = 1$, наблюдалось 10 раз, следовательно, $F^*(x) = 10/50 = 0{,}2$ при $1 < x \leq 4$.

Значения $x < 6$, а именно: $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, наблюдались $10+15=25$ раз; следовательно, $F^*(x) = 25/50 = 0{,}5$ при $4 < x \leq 6$.

Так как $x = 6$ — наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 6$.

Напишем искомую эмпирическую функцию:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 1, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 1 < x \leq 4, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4 < x \leq 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

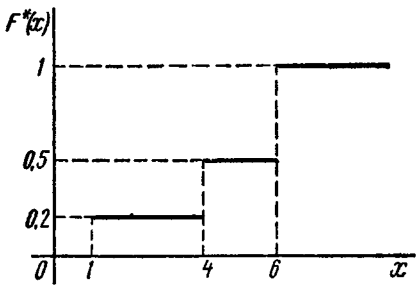

Рис. 11

График этой функции изображен на рис. 11.

442. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

б)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

§ 3. Полигон и гистограмма

А. Дискретное распределение признака X. *Полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k), где x_i — варианты выборки и n_i — соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ w_1)$, $(x_2;\ w_2)$, ..., $(x_k;\ w_k)$, где x_i — варианты выборки и w_i — соответствующие им относительные частоты.

Б. Непрерывное распределение признака X. При непрерывном распределении признака весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на ряд частичных интервалов длины h и находят n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h(n_i/h) = n_i$ — сумме частот вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки n.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению w_i/h (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h(w_i/h) = w_i$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.

443. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

Решение. Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им частоты n_i; соединив точки $(x_i,\ n_i)$ отрезками прямых, получим искомый полигон частот (рис. 12).

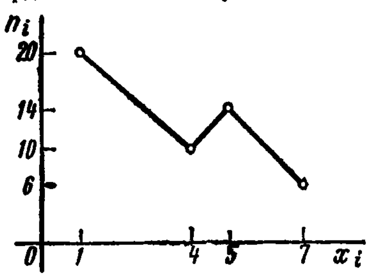

Рис. 12

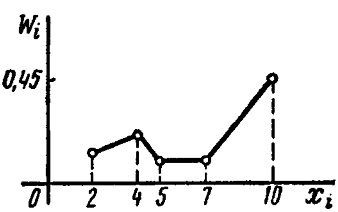

Рис. 13

444. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

445. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	4	5	7	10
w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

б)

x_i	1	4	5	8	9
w_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

в) x_i 20 40 65 80
w_i 0,1 0,2 0,3 0,4

Решение. а) Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат—соответствующие относительные частоты w_i. Соединив точки (x_i, w_i) отрезками прямых, получим искомый полигон относительных частот (рис. 13).

446. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n=100$:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
1	1—5	10	2,5
2	5—9	20	5
3	9—13	50	12,5
4	13—17	12	3
5	17—21	8	2

Решение. Построим на оси абсцисс заданные интервалы длины $h=4$. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям частоты n_i/h. Например, над интервалом (1, 5) построим отрезок, параллельный оси абсцисс, на расстоянии $n_i/h = 10/4 = 2,5$; аналогично строят остальные отрезки.

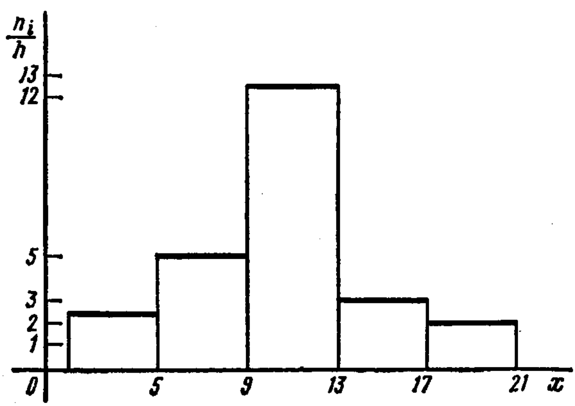

Рис. 14

Искомая гистограмма частот изображена на рис. 14.

447. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

а)

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
1	2—7	5	
2	7—12	10	
3	12—17	25	
4	17—22	6	
5	22—27	4	

б)

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
1	3—5	4	
2	5—7	6	
3	7—9	20	
4	9—11	40	
5	11—13	20	
6	13—15	4	
7	15—17	6	

Указание. Найти предварительно плотность частоты n_i/h для каждого интервала и заполнить последний столбец таблицы.

448. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i
1	0—2	20
2	2—4	30
3	4—6	50
		$n=\sum n_i=100$

Решение. Найдем относительные частоты:

$$w_1=20/100=0{,}2,\quad w_2=30/100=0{,}3,\quad w_3=50/100=0{,}5.$$

Найдем плотности относительных частот, учитывая, что длина интервала $h=2$:

$$w_1/h=0{,}2/2=0{,}1,\quad w_2/h=0{,}3/2=0{,}15,\quad w_3/h=0{,}5/2=0{,}25.$$

Построим на оси абсцисс данные частичные интервалы. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям относительной частоты. Например, над интервалом (0, 2) проведем отрезок, параллельный оси абсцисс и находящийся от нее на расстоянии, равном 0,1; аналогично строят остальные отрезки.

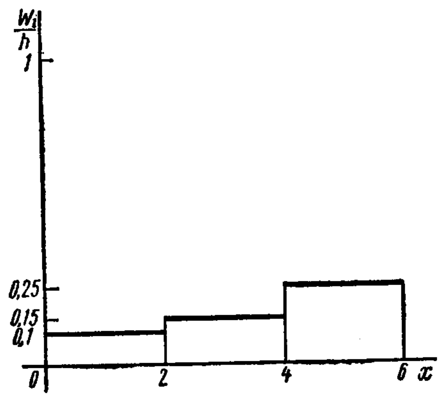

Рис. 15

Искомая гистограмма относительных частот изображена на рис. 15.

449. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

а)

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i
1	10—15	2
2	15—20	4
3	20—25	8
4	25—30	4
5	30—35	2
		$n=\sum n_i=20$

б)

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i
1	2—5	6
2	5—8	10
3	8—11	4
4	11—14	5
		$n=\sum n_i=25$

Указание. Найти сначала относительные частоты, соответствующие плотности относительной частоты для каждого интервала.

Глава десятая

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Точечные оценки

Статистической оценкой Θ^* неизвестного параметра Θ теоретического распределения называют функцию $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\Theta^*=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$—результаты n наблюдений над количественным признаком X (выборка).

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя

$$\bar{x}_{\text{в}}=\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)\Big/n,$$

где x_i—варианта выборки, n_i—частота варианты x_i, $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ — объем выборки.

Замечание 1. Если первоначальные варианты x_i—большие числа, то для упрощения расчета целесообразно вычесть из каждой варианты одно и то же число C, т. е. перейти к условным вариантам $u_i=x_i-C$ (в качестве C выгодно принять число, близкое к выборочной средней; поскольку выборочная средняя неизвестна, число C выбирают «на глаз»). Тогда

$$\bar{x}_{\text{в}}=C+\left(\sum n_i u_i\right)/n.$$

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия

$$D_в=\left(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i-\bar{x}_в)^2\right)\Big/n;$$

эта оценка является смещенной, так как

$$M[D_в]=\frac{n-1}{n}D_г.$$

Более удобна формула

$$D_в=\overline{x^2}-[\bar{x}]^2=\frac{\sum n_i x_i^2}{n}-\left[\frac{\sum n_i x_i}{n}\right]^2.$$

Замечание 2. Если первоначальные варианты x_i—большие числа, то целесообразно вычесть из всех вариант одно и то же число C, равное выборочной средней или близкое к ней, т. е. перейти к условным вариантам $u_i=x_i-C$ (дисперсия при этом не изменится). Тогда

$$D_в(X)=D_в(u)=\overline{u^2}-[\bar{u}]^2=\frac{\sum n_i u_i^2}{n}-\left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2.$$

Замечание 3. Если первоначальные варианты являются десятичными дробями с k десятичными знаками после запятой, то, чтобы избежать действий с дробями, умножают первоначальные варианты на постоянное число $C=10^k$, т. е. переходят к условным вариантам $u_i=Cx_i$. При этом дисперсия увеличится в C^2 раз. Поэтому, найдя дисперсию условных вариант, надо разделить ее на C^2:

$$D_в(X)=D_в(u)/C^2.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$s^2=\frac{n}{n-1}\cdot D_в=\frac{\sum n_i (x_i-\bar{x}_в)^2}{n-1}.$$

Более удобна формула

$$s_X^2=\frac{\sum n_i x_i^2-\left[\sum n_i x_i\right]^2/n}{n-1}.$$

В условных вариантах она имеет вид

$$s_u^2=\frac{\sum n_i u_i^2-\left[\sum n_i u_i\right]^2/n}{n-1},$$

причем если $u_i=x_i-C$, то $s_X^2=s_u^2$; если $u_i=Cx_i$, то $s_X^2=s_u^2/C^2$.

Замечание 4. При большом числе данных используют метод произведений (см. гл. XI, § 1) или метод сумм (см. гл. XI, § 2).

450. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=50$:

варианта x_i	2	5	7	10
частота n_i	16	12	8	14

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

Решение. Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя

$$\bar{x}_в = \left(\sum n_i x_i\right)/n = (16\cdot 2 + 12\cdot 5 + 8\cdot 7 + 14\cdot 10)/50 = 5{,}76.$$

451. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

452. Задано распределение первоначальных вариант выборки объема n:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Доказать, что

$$\bar{x}_в = C + \left(\sum n_i u_i\right)/n,$$

где условные варианты $u_i = x_i - C$.

Решение. Так как $u_i = x_i - C$, то $n_i u_i = n_i(x_i - C)$; суммируя левую и правую части равенства по всем значениям i, получим

$$\sum n_i u_i = \sum n_i (x_i - C), \text{ или } \sum n_i u_i = \sum n_i x_i - C \sum n_i = \sum n_i x_i - Cn.$$

Отсюда

$$\sum n_i x_i = Cn + \sum n_i u_i.$$

Следовательно,

$$\left(\sum n_i x_i\right)/n = C + \left(\sum n_i u_i\right)/n, \text{ или } \bar{x}_в = C + \left(\sum n_i u_i\right)/n,$$

что и требовалось доказать.

453. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Решение. Первоначальные варианты — большие числа, поэтому перейдем к условным вариантам $u_i = x_i - 1270$. В итоге получим распределение условных вариант:

u_i	−20	0	10
n_i	2	5	3

Найдем искомую выборочную среднюю:

$$\bar{x}_в = C + \frac{\sum n_i u_i}{n} = 1270 + \frac{2\cdot(-20) + 5\cdot 0 + 3\cdot 10}{10} = 1270 - 1 = 1269.$$

454. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 20$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 2620$.

455. По выборке объема $n=41$ найдена смещенная оценка $D_в=3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Решение. Искомая несмещенная оценка равна исправленной дисперсии:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3,075.$$

456. По выборке объема $n=51$ найдена смещенная оценка $D_в=5$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

457. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Решение. а) Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_в = 92 + (0+2+11+13+14)/5 = 92+8 = 100.$$

б) Найдем выборочную дисперсию:

$$D_в = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_в)^2}{n} = [(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2]/5 +$$
$$+ [(105-100)^2 + (106-100)^2]/5 = 34.$$

Найдем исправленную дисперсию:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42,5.$$

458. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8; 9; 11; 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

459. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов.

Рост	154—158	158—162	162—166	166—170	170—174	174—178	178—182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

Указание. Найти середины интервала и принять их в качестве вариант.

460. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Решение. Варианты—сравнительно большие числа, поэтому перейдем к условным вариантам $u_i = x_i - 191$ (мы вычли из вариант число $C = 191$, близкое к выборочной средней). В итоге получим распределение условных вариант:

u_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

Найдем искомую выборочную дисперсию:

$$D_в = (\sum n_i u_i^2)/n - [(\sum n_i u_i)/n]^2 = (2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3^2)/10 - \\ - [(2 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3)/10]^2 = 8{,}2 - 0{,}16 = 8{,}04.$$

461. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 100$:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 360$.

462. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 100$:

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 2844$.

463. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Решение. Для того чтобы избежать действий с дробями, перейдем к условным вариантам $u_i = 100x_i$. В итоге получим распределение

u_i	1	4	8
n_i	5	3	2

Найдем выборочную дисперсию условных вариант:

$$D_в(u) = (\sum n_i u_i^2)/n - [(\sum n_i u_i)/n]^2.$$

Подставив в эту формулу условные варианты и их частоты, получим

$$D_в(u) = 7{,}21.$$

Найдем искомую выборочную дисперсию первоначальных вариант:

$$D_в(X) = D_в(u)/100^2 = 7{,}21/10\,000 = 0{,}0007.$$

464. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=50$:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i=10x_i$.

465. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=50$:

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i=10x_i-195$.

466. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки $n=10$:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Решение. Перейдем к условным вариантам $u_i=x_i-104$. В итоге получим распределение

u_i	—2	0	4
n_i	2	3	5

Найдем исправленную выборочную дисперсию условных вариант:

$$s_u^2=\frac{\sum n_iu_i^2-\left[\sum n_iu_i\right]^2/n}{n-1}.$$

Подставив в эту формулу условные варианты, их частоты и объем выборки, получим $s_u^2=6{,}93$.

Все первоначальные варианты были уменьшены на одно и то же постоянное число $C=104$, поэтому дисперсия не изменилась, т. е. искомая дисперсия равна дисперсии условных вариант: $s_X^2=s_u^2=6{,}93$.

467. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=100$:

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i=x_i-1275$.

468. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=10$:

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

Решение. Для того чтобы избежать действий с дробями, перейдем к условным вариантам $u_i=100x_i$. В итоге получим распределение

u_i	1	5	9
n_i	2	3	5

Найдем исправленную выборочную дисперсию условных вариант

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2/n}{n-1}.$$

Подставив в эту формулу данные задачи, получим

$$s_u^2 = 10,844.$$

Найдем искомую исправленную дисперсию первоначальных вариант:

$$s_X^2 = s_u^2 = /100^2 = 10,844/10\,000 \simeq 0,0085.$$

469. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=20$:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9.
n_i	6	12	1	1

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = 10x_i$.

470. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=10$:

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = 10x_i - 268$.

§ 2. Метод моментов

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Если распределение определяется одним параметром, то для его отыскания приравнивают один теоретический момент одному эмпирическому моменту того же порядка. Например, можно приравнять начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка: $\nu_1 = M_1$. Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$ и $M_1 = \bar{x}_в$, получим

$$M(X) = \bar{x}_в. \qquad (*)$$

Математическое ожидание является функцией от неизвестного параметра заданного распределения, поэтому, решив уравнение (*) относительно неизвестного параметра, тем самым получим его точечную оценку.

Если распределение определяется двумя параметрами, то приравнивают два теоретических момента двум соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Например, можно приравнять начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка и центральный теоретический момент второго порядка центральному эмпирическому моменту второго порядка:

$$\nu_1 = M_1, \quad \mu_2 = m_2.$$

Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$, $M_1 = \overline{x}_в$, $\mu_2 = D(X)$, $m_2 = D_в$, имеем

$$\begin{cases} M(X) = \overline{x}_в, \\ D(X) = D_в. \end{cases} \qquad (**)$$

Левые части этих равенств являются функциями от неизвестных параметров, поэтому, решив систему (**) относительно неизвестных параметров, тем самым получим их точечные оценки.

Разумеется, для вычисления выборочной средней $\overline{x}_в$ и выборочной дисперсии $D_в$ надо располагать выборкой $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

471. Случайная величина X распределена по закону Пуассона

$$P_m(x_i) = \lambda^{x_i} e^{-\lambda}/x_i!,$$

где m — число испытаний, произведенных в одном опыте; x_i — число появлений события в i-м опыте.

Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ, определяющего распределение Пуассона.

Решение. Требуется оценить один параметр, поэтому достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Приравняем начальный теоретический момент первого порядка ν_1 начальному эмпирическому моменту первого порядка M_1:

$$\nu_1 = M_1.$$

Приняв во внимание, что $\nu_1 = M(X)$, $M_1 = \overline{x}_в$, получим $M(X) = \overline{x}_в$. Учитывая, что математическое ожидание распределения Пуассона равно параметру λ этого распределения (см. задачу 207), окончательно имеем $\lambda = \overline{x}_в$.

Итак, точечной оценкой параметра λ распределения Пуассона служит выборочная средняя: $\lambda^* = \overline{x}_в$.

472. Случайная величина X (число семян сорняков в пробе зерна) распределена по закону Пуассона. Ниже приведено распределение семян сорняков в $n = 1000$ пробах зерна (в первой строке указано количество x_i сорняков в одной пробе; во второй строке указана частота n_i — число проб, содержащих x_i семян сорняков):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра распределения Пуассона.

Указание. Использовать решение задачи 471.

473. Случайная величина X (число нестандартных изделий в партии изделий) распределена по закону Пуассона. Ниже приведено распределение нестандартных изделий в $n=200$ партиях (в первой строке указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке указана частота n_i — число партий, содержащих x_i нестандартных изделий):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона.

474. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку параметра p биномиального распределения

$$P_m(x_i)=C_m^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i},$$

где x_i — число появлений события в i-м опыте ($i=1, 2, \ldots, n$), m — количество испытаний в одном опыте.

Указание. Приравнять начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка.

475. Случайная величина X (число появлений события A в m независимых испытаниях) подчинена биномиальному закону распределения с неизвестным параметром p. Ниже приведено эмпирическое распределение числа появлений события в 10 опытах по 5 испытаний в каждом (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте; во второй строке указана частота n_i — количество опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	5	2	1	1	1

Найти методом моментов точечную оценку параметра p биномиального распределения.

Указание. Использовать решение задачи 474.

476. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность которого $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$.

477. Случайная величина X (время работы элемента) имеет показательное распределение $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(x\geqslant 0)$. Ниже приведено эмпирическое распределение среднего времени работы $n=200$ элементов (в первой строке приведено среднее время x_i работы элемента в часах; во второй строке указана частота n_i — количество элементов, проработавших в среднем x_i часов):

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	133	45	15	4	2	1

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра показательного распределения.

Указание. Использовать решение задачи 476.

478. Найти методом моментов точечную оценку параметра p (вероятности) геометрического распределения $P(X=x_i)=(1-p)^{x_i-1}\cdot p$, где x_i — число испытаний, произведенных до появления события; p — вероятность появления события в одном испытании.

Указание. Принять во внимание, что $M(X)=1/p$ (см. задачу 222).

479. Найти методом моментов оценку параметра p геометрического распределения $P(X=x_i)=(1-p)^{x_i-1}\cdot p$, если в четырех опытах событие появилось соответственно после двух, четырех, шести и восьми испытаний.

480. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечные оценки неизвестных параметров α и β гамма-распределения, плотность которого

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-x/\beta} \quad (\alpha>-1,\ \beta>0,\ x\geqslant 0).$$

Решение. Для отыскания двух неизвестных параметров необходимо иметь два уравнения; приравняем начальный теоретический момент первого порядка ν_1 начальному эмпирическому моменту первого порядка M_1 и центральный теоретический момент второго порядка μ_2 центральному эмпирическому моменту второго порядка m_2;

$$\nu_1=M_1, \quad \mu_2=m_2.$$

Учитывая, что $\nu_1=M(X)$, $M_1=\overline{x}_в$, $\mu_2=D(X)$, $m_2=D_в$, имеем

$$\begin{cases} M(X)=\overline{x}_в, \\ D(X)=D_в. \end{cases} \qquad (*)$$

Математическое ожидание и дисперсия гамма-распределения соответственно равны $M(X)=(\alpha+1)\beta$, $D(X)=(\alpha+1)\beta^2$ (см. задачу 302), поэтому (*) можно записать в виде

$$\begin{cases} (\alpha+1)\beta=\overline{x}_в, \\ (\alpha+1)\beta^2=D_в. \end{cases}$$

Решив эту систему, окончательно получим искомые точечные оценки неизвестных параметров: $\alpha^*=(\overline{x}_в)^2/D_в-1$, $\beta^*=D_в/\overline{x}_в$.

481. Случайная величина X (уровень воды в реке по сравнению с номиналом) подчинена гамма-распределению, плотность которого определяется параметрами α и β ($\alpha > -1$, $\beta > 0$):

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} \cdot e^{-x/\beta} \quad (x \geqslant 0).$$

Ниже приведено распределение среднего уровня воды по данным $n = 45$ паводков (в первой строке указан средний уровень воды x_i (см); во второй строке приведена частота n_i — количество паводков со средним уровнем воды x_i):

x_i	37,5	62,5	87,5	112,5	137,5	162,5	187,5	250	350
n_i	1	3	6	7	7	5	4	8	4

Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров α и β рассматриваемого гамма-распределения.

Решение. Используем точечные оценки параметров гамма-распределения (см. задачу **480**):

$$\alpha^* = (\overline{x}_{в})^2/D_{в} - 1, \quad \beta^* = D_{в}/\overline{x}_{в}. \qquad (*)$$

По заданному распределению легко найдем выборочную среднюю и выборочную дисперсию: $\overline{x}_{в} = 166$, $D_{в} = 6782$.

Подставив эти числа в формулы (*), окончательно получим искомые точечные оценки неизвестных параметров рассматриваемого гамма-распределения: $\alpha^* = 3{,}06$, $\beta^* = 40{,}86$.

482. Устройство состоит из элементов, время безотказной работы которых подчинено гамма-распределению. Испытания пяти элементов дали следующие наработки (время работы элемента в часах до отказа): 50, 75, 125, 250, 300. Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров α и β, которыми определяется гамма-распределение.

Указание. Использовать решение задачи **480**. Учесть, что объем выборки $n = 5$ мал, поэтому в формулах для вычисления параметров α и β вместо выборочной дисперсии подставить исправленную дисперсию $s^2 = \Sigma n_i (x_i - \overline{x}_{в})^2/(n-1)$.

483. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения, плотность которого

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Указание. Приравнять начальный теоретический момент первого порядка и центральный теоретический момент второго порядка соответствующим эмпирическим моментам.

484. Случайная величина X (отклонение контролируемого размера изделия от номинала) подчинена нормальному закону распределения с неизвестными параметрами a и σ. Ниже приведено эмпирическое распределение отклонения от номинала $n=200$ изделий (в первой строке указано отклонение x_i (мм); во второй строке приведена частота n_i — количество изделий, имеющих отклонение x_i):

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения.

Указание. Использовать задачу 483.

485. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечные оценки параметров a и b равномерного распределения, плотность которого $f(x)=1/(b-a)$ $(b>a)$.

Указание. Использовать решения задач 313, 315.

486. Случайная величина X (ошибка измерения дальности радиодальномером) подчинена равномерному закону распределения с неизвестными параметрами a и b. Ниже приведено эмпирическое распределение средней ошибки $n=200$ измерений дальности (в первой строке указана средняя ошибка x_i; во второй строке указана частота n_i — количество измерений, имеющих среднюю ошибку x_i):

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров a и b равномерного распределения.

Указание. Использовать задачу 485.

487. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечные оценки неизвестных параметров λ_1 и λ_2 «двойного распределения» Пуассона

$$P(X=x_i)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_1^{x_i}e^{-\lambda_1}}{x_i!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_2^{x_i}e^{-\lambda_2}}{x_i!},$$

где x_i — число появлений события в n_i испытаниях λ_1 и λ_2 — положительные числа, причем $\lambda_2>\lambda_1$.

Решение. Если случайная величина Z распределена по закону Пуассона с параметром λ, то ее начальные теоретические моменты первого и второго порядка соответственно равны (см. задачи **207**, **227**):

$$\begin{aligned} \nu_1 &= M(Z) = \lambda, \\ \nu_2 &= M(Z^2) = \lambda + \lambda^2. \end{aligned} \qquad (*)$$

Найдем начальные теоретические моменты первого и второго порядка рассматриваемой случайной величины X, учитывая соотношения (*):

$$\nu_1 = M(X) = \lambda_1/2 + \lambda_2/2 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2,$$

$$\nu_2 = M(X^2) = (1/2)(\lambda_1 + \lambda_1^2) + (1/2)(\lambda_2 + \lambda_2^2) = \nu_1 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/2.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2\nu_1, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\nu_2 - 2\nu_1. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно неизвестных параметров, приняв во внимание, что $\lambda_2 > \lambda_1$, получим:

$$\lambda_1 = \nu_1 - \sqrt{\nu_2 - \nu_1 - \nu_1^2}, \quad \lambda_2 = \nu_1 + \sqrt{\nu_2 - \nu_1 - \nu_1^2}.$$

488. Случайная величина X распределена по «двойному» закону Пуассона:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_1}}{x_i!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_2^{x_i} e^{-\lambda_2}}{x_i!}.$$

Ниже приведено эмпирическое распределение числа появлений события в $n = 327$ испытаниях (в первой строке указано число x_i появлений события; во второй строке приведена частота n_i — количество испытаний, в которых появилось x_i событий):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	28	47	81	67	53	24	13	8	3	2	1

Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров λ_1 и λ_2 «двойного распределения» Пуассона.

Указание. Использовать решение задачи **487**. Вычислить по выборке начальные эмпирические моменты первого и второго порядков:

$$M_1 = \left(\sum n_i x_i\right)/n, \quad M_2 = \left(\sum n_i x_i^2\right)/n.$$

§ 3. Метод наибольшего правдоподобия

Метод наибольшего правдоподобия точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения сводится к отысканию максимума функции одного или нескольких оцениваемых параметров.

А. Дискретные случайные величины. Пусть X — дискретная случайная величина, которая в результате n опытов приняла возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид закона распределения величины X задан, но неизвестен параметр Θ, которым определяется этот закон; требуется найти его точечную оценку $\Theta^* = \Theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i через $p(x_i; \Theta)$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называют функцию аргумента Θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta) = p(x_1; \Theta) \cdot p(x_2; \Theta) \ldots p(x_n; \Theta).$$

Оценкой наибольшего правдоподобия параметра Θ называют такое его значение Θ^*, при котором функция правдоподобия достигает максимума.

Функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении Θ, поэтому вместо отыскания максимума функции L ищут, что удобнее, максимум функции $\ln L$.

Логарифмической функцией правдоподобия называют функцию $\ln L$.

Точку максимума функции $\ln L$ аргумента Θ можно искать, например, так:

1. Найти производную $\dfrac{d \ln L}{d\Theta}$.

2. Приравнять производную нулю и найти критическую точку Θ^*— корень полученного уравнения (его называют *уравнением правдоподобия*).

3. Найти вторую производную $\dfrac{d^2 \ln \Theta}{d\Theta^2}$; если вторая производная при $\Theta = \Theta^*$ отрицательна, то Θ^*—точка максимума.

Найденную точку максимума Θ^* принимают в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра Θ.

Б. Непрерывные случайные величины. Пусть X—непрерывная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид плотности распределения—функции $f(x)$—задан, но неизвестен параметр Θ, которым определяется эта функция.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X называют функцию аргумента Θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta) = f(x_1; \Theta) \cdot f(x_2; \Theta) \ldots f(x_n; \Theta).$$

Оценку наибольшего правдоподобия неизвестного параметра распределения непрерывной случайной величины ищут так же, как в случае дискретной случайной величины.

Если плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины определяется двумя неизвестными параметрами Θ_1 и Θ_2, то функция правдоподобия есть функция двух независимых аргументов Θ_1 и Θ_2:

$$L = f(x_1; \Theta_1, \Theta_2) \cdot f(x_2; \Theta_1, \Theta_2) \ldots f(x_n; \Theta_1, \Theta_2).$$

Далее находят логарифмическую функцию правдоподобия и для отыскания ее максимума составляют и решают систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \Theta_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \Theta_2} = 0. \end{cases}$$

489. Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра p (вероятность появления события в одном испытании) биномиального распределения:

$$P_m(x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i},$$

где x_i — число появлений события в i-м опыте, m — количество испытаний в одном опыте, n — число опытов.

Решение. Составим функцию правдоподобия:

$$L = p(x_1;\ \Theta) \cdot p(x_2;\ \Theta) \ldots p(x_n;\ \Theta).$$

Учитывая, что $\Theta = p$ и $P(X = x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i}$, получим

$$L = \left[C_m^{x_1} p^{x_1} (1-p)^{m-x_1}\right] \cdot \left[C_m^{x_2} p^{x_2} (1-p)^{m-x_2}\right] \ldots \left[C_m^{x_n} p^{x_n} (1-p)^{m-x_n}\right],$$

или

$$L = \left(C_m^{x_1} C_m^{x_2} \ldots C_m^{x_n}\right) \cdot p^{x_1+x_2+\ldots+x_n} \cdot (1-p)^{nm-(x_1+x_2+\ldots+x_n)}.$$

Напишем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = \ln\left[C_m^{x_1} C_m^{x_2} \ldots C_m^{x_n}\right] + \left(\sum x_i\right) \ln p + \left(nm - \sum x_i\right) \ln(1-p).$$

Найдем первую производную по p:

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{\sum x_i}{p} - \left(nm - \sum x_i\right) \frac{1}{1-p}.$$

Приравняв первую производную нулю и решив полученное уравнение, получим критическую точку

$$p = \left(\sum x_i\right)/(nm).$$

Найдем вторую производную по p:

$$\frac{d^2 \ln L}{dp^2} = -\frac{\sum x_i}{p^2} + \frac{nm - \sum x_i}{(1-p)^2}.$$

Легко убедиться, что при $p = \left(\sum x_i\right)/(nm)$ вторая производная отрицательна; следовательно, эта точка есть точка максимума и ее надо принять в качестве оценки наибольшего правдоподобия неизвестной вероятности p биномиального распределения:

$$p^* = \left(\sum x_i\right)/(nm).$$

Очевидно, что если x_i появлений события наблюдалось в n_i опытах, то

$$p^* = \left(\sum n_i x_i\right)/(nm).$$

490. Случайная величина X (число появлений события A в m независимых испытаниях) подчинена биномиальному закону распределения с неизвестным параметром p. Ниже приведено эмпирическое распределение числа появлений события A в 1000 испытаний (в первой строке указано число x_i появлений события в одном опыте из $m = 10$ испытаний, во второй строке приведена частота n_i — число опытов, в которых наблюдалось x_i

появлений события A):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра p биномиального распределения.

Указание. Использовать задачу 489.

491. Случайная величина X (число появлений события A в m независимых испытаниях) подчинена закону распределения Пуассона с неизвестным параметром λ:

$$P_m(X=x_i)=\lambda^{x_i}\cdot e^{-\lambda}/x_i!,$$

где m — число испытаний в одном опыте, x_i — число появлений события в i-м опыте ($i=1, 2, \ldots, n$).

Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона.

492. Случайная величина X (число поврежденных стеклянных изделий в одном контейнере) распределена по закону Пуассона с неизвестным параметром λ. Ниже приведено эмпирическое распределение числа поврежденных изделий в 500 контейнерах (в первой строке указано количество x_i поврежденных изделий в одном контейнере, во второй строке приведена частота n_i — число контейнеров, содержащих x_i поврежденных изделий):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона.

Указание. Использовать задачу 491.

493. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность которого $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$.

Решение. Составим функцию правдоподобия

$$L=f(x_1;\ \Theta)\cdot f(x_2;\ \Theta)\ldots f(x_n;\ \Theta),$$

учитывая, что $\Theta=\lambda$ и, следовательно, $f(x;\ \Theta)=f(x;\ \lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$:

$$L=(\lambda e^{-\lambda x_1})\cdot(\lambda e^{-\lambda x_2})\ldots(\lambda e^{-\lambda x_n})=\lambda^n\cdot e^{-\lambda\sum x_i}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i.$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = n/\lambda - \sum x_i.$$

Запишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю: $n/\lambda - \sum x_i = 0$. Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda = \frac{1}{\left(\sum x_i\right)/n} = 1/\bar{x}_в.$$

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = (-n)/\lambda^2.$$

Легко видеть, что при $\lambda = 1/\bar{x}_в$ вторая производная отрицательна; следовательно, эта точка есть точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшего правдоподобия надо принять величину, обратную выборочной средней: $\lambda^* = 1/\bar{x}_в$.

494. Случайная величина X (время безотказной работы элемента) имеет показательное распределение $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$. Ниже приведено эмпирическое распределение среднего времени работы 1000 элементов (в первой строке указано среднее время x_i безотказной работы одного элемента в часах; во второй строке указана частота n_i — количество элементов, проработавших в среднем x_i часов):

x_i	5	15	25	35	45	55	65
n_i	365	245	150	100	70	45	25

Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения.

Указание. Использовать задачу **493**.

495. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку параметра β гамма-распределения (параметр α известен), плотность которого

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta} \quad (\alpha > -1,\ \beta > 0,\ x \geqslant 0).$$

496. Устройство состоит из элементов, время безотказной работы которых подчинено гамма-распределению. Испытания пяти элементов дали следующие наработки (время работы элемента в часах до отказа): 50, 75, 125, 250, 300. Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку одного неизвестного параметра β гамма-распределения, если второй параметр этого распределения $\alpha=1,12$.

Указание. Использовать задачу 495.

497. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку параметра p геометрического распределения:

$$P(X=x_i)=(1-p)^{x_i-1}\cdot p,$$

где x_i — число испытаний, произведенных до появления события; p — вероятность появления события в одном испытании.

498. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку параметра a (параметр σ известен) распределения Кэптейна, плотность которого

$$f(x)=\frac{g'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-[g(x)-a]^2/(2\sigma^2)},$$

где $g(x)$ — дифференцируемая функция.

499. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку параметра σ (параметр a известен) распределения Кэптейна (см. задачу 498).

500. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечные оценки параметров a и σ нормального распределения, плотность которого

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Указание. Составить и решить систему

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=0.$$

§ 4. Интервальные оценки

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр.

1. *Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X* по выборочной средней $\bar{x}_в$ при известном среднем квад-

ратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\bar{x}_в - t(\sigma/\sqrt{n}) < a < \bar{x}_в + t(\sigma/\sqrt{n}),$$

где $t(\sigma/\sqrt{n}) = \delta$ — точность оценки, n — объем выборки, t — значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. приложение 2), при котором $\Phi(t) = \gamma/2$; при неизвестном σ (и объеме выборки $n < 30$)

$$\bar{x}_в - t_\gamma(s/\sqrt{n}) < a < \bar{x}_в + t_\gamma(s/\sqrt{n}),$$

где s — «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение, t_γ находят по таблице приложения 3 по заданным n и γ.

2. *Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X* по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (\text{при } q < 1),$$
$$0 < \sigma < s(1+q) \quad (\text{при } q > 1),$$

где q находят по таблице приложения 4 по заданным n и γ.

3. *Интервальной оценкой (с надежностью γ) неизвестной вероятности p биномиального распределения* по относительной частоте w служит доверительный интервал (с приближенными концами p_1 и p_2)

$$p_1 < p < p_2,$$

где

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left[w^2 + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$
$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left[w + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$

где n — общее число испытаний; m — число появлений события; w — относительная частота, равная отношению m/n; t — значение аргумента функции Лапласа (приложение 2), при котором $\Phi(t) = \gamma/2$ (γ — заданная надежность).

Замечание. При больших значениях n (порядка сотен) можно принять в качестве приближенных границ доверительного интервала

$$p_1 = w - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \quad p_2 = w + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}.$$

501. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\bar{x}_в = 14$ и объем выборки $n = 25$.

Решение. Требуется найти доверительный интервал

$$\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (*)$$

Все величины, кроме t, известны. Найдем t из соотношения $\Phi(t)=0{,}95/2=0{,}475$. По таблице приложения 2 находим $t=1{,}96$. Подставив $t=1{,}96$, $\bar{x}_в=14$, $\sigma=5$, $n=25$ в (*), окончательно получим искомый доверительный интервал $12{,}04 < a < 15{,}96$.

502. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\bar{x}_в$ и объем выборки n: а) $\sigma=4$, $\bar{x}_в=10{,}2$, $n=16$; б) $\sigma=5$, $\bar{x}_в=16{,}8$, $n=25$.

503. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $\sigma=40$ м произведено пять равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния a до цели с надежностью $\gamma=0{,}95$, зная среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x}_в=2000$ м.

Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

504. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma=40$ ч. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

505. Станок-автомат штампует валики. По выборке объема $n=100$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надежностью 0,95 точность δ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготовляемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение $\sigma=2$ мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

506. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней равна $\delta=0{,}3$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma=1{,}2$ нормально распределенной генеральной совокупности.

Решение. Воспользуемся формулой, определяющей точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней: $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$. Отсюда

$$n = t^2\sigma^2/\delta^2. \qquad (*)$$

По условию, $\gamma = 0{,}975$; следовательно, $\Phi(t) = 0{,}975/2 = 0{,}4875$. По таблице приложения 2 найдем $t = 2{,}24$. Подставив $t = 2{,}24$, $\sigma = 1{,}2$ и $\delta = 0{,}3$ в (*), получим искомый объем выборки $n = 81$.

507. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна 0,2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 1{,}5$.

508. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

варианта	x_i	−2	1	2	3	4	5
частота	n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Решение. Выборочную среднюю и «исправленное» среднее квадратическое отклонение найдем соответственно по формулам:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^2}{n-1}}.$$

Подставив в эти формулы данные задачи, получим $\bar{x}_в = 2$, $s = 2{,}4$.

Найдем t_γ. Пользуясь таблицей приложения 3, по $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10$ находим $t_\gamma = 2{,}26$.

Найдем искомый доверительный интервал:

$$\bar{x}_в - t_\gamma s/\sqrt{n} < a < \bar{x}_в + t_\gamma s/\sqrt{n}.$$

Подставляя $\bar{x}_в = 2$, $t_\gamma = 2{,}26$, $s = 2{,}4$, $n = 10$, получим искомый доверительный интервал $0{,}3 < a < 3{,}7$, покрывающий неизвестное математическое ожидание a с надежностью 0,95.

509. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 12$:

варианта	x_i	−0,5	−0,4	−0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
частота	n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности с помощью доверительного интервала.

510. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x}_в = 30,1$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0,99$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию a. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала

$$\bar{x}_в - t_\gamma s/\sqrt{n} < a < \bar{x}_в + t_\gamma s/\sqrt{n}. \qquad (*)$$

Все величины, кроме t_γ, известны. Найдем t_γ. По таблице приложения 3 по $\gamma = 0,99$ и $n = 9$ находим $t_\gamma = 2,36$.

Подставив $\bar{x}_в = 30,1$, $t_\gamma = 2,36$, $s = 6$, $n = 9$ в (*), получим искомый интервал: $25,38 < a < 34,82$.

511. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x}_в = 42,8$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 8$. Оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0,999$.

512. По данным выборки объема $n = 16$ из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 1$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

Решение. Задача сводится к отысканию доверительного интервала

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \text{ (если } q < 1), \qquad (*)$$

или

$$0 < \sigma < s(1+q) \text{ (если } q > 1).$$

По данным $\gamma = 0,95$ и $n = 16$ по таблице приложения 4 найдем $q = 0,44$. Так как $q < 1$, то, подставив $s = 1$, $q = 0,44$ в соотношение (*), получим искомый доверительный интервал $0,56 < \sigma < 1,44$.

513. По данным выборки объема n из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,999, если: а) $n=10$, $s=5,1$; б) $n=50$, $s=14$.

514. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем «исправленное» среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение. Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала, покрывающего σ с заданной надежностью $\gamma=0,99$:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q). \qquad (*)$$

По данным $\gamma=0,99$ и $n=12$ по таблице приложения 4 найдем $q=0,9$. Подставив $s=0,6$, $q=0,9$ в соотношение (*), окончательно получим $0,06 < \sigma < 1,14$.

515. Произведено 10 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем «исправленное» среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,8. Найти точность прибора с надежностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

516. Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,95, если в 60 испытаниях событие A появилось 15 раз.

Решение. По условию, $n=60$, $m=15$, $\gamma=0,95$. Найдем относительную частоту появления события A: $w=m/n=15/60=0,25$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t)=\gamma/2=0,95/2=0,475$. По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $t=1,96$.

Найдем границы искомого доверительного интервала:

$$p_1=\frac{n}{t^2+n}\left[w+\frac{t^2}{2n}-t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$

$$p_2=\frac{n}{t^2+n}\left[w+\frac{t^2}{2n}+t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right].$$

Подставив в эти формулы $n=60$, $w=0,25$, $t=1,96$, получим $p_1=0,16$, $p_2=0,37$.

Итак, искомый доверительный интервал $0,16 < p < 0,37$.

517. Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,99, если в 100 испытаниях событие A появилось 60 раз.

518. Изготовлен экспериментальный игровой автомат, который должен обеспечить появление выигрыша в одном случае из 100 бросаний монеты в автомат. Для проверки пригодности автомата произведено 400 испытаний, причем выигрыш появился 5 раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность появления выигрыша с надежностью $\gamma=0,999$.

Решение. Найдем относительную частоту появления выигрыша: $w=m/n=5/400=0,0125$. Найдем t из соотношения $\Phi(t)= =\gamma/2=0,999/2=0,4995$. По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $t=3,3$.

Учитывая, что $n=400$ велико, используем для отыскания границ доверительного интервала приближенные формулы:

$$p_1=w-t\sqrt{w(1-w)/n}, \quad p_2=w+t\sqrt{w(1-w)/n}.$$

Подставив в эти формулы $w=0,0125$, $t=3,3$, $n=400$, получим $p_1=-0,0058$, $p_2=0,0308$.

Итак, искомый доверительный интервал $0<p<0,0308$.

519. Произведено 300 испытаний, в каждом из которых неизвестная вероятность p появления события A постоянна. Событие A появилось в 250 испытаниях. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p с надежностью 0,95.

520. В 360 испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события одинакова и неизвестна, событие A появилось 270 раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p с надежностью 0,95.

521. Среди 250 деталей, изготовленных станком-автоматом, оказалось 32 нестандартных. Найти доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,99 неизвестную вероятность p изготовления станком нестандартной детали.

522. При испытаниях 1000 элементов зарегистрировано 100 отказов. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p отказа элемента с надежностью: а) 0,95; б) 0,99.

Глава одиннадцатая

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СВОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБОРКИ

§ 1. Метод произведений вычисления выборочных средней и дисперсии

А. Равноотстоящие варианты. Пусть выборка задана в виде распределения равноотстоящих вариант и соответствующих им частот. В этом случае удобно находить выборочные среднюю и дисперсию методом произведений по формулам

$$\bar{x}_в = M_1^* h + C, \quad D_в = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2,$$

где h — шаг (разность между двумя соседними вариантами); C — ложный нуль (варианта, которая расположена примерно в середине вариационного ряда); $u_i = (x_i - C)/h$ — условная варианта; $M_1^* = (\sum n_i u_i)/n$ — условный момент первого порядка; $M_2^* = (\sum n_i u_i^2)/n$ — условный момент второго порядка.

Как практически использовать метод произведений, указано в задаче 523.

523. Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 100$:

варианта	x_i	12	14	16	18	20	22
частота	n_i	5	15	50	16	10	4

Решение. Составим расчетную табл. 1; для этого:

1) запишем варианты в первый столбец;

2) запишем частоты во второй столбец; сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;

3) в качестве ложного нуля C выберем варианту (16), которая имеет наибольшую частоту (в качестве C можно взять любую варианту, расположенную примерно в середине столбца); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей ложный нуль, пишем 0; над нулем последовательно записываем -1, -2, а под нулем 1, 2, 3;

4) произведения частот n_i на условные варианты u_i запишем в четвертый столбец; отдельно находим сумму (-25) отрицательных чисел и отдельно сумму (48) положительных чисел; сложив эти числа, их сумму (23) помещаем в нижнюю клетку четвертого столбца;

5) произведения частот на квадраты условных вариант, т. е. $n_i u_i^2$, запишем в пятый столбец (удобнее перемножить числа каждой строки третьего и четвертого столбцов: $u_i \cdot n_i u_i = n_i u_i^2$); сумму чисел столбца (127) помещаем в нижнюю клетку пятого столбца;

6) произведения частот на квадраты условных вариант, увеличенных на единицу, т. е. $n_i(u_i+1)^2$, запишем в шестой контрольный столбец; сумму чисел столбца (273) помещаем в нижнюю клетку шестого столбца.

В итоге получим расчетную табл. 1.

Для контроля вычислений пользуются тождеством

$$\sum n_i (u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n.$$

Контроль:

$$\sum n_i (u_i+1)^2 = 273, \quad \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n =$$
$$= 127 + 2\cdot 23 + 100 = 273.$$

Совпадение контрольных сумм свидетельствует о правильности вычислений.

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \left(\sum n_i u_i\right)/n = 23/100 = 0{,}23; \qquad M_2^* = \left(\sum n_i u_i^2\right)/n = 127/100 = 1{,}27.$$

Найдем шаг (разность между любыми двумя соседними вариантами): $h = 14 - 12 = 2$.

Вычислим искомые выборочные среднюю и дисперсию, учитывая, что ложный нуль (варианта, которая имеет наибольшую частоту) $C = 16$:

$$\overline{x}_{\text{в}} = M_1^* h + C = 0{,}23\cdot 2 + 16 = 16{,}46;$$
$$D_{\text{в}} = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right] h^2 = [1{,}27 - 0{,}23^2]\cdot 2^2 = 4{,}87.$$

Таблица 1

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i+1)^2$
12	5	−2	−10	20	5
14	15	−1	−15	15	—
16	50	0	−25	—	50
18	16	1	16	16	64
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
			48		
	$n=100$		$\sum n_i u_i = 23$	$\sum n_i u_i^2 = 127$	$\sum n_i (u_i+1)^2 = 273$

524. Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки:

а) варианта x_i 18,6 19,0 19,4 19,8 20,2 20,6
частота n_i 4 6 30 40 18 2

б) варианта x_i 65 70 75 80 85
частота n_i 2 5 25 15 3

Б. Неравноотстоящие варианты. Если первоначальные варианты не являются равноотстоящими, то интервал, в котором заключены все варианты выборки, делят на несколько равных, длины h, частичных интервалов (каждый частичный интервал должен содержать не менее 8—10 вариант). Затем находят середины частичных интервалов, которые и образуют последовательность равноотстоящих вариант. В качестве частоты каждой середины интервала принимают сумму частот вариант, которые попали в соответствующий частичный интервал.

При вычислении выборочной дисперсии для уменьшения ошибки, вызванной группировкой (особенно при малом числе интервалов), делают поправку Шеппарда, а именно вычитают из вычисленной дисперсии 1/12 квадрата длины частичного интервала.

Таким образом, с учетом поправки Шеппарда дисперсию вычисляют по формуле

$$D'_в = D_в - (1/12)\,h^2.$$

525. Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 100$:

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	25	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

Решение. Разобьем интервал 2—26 на следующие четыре частичных интервала длины $h=6$: 2—8; 8—14; 14—20; 20—26. Приняв середины частичных интервалов в качестве новых вариант y_i, получим равноотстоящие варианты: $y_1=5$, $y_2=11$, $y_3=17$, $y_4=23$.

В качестве частоты n_1 варианты $y_1=5$ примем сумму частот вариант, попавших в первый интервал: $n_1=3+5+10=18$.

Вычислив аналогично частоты остальных вариант, получим распределение равноотстоящих вариант:

y_i	5	11	17	23
n_i	18	20	25	37

Пользуясь методом произведений, найдем $\bar{y}_в = 15{,}86$, $D_в = 45{,}14$.

Принимая во внимание, что число частичных интервалов (4) мало, учтем поправку Шеппарда:

$$D'_в = D_в - (1/12)\,h^2 = 45{,}14 - 6^2/12 = 42{,}14.$$

526. При вычислении дисперсии распределения неравноотстоящих вариант выборка была разбита на пять интервалов длины $h = 12$. Выборочная дисперсия равноотстоящих вариант (середин частичных интервалов) $D_в = 52{,}4$. Найти выборочную дисперсию, учитывая поправку Шеппарда.

527. а) Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению неравноотстоящих вариант выборки объема $n=50$:

x_i	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

б) найти выборочную дисперсию с учетом поправки Шеппарда.

Указание. Разбить интервал 6—26 на пять частичных интервалов длины $h=4$.

528. а) Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению неравноотстоящих вариант выборки объема $n=100$:

x_i	10	13	15	17	19	23	24	26	28	32	34	35
n_i	2	4	6	8	9	6	20	15	10	8	7	5

б) найти выборочную дисперсию с учетом поправки Шеппарда.

Указание. Разбить интервал 10—35 на пять частичных интервалов длины $h=5$. Частоту варианты $x=15$, т. е. частоту 6, распределить поровну между первым и вторым частичными интервалами (так как варианта 15 попала на границу интервала).

§ 2. Метод сумм вычисления выборочных средней и дисперсии

Пусть выборка задана в виде распределения равностоящих вариант и соответствующих им частот. В этом случае, как было указано в § 1, выборочные среднюю и дисперсию можно вычислить по формулам:

$$\overline{x}_{\text{в}}=M_1^*h+C, \quad D_{\text{в}}=\left[M_2^*-(M_1^*)^2\right]h^2.$$

При использовании метода сумм условные моменты первого и второго порядков находят по формулам:

$$M_1^*=d_1/n, \quad M_2^*=(s_1+2s_2)/n,$$

где $d_1=a_1-b_1$, $s_1=a_1+b_1$, $s_2=a_2+b_2$. Таким образом, в конечном счете надо вычислить числа a_1, a_2, b_1, b_2. Как практически вычислить эти числа, указано в задаче 529.

529. Найти методом сумм выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n=100$:

варианта x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
частота n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Решение. Составим расчетную табл. 2, для этого:

1) запишем варианты в первый столбец;

2) запишем частоты во второй столбец; сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;

3) в качестве ложного нуля C выберем варианту (68), которая имеет наибольшую частоту (в качестве C можно взять любую варианту, расположенную примерно в середине столбца); в клетках строки, содержащей ложный нуль, запишем нули; в четвертом

столбце над и под уже помещенным нулем запишем еще по одному нулю;

4) в оставшихся незаполненными над нулем клетках третьего столбца (исключая самую верхнюю) запишем последовательно накопленные частоты: 2; $2+4=6$; $6+6=12$; $12+8=20$; $20+12=32$; сложив все накопленные частоты, получим число $b_1=72$, которое поместим в верхнюю клетку третьего столбца. В оставшихся незаполненными под нулем клетках третьего столбца (исключая самую нижнюю) запишем последовательно накопленные частоты: 5; $5+7=12$; $12+8=20$; $20+18=38$; сложив все накопленные частоты, получим число $a_1=75$, которое поместим в нижнюю клетку третьего столбца;

5) аналогично заполняется четвертый столбец, причем суммируют частоты третьего столбца; сложив все накопленные частоты, расположенные над нулем, получим число $b_2=70$, которое поместим в верхнюю клетку четвертого столбца; сумма накопленных частот, расположенных под нулем, равна числу a_2, которое поместим в нижнюю клетку четвертого столбца.

В итоге получим расчетную табл. 2.

Найдем d_1, s_1, s_2:

$$d_1=a_1-b_1=75-72=3;$$
$$s_1=a_1+b_1=75+72=147;$$
$$s_2=a_2+b_2=59+70=129.$$

Таблица 2

1	2	3	4
x_i	n_i	$b_1=72$	$b_2=70$
48	2	2	2
52	4	6	8
56	6	12	20
60	8	20	40
64	12	32	0
68	30	0	0
72	18	38	0
76	8	20	37
80	7	12	17
84	5	5	5
	$n=100$	$a_1=75$	$a_2=59$

Найдем условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = d_1/n = 3/100 = 0{,}03;$$

$$M_2^* = (s_1 + 2s_2)/n = (147 + 2 \cdot 129)/100 = 4{,}05.$$

Вычислим искомые выборочную среднюю и выборочную дисперсию, учитывая, что шаг (разность между двумя соседними вариантами) $h = 4$ и ложный нуль $C = 68$:

$$\bar{x}_в = M_1^* h + C = 0{,}03 \cdot 4 + 68 = 68{,}12;$$

$$D_в = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [4{,}05 - 0{,}03^2] \cdot 4^2 \simeq 64{,}78.$$

530. Найти методом сумм выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 100$:

а)

варианта	x_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
частота	n_i	4	6	8	15	25	20	8	7	5	2

б)

варианта	x_i	122	128	134	140	146	152	158	164	170	176
частота	n_i	7	8	12	16	4	20	13	10	7	3

в)

варианта	x_i	12	14	16	18	20	22
частота	n_i	5	15	50	16	10	4

г)

варианта	x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
частота	n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

§ 3. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения

Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения определяются соответственно равенствами

$$a_s = m_3/\sigma_в^3, \quad e_k = m_4/\sigma_в^4 - 3;$$

здесь $\sigma_в$ — выборочное среднее квадратическое отклонение; m_3 и m_4 — центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3 = (\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^3/n, \quad m_4 = (\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^4)/n.$$

Эти моменты в случае равноотстоящих вариант с шагом h (шаг равен разности между любыми двумя соседними вариантами) удобно вычислять по формулам:

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]\, h^3,$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4]\, h^4,$$

где $M_k^* = (\sum n_i u_i^k)/n$ — условные моменты k-го порядка $u_i = (x_i - C)/h$ — условные варианты. Здесь x_i — первоначальные варианты; C — ложный нуль, т. е. варианта, имеющая наибольшую частоту (либо любая варианта, расположенная примерно в середине вариационного ряда).

Итак, для отыскания асимметрии и эксцесса необходимо вычислить условные моменты, что можно сделать методом произведений или методом сумм.

А. Метод произведений

531. Найти методом произведений асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объема $n=100$:

варианта x_i	12	14	16	18	20	22
частота n_i	5	15	50	16	10	4

Решение. Воспользуемся методом произведений. Составим расчетную табл. 3. В § 1 этой главы при решении задачи **523** уже было указано, как заполняются столбцы 1—5 расчетной таблицы, поэтому ограничимся краткими пояснениями.

Для заполнения столбца 6 удобно перемножить числа каждой строки столбцов 3 и 5. Для заполнения столбца 7 удобно перемножать числа каждой строки столбцов 3 и 6. Столбец 8 служит для контроля вычислений с помощью тождества

$$\sum n_i(u_i+1)^4=\sum n_iu_i^4+4\sum n_iu_i^3+6\sum n_iu_i^2+4\sum n_iu_i+n.$$

Приведем расчетную табл. 3.

Таблица 3

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
12	5	—2	—10	20	—40	80	5
14	15	—1	—15	15	—15	15	—
16	50	0	—25	—	—55	—	50
18	16	1	16	16	16	16	256
20	10	2	20	40	80	160	810
22	4	3	12	36	108	324	1024
			48		204		
	$n=100$		$\sum n_iu_i=$ $=23$	$\sum n_iu_i^2=$ $=127$	$\sum n_iu_i^3=$ $=149$	$\sum n_iu_i^4=$ $=595$	$\sum n_i(u_i+$ $+1)^4=$ $=2145$

Контроль:

$$\sum n_i(u_i+1)^4=2145,$$

$$\sum n_iu_i^4+4\sum n_iu_i^3+6\sum n_iu_i^2+4\sum n_iu_i+n=$$
$$=595+4\cdot149+6\cdot127+4\cdot23+100=2145.$$

Совпадение контрольных сумм свидетельствует о правильности вычислений.

Найдем условные моменты третьего и четвертого порядков (условные моменты первого и второго порядков вычислены в задаче **523**: $M_1^*=0,23$, $M_2^*=1,27$):

$$M_3^*=\frac{\sum n_i u_i^3}{n}=\frac{149}{100}=1,49; \quad M_4^*=\frac{\sum n_i u_i^4}{n}=\frac{595}{100}=5,95.$$

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3=\left[M_3^*-3M_1^*M_2^*+2\,(M_1^*)^3\right]h^3,$$
$$m_4=\left[M_4^*-4M_1^*M_3^*+6\,(M_1^*)^2M_2^*-3\,(M_1^*)^4\right]h^4.$$

Подставляя $h=2$ и $M_1^*=0,23$, $M_2^*=1,27$, $M_3^*=1,49$, $M_4^*=5,95$, получим $m_3=5,104$, $m_4=79,582$.

Найдем искомые асимметрию и эксцесс, учитывая, что $D_B=4,87$ (см. задачу **523**):

$$a_s=m_3/\sigma_B^3=5,124/(\sqrt{4,87})^3=0,47;$$
$$e_k=m_4/\sigma_B^4-3=79,582/(\sqrt{4,87})^4-3=0,36.$$

532. Найти методом произведений асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объема $n=100$:

а)

x_i	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2
n_i	8	20	45	15	12

б)

x_i	1	6	11	16	21
n_i	5	25	40	20	10

Б. Метод сумм

533. Найти методом сумм асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объема $n=100$:

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Решение. Воспользуемся методом сумм, для этого составим расчетную табл. 4. В § 2 этой главы при решении задачи **529** уже было указано, как заполняются столбцы 1—4 расчетной таблицы, поэтому ограничимся краткими пояснениями.

Для заполнения столбца 5 запишем нуль в клетке строки, содержащей ложный нуль (68); над этим нулем и под ним поставим еще по два нуля.

В клетках над нулями запишем накопленные частоты, для чего просуммируем частоты столбца 4 сверху вниз; в итоге будем иметь следующие накопленные частоты: 2; $2+8=10$; $2+8+20=30$. Сложив накопленные частоты, получим число $b_3=2+10+30=42$, которое поместим в верхнюю клетку пятого столбца.

В клетках под нулями запишем накопленные частоты, для чего просуммируем частоты столбца 4 снизу вверх; в итоге будем иметь следующие накопленные частоты: 5; $5+17=22$. Сложив накопленные частоты, получим число $a_3=5+22=27$, которое поместим в нижнюю клетку пятого столбца.

Аналогично заполняют столбец 6, причем суммируем частоты столбца 5. Сложив накопленные частоты, расположенные над нулями, получим число $b_4=2+12=14$, которое запишем в верхнюю клетку шестого столбца. Сложив числа, расположенные под нулями (в нашей задаче есть лишь одно слагаемое), получим число $a_4=5$, которое поместим в нижнюю клетку шестого столбца.

В итоге получим расчетную табл. 4.

Контроль: сумма чисел, расположенных непосредственно над нулем третьего столбца, слева от него и под ним, должна быть равна объему выборки $(32+30+38=100)$; сумма двух чисел, расположенных над двумя ступеньками ступенчатой линии (обведены жирными отрезками), должна быть равна соответственно числам b_i, стоящим над предшествующей ступенькой (при движении по «лесенке» вверх): $32+40=72=b_1$; $40+30=70=b_2$; $30+12=42=b_3$. Аналогично проверяется совпадение сумм двух чисел, стоящих под «ступеньками лесенки», ведущей вниз: $38+37=75=a_1$; $37+22=59=a_2$; $22+5=27=a_3$. При несовпадении хотя бы одной из указанных сумм следует искать ошибку в расчете.

Найдем d_i $(i=1, 2, 3)$ и s_i $(i=1, 2, 3, 4)$:

$$d_1=a_1-b_1=75-72=3, \quad d_2=a_2-b_2=59-70=-11,$$

Таблица 4

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	$b_1=72$	$b_2=70$	$b_3=42$	$b_4=14$
48	2	2	2	2	2
52	4	6	8	10	12
56	6	12	20	30	0
60	8	20	40	0	0
64	12	32	0	0	0
68	30	0	0	0	0
72	18	38	0	0	0
76	8	20	37	0	0
80	7	12	17	22	0
84	5	5	5	5	5
	$n=100$	$a_1=75$	$a_2=59$	$a_3=27$	$a_4=5$

$$d_3=a_3-b_3=27-42=-15;$$

$$s_1=a_1+b_1=75+72=147; \quad s_2=a_2+b_2=59+70=129,$$

$$s_3=a_3+b_3=27+42=69, \quad s_4=a_4+b_4=5+14=19.$$

Найдем условные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков:

$$M_1^* = \frac{d_1}{n} = \frac{3}{100} = 0{,}03, \quad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n} = \frac{147 + 2\cdot 129}{100} = 4{,}05,$$

$$M_3^* = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{n} = \frac{3 + 6(-11) + 6\cdot(-15)}{100} = -1{,}53;$$

$$M_4^* = \frac{s_1 + 14s_2 + 36s_3 + 24s_4}{n} = \frac{147 + 14\cdot 129 + 36\cdot 69 + 24\cdot 19}{100} = 48{,}93.$$

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3 = \left[M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3\right]\cdot h^3 =$$
$$= [-1{,}53 - 3\cdot 0{,}03\cdot 4{,}05 + 2\cdot(0{,}03)^3]\, 4^3 = -121{,}245,$$
$$m_4 = \left[M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4\right] h^4 =$$
$$= [48{,}93 - 4\cdot 0{,}03\cdot(-1{,}53) +$$
$$+ 6\cdot(0{,}03)^2\cdot 4{,}05 - 3(0{,}03)^4]\cdot 4^4 = 12578{,}679.$$

Найдем искомые асимметрию и эксцесс, учитывая, что $\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{64{,}78}$ (дисперсия D_B была найдена ранее, см. задачу **529**):

$$a_s = m_3/\sigma_B^3 = -121{,}245/(\sqrt{64{,}78})^3 = -0{,}25,$$
$$e_k = m_4/\sigma_B^4 - 3 = 12578{,}679/(\sqrt{64{,}78})^4 - 3 = 26{,}97.$$

534. Найти методом сумм асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объема $n = 100$:

а)

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0;
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

б)

x_i	12	14	16	18	20	22.
n_i	5	15	50	16	10	4

Глава двенадцатая
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

§ 1. Линейная корреляция

Если обе линии регрессии Y на X и X на Y — прямые, то корреляцию называют *линейной*.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}), \qquad (*)$$

где $\overline{y}_x$ — условная средняя; $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — выборочные средние признаков X и Y; σ_x и σ_y — выборочные средние квадратические отклонения; $r_в$ — выборочный коэффициент корреляции, причем

$$r_в = \left(\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}\right)/(n\sigma_x\sigma_y).$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y имеет вид

$$x_y - \overline{x} = r_{\text{в}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \overline{y}). \qquad (**)$$

Если данные наблюдений над признаками X и Y заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то целесообразно перейти к условным вариантам:

$$u_i = (x_i - C_1)/h_1, \quad v_j = (y_j - C_2)/h_2,$$

где C_1 — «ложный нуль» вариант X (новое начало отсчета); в качестве ложного нуля выгодно принять варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда (условимся принимать в качестве ложного нуля варианту, имеющую наибольшую частоту); h_1 — шаг, т. е. разность между двумя соседними вариантами X; C_2 — ложный нуль вариант Y; h_2 — шаг вариант Y.

В этом случае выборочный коэффициент корреляции

$$r_{\text{в}} = \left(\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\overline{v}\right)/(n\sigma_u \sigma_v),$$

причем слагаемое $\sum n_{uv} uv$ удобно вычислять, используя расчетную табл. 7 (см. далее решение задачи 535).

Величины $\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u, σ_v могут быть найдены либо методом произведений (при большом числе данных), либо непосредственно по формулам:

$$\overline{u} = \left(\sum n_u u\right)/n, \quad \overline{v} = \sum n_v v/n, \quad \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}, \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}.$$

Зная эти величины, можно определить входящие в уравнения регрессии (*) и (**) величины по формулам:

$$\overline{x} = \overline{u} h_1 + C_1, \quad \overline{y} = \overline{v} h_2 + C_2, \quad \sigma_x = \sigma_u h_1, \quad \sigma_y = \sigma_v h_2.$$

Для оценки силы линейной корреляционной связи служит выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}}$.

Для обоснованного суждения о наличии связи между количественными признаками следует проверить, значим ли выборочный коэффициент корреляции (см. гл. XIII, § 12).

535. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной табл. 5.

Таблица 5

Y	X					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n=100$

Решение. Составим корреляционную табл. 6 в условных вариантах, выбрав в качестве ложных нулей $C_1=30$ и $C_2=36$ (каждая из этих вариант расположена в середине соответствующего вариационного ряда).

Таблица 6

v	u					
	−2	−1	0	1	2	n_v
−2	4	6	—	—	—	10
−1	—	8	10	—	—	18
0	—	—	32	3	9	44
1	—	—	4	12	6	22
2	—	—	—	1	5	6
n_u	4	14	46	16	20	$n=100$

Найдем $\bar{u}$ и $\bar{v}$:

$$\bar{u}=\left(\sum n_u u\right)/n=(4\cdot(-2)+14\cdot(-1)+46\cdot 0+16\cdot 1+20\cdot 2)/100=0{,}34;$$
$$\bar{v}=\left(\sum n_v v\right)/n=(10\cdot(-2)+18\cdot(-1)+44\cdot 0+22\cdot 1+6\cdot 2)/100=-0{,}04.$$

Найдем вспомогательные величины $\overline{u^2}$ и $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2}=\left(\sum n_u u^2\right)/n=(4\cdot 4+14\cdot 1+16\cdot 1+20\cdot 4)/100=1{,}26;$$
$$\overline{v^2}=\left(\sum n_v v^2\right)/n=(10\cdot 4+18\cdot 1+22\cdot 1+6\cdot 4)/100=1{,}04.$$

Найдем σ_u и σ_v

$$\sigma_u=\sqrt{\overline{u^2}-(\bar{u})^2}=\sqrt{1{,}26-0{,}34^2}=1{,}07;$$
$$\sigma_v=\sqrt{\overline{v^2}-(\bar{v})^2}=\sqrt{1{,}04-0{,}04^2}=1{,}02.$$

Найдем $\sum n_{uv}uv$, для чего составим расчетную табл. 7.

Суммируя числа последнего столбца табл. 7, находим

$$\sum_v v\cdot U=\sum n_{uv}uv=82.$$

Для контроля вычислений находим сумму чисел последней строки:

$$\sum_u u\cdot V=\sum n_{uv}uv=82.$$

Совпадение сумм свидетельствует о правильности вычислений. Пояснения к составлению табл. 7.

1. Произведение частоты n_{uv} на варианту u, т. е. $n_{uv}u$, записывают в правом верхнем углу клетки, содержащей значение частоты. Например, в правых верхних углах клеток первой строки записаны произведения: $4\cdot(-2)=-8$; $6\cdot(-1)=-6$.

Таблица 7

v \ u	-2	-1	0	1	2	$U=\sum n_{uv}\cdot u$	$v\cdot U$
-2	${}_{-8}\,4\,{}^{-8}$	${}_{-12}\,6\,{}^{-6}$				-14	28
-1	—	${}_{-8}\,8\,{}^{-8}$	${}_{-10}\,10\,{}^{0}$			-8	8
0	—	—	${}_{0}\,32\,{}^{0}$	${}_{0}\,3\,{}^{3}$	${}_{0}\,9\,{}^{18}$	21	0
1	—	—	${}_{4}\,4\,{}^{0}$	${}_{12}\,12\,{}^{12}$	${}_{6}\,6\,{}^{12}$	24	24
2	—	—	—	${}_{2}\,1\,{}^{1}$	${}_{10}\,5\,{}^{10}$	11	22
$V=\sum n_{uv}\cdot v$	-8	-20	-6	14	16		$\sum_v v\cdot U=82$
$u\cdot V$	16	20	0	14	32	$\sum_u u\cdot V=82$ ←	— Контроль

2. Складывают все числа, помещенные в правых верхних углах клеток одной строки, и их сумму помещают в клетку этой же строки «столбца U». Например, для первой строки $u=-8+(-6)=-14$.

3. Наконец, умножают варианту v на U и полученное произведение записывают в соответствующую клетку «столбца vU». Например, в первой строке таблицы $v=-2$, $U=-14$, следовательно, $vU=(-2)\cdot(-14)=28$.

4. Сложив все числа «столбца vU», получают сумму $\sum\limits_v vU$, которая равна искомой сумме $\sum n_{uv}uv$. Например, для табл. 7 $\sum\limits_v vU=82$, следовательно, искомая сумма $\sum n_{uv}uv=82$.

Для контроля аналогичные вычисления производят по столбцам: произведения $n_{uv}v$ записывают в левый нижний угол клетки, содержащей значение частоты; все числа, помещенные в левых нижних углах клеток одного столбца, складывают и их сумму помещают в «строку V»; наконец, умножают каждую варианту u на V и результат записывают в клетках последней строки.

Сложив все числа последней строки, получают сумму $\sum\limits_u uV$, которая также равна искомой сумме $\sum n_{uv}uv$. Например, для табл. 7 $\sum\limits_u uV=82$, следовательно, $\sum n_{uv}uv=82$.

Найдем искомый выборочный коэффициент корреляции:

$$r_{\text{в}}=\frac{\sum n_{uv}uv-n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v}=\frac{82-100\cdot 0{,}34\cdot(-0{,}04)}{100\cdot 1{,}07\cdot 1{,}02}=0{,}76.$$

Найдем шаги h_1 и h_2 (разности между любыми двумя соседними вариантами):

$$h_1=25-20=5;\ h_2=26-16=10.$$

Найдем $\overline{x}$ и $\overline{y}$, учитывая, что $C_1=30$, $C_2=36$:

$$\overline{x}=\overline{u}\cdot h_1+C_1=0{,}34\cdot 5+30=31{,}70;$$
$$\overline{y}=\overline{v}\cdot h_2+C_2=(-0{,}04)\cdot 10+36=35{,}60.$$

Найдем σ_x и σ_y:

$$\sigma_x=h_1\cdot\sigma_u=5\cdot 1{,}07=5{,}35;\quad \sigma_y=h_2\cdot\sigma_v=10\cdot 1{,}02=10{,}2.$$

Подставив найденные величины в соотношение (*), получим искомое уравнение прямой линии регрессии Y на X:

$$\overline{y}_x-35{,}60=0{,}76\,\frac{10{,}2}{5{,}35}\,(x-31{,}70),$$

или окончательно $\overline{y}_x=1{,}45x-10{,}36$.

536. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y по данным, приведенным в следующих корреляционных таблицах:

а)

Y	X								
	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	—	—	—	—	—	—	3
120	3	4	3	—	—	—	—	—	10
140	—	—	5	10	8	—	—	—	23
160	—	—	—	1	—	6	1	1	9
180	—	—	—	—	—	—	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n=50$

б)

Y	X							
	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	—	1	—	—	—	—	—	1
150	1	2	5	—	—	—	—	8
175	—	3	2	12	—	—	—	17
200	—	—	1	8	7	—	—	16
225	—	—	—	—	3	3	—	6
250	—	—	—	—	—	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n=50$

в)

Y	X							
	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	—	—	—	—	—	6	1	7
120	—	—	—	—	—	4	2	6
140	—	—	8	10	5	—	—	23
160	3	4	3	—	—	—	—	10
180	2	1	—	1	—	—	—	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n=50$

§ 2. Криволинейная корреляция

Если график регрессии — кривая линия, то корреляцию называют *криволинейной*. В частности, в случае параболической корреляции второго порядка выборочное уравнение регрессии Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C.$$

Неизвестные параметры A, B и C находят (например, методом Гаусса) из системы уравнений:

$$\begin{aligned}
\left(\sum n_x x^4\right) A + \left(\sum n_x x^3\right) B + \left(\sum n_x x^2\right) C &= \sum n_x \overline{y}_x x^2, \\
\left(\sum n_x x^3\right) A + \left(\sum n_x x^2\right) B + \left(\sum n_x x\right) C &= \sum n_x \overline{y}_x x, \\
\left(\sum n_x x^2\right) A + \left(\sum n_x x\right) B + nC &= \sum n_x \overline{y}_x.
\end{aligned} \qquad (*)$$

Аналогично находится выборочное уравнение регрессии X на Y:

$$\overline{x}_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1.$$

Для оценки силы корреляции Y на X служит *выборочное корреляционное отношение* (отношение межгруппового среднего квадратического отклонения к общему среднему квадратическому отклонению признака Y)

$$\eta_{yx} = \sigma_{\text{межгр}} / \sigma_{\text{общ}},$$

или в других обозначениях

$$\eta_{yx} = \sigma_{\overline{y}_x} / \sigma_y.$$

Здесь

$$\overline{y}_x = \sqrt{D_{\text{межгр}}} = \sqrt{\left(\sum n_x (\overline{y}_x - \overline{y}^2)\right)/n}, \quad \sigma_y = \sqrt{D_{\text{общ}}} = \\ = \sqrt{\left(\sum n_y (y - \overline{y})^2\right)/n},$$

где n — объем выборки (сумма всех частот); n_x — частота значения x признака X; n_y — частота значения y признака Y; $\bar{y}_x$ — условная средняя признака Y; $\bar{y}$ — общая средняя признака Y.

Аналогично определяется выборочное корреляционное отношение X к Y:

$$\eta_{xy} = \sigma_{\bar{x}_y} / \sigma_x.$$

537. Найти выборочное уравнение регрессии $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ по данным, приведенным в корреляционной табл. 8.

Оценить силу корреляционной связи по выборочному корреляционному отношению.

Таблица 8

Y	X			n_y
	2	3	5	
25	20	—	—	20
45	—	30	1	31
110	—	1	48	49
n_x	20	31	49	$n = 100$

Решение. Составим расчетную табл. 9.

Таблица 9

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
2	20	25	40	80	160	320	500	1 000	2 000
3	31	47,1	93	279	837	2 511	1460	4 380	13 141
5	49	108,67	245	1225	6125	30 625	5325	26 624	133 121
Σ	100		378	1584	7122	33 456	7285	32 004	148 262

Подставив числа, содержащиеся в последней строке табл. 9, в (*), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, C:

$$33456\,A + 7122\,B + 1584\,C = 148262,$$
$$7122\,A + 1584\,B + 378\,C = 32004,$$
$$1584\,A + 378\,B + 100\,C = 7285.$$

Решив эту систему (например, методом Гаусса), найдем: $A=2{,}94$, $B=7{,}27$, $C=-1{,}25$. Подставив найденные коэффициенты в уравнение регрессии $\overline{y}_x=Ax^2+Bx+C$, окончательно получим

$$\overline{y}_x=2{,}94x^2+7{,}27x-1{,}25.$$

Для того чтобы вычислить выборочное корреляционное отношение η_{yx}, предварительно найдем общую среднюю $\overline{y}$, общее среднее квадратическое отклонение σ_y и межгрупповое среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\overline{y}_x}$:

$$\overline{y}=\left(\sum n_y y\right)/n=(20\cdot 25+31\cdot 45+49\cdot 110)/100=72{,}85;$$

$$\sigma_y=\sqrt{\left(\sum n_y(y-\overline{y})^2\right)/n}=$$
$$=\sqrt{(20(25-72{,}85)^2+31(45-72{,}85)^2+49(110-72{,}85)^2)/100}=37{,}07;$$

$$\sigma_{\overline{y}_x}=\sqrt{\left(\sum n_x(\overline{y}_x-\overline{y})^2\right)/n}=$$
$$=\sqrt{(20(25-72{,}85)^2+31(47{,}1-72{,}85)^2+49(108{,}67-72{,}85)^2)/100}=$$
$$=35{,}95.$$

Найдем искомое выборочное корреляционное отношение:

$$\eta_{yx}=\sigma_{\overline{y}_x}/\sigma_y=35{,}95/37{,}07=0{,}97.$$

538. Найти выборочное уравнение регрессии $\overline{y}_x=Ax^2+Bx+C$ и выборочное корреляционное отношение η_{yx} по данным, приведенным в корреляционной таблице:

а)

Y	X					
	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1			20
3	1	20				21
5	3	5	10	2		20
10			7	12		19
17					20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n=100$

б)

Y	X: 0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1			21
13	2	14				16
40		3	22	2		27
80				15		15
200					21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n=100$

в)

Y	X: 0	4	5	n_y
1	50	5	1	56
35		44		44
50		5	45	50
n_x	50	54	46	$n=150$

г)

Y	X: 0	1	2	3	4	n_y
10	20	5				25
11	7	15	3	1		26
20		3	17	4		24
35			8	13	7	28
50				5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	$n=150$

д)

Y	X			
	7	8	9	n_y
200	41	7		48
300	1	52	1	54
400		8	40	48
n_x	42	67	41	$n=150$

539. Найти выборочное уравнение регрессии $\overline{x}_y = Ay^2 + By + C$ и выборочное корреляционное отношение η_{xy} по данным, приведенным в корреляционной таблице:

а)

Y	X			
	6	30	50	n_y
1	15			15
3	1	14		15
4		2	18	20
n_x	16	16	18	$n=50$

б)

Y	X			
	1	9	19	n_y
0	13			13
2	2	10		12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	$n=50$

§ 3. Ранговая корреляция

А. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Пусть выборка объема n содержит независимые объекты, которые обладают двумя качественными признаками: A и B. Под *качественным* подразумевают признак, который невозможно измерить точно, но он позволяет сравнивать объекты между собой и, следовательно, расположить их в порядке убывания или возрастания качества. Для определенности условимся располагать объекты в порядке ухудшения качества.

Расположим сначала объекты в порядке ухудшения качества по признаку A. Припишем объекту, стоящему на i-м месте, число — ранг x_i, равный порядковому номеру объекта: $x_i = i$. Затем расположим объекты в порядке убывания качества по признаку B и припишем каждому из них ранг (порядковый номер) y_i, причем (для удобства сравнения рангов) индекс i при y по-прежнему равен порядковому номеру объекта по признаку A.

В итоге получим две последовательности рангов:

по признаку A $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$,

по признаку B $y_1\ y_2\ \ldots\ y_n$

Для оценки степени связи признаков A и B служат, в частности, коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла (см. п. Б).

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена находят по формуле

$$\rho_{\text{в}} = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n},$$

где $d_i = x_i - y_i$, n — объем выборки.

Абсолютная величина коэффициента ранговой корреляции Спирмена не превышает единицы: $|\rho_{\text{в}}| \leqslant 1$.

Для обоснованного суждения о наличии связи между качественными признаками следует проверить, значим ли выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена (см. гл. XIII, § 13).

540. Знания десяти студентов проверены по двум тестам: A и B. Оценки по стобалльной системе оказались следующими (в первой строке указано количество баллов по тесту A, а во второй — по тесту B):

95	90	86	84	75	70	62	60	57	50	(*)
92	93	83	80	55	60	45	72	62	70	

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками по двум тестам.

Решение. Присвоим ранги x_i оценкам по тесту A. Эти оценки расположены в убывающем порядке, поэтому их ранги x_i равны порядковым номерам:

ранги x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
оценки по тесту A	95	90	86	84	75	70	62	60	57	50

Присвоим ранги y_i оценкам по тесту B, для чего сначала расположим эти оценки в убывающем порядке и пронумеруем их:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 93 & 92 & 83 & 80 & 72 & 70 & 62 & 60 & 55 & 45 \end{array} \qquad (**)$$

Напомним, что индекс i при y должен быть равен порядковому номеру оценки студента по тесту A.

Найдем ранг y_1. Индекс $i=1$ указывает, что рассматривается оценка студента, который занимает по тесту A в ряду (*) первое место (эта оценка равна 95); из условия видно, что по тесту B студент получил оценку 92, которая в (**) расположена на втором месте. Таким образом, ранг $y_1=2$.

Найдем ранг y_2. Индекс $i=2$ указывает, что рассматривается оценка студента, который занимает по тесту A в ряду (*) второе место; из условия видно, что студент получил по тесту B оценку 93, которая в (**) расположена на первом месте. Таким образом, ранг $y_2=1$.

Аналогично найдем остальные ранги: $y_3=3$, $y_4=4$, $y_5=9$, $y_6=8$, $y_7=10$, $y_8=5$, $y_9=7$, $y_{10}=6$.

Выпишем последовательности рангов x_i и y_i:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ y_i & 2 & 1 & 3 & 4 & 9 & 8 & 10 & 5 & 7 & 6 \end{array}$$

Найдем разности рангов: $d_1=x_1-y_1=1-2=-1$; $d_2=x_2-y_2=2-1=1$. Аналогично получим: $d_3=0$, $d_4=0$, $d_5=-4$, $d_6=-2$, $d_7=-3$, $d_8=3$, $d_9=2$, $d_{10}=4$.

Вычислим сумму квадратов разностей рангов:

$$\sum d_i^2=1+1+16+4+9+9+4+16=60.$$

Найдем искомый коэффициент ранговой корреляции Спирмена, учитывая, что $n=10$:

$$\rho_в=1-\frac{6\sum d_i^2}{n^3-n}=1-\frac{6\cdot 60}{10^3-10}=0{,}64.$$

Итак, $\rho_в=0{,}64$.

541. Два преподавателя оценили знания 12 учащихся по стобалльной системе и выставили им следующие оценки (в первой строке указано количество баллов, выставленных первым преподавателем, а во второй — вторым):

98	94	88	80	76	70	63	61	60	58	56	51
99	91	93	74	78	65	64	66	52	53	48	62

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками двух преподавателей.

542. Тринадцать цветных полос расположены в порядке убывания окраски от темной к светлой и каждой полосе присвоен ранг — порядковый номер. В итоге получена последовательность рангов

$$\begin{array}{cccccccccccccc} x_i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array}$$

При проверке способности различать оттенки цветов, испытуемый расположил полосы в следующем порядке:

y_i	6	3	4	2	1	10	7	8	9	5	11	13	12

Найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена между «правильными» рангами x_i и рангами y_i, которые присвоены полосам испытуемым.

543. Два товароведа расположили девять мотков пряжи в порядке убывания толщины нити. В итоге были получены две последовательности рангов:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	4	1	5	3	2	6	9	8	7

Найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена между рангами x_i и y_i.

544. Специалисты двух заводов проранжировали 11 факторов, влияющих на ход технологического процесса. В итоге были получены две последовательности рангов:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	1	2	3	5	4	9	8	11	6	7	10

Определить, согласуются ли мнения специалистов различных заводов, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

545. Три арбитра оценили мастерство 10 спортсменов, в итоге были получены три последовательности рангов (в первой строке приведены ранги арбитра A, во второй — ранги арбитра B, в третьей — ранги арбитра C):

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
z_i	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

Определить пару арбитров, оценки которых наиболее согласуются, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

546. Два контролера A и B расположили образцы изделий, изготовленных девятью мастерами, в порядке ухудшения качества (в скобках помещены порядковые номера изделий одинакового качества):

(A) 1 2 (3, 4, 5) (6, 7, 8, 9)
(B) 2 1 4 3 5 (6, 7) 8 9

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между рангами изделий, присвоенными им двумя контролерами.

Решение. Учитывая, что ранги изделий одинакового качества равны среднему арифметическому порядковых номеров изделий: $(3+4+5)/3=4$, $(6+7+8+9)/4=7{,}5$, $(6+7)/2=6{,}5$, напишем последовательности рангов, присвоенные изделиям контролерами:

x_i	1	2	4	4	4	7,5	7,5	7,5	7,5
y_i	2	1	4	3	5	6,5	6,5	8	9

Найдем выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена, учитывая, что $\sum d_i^2=8{,}5$, $n=9$:

$$\rho_в=1-\frac{6\sum d_i^2}{(n-1)\,n\,(n+1)}=1-\frac{6\cdot 8{,}5}{8\cdot 9\cdot 10}=0{,}93.$$

Итак, $\rho_в=0{,}93$.

547. Два инспектора A и B проверили 12 водителей на быстроту реакции и расположили их в порядке ухудшения реакции (в скобках помещены порядковые номера водителей с одинаковой реакцией):

(A)	1	(2,	3,	4)	5	(6,	7,	8)	9	10	11	12
(B)	3	1	2	6	4	5	7	8	11	10	9	12

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между рангами водителей, присвоенными им двумя инспекторами.

Б. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Можно оценивать связь между двумя качественными признаками, используя коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Пусть ранги объектов выборки объема n (здесь сохранены все обозначения п. А):

по признаку A x_1 x_2 ... x_n

по признаку B y_1 y_2 ... y_n

Допустим, что справа от y_1 имеется R_1 рангов, больших y_1; справа от y_2 имеется R_2 рангов, бо́льших y_2; справа от y_{n-1} имеется R_{n-1} рангов, бо́льших y_{n-1}. Введем обозначение суммы рангов:

$$R=R_1+R_2+\ldots+R_{n-1}.$$

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла находят по формуле

$$\tau_в=\frac{4R}{n\,(n-1)}-1,$$

где n—объем выборки, R—сумма рангов R_i ($i=1, 2, \ldots, n-1$).

Абсолютная величина коэффициента ранговой корреляции Кендалла не превышает единицы: $|\tau_в|\leqslant 1$.

Для обоснованного суждения о наличии связи между качественными признаками следует проверить, значим ли выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла (см. гл. XIII, § 14).

548. Знания 10 студентов проверены по двум тестам: A и B. Оценки по стобалльной системе оказались следующими (в первой строке указано количество баллов по тесту A, а во второй — по тесту B):

95	90	86	84	75	70	62	60	57	50
92	93	83	80	55	60	45	72	62	70

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла между оценками по двум тестам.

Решение. При решении задачи 540, условие которой совпадает с условием настоящей задачи, были получены две последовательности рангов (в первой строке приведены ранги по тесту A, во второй — по тесту B):

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	1	3	4	9	8	10	5	7	6

Справа от $y_1=2$ имеется $R_1=8$ рангов (3, 4, 9, 8, 10, 5, 7, 6), бо́льших $y_1=2$; справа от $y_2=1$ имеется $R_2=8$ рангов, бо́льших $y_2=1$. Аналогично получим: $R_3=7$, $R_4=6$, $R_5=1$, $R_6=1$, $R_7=0$, $R_8=2$, $R_9=0$. Следовательно, сумма рангов

$$R=R_1+R_2+\ldots+R_9=8+8+7+6+1+1+2=33.$$

Найдем коэффициент ранговой корреляции Кендалла, учитывая, что $R=33$, $n=10$:

$$\tau_в=\frac{4R}{n(n-1)}-1=\frac{4\cdot 33}{10\cdot 9}-1=0{,}47.$$

Итак, $\tau_в=0{,}47$.

549. Два контролера расположили 10 деталей в порядке ухудшения их качества. В итоге были получены две последовательности рангов:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1	2	4	3	6	5	7	10	9	8

Используя коэффициент ранговой корреляции Кендалла, определить, согласуются ли оценки контролеров.

550. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла по условию задачи **542**.

551. По условию задачи **544**, используя коэффициент ранговой корреляции Кендалла, определить, согласуются ли мнения специалистов различных заводов.

552. По условию задачи **545**, используя коэффициент ранговой корреляции Кендалла, определить пару арбитров, оценки которых наиболее совпадают.

553. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла по условию задачи **547**.

Глава тринадцатая

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

§ 1. Основные сведения

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой (*основной*) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Различают гипотезы, которые содержат одно и более одного предположений.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* и обозначают через α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают через β.

Статистическим критерием (или просто *критерием*) называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (*эмпирическим*) значением $K_{\text{набл}}$ называют то значение критерия, которое вычислено по выборкам.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (*областью допустимых значений*) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.

Критическими точками (*границами*) $k_{\text{кр}}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{\text{кр}}$, где $k_{\text{кр}}$—положительное число.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{\text{кр}}$, где $k_{\text{кр}}$—отрицательное число.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $k_{\text{кр}} > 0$)

$$K < -k_{\text{кр}}, \quad K > k_{\text{кр}},$$

или равносильным неравенством

$$|K| > k_{\text{кр}}.$$

Для отыскания критической области задаются уровнем значимости α и ищут критические точки, исходя из следующих соотношений:

а) для правосторонней критической области

$$P(K > k_{кр}) = \alpha \qquad (k_{кр} > 0);$$

б) для левосторонней критической области

$$P(K < k_{кр}) = \alpha\,(k_{кр} < 0);$$

в) для двусторонней симметричной области

$$P(K > k_{кр}) = (\alpha/2)\,(k_{кр} > 0), \quad P(K < -k_{кр}) = \alpha/2.$$

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

§ 2. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

По независимым выборкам, объемы которых n_1, n_2, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. Требуется сравнить эти дисперсии.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия (отношение большей исправленной дисперсии к меньшей)*

$$F_{набл} = s_Б^2 / s_М^2$$

и по таблице критических точек распределения Фишера—Снедекора, по заданному уровню значимости α и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ (k_1—число степеней свободы большей исправленной дисперсии) найти критическую точку $F_{кр}(\alpha;\ k_1,\ k_2)$. Если $F_{набл} < F_{кр}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{набл} > F_{кр}$—нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. *При конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$ критическую точку $F_{кр}(\alpha/2;\ k_1,\ k_2)$ ищут по уровню значимости $\alpha/2$ (вдвое меньшему заданного) и числам степеней свободы k_1 и k_2 (k_1—число степеней свободы большей дисперсии). Если $F_{набл} < F_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{набл} > F_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.*

554. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 11$ и $n_2 = 14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 0{,}76$ и $s_Y^2 = 0{,}38$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий, при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$.

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = 0{,}76/0{,}38 = 2.$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) > D(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя.

По таблице приложения 7, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$ и $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ находим критическую точку

$$F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 10;\ 13) = 2{,}67.$$

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются незначимо.

555. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 9$ и $n_2 = 16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 34{,}02$ и $s_Y^2 = 12{,}15$. При уровне значимости 0,01, проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$.

556. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 14$ и $n_2 = 10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 0{,}84$ и $s_Y^2 = 2{,}52$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$, проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = 2{,}52/0{,}84 = 3.$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) \neq D(Y)$, поэтому критическая область — двусторонняя. В соответствии с правилом 2 при отыскании критической точки следует брать уровень значимости, вдвое меньший заданного.

По таблице приложения 7, по уровню значимости $\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1 = 10 - 1 = 9$ и $k_2 = 14 - 1 = 13$, находим критическую точку

$$F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 9;\ 13) = 2{,}72.$$

Так как $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий отвергаем.

557. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 9$ и $n_2 = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные дисперсии $D_{\text{в}}(X) = 14{,}4$ и $D_{\text{в}}(Y) = 20{,}5$. При уровне значимости 0,1 проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Указание. Найти сначала исправленные дисперсии по формулам:

$$s_X^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot D_в(X), \qquad s_Y^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot D_в(Y).$$

558. Двумя методами проведены измерения одной и той же физической величины. Получены следующие результаты:

а) в первом случае $x_1 = 9{,}6$; $x_2 = 10{,}0$; $x_3 = 9{,}8$; $x_4 = 10{,}2$; $x_5 = 10{,}6$;

б) во втором случае $y_1 = 10{,}4$; $y_2 = 9{,}7$; $y_3 = 10{,}0$; $y_4 = 10{,}3$.

Можно ли считать, что оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений, если принять уровень значимости $\alpha = 0{,}1$? Предполагается, что результаты измерений распределены нормально и выборки независимы.

Решение. Будем судить о точности методов по величинам дисперсий. Таким образом, нулевая гипотеза имеет вид H_0: $D(X) = D(Y)$. В качестве конкурирующей примем гипотезу H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Найдем выборочные дисперсии. Для упрощения вычислений перейдем к условным вариантам:

$$u_i = 10x_i - 100, \quad v_i = 10y_i - 100.$$

В итоге получим условные варианты

u_i	-4	0	-2	2	6
v_i	4	-3	0	3	

Найдем исправленные выборочные дисперсии:

$$s_u^2 = \frac{\sum u_i^2 - \left[\sum u_i\right]^2/n_1}{n_1 - 1} = \frac{(16+4+4+36) - 2^2/5}{5-1} = 14{,}8;$$

$$s_v^2 = \frac{\sum v_i^2 - \left[\sum v_i\right]^2/n_2}{n_2 - 1} = \frac{(16+9+9) - 4^2/4}{4-1} = 10.$$

Сравним дисперсии. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей (каждая из дисперсий увеличилась в 10^2 раз, но их отношение не изменилось):

$$F_{набл} = s_X^2/s_Y^2 = s_u^2/s_v^2 = 14{,}8/10 = 1{,}48.$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) \neq D(Y)$, поэтому критическая область двусторочняя и в соответствии с правилом 2 при отыскании критической точки следует брать уровень значимости, вдвое меньший заданного.

По таблице приложения 7, по уровню значимости $\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4$ и $k_2 = n_2 - 1 = 4 - 1 = 3$ находим критическую точку $F_{кр}(0{,}05;\ 4;\ 3) = 9{,}12$.

Так как $F_{набл} < F_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Другими словами, исправленные дисперсии различаются незначимо и, следовательно, оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений.

559. Для сравнения точности двух станков-автоматов взяты две пробы (выборки), объемы которых $n_1 = 10$ и $n_2 = 8$. В результате измерения контролируемого размера отобранных изделий получены следующие результаты:

x_i	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1,38	1,40	1,42
y_i	1,11	1,12	1,18	1,22	1,33	1,35	1,36	1,38		

Можно ли считать, что станки обладают одинаковой точностью $[H_0: D(X) = D(Y)]$, если принять уровень значимости $\alpha = 0{,}1$ и в качестве конкурирующей гипотезы $H_1: D(X) \neq D(Y)$?

Указание. Для упрощения вычислений перейти к условным вариантам $u_i = 100x_i - 124$, $v_i = 100y_i - 126$.

§ 3. Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности

Обозначим через n объем выборки, по которой найдена исправленная дисперсия s^2.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии σ^2 гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2 при конкурирующей гипотезе H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 1$ найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. *При конкурирующей гипотезе H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ находят левую $\chi^2_{лев.\,кр}(1-\alpha/2; k)$ и правую $\chi^2_{прав.\,кр}(\alpha/2; k)$ критические точки. Если $\chi^2_{лев.\,кр} < \chi^2_{набл} < \chi^2_{прав.\,кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{лев.\,кр}$ или $\chi^2_{набл} > \chi^2_{прав.\,кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.*

Правило 3. *При конкурирующей гипотезе H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$ находят критическую точку $\chi^2_{кр}(1-\alpha; k)$. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}(1-\alpha; k)$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}(1-\alpha; k)$ — нулевую гипотезу отвергают.*

Замечание. Если число степеней свободы $k > 30$, то критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha;\ k)$ можно найти из равенства Уилсона—Гильферти:

$$\chi^2_{кр}(\alpha;\ k) = k\left[1 - 2/9k + z_\alpha \sqrt{2/(9k)}\right]^3,$$

где z_α находят, используя функцию Лапласа (см. приложение 2), из равенства

$$\Phi(z_\alpha) = (1 - 2\alpha)/2.$$

560. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 21$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 16{,}2$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma_0^2 > 15$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(21-1)\cdot 16{,}2}{15} = 21{,}6.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $\sigma^2 > 15$, поэтому критическая область—правосторонняя (правило 1). По таблице приложения 5, по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы $k = n - 1 = 21 - 1 = 20$ находим критическую точку $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 20) = 37{,}6$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральной дисперсии гипотетическому значению $\sigma_0^2 = 15$. Другими словами, различие между исправленной дисперсией (16,2) и гипотетической генеральной дисперсией (15) незначимо.

561. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 17$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 0{,}24$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}18$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma^2 > 0{,}18$.

562. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 31$:

варианты x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12,0
частоты n_i	1	3	7	10	6	3	1

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma_0^2 = \sigma_0^2 = 0{,}18$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma^2 > 0{,}18$.

Указание. Принять условные варианты $u_i = 10x_i - 110$; вычислить сначала $s_u^2 = \dfrac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2/n}{n-1}$, а затем $s_x^2 = \dfrac{s_u^2}{10^2}$.

563. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии контролируемого размера изделий, которая не должна превышать $\sigma_0^2=0,1$. Взята проба из 25 случайных отобранных изделий, причем получены следующие результаты измерений:

контролируемый размер изделий пробы	x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
частота	n_i	2	6	9	7	1

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить, обеспечивает ли станок требуемую точность.

Решение. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2=0,1$. Примем в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma^2 > 0,1$.

Найдем исправленную выборочную дисперсию. Для упрощения расчета перейдем к условным вариантам. Приняв во внимание, что выборочная средняя примерно равна 3,9, положим $u_i=10x_i-39$. Распределение частот принимает вид

u_i	−9	−4	−1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

Найдем вспомогательную дисперсию условных вариант:

$$s_u^2=\frac{\sum n_iu_i^2-[\sum n_iu_i]^2/n}{n-1};$$

подставив данные задачи, получим $s_u^2=19,75$.

Найдем искомую исправленную дисперсию:

$$s_X^2=s_u^2/10^2=19,75/100=0,2.$$

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}}=\frac{(n-1)\,s_X^2}{\sigma_0^2}=\frac{(25-1)\cdot 0,2}{0,1}=48.$$

Конкурирующая гипотеза имеет вид $\sigma^2 > \sigma_0^2$, поэтому критическая область — односторонняя (правило 1).

Найдем по таблице приложения 5 критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0,05;\,24)=36,4$. Имеем $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, следовательно, нулевую гипотезу отвергаем; станок не обеспечивает необходимую точность и требует подналадки.

564. В результате длительного хронометража времени сборки узла различными сборщиками установлено, что дисперсия этого времени $\sigma_0^2=2$ мин^2. Результаты 20 наблюдений за работой новичка таковы:

время сборки одного узла в минутах	x_i	56	58	60	62	64
частота	n_i	1	4	10	3	2

Можно ли при уровне значимости 0,05 считать, что новичок работает ритмично (в том смысле, что дисперсия затрачиваемого им времени существенно не отличается от дисперсии времени остальных сборщиков)?

Указание. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2=2$; конкурирующая гипотеза H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Принять $u_i=x_i-60$ и вычислить s_u^2.

565. Партия изделий принимается, если дисперсия контролируемого размера значимо не превышает 0,2. Исправленная выборочная дисперсия, найденная по выборке объема $n=121$, оказалась равной $s_X^2=0,3$. Можно ли принять партию при уровне значимости 0,01?

Решение. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2=0,2$. Конкурирующая гипотеза H_1: $\sigma^2 > 0,2$.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}}=(n-1)\cdot s_X^2/\sigma_0^2=120\cdot 0,3/0,2=180.$$

Конкурирующая гипотеза имеет вид $\sigma^2>0,2$, следовательно, критическая область правосторонняя. Поскольку в таблице приложения 5 не содержится числа степеней свободы $k=120$, найдем критическую точку приближенно из равенства Уилсона—Гильферти:

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)=k\left[1-2/(9k)+z_\alpha\sqrt{2/(9k)}\right]^3.$$

Найдем предварительно (учитывая, что по условию $\alpha=0,01$) $z_\alpha=z_{0,01}$ из равенства

$$\Phi(z_{0,01})=(1-2\alpha)/2=(1-2\cdot 0,01)/2=0,49.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2), используя линейную интерполяцию, находим: $z_{0,01}=2,326$. Подставив $k=120$, $z_\alpha=2,326$ в формулу Уилсона—Гильферти, получим $\chi^2_{\text{кр}}(0,01;\ 120)=158,85$. (Это приближение достаточно хорошее: в более полных таблицах приведено значение 158,95). Так как $\chi^2_{\text{набл}}>\chi^2_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Партию принять нельзя.

566. Решить задачу 565, приняв уровень значимости $\alpha=0,05$.

§ 4. Сравнение двух средних генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки)

Обозначим через n и m объемы больших ($n>30$, $m>30$) независимых выборок, по которым найдены соответствующие выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Генеральные дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$ известны.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ о равенстве математических ожиданий (генеральных средних) двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями (в случае больших выборок) при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X)\neq M(Y)$, надо* *вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$Z_{набл}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку $z_{кр}$ *из равенства*

$$\Phi(z_{кр})=(1-\alpha)/2.$$

Если $|Z_{набл}| < z_{кр}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $|Z_{набл}| > z_{кр}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

Правило 2. *При конкурирующей гипотезе* H_1: $M(X) > M(Y)$ *находят критическую точку* $z_{кр}$ *по таблице функции Лапласа из равенства*

$$\Phi(z_{кр})=(1-2\alpha)/2.$$

Если $Z_{набл} < z_{кр}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $Z_{набл} > z_{кр}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

Правило 3. *При конкурирующей гипотезе* H_1: $M(X) < M(Y)$ *находят «вспомогательную точку»* $z_{кр}$ *по правилу 2. Если* $Z_{набл} > -z_{кр}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $Z_{набл} < -z_{кр}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

567. По двум независимым выборкам, объемы которых $n=40$ и $m=50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние: $\bar{x}=130$ и $\bar{y}=140$. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=80$, $D(Y)=100$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X)\neq M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}}=\frac{130-140}{\sqrt{80/40+100/50}}=-5.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X)\neq M(Y)$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем правую критическую точку из равенства

$$\Phi(z_{кр})=(1-\alpha)/2=(1-0,01)/2=0,495.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим

$$z_{кр}=2,58.$$

Так как $|Z_{набл}| > z_{кр}$, то в соответствии с правилом 1 нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

568. По выборке объема $n=30$ найден средний вес $\bar{x}=130$ г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке объема $m=40$ найден средний вес $\bar{y}=125$ г изделий, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=60$ г², $D(Y)=80$ г². Требуется, при уровне значимости 0,05, проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $M(X)\neq M(Y)$. Предполагается, что случайные величины X и Y распределены нормально и выборки независимы.

569. По выборке объема $n=50$ найден средний размер $\bar{x}=20{,}1$ мм диаметра валиков, изготовленных автоматом № 1; по выборке объема $m=50$ найден средний размер $\bar{y}=19{,}8$ мм диаметра валиков, изготовленных автоматом № 2. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=1{,}750$ мм², $D(Y)=1{,}375$ мм². Требуется, при уровне значимости 0,05, проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $M(X)\neq M(Y)$. Предполагается, что случайные величины X и Y распределены нормально и выборки независимы.

§ 5. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки)

Обозначим через n и m объемы малых независимых выборок ($n<30$, $m<30$), по которым найдены соответствующие выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. Генеральные дисперсии хотя и неизвестны, но предполагаются одинаковыми.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ о равенстве математических ожиданий (генеральных средних) двух нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями (в случае малых независимых выборок) при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X)\neq M(Y)$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$T_{\text{набл}}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2+(m-1)s_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы приложения 6, и числу степеней свободы $k=n+m-2$ найти критическую точку $t_{\text{двуст.кр}}(\alpha;\ k)$. Если $|T_{\text{набл}}|<t_{\text{двуст.кр}}(\alpha;\ k)$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $|T_{\text{набл}}|>t_{\text{двуст.кр}}(\alpha;\ k)$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. *При конкурирующей гипотезе $M(X)>M(Y)$ находят критическую точку $t_{\text{правост.кр}}(\alpha;\ k)$ по таблице приложения 6 по уровню значимости α, помещенному в нижней строке таблицы, и числу степеней свободы $k=n+m-2$. Если $T_{\text{набл}}<t_{\text{правост.кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $T_{\text{набл}}>t_{\text{правост.кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.*

Правило 3. *При конкурирующей гипотезе $M(X)<M(Y)$ находят сначала критическую точку $t_{\text{правост.кр}}$ по правилу 2 и полагают*

$t_{левостр.кр} = -t_{правост.кр}$. *Если* $T_{набл} > -t_{правост.кр}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $T_{набл} < -t_{правост.кр}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

570. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n=12$ и $m=18$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\bar{x}=31{,}2$, $\bar{y}=29{,}2$ и исправленные дисперсии: $s_X^2=0{,}84$ и $s_Y^2=0{,}40$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Исправленные дисперсии различны, поэтому проверим предварительно гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, используя критерий Фишера—Снедекора (см. § 2).

Найдем отношение большей дисперсии к меньшей: $F_{набл} = 0{,}84/0{,}40 = 2{,}1$. Дисперсия s_X^2 значительно больше дисперсии s_Y^2, поэтому в качестве конкурирующей примем гипотезу H_1: $D(X) > D(Y)$. В этом случае критическая область—правосторонняя. По таблице приложения 7, по уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1=n-1=12-1=11$ и $k_2=m-1=18-1=17$ находим критическую точку $F_{кр}(0{,}05;\ 11;\ 17)=2{,}41$.

Так как $F_{набл} < F_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, поэтому сравним средние.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$T_{набл} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)\,s_X^2+(m-1)\,s_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}.$$

Подставив числовые значения входящих в эту формулу величин, получим $T_{набл}=7{,}1$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область—двусторонняя. По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k=n+m-2=12+18-2=28$ находим по таблице приложения 6 критическую точку $t_{двуст.кр}(0{,}05;\ 28) = 2{,}05$.

Так как $T_{набл} > t_{двуст.кр}$ — нулевую гипотезу о равенстве средних отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

571. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n=10$ и $m=8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние: $\bar{x}=142{,}3$, $\bar{y}=145{,}3$ и исправленные дисперсии: $s_X^2=2{,}7$ и $s_Y^2=3{,}2$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Указание. Предварительно проверить равенство дисперсий, используя критерий Фишера—Снедекора.

572. Из двух партий изделий, изготовленных на двух одинаково настроенных станках, извлечены малые выборки, объемы которых $n=10$ и $m=12$. Получены следующие результаты:

контролируемый размер изделий первого станка	x_i	3,4	3,5	3,7	3,9
частота (число изделий)	n_i	2	3	4	1
контролируемый размер изделий второго станка	y_i	3,2	3,4	3,6	
частота	m_i	2	2	8	

Требуется при уровне значимости 0,02 проверить гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ о равенстве средних размеров изделий при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$. Предполагается, что случайные величины X и Y распределены нормально.

Решение. По формулам

$$\bar{x}=\left(\sum n_i x_i\right)/n \quad \text{и} \quad \bar{y}=\left(\sum m_i y_i\right)/m$$

найдем выборочные средние: $\bar{x}=3{,}6$, $\bar{y}=3{,}5$.

Для упрощения вычислений исправленных дисперсий перейдем к условным вариантам $u_i=10x_i-36$, $v_i=10y_i-35$.

По формуалам

$$s_u^2=\frac{\sum n_i u_i^2-\left[\sum n_i u_i\right]^2/n}{n-1} \quad \text{и} \quad s_v^2=\frac{\sum m_i v_i^2-\left[\sum m_i v_i\right]^2/m}{m-1}$$

найдем $s_u^2=2{,}67$ и $s_v^2=2{,}55$. Следовательно,

$$s_X^2=s_u^2/10^2=2{,}67/100=0{,}0267, \quad s_Y^2=s_v^2/10^2=2{,}55/100=0{,}0255.$$

Таким образом, исправленные дисперсии различны; рассматриваемый в этом параграфе критерий предполагает, что генеральные дисперсии одинаковы, поэтому надо сравнить дисперсии, используя критерий Фишера—Снедекора. Сделаем это, приняв в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $D(X) \neq D(Y)$ (см. § 2, правило 2).

Найдем наблюдаемое значение критерия: $F_{\text{набл}}=0{,}0267/0{,}0255=1{,}05$. По таблице приложения 7 находим $F_{\text{кр}}(0{,}01;\ 9;\ 11)=4{,}63$. Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ — дисперсии различаются незначимо и, следовательно, можно считать, что допущение о равенстве генеральных дисперсий выполняется.

Сравним средние, для чего вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$T_{\text{набл}}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2+(m-1)s_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}.$$

Подставив в эту формулу числовые значения входящих в нее величин, получим $T_{\text{набл}}=1{,}45$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область — двусторонняя. По уровню значимости

0,02 и числу степеней свободы $k=n+m-2=10+12-2=20$ находим по таблице приложения 6 критическую точку $t_{\text{двуст.кр}}(0,02;\ 20)=2,53$.

Так как $T_{\text{набл}} < t_{\text{двуст.кр}}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве средних. Таким образом, средние размеры изделий существенно не различаются.

573. На уровне значимости 0,05 требуется проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ о равенстве генеральных средних нормальных совокупностей X и Y при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X)>M(Y)$ по малым независимым выборкам, объемы которых $n=10$ и $m=16$. Получены следующие результаты:

x_i	12,3	12,5	12,8	13,0	13,5;	y_i	12,2	12,3	13,0
n_i	1	2	4	2	1	m_i	6	8	2

Указание. Предварительно проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X)>D(Y)$ (см. § 2).

§ 6. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности

А. Дисперсия генеральной совокупности известна. Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $a=a_0$ о равенстве генеральной средней a нормальной совокупности с известной дисперсией σ^2 гипотетическому (предполагаемому) значению a_0 при конкурирующей гипотезе H_1: $a\neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$U_{\text{набл}}=\frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку $u_{\text{кр}}$ двусторонней критической области из равенства

$$\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2.$$

Если $|U_{\text{набл}}|<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $|U_{\text{набл}}|>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. *При конкурирующей гипотезе H_1: $a>a_0$ критическую точку правосторонней критической области находят из равенства*

$$\Phi(u_{\text{кр}})=(1-2\alpha)/2.$$

Если $U_{\text{набл}}<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $U_{\text{набл}}>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. *При конкурирующей гипотезе H_1: $a<a_0$ сначала находят вспомогательную критическую точку $u_{\text{кр}}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области*

$$u'_{\text{кр}}=-u_{\text{кр}}.$$

Если $U_{\text{набл}}>-u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $U_{\text{набл}}<-u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Мощность критерия проверки нулевой гипотезы H_0: $a=a_0$ о равенстве генеральной средней гипотетическому значению a_0 при известном среднем квадратическом отклонении σ находят в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

При конкурирующей гипотезе H_1: $a>a_0$ для гипотетического значения генеральной средней $a=a_1>a_0$ мощность правостороннего критерия

$$1-\beta=0{,}5-\Phi(u_{\text{кр}}-\lambda), \qquad (*)$$

где $u_{\text{кр}}$ находят из равенства $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-2\alpha)/2$, $\lambda=(a_1-a_0)\sqrt{n}/\sigma$. При различных значениях a_1 функция мощности одностороннего критерия

$$\pi_1(a_1)=0{,}5-\Phi(u_{\text{кр}}-\lambda).$$

При конкурирующей гипотезе H_1: $a\neq a_0$ для гипотетического значения генеральной средней $a=a_1$ мощность двустороннего критерия

$$1-\beta=1-[\Phi(u_{\text{кр}}-\lambda)+\Phi(u_{\text{кр}}+\lambda)], \qquad (**)$$

где $u_{\text{кр}}$ находят из равенства $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2$, $\lambda=(a_1-a_0)\sqrt{n}/\sigma$. При различных значениях a_1 функция мощности двустороннего критерия

$$\pi_1(a_1)=1-[\Phi(u_{\text{кр}}-\lambda)+\Phi(u_{\text{кр}}+\lambda)].$$

В формулах (*) и (**)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz \text{ — функция Лапласа.}$$

574. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=5{,}2$ извлечена выборка объема $n=100$ и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x}=27{,}56$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=a_0=26$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a\neq 26$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}}=(\bar{x}-a_0)\cdot\sqrt{n}/\sigma+(27{,}56-26)\cdot\sqrt{100}/5{,}2=3.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $a\neq a_0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем критическую точку из равенства

$$\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2=(1-0{,}05)/2=0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $u_{\text{кр}}=1{,}96$.

Так как $U_{\text{набл}}>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная и гипотетическая генеральная средние различаются значимо.

575. а) Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=40$ извлечена выборка объема $n=64$ и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x}=136{,}5$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=a_0=130$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a\neq 130$.

б) Решить эту задачу при конкурирующей гипотезе H_1: $a>130$.

в) Установлено, что средний вес таблетки лекарства сильного действия должен быть равен $a_0=0,50$ мг. Выборочная проверка 121 таблетки полученной партии лекарства показала, что средний вес таблетки этой партии $\bar{x}=0,53$ мг. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=a_0=0,50$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a>0,50$. Многократными предварительными опытами по взвешиванию таблеток, поставляемых фармацевтическим заводом, было установлено, что вес таблеток распределен нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma=0,11$ мг.

576. а) По выборке объема n, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением σ, найдена выборочная средняя $\bar{x}$. При уровне значимости α требуется: 1) найти критическую область, если проверяется нулевая гипотеза H_0: $a=a_0$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе H_1: $a>a_0$; 2) найти функцию мощности рассматриваемого критерия, приняв в качестве аргумента гипотетическое значение генеральной средней $a=a_1$ $(a_1>a_0)$; 3) убедиться, что увеличение объема выборки влечет увеличение мощности критерия; 4) убедиться, что увеличение уровня значимости влечет увеличение мощности критерия.

Решение. 1) Конкурирующая гипотеза имеет вид $a>a_0$, поэтому критическая область — правосторонняя. Используя правило 2, найдем критическую точку $u_{кр}$ из равенства $\Phi(u_{кр})=(1-2\alpha)/2$. Следовательно, правосторонняя критическая область определяется неравенством $U>u_{кр}$, или подробнее $\frac{\bar{x}-a_0}{\sigma\sqrt{n}}>u_{кр}$. Отсюда

$$\bar{x}>u_{кр}(\sigma/\sqrt{n})+a_0.$$

При этих значениях выборочной средней нулевая гипотеза отвергается; в этом смысле $\bar{x}=u_{кр}(\sigma/\sqrt{n})+a_0$ можно рассматривать как критическое значение выборочной средней.

2) Для того чтобы вычислить мощность рассматриваемого критерия, предварительно найдем его значение при условии справедливости конкурирующей гипотезы (т. е. при $a=a_1$), положив $\bar{x}=u_{кр}(\sigma/\sqrt{n})+$ $+a_0$:

$$U=\frac{\bar{x}-a_1}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{u_{кр}(\sigma/\sqrt{n})+a_0-a_1}{\sigma/\sqrt{n}}=u_{кр}-\frac{a_1-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Таким образом,

$$U = u_{кр} - \lambda, \text{ где } \lambda = (a_1 - a_0)\sqrt{n}/\sigma.$$

При $U > u_{кр} - \lambda$ нулевая гипотеза отвергается, поэтому мощность рассматриваемого критерия при $a = a_1$ равна

$$1 - \beta = P(U > u_{кр} - \lambda) = 1 - P(U < u_{кр} - \lambda) =$$
$$= 1 - [P(-\infty < U < 0) + P(0 < U < u_{кр} - \lambda) =$$
$$= 1 - [0{,}5 + \Phi(u_{кр} - \lambda)] = 0{,}5 - \Phi(u_{кр} - \lambda).$$

Каждому значению a_1 соответствует определенное значение мощности, поэтому мощность критерия есть функция от a_1; обозначим ее через $\pi_1(a_1)$.

Итак искомая мощность правостороннего критерия

$$\pi_1(a_1) = 0{,}5 - \Phi(u_{кр} - \lambda),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, $\lambda = (a_1 - a_0)\sqrt{n}/\sigma$, $u_{кр}$ находят из равенства $\Phi(u_{кр}) = (1 - 2a)/2$.

3) Убедимся, что увеличение объема выборки влечет увеличение мощности критерия. Действительно, из соотношения $\lambda = (a_1 - a_0)\sqrt{n}/\sigma$ видно, что увеличение объема выборки приводит к увеличению величины λ, а значит к уменьшению величины аргумента $u_{кр} - \lambda$ и тем самым к уменьшению значения функции Лапласа $\Phi(u_{кр} - \lambda)$ ($\Phi(x)$ — возрастающая функция) и, следовательно, к увеличению мощности $1 - \beta = 0{,}5 - \Phi(u_{кр} - \lambda)$.

4) Убедимся, что увеличение уровня значимости α влечет увеличение мощности критерия. Действительно, из соотношения $\Phi(u_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2$ видно, что увеличение α приводит к уменьшению $u_{кр}$, а значит к уменьшению величины аргумента $u_{кр} - \lambda$ и в итоге к увеличению мощности $1 - \beta = 0{,}5 - \Phi(u_{кр} - \lambda)$.

б) По выборке объема $n = 16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 4$, при уровне значимости 0,05 проверяется нулевая гипотеза H_0: $a = a_0 = 2$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению $a_0 = 2$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a > 2$. Требуется: 1) найти мощность правостороннего критерия проверки рассматриваемой гипотезы для гипотетического значения генеральной средней $a = a_1 = 3$, 2) найти объем выборки n_1, при котором мощность критерия равна 0,6.

Решение. 1) Используем формулу

$$1 - \beta = 0{,}5 - \Phi(u_{кр} - \lambda). \qquad (*)$$

По правилу 2 найдем критическую точку правосторонней критической области $u_{кр} = 1{,}65$.

Вычислим λ, учитывая, что, по условию, $a_1 = 3$, $a_0 = 2$, $n = 16$, $\sigma = 4$:

$$\lambda = (a_1 - a_0)\sqrt{n}/\sigma = (3 - 2)\sqrt{16}/4 = 1.$$

Подставив $u_{кр} = 1{,}65$ и $\lambda = 1$ в формулу (*), получим

$$1 - \beta = 0{,}5 - \Phi(1{,}65 - 1) = 0{,}5 - \Phi(0{,}65).$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $\Phi(0{,}65) = 0{,}2422$. Искомая мощность $1-\beta = 0{,}5-0{,}2422 = 0{,}2578$.

2) Для отыскания «нового» объема выборки n_1, при котором мощность критерия равна 0,6, найдем «новое» значение параметра λ (обозначим его через λ_1) из соотношения $0{,}6 = 0{,}5 - \Phi(1{,}65-\lambda_1)$. Отсюда

$$\Phi(\lambda_1 - 1{,}65) = 0{,}1.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $\lambda_1 - 1{,}65 = 0{,}253$. Следовательно, $\lambda_1 = 1{,}903$.

Учитывая, что $\lambda_1 = (a_1 - a_0)\sqrt{n_1}/\sigma$, причем, по условию, $a_1 = 3$, $a_0 = 2$, $\sigma = 4$, получим $1{,}903 = (3-2)\sqrt{n_1}/4$. Отсюда искомый объем выборки $n_1 = 58$.

в) По выборке объема $n = 9$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 4$, при уровне значимости 0,05 проверяется нулевая гипотеза H_0: $a = a_0 = 15$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению $a_0 = 15$ при конкурирующей гипотезе $a > 15$. Требуется: 1) найти мощность правостороннего критерия для гипотетического значения генеральной средней $a = a_1 = 17$; 2) найти объем выборки n_1, при котором мощность критерия равна 0,8.

577. а) По выборке объема n, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением σ, найдена выборочная средняя $\bar{x}$. При уровне значимости α требуется найти функцию мощности критерия проверки нулевой гипотезы H_0: $a = a_0$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе H_1: $a = a_1 \neq a_0$.

Решение. Конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, поэтому критическая область—двусторонняя. Используя правило 1, найдем критическую точку $u_{кр}$ из равенства $\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2$. Следовательно, двусторонняя критическая область определяется неравенством $|U| > u_{кр}$, или подробнее

$$\left|\frac{(\bar{x}-a_0)}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > u_{кр}.$$

Найдем мощность рассматриваемого критерия, т. е. вероятность попадания критерия в критическую область при допущении, что справедлива конкурирующая гипотеза $a = a_1 \neq a_0$:

$$1-\beta = P\left(\left|\frac{\bar{x}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > u_{кр};\ a = a_1\right).$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком модуля:

$$\frac{\bar{x}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-a_1}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{a_1-a_0}{\sigma/\sqrt{n}} = b + \lambda,$$

где $b=\frac{\bar{x}-a_1}{\sigma/\sqrt{n}}$, $\lambda=\frac{a_1-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Используя эти соотношения, получим

$$1-\beta=P(|b+\lambda|>u_{кр})=P(b+\lambda>u_{кр})+P(b+\lambda<-u_{кр})=$$
$$=P(b>u_{кр}-\lambda)+P(b<-u_{кр}-\lambda)=$$
$$=[1-P(b<u_{кр}-\lambda)]+P(b<-u_{кр}-\lambda)=$$
$$=[1-\Phi(u_{кр}-\lambda)]+\Phi(-u_{кр}-\lambda)=1-\Phi(u_{кр}-\lambda)-\Phi(u_{кр}+\lambda).$$

Таким образом, мощность двустороннего критерия при $a=a_1$ равна

$$1-\beta=1-[\Phi(u_{кр}-\lambda)+\Phi(u_{кр}+\lambda)],$$

где $\lambda=(a_1-a_0)\sqrt{n}/\sigma$.

Каждому значению a_1 соответствует определенное значение мощности, поэтому мощность критерия есть функция от a_1; обозначим ее через $\pi_2(a_1)$.

Итак, искомая мощность двустороннего критерия

$$\pi_2(a_1)=1-[\Phi(u_{кр}-\lambda)+\Phi(u_{кр}+\lambda)],$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, $\lambda=(a_1-a_0)\sqrt{n}/\sigma$, $u_{кр}$ находят из равенства $\Phi(u_{кр})=(1-\alpha)/2$.

б) По выборке объема $n=16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=5$, при уровне значимости 0,05 проверяется нулевая гипотеза H_0: $a=a_0=20$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению $a_0=20$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a\neq 20$. Найти мощность двустороннего критерия проверки рассматриваемой гипотезы для гипотетического значения генеральной средней $a_1=24$.

Решение. Используем формулу

$$1-\beta=1-[\Phi(u_{кр}-\lambda)+\Phi(u_{кр}+\lambda)]. \qquad (*)$$

По правилу 1 найдем критическую точку $u_{кр}=1{,}96$.

Вычислим λ, учитывая, что, по условию, $a_1=24$, $a_0=20$, $n=16$, $\sigma=5$:

$$\lambda=(a_1-a_0)\sqrt{n}/\sigma=(24-20)\sqrt{16}/5=3{,}2.$$

Подставив $u_{кр}=1{,}96$ и $\lambda=3{,}2$ в формулу (*), получим

$$1-\beta=1-[\Phi(1{,}96-3{,}2)+\Phi(1{,}96+3{,}2)]=1+\Phi(1{,}24)-\Phi(5{,}16).$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $\Phi(1,\ 24)=0{,}3925$, $\Phi(5{,}16)=0{,}5$. Искомая мощность $1-\beta=1+$ $+0{,}3925-0{,}5=0{,}8925$.

в) По выборке объема $n=36$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=6$, при уровне значимости 0,01 проверяется нулевая гипотеза H_0: $a=a_0=15$

при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq a_0$. Найти мощность двустороннего критерия проверки рассматриваемой гипотезы для гипотетического значения генеральной средней $a = a_1 = 12$.

578. а) По выборочной медиане $\hat{X}$ при уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза H_0: $a = a_0$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq a_0$. Найти функцию мощности $\pi_3(a_1)$ рассматриваемого двустороннего критерия.

Указание. При больших значениях объема выборки выборочная медиана $\hat{X}$ распределена приближенно нормально с математическим ожиданием $M(X)$ и средним квадратическим отклонением $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

б) По выборке объема $n = 50$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$, при уровне значимости 0,05 проверяется нулевая гипотеза H_0: $a = a_0 = 18$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению $a_0 = 18$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 18$. Сравнить мощности двусторонних критериев $\pi_2(a_1)$ и $\pi_3(a_1)$ при $a_1 = 20$. Можно ли предвидеть результат сравнения мощностей, не производя вычислений?

Б. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна. Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна (например, в случае малых выборок), то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину

$$T = (\overline{X} - a_0)\sqrt{n}/S,$$

где $S = \sqrt{\dfrac{\sum n_i x_i^2 - \left[\sum n_i x_i\right]^2/n}{n-1}}$ — исправленное среднее квадратическое отклонение. Величина T имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0$ о равенстве неизвестной генеральной средней a (нормальной совокупности с неизвестной дисперсией) гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$T_{\text{набл}} = (\overline{x} - a_0)\sqrt{n}/S$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n-1$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $|T_{набл}| < t_{двуст.\,кр}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $|T_{набл}| > t_{двуст.\,кр}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

Правило 2. *При конкурирующей гипотезе* H_1: $a > a_0$ *по уровню значимости* α, *помещенному в нижней строке таблицы приложения 6, и числу степеней свободы* $k = n - 1$ *находят критическую точку* $t_{правост.\,кр}(\alpha;\ k)$ *правосторонней критической области. Если* $T_{набл} < t_{правост.\,кр}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $T_{набл} > t_{правост.\,кр}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

Правило 3. *При конкурирующей гипотезе* H_1: $a < a_0$ *сначала находят «вспомогательную» критическую точку (по правилу 2)* $t_{правост.\,кр}(\alpha;\ k)$ *и полагают границу левосторонней критической области* $t_{левост.\,кр} = -t_{правост.\,кр}$. *Если* $T_{набл} > -t_{правост.\,кр}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $T_{набл} < -t_{правост.\,кр}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

579. а) По выборке объема $n = 16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя $\bar{x} = 118{,}2$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 3{,}6$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 120$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 120$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(118{,}2 - 120)\sqrt{16}}{3{,}6} = -2.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

По таблице критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 6), по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$, помещенному в верхней строке таблицы, и по числу степеней свободы $k = n - 1 = 16 - 1 = 15$ находим критическую точку $t_{двуст.\,кр}(0{,}05;\ 15) = 2{,}13$. Так как $|T_{набл}| < t_{двуст.\,кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, выборочная средняя $\bar{x} = 118{,}2$ незначимо отличается от гипотетической генеральной средней $a_0 = 120$.

а) Решить эту задачу, приняв в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $a < a_0 = 120$.

580. Проектный контролируемый размер изделий, изготовляемых станком-автоматом, $a = a_0 = 35$ мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

контролируемый размер x_i	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
частота (число изделий) n_i	2	3	4	6	5

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 35$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 35$.

Решение. Найдем средний размер изделий выборки:

$$\bar{x}=\frac{\sum n_i x_i}{n}=\frac{2\cdot 34,8+3\cdot 34,9+4\cdot 35,0+6\cdot 35,1+5\cdot 35,3}{20}=35,07.$$

Найдем исправленную дисперсию. Для упрощения расчета перейдем к условным вариантам $u_i=10x_i-351$. В итоге получим распределение:

u_i	-3	-2	-1	0	2
n_i	2	3	4	6	5

Найдем исправленную дисперсию условных вариант

$$s_u^2=\frac{\sum n_i u_i^2-\left[\sum n_i u_i\right]^2/n}{n-1}=\frac{54-[-6]^2/20}{19}=2,747.$$

Следовательно, исправленная дисперсия первоначальных вариант

$$s_X^2=2,747/10^2=0,027.$$

Отсюда «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s_X=\sqrt{0,027}=0,16$.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}}=\frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{s}=\frac{(35,07-35,0)\sqrt{20}}{0,16}=1,96.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $a\neq a_0$, поэтому критическая область—двусторонняя. По таблице критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 6), по уровню значимости $\alpha=0,05$, помещенному в верхней строке таблицы, и по числу степеней свободы $k=n-1=20-1=19$ находим критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(0,05;\ 19)=2,09$. Так как $T_{\text{набл}}<t_{\text{двуст. кр}}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, станок обеспечивает проектный размер изделий.

§ 7. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки)

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Из этих совокупностей извлечены зависимые выборки одинакового объема n, варианты которых соответственно равны x_i и y_i. Введем следующие обозначения:

$d_i=x_i-y_i$—разности вариант с одинаковыми номерами,

$\bar{d}=\sum d_i/n$—средняя разностей вариант с одинаковыми номерами,

$s_d=\sqrt{\dfrac{\sum d_i^2-\left[\sum d_i\right]^2/n}{n-1}}$—«исправленное» среднее квадратическое отклонение.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(\bar{X})=M(\bar{Y})$ о равенстве двух средних нормальных совокупностей X и Y с неизвестными дисперсиями (в случае зависимых выборок одинакового объема) при конкурирующей гипотезе H_1: $M(\bar{X})\neq M(\bar{Y})$, надо вычислить наблюдаемое* *значение критерия:*

$$T_{\text{набл}} = \bar{d} \cdot \sqrt{n}/s_d$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k=n-1$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}$ (α; k). Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

581. Двумя приборами в одном и том же порядке измерены шесть деталей и получены следующие результаты измерений (в сотых долях миллиметра):

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 6,\ x_5 = 8,\ x_6 = 10;$$
$$y_1 = 10,\ y_2 = 3,\ y_3 = 6,\ y_4 = 1,\ y_5 = 7,\ y_6 = 4.$$

При уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются результаты измерений, в предположении, что они распределены нормально.

Решение. Найдем разности $d_i = x_i - y_i$; вычитая из чисел первой строки числа второй, получим:

$$d_1 = -8,\ d_2 = 0,\ d_3 = -1,\ d_4 = 5,\ d_5 = 1,\ d_6 = 6.$$

Найдем выборочную среднюю, учитывая, что $\sum d_i = 3$: $\bar{d} = 3/6 = 0,5$.

Найдем «исправленное» среднее квадратическое отклонение s_d, учитывая, что $\sum d_i^2 = 127$ и $\sum d_i = 3$:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \left[\sum d_i\right]^2/n}{n-1}} = \sqrt{\frac{127 - 9/6}{6-1}} = \sqrt{25,1}.$$

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = \bar{d} \cdot \sqrt{n}/s_d = 0,5 \cdot \sqrt{6}/\sqrt{25,1} = 0,24.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 6), по уровню значимости 0,05, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n - 1 = 6 - 1 = 5$ находим критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(0,05;\ 5) = 2,57$.

Так как $T_{\text{набл}} < t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, средние результаты измерений различаются незначимо.

582. На двух аналитических весах, в одном и том же порядке, взвешены 10 проб химического вещества и получены следующие результаты взвешиваний (в мг):

x_i	25	30	28	50	20	40	32	36	42	38
y_i	28	31	26	52	24	36	33	35	45	40

При уровне значимости 0,01 установить, значимо или незначимо различаются результаты взвешиваний, в предположении, что они распределены нормально.

583. Физическая подготовка 9 спортсменов была проверена при поступлении в спортивную школу, а затем после недели тренировок. Итоги проверки в баллах оказались следующими (в первой строке указано число баллов, полученных каждым спортсменом при поступлении в школу; во второй строке — после обучения):

x_i	76	71	57	49	70	69	26	65	59
y_i	81	85	52	52	70	63	33	83	62

Требуется при уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо улучшилась физическая подготовка спортсменов, в предположении, что число баллов распределено нормально.

584. Химическая лаборатория произвела в одном и том же порядке анализ 8 проб двумя методами. Получены следующие результаты (в первой строке указано содержание некоторого вещества в процентах в каждой пробе, определенное первым методом; во второй строке — вторым методом):

x_i	15	20	16	22	24	14	18	20
y_i	15	22	14	25	29	16	20	24

Требуется при уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются средние результаты анализов, в предположении, что они распределены нормально.

585. Две лаборатории одним и тем же методом, в одном и том же порядке, определяли содержание углерода в 13 пробах нелегированной стали. Получены следующие результаты анализов *) (в первой строке указано содержание углерода в процентах в каждой пробе, полученное первой лабораторией; во второй строке — второй лабораторией):

x_i	0,18	0,12	0,12	0,08	0,08	0,12	0,19	0,32	0,27
y_i	0,16	0,09	0,08	0,05	0,13	0,10	0,14	0,30	0,31

x_i	0,22	0,34	0,14	0,46
y_i	0,24	0,28	0,11	0,42

Требуется при уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются средние результаты анализа в предложении, что они распределены нормально.

*) См.: Налимов В. В. Применение математической статистики при анализе вещества. М., 1960.

§ 8. Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события

Пусть по достаточно большому числу n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, но неизвестна, найдена относительная частота m/n. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что неизвестная вероятность p равна гипотетической вероятности p_0.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $p=p_0$ о равенстве неизвестной вероятности p гипотетической вероятности p_0 при конкурирующей гипотезе H_1: $p \neq p_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$U_{\text{набл}}=\frac{[(m/n)-p_0]\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку $u_{\text{кр}}$ из равенства

$$\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2.$$

Если $|U_{\text{набл}}|<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $|U_{\text{набл}}|>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. *При конкурирующей гипотезе H_1: $p>p_0$ находят критическую точку правосторонней критической области из равенства*

$$\Phi(u_{\text{кр}})=(1-2\alpha)/2.$$

Если $U_{\text{набл}}<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $U_{\text{набл}}>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. *При конкурирующей гипотезе H_1: $p<p_0$ находят сначала «вспомогательную» критическую точку $u_{\text{кр}}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области $u'_{\text{кр}}=-u_{\text{кр}}$. Если $U_{\text{набл}}>-u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $U_{\text{набл}}<-u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.*

Замечание. Удовлетворительные результаты обеспечивает выполнение неравенства $np_0q_0>9$.

586. По 100 независимым испытаниям найдена относительная частота $m/n=0{,}14$. При уровне значимости 0,05 требуется проверить нулевую гипотезу H_0: $p=p_0=0{,}20$ при конкурирующей гипотезе H_1: $p \neq 0{,}20$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия, учитывая, что $q_0=1-p_0=1-0{,}20=0{,}80$:

$$U_{\text{набл}}=\frac{(m/n-p_0)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}=\frac{(0{,}14-0{,}20)\cdot\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}20\cdot0{,}80}}=-1{,}5.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $p \neq p_0$, поэтому критическая область — двусторонняя. Найдем критическую точку $u_{\text{кр}}$ по равенству

$$\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2=(1-0{,}05)/2=0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $u_{\text{кр}}=1{,}96$.

Так как $|U_{набл}| < u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, наблюдаемая относительная частота 0,14 незначимо отличается от гипотетической вероятности 0,20.

587. Решить задачу 586 при конкурирующей гипотезе H_1: $p < p_0$.

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $p < p_0$, поэтому критическая область — левосторонняя. Найдем сначала «вспомогательную» точку — границу правосторонней критической области из равенства (правило 2)

$$\Phi(u_{кр}) = (1-2\alpha)/2 = (1-2\cdot 0,05)/2 = 0,45.$$

По таблице функции Лапласа находим $u_{кр} = 1,645$. Следовательно, граница левосторонней критической области $u'_{кр} = -1,645$.

Так как $U_{набл} > u'_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу (правило 3).

588. Партия изделий принимается, если вероятность того, что изделие окажется бракованным, не превышает 0,02. Среди случайно отобранных 480 изделий оказалось 12 дефектных. Можно ли принять партию?

Решение. Нулевая гипотеза H_0 имеет вид $p = p_0 = 0,02$. Найдем относительную частоту брака:

$$m/n = 12/480 = 0,025.$$

Примем в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $p > 0,02$ и уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{набл} = \frac{(m/n - p_0)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0,025-0,02)\cdot\sqrt{480}}{\sqrt{0,02\cdot 0,98}} = 0,78.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $p > p_0$, поэтому критическая область — правосторонняя. Найдем критическую точку $u_{кр}$ правосторонней критической области из равенства (правило 2)

$$\Phi(u_{кр}) = (1-2\cdot 0,05)/2 = 0,45.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим

$$u_{кр} = 1,645.$$

Так как $U_{набл} < u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что вероятность брака в партии не превышает 0,02. Таким образом, партию можно принять.

589. Партия изделий принимается, если вероятность того, что изделие окажется бракованным, не превышает 0,03. Среди случайно отобранных 400 изделий оказалось 18 бракованных. Можно ли принять партию?

Указание. Принять нулевую гипотезу H_0: $p = p_0 = 0,03$, а в качестве конкурирующей H_1: $p > 0,03$; уровень значимости $\alpha = 0,05$.

590. Завод рассылает рекламные каталоги возможным заказчикам. Как показал опыт, вероятность того, что организация, получившая каталог, закажет рекламируемое изделие, равна 0,08. Завод разослал 1000 каталогов новой улучшенной формы и получил 100 заказов. Можно ли считать, что новая форма рекламы оказалась значимо эффективнее первой?

Указание. Принять нулевую гипотезу H_0: $p=p_0=0{,}08$, а в качестве конкурирующей H_1: $p>0{,}08$; уровень значимости $\alpha=0{,}05$.

591. В результате длительных наблюдений установлено, что вероятность полного выздоровления больного, принимавшего лекарство A, равна 0,8. Новое лекарство B назначено 800 больным, причем 660 из них полностью выздоровели. Можно ли считать новое лекарство значимо эффективнее лекарства A на пятипроцентном уровне значимости?

Указание. Принять H_0: $p=0{,}8$; H_1: $p\neq 0{,}8$.

§ 9. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам различного объема. Критерий Бартлетта

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \ldots, X_l$ распределены нормально. Из этих совокупностей извлечены независимые выборки, вообще говоря, различных объемов n_i (некоторые объемы могут быть одинаковыми; если все выборки имеют одинаковый объем, то предпочтительнее пользоваться критерием Кочрена, который приведен в следующем параграфе). По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$. Требуется при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий, т. е. гипотезу о равенстве между собой генеральных дисперсий:

$$H_0:\ D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_l).$$

Введем обозначения: $k_i=n_i-1$ — число степеней свободы дисперсии s_i^2; $k=\sum_{i=1}^{l} k_i$ — сумма чисел степеней свободы; $\overline{s^2}=\left(\sum_{i=1}^{l} k_i s_i^2\right)\Big/k$ — средняя арифметическая исправленных дисперсий, взвешенная по числам степеней свободы;

$$V=2{,}303\left[k\lg \overline{s^2}-\sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2\right];$$

$$C=1+\frac{1}{3(l-1)}\left[\sum_{i=1}^{l} 1/k_i-1/k\right];$$

$B=V/C$ — случайная величина (критерий Бартлетта), которая при условии справедливости гипотезы об однородности дисперсий распределена приближенно как χ^2 с $l-1$ степенями свободы, если объем каждой выборки $n_i \geqslant 4$.

Правило. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий нормальных совокупностей, надо вычислить наблюдаемое значение критерия Бартлетта $B_{набл}=V/C$ и по таблице критических точек распределения χ^2. по уровню значимости α и числу степеней свободы $l-1$ (l — число выборок) найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha;\ l-1)$ правосторонней критической области). Если $B_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $B_{набл} > \chi^2_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.*

Замечание 1. Не следует торопиться вычислять постоянную C. Сначала надо найти V и сравнить с $\chi^2_{кр}$; если окажется, что $V < \chi^2_{кр}$, то подавно (так как $C > 1$) $B=V/C < \chi^2_{кр}$ и, следовательно, C вычислять не нужно. Если же $V > \chi^2_{кр}$, то надо вычислить C и затем сравнить B с $\chi^2_{кр}$.

Замечание 2. Критерий Бартлетта весьма чувствителен к отклонениям распределений от нормального, поэтому к выводам, полученным по этому критерию, надо относиться осторожно.

Замечание 3. При условии однородности дисперсий в качестве оценки генеральной дисперсии принимают среднюю арифметическую исправленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы:

$$\overline{s^2}=\sum k_i s_i^2/k.$$

592. По трем независимым выборкам, объемы которых $n_1=9$, $n_2=13$ и $n_3=15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии, соответственно равные 3,2; 3,8 и 6,3. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий.

Решение. Составим расчетную табл. 10 (столбец 8 пока заполнять не будем, поскольку еще неизвестно, понадобится ли вычислять C).

Используя расчетную таблицу, найдем:

$$\overline{s^2}=\left(\sum k_i s_i^2\right)/k=159{,}4/34=4{,}688; \qquad \lg \overline{s^2}=0{,}6709;$$

$$V=2{,}303\left[k \lg \overline{s^2}-\sum k_i \lg s_i^2\right]=2{,}303\,[34\cdot 0{,}6709-22{,}1886]=1{,}43.$$

По таблице приложения 5, по уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $l-1=3-1=2$ находим критическую точку $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 2)=6{,}0$.

Так как $V < \chi^2_{кр}$, то подавно (поскольку $C > 1$) $B_{набл}=V/C < \chi^2_{кр}$ и, следовательно, отвергнуть нулевую гипотезу об однородности дисперсий нет оснований. Другими словами, выборочные дисперсии различаются незначимо.

593. По данным задачи **592** требуется оценить генеральную дисперсию рассматриваемых генеральных совокупностей.

Таблица 10

1	2	3	4	5	6	7	8
Номер выборки	Объем выборки	Число степеней свободы	Исправленные дисперсии				
i	n_i	k_i	s_i^2	$k_i s_i^2$	$\lg s_i^2$	$k_i \lg s_i^2$	$1/k_i$
1	9	8	3,2	25,6	0,5051	4,0408	
2	13	12	3,8	45,6	0,5798	6,9576	
3	15	14	6,3	88,2	0,7993	11,1902	
Σ		$k=34$		159,4		22,1886	

Решение. Поскольку в результате решения предыдущей задачи установлена однородность дисперсий, то в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднюю арифметическую исправленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы:

$$D_{\text{г}}^{*}=\overline{s^2}=\left(\sum k_i s_i^2\right)/k=159{,}4/34 \simeq 4{,}7.$$

594. Можно ли воспользоваться критерием Бартлетта для проверки гипотезы об однородности дисперсий по выборкам объема $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=20$?

595. По четырем независимым выборкам, объемы которых $n_1=17$, $n_2=20$, $n_3=15$, $n_4=16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии, соответственно равные 2,5; 3,6; 4,1; 5,8. Требуется: а) при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу об однородности дисперсий; б) оценить генеральную дисперсию.

596. Четыре исследователя параллельно определяют процентное содержание углерода в сплаве, причем первый исследователь произвел анализ 25 проб, второй — 33, третий — 29, четвертый — 33 проб. «Исправленные» выборочные средние квадратические отклонения оказались соответственно равными 0,05; 0,07; 0,10; 0,08.

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу об однородности дисперсий, в предположении, что процентное содержание углерода в сплаве распределено нормально.

Указание. Для упрощения вычислений принять $r_i=100\,s_i$.

597. Сравниваются четыре способа обработки изделий. Лучшим считается тот из способов, дисперсия контролируемого параметра которого меньше. Первым способом обработано 15, вторым — 20, третьим — 20, четвертым — 14 изделий. Исправленные выборочные дисперсии s_i^2 соответственно равны: 0,00053; 0,00078; 0,00096; 0,00062. Можно ли отдать предпочтение одному из способов, при уровне значимости 0,05? Предполагается, что контролируемый параметр распределен нормально.

Указание. Для упрощения вычислений принять $r_i^2 = 100\,000 s_i^2$.

598. Требуется сравнить точность обработки изделий на каждом из трех станков. С этой целью на первом станке было обработано 20, на втором — 25, на третьем — 26 изделий. Отклонения X, Y и Z контролируемого размера от заданного оказались следующими (в десятых долях мм):

отклонения для изделий

первого станка	x_i	2	4	6	8	9
частота	n_i	5	6	3	2	4

отклонения для изделий

второго станка	y_i	1	2	3	5	7	8	12
частота	m_i	2	4	4	6	3	5	1

отклонения для изделий

третьего станка	z_i	2	3	4	7	8	10	14
частота	p_i	3	5	4	6	3	2	3

а) Можно ли считать, что станки обеспечивают одинаковую точность при уровне значимости 0,05 в предположении, что отклонения распределены нормально?

б) Исключив из рассмотрения третий станок (дисперсия отклонений этого станка — наибольшая), с помощью критерия Фишера—Снедекора убедиться, что первый и второй станки обеспечивают одинаковую точность обработки изделий.

§ 10. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема. Критерий Кочрена

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \ldots, X_l$ распределены нормально. Из этих совокупностей извлечены l независимых выборок одинакового объема n и по ним найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$, все с одинаковым числом степеней свободы $k=n-1$. Требуется при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий, т. е. гипотезу о равенстве между собой генеральных дисперсий:

$$H_0: D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_l).$$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем критерий Кочрена—отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий:

$$G=\frac{s_{\max}^2}{s_1^2+s_2^2+\ldots+s_l^2}.$$

Распределение этой случайной величины зависит только от числа степеней свободы $k=n-1$ и количества выборок l. Для проверки нулевой гипотезы строят правостороннюю критическую область.

Правило. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу об однородности дисперсий нормально распределенных совокупностей, надо вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$G_{\text{набл}}=s_{\max}^2/(s_1^2+s_2^2+\ldots+s_l^2)$$

и по таблице критических точек распределения Кочрена (см. приложение 8) найти критическую точку $G_{\text{кр}}(\alpha; k; l)$. Если $G_{\text{набл}} < G_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $G_{\text{набл}} > G_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание. При условии однородности дисперсий независимых выборок одинакового объема в качестве оценки генеральной дисперсии принимают среднюю арифметическую исправленных дисперсий.

599. По четырем независимым выборкам одинакового объема $n=17$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 0,21; 0,25; 0,34; 0,40.

Требуется: а) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий (критическая область—правосторонняя); б) оценить генеральную дисперсию.

Решение. а) Найдем наблюдаемое значение критерия Кочрена—отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_{\text{набл}}=0{,}40/(0{,}21+0{,}25+0{,}34+0{,}40)=\frac{1}{3}.$$

Найдем по таблице критических точек распределения Кочрена (см. приложение 8) по уровню значимости 0,05, числу степеней свободы $k=n-1=17-1=16$ и числу выборок $l=4$ критическую точку $G_{\text{кр}}(0{,}05;\ 16;\ 4)=0{,}4366$.

Так как $G_{\text{набл}} < G_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, исправленные выборочные дисперсии различаются незначимо.

б) Поскольку однородность дисперсий установлена, в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднюю арифметическую исправленных дисперсий:

$$D_{\text{г}}^{*}=(0,21+0,25+0,34+0,40)/4=0,3.$$

600. По шести независимым выборкам одинакового объема $n=37$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 2,34; 2,66; 2,95; 3,65; 3,86; 4,54.

Требуется проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий: а) при уровне значимости 0,01; б) при уровне значимости 0,05.

601. Доказать, что наблюдаемое значение критерия Кочрена не изменится, если все исправленные дисперсии умножить на одно и то же постоянное число.

602. По пяти независимым выборкам одинакового объема $n=37$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены «исправленные» средние квадратические отклонения: 0,00021; 0,00035; 0,00038; 0,00062; 0,00084.

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий.

Указание. Умножить предварительно все средние квадратические отклонения на 10^5.

603. Четыре фасовочных автомата настроены на отвешивание одного и того же веса. На каждом автомате отвесили по 10 проб, а затем эти же пробы взвесили на точных весах и нашли по полученным отклонениям исправленные дисперсии: 0,012; 0,021; 0,025; 0,032: а) можно ли при уровне значимости 0,05 считать, что автоматы обеспечивают одинаковую точность взвешивания? б) оценить генеральную дисперсию.

Предполагается, что отклонения зарегистрированного веса от требуемого распределены нормально.

604. Каждая из трех лабораторий произвела анализ 10 проб сплава для определения процентного содержания углерода, причем исправленные выборочные дисперсии оказались равными 0,045; 0,062; 0,093: а) требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу об однородности дисперсий; б) оценить генеральную дисперсию.

Предполагается, что процентное содержание углерода в сплаве распределено нормально.

605. Проверяется устойчивость (отсутствие разладки) работы станка по величине контролируемого размера изделий. С этой целью каждые 30 мин отбирали пробу из 20 изделий; всего взяли 15 проб. В итоге измерения отобранных изделий были вычислены исправленные дисперсии (их значения приведены в табл. 11).

Таблица 11

Номер пробы	Исправленная дисперсия	Номер пробы	Исправленная дисперсия	Номер пробы	Исправленная дисперсия
1	0,082	6	0,109	11	0,112
2	0,094	7	0,121	12	0,109
3	0,162	8	0,094	13	0,110
4	0,143	9	0,156	14	0,156
5	0,121	10	0,110	15	0,164

Можно ли при уровне значимости 0,05 считать, что станок работает устойчиво (разладка не произошла)?

Предполагается, что контролируемый размер изделий распределен нормально.

Указание. Используя таблицу приложения 8, выполнить линейную интерполяцию.

§ 11. Сравнение двух вероятностей биномиальных распределений

Пусть в двух генеральных совокупностях производятся независимые испытания: в результате каждого испытания событие A может появиться в первой совокупности с неизвестной вероятностью p_1, а во второй — с неизвестной вероятностью p_2. По выборкам, извлеченным из первой и второй совокупностей, найдены соответственные частоты:

$$w_1(A)=m_1/n_1 \text{ и } w_2(A)=m_2/n_2,$$

где m_1, m_2 — числа появлений события A; n_1, n_2 — количества испытаний.

В качестве оценок неизвестных вероятностей примем относительные частоты: $p_1 \simeq w_1$ и $p_2 \simeq w_2$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что вероятности p_1 и p_2 равны между собой: H_0: $p_1=p_2$. Другими словами, требуется установить, значимо или незначимо различаются относительные частоты w_1 и w_2.

Предполагается, что выборки имеют достаточно большой объем.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $p_1=p_2=p$ о равенстве вероятностей появления события в двух генеральных совокупностях (имеющих биномиальные распределения) при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 \neq p_2$,* *надо вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$U_{\text{набл}}=\frac{m_1/n_1-m_2/n_2}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку $u_{\text{кр}}$ *по равенству* $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2$. *Если* $|U_{\text{набл}}|<u_{\text{кр}}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $|U_{\text{набл}}|>u_{\text{кр}}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

Правило 2. *При конкурирующей гипотезе* H_1: $p_1>p_2$ *находят критическую точку правосторонней критической области по равенству* $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-2\alpha)/2$. *Если* $U_{\text{набл}}<u_{\text{кр}}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $U_{\text{набл}}>u_{\text{кр}}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

Правило 3. *При конкурирующей гипотезе* H_1: $p_1<p_2$ *находят критическую точку* $u_{\text{кр}}$ *по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области* $u'_{\text{кр}}=-u_{\text{кр}}$. *Если* $U_{\text{набл}}>-u_{\text{кр}}$ — *нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $U_{\text{набл}}<-u_{\text{кр}}$ — *нулевую гипотезу отвергают.*

606. За смену отказали 15 элементов устройства *1*, состоящего из 800 элементов и 25 элементов устройства *2*, состоящего из 1000 элементов. При уровне значимости $\alpha=0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $p_1=p_2=p$ о равенстве вероятностей отказа элементов обоих устройств при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1\neq p_2$.

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $p_1\neq p_2$, поэтому критическая область двусторонняя. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}}=\frac{m_1/n_1-m_2/n_2}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\cdot\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Подставив $m_1=15$, $n_1=800$, $m_2=25$, $n_2=1000$, получим $U_{\text{набл}}=-0{,}89$.

Найдем критическую точку по равенству

$$\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2=(1-0{,}05)/2=0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $u_{\text{кр}}=1{,}96$. Так как $|U_{\text{набл}}|<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, вероятности отказа элемента обоих устройств различаются незначимо.

607. В партии из 500 деталей, изготовленных первым станком-автоматом, оказалось 60 нестандартных; из 600 деталей второго станка 42 нестандартных. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $p_1=p_2=p$ о равенстве вероятностей изготовления нестандартной детали обоими станками при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1\neq p_2$.

608. Для оценки качества изделий, изготовленных двумя заводами, взяты выборки $n_1=200$ и $n_2=300$ изделий. В этих выборках оказалось соответственно $m_1=20$ и $m_2=15$ бракованных изделий. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $p_1=p_2=p$ о равенстве вероятностей изготовления бракованного изделия обоими заводами при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1>p_2$.

Указание. Построить правостороннюю критическую область.

609. Из 100 выстрелов по цели каждым из двух орудий зарегистрировано соответственно $m_1=12$ и $m_2=8$ промахов. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $p_1=p_2=p$ о равенстве вероятностей промаха обоих орудий при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 \neq p_2$.

§ 12. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть двумерная генеральная совокупность (X, Y) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объема n и по ней найден выборочный коэффициент корреляции $r_в \neq 0$. Требуется проверить нулевую гипотезу H_0: $r_г=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Если нулевая гипотеза принимается, то это означает, что X и Y некоррелированы; в противном случае—коррелированы.

Правило. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия*

$$T_{набл}=r_в\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r_в^2}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n-2$ найти критическую точку $t_{кр}(\alpha; k)$ двусторонней критической области. Если $|T_{набл}|<t_{кр}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $|T_{набл}|>t_{кр}$—нулевую гипотезу отвергают.

610. По выборке объема $n=100$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции $r_в=0,2$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: r_г \neq 0$.

Решение. Найдем наблюдаемое (эмпирическое) значение критерия:

$$T_{набл}=r_в\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r_в^2}=0,2\sqrt{100-2}/\sqrt{1-0,2^2}=2,02.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $r_г \neq 0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

По таблице критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 6), по уровню значимости $\alpha = 0,05$, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n - 2 = 100 - 2 = 98$ находим критическую точку двусторонней критической области $t_{кр}(0,05;\ 98) = 1,99$.

Так как $T_{набл} > t_{кр}$ — отвергаем нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции. Другими словами, коэффициент корреляции значимо отличается от нуля; следовательно, X и Y коррелированы.

611. По выборке объема $n = 62$, извлеченной из нормальной двумерной генеральной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции $r_в = 0,3$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: r_г \neq 0$.

612. По выборке объема $n = 120$, извлеченной из нормальной двумерной генеральной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции $r_в = 0,4$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$.

613. По выборке объема $n = 100$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y), составлена корреляционная табл. 12.

Таблица 12

Y	X						
	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1	—	—	—	—	6
45	—	6	2	—	—	—	8
55	—	—	5	40	5	—	50
65	—	—	2	8	7	—	17
75	—	—	—	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Требуется: а) найти выборочный коэффициент корреляции; б) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве генерального коэффициента корреляции нулю при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$.

Решение. а) Для упрощения вычислений перейдем к условным вариантам

$$u_i = (x_i - C_1)/h_1, \quad v_i = (y_i - C_2)/h_2,$$

где C_1 и C_2 — ложные нули (в качестве ложного нуля выгодно взять варианту, расположенную примерно в середине вариационного ряда; в данном случае принимаем $C_1 = 25$, $C_2 = 55$); $h_1 = u_{i+1} - u_i$, т. е. разность между двумя соседними вариантами (шаг); $h_2 = v_{i+1} - v_i$.

Практически корреляционную таблицу в условных вариантах составляют так: в первой строке вместо ложного нуля $C_1 = 25$ пишут нуль; слева от нуля пишут последовательно -1, -2, -3, а справа от нуля записывают 1, 2, 3. Аналогично, в первом столбце вместо ложного нуля $C_2 = 55$ записывают нуль; над нулем пишут последовательно -1, -2, -3, а под нулем 1, 2, 3. Частоты переписывают из корреляционной таблицы в первоначальных вариантах. В итоге получают корреляционную табл. 13.

Таблица 13

V	U						n_v
	-3	-2	-1	0	1	2	
-2	5	1	—	—	—	—	6
-1	—	6	2	—	—	—	8
0	—	—	5	40	5	—	50
1	—	—	2	8	7	—	17
2	—	—	—	4	7	8	19
n_u	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Воспользуемся формулой для вычисления выборочного коэффициента корреляции в условных вариантах:

$$r_в = \left(\sum n_{uv} uv - n\bar{u}\bar{v}\right) / (n\sigma_u \sigma_v).$$

Вычислив входящие в эту формулу величины $\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u, σ_v методом произведений или непосредственным расчетом, получим: $\bar{u} = -0{,}03$; $\bar{v} = 0{,}35$; $\sigma_u = 1{,}153$; $\sigma_v = 1{,}062$.

Пользуясь расчетной таблицей (см. задачу **535**, табл. 7), найдем $\sum n_{uv} uv = 99$.

Следовательно, выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{\sum n_{uv} uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u \sigma_v} = \frac{99 - 100 \cdot (-0{,}03) \cdot 0{,}35}{100 \cdot 1{,}153 \cdot 1{,}062} = 0{,}817.$$

б) Проверим нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}}=\frac{r_{\text{в}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{в}}^2}}=\frac{0{,}817\cdot\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0{,}817^2}}=14{,}03.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $r_{\text{г}}\neq 0$, поэтому критическая область — двусторонняя. По таблице критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 6), по уровню значимости $\alpha=0{,}05$, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k=n-2=100-2=98$ находим критическую точку двусторонней критической области $t_{\text{кр}}(0{,}05;\ 98)=1{,}99$.

Так как $T_{\text{набл}}>t_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции отвергаем. Другими словами, коэффициент корреляции значимо отличается от нуля; следовательно, X и Y коррелированы.

614. По выборке объема $n=100$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y), составлена корреляционная табл. 14.

Таблица 14

Y	X						
	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	—	—	—	—	6
120	—	6	2	—	—	—	8
130	—	—	3	50	2	—	55
140	—	—	1	10	6	—	17
150	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n=100$

Требуется: а) найти выборочный коэффициент корреляции; б) при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции $r_{\text{г}}$ при конкурирующей гипотезе $H_1: r_{\text{г}}\neq 0$.

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i=(x_i-17)/5$, $v_i=(y_i-130)/10$.

615. По выборке объема $n=100$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y), составлена корреляционная табл. 15.

Таблица 15

Y	X							
	12	22	32	42	52	62	72	n_y
65	—	—	—	—	10	6	2	18
70	—	—	—	—	—	4	1	5
75	—	—	2	7	4	2	—	15
80	—	—	1	25	—	—	—	26
85	—	4	6	—	1	—	—	11
90	1	5	8	2	—	—	—	16
95	1	2	6	—	—	—	—	9
n_x	2	11	23	34	15	12	3	$n=100$

Требуется: а) найти выборочный коэффициент корреляции; б) при уровне значимости 0,001 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции $r_г$ при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$.

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i=(x_i-42)/10$, $v_i=(y_i-80)/5$.

616. По выборке объема $n=100$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y), получена корреляционная табл. 16.

Таблица 16

Y	X						
	100	105	110	115	120	125	n_y
35	4	—	6	7	8	3	28
45	5	5	2	10	—	—	22
55	6	7	—	—	2	3	18
65	—	6	5	4	—	2	17
75	5	1	2	4	3	—	15
n_x	20	19	15	25	13	8	$n=100$

Требуется: а) найти выборочный коэффициент корреляции; б) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции $r_г$ при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$.

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i=(x_i-115)/5$, $v_i=(y_i-45)/10$.

§ 13. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента ранговой корреляции Спирмена

Пусть генеральная совокупность состоит из объектов, которые обладают двумя качественными признаками: A и B. Из этой совокупности извлечена выборка объема n и по ней найден выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена $\rho_в \neq 0$ (см. гл. XII, § 3, А). Требуется проверить нулевую гипотезу H_0: $\rho_г=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена.

Если нулевая гипотеза принимается, то это означает, что между признаками A и B нет значимой ранговой корреляционной связи (выборочный коэффициент $\rho_в$ незначим); в противном случае между признаками имеется значимая ранговая корреляционная связь (выборочный коэффициент $\rho_в$ значим).

Правило. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции $\rho_г$ Спирмена при конкурирующей гипотезе H_1: $\rho_г \neq 0$, надо вычислить критическую точку*

$$T_{кр}=t_{кр}(\alpha,\ k)\sqrt{\frac{1-\rho_в^2}{n-2}},$$

где n — объем выборки; $\rho_в$ — выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена; $t_{кр}(\alpha,\ k)$ — критическая точка двусторонней критической области, которую находят по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 6), по уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n-2$.

Если $|\rho_в|<T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качественными признаками не значима. Если $|\rho_в|>T_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

617. В задаче 540 по выборке объема $n=10$ вычислен выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена $\rho_в=0,64$ между оценками знаний студентов по двум тестам. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Другими словами, требуется проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между оценками по двум тестам.

Решение. Найдем критическую точку двусторонней критической области распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha=0{,}01$ и числу степеней свободы $k=n-2=10-2=8$ (см. приложение 6): $t_{кр}(0{,}01;\ 8)=3{,}36$.

Найдем критическую точку:

$$T_{кр}=t_{кр}(\alpha;\ k)\sqrt{\frac{1-\rho_в^2}{n-2}}=3{,}36\sqrt{\frac{1-0{,}64^2}{10-2}}=0{,}92.$$

Итак, $T_{кр}=0{,}92$, $\rho_в=0{,}64$. Так как $\rho_в < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Другими словами, ранговая корреляционная связь между оценками по двум тестам незначимая.

618. В задаче **541** по выборке объема $n=12$ вычислен выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена $\rho_в=0{,}92$ между оценками, выставленными одним и тем же учащимся двумя преподавателями. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Другими словами, требуется проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между оценками двух преподавателей.

619. В задаче **542** по выборке объема $n=13$ вычислен выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена $\rho_в=0{,}75$ между правильными рангами оттенков цветов и рангами, которые им присвоил испытуемый. При уровне значимости 0,02 проверить, значим ли найденный коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

620. В задаче **543** по выборке объема $n=9$ вычислен выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена $\rho_в=0{,}73$ между двумя последовательностями рангов. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена.

621. В задаче **544** по выборке объема $n=11$ вычислен выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена $\rho_в=0{,}82$ между двумя последовательностями рангов, установленными специалистами двух заводов при ранжировании факторов, влияющих на ход технологического процесса. При уровне значимости 0,01 проверить, значима ли ранговая корреляционная связь между последовательностями рангов.

622. По выборке объема $n=42$ вычислен выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена $\rho_в=0{,}6$

между двумя последовательностями рангов. При уровне значимости 0,02 проверить, значим ли выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

§ 14. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента ранговой корреляции Кендалла

Пусть генеральная совокупность состоит из объектов, которые обладают двумя качественными признаками: A и B. Из этой совокупности извлечена выборка объема n и по ней найден выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла $\tau_г \neq 0$ (см. гл. XII, § 3, Б). Требуется проверить нулевую гипотезу H_0: $\tau_г = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Кендалла.

Если нулевая гипотеза принимается, то это означает, что между признаками A и B нет значимой ранговой корреляционной связи (выборочный коэффициент $\tau_в$ незначим); в противном случае между признаками имеется значимая ранговая корреляционная связь (выборочный коэффициент $\tau_в$ значим).

Правило. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Кендалла при конкурирующей гипотезе H_1: $\tau_г \neq 0$, надо вычислить критическую точку*

$$T_{кр} = z_{кр} \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}},$$

где n — объем выборки; $z_{кр}$ — критическая точка двусторонней критической области, которую находят по таблице функции Лапласа по равенству $\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2$.

Если $|\tau_в| < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качественными признаками незначима. Если $|\tau_в| > T_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

623. В задаче 548 по выборке объема $n = 10$ вычислен выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла $\tau_в = 0,47$ между оценками знаний студентов по двум тестам. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Кендалла. Другими словами, требуется проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между оценками по двум тестам.

Решение. Найдем критическую точку $z_{кр}$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0,05)/2 = 0,475.$$

По таблице Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр} = 1,96$.

Найдем критическую точку:

$$T_{кр} = z_{кр}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}} = 1,96\sqrt{\frac{2(2\cdot10+5)}{9\cdot10(10-1)}} = 0,49.$$

Итак, $T_{кр} = 0,49$, $\tau_в = 0,47$. Так как $\tau_в < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; ранговая корреляционная связь между оценками по двум тестам незначимая.

624. В задаче 549 по выборке объема $n = 10$ вычислен выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла $\tau_в = 0,78$ между оценками качества деталей, которые были выставлены двумя контролерами. При уровне значимости 0,01 проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между оценками двух контролеров.

625. По выборке объема $n = 13$ найден выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла $\tau_в = 0,54$ между двумя последовательностями рангов. При уровне значимости 0,05 проверить, является ли значимой ранговая корреляционная связь между последовательностями рангов.

626. По выборке объема $n = 20$ найден выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла $\tau_в = 0,24$ между двумя последовательностями рангов. При уровне значимости 0,01 проверить, является ли значимой ранговая корреляция между последовательностями рангов.

§ 15. Проверка гипотезы об однородности двух выборок по критерию Вилкоксона

Критерий Вилкоксона служит для проверки однородности независимых выборок $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ в предположении, что X и Y — непрерывные случайные величины.

Нулевая гипотеза состоит в том, что при всех значениях аргумента (обозначим его через x) функции распределения равны между собой:

$$F_1(x) = F_2(x).$$

Конкурирующие гипотезы:

$$F_1(x) \neq F_2(x), \quad F_1(x) < F_2(x), \quad F_1(x) > F_2(x).$$

Заметим, что принятие конкурирующей гипотезы H_1: $F_1(x) < F_2(x)$ означает, что $X > Y$. Аналогично, если справедлива конкурирующая гипотеза H_1: $F_1(x) > F_2(x)$, то $X < Y$.

Далее предполагается, что объем первой выборки меньше (не больше) второй: $n_1 \leqslant n_2$; если это не так, то выборки можно перенумеровать (поменять местами).

А. Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем обеих выборок не превосходит 25. Правило 1. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $F_1(x) = F_2(x)$ об* *однородности двух независимых выборок объемов n_1 и n_2 ($n_1 \leq n_2$) при конкурирующей гипотезе H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$, надо:*

1) *расположить варианты обеих выборок в возрастающем порядке т. е. в виде одного вариационного ряда, и найти в этом ряду $W_{набл}$—сумму порядковых номеров вариант первой выборки;*

2) *найти по таблице нижнюю критическую точку* $w_{нижн.кр}(Q, n_1, n_2)$, где $Q=\alpha/2$;

3) *найти верхнюю критическую точку по формуле*

$$w_{верхн.кр}=(n_1+n_2+1)n_1-w_{нижн.кр}.$$

Если $w_{нижн.кр} < W_{набл} < w_{верхн.кр}$ *—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $W_{набл} < w_{нижн.кр}$ *или* $W_{набл} > w_{верхн.кр}$ *— нулевую гипотезу отвергают.*

627. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $F_1(x)=F_2(x)$ об однородности двух выборок, объемы которых $n_1=6$, $n_2=7$ (в первой строке приведены варианты первой выборки; во второй строке — варианты второй выборки):

x_i	3	4	6	10	13	17	
y_i	1	2	5	7	16	20	22

Принять в качестве конкурирующей гипотезу H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$.

Решение. Конкурирующая гипотеза имеет вид $F_1(x) \neq F_2(x)$, поэтому критическая область—двусторонняя. Расположим варианты обеих выборок в виде одного вариационного ряда и пронумеруем их:

порядковый номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
варианта	1	2	3	4	5	6	7	10	13	16	17	20	22

Найдем наблюдаемое значение критерия Вилкоксона—сумму порядковых номеров (они набраны курсивом) вариант первой выборки:

$$W_{набл}=3+4+6+8+9+11=41.$$

Найдем по таблице* нижнюю критическую точку критической области, учитывая, что $Q=0{,}01/2=0{,}005$, $n_1=6$, $n_2=7$: $w_{нижн.кр}(0{,}005;\ 6,\ 7)=24$. Найдем верхнюю критическую точку: $w_{верхн.кр}=(n_1+n_2+1)\ n_1-w_{нижн.кр}(6+7+1)\cdot 6-24=60$. Поскольку $w_{нижн.кр} < W_{набл} < w_{верхн.кр}$ ($24 < 41 < 60$)—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности выборок.

628. Предложены два метода (A и B) увеличения выхода продукции. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об их одинаковой эффективности по двум выборкам объемов $n_1=6$ и $n_2=9$ (в первой

* При решении задач **627—630** использовать таблицу, помещенную в книге: Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1977.

строке приведены проценты прироста продукции в каждом опыте по методу A; во второй строке — по методу B):

x_i 0,2 0,3 0,5 0,8 1,0 1,3
y_i 0,1 0,4 0,6 0,7 0,9 1,4 1,7 1,8 1,9

Принять в качестве конкурирующей гипотезу: эффективность методов A и B различна.

629. Производительность труда двух смен завода характеризуется выборками объемов $n_1=9$ и $n_2=10$:

первая смена 28 33 39 40 41 42 45 46 47
вторая смена 34 40 41 42 43 44 46 48 49 52

Используя критерий Вилкоксона, при уровне значимости 0,1 проверить нулевую гипотезу об одинаковой производительности обеих смен, приняв в качестве конкурирующей гипотезу: производительность труда смен различна.

Указание. При вычислении наблюдаемого значения критерия Вилкоксона учесть, что ранги совпадающих вариант различных выборок равны среднему арифметическому порядковых номеров вариант в общем вариационном ряде, составленном из вариант обеих выборок.

630. Эффективность каждого из двух рационов (A и B) откорма скота характеризуется выборками объемов $n_1=10$ и $n_2=12$ (в первой строке приведен вес (в кг) животных, которых откармливали по рациону A, во второй строке — по рациону B):

x_i 24 26 27 27 30 32 33 34 35 36
y_i 21 21 22 23 25 25 25 25 27 27 29 31

Используя критерий Вилкоксона, при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об одинаковой эффективности рационов A и B, приняв в качестве конкурирующей гипотезу: рацион A эффективнее рациона B (H_1: $F_1(x) < F_2(x)$, т. е. $X > Y$).

Указание. Критическая область — правосторонняя.

Б. Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем хотя бы одной из выборок превосходит 25. 1. При конкурирующей гипотезе $F_1(x) \neq F_2(x)$ нижняя критическая точка

$$w_{\text{нижн.кр}}(Q;\ n_1,\ n_2) =$$

$$= \left[\frac{(n_1+n_2+1)\cdot n_1-1}{2} - z_{\text{кр}}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right], \qquad (*)$$

где $Q=\alpha/2$; $z_{кр}$ находят по таблице функции Лапласа с помощью равенства $\Phi(z_{кр})=(1-\alpha)/2$; знак $[a]$ означает целую часть числа a.

В остальном правило 1, приведенное в п. А, сохраняется.

2. При конкурирующих гипотезах $F_1(x)<F_2(x)$ и $F_1(x)>F_2(x)$ нижнюю критическую точку находят по формуле (*), положив $Q=\alpha$; соответственно $z_{кр}$ находят по таблице функции Лапласа с помощью равенства $\Phi(z_{кр}=(1-2\alpha)/2$. В остальном правила 2—3, приведенные в п. А, сохраняются.

631. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок объемов: $n_1=40$ и $n_2=50$ при конкурирующей гипотезе H_1: $F_1(x)\neq F_2(x)$, если известно, что в общем вариационном ряду, составленном из вариант обеих выборок, сумма порядковых номеров вариант первой выборки $W_{набл}=1800$.

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $F_1(x)=F_2(x)$, поэтому критическая область—двусторонняя.

Найдем $z_{кр}$ с помощью равенства

$$\Phi(z_{кр})=(1-\alpha)/2=(1-0,05)/2=0,475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр}=1,96$. Подставив $n_1=40$, $n_2=50$, $z_{кр}=1,96$, $Q=0,05/2=0,025$ в формулу

$$w_{нижн.кр}(Q;\ n_1,\ n_2)=\left[\frac{(n_1+n_2+1)\,n_1-1}{2}-z_{кр}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right],$$

получим $w_{нижн.кр}=1578$.

Найдем верхнюю критическую точку: $w_{верхн.кр}=(n_1+n_2+1)\,n_1-w_{нижн.кр}=(40+50+1)\cdot 40-1578=2062$. Так как $w_{нижн.кр}<W_{набл}<w_{верхн.кр}$ $(1578<1800<2062)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности выборок.

632. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок объемов: $n_1=40$ и $n_2=60$ при конкурирующей гипотезе H_1: $F_1(x)\neq F_2(x)$, если известно, что в общем вариационном ряду, составленном из вариант обеих выборок, сумма порядковых номеров вариант первой выборки $W_{набл}=3020$.

633. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок объемов $n_1=25$ и $n_2=30$ при конкурирующей гипотезе H_1: $F_1(x)\neq F_2(x)$:

варианты первой выборки	12 14 15 18 21 25 26 27 30 31 32 35 38 41 43 46 48 52 56 57 60 65 68 73 75
варианты второй выборки	11 13 16 17 19 20 22 23 24 26 28 29 33 34 36 37 39 40 42 44 45 47 49 51 53 55 58 61 63 66

§ 16. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

А. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот. Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:

$$\begin{matrix} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_N. \end{matrix}$$

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

Правило 1. *Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:*

1. *Вычислить непосредственно (при малом числе наблюдений) или упрощенным методом (при большом числе наблюдений), например методом произведений или сумм, выборочную среднюю $\overline{x}_в$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$.*

2. *Вычислить теоретические частоты*

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_в} \cdot \varphi(u_i),$$

где n — объем выборки (сумма всех частот), h — шаг (разность между двумя соседними вариантами),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

3. *Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:*

а) *составляют расчетную таблицу (см. табл. 18), по которой находят наблюдаемое значение критерия*

$$\chi^2_{набл} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'};$$

б) *по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s — число групп выборки) находят критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ правосторонней критической области.*

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ — гипотезу отвергают. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

З а м е ч а н и е 1. Малочисленные частоты ($n_i < 5$) следует объединить; в этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы по формуле $k = s - 3$ следует в качестве s принять число групп выборки, оставшихся после объединения частот.

634. Почему при проверке с помощью критерия Пирсона гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности число степеней свободы находят по формуле $k=s-3$?

Решение. При использовании критерия Пирсона число степеней свободы $k=s-1-r$, где r — число параметров, оцениваемых по выборке. Нормальное распределение определяется двумя параметрами: математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Так как оба эти параметра оценивались по выборке (в качестве оценки a принимают выборочную среднюю, в качестве оценки σ — выборочное среднее квадратическое отклонение), то $r=2$ следовательно, $k=s-1-2=s-3$.

635. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n=200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Решение 1. Используя метод произведений, найдем выборочную среднюю $\bar{x}_в=12,63$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в=4,695$.

2. Вычислим теоретические частоты, учитывая, что $n=200$, $h=2$, $\sigma_в=4,695$, по формуле

$$n'_i=\frac{nh}{\sigma_в}\cdot\varphi(u_i)=\frac{200\cdot 2}{4,695}\cdot\varphi(u_i)=85,2\cdot\varphi(u_i).$$

Составим расчетную табл. 17 (значения функции $\varphi(u)$ помещены в приложении 1).

Таблица 17

i	x_i	$u_i=\frac{x_i-\bar{x}_в}{\sigma_в}$	$\varphi(u_i)$	$n'_i=85,2\cdot\varphi(u_i)$
1	5	−1,62	0,1074	9,1
2	7	−1,20	0,1942	16,5
3	9	−0,77	0,2966	25,3
4	11	−0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Сравним эмпирические и теоретические частоты.

а) Составим расчетную табл. 18, из которой найдем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{набл}=\sum(n_i-n'_i)^2/n'_i.$$

Таблица 18

i	n_i	n'_i	$n_i-n'_i$	$(n_i-n'_i)^2$	$(n_i-n'_i)^2/n'_i$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	—0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	—2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	—7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	—8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
Σ	200				$\chi^2_{\text{набл}}=22,2$

Из табл. 18 находим $\chi^2_{\text{набл}}=22,2$.

б) По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), по уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k=s-3=9-3=6$ находим критическую точку правосторонней критической области

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,05;\ 6)=12,6.$$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ — гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

636. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n=200$:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

637. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,01 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n'_i, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n'_i	6	18	36	76	39	18	7

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия Пирсона: $\chi^2_{\text{набл}}=\sum(n_i-n'_i)^2/n'_i$. Составим расчетную табл. 19.

Из табл. 19 находим наблюдаемое значение критерия: $\chi^2_{\text{набл}}=3,061$.

По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы $k=s-3=7-3=4$ находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 4)=13{,}3$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами незначимо (случайно).

Таблица 19

i	n_i	n'_i	$n_i-n'_i$	$(n_i-n'_i)^2$	$(n_i-n'_i)^2/n'_i$
1	8	6	2	4	0,667
2	16	18	—2	4	0,222
3	40	36	4	16	0,444
4	72	76	—4	16	0,211
5	36	39	—3	9	0,231
6	18	18	—	—	—
7	10	7	3	9	1,286
Σ	$n=200$				$\chi^2_{набл}=3{,}061$

638. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n'_i, которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

а)

n_i	5	10	20	8	7
n'_i	6	14	18	7	5

б)

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n'_i	5	9	14	16	18	16	9	6	7

в)

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n'_i	10	24	34	80	18	22	12

г)

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n'_i	6	6	14	15	22	15	8	8	6

Б. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот. Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов $(x_i,\ x_{i+1})$ и соответствующих им частот n_i (n_i — сумма частот, которые попали в i-й интервал):

$$\begin{array}{cccc} (x_1,\ x_2) & (x_2,\ x_3) & \ldots & (x_s,\ x_{s+1}) \\ n_1 & n_2 & & n_s \end{array}$$

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

Правило 2. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:*

1. *Вычислить, например методом произведений, выборочную среднюю $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$, причем в качестве вариант x_i^* принимают среднее арифметическое концов интервала:*

$$x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2.$$

2. *Пронормировать X, т. е. перейти к случайной величине $Z = (X - \bar{x}^*)/\sigma^*$, и вычислить концы интервалов: $z_i = (x_i - \bar{x}^*)/\sigma^*$, $z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x}^*/\sigma^*$, причем наименьшее значение Z, т. е. z_1, полагают равным $-\infty$, а наибольшее, т. е. z_{s+1}, полагают равным ∞.*

3. *Вычислить теоретические частоты*

$$n_i' = n \cdot P_i,$$

где n—объем выборки (сумма всех частот); $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ — вероятности попадания X в интервалы (x_i, x_{i+1}); $\Phi(Z)$—функция Лапласа.

4. *Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:*

а) *составляют расчетную таблицу* (см. табл. 18), *по которой находят наблюдаемое значение критерия Пирсона*

$$\chi^2_{набл} = \sum (n_i - n_i')^2/n_i';$$

б) *по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s—число интервалов выборки) находят критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$.*

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$—нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$—гипотезу отвергают.

Замечание 2. Интервалы, содержащие малочисленные эмпирические частоты ($n_i < 5$), следует объединить, а частоты этих интервалов сложить. Если производилось объединение интервалов, то при определении числа степеней свободы по формуле $k = s - 3$ следует в качестве s принять число интервалов, оставшихся после объединения интервалов.

639. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n = 100$, приведенным в табл. 20.

Решение 1. Вычислим выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение методом произведений. Для этого перейдем от заданного интервального распределения к распределению равноотстоящих вариант, приняв в качестве варианты x_i^* сред-

Таблица 20

Номер интервала i	Граница интервала x_i	x_{i+1}	Частота n_i	Номер интервала i	Граница интервала x_i	x_{i+1}	Частота n_i
1	3	8	6	5	23	28	16
2	8	13	8	6	28	33	8
3	13	18	15	7	33	38	7
4	18	23	40				$n=100$

нее арифметическое концов интервала: $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$. В итоге получим распределение:

x_i^*	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Выполнив выкладки по методу произведений, найдем выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение: $\overline{x}^* = 20,7$, $\sigma^* = 7,28$.

2. Найдем интервалы (z_i, z_{i+1}), учитывая, что $\overline{x}^* = 20,7$, $\sigma^* = 7,28$, $1/\sigma^* = 0,137$. Для этого составим расчетную табл. 21 (левый конец первого интервала примем равным $-\infty$, а правый конец последнего интервала ∞).

3. Найдем теоретические вероятности P_i и теоретические частоты $n_i' = n \cdot P_i = 100 \cdot P_i$. Для этого составим расчетную табл. 22.

Таблица 21

i	Границы интервала x_i	x_{i+1}	$x_i - \overline{x}^*$	$x_{i+1} - \overline{x}^*$	Границы интервала $z_i = \frac{x_i - \overline{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}^*}{\sigma^*}$
1	3	8	—	$-12,7$	$-\infty$	$-1,74$
2	8	13	$-12,7$	$-7,7$	$-1,74$	$-1,06$
3	13	18	$-7,7$	$-2,7$	$-1,06$	$-0,37$
4	18	23	$-2,7$	2,3	$-0,37$	0,32
5	23	28	2,3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7,3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12,3	—	1,69	∞

Таблица 22

i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$	$n_i'=100P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	—	—1,74	—0,5000	—0,4591	0,0409	4,09
2	—1,74	—1,06	—0,4591	—0,3554	0,1037	10,37
3	—1,06	—0,37	—0,3554	—0,1443	0,2111	21,11
4	—0,37	0,32	—0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69		0,4545	0,5000	0,0455	4,55
$\sum$					1	100

4. Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона:

а) вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную табл. 23. Столбцы 7 и 8 служат для контроля вычислений по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}}=\sum(n_i^2/n_i')-n.$$

Контроль: $\sum(n_i^2/n_i')-n=113{,}22-100=13{,}22=\chi^2_{\text{набл}}$. Вычисления произведены правильно;

б) по таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 5), по уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числу

Таблица 23

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n_i'	n_i-n_i'	$(n_i-n_i')^2$	$(n_i-n_i')^2/n_i'$	n_i^2	n_i^2/n_i'
1	6	4,09	1,91	3,6481	0,8920	36	8,8019
2	8	10,37	—2,37	5,6169	0,5416	64	6,1716
3	15	21,11	—6,11	37,3321	1,7684	225	10,6584
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833	1600	59,3052
5	16	21,58	—5,58	31,1364	1,4428	256	11,8628
6	8	11,32	—3,32	11,0224	0,9737	64	5,6537
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192	49	10,7692
$\sum$	100	100			$\chi^2_{\text{набл}}=13{,}22$		113,22

степеней свободы $k=s-3=7-3=4$ (s — число интервалов) находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4)=9{,}5$.

Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$—отвергаем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X; другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо. Это означает, что данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

640. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением.

а)

Номер интервала i	Граница интервала		Частота n_i	Номер интервала i	Граница интервала		Частота n_i
	x_i	x_{i+1}			x_i	x_{i+1}	
1	—20	—10	20	5	20	30	40
2	—10	0	47	6	30	40	16
3	0	10	80	7	40	50	8
4	10	20	89				
							$n=300$

б)

Номер интервала i	Границы интервала		Частота n_i	Номер интервала i	Границы интервала		Частота n_i
	x_i	x_{i+1}			x_i	x_{i+1}	
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				
							$n=100$

в)

Номер интервала i	Границы интервала		Частота n_i	Номер интервала i	Границы интервала		Частота n_i
	x_i	x_{i+1}			x_i	x_{i+1}	
1	6	16	8	6	56	66	8
2	16	26	7	7	66	76	6
3	26	36	16	8	76	86	5
4	36	46	35				
5	46	56	15				$n=100$

г)

Номер интервала i	Границы интервала		Частота n_i	Номер интервала i	Границы интервала		Частота n_i
	x_i	x_{i+1}			x_i	x_{i+1}	
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	25	30	23				$n=120$

б) Указание. Объединить малочисленные частоты первых двух и последних двух интервалов, а также сами интервалы.

§ 17. Графическая проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Метод спрямленных диаграмм

А. Сгруппированные данные. Пусть эмпирическое распределение выборки из генеральной совокупности X задано в виде последовательности интервалов (x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{k-1}, x_k) и соответствующих им частот n_i (n_i — число вариант, попавших в i-й интервал). Требуется графически проверить гипотезу о нормальном распределении X.

Предварительно введем определение p-квантили случайной величины X. Если задана вероятность p, то *p-квантилью* (*квантилем*) X называют такое значение аргумента u_p функции распределения $F(x)$, для которого вероятность события $X < u_p$ равна заданному значению p. Например, если величина X распределена нормально и $p=0{,}975$, то $u_p = u_{0,975} = 1{,}96$. Это означает, что $P(X < 1{,}96) = 0{,}975$.

Заметим, что поскольку функции распределения общего и нормированного нормальных распределений связаны равенством $F(x)=F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, то $F(x_p)=F_0\left(\frac{x_p-a}{\sigma}\right)$ и, следовательно, $u_p=(x_p-a)/\sigma$.

Правило 1. *Для того чтобы графически проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X по эмпирическому распределению, заданному в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот, надо:*

1. *Составить расчетную табл. 24. Квантили находят по таблице* (см. приложение 10).

Таблица 24

1	2	3	4	5	6	7
Номер интервала	Правый конец интервала	Частота	Накопленная частота	Относительная накопленная частота	Относительная накопленная частота, %	Квантили
i	x_i	n_i	$\sum\limits_{r=1}^{i} n_r$	$P_i=\frac{\sum n_r}{n}$	$P_i\cdot 100\%$	u_{P_i}

В столбце 6 табл. 24 относительные накопленные частоты умножены на 100, так как в таблице приложения 10 эти частоты указаны в процентах.

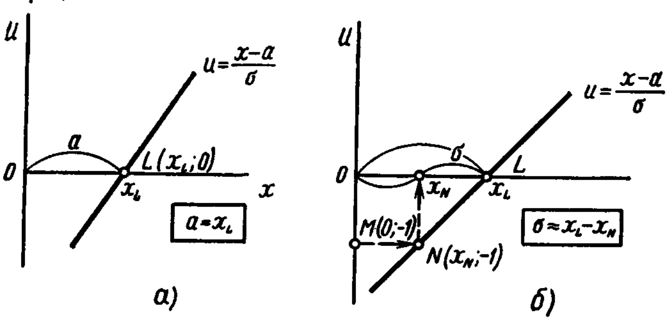

Рис. 16

2. *Построить в прямоугольной системе координат (x; u) точки (x_1; u_1), (x_2; u_2), ... (значок p при квантилях опущен для простоты записи). Если эти точки лежат вблизи некоторой прямой, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении X; если же построенные точки удалены от прямой, то гипотезу отвергают.*

Замечание 1. Следует иметь в виду, что «начальные» и «конечные» точки (x_i; u_i) могут заметно отклоняться от прямой $u=(x-a)/\sigma$.

Замечание 2. Если построенные точки оказались вблизи прямой, то легко графически оценить параметры a и σ нормального распределения. В качестве оценки математического ожидания a можно принять абсциссу точки $L(x_L;\ 0)$ пересечения построенной прямой с осью Ox. В качестве оценки среднего квадратического отклонения σ можно принять разность абсцисс точки $L(x_L;\ 0)$ и точки $N(x_N;\ -1)$ пересечения построенной линии с прямой $u=-1$: $\sigma^*=x_L-x_N$ (рис. 16).

Замечание 3. При наличии вероятностной бумаги надобность в отыскании квантилей отпадает: на соответствующей оси откладывают накопленные относительные частоты.

641. Пусть метод спрямленных диаграмм подтверждает гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X, т. е. точки $(x_i;\ u_i)$ оказались вблизи прямой

$$u=(x-a)/\sigma. \qquad (*)$$

а) Почему в качестве оценки математического ожидания a нормального распределения можно принять абсциссу x_L точки L пересечения прямой (*) с осью Ox (рис. 16, *а*)?

б) Почему в качестве оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения можно принять разность абсцисс x_L-x_N (рис. 16, *б*)?

Решение. а) В точке L пересечения прямой (*) с осью Ox ордината $u=0$, абсцисса $x=x_L$ (рис. 16, *а*). Положив в уравнении (*) $u=0$, $x=x_L$, получим

$$0=(x_L-a)/\sigma.$$

Отсюда $a=x_L$.

б) Обозначим через N такую точку прямой (*), ордината которой $u=-1$; абсциссу этой точки обозначим через x_N. Подставим координаты точки N в уравнение (*):

$$-1=(x_N-a)/\sigma.$$

Отсюда $\sigma=a-x_N$. Учитывая, что $a=x_L$, окончательно получим

$$\sigma=x_L-x_N.$$

642. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n=100$, которая задана в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот n_i (n_i—число вариант, попавших в i-й интервал). Эмпирическое распределение приведено в табл. 25.

Таблица 25

Номер интервала i	Границы интервала x_{i-1}	x_i	Частота n_i	Номер интервала i	Границы интервала x_{i-1}	x_i	Частота n_i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				
							$n=100$

Требуется: а) методом спрямленных диаграмм проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X; б) оценить графически математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X.

Решение. а) 1. Составим расчетную табл. 26. Квантили для столбца 7 взяты из таблицы приложения 10.

Таблица 26

Номер интервала i	Правый конец интервала x_i	Частота n_i	Накопленная частота $\sum_{r=1}^{i} n_r$	Относительная накопленная частота $P_i=\frac{\sum n_r}{n}$	Относительная накопленная частота, % $P_i \cdot 100$	Квантили u_{P_i}
1	3	2	2	0,02	2	—2,054
2	5	4	6	0,06	6	—1,555
3	7	6	12	0,12	12	—1,175
4	9	10	22	0,22	22	—0,772
5	11	18	40	0,40	40	—0,253
6	13	20	60	0,60	60	0,253
7	15	16	76	0,76	76	0,706
8	17	11	87	0,87	87	1,126
9	19	7	94	0,94	94	1,555
10	21	5	99	0,99	99	2,326
11	23	1	100	1,00	100	3,09

2. Построим в прямоугольной системе координат точки $(x_i;\ u_{P_i})$ (рис. 17). Построенные точки лежат вблизи прямой, поэтому нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении X. Другими словами, данные выборки согласуются с этой гипотезой.

б) Найдем графически оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения предполагаемого нормального распределения.

В качестве оценки математического ожидания a примем абсциссу $x_L = 12{,}1$ точки L пересечения построенной прямой с осью Ox.

Оценим σ, для чего проведем через точку $M(0; -1)$ вертикальной оси прямую $u = -1$ до пересечения с построенной прямой в точке N; опустим из точки N перпендикуляр на ось Ox; абсцисса

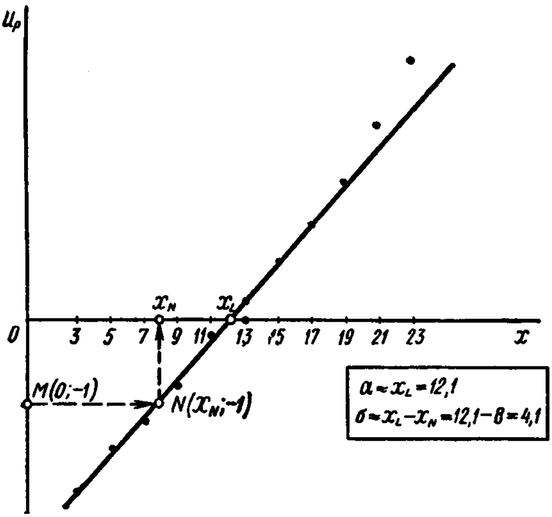

Рис. 17

основания этого перпендикуляра $x_N = 8$. В качестве оценки среднего квадратического отклонения примем разность абсцисс:

$$\sigma^* = x_L - x_N = 12{,}1 - 8 = 4{,}1.$$

Разумеется, полученные оценки грубые. В действительности $a = 12{,}04$; $\sigma = 4{,}261$.

643. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 120$, которая задана в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот (табл. 27).

Требуется: а) методом спрямленных диаграмм проверить гипотезу о нормальном распределении X; б) оценить графически математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X.

644. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$, заданная табл. 28.

Таблица 27

Номер интервала i	Граница интервала		Частота n_i	Номер интервала i	Граница интервала		Частота n_i
	x_{i-1}	x_i			x_{i-1}	x_i	
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	30	35	23				
							$n=120$

Таблица 28

Номер интервала i	Граница интервала		Частота n_i	Номер интервала i	Граница интервала		Частота n_i
	x_{i-1}	x_i			x_{i-1}	x_i	
1	6	16	8	5	46	56	35
2	16	26	16	6	56	66	6
3	26	36	7	7	66	76	5
4	36	46	15	8	76	86	8
							$n=100$

Требуется методом спрямленных диаграмм проверить гипотезу о нормальном распределении X.

Б. Несгруппированные по интервалам данные. Пусть эмпирическое распределение выборки задано в виде последовательности вариант x_i, расположенных в возрастающем порядке, т. е. в виде вариационного ряда, и соответствующих им частот n_i. Требуется графически проверить гипотезу о нормальном распределении X.

Правило 2. *Для того чтобы по несгруппированной по интервалам выборке объема n проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X, из которой извлечена выборка, надо:*

1. *Составить расчетную табл. 29. Сразу укажем, что при заполнении столбца 4 принято из суммы частот вычитать 1/2; значения квантилей для заполнения столбца 7 находят по таблице (см. приложение 10).*

2. *Построить в прямоугольной системе координат точки $(x_1;\ u_1)$, $(x_2;\ u_2)$, ..., $(x_k;\ u_k)$ (значок p при u опущен для простоты записи). Если эти точки лежат вблизи некоторой прямой (в случае справедливости гипотезы о нормальном распределении X уравнение этой прямой $u=(x-\bar{x})/\sigma_в$), то нет оснований отвергнуть гипотезу о нор-*

1	2	3	4	5	6	7
Номер варианты i	Варианта x_i	Частота n_i	Накопленная частота $N_i=\sum_{r=1}^{i} n_r-\frac{1}{2}$	Относительная накопленная частота $F^*(x_i)=\frac{N_i}{n}$	Относительная накопленная частота, % $P_i=F^*(x_i)\times\times 100$	Квантили u_{P_i}

мальном распределении генеральной совокупности X; в противном случае гипотезу отвергают.

Замечание 4. Замечания 1—3, приведенные выше для сгруппированной по интервалам выборки, остаются в силе.

645. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n=50$, несгруппированная по интервалам (в первой строке указаны варианты, а во второй — соответствующие частоты):

x_i	1,40	1,52	1,63	1,69	1,73	1,78	1,89	1,92	1,95
n_i	1	1	1	1	2	1	1	1	1

x_i	1,98	1,99	2,03	2,07	2,12	2,16	2,20	2,23	2,26	2,31
n_i	1	1	2	1	3	2	1	1	1	3

x_i	2,36	2,40	2,44	2,47	2,50	2,52	2,55	2,60	2,64
n_i	3	3	1	1	1	1	1	1	3

x_i	2,71	2,74	2,78	2,86	2,93	3,02	3,30
n_i	1	1	2	1	2	1	1

Требуется: а) методом спрямленных диаграмм проверить гипотезу о нормальном распределении X; б) оценить графически математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X.

Решение. 1. Составим расчетную табл. 30.

2. Построим в прямоугольной системе координат точки (x_i, u_i) (рис. 18). Построенные точки лежат вблизи прямой, поэтому нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении X; данные выборки согласуются с этой гипотезой.

б) Найдем графически, используя рис. 18, оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения предполагаемого нормального распределения.

В качестве оценки математического ожидания a примем абсциссу $x_L=2,30$ точки L пересечения построенной прямой с осью Ox.

Таблица 30

1	2	3	4	5	6	7
Номер варианта i	Варианта x_i	Частота n_i	Накопленная частота минус $\frac{1}{2}$ $N_i=\sum_{r=1}^{i} n_r-\frac{1}{2}$	Относительная накопленная частота $F^*(x_i)=\frac{N_i}{n}$	Относительная накопленная частота, % $P_i=F^*(x_i)\times$ $\times 100$	Квантили u_{p_i}
1	1,40	1	0,5	0,01	1	—2,326
2	1,52	1	1,5	0,03	3	—1,881
3	1,63	1	2,5	0,05	5	—1,645
4	1,69	1	3,5	0,07	7	—1,476
5—6	1,73	2	5,5	0,11	11	—1,227
7	1,78	1	6,5	0,13	13	—1,126
8	1,89	1	7,5	0,15	15	—1,036
9	1,92	1	8,5	0,17	17	—0,954
10	1,95	1	9,5	0,19	19	—0,878
11	1,98	1	10,5	0,21	21	—0,806
12	1,99	1	11,5	0,23	23	—0,739
13—14	2,03	2	13,5	0,27	27	—0,613
15	2,07	1	14,5	0,29	29	—0,553
16—18	2,12	3	17,5	0,35	35	—0,385
19—20	2,16	2	19,5	0,39	39	—0,279
21	2,20	1	20,5	0,41	41	—0,228
22	2,23	1	21,5	0,43	43	—0,176
23	2,26	1	22,5	0,45	45	—0,126
24—26	2,31	3	25,5	0,51	51	0,025
27—29	2,36	3	28,5	0,57	57	0,176
30—32	2,40	3	31,5	0,63	63	0,332
33	2,44	1	32,5	0,65	65	0,385
34	2,47	1	33,5	0,67	67	0,440
35	2,50	1	34,5	0,69	69	0,496
36	2,52	1	35,5	0,71	71	0,553
37	2,55	1	36,5	0,73	73	0,613
38	2,60	1	37,5	0,75	75	0,674
39—41	2,64	3	40,5	0,81	81	0,878
42	2,71	1	41,5	0,83	83	0,954
43	2,74	1	42,5	0,85	85	1,036
44—45	2,78	2	44,5	0,89	89	1,227
46	2,86	1	45,5	0,91	91	1,341
47—48	2,93	2	47,5	0,95	95	1,645
49	3,02	1	48,5	0,97	97	1,881
50	3,30	1	49,5	0,99	99	2,326

Оценим σ, для чего проведем через точку M (0; —1) вертикальной оси прямую $u=-1$ до пересечения с построенной прямой линией в точке N; опустим из точки N перпендикуляр на ось Ox; абсцисса основания этого перпендикуляра $x_N=1,90$. В качестве оценки среднего квадратического отклонения σ примем разность абсцисс:

$$\sigma = x_L - x_N = 2{,}30 - 1{,}90 = 0{,}40.$$

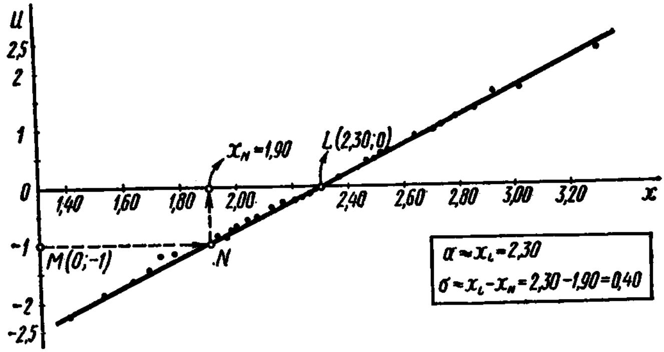

Рис. 18

646. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 50$. Составлены следующие таблицы (в первой строке указаны варианты, а во второй — соответствующие частоты):

x_i	—20,0	—17,0	—14,1	—11,5	—10,5
n_i	1	1	1	1	1

x_i	—9,0	—8,0	—6,5	—5,5
n_i	1	1	1	1;

x_i	—4,0	—3,0	—1,5	—1,0	0,0	0,5
n_i	1	1	1	1	1	2;

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,5	4,0	4,5
n_i	1	1	2	1	1	2	1;

x_i	5,0	6,0	6,5	7,0	7,5	8,5	9,5	10,0	10,5	11,0	12,0	12,5
n_i	2	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1

x_i	13,0	14,0	14,5	17,0	18,0	19,0	19,5	21,0	23,5
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Требуется: а) методом спрямленных диаграмм проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X; б) оценить графически математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X.

Указание. Использовать таблицу квантилей (см. приложение 10).

§ 18. Проверка гипотезы о показательном распределении генеральной совокупности

Задано эмпирическое распределение непрерывной случайной величины X в виде последовательности интервалов $x_i - x_{i+1}$ и соответствующих им частот n_i, причем $\sum n_i = n$ (объем выборки). Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что случайная величина X имеет показательное распределение.

Правило. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о том, что непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, надо:*

1. *Найти по заданному эмпирическому распределению выборочную среднюю $\overline{x}_в$. Для этого, приняв в качестве «представителя» i-го интервала его середину $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$, составляют последовательность равноотстоящих вариант и соответствующих им частот.*

2. *Принять в качестве оценки параметра λ показательного распределения величину, обратную выборочной средней:*

$$\lambda^* = 1/\overline{x}_в.$$

3. *Найти вероятности попадания X в частичные интервалы (x_i, x_{i+1}) по формуле*

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}.$$

4. *Вычислить теоретические частоты:*

$$n_i' = n_i \cdot P_i,$$

где $n = \sum n_i$ — объем выборки.

5. *Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k = s - 2$, где s — число первоначальных интервалов выборки; если же было произведено объединение малочисленных частот, следовательно, и самих интервалов, то s — число интервалов, оставшихся после объединения.*

647. Почему при проверке по критерию Пирсона гипотезы о показательном распределении генеральной совокупности число степеней свободы определяется равенством $k = s - 2$, где s — число интервалов выборки?

Решение. При использовании критерия Пирсона число степеней свободы $k = s - 1 - r$, где r — число параметров, оцениваемых по выборке. Показательное распределение определяется одним параметром λ. Так как этот параметр оценивается по выборке, то $r = 1$ и, следовательно, число степеней свободы $k = s - 1 - 1 = s - 2$.

648. В результате испытания 200 элементов на длительность работы получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 31 (в первом столбце указаны интервалы времени в часах, во втором столбце — частоты, т. е. количество элементов, проработавших время в пределах соответствующего интервала).

Таблица 31

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—5	133	15—20	4
5—10	45	20—25	2
10—15	15	25—30	1

Требуется, при уровне значимости 0,05, проверить гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону.

Решение 1. Найдем среднее время работы всех элементов (в качестве среднего времени работы одного элемента примем середину интервала, которому принадлежит элемент):

$$\bar{x}_в = (133 \cdot 2{,}5 + 45 \cdot 7{,}5 + 15 \cdot 12{,}5 + 4 \cdot 17{,}5 + 2 \cdot 22{,}5 + 1 \cdot 27{,}5)/200 = \\ = 1000/200 = 5.$$

2. Найдем оценку параметра предполагаемого показательного распределения:

$$\lambda = 1/\bar{x}_в = 1/5 = 0{,}2.$$

Таким образом, дифференциальная функция предполагаемого показательного распределения имеет вид

$$f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x} \qquad (x > 0).$$

3. Найдем вероятности попадания X в каждый из интервалов по формуле

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}.$$

Например, для первого интервала

$$P_1 = P(0 < X < 5) = e^{-0{,}2 \cdot 0} - e^{-0{,}2 \cdot 5} = 1 - e^{-1} = \\ = 1 - 0{,}3679 = 0{,}6321.$$

Аналогично вычислим вероятности попадания X в остальные интервалы: $P_2 = 0{,}2326$; $P_3 = 0{,}0855$; $P_4 = 0{,}0315$; $P_5 = 0{,}0116$;

$$P_6 = 0{,}0042.$$

4. Найдем теоретические частоты:

$$n'_i = n \cdot P_i = 200 \cdot P_i,$$

где P_i — вероятность попадания X в i-й интервал.

Например, для первого интервала

$$n'_1 = 200 \cdot P_1 = 200 \cdot 0{,}6321 = 126{,}42.$$

Аналогично вычислим остальные теоретические частоты:

$$n'_2 = 46{,}52;\ n'_3 = 17{,}10;\ n'_4 = 6{,}30;\ n'_5 = 2{,}32;\ n'_6 = 0{,}84.$$

5. Сравним эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу 32, при-

чем объединим малочисленные частоты $(4+2+1=7)$ и соответствующие им теоретические частоты $(6,30+2,32+0,84=9,46)$.

Таблица 32

i	n_i	n'_i	$n_i-n'_i$	$(n_i-n'_i)^2$	$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$
1	133	126,42	6,58	43,2964	0,3425
2	45	46,52	−1,52	2,3104	0,0497
3	15	17,10	−2,10	4,4100	0,2579
4	7	9,46	−2,46	6,0516	0,6397
Σ	$n=200$				$\chi^2_{\text{набл}}=1,29$

Замечание. Для упрощения вычислений в случае объединения малочисленных частот целесообразно объединить и сами интервалы, которым принадлежат малочисленные частоты, в один интервал. Так, в рассматриваемой задаче, объединив последние три интервала, получим один интервал (15, 30). В этом случае теоретическая частота

$$n'_4=n\cdot P\,(15<X<30)=200\cdot 0,0473=9,46$$

совпадает с суммой теоретических частот (9,46), приведенной в табл. 32.

Из табл. 32 находим: $\chi^2_{\text{набл}}=1,29$. По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), по уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k=s-2=4-2=2$ находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{\text{кр}}\,(0,05;\ 2)=6,0$.

Так как $\chi^2_{\text{набл}}<\chi^2_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по показательному закону. Другими словами, данные наблюдений согласуются с этой гипотезой.

649. В итоге испытания 450 ламп было получено эмпирическое распределение длительности их горения, приведенное в табл. 33 (в первом столбце указаны интер-

Таблица 33

x_i-x_{i+1}	n_i	x_i-x_{i+1}	n_i
0—400	121	1600—2000	45
400—800	95	2000—2400	36
800—1200	76	2400—2800	21
1200—1600	56		
			$n=450$

валы в часах, во втором столбце — частота n_i, т. е. количество ламп, время горения которых заключено в пределах соответствующего интервала).

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что время горения ламп распределено по показательному закону.

650. В итоге испытаний 1000 элементов на время безотказной работы получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 34 (в первом столбце указаны интервалы времени в часах; во втором столбце — частота n_i, т. е. количество отказавших элементов в i-м интервале).

Таблица 34

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—10	365	40—50	70
10—20	245	50—60	45
20—30	150	60—70	25
30—40	100		
			$n=1000$

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что время безотказной работы элементов распределено по показательному закону.

651. В итоге регистрации времени прихода 800 посетителей выставки (в качестве начала отсчета времени принят момент открытия работы выставки) получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 35 (в первом столбце указаны интервалы времени; во втором столбце — частоты n_i, т. е. количество посетителей, пришедших в течение соответствующего интервала).

Таблица 35

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—1	259	4—5	70
1—2	167	5—6	47
2—3	109	6—7	40
3—4	74	7—8	34
			800

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что время прихода посетителей выставки распределено по показательному закону.

§ 19. Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по биномиальному закону

Произведено n опытов. Каждый опыт состоит из N независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же. Регистрируется число появлений события A в каждом опыте. В итоге получено следующее распределение дискретной случайной величины X — числа появлений события A (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте; во второй строке — частота n_i, т. е. число опытов, в которых зарегистрировано x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	...	N
n_i	0	1	2	...	n_N

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о распределении дискретной случайной величины X по биномиальному закону.

Правило. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о том, что дискретная случайная величина X (число появлений события A) распределена по биномиальному закону, надо:*

1. *Найти по формуле Бернулли вероятности P_i появления ровно i событий A в N испытаниях ($i=0, 1, 2, \ldots, s$, где s — максимальное число наблюдавшихся появлений события A в одном опыте, т. е. $s \leqslant N$).*

2. *Найти теоретические частоты*

$$n'_i = n \cdot P_i,$$

где n — число опытов.

3. *Сравнить эмпирические и теоретические частоты по критерию Пирсона, приняв число степеней свободы $k=s-1$ (при этом предполагается, что вероятность p появления события A задана, т. е. не оценивалось по выборке и не производилось объединение малочисленных частот).*

Если же вероятность p была оценена по выборке, то $k=s-2$. Если, кроме того, было произведено объединение малочисленных частот, то s — число групп выборки, оставшихся после объединения частот.

652. Произведено $n=100$ опытов. Каждый опыт состоял из $N=10$ испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A равна 0,3. В итоге получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте; во второй строке — частота n_i, т. е. число опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	10	27	32	23	6

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что дискретная случайная величина X (число появлений события A) распределена по биномиальному закону.

Решение. 1. По формуле Бернулли

$$P_i = P_N(i) = C_N^i p^i q^{N-i}$$

найдем вероятность P_i ($i=0$, 1, 2, 3, 4, 5) того, что событие A появится в $N=10$ испытаниях ровно i раз.

Учитывая, что $p=0{,}3$, $q=1-0{,}3=0{,}7$, получим:

$$P_0 = P_{10}(0) = 0{,}7^{10} = 0{,}0282;\ P_1 = P_{10}(1) = 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 = 0{,}1211.$$

Аналогично вычислим: $P_2 = 0{,}2335$; $P_3 = 0{,}2668$; $P_4 = 0{,}2001$; $P_5 = 0{,}1029$.

2. Найдем теоретические частоты $n_i' = n \cdot P_i$. Учитывая, что $n=100$, получим: $n_0' = 2{,}82$; $n_1' = 12{,}11$; $n_2' = 23{,}35$; $n_3' = 26{,}68$;

$$n_4' = 20{,}01;\ n_5' = 10{,}29.$$

3. Сравним эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого составим расчетную табл. 36. Поскольку частота $n_0=2$ малочисленная (меньше пяти), объединим ее с частотой $n_1=10$ и в таблицу запишем $2+10=12$; в качестве теоретической частоты, соответствующей объединенной частоте 12, запишем сумму соответствующих теоретических частот: $n_0' + n_1' = 2{,}82 + 12{,}11 = 14{,}93$.

Таблица 36

i	n_i	n'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
1	12	14,93	−2,93	8,5849	0,5750
2	27	23,35	3,65	13,3225	0,5706
3	32	26,68	5,32	28,3024	1,0608
4	23	20,01	2,99	8,9401	0,4468
5	6	10,29	−4,29	18,4041	1,7886
Σ	$n=100$				$\chi^2_{\text{набл}} = 4{,}44$

Из табл. 36 находим $\chi^2_{\text{набл}} = 4{,}44$.

По таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числу степеней свободы $k=5-1=4$ находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$.

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о биномиальном распределении X.

653. Опыт, состоящий в одновременном подбрасывании четырех монет, повторили 100 раз. Эмпирическое распределение дискретной случайной величины X — числа появившихся «гербов» — оказалось следующим (в первой строке указано число x_i выпавших «гербов» в одном бросании монет; во второй строке — частота n_i, т. е. число бросаний, при которых выпало x_i «гербов»):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	8	20	42	22	8

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по биномиальному закону.

Указание. Принять вероятность выпадения «герба» $p=0,5$.

654. Отдел технического контроля проверил $n=100$ партий изделий по $N=10$ изделий в каждой партии и получил следующее эмпирическое распределение дискретной случайной величины X — числа нестандартных изделий (в первой строке указано число x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке — частота n_i, т. е. количество партий, содержащих x_i нестандартных изделий):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по биномиальному закону.

Указания. 1. Найти сначала относительную частоту появления нестандартных изделий и принять ее в качестве оценки p^* вероятности того, что наудачу взятое изделие окажется нестандартным.

2. При составлении расчетной таблицы для сравнения эмпирических и теоретических частот с помощью критерия Пирсона следует объединить эмпирические частоты $(2+3=5)$ и соответствующие им теоретические частоты $(0,60+4,03=4,63)$; учесть, что после объединения частот число групп выборки $s=7$.

3. Один параметр (вероятность p) оценивался по выборке, поэтому при определении числа степеней свободы надо вычесть из s не единицу, а два: $s-2=7-2=5$.

655. В библиотеке случайно отобрано 200 выборок по 5 книг. Регистрировалось число поврежденных книг (подчеркивания, помарки и т. д.). В итоге получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано число x_i поврежденных книг в одной выборке;

во второй строке — частота n_i, т. е. количество выборок, содержащих x_i поврежденных книг):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	72	77	34	14	2	1

Требуется, используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что дискретная случайная величина X (число поврежденных книг) распределена по биномиальному закону.

Указание. Принять во внимание указания к задаче **654**.

§ 20. Проверка гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности

Задано эмпирическое распределение непрерывной случайной величины X в виде последовательности интервалов $x_{i-1}—x_i$ и соответствующих им частот n_i, причем $\sum n_i = n$ (объем выборки). Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена равномерно.

Правило. *Для того чтобы проверить гипотезу о равномерном распределении X, т. е. по закону*

$$f(x)=\begin{cases} 1/(b-a) & \text{в интервале } (a,\ b), \\ 0 & \text{вне интервала } (a,\ b), \end{cases}$$

надо:

1. *Оценить параметры a и b — концы интервала, в котором наблюдались возможные значения X, по формулам (через a^* и b^* обозначены оценки параметров):*

$$a^* = \bar{x}_в - \sqrt{3}\,\sigma_в,\quad b^* = \bar{x}_в + \sqrt{3}\,\sigma_в.$$

2. *Найти плотность вероятности предполагаемого распределения*

$$f(x) = 1/(b^* - a^*).$$

3. *Найти теоретические частоты:*

$$n'_1 = nP_1 = n\,[f(x)\cdot(x_1 - a^*)] = n\cdot\frac{1}{b^*-a^*}(x_1 - a^*);$$

$$n'_2 = n'_3 = \ldots = n'_{s-1} = n\cdot\frac{1}{b^*-a^*}(x_i - x_{i-1}),\ (i=2,\ 3,\ \ldots,\ s-1);$$

$$n'_s = n\cdot\frac{1}{b^*-a^*}(b^* - x_{s-1}).$$

4. *Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k = s-3$, где s — число интервалов, на которые разбита выборка.*

656. Почему параметры a и b равномерно распределенной случайной величины X оцениваются по формулам

$$a^* = \bar{x}_в - \sqrt{3}\,\sigma_в,\quad b^* = \bar{x}_в + \sqrt{3}\,\sigma_в?$$

Решение. Известно, что в качестве оценок математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины X можно принять соответственно выборочную среднюю $\bar{x}_в$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$.

Известно также (см. гл. VI, задачи **313, 315**), что для равномерного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно равны:

$$M(X)=(a+b)/2, \qquad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{(b-a)^2/12}=(b-a)/2\sqrt{3}.$$

Поэтому для оценки параметров равномерного распределения получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} (b^*-a^*)/2=\bar{x}_в, \\ (b^*-a^*)/2\sqrt{3}=\sigma_в, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b^*+a^*=2\bar{x}_в, \\ b^*-a^*=2\sqrt{3}\,\sigma_в. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $a^*=\bar{x}_в-\sqrt{3}\,\sigma_в$, $b^*=\bar{x}_в+\sqrt{3}\,\sigma_в$.

657. Почему при проверке с помощью критерия Пирсона гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности X число степеней свободы определяется из равенства $k=s-3$, где s — число интервалов выборки?

Решение. При использовании критерия Пирсона число степеней свободы $k=s-1-r$, где r — число параметров, оцениваемых по выборке. Равномерное распределение определяется двумя параметрами a и b. Так как эти два параметра оцениваются по выборке, то $r=2$ и, следовательно, число степеней свободы $k=s-1-2=s-3$.

658. Произведено $n=200$ испытаний, в результате каждого из которых событие A появлялось в различные моменты времени. В итоге было получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 37 (в первом столбце указаны интервалы времени в минутах, во втором столбце — соответствующие частоты, т. е. число появлений события A в интервале). Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что время появления событий распределено равномерно.

Таблица 37

Интервал $x_{i-1}-x_i$	Частота n_i	Интервал $x_{i-1}-x_i$	Частота n_i
2—4	21	12—14	14
4—6	16	14—16	21
6—8	15	16—18	22
8—10	26	18—20	18
10—12	22	20—22	25

Решение. 1. Найдем оценки параметров a и b равномерного распределения по формулам:

$$a^* = \bar{x}_в - \sqrt{3}\, \sigma_в, \quad b^* = \bar{x}_в + \sqrt{3}\, \sigma_в.$$

Для вычисления выборочной средней $\bar{x}_в$ и выборочного среднего квадратического отклонения $\sigma_в$ примем середины x_i^* интервалов в качестве вариант (наблюдаемых значений X). В итоге получим эмпирическое распределение равноотстоящих вариант:

x_i^*	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Пользуясь, например, методом произведений, найдем: $\bar{x}_в = 12{,}31$, $\sigma_в = 5{,}81$. Следовательно,
$a^* = 12{,}31 - 1{,}73 \cdot 5{,}81 = 2{,}26$, $b^* = 12{,}31 + 1{,}73 \cdot 5{,}81 = 22{,}36$.

2. Найдем плотность предполагаемого равномерного распределения:

$$f(x) = 1/(b^* - a^*) = 1/(22{,}36 - 2{,}26) = 0{,}05.$$

3. Найдем теоретические частоты:

$$n_1' = n \cdot f(x) \cdot (x_1 - a^*) = 200 \cdot 0{,}05 \cdot (4 - 2{,}26) = 17{,}4;$$

$$n_2' = 200 \cdot 0{,}05 \cdot (x_2 - x_1) = 10 \cdot (6 - 4) = 20.$$

Длины третьего — девятого интервалов равны длине второго интервала, поэтому теоретические частоты, соответствующие этим интервалам и теоретическая частота второго интервала одинаковы, т. е.

$$n_3' = n_4' = n_5' = n_6' = n_7' = n_8' = n_9' = 20;$$

$$n_{10}' = 200 \cdot 0{,}05 \cdot (b^* - x_9) = 10 \cdot (22{,}36 - 20) = 23{,}6.$$

4. Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона, приняв число степеней свободы $k = s - 3 = 10 - 3 = 7$. Для этого составим расчетную табл. 38.

Таблица 38

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2/n_i'$
1	21	17,3	3,7	13,69	0,79
2	16	20	−4	16	0,80
3	15	20	−5	25	1,25
4	26	20	6	36	1,80
5	22	20	2	4	0,20
6	14	20	−6	36	1,80
7	21	20	1	1	0,05
8	22	20	2	4	0,20
9	18	20	−2	4	0,20
10	25	23,6	1,4	1,96	0,08
					$\chi^2_{набл} = 7{,}17$

Из расчетной таблицы получаем $\chi^2_{набл}=7,17$.

Найдем по таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5) по уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k=s-3=10-3=7$ критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0,05;\ 7)=14,1$.

Так как $\chi^2_{набл}<\chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о равномерном распределении X. Другими словами, данные наблюдений согласуются с этой гипотезой.

659. В результате взвешивания 800 стальных шариков получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 39 (в первом столбце указан интервал веса в граммах, во втором столбце — частота, т. е. количество шариков, вес которых принадлежит этому интервалу).

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что вес шариков X распределен равномерно.

Таблица 39

$x_{i-1}-x_i$	n_i	$x_{i-1}-x_i$	n_i
20,0—20,5	91	23,0—23,5	79
20,5—21,0	76	23,5—24,0	73
21,0—21,5	75	24,0—24,5	80
21,5—22,0	74	24,5—25,0	77
22,0—22,5	92		
22,5—23,0	83		$n=800$

660. В некоторой местности в течение 300 сут регистрировалась среднесуточная температура воздуха. В итоге наблюдений было получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 40 (в первом столбце указан интервал температуры в градусах, во втором столбце — частота n_i, т. е. количество дней, среднесуточная температура которых принадлежит этому интервалу).

Таблица 40

$x^0_{i-1}-x^0_i$	n_i	$x^0_{i-1}-x^0_i$	n_i
—40—(—30)	25	0—10	40
—30—(—20)	40	10—20	46
—20—(—10)	30	20—30	48
—10—0	45	30—40	26

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что среднесуточная температура воздуха распределена равномерно.

661. В течение 10 ч регистрировали прибытие автомашин к бензоколонке и получили эмпирическое распределение, приведенное в табл. 41 (в первом столбце указан интервал времени в часах, во втором столбце — частота, т. е. количество машин, прибывших в этом интервале). Всего было зарегистрировано 200 машин.

Таблица 41

$x_{i-1}-x_i$	n_i	$x_{i-1}-x_i$	n_i
8—9	12	13—14	6
9—10	40	14—15	11
10—11	22	15—16	33
11—12	16	16—17	18
12—13	28	17—18	14

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что время прибытия машин распределено равномерно.

§ 21. Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона

Задано эмпирическое распределение дискретной случайной величины X. Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

Правило. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона, надо:*

1. *Найти по заданному эмпирическому распределению выборочную среднюю $\overline{x}_в$.*

2. *Принять в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю $\lambda = \overline{x}_в$.*

3. *Найти по формуле Пуассона (или по готовым таблицам) вероятности P_i появления ровно i событий в n испытаниях* ($i = 0, 1, 2, \ldots, r$, где r — максимальное число наблюдавшихся событий; n — объем выборки).

4. *Найти теоретические частоты по формуле $n'_i = n \cdot P_i$.*

5. *Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k = s-2$, где s — число различных групп выборки (если производилось объединение малочисленных частот в одну группу, то s — число оставшихся групп выборки после объединения частот).*

662. Отдел технического контроля проверил $n = 200$ партий одинаковых изделий и получил следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке — частота n_i, т. е. количество партий, содержащих x_i нестандартных изделий);

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	4	2

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что число нестандартных изделий X распределено по закону Пуассона.

Решение. 1. Найдем выборочную среднюю:

$$\overline{x}_в=\left(\sum n_i x_i\right)/n=(116\cdot 0+56\cdot 1+22\cdot 2+4\cdot 3+2\cdot 4)/200=0{,}6.$$

2. Примем в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю: $\lambda=0{,}6$. Следовательно, предполагаемый закон Пуассона

$$P_n(i)=\lambda^i\cdot e^{-\lambda}/i!$$

имеет вид

$$P_{200}(i)=(0{,}6)^i\cdot e^{-0{,}6}/i!.$$

3. Положив $i=0$, 1, 2, 3, 4, найдем вероятности P_i появления i нестандартных изделий в 200 партиях:

$$P_0=P_{200}(0)=0{,}5488;\ P_1=P_{200}(1)=0{,}3293;\ P_2=P_{200}(2)=0{,}0988;$$
$$P_3=P_{200}(3)=0{,}0198;\ P_4=P_{200}(4)=0{,}0030.$$

4. Найдем теоретические частоты по формуле

$$n'_i=n\cdot P_i=200P_i.$$

Подставив в эту формулу найденные в п. 3 значения вероятностей P_i, получим $n'_0=200\cdot 0{,}5488=109{,}76$.

Аналогично найдем: $n'_1=65{,}86$; $n'_2=19{,}76$; $n'_3=3{,}96$; $n'_4=0{,}60$.

5. Сравним эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого составим расчетную табл. 42. Учитывая замечание 1 (см. § 16), обьединим малочисленные частоты $(4+2=6)$ и соответствующие им теоретические частоты $(3{,}96+0{,}60=4{,}56)$, результаты объединения частот запишем в табл. 42.

Таблица 42

1	2	3	4	5	6
i	n_i	n'_i	$n_i-n'_i$	$(n_i-n'_i)^2$	$(n_i-n'_i)^2/n'_i$
0	116	109,76	6,24	38,9376	0,3548
1	56	65,86	−9,86	97,2196	1,4762
2	22	19,76	2,24	5,0176	0,2539
3	6	4,56	1,44	2,0736	0,4547
Σ	200				$\chi^2_{набл}=2{,}54$

Из расчетной таблицы находим наблюдаемое значение критерия Пирсона: $\chi^2_{\text{набл}}=2,54$.

По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), по уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k=4-2=2$ находим критическую точку правосторонней критической области: $\chi^2_{\text{кр}}(0,05;\ 2)=6,0$.

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении случайной величины X по закону Пуассона.

663. В итоге проверки на нестандартность 200 ящиков консервов получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i нестандартных коробок консервов в одном ящике; во второй строке — частота n_i, т. е. число ящиков, содержащих x_i коробок нестандартных консервов):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X — число нестандартных коробок — распределена по закону Пуассона.

Указание. Объединить малочисленные частоты двух последних групп.

664. Для определения засоренности партии семян клевера семенами сорняков было проверено 1000 случайно отобранных проб и получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i семян сорняков в одной пробе; во второй строке — частота n_i, т. е. число проб, содержащих x_i семян сорняков):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что случайная величина X (число семян сорняков) распределена по закону Пуассона.

Указание. Объединить малочисленные частоты последних двух групп.

665. В результате эксперимента, состоящего из $n = 1000$ испытаний, в каждом из которых регистрировалось число x_i появлений некоторого события, получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i появлений события; во второй строке — частота n_i, т. е. число испытаний, в которых наблюдалось x_i появлений события):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	505	336	125	24	8	2

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X — число появлений события — распределена по закону Пуассона.

Указание. Объединить частоты двух последних групп.

666. В результате проверки 500 контейнеров со стеклянными изделиями установлено, что число поврежденных изделий X имеет следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i поврежденных изделий в одном контейнере; во второй строке частота n_i, т. е. число контейнеров, содержащих x_i поврежденных изделий):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что случайная величина X — число поврежденных изделий — распределена по закону Пуассона.

Указание. Объединить частоты трех последних групп.

667. Задача Борткевича. На основании 200 донесений, полученных в течение двадцати лет о количестве кавалеристов прусской армии, которые погибли в результате гибели под ними коня, было получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i погибших кавалеристов, указанных в одном донесении; во второй строке — частота n_i, т. е. число донесений, в которых сообщено о гибели x_i кавалеристов):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	109	65	22	3	1

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о распределении случайной величины X (числа погибших кавалеристов) по закону Пуассона.

Указание. Объединить малочисленные частоты 3 и 1 в одну.

Глава четырнадцатая

ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Одинаковое число испытаний на всех уровнях

Пусть на количественный нормально распределенный признак X воздействует фактор F, который имеет p постоянных уровней F_1, F_2, ..., F_p. На каждом уровне произведено по q испытаний. Результаты наблюдений — числа $(x_{ij}$, где i — номер) испытания ($i=1, 2, \ldots, \ldots, q$), j — номер уровня фактора ($j=1, 2, \ldots, p$),— записывают в виде таблицы (табл. 43).

Таблица 43

Номер испытания	Уровни фактора			
i	F_1	F_2	...	F_p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}
...	...	...	...	...
q	x_{q1}	x_{q2}		x_{qp}
Групповая средняя $\overline{x}_{\text{гр}}$	$\overline{x}_{\text{гр}1}$	$\overline{x}_{\text{гр}2}$	...	$\overline{x}_{\text{гр}p}$

Ставится задача: на уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних при допущении, что групповые генеральные дисперсии хотя и неизвестны, но одинаковы. Для решения этой задачи вводятся: *общая сумма* квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от общей средней

$$S_{\text{общ}}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij}-\overline{x})^2;$$

факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней (характеризует рассеяние «между группами»)

$$S_{\text{факт}}=q\sum_{j=1}^{p}(\overline{x}_{\text{гр}\,j}-\overline{x})^2;$$

остаточная сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней (характеризует рассеяние «внутри групп»)

$$S_{\text{ост}}=\sum_{i=1}^{q}(x_{i1}-\overline{x}_{\text{гр}1})^2+\sum_{i=1}^{q}(x_{i2}-\overline{x}_{\text{гр}2})^2+\ldots+\sum_{i=1}^{q}(x_{ip}-\overline{x}_{\text{гр}\,p})^2.$$

Практически остаточную сумму находят по формуле

$$S_{\text{ост}}=S_{\text{общ}}-S_{\text{факт}}.$$

Для вычисления общей и факторной сумм более удобны следующие формулы:

$$S_{\text{общ}}=\sum_{j=1}^{p} P_j-\left[\sum_{j=1}^{p} R_j\right]^2\Big/(pq),$$

$$S_{\text{факт}}=\sum_{j=1}^{p} R_j^2/q-\left[\sum_{j=1}^{p} R_j\right]^2\Big/(pq),$$

где $P_j=\sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$ — сумма квадратов наблюдаемых значений признака на уровне F_j; $R_j=\sum_{i=1}^{q} x_{ij}$ — сумма наблюдаемых значений признака на уровне F_j.

Если наблюдаемые значения признака — сравнительно большие числа, то для упрощения вычислений вычитают из каждого наблюдаемого значения одно и то же число C, примерно равное общей средней. Если уменьшенные значения $y_{ij}=x_{ij}-C$, то

$$S_{\text{общ}}=\sum_{j=1}^{p} Q_j-\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2\Big/(pq),$$

$$S_{\text{факт}}=\left[\sum_{j=1}^{p} T_j^2\right]\Big/q-\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2\Big/(pq),$$

где $Q_j=\sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2$ — сумма квадратов уменьшенных значений признака на уровне F_j; $T_j=\sum_{i=1}^{q} y_{ij}$ — сумма уменьшенных значений признака на уровне F_j.

Разделив уже вычисленные факторную и остаточную суммы на соответствующее число степеней свободы, находят факторную и остаточную дисперсии:

$$s^2_{\text{факт}}=\frac{S_{\text{факт}}}{p-1}, \quad s^2_{\text{ост}}=\frac{S_{\text{ост}}}{p(q-1)}.$$

Наконец, сравнивают факторную и остаточную дисперсии по критерию Фишера—Снедекора (см. гл. XIII, § 2).

Если $F_{\text{набл}}<F_{\text{кр}}$ — различие групповых средних незначимое. Если $F_{\text{набл}}>F_{\text{кр}}$ — различие групповых средних значимое.

Замечание 1. Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то уже отсюда непосредственно следует справедливость нулевой гипотезы о равенстве групповых средних, поэтому дальнейшие вычисления (сравнение дисперсий с помощью критерия F) излишни.

Замечание 2. Если наблюдаемые значения x_{ij} — десятичные дроби с k знаками после запятой, то целесообразно перейти к целым числам

$$y_{ij}=10^k x_{ij}-C,$$

где C — примерно среднее значение чисел $10^k x_{ij}$. При этом факторная и остаточная дисперсия увеличатся каждая в 10^{2k} раз, однако их отношение не изменится.

668. Произведено по четыре испытания на каждом из трех уровней фактора F. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 44.

Таблица 44

Номер испытания i	Уровни фактора F_1	F_2	F_3
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
$\overline{x}_{гр\,j}$	35	25	27

Решение. Для упрощения расчета вычтем из каждого наблюдаемого значения x_{ij} общую среднюю $\overline{x}=29$, т. е. перейдем к уменьшенным величинам: $y_{ij}=x_{ij}-29$. Например, $y_{11}=x_{11}-29=38-29=9$; $y_{21}=x_{21}-29=36-29=7$ и т. д.

Составим расчетную табл. 45.

Таблица 45

Номер испытания i	Уровни фактора F_1: y_{i1}	y_{i1}^2	F_2: y_{i2}	y_{i2}^2	F_3: y_{i3}	y_{i3}^2	Итоговый столбец
1	9	81	−9	81	−8	64	
2	7	49	−5	25	−7	49	
3	6	36	−3	9	2	4	
4	2	4	1	1	5	25	
$Q_j=\sum y_{ij}^2$		170		116		142	$\Sigma Q_j=428$
$T_j=\Sigma y_{ij}$	24		−16		−8		$\Sigma T_j=0$
T_j^2	576		256		64		$\sum T_j^2=896$

Используя итоговый столбец табл. 45, найдем общую и факторную суммы квадратов отклонений, учитывая, что число уровней фактора $p=3$, число испытаний на каждом уровне $q=4$:

$$S_{\text{общ}}=\sum_{j=1}^{p} Q_j-\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2\Big/(pq)=428-0=428;$$

$$S_{\text{факт}}=\left[\sum_{j=1}^{p} T_j^2\right]\Big/q-\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2\Big/pq=896/4-0=224.$$

Найдем остаточную сумму квадратов отклонений:

$$S_{\text{ост}}=S_{\text{общ}}-S_{\text{факт}}=428-224=204.$$

Найдем факторную дисперсию; для этого разделим $S_{\text{факт}}$ на число степеней свободы $p-1=3-1=2$:

$$s^2_{\text{факт}}=S_{\text{факт}}/(p-1)=224/2=112.$$

Найдем остаточную дисперсию; для этого разделим $S_{\text{ост}}$ на число степеней свободы $p(q-1)=3(4-1)=9$:

$$s^2_{\text{ост}}=S_{\text{ост}}/p(q-1)=204/9=22{,}67.$$

Сравним факторную и остаточную дисперсии с помощью критерия Фишера—Снедекора (см. гл. XIII, § 2). Для этого сначала найдем наблюдаемое значение критерия:

$$F_{\text{набл}}=s^2_{\text{факт}}/s^2_{\text{ост}}=112/22{,}67=4{,}94.$$

Учитывая, что число степеней свободы числителя $k_1=2$, а знаменателя $k_2=9$ и что уровень значимости $\alpha=0{,}05$, по таблице приложения 7 находим критическую точку

$$F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 2;\ 9)=4{,}26.$$

Так как $F_{\text{набл}}>F_{\text{кр}}$—нулевую гипотезу о равенстве групповых средних отвергаем. Другими словами, групповые средние «в целом» различаются значимо.

669. Произведено по пять испытаний на каждом из четырех уровней фактора F. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних $\bar{x}_{\text{гр}\,j}$. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 46.

Указание. Принять $y_{ij}=x_{ij}-58$.

670. Произведено по восемь испытаний на каждом из шести уровней фактора. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 47.

Указание. Принять $y_{ij}=x_{ij}-100$.

Таблица 46

Номер испытания	Уровни фактора			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	36	56	52	39
2	47	61	57	57
3	50	64	59	63
4	58	66	58	61
5	67	66	79	65
$\bar{x}_{гр\,j}$	51,6	62,6	61,0	57,0

Таблица 47

Номер испытания i	Уровни фактора					
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	100	92	74	68	64	69
2	101	102	87	80	83	71
3	126	104	88	83	83	80
4	128	115	93	87	84	80
5	133	119	94	96	90	81
6	141	122	101	97	96	82
7	147	128	102	106	101	86
8	148	146	105	127	111	99
$\bar{x}_{гр\,j}$	128	116	93	93	89	81

671. Произведено по четыре испытания на каждом из трех уровней фактора F. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 48.

Таблица 48

Номер испытания i	Уровни фактора		
	F_1	F_2	F_3
1	35	30	21
2	32	24	22
3	31	26	34
4	30	20	31
$\bar{x}_{гр\, j}$	32	25	27

Указание. Принять $y_{ij}=x_{ij}-28$.

672. Произведено по семь испытаний на каждом из четырех уровней фактора. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 49.

Таблица 49

Номер испытания i	Уровни фактора			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	51	52	56	54
2	59	58	56	58
3	53	66	58	62
4	59	69	58	64
5	63	70	70	66
6	69	72	74	67
7	72	74	78	69
$\bar{x}_{гр\, j}$	60,9	65,9	64,3	62,9

Указание. Принять $y_{ij}=x_{ij}-63$. Воспользоваться замечанием 1.

673. Произведено по четыре испытания на каждом из трех уровней фактора. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 50.

Таблица 50

Номер испытания i	Уровни фактора		
	F_1	F_2	F_3
1	27	24	22
2	23	20	21
3	29	26	36
4	29	30	37
$\bar{x}_{\text{гр}\, j}$	27	25	29

Указание. Принять $y_{ij}=x_{ij}-27$. Использовать замечание 1.

§ 2. Неодинаковое число испытаний на различных уровнях

Если число испытаний на уровне F_1 равно q_1, на уровне F_2 — q_2, ..., на уровне F_p — q_p, то общую сумму квадратов отклонений вычисляют, как и в случае одинакового числа испытаний на всех уровнях (см. § 1). Факторную сумму квадратов отклонений находят по формуле

$$S_{\text{факт}}=\frac{T_1^2}{q_1}+\frac{T_2^2}{q_2}+\ldots+\frac{T_p^2}{q_p}-\frac{\sum_{j=1}^{p} T_j^2}{n},$$

где $n=q_1+q_2+\ldots+q_p$ — общее число испытаний.

Остальные вычисления производят, как и в случае одинакового числа испытаний:

$$S_{\text{ост}}=S_{\text{общ}}-S_{\text{факт}},$$

$$s^2_{\text{факт}}=S_{\text{факт}}/(p-1), \quad s^2_{\text{ост}}=S_{\text{ост}}/(n-p).$$

674. Произведено 13 испытаний, из них 4 — на первом уровне фактора, 4 — на втором, 3 — на третьем и 2 — на четвертом. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 51.

Таблица 51

Номер испытания i	Уровни фактора			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	1,38	1,41	1,32	1,31
2	1,38	1,42	1,33	1,33
3	1,42	1,44	1,34	—
4	1,42	1,45	—	—
$\bar{x}_{\text{гр}\,j}$	1,40	1,43	1,33	1,32

Решение. Используя замечание 2 (см. § 1), перейдем к целым числам $y_{ij}=10^2x_{ij}-138$. Составим расчетную табл. 52.

Таблица 52

Номер испытания i	Уровни фактора								Итоговый столбец
	F_1		F_2		F_3		F_4		
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	y_{i4}	y_{i4}^2	
1	0	0	3	9	—6	36	—7	49	
2	0	0	4	16	—5	25	—5	25	
3	4	16	6	36	—4	16	—	—	
4	4	16	7	49	—	—	—	—	
$Q_j=\sum y_{ij}^2$		32		110		77		74	$\sum Q_j=293$
$T_j=\sum y_{ij}$	8		20		—15		—12		$\sum T_j=1$
T_j^2	64		400		225		144		

Используя итоговый столбец и нижнюю строку табл. 52, найдем общую и факторную суммы квадратов отклонений:

$$S_{\text{общ}}=\sum Q_j-\left[\sum T_j\right]^2/n=293-1^2/13=293-0,08=292,92;$$

$$S_{\text{факт}}=\frac{T_1^2}{q_1}+\frac{T_2^2}{q_2}+\frac{T_3}{q_3}+\frac{T_4}{q_4}-\frac{\left[\sum T_j\right]^2}{n}=$$

$$=64/4+400/4+225/3+144/2-0,08=262,92.$$

Найдем остаточную сумму квадратов отклонений:

$$S_{\text{ост}}=S_{\text{общ}}-S_{\text{факт}}=292,92-262,92=30.$$

Найдем факторную и остаточную дисперсии:

$$s_{\text{факт}}^2=S_{\text{факт}}/(p-1)=262,92/(4-1)=262,92/3=87,64;$$

$$s_{\text{ост}}^2=S_{\text{ост}}/(n-p)=30/(13-4)=30/9=3,33.$$

Сравним факторную и остаточную дисперсии с помощью критерия F (см. гл. XIII, § 2). Для этого сначала вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$F_{набл} = s^2_{факт} / s^2_{ост} = 87,64/3,33 = 26,32.$$

Учитывая, что число степеней свободы числителя $k_1 = p - 1 = 4 - 1 = 3$, знаменателя $k_2 = n - p = 13 - 4 = 9$ и что уровень значимости $\alpha = 0,05$, по таблице приложения 7 находим критическую точку $F_{кр}(0,05;\ 3;\ 9) = 3,86$.

Так как $F_{набл} > F_{кр}$ — нулевую гипотезу о равенстве групповых средних отвергаем. Другими словами, групповые средние различаются значимо.

675. Произведено 14 испытаний, из них 5—на первом уровне фактора, 3—на втором, 2—на третьем, 3—на четвертом и 1—на пятом. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 53.

Таблица 53

Номер испытания i	Уровни фактора				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	7,3	5,4	6,4	7,9	7,1
2	7,6	7,1	8,1	9,5	
3	8,3	7,4		9,6	
4	8,3				
5	8,4				
$\bar{x}_{гр\,j}$	7,98	6,63	7,25	9,0	7,1

Указание. Принять $y_{ij} = 10x_{ij} - 78$.

676. Произведено 13 испытаний, из них 4—на первом уровне фактора, 6—на втором и 3—на третьем. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 54.

Таблица 54

Номер испытания i	Уровни фактора		
	F_1	F_2	F_3
1	37	60	69
2	47	86	100
3	40	67	98
4	60	92	
5		95	
6		98	
$\bar{x}_{гр\,j}$	46	83	89

Указание. Принять $y_{ij}=x_{ij}-73$.

677. Произведено 14 испытаний, из них 7—на первом уровне фактора, 3—на втором и 4—на третьем. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 55.

Таблица 55

Номер испытания i	Уровни фактора		
	F_1	F_2	F_3
1	30,56	43,44	31,36
2	32,66	47,51	36,20
3	34,78	53,80	36,38
4	35,50		42,20
5	36,63		
6	40,20		
7	42,28		
$\bar{x}_{гр\,j}$	36,09	48,25	36,54

Указание. Принять $y_{ij}=100x_{ij}-3900$.

678. Произведено 26 испытаний, из них 7—на первом уровне фактора, 5—на втором, 8—на третьем и 6—на четвертом. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в табл. 56.

Таблица 56

Номер испытания i	Уровни фактора			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	1600	1580	1460	1510
2	1610	1640	1550	1520
3	1650	1640	1600	1530
4	1680	1700	1620	1570
5	1700	1750	1640	1600
6	1700		1660	1680
7	1800		1740	
8			1820	
$\bar{x}_{\text{гр}\, j}$	1677	1662	1638	1568

Указание. Принять $y_{ij} = x_{ij} - 1630$. Использовать замечание 1 (см. § 1).

Часть четвертая
МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Глава пятнадцатая
МОДЕЛИРОВАНИЕ (РАЗЫГРЫВАНИЕ) СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

§ 1. Разыгрывание дискретной случайной величины

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой изучаемой величины. С этой целью выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно a: $M(X)=a$.

Практически же поступают так: вычисляют (разыгрывают) n возможных значений x_i случайной величины X, находят их среднее арифметическое

$$\bar{x}=(\sum x_i)/n$$

и принимают $\bar{x}$ в качестве оценки (приближенного значения) a^* искомого числа a:

$$a \simeq a^*=\bar{x}.$$

Таким образом, для применения метода Монте-Карло необходимо уметь разыгрывать случайную величину.

В этом параграфе требуется разыграть дискретную случайную величину X, т. е. вычислить последовательность ее возможных значений $x_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots)$, зная закон распределения X.

Введем обозначения: R — непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0,\ 1)$; $r_j\,(j=1,\ 2,\ \ldots)$ — случайные числа (возможные значения R).

Правило. *Для того чтобы разыграть дискретную случайную величину X, заданную законом распределения*

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}$$

надо:

1. *Разбить интервал* $(0,\ 1)$ *оси* Or *на* n *частичных интервалов:* $\Delta_1-(0;\ p_1)$, $\Delta_2-(p_1;\ p_1+p_2)$, $\ldots$, $\Delta_n-(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1};\ 1)$.

2. *Выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число* r_j.

Если r_j *попало в частичный интервал* Δ_i, *то разыгрываемая величина приняла возможное значение* x_i.

679. Разыграть шесть возможных значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	2	10	18
p	0,22	0,17	0,61

Решение. Разобьем интервал (0, 1) оси Or точками с координатами 0,22; $0{,}22+0{,}17=0{,}39$ на три частичных интервала: Δ_1—(0; 0,22), Δ_2—(0,22; 0,39), Δ_3—(0;39, 1).

2. Выпишем из таблицы приложения 9 шесть случайных чисел, например 0,32; 0,17; 0,90; 0,05; 0,97; 0,87.

Случайное число $r_1=0{,}32$ принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение $x_2=10$; случайное число $r_2=0{,}17$ принадлежит частичному интервалу Δ_1, поэтому разыгрываемая величина приняла возможное значение $x_1=2$.

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, разыгранные возможные значения таковы: 10; 2; 18; 2; 18; 18.

680. Разыграть восемь возможных значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	3	8	12	23
p	0,2	0,12	0,43	0,23

Указание. Для определенности принять случайные числа: 0,33; 0,18; 0,51; 0,62; 0,32; 0,41; 0,94; 0,15.

681. Разыграть пять опытов по схеме Бернулли: опыт состоит из трех независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4.

Указание. а) Составить сначала закон распределения дискретной случайной величины X—числа появлений события A в трех независимых испытаниях, если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,4; б) принять для определенности случайные числа: 0,945; 0,572; 0,857; 0,367; 0,897.

682. Разыграть шесть опытов по схеме Бернулли: опыт состоит из четырех испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,5.

Указание. Принять для определенности случайные числа: 0,1009; 0,7325; 0,3376; 0,5201; 0,3586; 0,3467.

§ 2. Разыгрывание полной группы событий

Требуется разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий полной группы, вероятности которых известны. Разыгрывание полной группы событий сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины.

Правило. *Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ полной группы, вероятности которых $p_1, p_2, \ldots, p_n$ известны, достаточно разыграть (по правилу § 1) дискретную случайную величину X со следующим законом распределения:*

X	1	2	...	n
p	p_1	p_2	...	p_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение $x_i = i$, то наступило событие A_i.

683. Заданы вероятности трех событий: A_1, A_2, A_3, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0{,}22$, $p_2 = P(A_2) = 0{,}31$, $p_3 = P(A_3) = 0{,}47$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.

Решение. В соответствии с правилом настоящего параграфа надо разыграть дискретную случайную величину X с законом распределения:

X	1	2	3
p	0,22	0,31	0,47

По правилу § 1 разобьем интервал (0, 1) на три частичных интервала: Δ_1—(0; 0,22), Δ_2—(0,22; 0,43), Δ_3—(0,43; 1).

Выберем из таблицы приложения 9 пять случайных чисел, например 0,61; 0,19; 0,69; 0,04; 0,46.

Случайное число $r_1 = 0{,}61$ принадлежит интервалу Δ_3, поэтому $X = 3$ и, следовательно, наступило событие A_3. Аналогично найдем остальные события. В итоге получим искомую последовательность событий: A_3, A_1, A_3, A_1, A_3.

684. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0{,}15$, $p_2 = P(A_2) = 0{,}64$; $p_3 = P(A_3) = 0{,}05$, $p_4 = P(A_4) = 0{,}16$.

Разыграть 10 испытаний, в каждом из которых появляется одно из рассматриваемых событий.

Указание. Принять для определенности случайные числа: 0,37; 0,54; 0,20; 0,48; 0,05; 0,64; 0,89; 0,47; 0,42; 0,96.

685. События A и B независимы и совместны. Разыграть четыре испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,7, а события B—0,4.

Решение. Возможны четыре исхода испытания:

$A_1 = AB$, причем в силу независимости событий $P(AB) = P(A) \times P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$;

$A_2 = A\bar{B}$, причем $P(A\bar{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$;

$A_3 = \bar{A}B$, причем $P(\bar{A}B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$;

$A_4 = \bar{A}\bar{B}$, причем $P(\bar{A}\bar{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.

Таким образом, задача сведена к разыгрыванию полной группы четырех событий: A_1 с вероятностью $p_1 = 0{,}28$, A_2 с вероятностью $p_2 = 0{,}42$, A_3 с вероятностью $p_3 = 0{,}12$, A_4 с вероятностью $p_4 = 0{,}18$.

Эта задача в соответствии с правилом настоящего параграфа сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины X с законом распределения

X	1	2	3	4
p	0,28	0,42	0,12	0,18

Выберем из таблицы приложения 9 четыре случайных числа, например 0,32; 0,17; 0,90; 0,05.

Используя правило § 1, легко найдем искомую последовательность результатов четырех испытаний: A_2, A_1, A_4, A_1.

686. События A и B независимы и совместны. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6, а события B—0,8.

Указание. Составить полную группу событий: $A_1=AB$, $A_2=A\overline{B}$, $A_3=\overline{A}B$, $A_4=\overline{A}\overline{B}$; для определенности принять случайные числа: 0,69; 0,07; 0,49; 0,41; 0,38.

687. События A, B и C независимы и совместны. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6, события B—0,2, события C—0,4.

Указание. Составить полную группу событий: $A_1=ABC$, $A_2=AB\overline{C}$, $A_3=A\overline{B}C$, $A_4=\overline{A}BC$, $A_5=A\overline{B}\overline{C}$, $A_6=\overline{A}B\overline{C}$, $A_7=\overline{A}\overline{B}C$, $A_8=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; для определенности принять случайные числа: 0,541; 0,784; 0,561; 0,180; 0,993.

688. События A и B зависимы и совместны. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых заданы вероятности: $P(A)=0,5$, $P(B)=0,6$, $P(AB)=0,2$.

Указание. Составить полную группу событий: $A_1=AB$, $A_2=A\overline{B}$, $A_3=\overline{A}B$, $A_4=\overline{A}\overline{B}$. Учесть, что $P(A_2)=P(A)-P(AB)$, $P(A_3)=P(B)-P(AB)$, $P(A_4)=1-[P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)]$. Для определенности принять случайные числа: 0,66; 0,06; 0,57; 0,47; 0,17.

§ 3. Разыгрывание непрерывной случайной величины

Известна функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X. Требуется разыграть X, т. е. вычислить последовательность возможных значений x_i $(i=1, 2, \ldots)$.

А. Метод обратных функций. Правило 1. *Для того чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения $F(x)$, надо выбрать случайное число r_i, приравнять его функции распределения и решить относительно x_i полученное уравнение $F(x_i)=r_i$.*

Если известна плотность вероятности $f(x)$, т используют правило 2.

Правило 2. *Для того, чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины X, зная ее плотность вероятности $f(x)$, надо выбрать случайное число r_i и решить относительно x_i уравнение*

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)\,dx=r_i,$$

или уравнение

$$\int_a^{x_i} f(x)\,dx = r_i,$$

где a — наименьшее конечное возможное значение X.

Б. Метод суперпозиции. Правило 3. *Для того чтобы разыграть возможное значение случайной величины X, функция распределения которой*

$$F(x) = C_1F_1(x) + C_2F_2(x) + \ldots + C_nF_n(x),$$

где $F_k(x)$ — функции распределения ($k = 1, 2, \ldots, n$), $C_k > 0$, $C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 1$, надо выбрать два независимых случайных числа r_1 и r_2 и по случайному числу r_1 разыграть возможное значение вспомогательной дискретной случайной величины Z (по правилу 1):

Z	1	2	...	n
p	C_1	C_2	...	C_n

Если окажется, что $Z = k$, то решают относительно x уравнение $F_k(x) = r_2$.

Замечание 1. Если задана плотность вероятности непрерывной случайной величины X в виде

$$f(x) = C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + \ldots + C_nf_n(x),$$

где $f_k(x)$ — плотности вероятностей, коэффициенты C_k положительны, их сумма равна единице и если окажется, что $Z = k$, то решают (по правилу 2) относительно x_i уравнение $\int_{-\infty}^{x_i} f_k(x)\,dx = r_2$ или уравнение $\int_a^{x_i} f_k(x)\,dx = r_2$.

Замечание 2. Модифицированный метод суперпозиции, предложенный Г. А. Михайловым, выгоднее рассматриваемого метода, так как использует лишь одно случайное число вместо двух (см.: Соболь И. М. Численные методы Монте-Карло. М., 1973).

689. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (a, b), зная ее функцию распределения $F(x) = (x-a)/(b-a)$ $(a < x < b)$.

Решение. В соответствии с правилом 1 приравняем заданную функцию распределения случайному числу r_i:

$$(x_i - a)/(b-a) = r_i.$$

Решив это уравнение относительно x_i, получим явную формулу для разыгрывания возможных значений X: $x_i = (b-a)\,r_i + a$.

690. Разыграть четыре возможных значения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (4, 14).

Указание. Для определенности принять случайные числа: 0,74; 0,02; 0,94; 0,36.

691. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, заданному функцией распределения $F(x)=1-e^{-\lambda x}(x>0)$.

692. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины, заданной плотностью вероятности $f(x)=b/(1+ax)^2$ в интервале $[0, 1/(b-a)]$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Решение. Используя правило 2, напишем уравнение

$$b\int_0^{x_i} 1/(1+ax)^2\,dx=r_i.$$

Решив это уравнение относительно x_i, окончательно получим

$$x_i=r_i/(b-ar_i).$$

693. Разыграть пять возможных значений непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=10/(1+2x)^2$ в интервале $(0, 1/8)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Указание. Для определенности принять случайные числа: 0,186; 0,333; 0,253; 0,798; 0,145.

694. Найти явную формулу для разыгрывания равномерно распределенной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=2$ в интервале $(0; 0,5)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

695. Разыграть пять возможных значений непрерывной равномерно распределенной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=0,1$ в интервале $(0; 10)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Указание. Для определенности принять случайные числа: 0,690; 0,749; 0,413; 0,887; 0,637.

696. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ в интервале $(0, \infty)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

697. Разыграть пять возможных значений непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, заданному плотностью вероятности

$f(x)=0{,}1\,e^{-0{,}1x}$ в интервале $(0, \infty)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Указание. Для определенности принять случайные числа: 0,80; 0,33; 0,69; 0,45; 0,98.

689. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, распределенной по закону Вейбулла, заданного плотностью вероятности $f(x)=(n/x_0)\,x^{n-1}\,e^{-x^n/x_0}$ при $x \geqslant 0$; $f(x)=0$ при $x<0$.

699. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, распределенной по закону Релея, заданного плотностью вероятности $f(x)=(x/\sigma^2)\,e^{-x^2/2\sigma^2}$ при $x \geqslant 0$; $f(x)=0$ при $x<0$.

700. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=\lambda\,[1-(\lambda x)/2]$ в интервале $(0;2/\lambda)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

701. Разыграть четыре возможных значения непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=1-x/2$ в интервале (0; 2); вне этого интервала $f(x)=0$.

Указание. Для определенности принять случайные числа: 0,35; 0,96; 0,31; 0,53.

702. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=(^1/_2)\sin x$ в интервале $(0, \pi)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

703. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=ce^{-cx}/(1-e^{-bc})$ в интервале $(0, b)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

704. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=1-(^1/_3)(2e^{-2x}+e^{-3x})$ $(0<x<\infty)$.

Решение. В соответствии с правилом 3 представим заданную функцию в виде

$$F(x)=(^1/_3)(1-e^{-3x})+(^2/_3)(1-e^{-2x}).$$

Функции, заключенные в скобках, являются функциями распределения показательного закона, поэтому можно принять: $F_1(x)=1-e^{-3x}$, $F_2(x)=1-e^{-2x}$, $C_1=^1/_3$, $C_2=^2/_3$.

Введем в рассмотрение вспомогательную дискретную случайную величину Z с законом распределения

Z	1	2
p	1/3	2/3

Выберем независимые случайные числа r_1 и r_2. Разыграем Z по случайному числу r_1, для чего по правилу § 1 построим частичные интервалы Δ_1—$(0, 1/3)$ и Δ_2—$(1/3, 1)$. Если $r_1 < 1/3$, то $Z=1$; если $r_1 \geqslant 1/3$, то $Z=2$.

Итак, возможное значение X находят, решая относительно x уравнение

$$1-e^{-3x}=r_2, \text{ если } r_1 < 1/3,$$

или

$$1-e^{-2x}=r_2, \text{ если } r_1 \geqslant 1/3.$$

Решив эти уравнения, получим:

$$x=[-\ln(1-r_2)]/3, \text{ если } r_1 < 1/3;$$
$$x=[-\ln(1-r_2)]/2, \text{ если } r_1 \geqslant 1/3.$$

Приняв во внимание, что случайные величины R и $1-R$ в интервале $(0, 1)$ распределены одинаково, окончательно имеем более простые формулы:

$$x=(-\ln r_2)/3, \text{ если } r_1 < 1/3,$$
$$x=(-\ln r_2)/2, \text{ если } r_1 \geqslant 1/3.$$

705. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=1-0{,}25(e^{-2x}+3e^{-x})$ $(0 < x < \infty)$.

Указание. Принять $F_1(x)=1-e^{-2x}$, $F_2(x)=1-e^{-x}$.

706. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=1-(1/5)(2e^{-3x}+3e^{-4x})$ $(0 < x < \infty)$.

Указание. Принять $F_1(x)=1-e^{-3x}$, $F_2(x)=1-e^{-4x}$.

707. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=1-(1/7)(e^{-x}+2e^{-2x}+4e^{-3x})$ $(0 < x < \infty)$.

Указание. Принять $F_1(x)=1-e^{-x}$, $F_2(x)=1-e^{-2x}$, $F_3(x)=1-e^{-3x}$.

708. а) Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=(4/27)[1+(x-1)^3]$ в интервале $(0, 3)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

б) Показать, что метод обратных функций требует решения уравнения четвертой степени $(x_i-1)^4+4x_i-(27r_i+1)=0$.

Указание. Принять $f_1(x)=4/9$, $f_2(x)=(2/9)(x-1)^3$, $C_1=1/3$, $C_2=2/3$.

709. а) Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=(5/12)[1+(x-1)^4]$ в интервале $(0, 2)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

б) Показать, что метод обратных функций требует решения уравнения пятой степени $(x_i-1)^5+5x_i-(12r_i-1)=0$.

Указание. Принять $f_1(x)=1/2$, $f_2(x)=(5/2)(x-1)^4$, $C_1=5/6$, $C_2=1/6$.

§ 4. Приближенное разыгрывание нормальной случайной величины

Требуется приближенно разыграть нормальную случайную величину.

Правило. *Для того чтобы приближенно разыграть возможное значение x_i нормальной случайной величины X с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$, надо сложить 12 независимых случайных чисел и из полученной суммы вычесть 6:*

$$x_i=\sum_{j=1}^{12} r_j-6=S_i-6.$$

Замечание. Если требуется приближенно разыграть нормальную случайную величину Z с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ, то, разыграв возможное значение x_i по приведенному выше правилу, находят искомое возможное значение по формуле

$$z_i=\sigma x_i+a.$$

710. Разыграть четыре возможных значения нормальной случайной величины с параметрами: а) $a=0$, $\sigma=1$; б) $a=2$, $\sigma=3$.

Решение. а) В соответствии с правилом разыграем возможное значение x_1 нормальной случайной величины X с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$ по формуле

$$x_1=\sum_{j=1}^{12} r_j-6=S_1-6.$$

Выберем из второй строки таблицы приложения 9 первых 12 случайных чисел: 0,37; 0,54; 0,20; 0,48; 0,05; 0,64; 0,89; 0,47; 0,42; 0,96; 0,24; 0,80. Сложив эти числа, получим $S_1=6{,}06$. Искомое возможное значение $x_1=S_1-6=6{,}06-6=0{,}06$.

Аналогично, выбрав из третьей, четвертой и пятой строк таблицы по 12 первых случайных чисел, получим: $S_2=4{,}90$, $S_3=4{,}48$, $S_4=6{,}83$. Следовательно, $x_2=4{,}90-6=-1{,}10$; $x_3=4{,}48-6=-1{,}52$; $x_4=6{,}83-6=0{,}83$.

б) Найдем возможные значения нормальной случайной величины Z с параметрами $a=2$, $\sigma=3$ по формуле $z_i=\sigma x_i+a$. Подставив возможные значения $x_1=0{,}06$, $a=2$, $\sigma=3$, получим $z_1=3\cdot 0{,}06+2=2{,}18$.

Аналогично найдем остальные возможные значения: $z_2=-1,3$, $z_3=-2,56$, $z_4=4,49$.

711. Разыграть пять возможных значений нормальной случайной величины с параметрами: а) $a=0$, $\sigma=1$; б) $a=10$, $\sigma=2$.

Указание. Для определенности выбрать по 12 первых двузначных чисел последних пяти строк таблицы приложения 9 и умножить каждое двузначное число на 0,01.

712. Разыграть пять возможных значений нормальной случайной величины с параметрами: а) $a=0$, $\sigma=1$; б) $a=4$, $\sigma=0,1$.

Указание. Для определенности выбрать по 12 первых трехзначных чисел из первых пяти строк таблицы приложения 9 и умножить каждое трехзначное число на 0,001.

713. Разыграть 50 возможных значений нормальной случайной величины X с параметрами $a=0$, $\sigma=1$ и оценить параметры разыгранной величины.

Указание. Для определенности при разыгрывании возможного значения x_i выбрать первые 12 двузначных чисел i-й строки таблицы приложения 9 и умножить каждое двузначное число на 0,01.

§ 5. Разыгрывание двумерной случайной величины

А. Дискретная двумерная случайная величина. Разыгрывание дискретной двумерной случайной величины (X, Y) сводится к разыгрыванию ее составляющих—одномерных дискретных случайных величин X и Y.

Пусть задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Если составляющие X и Y независимы, то находят законы их распределения и по ним разыгрывают X и Y по правилу § 1.

Если составляющие зависимы, то находят закон распределения одной из них, условные законы распределения другой и по ним разыгрывают X и Y по правилу § 1.

714. Дискретная двумерная случайная величина (X, Y), составляющие которой независимы, задана законом распределения:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,18	0,30	0,12
y_2	0,12	0,20	0,08

Разыграть случайную величину (X, Y).

Решение. Найдем закон распределения составляющей X:

$$p_1 = P(X=x_1) = 0,18+0,12 = 0,30,$$
$$p_2 = P(X=x_2) = 0,30+0,20 = 0,50,$$
$$p_3 = P(X=x_3) = 0,12+0,08 = 0,20.$$

Таким образом, искомый закон распределения имеет вид

X	x_1	x_2	x_3
p	0,30	0,50	0,20

Аналогично найдем закон распределения Y:

Y	y_1	y_2
p	0,60	0,40

Составляющие X и Y разыгрывают по правилу § 1.

715. Разыграть пять пар возможных значений двумерной случайной величины (X, Y), составляющие которой независимы, зная закон ее распределения:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,20	0,08	0,12
y_2	0,30	0,12	0,18

Указание. Для определенности принять при разыгрывании X случайные числа: 0,98; 0,52; 0,01; 0,77; 0,67, а при разыгрывании Y — числа 0,11; 0,80; 0,50; 0,54; 0,31.

716. Дискретная двумерная случайная величина (X, Y) задана законом распределения:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Разыграть пять пар возможных значений (X, Y).

Указание. Найти закон распределения составляющей X и разыграть ее. Найти условные законы распределения $p(y_j \mid x_i) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$ составляющей Y и разыграть ее. Для определенности принять случайные числа, приведенные в задаче 715.

Б. Непрерывная двумерная случайная величина. Разыгрывание непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) сводится к разыгрыванию ее составляющих — одномерных случайных величин X и Y.

Пусть задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Если составляющие X и Y независимы, то находят законы их распределения и по ним разыгрывают X и Y по правилам § 3.

Если составляющие X и Y зависимы, то находят закон распределения одной из них, условный закон распределения другой и по ним разыгрывают X и Y по правилам § 3.

Замечание. Составляющие X и Y независимы, если выполняется любое из условий:

1. Плотность совместного распределения равна произведению плотностей составляющих.

2. Функция совместного распределения равна произведению функций распределения составляющих.

3. Условные плотности распределения составляющих равны их безусловным плотностям.

4. Плотность совместного распределения равна произведению двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от y (задача 437).

717. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной двумерной случайной величины (X, Y), заданной плотностью вероятности $f(x, y) = (^3/_4)\, xy^2$ в области, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$.

Решение. Составляющие X и Y независимы, так как совместную плотность вероятности $f(x, y) = (3/4)\, xy^2$ можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая только от y.

Найдем плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x) = \int_0^2 f(x, y)\, \mathrm{d}y = (^3/_4)\, x \int_0^2 y^2\, \mathrm{d}y = 2x.$$

Итак, $f_1(x) = 2x$ $(0 < x < 1)$.

Разыграем X по правилу 2 (§ 3):

$$2 \int_0^{x_i} x\, \mathrm{d}x = r_i.$$

Отсюда получим явную формулу для вычисления возможных значений X:

$$x_i = \sqrt{r_i}.$$

Найдем плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y) = \int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}x = (^3/_4)\, y^2 \int_0^1 x\, \mathrm{d}x = (^3/_8)\, y^2.$$

Итак, $f_2(y) = (3/8)\, y^2$ $(0 < y < 2)$.

Разыграем Y по правилу 2 (§ 3):

$$(^3/_8) \int_0^{y_i} y^2\, \mathrm{d}y = r'_i.$$

Отсюда получим явную формулу для вычисления возможных значений y:

$$y_i = 2\sqrt[3]{r_i}.$$

718. Найти явные формулы для разыгрывания двумерной непрерывной случайной величины (X, Y), заданной плотностью вероятности $f(x, y) = 4xy$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

719. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной двумерной случайной величины (X, Y), если составляющая X задана плотностью вероятности $f_1(x) = x/2$ в интервале $(0; 2)$; составляющая Y равномерно распределена в интервале (x_i, x_i+3) с плотностью $f_2(y) = 1/3$, где x_i — разыгранное возможное значение X.

Решение. Разыграем составляющую X по правилу 2 (§ 3):

$$\int_0^{x_i} (x/2)\,dx = r_i.$$

Отсюда получим явную формулу для вычисления возможных значений X:

$$x_i = 2\sqrt{r_i}. \qquad (*)$$

Найдем условную функцию распределения составляющей Y, учитывая, что величина Y распределена равномерно в интервале (x_i, x_i+3).

Используем правило 1 (§ 3): $(y_i - x_i)/3 = r'_i$, где r'_i — случайное число.

Решив это уравнение относительно y_i, получим явную формулу для вычисления возможных значений y:

$$y_i = 3r'_i + x_i,$$

где x_i находят по формуле (*).

720. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной двумерной случайной величины (X, Y), если составляющая X задана плотностью вероятности $f_1(x) = (2x)/9$ в интервале $(0, 3)$; составляющая Y равномерно распределена в интервале $(x_i - 2, x_i + 2)$ с плотностью $f_2(y) = 1/4$, где x_i — разыгранное возможное значение X.

721. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной двумерной случайной величины (X, Y), заданной плотностью вероятности $f(x, y) = 6y$ в области, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = x$, $x = 1$.

Решение. Найдем плотность вероятности составляющей X:

$$f_1(x) = \int_0^x f(x, y)\,dy = 6\int_0^x y\,dy = 3x^2 \quad (0 < x < 1).$$

Разыграем X по правилу 2 (§ 3):

$$3\int_0^{x_i} x^2\,dx = r_i.$$

Отсюда получим явную формулу для вычисления возможных значений X:

$$x_i = \sqrt[3]{r_i}. \qquad (*)$$

Найдем условную плотность вероятности составляющей Y:

$$\psi(y \mid x) = f(x, y)/f_1(x) = (6y)/(3x^2) = (2y)/x^2.$$

Разыграем Y по правилу 2 (§ 3):

$$(2/x^2)\int_0^{y_i} y\,dy = r_i'.$$

Отсюда получим явную формулу для вычисления возможных значений Y:

$$y_i = x_i\sqrt{r_i'},$$

где x_i находят по формуле (*).

722. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной двумерной случайной величины (X, Y), заданной плотностью вероятности $f(x, y) = 3y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = x$, $y = 1$.

Указание. Найти сначала плотность вероятности составляющей Y и разыграть Y; найти условную плотность распределения составляющей X и разыграть X.

723. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной двумерной случайной величины (X, Y), заданной плотностью вероятности $f(x, y) = 4x$ в области, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

§ 6. Оценка надежности простейших систем методом Монте-Карло

724. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Система отказывает при отказе хотя бы одного блока. Первый блок содержит два элемента: A, B (они соединены параллельно) и отказывает при одновременном отказе обоих элементов. Второй блок содержит один элемент C и отказывает при отказе этого элемента. а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности (вероятности безотказной работы) системы, зная вероятности безотказной работы элементов: $P(A) = 0{,}8$,

$P(B)=0,85$, $P(C)=0,6$; б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где P — надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 50 испытаний.

Решение. а) Выберем из таблицы приложения 9 три случайных числа: 0,10, 0,09 и 0,73; по правилу *) (если случайное число меньше вероятности события, то событие наступило; если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило) разыграем события A, B, C, состоящие в безотказной работе соответственно элементов A, B, C. Результаты испытания будем записывать в расчетную табл. 57.

Поскольку $P(A)=0,8$ и $0,10 < 0,8$, то событие A наступило, т. е. элемент A в этом испытании работает безотказно. Так как $P(B)=0,85$ и $0,09 < 0,85$, то событие B наступило, т. е. элемент B работает безотказно.

Таким образом, оба элемента первого блока работают; следовательно, работает и сам первый блок. В соответствующих клетках табл. 57 ставим знак плюс.

Таблица 57

Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе				
					элементов			блоков	системы
		A	B	C	A	B	C		
1	Первый Второй	0,10	0,09	 0,73	+	+	 —	+ —	—
2	Первый Второй	0,25	0,33	 0,76	+	+	 —	+ —	—
3	Первый Второй	0,52	0,01	 0,35	+	+	 +	+ +	+
4	Первый Второй	0,86	0,34	 0,67	—	+	 —	+ —	—

Так как $P(C)=0,6$ и $0,73 > 0,6$, то событие C не наступило, т. е. элемент C получает отказ; другими словами, второй блок, а значит и вся система, получают отказ. В соответствующих клетках табл. 57 ставим знак минус.

Аналогично разыгрываются и остальные испытания. В табл. 57 приведены результаты четырех испытаний.

Произведя 50 испытаний, получим, что в 28 из них система работала безотказно. В качестве оценки искомой надежности P примем относительную частоту $P^*=28/50=0,56$.

---

*) См.: Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1977, гл. XXI, § 5.

б) Найдем надежность системы P аналитически. Вероятности безотказной работы первого и второго блоков соответственно равны:

$$P_1 = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0,2 \cdot 0,15 = 0,97, \quad P_2 = P(C) = 0,6.$$

Вероятность безотказной работы системы

$$P = P_1 \cdot P_2 = 0,97 \cdot 0,6 = 0,582.$$

Искомая абсолютная погрешность $|P - P^*| = 0,582 - 0,56 = 0,022$.

725. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит три элемента: A, B, C, а второй — два элемента: D, E. Элементы каждого блока соединены параллельно. а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,9$, $P(C) = 0,85$, $P(D) = 0,7$, $P(E) = 0,6$; б) найти абсолютную погрешность $|P - P^*|$, где P — надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 20 испытаний.

Указание. Для определенности брать случайные числа из таблицы приложения 9, начиная с шестой строки сверху.

726. Система состоит из трех блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит два элемента: A, B, второй — три элемента: C, D, E, третий — один элемент F. Элементы первого и второго блоков соединены параллельно. а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,9$; $P(C) = 0,7$; $P(D) = 0,75$; $P(E) = 0,8$; $P(F) = 0,6$;

б) найти абсолютную погрешность $|P - P^*|$, где P — надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 30 испытаний.

Указание. Для определенности брать случайные числа из таблицы приложения 9, начиная с первой строки сверху.

727. Устройство состоит из двух узлов, соединенных последовательно. Первый узел содержит два элемента: A, B, которые соединены параллельно. Второй узел содержит один элемент C. Время безотказной работы элементов распределено по показательному закону с параметрами, соответственно равными 0,04; 0,05; 0,10. Найти методом Монте-Карло: а) оценку P^* вероятности безотказной работы устройства за время длительностью 10 ч; б) среднее время безотказной работы устройства. Произвести 50 испытаний.

Решение. а) Разыграем время (в ч) безотказной работы элементов по формулам:

$$t_A = -(1/0{,}04)\ln r_1 = 25(-\ln r_1),$$
$$t_B = -(1/0{,}05)\ln r_2 = 20(-\ln r_2),$$
$$t_C = -(1/0{,}10)\ln r_3 = 10(-\ln r_3),$$

где r_1, r_2, r_3 — случайные числа. Например, для первого испытания возьмем из таблицы приложения 9 три случайных числа: 0, 10, 0,09, 0,73 и по ним разыграем время безотказной работы элементов:

$$t_A = 25(-\ln 0{,}10) = 25 \cdot 2{,}30 = 57{,}50,$$
$$t_B = 20(-\ln 0{,}09) = 20 \cdot 2{,}41 = 48{,}20,$$
$$t_C = 10(-\ln 0{,}73) = 10 \cdot 0{,}32 = 3{,}2.$$

Элементы A, B первого узла соединены параллельно, поэтому для его работы достаточно, чтобы работал хотя бы один элемент. Следовательно, в первом испытании первый узел будет работать $\max(57{,}50;\ 48{,}20) = 57{,}50$ ч.

Первый и второй узлы соединены последовательно, поэтому устройство работает, если оба узла работают одновременно. Следовательно, в первом испытании устройство будет работать $\min(57{,}50;\ 3{,}2) = 3{,}2$ ч.

Составим расчетную табл. 58.

Таблица 58

Номер испытания	Случайные числа, моделирующие элемент			Время безотказной работы					
				элементов			узлов		устройства
	A	B	C	A	B	C	первого	второго	
1	0,10	0,09	0,73	57,50	48,20	3,2	57,50	3,2	3,2
2	0,25	0,33	0,76	34,75	22,20	2,7	34,75	2,7	2,7
3	0,52	0,01	0,35	16,25	92,00	10,5	92,00	10,5	10,5
4	0,86	0,34	0,67	3,75	21,60	4,0	21,60	4,0	4,0

В табл. 58 приведены результаты только четырех испытаний. Если произвести 50 испытаний, то окажется, что в 18 испытаниях устройство работало 10 ч (и более).

Искомая оценка надежности устройства (вероятности его безотказной работы за время длительностью 10 ч) $P^* = 18/50 = 0{,}36$.

Для сравнения приведем аналитическое решение. Вероятности безотказной работы элементов:

$$R_A(10) = e^{-0{,}04 \cdot 10} = e^{-0{,}4} = 0{,}67,$$
$$R_B(10) = e^{-0{,}05 \cdot 10} = e^{-0{,}5} = 0{,}61,$$
$$R_C(10) = e^{-0{,}10 \cdot 10} = e^{-1} = 0{,}37.$$

Вероятность безотказной работы первого узла за время длительностью 10 ч

$$P_1 = 1 - (1 - 0{,}67)(1 - 0{,}61) = 0{,}87.$$

Вероятность безотказной работы устройства за время длительностью 10 ч

$$P = P_1 \cdot R_C(10) = 0{,}87 \cdot 0{,}37 = 0{,}32.$$

Абсолютная погрешность $|P-P^*|=|0,32-0,36|=0,04$.

б) Найдем среднее время безотказной работы устройства, учитывая, что в 50 испытаниях оно работало безотказно всего 450 ч: $\overline{t}^*=450/50=9$.

Для сравнения приведем аналитическое решение. Среднее время работы элементов: $\overline{t}_A=1/0,04=25$, $\overline{t}_B=1/0,05=20$, $\overline{t}_C=1/0,10=10$.

Среднее время работы узлов: $\overline{t}_1=\max(25,\ 20)=25$, $\overline{t}_2=10$.

Среднее время работы устройства: $\overline{t}=\min(25,\ 10)=10$.

Абсолютная погрешность $|\overline{t}-\overline{t}^*|=10-9=1$.

728. Устройство состоит из трех узлов, соединенных последовательно. Первый узел содержит два элемента: A, B, которые соединены параллельно. Второй узел содержит один элемент C, третий узел — один элемент D. Время безотказной работы элементов (в ч) распределено по показательному закону с параметрами, соответственно равными 0,02; 0,05; 0,08; 0,01. Найти методом Монте-Карло: а) оценку P^* вероятности безотказной работы устройства за время длительностью 6 ч; б) среднее время безотказной работы устройства. Произвести 50 испытаний.

Указание. Для определенности брать случайные числа из таблицы приложения 9, начиная с первой строки сверху.

729. Устройство состоит из двух узлов, соединенных последовательно. Первый узел содержит три элемента: A, B, C, а второй — два элемента: D, E. Элементы каждого узла соединены параллельно. Время безотказной работы элементов распределено по показательному закону с параметрами, соответственно равными 0,01; 0,02; 0,04; 0,01; 0,05. Найти методом Монте-Карло: а) оценку P^* вероятности безотказной работы устройства за время длительностью 60 ч; б) среднее время безотказной работы устройства. Произвести 50 испытаний.

Указание. Для определенности брать случайные числа из таблицы приложения 9, начиная с первой строки сверху.

§ 7. Расчет систем массового обслуживания с отказами методом Монте-Карло

730. В трехканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau)=5e^{-5\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин.

Найти методом Монте-Карло математическое ожидание a числа обслуженных заявок за время $T=4$ мин.

Решение. Пусть $T_1=0$ — момент поступления первой заявки. Заявка поступит в первый канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания первой заявки $T_1+0,5=0+0,5=0,5$. В счетчик обслуженных заявок записываем единицу.

Моменты поступления последующих заявок найдем по формуле

$$T_i=T_{i-1}+\tau_i,$$

где τ_i — длительность времени между двумя последовательными заявками с номерами $i-1$ и i.

Возможные значения τ_i разыгрываем по формуле

$$\tau_i=-(1/\lambda)\ln r_i=(1/\lambda)(-\ln r_i).$$

Учитывая, что, по условию, $\lambda=5$, получим $\tau_i=0,2(-\ln r_i)$.

Случайные числа r_i берем из таблицы приложения 9, начиная с первой строки сверху. Для нахождения времени между поступлениями первой и второй заявок возьмем случайное число $r=0,10$. Тогда $\tau_2=0,2\cdot(-\ln 0,10)=0,2\cdot 2,30=0,460$. Первая заявка поступила в момент $T_1=0$. Следовательно, вторая заявка поступит в момент $T_2=T_1+0,460=0+0,460=0,460$. В этот момент первый канал еще занят обслуживанием первой заявки, поэтому вторая заявка поступит во второй канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания второй заявки $T_2+0,5=0,460+0,5=0,960$. В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

По очередному случайному числу $r=0,09$ разыграем время τ_3 между поступлениями второй и третьей заявок:

$$\tau_3=0,2(-\ln 0,09)=0,2\cdot 2,41=0,482.$$

Вторая заявка поступила в момент $T_2=0,460$. Поэтому третья заявка поступит в момент $T_3=T_2+0,482=0,460+0,482=0,942$. В этот момент первый канал уже свободен и третья заявка поступит в первый канал. Момент окончания обслуживания третьей заявки $T_3+0,5=0,942+0,5=1,442$. В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

Дальнейший расчет производят аналогично (табл. 59), причем если в момент поступления заявки все каналы заняты (момент поступления заявки меньше каждого из моментов окончания обслуживания), то в счетчик отказов добавляют единицу.

Заметим, что обслуживание 20-й заявки закончится в момент $4,148>4$, поэтому эта заявка получает отказ.

Испытание прекращают (в таблице записывают «стоп»), если момент поступления заявки $T>4$.

Из табл. 59 находим, что за 4 мин всего поступило 20 заявок; обслужено $x_1=12$ заявок.

Выполнив аналогично еще пять испытаний, получим: $x_2=15$, $x_3=14$, $x_4=12$, $x_5=13$, $x_6=15$.

В качестве оценки искомого математического ожидания a числа обслуженных заявок примем выборочную среднюю

$$a^*=\overline{x}=(2\cdot 12+13+14+2\cdot 15)/6=13,5.$$

Таблица 59

Номер заявки i	Случайное число r_i	$-\ln r_i$	Время между двумя последовательными заявками $\tau_i = 0{,}2(\ln r_i)$	Момент поступления заявки $T_i = T_{i-1} + \tau_i$	Момент $T_i + 0{,}5$ окончания обслуживания заявки каналом			Счетчик	
					1	2	3	обслуженных заявок	отказов
1				0	0,500			1	
2	0,10	2,30	0,460	0,460		0,960		1	
3	0,09	2,41	0,482	0,942	1,442			1	
4	0,73	0,32	0,064	1,006		1,506		1	
5	0,25	1,39	0,278	1,284			1,784	1	
6	0,33	1,11	0,222	1,506	2,006			1	
7	0,76	0,27	0,054	1,560		2,060		1	
8	0,52	0,65	0,130	1,690					1
9	0,01	4,60	0,920	2,610	3,110			1	
10	0,35	1,05	0,210	2,820		3,320		1	
11	0,86	0,15	0,030	2,850			3,350	1	
12	0,34	1,08	0,216	3,066					1
13	0,67	0,40	0,080	3,146	3,646			1	
14	0,35	1,05	0,210	3,356		3,856		1	
15	0,48	0,73	0,146	3,502			4,002		1
16	0,76	0,27	0,054	3,556					1
17	0,80	0,22	0,044	3,600					1
18	0,95	0,05	0,010	3,610					1
19	0,90	00,10	0,020	3,630					1
20	0,91	0,09	0,018	3,648	4,148				1
21	0,17	1,77	0,354	4,002 (Стоп)					
							Итого	$x_1 = 12$	8

731. В трехканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau) = 4e^{-4\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание a числа обслуженных заявок за время $T = 5$ мин.

Указание. Произвести шесть испытаний. Для определенности брать случайные числа из таблицы приложения 9 с двумя знаками после запятой, начиная с первой строки сверху.

732. В одноканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок.

Время между моментами поступления двух последовательных заявок распределено по закону $f(\tau)=0{,}8e^{-0{,}8\tau}$; время обслуживания заявок случайное и распределено по закону $f_1(t)=1{,}5e^{-1{,}5t}$. Найти методом Монте-Карло за время $T=30$ мин: а) среднее число обслуженных заявок; б) среднее время обслуживания одной заявки; в) вероятность обслуживания; г) вероятность отказа. Произвести шесть испытаний.

Решение. Время между моментами поступления двух последовательных заявок распределено по закону $f(\tau)=0{,}8e^{-0{,}8\tau}$, поэтому значения τ_i разыграем по формуле

$$\tau_i=-(1/0{,}8)\ln r_i=1{,}25(-\ln r_i).$$

Случайные числа r_i берем из таблицы приложения 9, начиная с первой строки снизу.

Время обслуживания заявок распределено по закону $f_1(t)=1{,}5e^{-1{,}5t}$, поэтому значения t_i разыграем по формуле

$$t_i=-(1/1{,}5)\ln R_i=0{,}67(-\ln R_i).$$

Случайные числа R_i берем из той же таблицы, начиная с первой строки сверху.

Пусть $T_1=0$ — момент поступления первой заявки. По случайному числу $R_1=0{,}10$ разыграем длительность времени обслуживания первой заявки (в мин):

$$t_1=0{,}67(-\ln 0{,}10)=0{,}67\cdot 2{,}30=1{,}54.$$

Момент окончания обслуживания первой заявки $T_1=1{,}54=0+1{,}54=1{,}54$. В счетчик обслуженных заявок записываем единицу.

По случайному числу $r_2=0{,}69$ разыграем время (в мин) между моментами поступления первой и второй заявок *):

$$\tau_2=1{,}25(-\ln 0{,}69)=1{,}25\cdot 0{,}37=0{,}46.$$

Первая заявка поступила в момент $T_1=0$. Следовательно, вторая заявка поступит в момент $T_2=T_1+0{,}46=0+0{,}46=0{,}46$.

В этот момент канал занят обслуживанием первой заявки $(0{,}46<1{,}54)$, поэтому вторая заявка получит отказ. В счетчик отказов записываем единицу.

По очередному случайному числу $r_3=0{,}07$ разыграем время между моментами поступления второй и третьей заявок:

$$\tau_3=1{,}25(-\ln 0{,}07)=1{,}25\cdot 2{,}66=3{,}32.$$

Вторая заявка поступила в момент $T_2=0{,}46$. Следовательно, третья заявка поступит в момент $T_3=T_2+3{,}32=0{,}46+3{,}32=3{,}78$. В этот момент канал уже свободен $(3{,}78>1{,}54)$, поэтому он обслужит третью заявку. В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

Дальнейший расчет ясен из табл. 60 и 61. Испытание заканчивают, когда момент поступления заявки $T_i\geqslant 30$. Например, в первом испытании, как видно из табл. 60, 23-я заявка поступила в момент

*) У первого случайного числа намеренно поставлен индекс 2, чтобы не вносить расхождений с обозначениями табл. 60.

$T_{23} = 31{,}35 > 30$, поэтому эту заявку исключаем («Стоп») и первое испытание заканчиваем.

Аналогично производят и остальные испытания.

Таблица 60

Номер заявки i	Случайное число r_i	$-\ln r_i$	Время между двумя последовательными заявками $\tau_i = 1{,}25(-\ln r_i)$	Момент поступления заявки $T_i = T_{i-1} + \tau_i$
1				0
2	0,69	0,37	0,46	0,46
3	0,07	2,66	3,32	3,78
4	0,49	0,71	0,89	4,67
5	0,41	0,89	1,11	5,78
6	0,38	0,97	1,21	6,99
7	0,87	0,14	0,18	7,17
8	0,63	0,46	0,58	7,75
9	0,79	0,24	0,30	8,05
10	0,19	1,66	2,08	10,13
11	0,76	0,27	0,34	10,47
12	0,35	1,05	1,31	11,78
13	0,58	0,54	0,68	12,46
14	0,40	0,92	1,15	13,61
15	0,44	0,82	1,02	14,63
16	0,01	4,60	5,75	20,38
17	0,10	2,30	2,88	23,26
18	0,51	0,67	0,84	24,10
19	0,82	0,20	0,25	24,35
20	0,16	1,83	2,29	26,64
21	0,15	1,90	2,38	29,02
22	0,48	0,73	0,91	29,93
23	0,32	1,14	1,42	31,35 (Стоп)

Аналогично производят и остальные испытания. В табл. 62 приведены результаты шести испытаний, включая первое.

Используя табл. 62, найдем искомые величины: а) среднее число обслуженных за 30 мин заявок $\overline{N}_{\text{обсл}} = 93/6 = 15{,}5$,

б) среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}_{\text{обсл}} = 4{,}49/6 = 0{,}748$,

в) вероятность обслуживания $P_{\text{обсл}} = 3{,}974/6 = 0{,}662$,

г) вероятность отказа $P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обсл}} = 1 - 0{,}662 = 0{,}338$.

Таким образом, примерно 66% заявок будут обслужены, а 34% получат отказ.

733. В одноканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между моментами поступления двух последовательных заявок распределено по закону $f(\tau) = 0{,}5e^{-0{,}5\tau}$,

Таблица 61

Номер заявки i	Случайное число R_i	$-\ln R_i$	Длительность обслуживания заявки $t_i = 0,67(-\ln R_i)$	Момент			Счетчик	
				поступления заявки	начала обслуживания	окончания обслуживания	обслуженных заявок	отказов
1	0,10	2,30	1,54	0	0	1,54	1	
2				0,46				1
3	0,09	2,41	1,61	3,78	3,78	5,39	1	
4				4,67				1
5	0,73	0,32	0,21	5,78	5,78	5,99	1	
6	0,25	1,39	0,93	6,99	6,99	7,92	1	
7				7,17				1
8				7,75				1
9	0,33	1,11	0,74	8,05	8,05	8,79	1	
10	0,76	0,27	0,18	10,13	10,13	10,31	1	
11	0,52	0,65	0,44	10,47	10,47	10,91	1	
12	0,01	4,60	3,08	11,78	11,78	14,86	1	
13				12,46				1
14				13,61				1
15				14,63				1
16	0,35	1,05	0,70	20,38	20,38	21,08	1	
17	0,86	0,15	0,10	23,26	23,26	23,36	1	
18	0,34	1,08	0,72	24,10	24,10	24,82	1	
19				24,35				1
20	0,67	0,40	0,27	26,64	26,64	26,91	1	
21	0,35	1,05	0,70	29,02	29,02	29,72	1	
22	0,48	0,73	0,49	29,93	30,42			1
Σ			11,71				13	9

время обслуживания случайное и распределено по закону $f_1(t) = 2e^{-2t}$. Найти методом Монте-Карло за время $T = 20$ мин: а) среднее число обслуженных заявок; б) среднее время обслуживания одной заявки; в) вероятность обслуживания; г) вероятность отказа.

Указание. Произвести шесть испытаний. Для определенности брать случайные числа с двумя десятичными знаками после запятой из таблицы приложения 9 при разыгрывании τ_i, начиная с первой строки снизу, а при разыгрывании t_i — начиная с первой строки сверху.

Таблица 62

Номер испытания j	Поступило заявок $N_{j\,пост}$	Обслужено заявок $N_{j\,обсл}$	Длительность обслуживания $t_{j\,обсл}$	Среднее время обслуживания $\bar{t}_{j\,обсл} = \frac{t_{j\,обсл}}{N_{j\,обсл}}$	Вероятность обслуживания $P_{j\,обсл} = \frac{N_{j\,обсл}}{N_{j\,пост}}$	Вероятность отказа $P_{j\,отк} = 1 - P_{j\,обсл}$
1	22	13	11,71	0,90	0,591	0,409
2	25	17	8,80	0,52	0,680	0,320
3	24	16	13,46	0,84	0,667	0,333
4	22	15	12,19	0,81	0,682	0,318
5	20	13	11,99	0,92	0,650	0,350
6	27	19	9,57	0,50	0,704	0,296
Σ	140	93		4,49	3,974	

§ 8. Вычисление интегралов методом Монте-Карло

А. Способ усреднения подынтегральной функции. В качестве оценки определенного интеграла $I = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ принимают

$$I_1^* = (b-a)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i)}{n},$$

где n — число испытаний; x_i — возможные значения случайной величины X, распределенной равномерно в интервале интегрирования (a, b), их разыгрывают по формуле $x_i = a + (b-a)\,r_i$, где r_i — случайное число.

Дисперсия усредняемой функции $\varphi(X)$ равна

$$\sigma^2 = \int\limits_a^b \varphi^2(x)\,f(x)\,dx - \{M[\varphi(X)]\}^2,$$

где $M[\varphi(X)] = \int\limits_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx$, $f(x) = 1/(b-a)$.

Если точное значение дисперсии вычислить трудно или невозможно, то находят выборочную дисперсию (при $n > 30$)

$$D_в = \sum u_i^2/n - [\sum u_i/n]^2,$$

или исправленную дисперсию (при $n < 30$)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum u_i^2 - [\sum u_i]^2/n\right],$$

где $u_i = \varphi(x_i)$.

Эти формулы для вычисления дисперсии применяют и при других способах интегрирования, когда усредняемая функция не совпадает с подынтегральной функцией.

В качестве оценки интеграла $I=\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, где область интегрирования D принадлежит единичному квадрату $(0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1)$, принимают

$$I_1^*=S\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)}{N}, \qquad (*)$$

где S — площадь области интегрирования; N — число случайных точек (x_i, y_i), принадлежащих области интегрирования.

Если вычислить площадь S трудно, то в качестве ее оценки можно принять $S^*=N/n$; в этом случае формула (*) имеет вид

$$I_1^*=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)}{n},$$

где n — число испытаний.

В качестве оценки интеграла $I=\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, где область интегрирования V принадлежит единичному кубу $(0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1)$, принимают

$$I_1^*=V\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)}{N}, \qquad (**)$$

где V — объем области интегрирования, N — число случайных точек (x_i, y_i, z_i), принадлежащих области интегрирования.

Если вычислить объем трудно, то в качестве его оценки можно принять $V^*=N/n$; в этом случае формула (**) имеет вид

$$I_1^*=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)}{n},$$

где n — число испытаний.

Б. Способ существенной выборки, использующий «вспомогательную плотность распределения». В качестве оценки интеграла $I=\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ принимают

$$I_2^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(x_i)}{f(x_i)},$$

где n — число испытаний; $f(x)$ — плотность распределения «вспомогательной» случайной величины X, причем $\int\limits_a^b f(x)\,dx=1$; x_i — возможные значения X, которые разыгрывают по формуле

$$\int_a^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = r_i.$$

Функцию $f(x)$ желательно выбирать так, чтобы отношение $f(x)/\varphi(x)$ при различных значениях x изменялось незначительно. В частности, если $f(x)=1/(b-a)$, получим оценку I_1^*.

В. Способ, основанный на истолковании интеграла как площади. Пусть подынтегральная функция неотрицательна и ограничена: $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant c$, а двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в прямоугольнике D с основанием $(b-a)$ и высотой c. Тогда двумерная плотность вероятности $f(x, y)=1/(b-a)c$ для точек, принадлежащих D; $f(x, y)=0$ вне D.

В качестве оценки интеграла $I=\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ принимают

$$I_3^* = (b-a)\,c\,(n_1/n),$$

где n — общее число случайных точек (x_i, y_i), принадлежащих D; n_1 — число случайных точек, которые расположены под кривой $y=\varphi(x)$.

Г. Способ «выделения главной части». В качестве оценки интеграла $I=\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ принимают

$$I_4^* = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i)-g(x_i)] + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

где x_i — возможные значения случайной величины X, распределенной равномерно в интервале интегрирования (a, b), которые разыгрывают по формуле $x_i=a+(b-a)r_i$; функция $g(x) \simeq \varphi(x)$, причем интеграл $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ можно вычислить обычными методами.

734. Вывести формулу

$$I_1^* = (b-a)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x_i)}{n},$$

где $x_i=a+(b-a)r_i$, для оценки определенного интеграла $I=\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

Решение. Введем в рассмотрение случайную величину X, распределенную равномерно в интервале интегрирования (a, b) с плотностью $f(x)=1/(b-a)$. Тогда математическое ожидание

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Отсюда

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = (b-a)\, M\, [\varphi(X)].$$

Заменив математическое ожидание $M[\varphi(X)]$ его оценкой — выборочной средней, получим оценку искомого интеграла

$$I_1^* = (b-a)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)}{n},$$

где x_i — возможные значения X. Так как случайная величина X распределена равномерно в интервале (a, b) с плотностью $f(x) = 1/(b-a)$, то x_i разыгрывают по формуле $\frac{1}{b-a}\int_a^{x_i} dx = r_i$ (см. § 3, правило 2). Отсюда $x_i = a + (b-a)\, r_i$, где r_i — случайное число.

735. Найти: а) оценку I_1^* определенного интеграла $I = \int_1^3 (x+1)\, dx$; б) абсолютную погрешность $|I - I^*|$; в) минимальное число испытаний, которые с надежностью 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки $\delta = 0,1$.

Решение. а) Используем формулу

$$I_1^* = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)}{n}.$$

По условию, $a=1$, $b=3$, $\varphi(x) = x+1$. Примем для простоты число испытаний $n=10$. Тогда оценка

$$I_1^* = (3-1)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i+1)}{10} = 2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i+1)}{10},$$

где возможные значения x_i разыгрывают по формуле $x_i = a + (b-a)\, r_i = 1 + (3-1)\, r_i = 1 + 2r_i$.

Результаты десяти испытаний приведены в табл. 63. Случайные числа r_i взяты из таблицы приложения 9.

Таблица 63

Номер испытания i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
$x_i = 1+2r_i$	1,200	2,946	1,506	1,752	2,040	1,270	2,726	1,934	1,708	2,752
$\varphi(x_i) = x_i+1$	2,200	3,946	2,506	2,752	3,040	2,270	3,726	2,934	2,708	3,752

Из табл. 63 находим $\sum \varphi(x_i) = 29{,}834$. Искомая оценка

$$I_1^* = 2 \cdot (29{,}834/10) = 5{,}967.$$

б) Приняв во внимание, что $I = \int\limits_1^3 (x+1)\,dx = 6$, найдем абсолютную погрешность $|6 - 5{,}967| = 0{,}033$.

в) Найдем дисперсию усредняемой функции $\varphi(X) = X + 1$, учитывая, что случайная величина X в интервале интегрирования (1, 3) распределена равномерно и ее дисперсия $D(X) = (3-1)^2/12 = 1/3$ (см. задачу 315):

$$\sigma^2 = D(X+1) = D(X) = 1/3.$$

Найдем минимальное число испытаний, которые с надежностью 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки $\delta = 0{,}1$. Из равенства $\Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ по таблице приложения 2 находим $t = 1{,}96$. Искомое минимальное число испытаний

$$n = (t^2 \cdot \sigma^2)/\delta^2 = (1{,}96^2 \cdot (1/3))/0{,}1^2 = 128.$$

736. В качестве приближенного значения интеграла $I = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ принята оценка $I_1^* = (b-a) \cdot \frac{\sum \varphi(x_i)}{n}$. Найти минимальное число испытаний, при котором с надежностью 0,95 верхняя граница ошибки $\delta = 0{,}1$.

Решение. Найдем дисперсию усредняемой функции $\varphi(X) = \cos X$, учитывая, что случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, \pi/2)$ с плотностью $f(x) = 2/\pi$:

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx - \left[\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx\right]^2 = 0{,}09.$$

Из равенства $\Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ по таблице приложения 2 находим $t = 1{,}96$.

Искомое минимальное число испытаний

$$n = (t^2 \cdot \sigma^2)/\delta^2 = (1{,}96^2 \cdot 0{,}09)/0{,}1^2 = 35.$$

737. В качестве приближенного значения интеграла $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ принята оценка I_1^*. Найти минимальное число испытаний, при котором с надежностью 0,99 верхняя граница ошибки $\delta = 0{,}05$.

738. Найти а) оценку I_1^* определенного интеграла $\int\limits_2^5 x^2\,dx$; б) дисперсию σ^2 усредняемой функции $\varphi(X) = X^2$; в) минимальное число испытаний, которые с надежностью 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки $\delta = 0{,}1$.

Указание*). Для определенности взять 10 случайных чисел с тремя знаками после запятой из таблицы приложения 9, начиная с первой строки сверху.

739. Найти: а) оценку I_1^* определенного интеграла $\int\limits_0^1 e^x\,dx$; б) дисперсию σ^2 усредняемой функции $\varphi(X)=e^X$; в) минимальное число испытаний, при котором с надежностью 0,95 верхняя граница ошибки $\delta=0{,}02$.

740. Найти оценку определенных интегралов:

$$\text{а)} \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx, \quad \text{б)} \int\limits_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}.$$

741. Найти: а) оценку I_1^* определенного интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx$; б) исправленную дисперсию усредняемой функции $Y=\cos X$ по данным 10 испытаний.

Решение. а) Разыграем 10 возможных значений X по формуле

$$x_i=0+(\pi/2)\,r_i=1{,}571\,r_i.$$

Результаты испытаний приведены в табл. 64.

Таблица 64

Номер испытания i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
$x_i=(\pi/2)\,r_i$	0,157	1,529	0,398	0,591	0,817	0,212	1,356	0,734	0,556	1,376
$u_i=\varphi(x_i)=$ $=\cos x_i$	0,988	0,042	0,922	0,830	0,684	0,978	0,213	0,742	0,849	0,194
u_i	0,976	0,002	0,850	0,689	0,468	0,956	0,045	0,551	0,721	0,038

Учитывая, что $\sum u_i=6{,}442$, найдем искомую оценку интеграла:

$$I_1^*=(\pi/2)\,(6{,}442/10)=1{,}01.$$

б) Найдем исправленную дисперсию усредняемой функции:

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum u_i^2-\frac{\left(\sum u_i\right)^2}{n}\right].$$

Используя табл. 64, найдем: $\sum u_i=6{,}442$, $\sum u_i^2=5{,}296$. Учитывая, что $n=10$, получим искомую дисперсию $s^2=0{,}127$.

---

*) Это указание относится ко всем последующим задачам, в которых число испытаний не указано. Малое число испытаний взято для простоты.

Точное значение дисперсии усредняемой функции равно 0,09 (см. задачу 736).

742. Найти: а) оценку I_1^* определенного интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \, dx$; б) исправленную дисперсию усредняемой функции $Y = \sin X$ по данным 10 испытаний.

743. Найти оценку I^* интеграла $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 (x+y)\, dy$. Произвести 10 испытаний.

Решение. Область интегрирования ограничена линиями $y=x$, $y=1$, $x=0$ и, очевидно, принадлежит единичному квадрату. Площадь области интегрирования (прямоугольного треугольника) $S=(1\cdot 1)/2=0,5$.

Используем формулу

$$I^* = S\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)}{N} = 0,5\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)}{N}, \qquad (*)$$

где N — число случайных точек (x_i, y_i), которые принадлежат области интегрирования; у этих точек $y_i \geqslant x_i$ (при каждом испытании, в котором это условие выполняется в счетчик N записывают единицу). Пары независимых случайных чисел (x_i, y_i) берем из таблицы приложения 9, начиная с первой строки сверху. Результаты 10 испытаний приведены в табл. 65.

Таблица 65

Номер испытания i	x_i	y_i	Счетчик $y_i > x_i$	$f(x_i, y_i)=x_i+y_i$
1	0,100	0,973	1	1,073
2	0,253	0,376	1	0,629
3	0,520	0,135		
4	0,863	0,467		
5	0,354	0,876	1	1,230
6	0,809	0,590		
7	0,911	0,737		
8	0,542	0,048		
9	0,056	0,489	1	0,545
10	0,474	0,296		
$\sum$			4	3,477

Из табл. 65 находим $N=4$, $\sum\limits_{i=1}^{4} f(x_i, y_i)=3,477$. Подставив эти числа в формулу (*), получим искомую оценку:

$$I^* = 0,5\cdot(3,477/4)=0,435.$$

Сравнительно большое расхождение полученной оценки с точным значением $I=0{,}5$ объясняется малым числом испытаний.

744. Найти оценку I^* интегралов:

$$\text{а)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2}; \quad \text{б)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy;$$

$$\text{в)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\,dy; \quad \text{г)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dz}{x+y+z+1};$$

$$\text{д)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-x-y} xyz\,dz.$$

Произвести по 10 испытаний. Случайные числа брать из таблицы приложения 9 с тремя знаками после запятой, начиная с первой строки сверху.

745. Вывести формулу $I_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(x_i)}{f(x_i)}$ для оценки определенного интеграла $I=\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, где $f(x)$ — плотность распределения «вспомогательной» случайной величины X в интервале интегрирования (a, b); x_i — возможные значения X, разыгранные по известной плотности $f(x)$; n — число испытаний.

Решение. Пусть $f(x)$ — плотность распределения некоторой случайной величины X в интервале интегрирования (a, b), т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx=1$. Представим интеграл I так:

$$I=\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)\,dx.$$

Таким образом, интеграл I представлен в виде математического ожидания функции $F(X)=\varphi(X)/f(X)$. В качестве оценки этого математического ожидания, а следовательно равного ему интеграла I, примем выборочную среднюю

$$I_2^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(x_i)}{f(x_i)},$$

где x_i — возможные значения случайной величины X, которые разыгрывают по известной плотности $f(x)$; n — число испытаний. Искомая оценка получена.

Заметим, что желательно выбрать $f(x)$ так, чтобы по возможности отношение $f(x)/|\varphi(x)|=\text{const}$.

746. Найти оценку I_2^* интеграла $I=\int\limits_0^1 e^x\,dx$.

Решение. Так как $e^x=1+x+\ldots$, то в качестве плотности распределения «вспомогательной» случайной величины X примем функцию $f(x)=C(1+x)$. Из условия $C\int\limits_0^1(1+x)\,dx=1$ найдем $C=2/3$. Итак, $f(x)=(2/3)(x+1)$.

Запишем искомый интеграл так:

$$I=\int\limits_0^1\frac{e^x}{(2/3)(x+1)}\cdot(2/3)(x+1)\,dx.$$

Таким образом, интеграл I представлен в виде математического ожидания функции $\frac{e^x}{(2/3)(x+1)}$. В качестве искомой оценки примем выборочную среднюю (для простоты ограничимся десятью испытаниями):

$$I_2^*=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\frac{e^{x_i}}{(2/3)(x_i+1)}=0,15\sum_{i=1}^{10}\frac{e^{x_i}}{x_i+1},\qquad (*)$$

где x_i—возможные значения X, которые надо разыграть по известной плотности $f(x)=(2/3)(x+1)$. По правилу 2 (см. § 3), имеем

$$(2/3)\int\limits_0^{x_i}(x+1)\,dx=r_i.$$

Отсюда находим явную формулу для разыгрывания возможных значений X:

$$x_i=\sqrt{1+3r_i}-1.$$

В табл. 66 приведены результаты 10 испытаний.

Таблица 66

Номер испытания i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
$x_i=\sqrt{1+3r_i}-1$	0,140	0,980	0,326	0,459	0,600	0,185	0,894	0,550	0,436	0,905
$\varphi(x_i)=e^{x_i}$	1,150	2,664	1,385	1,582	1,822	1,203	2,445	1,733	1,546	2,472
x_i+1	1,140	1,980	1,326	1,459	1,600	1,185	1,894	1,550	1,436	1,905
$\frac{e^{x_i}}{x_i+1}$	1,009	1,345	1,044	1,084	1,139	1,015	1,291	1,118	1,077	1,298

Сложив числа последней строки табл. 66, получим $\sum_{i=1}^{10} \frac{e^{x_i}}{x_i+1} = 11{,}42$ Искомая оценка в силу (*) равна $I_2^* = 0{,}15 \cdot 11{,}42 = 1{,}713$.

747. Найти оценки I_2^* определенных интегралов:

$$\text{а) } \int_1^3 (x+1)\,dx; \quad \text{б) } \int_0^1 e^{2x}\,dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx;$$

$$\text{г) } \int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}.$$

Указание. Принять в качестве «вспомогательной плотности» $f(x)$ функцию, соответственно равную: а) $(1/4)\,x$; б) $0{,}5(1+2x)$; в) $(8/\pi^2)\,x$; г) $1{,}092/(1+x)$.

748. Вывести формулу $I_3^* = (b-a)\,c\,(n_1/n)$ для оценки определенного интеграла $I = \int_a^b \varphi(x)\,dx$, где подынтегральная функция неотрицательна и ограничена $(0 \leqslant \varphi(x) \leqslant c)$, исходя из истолкования интеграла как площади.

Решение. Введем в рассмотрение двумерную случайную величину (X, Y), распределенную равномерно в прямоугольнике D с основанием $(b-a)$ и высотой c, плотность вероятности которой $f(x, y) = 1/(b-a)\,c$. Составляющая X распределена в интервале (a, b) равномерно с плотностью $1/(b-a)$; составляющая Y распределена в интервале $(0, c)$ с плотностью $1/c$.

Если разыграно n точек (x_i, y_i), принадлежащих прямоугольнику D, из которых n_1 точек оказались под кривой $y = \varphi(x)$, то отношение площади, определяемой интегралом I, к площади прямоугольника D

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)\,dx}{(b-a)\,c} \simeq \frac{n_1}{n}.$$

Отсюда

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\,c\,(n_1 n).$$

Таким образом, в качестве оценки интеграла I можно принять

$$I_3^* = (b-a)\,c\,(n_1/n).$$

749. Найти оценку I_3^* интеграла $\int_0^2 (4-x^2)\,dx$.

Решение. Используем формулу

$$I_3^* = (b-a)\, c\, (n_1/n).$$

В интервале (0, 2) подынтегральная функция $\varphi(x) = 4 - x^2$ неотрицательна и ограничена, причем $\varphi(x) \leqslant \varphi(0) = 4$; следовательно, можно принять $c = 4$.

Введем в рассмотрение двумерную случайную величину (X, Y), распределенную равномерно в прямоугольнике D с основанием $b - a = 2 - 0 = 2$ и высотой $c = 4$, плотность вероятности которой $f(x, y) = 1/(2\cdot 4) = 1/8$.

Разыграем $n = 10$ случайных точек (x_i, y_i), принадлежащих прямоугольнику D. Учитывая, что составляющая X в интервале (0, 2) распределена равномерно с плотностью $f_1(x) = 1/2$ и составляющая Y в интервале (0, 4) распределена равномерно с плотностью $f_2(y) = 1/4$, разыграем координаты случайной точки (x_i, y_i), принадлежащей прямоугольнику D, по паре независимых случайных чисел (r_i, R_i):

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_i} \mathrm{d}x = r_i, \quad \frac{1}{4}\int\limits_0^{y_i} \mathrm{d}y = R_i.$$

Отсюда $x_i = 2r_i$, $y_i = 4R_i$.

Если окажется, что $y_i < 4 - x_i^2$, то точка (x_i, y_i) лежит под кривой $y = \varphi(x)$ и в «счетчик n_1» надо добавить единицу.

Результаты десяти испытаний приведены в табл. 67.

Таблица 67

Номер испытания i	r_i	$x_i=2r_i$	x_i^2	$4-x_i^2$	R_i	$y_i=4R_i$	$y_i<4-x_i^2$
1	0,100	0,200	0,040	3,960	0,973	3,892	1
2	0,253	0,506	0,256	3,744	0,376	1,504	1
3	0,520	1,040	1,082	2,918	0,135	0,540	1
4	0,863	1,726	2,979	1,021	0,467	1,868	
5	0,354	0,708	0,501	3,499	0,876	3,504	
6	0,809	1,618	2,618	1,382	0,590	2,360	
7	0,911	1,822	3,320	0,680	0,737	2,948	
8	0,542	1,084	1,175	2,825	0,048	0,192	1
9	0,056	0,112	0,013	3,987	0,489	1,956	1
10	0,474	0,948	0,899	3,101	0,296	1,184	1

Из табл. 67 находим $n_1 = 6$. Искомая оценка интеграла

$$I_3^* = (b-a)\, c\, (n_1/n) = 2\cdot 4\cdot(6/10) = 4{,}8.$$

750. Найти оценку I_3^* интеграла $\int\limits_1^4 \frac{4}{x}\mathrm{d}x$.

Указание. Для определенности взять 20 пар случайных чисел с тремя знаками после запятой из таблицы приложения 9, начиная с первой строки сверху.

751. Найти оценку I_3^* интеграла $\int\limits_0^1 e^x\,dx$.

Указание*). Для определенности взять 10 пар случайных чисел с тремя знаками после запятой из таблицы приложения 9, начиная с первой строки сверху.

752. Вывести формулу

$$I_4^* = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i)-g(x_i)]+\int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

где $x_i = a+(b-a)r_i$, $g(x)\simeq\varphi(x)$, для оценки интеграла

$$I=\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Решение. Введем в рассмотрение случайную величину X, распределенную равномерно в интервале интегрирования (a, b) с плотностью $f(x)=1/(b-a)$.

Допустим, что найдена такая функция $g(x)$, которая «мало отличается» от $\varphi(x)$ и интеграл от которой можно вычислить, не прибегая к методу Монте-Карло. Тогда математическое ожидание функции

$$F(X)=(b-a)[\varphi(X)-g(X)]+\int\limits_a^b g(x)\,dx$$

равно I.

Действительно, учитывая, что величина X распределена в интервале интегрирования (a, b) равномерно с плотностью $1/(b-a)$, получим

$$M[F(X)]=(b-a)\int\limits_a^b[\varphi(x)-g(x)]\cdot\frac{1}{(b-a)}\cdot dx+\int\limits_a^b g(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx=I.$$

Таким образом, в качестве оценки математического ожидания $M[F(X)]$, а следовательно интеграла I, можно принять среднее арифметическое n значений функции $F(X)$:

$$I_4^*=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i)-g(x_i)]+\int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

где x_i — возможные значения X, которые разыгрывают по формуле

$$x_i=a+(b-a)r_i.$$

753. Найти оценку I_4^* интеграла $I=\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$.

*) Это указание относится и к задачам 754, 755.

Решение. Так как $\sqrt{1+x^2}=1+(1/2)\,x^2+\ldots(|x|\leq 1)$, то примем $g(x)=1+(1/2)\,x^2$. Тогда, полагая число испытаний $n=10$, имеем оценку

$$I_4^*=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left[\sqrt{1+x_i^2}-\left(1+\frac{1}{2}x_i^2\right)\right]+\int_0^1\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$I_4^*=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{10}\left[2\sqrt{1+x_i^2}-x_i^2\right]+\frac{1}{6}. \qquad (*)$$

Учитывая, что $a=0$, $b=1$, возможные значения x_i разыграем по формуле $x_i=a+(b-a)\,r_i=r_i$. Результаты вычислений приведены в табл. 68.

Таблица 68

Номер испытания i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i=r_i$	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
x_i^2	0,010	0,947	0,064	0,141	0,270	0,018	0,745	0,218	0,125	0,767
$1+x_i^2$	1,010	1,947	1,064	1,141	1,270	1,018	1,745	1,218	1,125	1,767
$\sqrt{1+x_i^2}$	1,005	1,395	1,032	1,068	1,127	1,009	1,321	1,104	1,061	1,329
$2\sqrt{1+x_i^2}-x_i^2$	2,000	1,843	2,000	1,995	1,984	2,000	1,897	1,990	1,997	1,891

Сложив числа последней строки табл. 68, найдем сумму 19,597, подставив которую в соотношение (*), получим искомую оценку интеграла

$$I_4^*=(19{,}597/20)+(1/6)=1{,}145.$$

Заметим, что точное значение $I=1{,}147$.

754. Найти оценку I_4^* интеграла $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$.

Указание. Принять функцию $g(x)=1+x$, так как $e^x=1+x+\ldots$

755. Найти оценку I_4^* интеграла $\int_0^1 e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

Указание. Принять функцию $g(x)=1-(x^2/2)$, так как $e^{-x^2/2}=1-(x^2/2)+\ldots$

Часть пятая

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава шестнадцатая

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Основные понятия. Характеристики случайных функций

Случайной функцией $X(t)$ называют функцию неслучайного аргумента t, которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной.

Сечением случайной функции $X(t)$ называют случайную величину, соответствующую фиксированному значению аргумента случайной функции.

Реализацией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию аргумента t, которой может оказаться равной случайная функция в результате испытания.

Таким образом, случайную функцию можно рассматривать как совокупность случайных величин $\{X(t)\}$, зависящих от параметра t, или как совокупность ее возможных реализаций.

Характеристиками случайной функции называют ее моменты, которые являются неслучайными функциями.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента равно математическому ожиданию сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Свойства математического ожидания случайной функции. Свойство 1. *Математическое ожидание неслучайной функции* $\varphi(t)$ *равно самой неслучайной функции:*

$$M[\varphi(t)] = \varphi(t).$$

Свойство 2. *Неслучайный множитель* $\varphi(t)$ *можно выносить за знак математического ожидания:*

$$M[\varphi(t)\cdot X(t)] = \varphi(t)\cdot M[X(t)] = \varphi(t)\cdot m_x(t).$$

Свойство 3. *Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

$$M[X(t)+Y(t)] = m_x(t)+m_y(t).$$

Свойство можно обобщить на n слагаемых функций:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}(t).$$

Следствие. *Если* $X(t)$ — *случайная функция,* $\varphi(t)$ — *неслучайная функция, то*

$$M[X(t)+\varphi(t)] = m_x(t)+\varphi(t).$$

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную неотрицательную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

Средним квадратическим отклонением случайной функции называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Свойства дисперсии случайной функции. Свойство 1. *Дисперсия неслучайной функции $\varphi(t)$ равна нулю:*

$$D[\varphi(t)] = 0.$$

Свойство 2. *Дисперсия суммы случайной функции $X(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$ равна дисперсии случайной функции:*

$$D[X(t) + \varphi(t)] = D_x(t).$$

Свойство 3. *Дисперсия произведения случайной функции $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию случайной функции:*

$$D[X(t)\cdot\varphi(t)] = \varphi^2(t)\cdot D_x(t).$$

Центрированной случайной функцией называют разность между случайной функцией и ее математическим ожиданием:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t).$$

Корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $K_x(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)].$$

При равных между собой значениях аргументов $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция случайной функции равна дисперсии этой функции:

$$K_x(t, t) = D_x(t).$$

Свойства корреляционной функции. Свойство 1. *При перестановке аргументов корреляционная функция не изменяется (свойство симметрии):*

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

Свойство 2. *Прибавление к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет ее корреляционной функции: если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$*, то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2).$$

Свойство 3. *При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$: если $Y(t) = X(t)\cdot\varphi(t)$, то*

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)\cdot\varphi(t_1)\,\varphi(t_2).$$

Свойство 4. *Абсолютная величина корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений:*

$$K_x(t_1, t_2) \leqslant \sqrt{D_x(t_1)\,D_x(t_2)}.$$

Нормированной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых переменных t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно коэффициенту корреляции сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$\rho_x(t_1,\ t_2)=\frac{K_x(t_1,\ t_2)}{\sigma_x(t_1)\cdot\sigma_x(t_2)}=\frac{K_x(t_1,\ t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,\ t_1)}\ \sqrt{K_x(t_2,\ t_2)}}.$$

Абсолютная величина нормированной корреляционной функции не превышает единицы: $|\rho_x(t_1,\ t_2)|\leqslant 1$.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию $R_{xy}(t_1,\ t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений обеих функций, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$R_{xy}(t_1,\ t_2)=M\,[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

Коррелированными называют две случайные функции, если их взаимная корреляционная функция не равна тождественно нулю.

Некоррелированными называют две случайные функции, взаимная корреляционная функция которых тождественно равна нулю.

Свойства взаимной корреляционной функции. Свойство 1. *При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется:*

$$R_{xy}(t_1,\ t_2)=R_{yx}(t_2,\ t_1).$$

Свойство 2. *Прибавление к случайным функциям* $X(t)$ и $Y(t)$ *неслучайных слагаемых* $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ *не изменяет их взаимной корреляционной функции: если*

$$X_1(t)=X(t)+\varphi(t),\quad Y_1(t)=Y(t)+\psi(t),$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1,\ t_2)=R_{xy}(t_1,\ t_2).$$

Свойство 3. *При умножении случайных функций* $X(t)$ и $Y(t)$ *на неслучайные множители, соответственно* $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, *взаимная корреляционная функция умножается на произведение* $\varphi(t_1)\,\psi(t_2)$: *если*

$$X_1(t)=X(t)\cdot\varphi(t),\quad Y_1(t)=Y(t)\cdot\psi(t),$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1,\ t_2)=R_{xy}(t_1,\ t_2)\cdot\varphi(t_1)\,\psi(t_2).$$

Свойство 4. *Абсолютная величина взаимной корреляционной функции двух случайных функций* $X(t)$ и $Y(t)$ *не превышает среднего геометрического их дисперсий:*

$$|R_{xy}(t_1,\ t_2)|\leqslant\sqrt{D_x(t_1)\,D_y(t_2)}.$$

Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых аргументов t_1 и t_2:

$$\rho_{xy}(t_1,\ t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,\ t_2)}{\sigma_x(t_1)\,\sigma_y(t_2)}=\frac{R_{xy}(t_1,\ t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)}\ \sqrt{D_y(t_2)}}.$$

Абсолютная величина нормированной взаимной корреляционной функции не превышает единицы: $|\rho_{xy}(t_1,\ t_2)|\leqslant 1$.

756. Случайная функция $X(t)=(t^2+1)U$, где U — случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу $(0,10)$. Найти реализации функции $X(t)$ в двух испытаниях, в которых величина U приняла значения: а) $u_1=2$; б) $u_2=3,5$.

757. Случайная функция $X(t)=U\sin t$, где U — случайная величина. Найти сечения $X(t)$, соответствующие фиксированным значениям аргумента: а) $t_1=\pi/6$; б) $t_2=$ $=\pi/2$.

758. Доказать, что неслучайный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[X(t)\cdot\varphi(t)]=\varphi(t)\cdot m_x(t).$$

759. Найти математическое ожидание случайной функции $X(t)=Ue^t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=5$.

760. Доказать, что математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых:

Указание. Принять во внимание, что при любом фиксированном значении аргумента сечение случайной функции есть случайная величина.

761. Найти математическое ожидание случайной функции: а) $X(t)=Ut^2+2t+1$; б) $X(t)=U\sin 4t+V\cos 4t$, где U и V — случайные величины, причем $M(U)=M(V)=$ $=1$.

762. Доказать, что корреляционная функция случайной функции $X(t)$ равна корреляционной функции центрированной случайной функции: $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)$.

763. Доказать, что при равных между собой значениях аргументов корреляционная функция случайной функции $X(t)$ равна ее дисперсии: $K_x(t,\ t)=D_x(t)$.

Указание. Принять во внимание, что, по определению дисперсии случайной величины X, $D_x=M\left[(X-m_x)^2\right]=M\left[(\overset{\circ}{X})^2\right]$.

764. Доказать, что от прибавления к случайной функции $X(t)$ неслучайной функции $\varphi(t)$ корреляционная функция не изменяется: если $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$, то $K_y(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)$.

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$m_y(t)=M[X(t)+\varphi(t)]=m_x(t)+\varphi(t).$$

Найдем центрированную функцию:

$$\overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t)=[X(t)+\varphi(t)]-[m_x(t)+\varphi(t)]=$$
$$=X(t)-m_x(t)=\overset{\circ}{X}(t).$$

Таким образом, $\overset{\circ}{Y}(t)=\overset{\circ}{X}(t)$.

Найдем корреляционную функцию *):

$$K_y=M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]=K_x.$$

Итак, $K_y=K_x$.

765. Известна корреляционная функция K_x случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t)=X(t)+t^2$.

766. Доказать, что при умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$.

767. Известна корреляционная функция K_x случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции: а) $Y(t)=X(t)\cdot(t+1)$; б) $Z(t)=CX(t)$, где C — постоянная.

768. Пусть $X(t)$ — случайная функция, $\varphi(t)$ — неслучайная функция. Доказать: если $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$, то $D_y(t)=D_x(t)$.

Решение. Первый способ. При любом фиксированном значении аргумента сечение $X(t)$ — случайная величина, $\varphi(t)$ — постоянное число. Известно, что прибавление к случайной величине постоянного числа не изменяет ее дисперсии, поэтому $D_y(t)=D[X(t)+\varphi(t)]=D_x(t)$.

Второй способ. Прибавление к случайной функции неслучайного слагаемого не изменяет корреляционной функции: $K_y(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2)$. При равных значениях аргументов получим $K_y(t, t)=K_x(t, t)$, или окончательно $D_y(t)=D_x(t)$.

769. Известна дисперсия $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t)=X(t)+2$.

770. Дано: $X(t)$ — случайная функция, $\varphi(t)$ — неслучайная функция. Доказать: если $Y(t)=X(t)\cdot\varphi(t)$, то $D_y(t)=\varphi^2(t)\cdot D_x(t)$.

771. Известна дисперсия случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t)=(t+3)X(t)$.

772. На вход усилительного звена подается случайная функция $X(t)$, математическое ожидание и корреляционная функция которой известны: $m_x(t)=t$, $K_x(t_1, t_2)=e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}$ $(\alpha>0)$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию выходной случайной функции $Y(t)$, если коэффициент усиления $k=5$.

Указание. Учесть, что выходная функция $Y(t)=5X(t)$.

*) В этой задаче и в ряде последующих задач для простоты записи скобки (t_1, t_2) опущены.

773. Доказать, что корреляционная функция произведения двух центрированных некоррелированных случайных функций равна произведению корреляционных функций сомножителей.

Решение. Пусть $Z(t)=\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t)$. Математическое ожидание произведения некоррелированных функций равно произведению математических ожиданий сомножителей, поэтому $m_z(t)=m_{\overset{\circ}{x}}(t)m_{\overset{\circ}{y}}(t)$. Математическое ожидание любой центрированной функции равно нулю, поэтому $m_z(t)=0\cdot 0=0$ и, следовательно, $\overset{\circ}{Z}(t)=\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t)$.

Искомая корреляционная функция

$$K_z=M[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{Z}(t_2)]=M\{[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_1)][\overset{\circ}{X}(t_2)\overset{\circ}{Y}(t_2)]\}.$$

Перегруппируем сомножители под знаком математического ожидания:

$$K_z=M\{[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)][\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]\}.$$

Учитывая, что заданные функции не коррелированы, получим

$$K_z=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]\cdot M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)],$$

или $K_z=K_xK_y$.

Корреляционная функция случайной функции равна корреляционной функции центрированной функции (см. задачу 762), поэтому окончательно имеем $K_z=K_{\overset{\circ}{x}}K_{\overset{\circ}{y}}$.

774. Доказать, что корреляционная функция произведения трех центрированных независимых случайных функций равна произведению корреляционных функций сомножителей.

775. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию случайной функции $X(t)=U\cos 2t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=5$, $D(U)=6$.

Решение. а) Найдем искомое математическое ожидание (неслучайный множитель $\cos 2t$ вынесем за знак математического ожидания):

$$M[X(t)]=M[U\cos 2t]=\cos 2t\, M(U)=5\cos 2t,$$

б) Найдем центрированную функцию:

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=U\cos 2t-5\cos 2t=(U-5)\cos 2t.$$

Найдем искомую корреляционную функцию:

$$K_x(t_1,\ t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]=M\{[(U-5)\cos 2t_1][(U-5)\cos 2t_2]\}=$$
$$=\cos 2t_1\cos 2t_2 M(U-5)^2.$$

Учитывая, что $M(U-5)^2=D(U)=6$, окончательно имеем

$$K_x(t_1,\ t_2)=6\cos 2t_1\cos 2t_2.$$

в) Найдем искомую дисперсию, для чего положим $t_1=t_2=t$:

$$D_x(t)=K_x(t,\ t)=6\cos^2 2t.$$

776. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию случайной функции $X(t)=U\sin 3t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=10$, $D(U)=0{,}2$.

777. Известна корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)=t_1t_2+5t_1^2t_2^2$ случайной функции $X(t)$. а) Убедиться на примере при $t_1=1$, $t_2=2$ что абсолютная величина корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений; б) найти нормированную корреляционную функцию и вычислить коэффициент корреляции сечений, соответствующих значениям аргументов $t_1=1$, $t_2=4$.

778. Задана корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)=t_1t_2e^{-|t_2-t_1|}$ случайной функции $X(t)$. Найти нормированную корреляционную функцию.

779. Найти взаимную корреляционную функцию двух случайных функций: $X(t)=t^2U$ и $Y(t)=t^3U$, где U — случайная величина, причем $D(U)=5$.

Решение. Найдем математические ожидания:

$$m_x(t)=M(t^2U)=t^2m_u,\quad m_y(t)=M(t^3U)=t^3m_u.$$

Найдем центрированные функции:

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=t^2U-t^2m_u=t^2(U-m_u),$$
$$\overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t)=t^3U-t^3m_u=t^3(U-m_u).$$

Найдем взаимную корреляционную функцию:

$$R_{xy}=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]=M\left\{\left[t_1^2(U-m_u)\right]\left[t_2^3(U-m_u)\right]\right\}=$$
$$=t_1^2t_2^3M[(U-m_u)^2]=t_1^2t_2^3D(U)=5t_1^2t_2^3.$$

Итак, $R_{xy}=5t_1^2t_2^3$.

780. Доказать, что взаимная корреляционная функция случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ равна взаимной корреляционной функции центрированных функций $\overset{\circ}{X}(t)$ и $\overset{\circ}{Y}(t)$.

781. Доказать, что при одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция двух случайных функций не изменяется: $R_{xy}(t_1, t_2)=R_{yx}(t_2, t_1)$.

782. Задана взаимная корреляционная функция $R_{xy}(t_1, t_2)=\cos(\alpha t_1+\beta t_2)$. Написать взаимную корреляционную функцию $R_{yx}(t_1, t_2)$.

783. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию случайных функций $X(t) = tU$ и $Y(t) = (t+1)U$, где U — случайная величина, причем дисперсия $D(U) = 10$.

§ 2. Характеристики суммы случайных функций

Теорема 1. *Математическое ожидание суммы конечного числа случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Следствие. *Математическое ожидание суммы случайной функции и случайной величины равно сумме их математических ожиданий.*

Теорема 2. *Корреляционная функция суммы двух коррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых и взаимной корреляционной функции, которая прибавляется дважды (с разным порядком следования аргументов): если $Z(t) = X(t) + Y(t)$, то*

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + R_{xy}(t_1, t_2) + R_{xy}(t_2, t_1).$$

Теорема обобщается на n попарно коррелированных функций: если $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$, то

$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t_1, t_2) + \sum_{i \neq j} R_{x_i x_j}(t_1, t_2),$$

где пары индексов (i, j) второго слагаемого есть размещения из чисел $1, 2, \ldots, n$, взятых по два.

Следствие 1. *Корреляционная функция суммы некоррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых.*

Следствие 2. *Корреляционная функция случайной функции и некоррелированной с ней случайной величины равна сумме корреляционной функции случайной функции и дисперсии случайной величины.*

784. Заданы корреляционные и взаимные корреляционные функции случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Z(t) = X(t) + Y(t)$, если рассматриваемые функции: а) коррелированы; б) не коррелированы.

785. Известны математические ожидания $m_x(t) = 2t + 1$, $m_y(t) = t - 1$ и корреляционные функции $K_x = t_1 t_2$, $K_y = e^{-4(t_2 - t_1)^2}$ некоррелированных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию случайной функции $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

786. Заданы корреляционные и взаимные корреляционные функции случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию случайных функций $U(t)=aX(t)+by(t)$ и $V(t)=cX(t)+dY(t)$, где a, b, c, d — постоянные действительные числа.

787. Заданы корреляционные и взаимные корреляционные функции случайных функций $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $U(t)=X(t)+Y(t)+Z(t)$, если рассматриваемые функции: а) попарно коррелированы; б) попарно не коррелированы.

788. Доказать, что формулу $K_y=\sum_{i=1}^{n} K_{x_i}+\sum_{i\neq j} R_{x_ix_j}$ для отыскания корреляционной функции суммы $Y(t)=\sum X_i(t)$ n коррелированных случайных функций можно записать в виде $K_y=\sum_{\substack{i=1,\\ j=1}} R_{x_ix_j}$.

789. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $X(t)=Ut+Vt^2$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем $M(U)=4$, $M(V)=7$, $D(U)=0{,}1$, $D(V)=2$.

Указание. Принять во внимание, что величины U и V не коррелированы, поэтому их корреляционный момент $M[U-m_u)(V-m_v)]=0$.

790. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $X(t)=U\sin t+V\cos t$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем $M(U)=1$, $M(V)=8$, $D(U)=D(V)=4$.

791. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $X(t)=U\cos 2t+V\sin t+t$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем $M(U)=1$, $M(V)=2$, $D(U)=3$, $D(V)=4$

Указание. Прибавление к случайной функции неслучайного слагаемого t не изменяет ее корреляционной функции, поэтому достаточно найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t)=U\cos 2t+V\sin t$.

792. Заданы случайные функции $X(t)=U\cos t+V\sin t$, $Y(t)=U\cos 3t+V\sin 3t$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем $M(U)=M(V)=0$, $D(U)=D(V)=5$. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{xy}(t_1, t_2)$.

793. Найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)=U_1\cos\omega_1 t+V_1\sin\omega_1 t+U_2\cos\omega_2 t+V_2\sin\omega_2 t$,

где ω_1, ω_2 — постоянные числа; U_1, U_2, V_1, V_2 — попарно некоррелированные случайные величины, причем их математические ожидания равны нулю, дисперсии величин U_1 и V_1 равны D_1, дисперсии величин U_2 и V_2 равны D_2.

§ 3. Характеристики производной от случайной функции

Говорят, что последовательность случайных величин X_1, X_2, ..., X_n *сходится в среднеквадратичном* к случайной величине X, если математическое ожидание квадрата разности $X_n - X$ стремится к нулю при $n \to \infty$: $M[(X_n - X)^2] = 0$. Случайную величину X называют *пределом в среднеквадратичном* последовательности случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, ... и пишут: $X = \text{l.i.m. } X_n$.

Случайную функцию $X(t)$ называют *дифференцируемой*, если существует такая функция $X'(t)$ (ее называют *производной*), что

$$\text{l.i.m. } M\left[\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} - X'(t)\right] = 0.$$

Таким образом, *производной случайной функции* $X'(t)$ называют среднеквадратичный предел отношения приращения функции к приращению аргумента Δt при $\Delta t \to 0$:

$$X'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

Теорема 1. *Математическое ожидание производной $X(t) = \dot{x}$ от случайной функции $X(t)$ равно производной от ее математического ожидания:*

$$m_{\dot{x}}(t) = m_x(t).$$

Теорему 1 можно обобщить: *математическое ожидание производной порядка n от случайной функции равно производной этого же порядка от ее математического ожидания.*

Теорема 2. *Корреляционная функция производной от случайной функции $X(t)$ равна второй смешанной частной производной от ее корреляционной функции:*

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Теорема 3. *Взаимная корреляционная функция случайной функции $X(t)$ и ее производной равна частной производной от корреляционной функции по соответствующему аргументу [если индекс $\dot{x}$ записан на первом (втором) месте, то дифференцируют по первому (второму) аргументу]:*

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}, \quad R_{\dot{x}x}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1}.$$

794. Задано математическое ожидание $m_x(t) = t^3 + 2t + 1$ случайной функции $X(t)$. Найти математическое ожидание ее производной.

795. Задано математическое ожидание $m_x(t) = t^2 + 4$ случайной функции $X(t)$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t) = tX'(t) + t^2$.

796. Доказать, что математическое ожидание второй производной от дважды дифференцируемой случайной функции $X(t)$ равно второй производной от ее математического ожидания.

797. Задана корреляционная функция $K_x = 5e^{-(t_2-t_1)^2}$ случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию ее производной.

798*. Задана случайная функция $X(t) = Ue^{3t}\cos 2t$, где U — случайная величина, причем $M(U) = 4$, $D(U) = 1$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию ее производной.

799. На вход дифференцирующего звена поступает случайная функция $X(t)$, корреляционная функция которой $K_x = [D_x \cos\omega(t_2 - t_1)]/(t_1 + t_2)$. Найти корреляционную функцию выходной функции $Y(t) = X'(t)$.

800. На вход дифференцирующего звена поступает случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t) = 5\sin t$ и корреляционной функцией $K_x = 3e^{-0{,}5(t_2-t_1)^2}$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию выходной функции $Y(t) = X'(t)$.

801. Доказать, что взаимная корреляционная функция случайной функции $X(t)$ и ее производной равна частной производной от корреляционной функции по аргументу, который «соответствует производной» [если индекс $\dot{x}$ стоит на первом (втором) месте, то надо дифференцировать по первому (второму) аргументу]:

$$\text{а) } R_{x\dot{x}} = \frac{\partial K_x}{\partial t_2}; \quad \text{б) } R_{\dot{x}x} = \frac{\partial K_x}{\partial t_1}.$$

Решение. а) По определению взаимной корреляционной функции,

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}{}'(t_2)].$$

Произведение под знаком математического ожидания можно представить в виде частной производной по аргументу t_2:

$$\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}{}'(t_2) = \overset{\circ}{X}(t_1)\frac{d\overset{\circ}{X}(t_2)}{dt_2} = \frac{\partial[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_2},$$

поэтому $R_{x\dot{x}} = M\left\{\dfrac{\partial[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_2}\right\}$.

Учитывая, что операции дифференцирования и нахождения математического ожидания можно переставлять, окончательно получим

$$R_{x\dot{x}} = \frac{\partial M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_2} = \frac{\partial K_x}{\partial t_2}.$$

б) Рекомендуем доказать самостоятельно.

802. Заданы корреляционные функции: а) $K_x = e^{-(t_2-t_1)^2}$; б) $K_x = t_1 t_2 e^{t_1+t_2}$. Найти взаимные корреляционные функции случайной функции $X(t)$ и ее производной.

803. Известна взаимная корреляционная функция $R_{x\dot{x}}$ случайной функции $X(t)$ и ее производной. Найти корреляционную функцию производной.

804. Известна взаимная корреляционная функция $R_{x\dot{x}} = t_1(t_2+1)e^{t_1+t_2}$ случайной функции $X(t)$ и ее производной. Найти корреляционную функцию производной.

805. Найти корреляционную функцию случайной функции $Z(t) = X(t) + X'(t)$, зная корреляционную функцию K_x.

Решение. В силу теоремы 2 (§ 2), $K_z = K_x + K_{\dot{x}} + R_{x\dot{x}} + R_{\dot{x}x}$. Учитывая, что корреляционная функция производной (теорема 2)

$$K_{\dot{x}} = \frac{\partial^2 K_x}{\partial t_1 \, \partial t_2}$$

и взаимные корреляционные функции (теорема 3)

$$R_{x\dot{x}} = \frac{\partial K_x}{\partial t_2}, \quad R_{\dot{x}x} = \frac{\partial K_x}{\partial t_1},$$

окончательно получим искомую корреляционную функцию:

$$K_z = K_x + \frac{\partial^2 K_x}{\partial t_1 \, \partial t_2} + \frac{\partial K_x}{\partial t_2} + \frac{\partial K_x}{\partial t_1}.$$

806. Найти корреляционную функцию случайной функции $Z(t) = X(t) + X'(t)$, зная корреляционную функцию $K_x = 5e^{-(t_2-t_1)^2}$.

Указание. Использовать задачи 797 и 805.

807. Доказать, что взаимная корреляционная функция случайной функции и ее второй производной равна частной производной второго порядка от корреляционной функции по аргументу, который «соответствует» производной [если индекс $\ddot{x}$ на первом (втором) месте, то дифференцируют корреляционную функцию по первому (второму) аргументу]:

$$R_{\ddot{x}x}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x}{\partial t_1^2}, \quad R_{x\ddot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x}{\partial t_2^2}.$$

808. Задана корреляционная функция $K_x = e^{-(t_2-t_1)^2}$. Найти взаимные корреляционные функции случайной функции $X(t)$ и ее второй производной.

809*. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = U(t)X(t) + V(t)X'(t)$, где $X(t)$ — дифференцируемая случайная функция, корреляционная функция которой известна; $U(t)$ и $V(t)$ — неслучайные функции.

810*. Задана корреляционная функция случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию R_{yz} случайных функций $Y(t)=aX(t)+bX'(t)$ и $Z(t)=cX'(t)+dX(t)$, где a, b, c, d — постоянные действительные числа.

§ 4. Характеристики интеграла от случайной функции

Интегралом от случайной функции $X(t)$ по отрезку $[0, t]$ называют предел в среднеквадратичном интегральной суммы при стремлении к нулю частичного интервала Δs_i максимальной длины (переменная интегрирования обозначена через s, чтобы отличить ее от предела интегрирования t):

$$Y(t)=\underset{\Delta s_i \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum X(s_i)\,\Delta s_i=\int_0^t X(s)\,ds.$$

Теорема 1. *Математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания:*

$$\text{если } Y(t)=\int_0^t X(s)\,ds, \text{ то } m_y(t)=\int_0^t m_x(s)\,ds.$$

Теорема 2. *Корреляционная функция интеграла от случайной функции равна двойному интегралу от ее корреляционной функции:*

$$\text{если } Y(t)=\int_0^t X(s)\,ds, \quad \text{то } K_y=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(s_1, s_2)\,ds_1\,ds_2.$$

Теорема 3. *Взаимная корреляционная функция случайной функции* $X(t)$ и интеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)\,ds$ *равна интегралу от корреляционной функции случайной функции* $X(t)$:

$$R_{xy}=\int_0^{t_2} K_x(t_1, s)\,ds.$$

811. Зная математическое ожидание $m_x(t)=3t^2+1$ случайной функции $X(t)$, найти математическое ожидание интеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)\,ds$.

Решение. Искомое математическое ожидание

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(s)\,ds=\int_0^t (3s^2+1)\,ds=t^3+t.$$

812. Найти математическое ожидание интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,\mathrm{d}s$, зная математическое ожидание случайной функции $X(t)$: а) $m_x(t)=\cos t$; б) $m_x(t)=4\cos^2 t$; в) $m_x(t)=t-\cos 2t$.

813. Задана случайная функция $X(t)=Ue^{\alpha t}\cos\beta t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=5$. Найти математическое ожидание интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,\mathrm{d}s$.

Указание. Найти сначала $m_x(t)$.

814. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,\mathrm{d}s$, зная случайную функцию $X(t)$: а) $X(t)=Ue^{\alpha t}\sin t$; б) $X(t)=U\sin^2 t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=2$.

815. Задана случайная функция $X(t)=U\cos^2 t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=2$. Найти математическое ожидание случайной функции

$$Y(t)=(t^2+1)\int\limits_0^t X(s)\,\mathrm{d}s.$$

816. Задана корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)=\cos\omega t_1\cos\omega t_2$ случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,\mathrm{d}s$.

Решение. а) Корреляционная функция интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,\mathrm{d}s$ равна двойному интегралу от заданной корреляционной функции:

$$K_y(t_1, t_2)=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_x(s_1, s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}\cos\omega s_1\cos\omega s_2\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2=$$

$$=\int\limits_0^{t_1}\cos\omega s_1\,\mathrm{d}s_1\int\limits_0^{t_2}\cos\omega s_2\,\mathrm{d}s_2=(\sin\omega t_1\sin\omega t_2)/\omega^2.$$

б) Найдем искомую дисперсию, для чего в найденной корреляционной функции положим $t_1=t_2=t$:

$$D_y(t)=K_y(t,t)=\sin^2\omega t/\omega^2.$$

817. Задана корреляционная функция $K_x = \sin\omega t_1 \sin\omega t_2$ случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$.

818. На вход интегрирующего устройства поступает случайная функция $X(t)$, корреляционная функция которой $K_x = t_1 t_2$. Найти дисперсию на выходе интегратора.

Указание. Вычислить сначала корреляционную функцию выходной функции $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$.

819. Найти дисперсию интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$, зная корреляционную функцию случайной функции $X(t)$: а) $K_x = 2t_1^2 t_2^2 + 3t_1 t_2$; б) $K_x = t_1 t_2 e^{t_1 + t_2}$; в) $K_x = 1/1 + (t_2 - t_1)^2$; г) $K_x = e^{3(t_1 + t_2)} \cos 2t_1 \cos 2t_2$.

820. На вход интегрирующего устройства поступает случайная функция $X(t)$, математическое ожидание и корреляционная функция которой известны: $m_x(t) = \cos^2 t$, $K_x = \cos\omega t_1 \cos\omega t_2$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию на выходе интегратора.

821*. Задана случайная функция $X(t) = Ue^{3t}\cos 2t$, где U — случайная величина, причем $M(U) = 5$, $D(U) = 1$. Найти: а) математическое ожидание, б) корреляционную функцию; в) дисперсию интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Решение, а) Вычислим предварительно математическое ожидание заданной функции, учитывая, что $M(U) = 5$:

$$m_x(t) = M[Ue^{3t}\cos 2t] = Ue^{3t}\cos 2t \cdot M(U) = 5e^{3t}\cos 2t.$$

Найдем искомое математическое ожидание:

$$m_y(t) = \int\limits_0^t m_x(s)\,ds = 5\int\limits_0^t e^{3s}\cos 2s\,ds.$$

Интегрируя дважды по частям, окончательно получим

$$m_y(t) = (5/13)[e^{3t}(2\sin 2t + 3\cos 2t) - 3].$$

б) Вычислим предварительно корреляционную функцию заданной функции. Приняв во внимание, что центрированная функция

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = e^{3t}\cos 2t - 5e^{3t}\cos 2t = e^{3t}\cos 2t\,(U - 5),$$

имеем

$$K_x = M\{[e^{3t}\cos 2t_1 (U-5)][e^{3t_2}\cos 2t_2 (U-5)] = \\ = e^{3(t_1+t_2)}\cos 2t_1 \cos 2t_2 \cdot M(U-5)^2.$$

По условию, $D(U)=M(U-5)^2=1$, следовательно,

$$K_x = e^{3(t_1+t_2)} \cos 2t_1 \cos 2t_2.$$

Найдем искомую корреляционную функцию:

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{3(s_1+s_2)} \cos 2s_1 \cos 2s_2 \, ds_1 \, ds_2.$$

Выполнив интегрирование, окончательно имеем

$$K_y(t_1, t_2) = (1/169)\,[e^{3t_1}(2\sin 2t_1 + 3\cos 2t_1) - 3]\,[e^{3t}(2\sin 2t_2 + 3\cos 2t_2) - 3].$$

в) Найдем искомую дисперсию:

$$D_y(t) = K_y(t, t) = (1/169)\,[e^{3t}(2\sin 2t + 3\cos 2t) - 3]^2.$$

822. Найти дисперсию интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)\,ds$, зная случайную функцию: а) $X(t) = U\cos 2t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=5$, $D(U)=6$; б) $X(t)=U\sin t$, причем $M(U)=2$, $D(U)=3$.

823. Задана корреляционная функция $K_x = e^{-(t_1+t_2)}$. Найти корреляционную функцию случайной функции

$$Y(t) = t\int_0^t X(s)\,ds.$$

Указание. Найти сначала корреляционную функцию интеграла, а затем использовать свойство 3 корреляционной функции (§ 1).

824. Задана случайная функция $X(t) = U\cos 3t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=1$, $D(U)=1$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию случайной функции

$$Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(s)\,ds.$$

825*. Задана корреляционная функция $K_x = e^{\alpha(t_1+t_2)} \cos\beta t_1 \cos\beta t_2$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t) = \frac{1}{2t^2}\int_0^t X(s)\,ds$.

826*. Задана корреляционная функция $K_x = De^{-|t_2-t_1|}$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)\,ds$.

Решение. Используем формулу

$$K_y=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(s_1, s_2)\, ds_1\, ds_2 = D\int_0^{t_1} ds_1 \int_0^{t_2} e^{-|s_2-s_1|}\, ds_2. \qquad (*)$$

1. Пусть $t_1 < t_2$. Тогда внутренний интеграл

$$\int_0^{t_2} e^{-|s_2-s_1|}\, ds_2=\int_0^{s_1} e^{-(s_1-s_2)}\, ds_2+\int_{s_1}^{t_2} e^{-(s_2-s_1)}\, ds_2.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\int_0^{t_2} e^{-|s_2-s_1|}\, ds_2=2-e^{-s_1}-e^{-s_1}-e^{-(t_2-s_1)}. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*):

$$K_y(t_1, t_2)=D\int_0^{t_1}[2-e^{-s_1}-e^{\ (t_2-s_1)}]\, ds_1.$$

После интегрирования получим корреляционную функцию при $t_1<t_2$:

$$K_y(t_1, t_2)=D\,[2t_1+e^{-t_1}+e^{-t_2}-e^{-(t_2-t_1)}-1]. \qquad (***)$$

2. Пусть $t_2 < t_1$. Используя свойство симметрии (при перестановке аргументов корреляционная функция не изменится), сразу получим корреляционную функцию интеграла при $t_2 < t_1$:

$$K_y(t_2, t_1)=D\,[2t_2+e^{-t_2}+e^{-t_1}-e^{-(t_1-t_2)}-1].$$

3. Объединив эту формулу с формулой (***), окончательно имеем для любых t_1 и t_2

$$K_y(t_1, t_2)=D\,[2\min(t_1, t_2)+e^{-t_1}+e^{-t_2}-e^{-|t_2-t_1|}-1],$$

где $\min(t_1, t_2)$ — наименьшее из чисел t_1 и t_2.

Найдем искомую дисперсию:

$$D_y(t)=K_y(t, t)=2D\,(t+e^{-t}-1).$$

827*. Заданы математическое ожидание $m_x(t)=3+4t$, корреляционная функция $K_x=10e^{-2|t_2-t_1|}$. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию интеграла

$$Y(t)=\int_0^t X(s)\, ds.$$

828. Доказать, что если известна корреляционная функция случайной функции $X(t)$, то взаимные корреляционные функции случайных функций $X(t)$ и $Y(t)=$

$=\int_0^t X(s)\,\mathrm{d}s$ выражаются интегралами:

а) $R_{xy}=\int_0^{t_2} K_x(t_1,\ s)\,\mathrm{d}s$; б) $R_{yx}=\int_0^{t_1} K_x(s,\ t_2)\,\mathrm{d}s$.

Решение. По определению взаимной корреляционной функции, $R_{xy}=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]$. Найдем центрированную функцию:

$$\overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t)=\int_0^t X(s)\,\mathrm{d}s-\int_0^t m_x(s)\,\mathrm{d}s=$$

$$=\int_0^t [X(s)-m_x(s)]\,ds=\int_0^t \overset{\circ}{X}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Следовательно,

$$R_{xy}=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\int_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(s)\,\mathrm{d}s\right]=$$

$$=M\left[\int_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

Операции нахождения математического ожидания и интегрирования можно менять местами, поэтому

$$R_{xy}=\int_0^{t_2} M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(s)]\,\mathrm{d}s=\int_0^{t_2} K_x(t_1,\ s)\,\mathrm{d}s.$$

б) Доказать самостоятельно.

829. Найти взаимные корреляционные функции случайных функций $X(t)$ и $Y(t)=\int_0^t X(s)\,\mathrm{d}s$, если известна корреляционная функция K_x случайной функции $X(t)$: а) $K_x=2t_1t_2+1$; б) $K_x=\cos t_1\cos t_2$; в) $K_x=t_1t_2e^{t_1+t_2}$.

Глава семнадцатая

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Характеристики стационарной случайной функции

Стационарной называют случайную функцию $X(t)$, математическое ожидание которой постоянно при всех значениях аргумента t и корреляционная функция которой зависит только от разности аргументов t_2-t_1. Отсюда следует, что:

1. Корреляционная функция стационарной случайной функции есть функция одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_x(t_1, t_2) = k_x(t_2 - t_1) = k_x(\tau).$$

2. Дисперсия стационарной случайной функции постоянна при всех значениях аргумента t и равна значению корреляционной функции в начале координат $(\tau = 0): D_x(t) = k_x(0)$.

Корреляционная функция стационарной функции обладает следующими свойствами.

Свойство 1. *Корреляционная функция стационарной случайной функции — четная функция:* $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$.

Свойство 2. *Абсолютная величина корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает ее значения в начале координат:* $|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0)$.

Нормированной корреляционной функцией стационарной случайной функции называют неслучайную функцию аргумента τ:

$$\rho_x(\tau) = k_x(\tau)/k_x(0).$$

Абсолютная величина нормированной коорреляционной функции не превышает единицы: $|\rho_x(\tau)| \leqslant 1$.

830. Задана случайная функция $X(t) = \cos(t + \varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что $X(t)$ — стационарная функция.

Решение. Найдем математическое ожидание $X(t)$:

$$m_x(t) = M[\cos(t + \varphi)] = M[\cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi] =$$
$$= \cos t \cdot M[\cos \varphi] - \sin t \cdot M[\sin \varphi].$$

Учитывая, что (см. гл. VI, § 3)

$$M[\cos \varphi] = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0, \quad M[\sin \varphi] = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 0,$$

окончательно получим $m_x(t) = 0$.

Найдем корреляционную функцию случайной функции $X(t)$. Приняв во внимание, что центрированная функция $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t) - \cos(t + \varphi)$, имеем

$$K_x = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] = M[\cos(t_1 + \varphi)\cos(t_2 + \varphi)].$$

Выполнив элементарные выкладки, найдем

$$K_x = (1/2)\cos(t_2 - t_1) + (1/2) M[\cos(t_2 + t_1 + 2\varphi)].$$

Легко убедиться, что математическое ожидание второго слагаемого равно нулю, поэтому окончательно получим $K_x = (1/2)\cos(t_2 - t_1)$.

Итак, математическое ожидание функции $X(t)$ постоянно при всех значениях аргумента и корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Следовательно, $X(t)$ — стационарная случайная функция.

831. Задана случайная функция $X(t) = \sin(t + \varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что $X(t)$ — стационарная функция.

832. Доказать, что если $X(t)$ — стационарная случайная функция, Y — случайная величина, не связанная с $X(t)$, то случайная функция $Z(t)=X(t)+Y$ стационарна.

833. Доказать, что если $X(t)$ — стационарная случайная функция, $Y=X(t_0)$ — случайная величина, то случайная функция $Z(t)=X(t)+Y$ нестационарна.

834. Стационарна ли случайная функция $X(t)=U\cos 2t$, где U — случайная величина?

835. Является ли стационарной случайная функция $X(t)=U\sin t+V\cos t$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем $m_u=m_v=0$, $D_u=D_v=D$?

836. Задана случайная функция $X(t)=t^2+U\sin t+V\cos t$, где U и V — случайные величины, причем $M(U)=M(V)=0$, $M(UV)=0$; $D(U)=D(V)=10$. Доказать, что: а) $X(t)$ — нестационарная функция; б) $\overset{\circ}{X}(t)$ — стационарная функция.

837. Будет ли стационарной случайная функция $X(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$, где a, ω — положительные постоянные числа: φ — случайная величина, плотность распределения которой $f(\varphi)=\cos\varphi$ в интервале $(0, \pi/2)$?

838*. Доказать нестационарность случайной функции $X(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$, где a, ω — положительные числа; φ — нормально распределенная случайная величина, плотность вероятности которой $f(\varphi)=\left(1/\sqrt{2\pi}\right)e^{(-\varphi^2/2)}$.

Решение. Найдем математическое ожидание заданной функции:

$$m_x(t)=M[a\sin(\omega t+\varphi)]=a\sin\omega t\cdot M(\cos\varphi)+ \\ +a\cos\omega t\cdot M(\sin\varphi). \qquad (*)$$

Математическое ожидание

$$M(\sin\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\varphi e^{-(\varphi^2/2)}\,d\varphi=0, \qquad (**)$$

так как пределы интегрирования симметричны относительно начала координат и подынтегральная функция — нечетная.

Найдем математическое ожидание:

$$M(\cos\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\varphi e^{-(\varphi^2/2)}\,d\varphi.$$

Введем в рассмотрение интеграл, зависящий от параметра α:

$$I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha\varphi)\, e^{-(\varphi^2/2)}\, d\varphi.$$

Заметим, что при $\alpha=0$ получим интеграл Пуассона $I(0)=$ $=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\varphi^2/2)}\, d\varphi=\sqrt{2\pi}$. При $\alpha=1$ имеем $I(1)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos\varphi e^{-(\varphi^2/2)}\, d\varphi$. Следовательно,

$$M(\cos\varphi)=I(1)/\sqrt{2\pi}. \qquad (***)$$

Продифференцируем $I(\alpha)$ по параметру α:

$$I'(\alpha)=-\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \sin(\alpha\varphi)\, e^{-(\varphi^2/2)}\, d\varphi.$$

Интегрируя по частям, приняв $u=\sin(\alpha\varphi)$, получим $I'(\alpha)=-\alpha I(\alpha)$. Общее решение этого дифференциального уравнения $I(\alpha)=Ce^{-(\alpha^2/2)}$. Положив $\alpha=0$, учитывая, что $I(0)=\sqrt{2\pi}$, имеем $C=\sqrt{2\pi}$; следовательно,

$$I(\alpha)=\sqrt{2\pi}\, e^{-(\alpha^2/2)},\quad I(1)=\sqrt{2\pi}/\sqrt{e}.$$

В силу (***)

$$M(\cos\varphi)=I(1)/\sqrt{2\pi}=1/\sqrt{e}. \qquad (****)$$

Подставив (**) и (****) в (*), окончательно получим

$$m_x(t)=\left(a/\sqrt{e}\right)\sin\omega t.$$

Таким образом, $m_x(t)$ зависит от аргумента t, поэтому $X(t)$ — нестационарная функция, что и требовалось доказать.

839*. Найти дисперсию случайной функции $X(t)=$ $=a\sin(\omega t+\varphi)$, где a и ω — положительные числа, φ — нормально распределенная случайная величина с плотностью вероятности $f(\varphi)=(1/\sqrt{2\pi})\, e^{-(\varphi^2/2)}$.

Указание. Использовать задачу 838. Принять во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\varphi e^{-(\varphi^2/2)} d\varphi=I(2).$$

840. Доказать, что корреляционная функция стационарной случайной функции есть четная функция.

Решение. Корреляционная функция любой случайной функции при перестановке аргументов не изменяется. В частности, для стационарной функции, корреляционная функция которой зависит только от разности аргументов, поменяв местами аргументы, получим $k_x(t_2-t_1)=k_x(t_1-t_2)$. Положив $\tau=t_2-t_1$, окончательно имеем $k_x(\tau)=k_x(-\tau)$.

841. Известна корреляционная функция $k_x(\tau)$ стационарной функции $X(t)$. Доказать, что если $Y(t)=aX(t)$, то $k_y(\tau)=a^2k_x(\tau)$.

842. Известна корреляционная функция $k_x(\tau)=De^{-\alpha^2\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t)=4X(t)$.

843. Доказать, что дисперсия стационарной случайной функции $X(t)$ постоянна и равна значению корреляционной функции в начале координат: $D_x(t)=k_x(0)$.

Решение. Дисперсия любой случайной функции равна значению ее корреляционной функции при равных значениях аргументов. В частности, для стационарной функции, корреляционная функция которой зависит только от разности аргументов, получим

$$D_x(t)=K_x(t,\ t)=k_x(t-t)=k_x(0).$$

844. Доказать, что абсолютная величина корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает ее значения в начале координат: $|k_x(\tau)|\leqslant k_x(0)$.

Указание. Использовать задачу 843 и свойство 4 корреляционной функции (гл. XVI, § 1).

845. Найти нормированную корреляционную функцию, зная корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$: а) $k_x(\tau)=3e^{-\tau^2}$; б) $k_x(\tau)=D_xe^{-|\tau|}\cdot(1+|\tau|)$.

§ 2. Стационарно связанные случайные функции

Стационарно связанными называют две случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, взаимная корреляционная функция которых зависит только от разности аргументов $\tau=t_2-t_1$: $R_{xy}=r(\tau)$.

Не всякие две стационарные функции стационарно связаны; с другой стороны, две нестационарные функции могут быть стационарно связанными.

846. Доказать, что взаимные корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, взятых в различных порядках, связаны равенством $r_{xy}(\tau)=r_{yx}(\tau)$.

Указание. Использовать задачу 781.

847. Доказать, что для стационарных и стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ абсолютная величина взаимной корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий этих функций:

$$|r_{xy}(\tau)|\leqslant\sqrt{D_xD_y}.$$

Указание. Использовать свойство 4 взаимной корреляционной функции (гл. XVI, § 1).

848. Заданы две стационарные случайные функции: $X(t)=\cos(t+\varphi)$ и $Y(t)=\sin(t+\varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что заданные стационарные функции стационарно связаны.

Указание. Использовать задачи **830**, **831**; $R_{xy}=0{,}5\sin(t_2-t_1)$.

849. Заданы случайные функции $X(t)=V\cos t - U\sin t$, $Y(t)=U\cos t+V\sin t$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем их математические ожидания равны нулю, а дисперсии равны 5. Доказать, что заданные функции стационарны и стационарно связаны.

850. Заданы стационарные случайные функции: а) $X(t)=U\sin t+V\cos t$, $Y(t)=W\sin t+V\cos t$, где U, V, W — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, равными 6; б) $X(t)=U\cos t+V\sin t$, $Y(t)=U\cos 2t+V\sin 2t$, где U и V — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, равными 3. Являются ли заданные функции стационарно связанными?

851. Заданы стационарные и стационарно связанные случайные функции $X(t)=-U\sin t+V\cos t$, $Y(t)=U\cos t+V\sin t$, где U и V — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, равными единице. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию заданных функций.

§ 3. Корреляционная функция производной от стационарной случайной функции

Корреляционная функция производной $X'(t)=\dot{x}$ дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$ равна второй производной от ее корреляционной функции, взятой со знаком минус:

$$k_{\dot{x}}(\tau)=-k''_x(\tau).$$

852. Доказать, что если известна корреляционная функция $k_x(\tau)$ дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$, то корреляционная функция ее производной $k_{\dot{x}}(\tau)=-k''_x(\tau)$.

Решение. Известно, что корреляционная функция производной любой дифференцируемой случайной функции равна второй смешанной производной от ее корреляционной функции:

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

По условию, $X(t)$ — стационарная функция, поэтому ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов: $K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau)$. Из соотношения $\tau = t_2 - t_1$ находим

$$\frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -1, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = 1. \qquad (*)$$

Учитывая равенства (*), получим

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 k_x}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{\partial k_x}{\partial t_2}\right] = \frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{dk_x}{d\tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t_2}\right] =$$
$$= \frac{d^2 k_x(\tau)}{d\tau^2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = k_x''(\tau) \cdot (-1) = -k_x''(\tau).$$

Видим, что искомая корреляционная функция зависит только от τ, поэтому $K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = k_{\dot{x}}(\tau)$. Итак, $k_{\dot{x}}(\tau) = -k_x''(\tau)$.

853. Доказать, что производные любого порядка (если они существуют) от стационарной случайной функции также стационарны.

Решение 1. Докажем, что первая производная стационарна. Из задачи 852 следует, что корреляционная функция первой производной стационарной случайной функции зависит только от разности аргументов.

Остается показать, что математическое ожидание производной есть постоянная величина. Учитывая, что математическое ожидание m_x стационарной функции постоянно и что операции нахождения математического ожидания и дифференцирования можно менять местами, получим

$$M[X'(t)] = \{M[X(t)]\}' = (m_x)' = 0.$$

Таким образом, математическое ожидание производной есть постоянная величина.

Итак, первая производная $X'(t)$ — стационарная функция.

2. Докажем, что вторая производная стационарна. Функция $X'(t)$ стационарна, поэтому по доказанному в п.1, ее производная $X''(t)$ также стационарна.

3. Рекомендуем методом математической индукции доказать стационарность производной любого порядка от стационарной функции в предположении, что рассматриваемые производные существуют.

854. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = 2e^{-0{,}5\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию и дисперсию производной $X'(t) = \dot{x}$; б) отношение дисперсий функции $X(t)$ и ее производной.

855. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, $(\alpha > 0)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию производной $X'(t)$; б) доказать, что дисперсия производной пропорциональна параметру D и квадрату параметра α.

Решение. а) Используем для отыскания корреляционной функции производной формулу (см. задачу 852) $k_{\dot{x}}(\tau) = -k''_x(\tau)$. Допустим, что $\tau \geqslant 0$ и, следовательно, $|\tau| = \tau$; выполнив дифференцирование, получим

$$-k''_x(\tau) = De^{-\alpha\tau}\alpha^2(1-\alpha\tau). \qquad (*)$$

Допустив, что $\tau < 0$ и, следовательно, $|\tau| = -\tau$, аналогично найдем

$$-k''_x(\tau) = D\alpha^2 e^{\alpha\tau}(1+\alpha\tau). \qquad (**)$$

Объединив (*) и (**), окончательно получим искомую корреляционную функцию: $k_{\dot{x}} = D\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha|\tau|)$.

б) Найдем дисперсию производной: $D[X'(t)] = k_{\dot{x}}(0) = D\alpha^2$. Таким образом, дисперсия производной пропорциональна D и α^2, что и требовалось доказать.

856. На вход дифференцирующего устройства подается стационарный случайный сигнал $X(t)$, корреляционная функция которого $k_x(\tau) = e^{-2|\tau|}(\operatorname{ch}\tau + 2\operatorname{sh}\tau)$. Найти: а) корреляционную функцию на выходе устройства; б) наибольшее ее значение.

857. Известна корреляционная функция $k_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Доказать, что корреляционная функция второй производной $k_{\ddot{x}}(\tau) = k_x^{IV}(\tau)$.

Указание. Рассмотреть вторую производную как производную от первой производной и использовать задачу 852.

858*. Заданы математическое ожидание $m_x(t) = 8$ и корреляционная функция $k_x(\tau) = 5e^{-|\tau|}[\cos 2\tau + 0{,}5\sin 2|\tau|]$ нормальной стационарной случайной функции $X(t)$. Найти вероятность того, что производная $Y(t) = X'(t)$ заключена в интервале (0, 10).

Решение. По условию, функция $X(t)$ распределена нормально, поэтому ее производная $Y(t) = X'(t)$, как известно, также распределена нормально. Вероятность попадания нормальной величины Y в интервал (α, β) (см. гл. VI, § 5)

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi[(\beta - a)/\sigma] - [\Phi(\alpha - a)/\sigma], \qquad (*)$$

где a — математическое ожидание Y, σ — среднее квадратическое отклонение Y, $\Phi(t)$ — функция Лапласа.

Таким образом, задача сводится к отысканию параметров a и σ нормально распределенной случайной величины Y.

1. Найдем математическое ожидание производной: $m_y(t) = m'_x(t) = (8)' = 0$. Следовательно, параметр $a = m_y(t) = 0$.

2. Используем для отыскания корреляционной функции производной формулу (см. задачу 852) $k_y(\tau) = -k''_x(\tau)$. Допустив, что $\tau \geqslant 0$, найдем

$$-k''_x(\tau) = 25e^{-\tau}[\cos 2\tau - 0{,}5\sin 2\tau]. \qquad (**)$$

При $\tau < 0$

$$-k''_x(\tau) = 25e^{-\tau}[\cos 2\tau + 0{,}5\sin 2\tau]. \qquad (***)$$

Объединив (**) и (***), получим корреляционную функцию производной:

$$k_y(\tau) = 25e^{-|\tau|}[\cos 2\tau - 0{,}5\sin 2|\tau|].$$

3. Найдем дисперсию производной: $D_y = k_y(0) = 25$. Отсюда среднее квадратическое отклонение $\sigma_y = 5$.

4. Найдем по формуле (*) искомую вероятность того, что производная заключена в интервале (0, 10), учитывая, что $a = 0$, $\sigma_y = 5$, $\alpha = 0$, $\beta = 10$:

$$P(0 < Y < 10) = \Phi[(10-0)/5] - \Phi[(0-0)/5] = \Phi(2) = 0{,}4772.$$

859. Заданы математическое ожидание $m_x = 12$ и корреляционная функция $k_x(\tau) = 4e^{-|\tau|}[\cos 2\tau + 0{,}5\sin 2|\tau|]$ нормальной стационарной случайной функции $X(t)$. Найти вероятность того, что производная $Y(t) = X'(t)$ принимает значения, большие, чем $\sqrt{5}$.

860*. Заданы математическое ожидание $m_x = 6$ и корреляционная функция $k_x(\tau) = 10e^{-|\tau|}[\cos 3\tau + (1/3)\sin 3|\tau|]$ нормальной стационарной случайной функции $X(t)$. Найти плотность вероятности производной $Y(t) = X'(t)$.

§ 4. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции

Корреляционную функцию и дисперсию интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$ от стационарной случайной функции находят соответственно по формулам:

$$K_y(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)\,k_x(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)\,k_x(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)\,k_x(\tau)\,d\tau,$$

$$D_y(t) = 2\int\limits_0^{t}(t-\tau)\,k_x(\tau)\,d\tau.$$

861*. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Доказать, что корреляционная функция интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$ равна

$$K_y(t_1,\ t_2)=\int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)\,k_x(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)\cdot k_x(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)\,k_x(\tau)\,d\tau.$$

Указание. При отыскании двойного интеграла $K_y(t_1,\ t_2)=$ $=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}k_x(s_2-s_1)\,ds_1\,ds_2$ перейти к новым переменным $\tau=s_2-s_1$, $\xi=s_2+s_1$. Начертить новую область интегрирования, ограниченную прямыми $\tau=\xi$, $\tau=-\xi$, $\tau=\xi-2t_1$, $\tau=-\xi+2t_2$, и выполнить интегрирование по ξ. Двойной интеграл по области $OABD$ вычислить как разность двойных интегралов по областям OAC и BDC. При интегрировании по области ODE переставить пределы интегрирования по τ и перейти к новой переменной интегрирования $\tau'=-\tau$ (рис. 19).

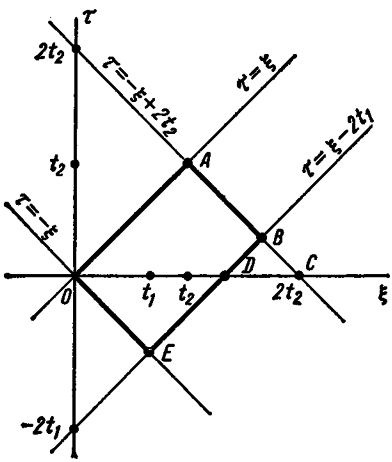

Рис. 19

862*. Известна корреляционная функция $k_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Доказать, что дисперсия интеграла

$$Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds \text{ равна}$$

$$D_y(t)=2\int\limits_0^t(t-\tau)k_x(\tau)d\tau.$$

Первый способ. Положив $t_1=t_2=\tau$ в формуле для вычисления корреляционной функции, приведенной в задаче **861**, получим требуемую формулу.

Второй способ. Известно, что корреляционная функция интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$ определяется формулой $K_y(t_1,\ t_2)=$ $=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}k_x(s_2-s_1)\,ds_1\,ds_2$. При $t_1=t_2=t$ получим дисперсию $D_y(t)=$

$= \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} k_x(s_2-s_1)\, ds_1\, ds_2$. Введем новые переменные: $\tau = s_2 - s_1$ $\xi = s_2 + s_1$. Отсюда $s_1 = (\xi - \tau)/2$, $s_2 = (\xi + \tau)/2$. Легко найти, что модуль якобиана $\begin{vmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial \tau} & \frac{\partial s_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial s_2}{\partial \tau} & \frac{\partial s_2}{\partial \xi} \end{vmatrix}$ равен $\frac{1}{2}$. Учитывая, что новая область интегрирования (рекомендуем начертить ее для определения новых пределов интегрирования) ограничена прямыми $\tau = \xi$, $\tau = -\xi$, $\tau = \xi - 2t$, $\tau = -\xi + 2t$, получим

$$D_y(t) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^t k_x(\tau)\, d\tau \int\limits_{\tau}^{2t-\tau} d\xi + \int\limits_{-t}^{0} k_x(\tau)\, d\tau \int\limits_{-\tau}^{2t+\tau} d\xi\right].$$

Выполнив интегрирование по ξ и сделав во втором интеграле замену $\tau = -\tau'$, переставив в нем пределы интегрирования и вновь обозначив переменную интегрирования через τ, приняв во внимание, что $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$, окончательно получим

$$D_y(t) = 2\int_0^t (t-\tau) k_x(\tau)\, d\tau.$$

863. Найти дисперсию интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t x(s)\, ds$, зная корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$: а) $k_x(\tau) = 1/(1+\tau^2)$; б) $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$ $(\alpha > 0)$; в) $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$.

Указание. Использовать задачу 862.

864. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = 10e^{-0{,}5|\tau|} \times (1 + 0{,}5|\tau|)$. Найти отношение дисперсии случайной величины $Y = \int\limits_0^{20} X(s)\, ds$ к дисперсии случайной функции $X(t)$.

§ 5. Взаимная корреляционная функция дифференцируемой стационарной случайной функции и ее производных

Ниже предполагается, что $\tau = t_2 - t_1$.

Взаимные корреляционные функции стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производных выражаются формулами:

$$r_{x\dot{x}}(\tau) = k'_x(\tau),\quad r_{\dot{x}x}(\tau) = -k'_x(\tau);\quad r_{x\ddot{x}}(\tau) = r_{\ddot{x}x}(\tau) = k''_x(\tau),$$

$$r_{\dot{x}\ddot{x}}(\tau) = k'''_x(\tau),$$

$$r_{\dddot{x}x}(\tau) = -k'''_x(\tau);\quad r_{\dot{x}\ddot{x}}(\tau) = -k'''_x(\tau),\quad r_{\ddot{x}\dot{x}}(\tau) = {}'''_x(\tau).$$

865. Доказать, что взаимная корреляционная функция дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной $X'(t)=\dot{x}$ равна первой производной от корреляционной функции $k_x(\tau)$, взятой со своим (противоположным) знаком, если индекс $\dot{x}$ стоит на втором (первом) по порядку месте: а) $r_{x\dot{x}}(\tau)=k'_x(\tau)$; б) $r_{\dot{x}x}(\tau)=-k'_x(\tau)$.

Решение. а) По определению взаимной корреляционной функции,

$$R_{x\dot{x}}=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}'(t_2)]=M\left\{\frac{\partial[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_2}\right\}.$$

Операции нахождения математического ожидания и дифференцирования можно переставить, поэтому

$$R_{x\ddot{x}}=\frac{\partial M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_2}=\frac{\partial K_x(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}.$$

Так как $X(t)$—стационарная функция, то $K_x(t_1,\ t_2)=k_x(\tau)$, где $\tau=t_2-t_1$, и следовательно, $\frac{\partial\tau}{\partial t_2}=1$. Таким образом,

$$R_{x\dot{x}}=\frac{\partial k_x(\tau)}{\partial t_2}=\frac{dk_x(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial t_2}=k'_x(\tau)\cdot 1=k'_x(\tau).$$

Правая часть равенства зависит только от τ; следовательно, и левая часть есть функция от τ; обозначив ее через $r_{x\dot{x}}(\tau)$, получим

$$r_{x\dot{x}}(\tau)=k'_x(\tau).$$

Подчеркнем, что поскольку взаимная корреляционная функция зависит только от τ, то стационарная случайная функция и ее производная стационарно связаны.

866. Найти взаимные корреляционные функции стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной, зная корреляционную функцию $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}(1+|\tau|)$.

867. Доказать, что взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной изменяет знак при перемене местами аргументов t_1 и t_2.

Решение. Используем задачу 865:

$$R_{x\dot{x}}(t_1,\ t_2)=k_x(\tau). \qquad (*)$$

Изменив порядок следования аргументов во взаимной корреляционной функции, получим $R_{x\dot{x}}(t_2,\ t_1)$. Индекс $\dot{x}$ стоит на втором месте; следовательно, $k_x(\tau)$ надо дифференцировать по аргументу t_1, который расположен на втором месте. Учитывая, что $\tau=t_2-t_1$,

$\frac{\partial\tau}{\partial t_1} = -1$, найдем

$$R_{x\dot{x}}(t_2, t_1) = \frac{\partial k_x(\tau)}{\partial t_1} = \frac{dk_x(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -k_x'(\tau). \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), окончательно получим $R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = R_{x\dot{x}}(t_2, t_1)$.

868. Известная корреляционная функция $k_x(\tau)$ стационарной функции $X(t)$. Найти взаимные корреляционные функции случайной функции $X(t)$ и ее второй производной.

Указание. Использовать задачу 807.

869. Задана корреляционная функция

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}[1 + \alpha|\tau| + (\alpha^2/3)\tau^2], \quad \alpha > 0,$$

стационарной случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию случайной функции $X(t)$ и ее второй производной.

Указание. Использовать задачу 868. Рассмотреть два случая: $\tau \geqslant 0$ и $\tau < 0$.

870. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = X(t) + X'(t)$, зная корреляционную функцию $k_x(\tau)$ стационарной функции $X(t)$.

Решение. Искомая корреляционная функция (§ 2, теорема 2) $K_y(t_1, t_2) = k_x(\tau) + k_{\dot{x}}(\tau) + r_{x\dot{x}}(\tau) + r_{\dot{x}x}(\tau)$. Второе слагаемое равно $-k_x''(\tau)$, а сумма третьего и четвертого слагаемых равна нулю (см. задачи 852, 865). Итак, $K_y(t_1, t_2) = k_x(\tau) - k_x''(\tau)$. Правая часть равенства зависит только от τ; следовательно, и левая часть есть функция аргумента τ: $k_y(\tau) = k_x(\tau) - k_x''(\tau)$.

871. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = X(t) + X'(t)$, зная корреляционную функцию $k_x(\tau) = e^{-\tau^2}$ стационарной функции $X(t)$.

Указание. Использовать задачу 870.

872. Известна корреляционная функция стационарной случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t)$, если: а) $Y(t) = X(t) + X''(t)$; б) $Y(t) = X'(t) + X''(t)$.

873. Известна корреляционная функция $k_x(\tau) = e^{-|\tau|} \times [1 + |\tau| + (1/3)\tau^2]$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = X(t) + X''(t)$.

874*. Известна корреляционная функция стационарной случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = X(t) + X'(t) + X''(t)$.

875. Известна корреляционная функция стационарной случайной функции $X(t)$. Найти взаимные корреляционные функции случайной функции $X(t)$ и ее третьей производной.

876. Известна корреляционная функция стационарной случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию первой и второй производных.

Указание. Использовать задачи **852**, **853** и **865**.

§ 6. Спектральная плотность стационарной случайной функции

Спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называют функцию $s_x(\omega)$, которая связана с корреляционной функцией $k_x(\tau)$ взаимно-обратными преобразованиями Фурье:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \quad k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

Эти формулы называют *формулами Винера—Хинчина*. В действительной форме они представляют взаимнообратные косинус-преобразования Фурье:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau, \quad k_x(\tau) = 2 \int_{0}^{\infty} s_x(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega.$$

Нормированной спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называют отношение спектральной плотности к дисперсии случайной функции:

$$s_{x\,\text{норм}}(\omega) = s_x(\omega)/D_x = s_x(\omega) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\, d\omega.$$

Взаимной спектральной плотностью двух стационарных и стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют функцию $s_{xy}(\omega)$, определяемую преобразованием Фурье:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Взаимная корреляционная функция выражается через взаимную спектральную плотность с помощью обратного преобразования Фурье:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

877. Доказать, что спектральная плотность стационарной случайной функции — четная функция.

Указание. Использовать формулу

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau.$$

878. Доказать, что, зная спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, можно найти дисперсию этой функции по формуле $D_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)d\omega$.

Указание. Принять во внимание, что

$$k_x(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega,\quad D_x=k_x(0).$$

879. Найти дисперсию стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее спектральную плотность $s_x(\omega)=$ $=10/\pi(1+\omega^2)$.

880. Доказать, что, зная спектральную плотность дифференцируемой стационарной случайной функции, можно найти спектральную плотность ее производной по формуле $s_{\dot{x}}(\omega)=\omega^2 s_x(\omega)$.

Решение. Производная стационарной функции также стационарна (см. задачу 853), поэтому спектральная плотность производной

$$s_{\dot{x}}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_{\dot{x}}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (*)$$

Учитывая, что $k_{\dot{x}}(\tau)=-k''_x(\tau)$,

$$k_x(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega, \qquad (**)$$

и предполагая допустимость дифференцирования под знаком интеграла (**) по параметру τ, имеем

$$k_{\dot{x}}(\tau)=-k''_x(\tau)=\omega^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau=\omega^2 k_x(\tau). \qquad (***)$$

Подставив (***) в (*), окончательно получим

$$s_{\dot{x}}(\omega)=\omega^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau=\omega^2 s_x(\omega),$$

881. Задана спектральная плотность $s_x(\omega)=\alpha^2/(\omega^2+\alpha^2)^2$ $(\alpha>0)$ дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию производной $X'(t)$.

882. Доказать, что, зная спектральную плотность дважды дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$, можно найти спектральную плотность второй производной $X''(t)$ по формуле $s_{\ddot{x}}(\omega)=\omega^4 s_x(\omega)$.

Указание. Использовать задачи 853, 880.

883. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau)=1-|\tau|$ при $|\tau|\leqslant 1$; корреляционная функция равна нулю при $|\tau|>1$.

Решение. Используя формулу

$$s_x(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$

и учитывая, что $|\tau|=\tau$ в интервале (0, 1), имеем

$$s_x(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1}(1-\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

Интегрируя по частям, окончательно получим $s_x(\omega)=2\sin^2(\omega/2)/\pi\omega^2$.

884. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau)=1-(1/5)|\tau|$ при $|\tau|\leqslant 5$; корреляционная функция равна нулю при $|\tau|>5$.

885. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}$.

Решение. Используем формулу $s_x(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau$.

Учитывая, что $|\tau|=-\tau$ при $\tau<0$, $|\tau|=\tau$ при $\tau\geqslant 0$, получим $k_x(\tau)=e^{\tau}$ при $\tau<0$; при $\tau\geqslant 0$ $k_x(\tau)=e^{-\tau}$. Следовательно,

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau}e^{-i\omega\tau}\, d\tau+\int\limits_0^{\infty} e^{-\tau}e^{-i\omega\tau}\, d\tau\right].$$

Выполнив выкладки, окончательно получим $s_x(\omega)=1/\pi(1+\omega^2)$.

886. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}$ $(\alpha>0)$.

887. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}\cos\tau$.

Решение. Учитывая, что $|\tau|=-\tau$ при $\tau<0$, при $\tau\geq 0$ $|\tau|=\tau$ и используя формулу Эйлера $\cos\tau=(e^{i\tau}+e^{-i\tau})/2$, имеем

$$k_x(\tau)=(1/2)\left[e^{(1+i)\tau}+e^{(1-i)\tau}\right] \text{ при } \tau<0,$$

$$k_x(\tau)=(1/2)\left[e^{-(1-i)\tau}+e^{-(1+i)\tau}\right] \text{ при } \tau\geq 0.$$

Следовательно,

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{0}\left\{e^{[1+(1-\omega)i]\tau}+e^{[1-(1+\omega)i]\tau}\right\} d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{e^{-[1-(1-\omega)i]\tau}+e^{-[1+(1+\omega)i]\tau}\right\} d\tau.$$

Выполнив выкладки, получим искомую спектральную плотность:

$$s_x(\omega)=(2+\omega^2)/\pi\left[1+(1-\omega)^2\right]\left[1+(1+\omega)^2\right].$$

888*. Найти спектральную плотность стационарной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$ $(\alpha>0)$.

889*. Найти спектральную плотность стационарной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}[\cos\beta\tau+(\alpha/\beta)\sin\beta|\tau|]$ $(\alpha>0)$.

Указание. Раскрыть скобки и использовать задачу 888; выразить тригонометрические функции через показательные по формулам Эйлера.

890*. Найти спектральную плотность стационарной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau)=De^{-\alpha^2\tau^2}$.

Указание. Использовать формулу

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau;$$

дополнить показатель степени до полного квадрата и учесть, что интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z^2/2)}\, dz=\sqrt{2\pi}$.

891*. Найти спектральную плотность стационарной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$ $(\alpha > 0)$.

Решение. Используем формулу

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Подставив заданную корреляционную функцию, представим правую часть равенства в виде суммы двух интегралов:

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau}\, d\tau + \frac{D\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|\, e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Обозначим первое слагаемое через I; производная этого интеграла по параметру α

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha} = \frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-|\tau|)\, e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Следовательно,

$$s_x(\omega) = I - \alpha\frac{\partial I}{\partial\alpha}. \qquad (*)$$

Учитывая, что (см. задачу 886)

$$I = D\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2), \quad \frac{\partial I}{\partial\alpha} = (D/\pi)\,[(\omega^2-\alpha^2)/(\alpha^2+\omega^2)^2], \qquad (**)$$

и подставив $(**)$ в $(*)$, окончательно получим $s_x(\omega) = 2D\alpha^3/\pi(\alpha^2+\omega^2)^2$.

892. Найти спектральную плотность стационарной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = 100e^{-0,1|\tau|}(1+0,1|\tau|)$.

Указание. Использовать задачу 891.

893*. Найти спектральную плотность стационарной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\cdot\alpha^2\tau^2\right)$ $(\alpha > 0)$.

Решение. Первый способ. Используем формулу

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Подставив заданную корреляционную функцию, получим

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right) e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Представим этот интеграл в виде суммы трех интегралов и выполним выкладки; окончательно имеем

$$s_x(\omega)=8D\alpha^5/3\pi(\alpha^2+\omega^2)^3.$$

Второй способ. Введем обозначение

$$I=\frac{D}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Найдем производную этого интеграла по параметру α:

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\frac{D}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-|\tau|)\,e^{-\alpha|\tau|}e^{i\omega\tau}\,d\tau.$$

Отсюда

$$-\alpha\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\frac{D}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha|\tau|\,e^{-\alpha|\tau|}e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Аналогично найдем

$$\frac{\alpha^2}{3}\cdot\frac{\partial^2 I}{\partial\alpha^2}=\frac{D}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2}{3}\tau^2e^{-\alpha|\tau|}e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Следовательно,

$$s_x(\omega)=I-\alpha\frac{\partial I}{\partial\alpha}+\frac{\alpha^2}{3}\cdot\frac{\partial^2 I}{\partial\alpha^2}. \qquad (*)$$

Учитывая (см. задачу 886), что $I=D\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)$, найдя частные производные $\frac{\partial I}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial^2 I}{\partial\alpha^2}$ и подставив их в соотношение (*), окончательно получим искомую спектральную плотность: $s_x(\omega)=8D\alpha^5/3\pi(\alpha^2+\omega^2)^3$.

Достоинство этого способа состоит в том, что вместо трех интегралов достаточно вычислить только один, причем самый простой.

894*. Найти спектральную плотность случайной функции $Y(t)=X(t)+X'(t)$, зная корреляционную функцию $k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$ $(\alpha>0)$ стационарной дифференцируемой случайной функции $X(t)$.

Указание. Найдя

$$k_y(\tau)=k_x(\tau)-k''_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}\left[(1+\alpha^2)+\alpha(1-\alpha^2)|\tau|\right],$$

использовать второй способ решения задачи 893:

$$s_y(\omega)=I(1+\alpha^2)-\alpha(1-\alpha^2)\frac{\partial I}{\partial\alpha},$$

где

$$I=\frac{D}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-i\omega\tau}\,d\tau=\frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

895*. Может ли функция $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}(1+|\tau|+\tau^2)$ быть корреляционной функцией стационарной случайной функции $X(t)$?

Решение. Проверим, выполняются ли все свойства корреляционной функции $k_x(\tau)$.

1. Свойство $k_x(\tau)$ — четная функция — выполняется: $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$.

2. Свойство $k_x(0) > 0$ выполняется: $k_x(0) = 1 > 0$.

3. Свойство $|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0)$ не выполняется: например, $k_x(1) = 3/e > k_x(0) = 1$.

4. Свойство

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \geqslant 0$$

при всех значениях ω не выполняется. Действительно, допустив, что заданная функция $k_x(\tau)$ является корреляционной функцией некоторой стационарной случайной функции $X(t)$, и выполнив выкладки, найдем функцию $s_x(\omega) = 4(1-\omega^2)/\pi(1+\omega^2)$; при $|\omega| > 1$ функция $s_x(\omega) < 0$.

Итак, заданная функция $k_x(\tau)$ не является корреляционной функцией никакой стационарной случайной функции. Разумеется, это заключение можно было сделать, убедившись, что не выполняется хотя бы одно свойство корреляционной функции.

896. а) Доказать, что функция $k_x(\tau) = 5e^{-2\tau^2}$ может быть корреляционной функцией стационарной случайной функции $X(t)$.

б) Доказать методом от противного, что не существует такой стационарной функции, корреляционная функция которой сохраняет постоянное значение в интервале $(-\tau_1, \tau_1)$, симметричном относительно начала координат, и которая равна нулю вне этого интервала.

897. Задана спектральная плотность $s_x(\omega) = 10\alpha/\pi(\alpha^2 + \omega^2)$ $(\alpha > 0)$ стационарной случайной функции. Найти нормированную спектральную плотность.

Указание. Использовать задачу 878.

898. Задана спектральная плотность $s_x(\omega) = D\alpha/\pi(\alpha^2 + \omega^2)$ $(\alpha > 0)$ стационарной случайной функции. Найти спектральную функцию $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} s_x(\omega)\, d\omega$.

899. Доказать, что спектральная плотность равна производной от спектральной функции: $s_x(\omega) = S'_x(\omega)$.

900. Доказать, что для стационарных и стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ справедливо соотношение, связывающее взаимные спектральные плотности: $s_{xy}(-\omega)=s_{yx}(\omega)$.

Решение. По определению взаимной спектральной плотности,

$$s_{xy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Следовательно,

$$s_{xy}(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau)\,e^{-i(-\omega)\tau}\,d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau)\,e^{-i\omega(-\tau)}\,d\tau.$$

Поскольку $r_{xy}(\tau)=r_{yx}(-\tau)$ (см. задачу 846), то

$$s_{xy}(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} {}_{yx}(-\tau)\,e^{-i\omega(-\tau)}\,d\tau.$$

Сделаем замену переменной интегрирования, положив $\tau_1=-\tau$ и, следовательно, $d\tau_1=-d\tau$. Новый нижний предел интегрирования равен ∞, а верхний $-\infty$. Таким образом,

$$s_{xy}(-\omega)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} r_{yx}(\tau_1)\,e^{-i\omega\tau_1}\,d\tau_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_{yx}(\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}\,d\tau_1=s_{yx}(\omega).$$

901. Доказать, что взаимные спектральные плотности дифференцируемой стационарной случайной функции и ее производной связаны равенством $s_{x\dot{x}}(\omega)=-s_{\dot{x}x}(\omega)$.

Указание. Использовать соотношение $r_{x\dot{x}}(\tau)=-r_{\dot{x}x}(\tau)$.

902. Доказать, что, зная спектральную плотность $s_x(\omega)$ дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$, можно найти взаимную спектральную плотность функции $X(t)$ и ее производной по формуле $s_{x\dot{x}}(\omega)=i\omega s_x(\omega)$.

Решение. По определению взаимной спектральной плотности,

$$s_{x\dot{x}}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_{x\dot{x}}(\tau)\,e^{-\omega i\tau}\,d\tau.$$

Известно (см. задачу 865), что $r_{x\dot{x}}(\tau)=\dfrac{dk_x(\tau)}{d\tau}$. Учитывая, что

$$k_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)e^{i\tau\omega}\,d\omega, \text{ получим}$$

$$r_{x\dot{x}}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)e^{i\tau\omega}\,d\omega=i\omega\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)e^{i\tau\omega}\,d\omega=i\omega k_x(\tau).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_{x\dot{x}}(\tau)\,e^{-\omega i\tau}\,d\tau=i\omega\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Отсюда окончательно имеем $s_{x\dot{x}}(\omega)=i\omega\cdot s_x(\omega)$.

903. Известна спектральная плотность $s_x(\omega)=2D\alpha^3/\pi(\omega^2+\alpha^2)^2$ дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$. Найти взаимную спектральную плотность функции $X(t)$ и ее производной.

Указание. Использовать задачу 902.

904. Найти взаимную спектральную плотность дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной, зная корреляционную функцию $k_x(\tau)=2e^{-\tau^2}$.

Указание. Найти сначала взаимную корреляционную функцию $r_{x\dot{x}}(\tau)=k'_x(\tau)$, а затем искомую взаимную спектральную плотность. Можно поступить иначе: найти спектральную плотность (см. задачу 890), а затем умножить ее на $i\omega$ (см. задачу 902).

905. Найти корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее спектральную плотность $s_x(\omega)=s_0$ в интервале $-\omega_0\leqslant\omega\leqslant\omega_0$; вне этого интервала $s_x(\omega)=0$.

Решение. Используем формулу

$$k_x(\tau)=2\int_0^{\infty} s_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega.$$

Учитывая, что $s_x(\omega)=s_0$ в интервале $(0;\ \omega_0)$, получим

$$k_x(\tau)=2s_0\int_0^{\omega}\cos\omega\tau\,d\omega=2s_0(\sin\omega_0\tau)/\tau.$$

906. Найти корреляционную функцию стационарной случайной функции, зная ее спектральную плотность: $s_x(\omega)=s_0$ в интервалах $(-2\omega_0,\ -\omega_0)$ и $(\omega_0,\ 2\omega_0)$; вне этих интервалов $s_x(\omega)=0$.

907. Найти корреляционную функцию стационарной случайной функции, зная ее спектральную плотность $s_x(\omega) = D\alpha/\pi(\alpha^2 + \omega^2)$.

Решение. Первый способ. Из задачи 886 следует, что корреляционной функции $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$ соответствует заданная спектральная плотность. Поскольку $k_x(\tau)$ и $s_x(\omega)$ связаны взаимно-обратными преобразованиями Фурье, то искомая корреляционная функция $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$.

Второй способ. Используем формулу

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) e^{i\tau\omega}\, d\omega = \frac{D\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} e^{i\tau\omega}\, d\omega.$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} e^{i\tau\omega} \quad \omega = (\pi/\alpha)\, e^{-\alpha|\tau|}.$$

Следовательно, искомая корреляционная функция $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$.

908. Найти корреляционную функцию стационарной случайной функции, зная ее спектральную плотность $s_x(\omega) = 2/\pi\,(4 + \omega^2)$.

909. Найти корреляционную функцию стационарного белого шума — стационарной случайной функции с постоянной спектральной плотностью $s_x(\omega) = s_0$.

Решение. Используем формулу

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) e^{i\tau\omega}\, d\omega = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega}\, d\omega. \qquad (*)$$

Примем во внимание, что $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega}\, d\omega = \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega}\, d\omega = 2\pi\delta(\tau). \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), окончательно получим искомую корреляционную функцию $k_x(\tau) = 2\pi s_0 \delta(\tau)$.

§ 7. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой

Стационарной линейной динамической системой называют устройство, которое описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$[a_0 Y^{(n)}(t) + a_1 Y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n]\, Y(t) =$$
$$[b_0 X^{(m)}(t) + b_1 X^{(m-1)}(t) + \ldots + b_m]\, X(t), \qquad (*)$$

где $X(t)$ — входная стационарная случайная функция (воздействие, возмущение), $Y(t)$ — выходная случайная функция (реакция, отклик).

Если динамическая система устойчива, то при достаточно больших значениях t, т. е. по окончании переходного процесса, функцию $Y(t)$ можно считать стационарной.

Математическое ожидание выходной функции $Y(t)$ находят по формуле $m_y=(b_m/a_n)\,m_x$, где m_x — математическое ожидание входной функции $X(t)$.

В операторной форме уравнение (*) имеет вид

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ \dots\ +a_n)\,Y(t)=(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ \dots\ +b_m)\,X(t). \tag{**}$$

Передаточной функцией линейной динамической системы называют отношение многочлена относительно p при $X(t)$ к многочлену при $Y(t)$ в операторном уравнении (**):

$$\Phi(p)=(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ \dots\ +b_m)/(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ \dots\ +a_n).$$

Частотной характеристикой линейной динамической системы называют функцию, которая получается заменой аргумента p в передаточной функции на аргумент $i\omega$ (ω — действительное число):

$$\Phi(i\omega)=$$

$$=[b_0(i\omega)^m+b_1(i\omega)^{m-1}+\ \dots\ +b_m]/[a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\ \dots\ +a_n].$$

Спектральные плотности выходной и входной функций связаны равенством $s_y(\omega)=s_x(\omega)\cdot|\Phi(i\omega)|^2$, т. е., чтобы найти спектральную плотность выходной функции, надо умножить спектральную плотность входной функции на квадрат модуля частотной характеристики. Зная же спектральную плотность выходной функции, можно найти ее корреляционную функцию

$$k_y(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega)\,e^{i\tau\omega}\,d\omega,$$

а следовательно, и дисперсию

$$D_y=k_y(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega)\,d\omega.$$

910. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y'(t)+2Y(t)=5X'(t)+6X(t)$, подается стационарная случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x=5$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме (после затухания переходного процесса).

Решение. Приравняем математические ожидания левой и правой частей заданного дифференциального уравнения:

$$M[Y'(t)+2Y(t)]=M[5X'(t)+6X(t)],\ \text{или}\ M[Y'(t)]+2m_y=$$
$$=5M[X'(t)]+6m_x.$$

По условию, $X(t)$ и $Y(t)$ — стационарные функции, а математическое ожидание производной стационарной функции равно нулю, поэтому

$2m_y=6m_x$. Отсюда искомое математическое ожидание $m_y=3m_x= = 3\cdot 5=15$.

911. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y''(t)+3Y'(t)+5Y(t)= = 4X'(t)+10X(t)$, подается стационарная случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x=2$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

912. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $3Y'(t)+Y(t)=4X'(t)+ + X(t)$, подается стационарная случайная функция $X(t)$ с корреляционной функцией $k_x(\tau)=6e^{-2|\tau|}$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Решение. 1. Найти спектральную плотность $s_x(\omega)$. Используя решение задачи 886, при $D_x=k_x(0)=6$ и $\alpha=2$, получим

$$s_x(\omega)=D\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)=12/\pi(\omega^2+4).$$

2. Найдем передаточную функцию системы. Для этого запишем заданное дифференциальное уравнение в операторной форме: $(3p+1)Y(t)=(4p+1)X(t)$. Отсюда $Y(t)=[(4p+1)/(3p+1)]X(t)$. Следовательно, передаточная функция $\Phi(p)=(4p+1)/(3p+1)$.

3. Найдем частотную характеристику системы, для чего положим $p=\omega i$:

$$\Phi(\omega i)=(4\omega i+1)/(3\omega i+1).$$

4. Найдем спектральную плотность $s_y(\omega)$ на выходе системы, для чего умножим спектральную плотность $s_x(\omega)$ на квадрат модуля частотной характеристики:

$$s_y(\omega)=s_x(\omega)\,|\Phi(\omega i)|^2=(12/\pi(\omega^2+4)[\,|4\omega i+1|^2/|3\omega i+ +1|^2]=[12/(\pi(\omega^2+4))\cdot[(16\omega^2+1)/(9\omega^2+1)].$$

5. Найдем искомую дисперсию:

$$D_y=\int_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega)\,d\omega=\frac{12}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(16\omega^2+1)\,d\omega}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)}=$$

$$=\frac{24}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(16\omega^2+1)\,d\omega}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$D_y=\frac{24}{\pi}\left[\frac{63}{35}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+4}-\frac{7}{35}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{9\omega^2+1}\right].$$

Выполнив интегрирование, получим искомую дисперсию $D_y= =(24/\pi)(5\pi/12)=10$.

913. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y'(t)+3Y(t)=X'(t)+4X(t)$, подается стационарная случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x=6$ и корреляционной функцией $k_x(\tau)=5e^{-2|\tau|}$. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

914. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y''(t)+5Y'(t)+6Y(t)=X'(t)+X(t)$, подается стационарная случайная функция с математическим ожиданием $m_x=4$ и корреляционной функцией $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}$. Найти: а) математическое ожидание; б) спектральную плотность случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

915*. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y'''(t)+6Y''(t)+11Y'(t)+6Y(t)=7X''(t)+5X(t)$, подается стационарная случайная функция $X(t)$ с известной корреляционной функцией: а) $k_x(\tau)=4e^{-|\tau|}$; б) $k_x(\tau)=2e^{-|\tau|}(1+|\tau|)$. Найти спектральную плотность случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Указание. Использовать задачи **886** и **891**. Разложить на линейные множители знаменатель передаточной функции: $(p+1)(p+2)(p+3)$.

916. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y'(t)+Y(t)=X(t)$, поступает стационарная случайная функция $X(t)$ с постоянной спектральной плотностью s_0 (белый шум). Найти дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

917. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y''(t)+2hY'(t)+k^2Y(t)=X(t)$ $(h>0)$, $k\geqslant h)$, поступает стационарная случайная функция $X(t)$ с постоянной спектральной плотностью s_0 (белый шум). Найти спектральную плотность случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

918*. Спроектированы две линейные стационарные динамические системы, на вход которых поступает стационарная случайная функция $X(t)$. Передаточные функции систем соответственно равны: $\Phi_1(p)=(4p+1)/(3p+1)$, $\Phi_2(p)=(p+1)/(3p+1)$. Спектральная плотность выходной функции известна: $s_x(\omega)=12/\pi(\omega^2+4)$. Какая из систем обеспечивает наименьшую дисперсию выходной функции?

ОТВЕТЫ

Глава первая

3. а) $P=1/90$; б) $P=1/81$. 5. а) $P=1/6$; б) $P=1/18$; в) $P=1/2$; г) $P=1/18$. 6. а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008. 7. $P=3/4$. 8. $P=1/720$. 10. $P=1/C_{20}^2=1/190$. 12. $P=C_{10}^3/C_{15}^3=24/91$. 13. $P=C_{99}^9/C_{100}^{10}=0,1$. 14. а) $P=C_{90}^4/C_{100}^4\simeq 0,65$; б) $P=C_{10}^4/C_{100}^4\simeq 0,00005$. 15. $P=C_3^2/C_5^2=0,3$. 16. $P=1/A_{10}^3=1/720$. 18. $P=C_4^3\cdot C_6^4/C_{10}^7=0,5$. 19. $P=C_{10}^3\cdot C_5^2/C_{15}^5\approx 0,4$. 20. $P=C_8^5\cdot C_4^4/C_{12}^9=14/55$. 21. а) $P=C_3^1\cdot C_2^1/C_5^2=0,6$; б) $P=C_3^2/C_5^2=0,3$; в) $P=0,9$. 22. $P=1/5^4$. 24. $W=0,9$. 25. 180 приборов. 26. $P=1/2$. 27. $P=1/3$. 28. $P=r^2/R^2$. 29. $P=(2a-2r)/(2a)=(a-r)/a$. 30. $P=$ $=(a-2r)^2/a^2$. 31. $P=(6-2)/6=2/3$. 32. $P=(10^2-5^2)/10^2=0,75$. 33. а) $P=2/\pi$; б) $P=3\sqrt{3}/(4\pi)$. 34. $P=0,5\pi R^2/(\pi R^2)=0,5$. 36. Возможные значения координат: $0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant L$; благоприятствующие значения: $y-x<x$, $y>x$; $x-y<y$, $y<x$; $p=1/2$. 37. Возможные значения координат: $0\leqslant x\leqslant L$; $0\leqslant y\leqslant L$, $y\geqslant x$, благоприятствующие значения координат: $y-x<L/2$; $p=0,75$. 38. Возможные значения координат: $0\leqslant x\leqslant L$; $0\leqslant y\leqslant L$; благоприятствующие значения координат: $y-x<L/2$, $y>x$; $x-y<L/2$, $y<x$; $p=0,75$. 42. $P=7/16$. 43. Возможные значения координат: $0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant L$; $0\leqslant z\leqslant L$; благоприятствующие значения координат: $x<y+z$, $y<z+x$, $z<x+y$; $P=1/2$. 44. Возможные значения координат: $0<x\leqslant 2$, $0<y\leqslant 2$; благоприятствующие значения координат: $0<x\leqslant\sqrt{2}/2$, $0<y\leqslant\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}/2\leqslant x\leqslant 2$, $1/2\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$; $P=(1+3\ln 2)/8\simeq 0,38$. 45. Возможные значения координат: $0<x\leqslant 1$, $0<y\leqslant 1$; благоприятствующие значения координат: $0,1\leqslant x\leqslant 0,9$, $0,1\leqslant y\leqslant 0,9$; $P\simeq 0,2$.

Глава вторая

47. $P=1-C_6^3/C_{10}^3=5/6$. 50. $P=0,14$. 51. $P=0,38$. 52. $P=0,7$. 53. $P=0,18$. 54. $P=0,432$. 55. $P=0,384$. 56. а) $P=0,188$; б) $P=0,452$; в) $P=0,336$. 57. а) $P=0,6976$; б) $P=0,9572$. 58. а) $P=1/6^3$; б) $P=$ $=6\cdot(1/6^3)=1/36$. 59. а) $P=C_3^2\cdot(1/6^2\cdot 5/6)=5/72$; б) $P=5/12$; в) $P=5/9$. 61. $n\geqslant 5$. 62. а) $P=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$; б) $P=4!\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\cdot\left(\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$. 63. $P=3!\,(1/3)^3$. 65. $P=5/100\cdot 4/99=1/495$. 67. $P=6/10\cdot 5/9\cdot 4/8\cdot 3/7=$

$=1/14$. **68.** а) $P=1/5\cdot 1/4\cdot 1/3=1/60$; б) $P=0,1$. **69.** $P=20/25\cdot 19/24\times \times 18/23=57/115$. **70.** а) $P=1/10\cdot 1/9\cdot 1/8=1/720$; б) $P=0,001$. **81.** $P=0,126$. **82.** $P\simeq 0,95$. **83.** $P=0,388$. **85.** $P\simeq 0,76$. **87.** $p=0,8$. **88.** $E\left[\dfrac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}\right]+1$, где $E[N]$ — целая часть числа N. **90.** $P= =\dfrac{n+2}{2(n+1)}$. **91.** $P=0,89$. **92.** $P=0,85$. **93.** $P=0,78$. **94.** $P=0,5$. **95.** $P=0,4$. **96.** $P=0,87$. **98.** Вероятнее, что винтовка была без оптического прицела (вероятность того, что винтовка была без оптического прицела, равна 24/43; с оптическим прицелом — 19/43). **99.** $P=3/7$. **100.** $P=1/3$. **101.** $P=5/11$. **102.** $P\simeq 0,47$. **104.** $P_A(B_3)= =1-(0,6+0,3)=0,1$. **107.** $P=10/19$. **109*.** $P=0,039$.

Глава третья

111. а) Вероятнее выиграть одну партию из двух: $P_2(1)=1/2$; $P_4(2)=3/8$; б) вероятнее выиграть не менее двух партий из четырех: $P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-[P_4(0)+P_4(1)]=11/16$; $P_5(3)+P_5(4)+ +P_5(5)=8/16$. **112.** а) $P=P_5(0)+P_5(1)=3/16$; б) $Q=1-[P_5(0)+ +P_5(1)]=13/16$. **113.** а) $P_4(3)+P_4(4)=0,1792$; б) $P_5(4)+P_5(5)=0,74$. **114.** а) $p^3=0,729$; б) $C_4^3p^3q+C_4^4p^4=0,95$; в) $C_5^3p^3q^2+C_5^4p^4q+C_5^5p^5=0,99$. **115.** Искомые вероятности таковы: а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52; г) 0,62. **116.** $P_4(2)=C_4^2(2/3)^2(1/3)^2=8/27$. **117.** $P_5(2)=C_5^2(x/a)^2[(a-x)/a]^3$. **118.** $P=C_8^2\cdot C_6^2C_4^2\cdot C_2^2\cdot(1/4)^8$. **121.** $P_{100}(75)=0,04565$. **122.** $P_{100}(50)= =0,0782$. **123.** $P_{2N}(N)=0,5642/\sqrt{N}$. **124.** $P_{2N}(N+m)=\sqrt{2/N}\times \times\varphi(\sqrt{2/N}\,m)$. **126.** а) $P_{2100}(1470;\ 1500)=0,4236$); б) $P_{2100}(1470;\ 2100)= =0,5$; в) $P_{2100}(0;\ 1469)=0,5$. **127.** $P_{21}(11;\ 21)=0,95945$. **128.** $P= =\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)=0,6826$. **130.** $n=177$. **132.** $P=2\Phi(1,2)= =0,7698$. **133.** $P=2\Phi(2,31)=0,979$. **134.** $P=2\Phi(0,877)=0,6196$. **137.** $n=661$. **138.** $n=6147$. **140.** $\varepsilon=0,02$. **141.** $\varepsilon=0,01$. **143.** $15\leqslant m\leqslant 33$. **144.** $5\leqslant m\leqslant 22$. **146.** $k_0=8$. **148.** $k_0=17$, $k_0+1=18$. **151.** $k_0=7$. **153.** $100\leqslant n\leqslant 102$. **154.** $28\leqslant n\leqslant 29$. **156.** $0,625<p\leqslant 0,65$. **158.** а) $k_0=1$; б) $P_5(1)=0,41$; в) $P=0,0067$. **160.** а) $P_2(2)=0,72$; б) $P_2(1)=0,26$; в) $P_2(0)=0,02$; г) $P_2(1)+P_2(2)=0,98$. **161.** а) $P_3(3)= =0,612$; б) $P_3(2)=0,329$; в) $P_3(1)=0,056$; г) $P_3(0)=0,003$; д) $P=1-q_1q_2q_3=0,997$. **162.** а) $P_4(4)=0,006$; б) $P_4(3)=0,065$; в) $P_4(2)=0,254$; г) $P_4(1)=0.423$; д) $P_4(0)=0,252$; е) $P_4(0)+P_4(1)+ +P_4(2)=0,929$. **163.** 0,325.

Глава четвертая

167. $\begin{array}{cccccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & 0,6561 & 0,2916 & 0,0486 & 0,0036 & 0,0001 \end{array}$. **168.** $\begin{array}{cccc} X & 0 & 1 & 2 \\ p & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}$.

169. $\begin{array}{cccc} X & 0 & 1 & 2 \\ p & 9/16 & 6/16 & 1/16 \end{array}$. **171.** $\begin{array}{ccccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0 & 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array}$.

173. а) $\begin{array}{ccccccc} X & 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p & 0,2 & 0,16 & 0,128 & \ldots & 0,8^{k-1}\cdot 0,2 & \ldots \end{array}$; б) $k_0=1$.

175. $\begin{array}{ccccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & 0,7 & 0,24 & 0,042 & 0,0144 \end{array}$. **177.** $P_{1000}(3)=0,18$. **178.** $P_{200}(4)=0,09$. **180.** а) $P_{1000}(2)=0,224$; б) $P_{1000}(0)+P_{1000}(1)=0,1992$; в) $P_{1000}(k>2)= =0,5768$; г) $P=1-P_{1000}(0)=0,95$. **181.** б) $\lambda=3$. **186.** а) $P_4(3)=0,0256$; б) $P_4(k<3)=0,0123$; в) $P_4(k\geqslant 3)=0,9877$. **188.** б) $M(X)=0,535$. **189.** б) $M(Z)=30$. **191.** $x_3=21$; $p_3=0,2$. **193.** $p_1=0,2$; $p_2=0,3$; $p_3=0,5$. **194.** $M(X)=3/5$. **198.** $M(X)=NC_n^m(1/6)^m(5/6)^{n-m}$.

200. $M(X)=50\cdot C_5^4\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1\simeq 16$. **209.** $D(Z)=61$. **211.** а) $D(X)\cong 8{,}545$; $\sigma(X)\cong 2{,}923$; б) $D(X)\cong 248{,}95$; $\sigma(X)\cong 15{,}78$. **214.** $D(X)=0{,}9$. **216.** $D(X)=0{,}495$. **217.** $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}7$. **219.** $\begin{matrix} X & 1 & 3 \\ p & 0{,}2 & 0{,}8 \end{matrix}$. **220.** $\begin{matrix} X & 1 & 2 & 3 \\ p & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{matrix}$. **223.** а) $M(X)=10$; б) $D(X)=90$. **229.** $\nu_1=3{,}9$; $\nu_2=16{,}5$; $\nu_3=74{,}1$. **231.** $\mu_1=0$; $\mu_2=0{,}64$; $\mu_3=-0{,}77$; $\mu_4=1{,}33$.

Глава пятая

236. $P(|X-M(X)|<3\sigma)\geqslant 1-\sigma^2/(9\sigma^2)=8/9$.
238. $P(|X-M(X)|\geqslant 2\sigma)\leqslant\sigma^2/(4\sigma^2)=1/4$. **239.** $P(|X-M(X)|<0{,}2)\geqslant 1-0{,}004/0{,}04=0{,}9$. **240.** $\varepsilon\geqslant 0{,}3$. **242.** а) $P(|X-16|<3)\geqslant 0{,}64$; б) $P(|X-16|\geqslant 3)\leqslant 0{,}36$. **244.** $P(|X-200|<50)\geqslant 1-150/50^2=0{,}94$. **246.** $P(|X-0{,}44|<\sqrt{0{,}4})\geqslant 1-0{,}0364/0{,}4=0{,}909$. **248.** Применима. Математические ожидания X_n конечны и равны $-a/(2n+1)$; дисперсии равномерно ограничены числом a^2. **249.** а) С возрастанием n дисперсии $D(X_n)=(2n^3+3n^2+n)/(2n+1)$ неограниченно возрастают; б) нельзя, так как требование равномерной ограниченности дисперсий лишь достаточно, но не необходимо. **251.** Применима: $M(X_n)=0$; $D(X_n)=2$.

Глава шестая

253. $P(0<X<1)=1/4$. **254.** $P(-1<X<1)=1/3$. **255.** $P(X\geqslant T)=1-P(X<T)=1-P(0<X<T)=1/e$. **257.** $p=P(0{,}25<X<0{,}75)=0{,}5$; $P_4(3)=C_4^3p^3q=0{,}25$. **259.** $x_1=2\sqrt{3}$. **261.** $F(x)=$
$$=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 3,\\ 0{,}2 & \text{при } 3<x\leqslant 4,\\ 0{,}3 & \text{при } 4<x\leqslant 7,\\ 0{,}7 & \text{при } 7<x\leqslant 10,\\ 1 & \text{при } x>10. \end{cases}$$
263. $f(x)=2\cos 2x$ в интервале $(0;\ \pi/4)$; вне этого интервала $f(x)=0$. **265.** $P(1<X<2)=(e^{\alpha}-1)/e^{2\alpha}$. **266.** $p=P(0<X<\pi/4)=(\pi+2)/4$; $P_3(2)=C_3^2\left(\dfrac{\pi+2}{4}\right)^2\cdot\dfrac{3\pi-2}{4\pi}$.

268. $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 1-\cos x & \text{при } 0<x\leqslant\pi/2,\\ 1 & \text{при } x>\pi/2. \end{cases}$$
269. $F(x)=$
$$=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ (1/2)(x^2-x) & \text{при } 1<x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$
270. $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant\pi/6,\\ -\cos 3x & \text{при } \pi/6<x\leqslant\pi/3,\\ 1 & \text{при } x>\pi/3. \end{cases}$$
272. $C=1/2$. **273.** $C=1$. **274.** $C=4/(\pi-\ln 4)$. **276.** $M(X)=4/3$. **278.** $M(X)=0$. **279.** а) $c=3/4$; б) $M(X)=11/16$. **281.** $M(X)=1/\alpha$.
283. $$M(X^2)=\int\limits_0^{\pi/2}x^2\cos x\,dx=(\pi^2-8)/4.$$ **284.** $M(X^3)=13/40$.

287. $M_0(X)=M(X)=M_e(X)=4$. **288.** а) Моды X не имеет (плотность распределения не имеет максимума); б) $M(X)=0$ (кривая распределения симметрична относительно прямой $x=0$). **289.** $M_e(X)=\left[\dfrac{(n-1)x_0}{n}\right]^{1/n}$. **293.** а) $D(X)=4{,}5$; б) $P(-3<X<1)=0{,}5+(1/\pi)\arcsin(1/3)$; $P(1<X<3)=0{,}5-(1/\pi)\arcsin(1/3)$. **296.** $D(X)=$

$=25/18$. **298.** $M(X)=3x_0/2$; $D(X)=3x_0^2/4$; $\sigma(X)=\sqrt{3}x_0/2$. **300.** $D(X^2)=20-2\pi^2$. **302.** $M(X)=(\alpha+1)\beta$; б) $D(X)=(\alpha+1)\beta^2$. **306.** $\nu_1=2/3$, $\nu_2=1/2$, $\nu_3=2/5$, $\nu_4=1/3$; $\mu_1=0$, $\mu_2=1/18$, $\mu_3=-1/135$, $\mu_4=1/135$. **307.** $C=1/(b-a)$. **309.** а) $P(0<X<0{,}04)=P(0{,}16<X<20)=0{,}4$; б) $P(0{,}05<X<0{,}15)=0{,}5$. **310.** $P(2<X<5)=0{,}6$. **311.** $P(0<X<1/3)+P(2/3)<X<1)=2/3$. **312.** $F(x)=$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant a, \\ (x-a)/(b-a) & \text{при } a<x\leqslant b, \\ 1 & \text{при } x>b. \end{cases}$$

314. $M(X)=5$. **316.** $D(X)=3$; $\sigma(X)=\sqrt{3}$. **317.** $M(X)=a$ («кривая» распределения симметрична относительно прямой $x=a$); $D(X)=l^2/3$. **319.** $M(X^3)=(b+a)(b^2+a^2)/4$; $D(X^3)=\dfrac{b^7-a^7}{7(b-a)}-\left[\dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2$. **320.** $M(XY)=(a+b)/2\cdot(c+d)/2$. **322.** $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/8}$. **323.** $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/32}$. **324.** $M(X)=1$; $D(X)=25$. **325.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. **329.** $P(15<X<25)=0{,}6826$. **330.** а) $P(55<X<68)=0{,}0823$; б) $P(32<X<40)=0{,}0027$. **332.** $P(|X|<10)=2\Phi(0{,}5)=0{,}383$. **333.** $P\simeq 0{,}41$. **335.** Примерно 95%. **336.** а) $P(|X|<15)\cdot P(|Y|<4)=2\Phi(2{,}5)\cdot 2\Phi(1)=0{,}6741$; б) $P=1-(1-0{,}6741)^2=0{,}8938$. **338.** $P(35<X<40)=P(10<X<15)=0{,}2$. **341.** $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)=(-5{,}25)$. **342.** $6\sigma=30$ мм. **343.** $(9{,}7;\ 10{,}3)$. **345.** $\sigma=\sqrt{\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2(\ln\beta-\ln\alpha)}}$. **347.** $f(x)=6e^{-6x}$ в интервале $(0,\infty)$, вне этого интервала $f(x)=0$; $F(x)=1-e^{-6x}$ в интервале $(0,\infty)$, вне этого интервала $F(x)=0$. **348.** а) $\lambda=2$; б) $\lambda=0{,}4$. **351.** $P(1<X<2)=0{,}038$. **352.** $P(2<X<5)=0{,}251$. **354.** а) $M(X)=0{,}2$; б) $M(X)=10$. **355.** а) $P[X<M(X)]=P[0<X<(1/\lambda)]=(e-1)/e$; б) $1/e$. **357.** $D(X)=0{,}01$; $\sigma(X)=0{,}1$. **358.** $D(X)=6{,}25$; $\sigma(X)=2{,}5$. **359.** $C=\lambda$. **360.** $\mu_3=2/\lambda^3$. **361.** $A_s=2$. **362.** $\mu_4=9/\lambda^4$. **363.** $E_k=6$. **365.** а) $M(T)=0{,}2$; б) $D(T)=0{,}04$; в) $\sigma(T)=0{,}2$. **366.** $M(T)=\sigma(T)=0{,}2$ ч. Контролер в среднем будет ждать очередную машину 12 мин. **368.** а) $F(100)=0{,}95$; б) $R(100)=0{,}05$. **370.** а) 0,292; б) 0,466; в) 0,19. **371.** а) 0,9975; б) 0,656.

Глава седьмая

374.

Y	7	13	21
p	0,2	0,1	0,7

376.

Y	$\sqrt{2}/2$	1
p	0,3	0,7

378. а) $g(y)=(1/3)f[-y/3]$, $(-3b<y<-3a)$; б) $g(y)=\dfrac{1}{|A|}f\left[\dfrac{y-B}{A}\right]$, $(Aa+B<y<Ab+B)$ при $A>0$, $(Ab+B<y<Aa+B)$ при $A<0$. **379.** $g(y)=\dfrac{1}{3\pi\left[(y-2)^{2/3}+(y-2)^{4/3}\right]}$. **380.** а) $g(y)=(1/y)f[\ln(1/y)]$, $(0<y<1)$; б) $g(y)=e^y f[e^y]$ $(-\infty<y<\infty)$; в) $g(y)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}f\left[\sqrt[3]{y}\right]$, $(0<y<\infty)$; г) $g(y)=\dfrac{1}{2y\sqrt{y}}f\left[\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right]$, $(0<y<\infty)$; д) $g(y)=2yf(y^2)$ $(0<y<\infty)$. **381.** а) $g(y)=$

$=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})]$, $(0<y<\infty)$; б) $g(y)=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(1/y)}}\times$ $\times[f(\sqrt{\ln(1/y)})+f(-\sqrt{\ln(1/y)})]$ $(0<y<1)$; в) $g(y)=f(y)+f(-y)$ $(0<y<\infty)$; г) $g(y)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}[f(2\pi k+\arccos y)+f(2\pi k-$ $-\arccos y)]$ $(-1<y<1)$; д) $g(y)=\frac{1}{\cos^2 y}f(\operatorname{tg} y)$ $(-\pi/2<y<\pi/2)$; е) $g(y)=\frac{1}{2y^2\sqrt{1/y-1}}[f(\sqrt{1/y-1})+f(-\sqrt{1/y-1})]$, $(0<y<1)$.

384. $g(y)=2/(\pi\sqrt{1-y^2})$ в интервале $(0, 1)$, вне этого интервала $g(y)=0$. **385.** $g(y)=1/(\pi(1+y^2))$ $(-\infty<y<\infty)$. **387.** $g(y)=$ $=2/(\pi\sqrt{1-y^2})$ в интервале $(0, 1)$, вне этого интервала $g(y)=0$.

390. $g(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-y}$ в интервале $(0, \infty)$; вне этого интервала $g(y)=0$. **391.** $g(y)=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi y}}e^{-2y/\sigma^2}$ в интервале $(0, \infty)$; вне этого интервала $g(y)=0$. **393.** $M(Y)=(\pi^2-8)/4$. **395.** $D(X^2)=20-2\pi^2$.

396. $M(Y)\ \frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}$; $D(Y)=\frac{b^7-a^7}{7(b-a)}-\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2$.

399. а) $G(y)=F[(y-6)/4]$; б) $G(y)=1-F[(1-y)/5]$, в) $G(y)=$ $=F[(y-b)/a]$ при $a>0$, $G(y)=1-F[(y-b)/a]$ при $a<0$.

401. а) $\begin{array}{lllllll} Z & 11 & 12 & 13 & 14 & 17 & 18 \\ P & 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}02 & 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{array}$; б) $\begin{array}{llll} Z & 5 & 11 & 17 \\ P & 0{,}56 & 0{,}38 & 0{,}06 \end{array}$.

403. $g(z)=\begin{cases}(1/2)e^{-z/5}(1-e^{-2z/15}) & \text{при } z\geqslant 0, \\ 0 & \text{при } z<0.\end{cases}$ **406.** $G(z)=$

$$=\begin{cases}0 & \text{при } z<0, \\ z^2/2 & \text{при } 0<z<1, \\ 1-(2-z)^2/2 & \text{при } 1<z<2, \\ 1 & \text{при } z>2.\end{cases}\qquad g(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z<0, \\ z & \text{при } 0<z<1, \\ 2-z & \text{при } 1<z<2, \\ 0 & \text{при } z>2.\end{cases}$$

407. $$G(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z<3, \\ (z-3)^2/16 & \text{при } 3<z<5, \\ (z/4)-1 & \text{при } 5<z<7, \\ 1-(9-z)^2/16 & \text{при } 7<z<9, \\ 1 & \text{при } z>9;\end{cases}$$

$$g(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z<3, \\ (z-3)/8 & \text{при } 3<z<5, \\ 1/4 & \text{при } 5<z<7, \\ (9-z)/8 & \text{при } 7<z<9, \\ 0 & \text{при } z>9.\end{cases}$$

Глава восьмая

409. $\begin{array}{lllll} X & 26 & 30 & 41 & 50 \\ p & 0{,}14 & 0{,}42 & 0{,}19 & 0{,}25 \end{array}$; $\begin{array}{lll} Y & 2{,}3 & 2{,}7 \\ p & 0{,}29 & 0{,}71 \end{array}$. **411.** $P=3/128$.

413. $f(x, y)=8e^{-4x-2y}$ при $x>0$, $y>0$; $f(x, y)=0$ при $x<0$ или $y<0$. **414.** $\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$. **415.** $F(x, y)=$

$=(1/2)[\sin x+\sin y-\sin(x+y)]$. **417.** $f(x, y)=(3/\pi R^3)\left[R-\sqrt{x^2+y^2}\right]$ внутри круга радиуса R с центром в начале координат; вне этого круга $f(x;\ y)=0$. **418.** $C=12/\pi^2$. **419.** $C=2/\pi$. **420.** а) $f(x, y)=\ln^2 2\cdot 2^{-x-y}$ в первом квадранте; вне квадранта $f(x, y)=0$; б) $P=5/3\cdot 2^{12}$. **422.** а) $\begin{array}{lll} X & 3 & 6 \\ p(X\mid 10) & 5/7 & 2/7; \end{array}$ б) $\begin{array}{llll} Y & 10 & 14 & 18 \\ p(Y\mid 6) & 5/14 & 5/28 & 13/28. \end{array}$

424. а) $C=\sqrt{3}/\pi$; б) $f_1(x)=\sqrt{3}/(2\sqrt{\pi})\, e^{-0,75x^2}$, $f_2(y)=(\sqrt{3}/\sqrt{\pi})\, e^{-3y^2}$; в) $\varphi(x\mid y)\,(1/\sqrt{\pi})\, e^{-(x+y)^2}$, $\psi(y\mid x)=(2/\sqrt{\pi})\times\times e^{-0,25(x+4y)^2}$. **426.** $f(x, y)=1/(4ab)$ внутри заданного прямоугольника; вне его $f(x, y)=0$; б) $f_1(x)=1/(2a)$ при $|x|\leqslant a$, при $|x|>a$ $f_1(x)=0$; при $|y|\leqslant b$ $f_2(y)=1/(2b)$, при $|y|>b$ $f_2(y)=0$. **427.** а) $f(x, y)=1/18$ внутри трапеции; вне её $f(x, y)=0$; б) $f_1(x)=$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ 2/9 & \text{при} \quad 0<x<3, \\ (-2/27)x+4/9 & \text{при} \quad 3<x<6, \\ 0 & \text{при} \quad x>6; \end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad y<0, \\ (-1/24)y+1/3 & \text{при} \quad 0<y<4, \\ 0 & \text{при} \quad y>4. \end{cases}$$

429*. а) $f(x, y)=1/36$; внутри трапеции; вне её $f(x, y)=0$; б) $f_1(x)=$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-6, \\ x/27+2/9 & -6<x<-3, \\ 1/9 & -3<x<3, \\ -x/27+2/9 & 3<x<6 \\ 0 & x>6, \end{cases} \qquad f_2(y)=\begin{cases} 0 & \text{при } y<0; \\ -y/24+1/3 & \text{при } 0<y<4, \\ 0 & y>4. \end{cases}$$

431. $M(X)=M(Y)=\sqrt{3\pi}/6$; $D(X)=D(Y)=(4-\pi)/12$. **432.** $M(X)=M(Y)=(\pi+4-4\sqrt{2})/4$. **433.** $M(X)=M(Y)=\pi/4$; $D(X)=D(Y)=(\pi^2+8\pi-32)/16$. **434.** а) $M(X)=M(Y)=\pi/2$; $D(X)=D(Y)=\pi^2-4$; б) $\mu_{xy}=0$. **435.** а) $f(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \text{ или } y<0, \\ 10e^{-(5x+2y)} & \text{при} \quad x>0, \quad y>0; \end{cases}$

б) $F_{xy}=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \text{ или } y<0, \\ (1-e^{-5x})(1-e^{-2y}) & \text{при } x>0, \quad y>0. \end{cases}$ **436.** $f_1(x)=2\sqrt{r^2-x^2}/\pi r^2$, $\varphi(x\mid y)=1/2\sqrt{r^2-y^2}$; $f_2(y)=2\sqrt{r^2-y^2}/\pi r^2$, $\psi(y\mid x)=1/2\sqrt{r^2-x^2}$.

Глава девятая

440. $\begin{array}{lllll} x_i & 4 & 7 & 8 & 12 \\ w_i & 0,25 & 0,10 & 0,15 & 0,50 \end{array}$.

442. а) $F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 2, \\ 0,1 & \text{при} \quad 2<x\leqslant 5, \\ 0,4 & \text{при} \quad 5<x\leqslant 7, \\ 0,6 & \text{при} \quad 7<x\leqslant 8, \\ 1 & \text{при} \quad x>8. \end{cases}$

б) $F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 4, \\ 0,5 & \text{при} \quad 4<x\leqslant 7, \\ 0,7 & \text{при} \quad 7<x\leqslant 8, \\ 1 & \text{при} \quad x>8. \end{cases}$

Глава десятая

451. $\bar{x}_в=4$. **454.** $\bar{x}_в=2621$. **456.** $s^2=5,1$. **458.** а) $\bar{x}_в=10$; б) $D_в=2,5$, $s^2=10/3$. **459.** $\bar{x}_в=166$; $D_в=33,44$. **461.** $D_в(X)=D_в(u)=167,29$. **462.** $D_в(X)=D_в(u)=12603$. **464.** $D_в(X)=D_в(u)/10^2=3,44/100=0,0344$. **465.** $D_в(X)=D_в(u)/10^2=13,36/100=0,1336$.

467. $s_X^2=s_u^2=168{,}88$. 469. $s_X^2=s_u^2/10^2=5{,}25/100=0{,}0525$. 470. $s_X^2=s_u^2/100=489/100=4{,}89$. 472. $\lambda^*=x_в=0{,}9$. 473. $\lambda^*=\bar{x}_в=0{,}5$. 474. $p=(\sum x_i)/nm$. 475. $p=(\sum n_ix_i)/(10\cdot 5)=0{,}22$. 476. $\lambda^*=1/\bar{x}_в$. 477. $\lambda^*=1/\bar{x}_в=1/5=0{,}2$. 478. $p=1/\bar{x}_в$. 479. $p^*=0{,}2$. 482. $\alpha^*=(\bar{x})^2/s^2-1=160^2/12062{,}5-1=1{,}12$; $\beta^*=s^2/\bar{x}=12062{,}5/160=75{,}4$. 483. $a^*=\bar{x}_в$, $\sigma^*=\sqrt{D_в}$. 484. $a^*=1{,}26$, $\sigma^*=0{,}5$. 485. $a^*=\bar{x}_в-\sqrt{3D_в}$, $b^*=\bar{x}_в+\sqrt{3D_в}$. 486. $a^*=2{,}24$, $b^*=22{,}38$. 488. $\lambda_1^*=2{,}11$, $\lambda_2^*=3{,}57$. 490. $p^*=(\sum n_ix_i)/1000=0{,}4$. 491. $\lambda^*=(\sum x_i)/n=\bar{x}_в$. 492. $\lambda^*=1$. 94. $\lambda^*=1/\bar{x}_в=1/20=0{,}05$. 495. $\beta^*=\bar{x}_в/(\alpha+1)$. 496. $\beta^*=\bar{x}_в/(\alpha+1)=75{,}47$. 497. $p=1/\bar{x}_в$. 498. $a^*=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}g(x_i)\right]\Big/n$. 499. $\sigma^*=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}[g(x_i)-a]^2/n}$. 500. $a^*=\bar{x}_в$, $\sigma^*=\sqrt{D_в}$. 502. а) $7{,}63<a<12{,}77$; б) $14{,}23<a<19{,}37$. 503. $1964{,}94<a<2035{,}06$. 504. $992{,}16<a<1007{,}84$. 505. $\delta=t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\dfrac{2}{\sqrt{100}}=0{,}392_{мм}$. 507. $n=179$. 509. $-0{,}04<a<0{,}88$. 511. $34{,}66<a<50{,}94$. 513. а) $0<\sigma<14{,}28$; б) $7{,}98<\sigma<20{,}02$. 515. $0{,}28<\sigma<1{,}32$. 517. $0{,}47<p<0{,}71$. 519. $0{,}78<p<0{,}87$. 520. $0{,}705<p<0{,}795$. 521. $0{,}07<p<0{,}18$. 522. а) $0{,}083<p<0{,}119$; б) $0{,}076<p<0{,}124$.

Глава одиннадцатая

524. а) $\bar{x}_в=19{,}672$, $D_в=0{,}169$; б) $\bar{x}_в=76{,}2$, $D_в=18{,}56$. 526. $D'_в=40{,}4$. 527. а) $\bar{y}_в=15{,}68$, $D_в=32$; б) $D'_в=30\frac{2}{3}$. 528. а) $\bar{y}_в=23{,}85$, $D_в=38{,}43$; б) $D'_в=36{,}35$. 530. а) $\bar{x}_в=51{,}1$, $D_в=101{,}29$; б) $\bar{x}_в=147{,}62$, $D_в=212{,}3$; в) $\bar{x}_в=16{,}46$, $D_в=4{,}87$; г) $\bar{x}_в=11{,}114$; $D_в=0{,}14$. 532. а) $a_s=0{,}135$, $e_k=-0{,}331$; б) $a_s=0{,}18$, $e_k=-0{,}45$. 534. а) $a_s=-0{,}01$, $e_k=-0{,}21$; б) $a_s=0{,}47$, $e_k=0{,}36$.

Глава двенадцатая

536. а) $\bar{y}_x=1{,}92x+100{,}9$, $\bar{x}_y=0{,}42y-38{,}3$; б) $\bar{y}_x=3{,}69x+66$, $\bar{x}_y=0{,}19y-3{,}1$; в) $\bar{y}_x=-2{,}15x+181{,}8$, $\bar{x}_y=-0{,}33y+65{,}7$; 538. а) $\bar{y}_x=0{,}66x^2+1{,}23x+1{,}07$, $\eta_{yx}=0{,}96$; б) $\bar{y}_x=3{,}20x^2-13{,}00x+9{,}07$, $\eta_{yx}=0{,}99$; в) $\bar{y}_x=1{,}48x^2+2{,}41x$, $\eta_{yx}=0{,}93$; г) $\bar{y}_x=1{,}59x^2+3{,}33x+9{,}4$, $\eta_{yx}=0{,}93$; д) $\bar{y}_x=-1{,}52x^2+121{,}94x-576{,}61$, $\eta_{yx}=0{,}91$. 539. а) $\bar{x}_y=2{,}8y^2+0{,}02y+3{,}18$, $\eta_{xy}=0{,}96$; б) $\bar{x}_y=2{,}29y^2-1{,}25y+1$, $\eta_{xy}=0{,}92$. 541. $\rho_в=0{,}92$ 542. $\rho_в=0{,}75$. 543. $\rho_в=0{,}73$. 544. $\rho_в=0{,}82$. Мнения специалистов достаточно хорошо согласуются. 545. $\rho_{AB}=-0{,}21$, $\rho_{AC}=0{,}64$, $\rho_{BC}=-0{,}3$. Наиболее согласуются оценки арбитров A и C. 547. $\rho_в=0{,}89$. 549. $\tau_в=0{,}78$. Оценки контролеров согласуются. 550. $\tau_в=0{,}54$. 551. $\tau_в=0{,}67$. Мнения специалистов согласуются удовлетворительно. 552. $\tau_{AB}=-0{,}16$, $\tau_{AC}=0{,}51$, $\tau_{BC}=0{,}51$. Наиболее совпадают оценки арбитров A и C, B и C. 553. $\tau_в=0{,}79$.

555. $F_{набл}=2{,}8$; $F_{кр}(0{,}01;\ 8;\ 15)=4$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. 557. $F_{набл}=1{,}52$; $F_{кр}(0{,}05;\ 5;\ 8)=3{,}69$. Таким образом, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. 559. $s_u^2=188{,}67$; $s_v^2=124{,}84$; $F_{набл}=1{,}51$; $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 7)=3{,}68$. Таким образом, нет оснований считать точность станков различной. 561. $\chi^2_{набл}=21{,}33$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 16)=26{,}3$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. 562. $s_x^2=0{,}27$; $\chi^2_{набл}=45{,}0$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 30)=43{,}8$. Нулевая гипотеза отвергается. Исправленная выборочная дисперсия значимо отличается от гипотетической. 564. $s_u^2=s_X^2=4$; $\chi^2_{лев.\ кр}(0{,}975;\ 19)=8{,}91$; $\chi^2_{прав.\ кр}(0{,}025;\ 19)=32{,}9$; $\chi^2_{набл}=38$. Нулевая гипотеза отвергается; новичок работает неритмично. 566. $z_{0,05}=1{,}645$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 120)=146{,}16$. Партия бракуется. 568. $Z_{набл}=2{,}5$; $z_{кр}=1{,}96$. Нулевая гипотеза отвергается. Средний вес изделий различается значимо. 569. $Z_{набл}=1{,}2$; $z_{кр}=1{,}96$. Данные наблюдений согласуются с нулевой гипотезой; выборочные средние различаются незначимо. 571. $F_{набл}=1{,}19$; $F_{кр}(0{,}01;\ 7;\ 9)=5{,}62$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве дисперсий. Имеем $|T_{набл}|=3{,}7$; $t_{двуст.\ кр}(0{,}01;\ 16)=2{,}92$. Нулевая гипотеза о равенстве средних отвергается. 573. $\bar{x}=12{,}8$; $\bar{y}=12{,}35$; $s_X^2=0{,}11$; $s_Y^2=0{,}07$; $F_{набл}=1{,}57$; $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 15)=2{,}59$; $T_{набл}=3{,}83$; $t_{правост.\ кр}(0{,}05;\ 24)=1{,}71$. Нулевая гипотеза отвергается. 575. а) $U_{набл}=1{,}3$, $u_{кр}=2{,}57$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. б) $u_{кр}=2{,}33$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. в) $U_{набл}=3$, $u_{кр}=2{,}33$. Средний вес таблетки значимо отличается от допустимого; давать лекарство больным нельзя. 576. в) 1) $1-\beta=0{,}5-\Phi(0{,}15)=0{,}4404$; 2) $n_1=25$. 577. в) $1-\beta=0{,}6664$. 578. а) $\pi_3(a_1)=1-[\Phi(u_{кр}-\lambda_1)+\Phi(u_{кр}+\lambda_1)]$, где $\lambda_1=(a_1-a_0)/[(\sigma/\sqrt{n})\sqrt{\pi/2}]$, $u_{кр}$ находят из равенства $\Phi(u_{кр})=(1-\alpha)/2$; б) При проверке нулевой гипотезы по выборочной средней мощность $\pi_2(20)=0{,}8078$; при проверке нулевой гипотезы по выборочной медиане мощность $\pi_3(20)=0{,}6103$. При уменьшении $|\lambda|$ мощность уменьшается; так как $|\lambda_1|=\left|\dfrac{a_1-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\pi/2}}=|\lambda|\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\pi/2}}<|\lambda|$, то мощность критерия проверки нулевой гипотезы по выборочной медиане меньше мощности критерия по выборочной средней. 579. б) $T_{набл}=-2$; $-t_{правост.\ кр}=-1{,}75$. Нулевую гипотезу отвергаем. 582. $\bar{d}=-0{,}9$; $\sum d_i^2=65$; $s_d=2{,}51$; $T_{набл}=-1{,}13$; $t_{двуст.\ кр}(0{,}01;\ 9)=3{,}25$. Результаты взвешиваний различаются незначимо. 583. Нет оснований считать, что физическая подготовка улучшилась. 584. $\bar{d}=-2$; $\sum d_i^2=66$; $s_d=\sqrt{34/7}$; $T_{набл}=-2{,}57$; $t_{двуст.\ кр}(0{,}05;\ 7)=2{,}36$. Результаты анализов различаются значимо. 585. $\bar{d}=0{,}018$; $\sum d_i^2=0{,}0177$; $s_d=0{,}034$; $T_{набл}=1{,}91$; $t_{двуст.\ кр}(0{,}05;\ 12)=2{,}18$. Результаты анализа различаются незначимо. 589. $U_{набл}=1{,}76$; $u_{кр}=1{,}645$. Партию принять нельзя. 590. $U_{набл}=2{,}33$; $u_{кр}=1{,}645$. Нулевая гипотеза отвергается. Новая форма рекламы значимо эффективнее прежней. 591. $U_{набл}=1{,}77$; $u_{кр}=1{,}96$. Нет оснований считать новое лекарство значимо эффективнее прежнего. 594. Нельзя (объем каждой выборки не должен быть меньше 4). 595. а) $k=64$; $\sum k_i s_i^2=252{,}8$; $\sum k_i \lg s_i^2=$

$=36{,}9663$; $V=2{,}8$; $B_{набл}<2{,}8$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 3)=7{,}8$. Нет оснований отвергнуть гипотезу об однородности дисперсий; б) $D^*_{г}=3{,}95$. **596.** $k=116$; $\sum k_i r_i^2=7016$; $\overline{r^2}=60{,}48$; $\sum k_i \lg r_i^2=201{,}4344$; $V=12{,}0475$; $C=1{,}0146$; $B_{набл}=11{,}87$; $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 3)=11{,}3$. Гипотеза об однородности дисперсий отвергается. **597.** $k=65$; $\overline{r^2}=74{,}68$; $\sum k_i \lg r_i^2=121{,}0550$; $V=1{,}62$; $B_{набл}<1{,}62$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 3)=7{,}8$. Нет оснований предпочесть один из способов остальным. **598.** а) $s_X^2=7{,}12$; $s_Y^2=7{,}92$; $s_Z^2=13{,}92$; $\overline{s^2}=9{,}902$; $\sum k_i s_i^2=673,\ 36$; $\sum k_i \lg s_i^2=66{,}36$; $V=3{,}11$; $B_{набл}=7{,}76$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 2)=6{,}0$. Гипотеза об однородности дисперсий принимается. Станки обеспечивают одинаковую точность; б) $F_{набл}=2$; $F_{кр}(0{,}05;\ 24{,}19)=2{,}11$. **600.** $k=36$; $l=6$; $G_{набл}=0{,}2270$. а) $G_{кр}(0{,}01;\ 36;\ 6)=0{,}2858$; б) $G_{кр}(0{,}05;\ 36;\ 6)=0{,}2612$. В обоих случаях нет оснований отвергнуть гипотезу об однородности дисперсий. **602.** $k=36$; $l=5$; $G_{набл}=0{,}5036$; $G_{кр}(0{,}05;\ 36;\ 5)=0{,}3066$. Гипотеза об однородности дисперсий отвергается. **603.** а) $k=9$; $l=4$; $G_{набл}=0{,}3556$; $G_{кр}\times(0{,}05;\ 9;\ 4)=0{,}5017$. Автоматы обеспечивают одинаковую точность взвешивания. б) $D^*_{г}=0{,}0225$. **604.** а) $k=9$; $l=3$; $G_{набл}=0{,}465$; $G_{кр}(0{,}01;\ 9;\ 3)=0{,}6912$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности дисперсий; б) $D^*_{г}=0{,}067$. **605.** $k=19$; $l=15$; $G_{набл}0{,}089$; $G_{кр}(0{,}05;\ 19;\ 15)=0{,}1386$. Станок работает устойчиво. **607.** $U_{набл}=2{,}85$, $u_{кр}=2{,}57$. Нулевая гипотеза отвергается. Относительные частоты изготовленных станками нестандартных деталей различаются значимо. **608.** $U_{набл}=2{,}15$; $u_{кр}=1{,}65$. Нулевая гипотеза отвергается. Вероятность изготовления бракованного изделия первым заводом больше, чем вторым. **609.** $U_{набл}=0{,}94$; $u_{кр}=1{,}96$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. **611.** $k=60$; $T_{набл}=2{,}44$; $t_{кр}(0{,}01;\ 60)=2{,}66$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; X и Y — некоррелированные случайные величины. **612.** $k=118$; $T_{набл}=4{,}74$; $t_{кр}(0{,}05;\ 118)=1{,}98$. Нулевая гипотеза отвергается; X и Y — коррелированные случайные величины. **614.** а) $\bar{u}=-0{,}11$; $\sigma_u=0{,}948$, $\bar{v}=0{,}25$, $\sigma_v=0{,}994$, $\sum n_{uv}=73$, $r_в=0{,}8$; б) $T_{набл}=13{,}2$; $t_{кр}(0{,}01;\ 98)=2{,}64$. Нулевая гипотеза отвергается: X и Y коррелированы. **615.** а) $\bar{u}=-0{,}03$, $\sigma_u=1{,}321$, $\bar{v}=-0{,}09$, $\sigma_v=1{,}877$; $\sum n_{uv}uv=-206$, $r_в=-0{,}83$; б) $T_{набл}=-14{,}73$, $t_{кр}(0{,}001;\ 98)=3{,}43$. Нулевая гипотеза отвергается: X и Y коррелированы. **616.** а) $\bar{u}=-0{,}84$, $\sigma_u=1{,}567$, $\bar{v}=0{,}69$, $\sigma_v=1{,}419$; $\sum n_{uv}uv=-94$, $r_в=-0{,}16$; б) $T_{набл}=-1{,}3$, $t_{кр}(0{,}05;\ 98)=1{,}99$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу: X и Y некоррелированы. **618.** $T_{кр}=0{,}28$. Нулевая гипотеза отвергается. Ранговая корреляционная связь между оценками двух преподавателей значимая. **619.** $T_{кр}=0{,}54$. Ранговая корреляционная связь значима. **620.** $T_{кр}=0{,}61$. Нулевая гипотеза отвергается. Ранговая корреляционная связь значима. **621.** $T_{кр}=0{,}62$. Ранговая корреляционная связь значима. **622.** $T_{кр}=0{,}31$. Выборочный коэффициент ранговой корреляции значим. **624.** $T_{кр}=0{,}64$. Ранговая корреляционная связь значимая. **625.** $T_{кр}=0{,}41$. Ранговая корреляционная связь значимая. **626.** $T_{кр}=0{,}42$. Ранговая корреляционная связь незначимая. **628.** $W_{набл}=39$, $w_{нижн.\,кр}(0{,}025;\ 6{,}9)=31$, $w_{верхн.\,кр}=65$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об одинаковой эффективности методов A и B. **629.** $W_{набл}=73$, $w_{нижн.кр}(0,05;\ 9,\ 10)=69$, $w_{верхн.кр}=111$. Нет оснований отвергнуть гипотезу об одинаковой производительности труда смен. **630.** $W_{набл}=156$, $w_{нижн.кр}(0,05;\ 10,\ 12)=89$, $w_{верхн.кр}=141$. Нулевая гипотеза отвергается: рацион A эффективнее рациона B. **632.** $w_{нижн.кр}\ (0,005;\ 40,\ 60)=$ $=1654$, $w_{верхн.кр}=2386$. Нулевая гипотеза отвергается. **633.** $W_{набл}=$ $=736,5$, $w_{нижн.кр}(0,025;\ 25,\ 30)=584$, $w_{верхн.кр}=816$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности выборок. **636.** $k=8$; $\chi^2_{набл}=7,71$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 8)=15,5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. **638.** а) Случайно; $k=2$, $\chi^2_{набл}=2,47$, $\chi^2_{кр}(0,05;\ 2)=6,0$; б) случайно; $k=6$, $\chi^2_{набл}=1,52$, $\chi^2_{кр}(0,05;\ 6)=12,6$; в) значимо; $k=4$, $\chi^2_{набл}=13,93$, $\chi^2_{кр}(0,05;\ 4)=9,5$; г) случайно; $k=6$, $\chi^2_{набл}=$ $=0,83$, $\chi^2_{кр}(0,05;\ 6)=12,6$. **640.** а) Согласуется; $\overline{x}^*=10,4$; $\sigma^*=13,67$; $k=4$; $\chi^2_{набл}=5,4$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 4)=9,5$; б) Согласуется; $\overline{x}^*=12,04$; $\sigma^*=4,261$; $k=9-3=6$; $\chi^2_{набл}=1,3$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 6)=12,6$; в) не согласуется; $\overline{x}^*=42,5$; $\sigma^*=17,17$; $k=5$; $\chi^2_{набл}=14$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 5)=11,1$; г) согласуется; $\overline{x}^*=27,54$; $\sigma^*=10,44$; $k=6$; $\chi^2_{набл}=5,4$; $\chi^2_{кр}\ (0,05;\ 6)=12,6$. **643.** а) Гипотеза о нормальном распределении X согласуется с выборкой; б) $a=27,5$, $\sigma=10,4$. **644.** Гипотеза о нормальном распределении X не согласуется с выборкой. **646.** а) Нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X; б) $a^*=4,16$, $\sigma^*=9,8$. **649.** $k=5$; $\overline{x}_в=1000$; $\lambda=0,001$; теоретические частоты 148,36; 99,45; 66,64; 44,68; 29,97; 20,07; 13,46; $\chi^2_{набл}=33,84$; $\chi^2_{кр}(0,01;\ 5)=15,1$. Гипотеза о показательном распределении отвергается. **650.** $k=5$; $\overline{x}_в=20$; $\lambda=0,05$; теоретические частоты: 393,47; 238,65; 144,75; 87,79; 53,26; 32,29; 19,59; $\chi^2_{набл}=15,88$; $\chi^2_{кр}(0,01;\ 5)=15,1$. Гипотеза о показательном распределении времени безотказной работы элементов отвергается. **651.** $k=6$; $\overline{x}_в=2,5$; $\lambda=0,4$; теоретические частоты: 263,76; 176,80; 118,48; 79,44; 53,28; 35,68; 23,92; 16,00; $\chi^2_{набл}=41,66$; $\chi^2_{кр}(0,01;\ 6)=$ $=16,8$. Гипотеза о показательном распределении отвергается. **653.** $k=4$; теоретические частоты: 6,25; 25,00; 37,50; 25,00; 6,25; $\chi^2_{набл}=2,88$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 4)=9,5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о биномиальном распределении X. **654.** $p^*=0,4$; $k=5$; теоретические частоты: 0,60; 4,04; 12,24; 21,50; 25,05; 20,05; 11,15; 4,25; $\chi^2_{набл}=0,68$; $\chi^2_{кр}(0,01;\ 5)=15,1$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по биномиальному закону. **655.** $p^*=0,2$; $k=2$; теоретические частоты: 65,54; 81,92; 40,96; 10,24; 1,28; 0,06; $\chi^2_{набл}=4,65$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 2)=6,0$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по биномиальному закону. **659.** $\overline{x}_в=22,47$; $\sigma_в=1,44$; $a^*=19,98$; $b^*=24,96$; $f(x)=0,2$; $k=7$; $\chi^2_{набл}=4,39$; $\chi^2_{кр}(0,01;\ 7)=$ $=18,5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о равномерном распределении X. **660.** $\overline{x}_в=1,5$; $\sigma_в=21,31$; $a^*=-35,37$; $b^*=38,37$; $f(x)=$ $=0,014$; $k=5$; $\chi^2_{набл}=7,71$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 5)=11,1$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о равномерном распределении температуры. **661.** $\overline{x}_в=12,71$; $\sigma_в=2,86$; $a^*=7,76$; $b^*=17,66$; $f(x)=0,101$; $k=7$;

$\chi^2_{\text{набл}}=53,43$; $\chi^2_{\text{кр}}(0,01;\ 7)=18,5$. Гипотеза о равномерном распределении времени отвергается. Данные наблюдений не согласуются с этой гипотезой. **663.** $k=2$; $\lambda=\overline{x}_{\text{в}}=0,5$; теоретические частоты: 122,30; 60,66; 15,16; 2,52; 0,32; $\chi^2_{\text{набл}}=9,27$; $\chi^2_{\text{кр}}(0,05;\ 2)=6,0$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по закону Пуассона. **664.** $k=4$; $\lambda=\overline{x}_{\text{в}}=0,9$; теоретические частоты: 406,6; 365,9; 164,7; 49,4; 11,1; 2,3; $\chi^2_{\text{набл}}=9,26$; $\chi^2_{\text{кр}}(0,01;\ 4)=13,3$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по закону Пуассона. **665.** $k=3$; $\lambda=\overline{x}_{\text{в}}=0,7$; теоретические частоты: 496,6; 347,6; 121,7; 28,4; 5,0; 0,7; $\chi^2_{\text{набл}}=4,5$; $\chi^2_{\text{кр}}(0,05;\ 4)=9,5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по закону Пуассона. **666.** $k=4$; $\lambda=\overline{x}_{\text{в}}=1$; теоретические частоты: 183,95; 183,95; 92,00; 30,65; 7,65; 1,55; 0,25; 0,05; $\chi^2_{\text{набл}}=8,32$; $\chi^2_{\text{кр}}(0,01;\ 4)=13,3$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по закону Пуассона. **667.** $k=2$; $\lambda=\overline{x}_{\text{в}}=0,61$; теоретические частоты: 108,7; 66,3; 20,2; 4,1; 0,7; $\chi^2_{\text{набл}}=0,32$; $\chi^2_{\text{кр}}(0,05;\ 2)=6,0$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по закону Пуассона.

Глава четырнадцатая

669. $S_{\text{общ}}=1851$; $S_{\text{факт}}=360,55$; $S_{\text{ост}}=1490,45$; $s^2_{\text{факт}}=120$; $s^2_{\text{ост}}=93$; $F_{\text{набл}}=1,29$; $F_{\text{кр}}(0,05;\ 3;\ 16)=3,24$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. **670.** $S_{\text{общ}}=22426$; $S_{\text{факт}}=12960$; $S_{\text{ост}}=9466$; $s^2_{\text{факт}}=2592$; $s^2_{\text{ост}}=225$; $F_{\text{набл}}=11,5$; $F_{\text{кр}}(0,01;\ 5;\ 42)=3,49$. Нулевая гипотеза о равенстве групповых средних отвергается. **671.** $S_{\text{общ}}=296$; $S_{\text{факт}}=104$; $S_{\text{ост}}=192$; $s^2_{\text{факт}}=52$; $s^2_{\text{ост}}=21,3$; $F_{\text{набл}}=2,44$; $F_{\text{кр}}(0,05;\ 2;\ 9)=4,26$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. **672.** $S_{\text{общ}}=1541$; $S_{\text{факт}}=95$; $S_{\text{ост}}=1446$; $s^2_{\text{факт}}=31,67$; $s^2_{\text{ост}}=60,25$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. **673.** $S_{\text{общ}}=334$; $S_{\text{факт}}=32$; $S_{\text{ост}}=302$; $s^2_{\text{факт}}=16$; $s^2_{\text{ост}}=33,56$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. **675.** $S_{\text{общ}}=1619,43$; $S_{\text{факт}}=961,46$; $S_{\text{ост}}=657,97$; $s^2_{\text{факт}}=240,36$; $s^2_{\text{ост}}=73,11$; $F_{\text{набл}}=3,29$; $F_{\text{кр}}(0,05;\ 4;\ 9)=3,63$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. **676.** $S_{\text{общ}}=6444$; $S_{\text{факт}}=4284$; $S_{\text{ост}}=2160$; $s^2_{\text{факт}}=2142$; $s^2_{\text{ост}}=216$; $F_{\text{набл}}=9,92$; $F_{\text{кр}}(0,01;\ 2;\ 10)=7,56$. Нулевая гипотеза отвергается. Групповые средние различаются значимо. **677.** $S_{\text{общ}}=5533442$; $S_{\text{факт}}=3399392$; $S_{\text{ост}}=2134050$; $s^2_{\text{факт}}=1699696$; $s^2_{\text{ост}}=194004$; $F_{\text{набл}}=8,76$; $F_{\text{кр}}(0,01;\ 2;\ 11)=7,20$. Нулевая гипотеза отвергается. Групповые средние различаются значимо. **678.** $S_{\text{общ}}=192788$; $S_{\text{факт}}=42695$; $S_{\text{ост}}=150093$; $s^2_{\text{факт}}=14232$; $s^2_{\text{ост}}=6822$; $F_{\text{набл}}=2,09$; $F_{\text{кр}}(0,05;\ 3;\ 22)=3,05$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве групповых средних.

Глава пятнадцатая

680. 8, 3, 12, 12, 8, 12, 23, 3. **681.** а) $\begin{array}{lllll} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0,216 & 0,432 & 0,288 & 0,064 \end{array}$;
б) 3, 1, 2, 1, 2. **682.** 1, 3, 2, 2, 2, 2. **684.** A_2, A_2, A_2, A_1, A_2, A_4, A_2,

A_2, A_4. **686.** A_3, A_1, A_2, A_1, A_1. **687.** A_5, A_7, A_5, A_3, A_8. **688.** A_3, A_1, A_3, A_2, A_1. **690.** 11,4; 4,2; 13,4; 7,6. **691.** $x_i=(-\ln r_i)/\lambda$. **693.** 0,019: 0,036; 0,027; 0,095; 0,015. **694.** $x_i=0{,}5r_i$. **695.** 6,90; 7,49; 4,13; 8,87; 6,37. **696.** $x_i=(-\ln r_i)/\lambda$. **697.** 2,232; 11,087; 3,711; 7,985; 0,202. **698.** $x_i=\sqrt{-x_0\ln r_i}$. **699.** $x_i=\sigma\sqrt{-2\ln r_i}$. **700.** $x_i=2(1-\sqrt{r_i})/\lambda$. **701.** 0,388; 1,600; 0,338; 0,628. **702.** $x_i=\arccos(1-2r_i)$. **703.** $x_i=-(1/c)\ln[1-r_i(1-e^{-bc})]$; $x_i=-(1/c)\ln[r_i+(1-r_i)e^{-bc}]$. **705.** $x=(-\ln r_2)/2$, если $r_1<0{,}25$, $x=(-\ln r_2)$, если $r_1\geqslant 0{,}25$. **706.** $x=(-\ln r_2)/3$, если $r_1<2/5$, $x=(-\ln r_2)/4$, если $r_1\geqslant 2/5$. **707.** $x=-\ln r_2$, если $r_1<1/7$, $x=(-\ln r_2)/2$, если $1/7\leqslant r_1<3/7$, $x=(-\ln r_2)/3$, если $r_1\geqslant 3/7$. **708.** $x=(9r_2)/4$, если $r_1<1/3$, $x=\sqrt[4]{18r_2+1}+1$, если $r_1\geqslant 1/3$. **709.** $x=2r_2$, если $r_1<5/6$, $x=1+\sqrt[5]{2r_2-1}$, если $r_1\geqslant 5/6$. **711.** а) 0,84; $-0{,}14$; 0,31; $-1{,}27$; 0,21; б) 11,68; 9,72; 10,62; 7,46; 10,42. **712.** а) 0,316; 0,045; $-1{,}232$; 0,357; $-0{,}930$; б) 4,0316; 4,0045; 3,8768; 4,0357; 3,9070. **713.** $a^*=\overline{x}_в=-0{,}1$; $\sigma^*=\sqrt{D_в}=1{,}3$. **715.** (x_3, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2), (x_3, y_2), (x_2, y_1). **716.** (x_3, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_1), (x_3, y_1), (x_3, y_1). **718.** $x_i=\sqrt{r_i}$, $y_i=\sqrt{r'_i}$. **720.** $x_i=3\sqrt{r_i}$, $y_i=4r'_i+x_i-2$. **722.** $y_i=\sqrt[3]{r_i}$, $x_i=y_i\cdot r'_i$. **723.** $x_i=\sqrt[4]{r_i}$, $y_i=x_i^2r'_i$. **725.** а) $P^*=0{,}95$, б) $|P-P^*|=0{,}07$. **726.** а) $P^*=0{,}5$; б) $|P-P^*|=0{,}079$. **728.** а) $P^*=0{,}5$; б) $\overline{l^*}=10{,}17$. **729.** а) $P^*=0{,}46$; б) $\overline{l^*}=66$. **731.** $x_1=9$, $x_2=x_3=x_4=x_5=10$, $x_6=11$; $a^*=\overline{x}=10$. **733.** а) 8,5; б) 4,96; в) 0,85; г) 0,15. **737.** 238. **738.** а) 38,63; б) 37,2; в) 14291. **739.** а) 1,711; б) $\sigma^2=(1/2)(e^2-1)-(e-1)^2=0{,}242$; в) 2324. **740.** а) 0,164; б) 0,479; **742.** а) 0,97; б) 0,096. **744.** а) 0,253; б) 0,491; в) 0,413; г) 0,658. д) 0,104. **747.** а) 5,988; б) 3, 173; в) 1,001; г) 0,477. **750.** 5,2. **751.** 1,903. **754.** 1,719. **755.** 0,857.

Глава шестнадцатая

756. а) $x_1(t)=2(t^2+1)$; б) $x_2(t)=3{,}5(t^2+1)$. **757.** а) $X_1=U/2$; б) $X_2=U$. **759.** $m_x(t)=5e^t$. **761.** а) $m_x(t)=(t+1)^2$; б) $m_x(t)=\sin 4t+\cos 4t$. **765.** $K_y=K_x$. **767.** а) $K_y=(t_1+1)(t_2+1)K_x$; б) $K_z=C^2K_x$. **769.** $D_y(t)=D_x(t)$. **771.** $D_y(t)=(t+3)^2D_x(t)$. **772.** а) $m_y(t)=5t$, $K_y=25e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}$. **776.** а) $m_x(t)=10\sin 3t$; б) $K_x=0{,}2\sin 3t_1\sin 3t_2$; в) $D_x(t)=0{,}2\sin^2 3t$. **777.** а) $K_x(1, 2)=22$, $D_x(1)=6$, $D_x(2)=84$; б) $\rho_x(t_1, t_2)=(1+5t_1t_2)/\left(\sqrt{1+5t_1^2}\sqrt{1+5t_2^2}\right)$,

$\rho_{(x)}(1,4)=(7\sqrt{6})/18$. **778.** $\rho_x=\begin{cases} e^{-|t_2-t_1|}, & \text{если аргументы одного знака,} \\ -e^{-|t_2-t_1|}, & \text{если аргументы разных знаков.}\end{cases}$

782. $R_{yx}(t_1, t_2)=R_{xy}(t_2, t_1)=\cos(\alpha t_2+\beta t_1)$. **783.** $\rho_{xy}=1$, если t_1 и t_2+1 одного знака; $\rho_{xy}=-1$, если t_1 и t_2+1 разных знаков. **784.** а) $K_z(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2)+K_y(t_1, t_2)+R_{xy}(t_1, t_2)+R_{yx}(t_2, t_1)$; б) $K_z=K_x+K_y$. **785.** а) $m_z(t)=3t$; $K_z=t_1t_2+e^{-4(t_2-t_1)^2}$. **787.** а) $K_v=K_x+K_y+K_z+R_{xy}+R_{yx}+R_{xz}+R_{zx}+R_{yz}+R_{zy}$; б) $K_v=K_x+K_y+K_z$. **789.** $m_x(t)=4t+7t^2$; $K_x=0{,}1t_1t_2+2t_1^2t_2^2$; $D_x(t)=0{,}1t^2+2t^4$. **790.** $m_x(t)=\sin t+8\cos t$; $K_x=4\cos(t_2-t_1)$; $D_x(t)=4$. **791.** $m_x(t)=\cos 2t+2\sin t+t$; $K_x=3\cos 2t_1\cos 2t_2+4\sin t_1\sin t_2$;

$D_x(t)=3\cos^2 2t+4\sin^2 t$. **792.** $\rho_{xy}=\cos(3t_2-t_1)$. **793.** $K_x=D_1\cos\omega_1(t_2-t_1)+D_2\cos\omega_2(t_2-t_1)$. **794.** $m_{\dot x}(t)=3t^2+2$. **795.** $m_y(t)=3t^2$. **797.** $K_{\dot x}=10e^{-(t_2-t_1)^2}[1-2(t_2-t_1)^2]$. **798.** а) $m_{\dot x}(t)=4e^{3t}(3\cos 2t-2\sin 2t)$; б) $K_{\dot x}=e^{3(t_1+t_2)}(3\cos 2t_1-2\sin 2t_1)\times(3\cos 2t_2-2\sin 2t_2)$. **799.** $K_y=D_x\dfrac{\omega^2(t_1+t_2)^2+2}{(t_1+t_2)^3}\cos\omega(t_2-t_1)$. **800.** а) $m_y(t)=5\cos t$; б) $K_y=3e^{-0{,}5(t_2-t_1)^2}[1-(t_2-t_1)^2]$. **802.** а) $R_{x\dot x}=-2(t_2-t_1)e^{-(t_2-t_1)^2}$, $R_{\dot x x}=-R_{x\dot x}$; б) $R_{x\dot x}=t_1e^{t_1+t_2}(t_2+1)$, $R_{\dot x x}=t_2e^{t_1+t_2}(t_1+1)$. **803.** $K_{\dot x}=\dfrac{\partial R_{x\dot x}}{\partial t_1}$. **804.** $K_{\dot x}=(t_1+1)(t_2+1)e^{t_1+t_2}$. **806.** $K_z=5[3-4(t_2-t_1)^2]e^{-(t_2-t_1)^2}$. **808.** $R_{x\ddot x}=R_{\ddot x x}=2[2(t_2-t_1)^2-1]e^{-(t_2-t_1)^2}$. **809*.** $K_y=U(t_1)U(t_2)K_x+V(t_1)V(t_2)K_{\dot x}+U(t_1)V(t_2)\dfrac{\partial K_x}{\partial t_2}+U(t_2)V(t_1)\dfrac{\partial K_x}{\partial t_1}$. **810*.** $R_{yz}=ac\dfrac{\partial K_x}{\partial t_2}+bc\dfrac{\partial^2K_x}{\partial t_1\,\partial t_2}+ad\dfrac{\partial^2K_x}{\partial t_2^2}+bd\dfrac{\partial^3K_x}{\partial t_1^2\,\partial t_2}$. **812.** а) $m_y(t)=\sin t$, б) $m_y(t)=2t+\sin 2t$, в) $m_y(t)=0{,}5(t^2-\sin 2t)$. **813.** $m_y(t)=[5/(\alpha^2+\beta^2)][e^{\alpha t}(\beta\sin\beta t+\alpha\cos\beta t)-\alpha]$. **814.** а) $m_y(t)=2/(1+\alpha^2)[e^{\alpha t}(\alpha\sin t-\cos t)+1]$, б) $m_y(t)=t-0{,}5\sin 2t$. **815.** $m_y(t)=(t^2+1)(t+0{,}5\sin 2t)$. **817.** а) $K_y=(\cos\omega t_1-1)\times(\cos\omega t_2-1)/\omega^2$; б) $D_y(t)=(\cos\omega t-1)^2/\omega^2$. **818.** $D_y(t)=t^4/4$. **819.** а) $D_y(t)=t^4[2t^2/9)+(3/4)]$; б) $D_y(t)=[e^t(t-1)+1]^2$; в) $D_y(t)=2t\,\mathrm{arctg}\,t-\ln(1+t^2)$; г) $D_y(t)=(1/169)[2e^{3t}\sin 2t+3(2e^{3t}\cos 2t-1)]$. **820.** а) $m_y(t)=0{,}5[t+(\sin 2t/2)]$; б) $K_y=(\sin\omega t_1\sin\omega t_2)/\omega^2$; в) $D_y(t)=(\sin^2\omega t)/\omega^2$. **822.** а) $D_y(t)=1{,}5\sin^2 2t$; б) $D_y(t)=3(1-\cos t)^2$. **823.** $K_y=t_1t_2(e^{-t_1}-1)(e^{-t_2}-1)$. **824.** а) $m_y(t)=(\sin 3t)/3t$; б) $K_y=(\sin 3t_1\sin 3t_2)/9t_1t_2$; в) $D_y(t)=(\sin^2 3t)/9t^2$. **825*.** $D_y(t)=e^{2\alpha t}(\beta\sin\beta t+\alpha\cos\beta t-\alpha)^2/4t^4(\alpha^2+\beta^2)^2$. **827*.** а) $m_y(t)=3t+2t^2$; б) $D_y(t)=5(2t+e^{-2t}-1)$. **829.** а) $R_{xy}=t_1t_2^2+t_2$; б) $R_{xy}=\sin t_2\cos t_1$; в) $R_{xy}=t_1e^{t_1}[(t_2-1)e^{t_2}+1]$, $R_{yx}=t_2e^{t_2}[(t_1-1)e^{t_1}+1]$.

Глава семнадцатая

831. $m_x(t)=0$, $K_x=(1/2)\cos(t_2-t_1)$. **834.** $X(t)$ — нестационарная функция: $m_x(t)=m_u\cos 2t\neq\mathrm{const}$. **835.** $X(t)$ — стационарная функция: $m_x(t)=0$, $K_x=D\cos(t_2-t_1)$. **837.** $X(t)$ — нестационарная функция: $m_x(t)=a\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(\omega t+\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$. **839*.** $D_x(t)=a^2[0{,}5-(1/2e^2)^2]\cos^2\omega t+a^2[0{,}5-(1/e)-(1/2e^2)]\sin^2\omega t$. **842.** $k_y(\tau)=16De^{-\alpha^2\tau^2}$. **845.** а) $\rho_x(\tau)=e^{-\tau^2}$; б) $\rho_x(\tau)=e^{-|\tau|}(1+|\tau|)$. **849.** $m_x(t)=m_y(t)=0$, $K_x=K_y=5\cos(t_2-t_1)$; $R_{xy}=5\sin(t_2-t_1)$. **850.** Нет. а) $R_{xy}=6\cos t_1\cos t_2$; б) $R_{xy}=3\cos(2t_2-t_1)$. **851.** $\rho_{xy}(\tau)=\sin\tau$. **854.** а) $k_{\dot x}(\tau)=2e^{-0{,}5\tau^2}(1-\tau^2)$, $D_{\dot x}=k_{\dot x}(0)=2$; б) $D_x/D_{\dot x}=1$. **856.** а) $k_{\dot x}(\tau)=3e^{-2|\tau|}(\mathrm{ch}\,\tau-2\,\mathrm{sh}|\tau|)$;

б) $k_{\dot{x}}(0)=3$. **859.** $P(\sqrt{5}<Y<\infty)=0{,}5-P(0<Y<\sqrt{5})=$ $=0{,}5-0{,}1915=0{,}3085$. **860*.** $f(y)=(1/10\sqrt{2\pi})\,e^{-(y^2/200)}$. **863.** а) $D_y(t)=2t\operatorname{arctg} t-\ln(1+t^2)$; б) $D_y(t)=2D(\alpha t+e^{-\alpha t}-1)/\alpha^2$; в) $D_y(t)=(2D/\alpha^2)\,[(\alpha t+3)\,e^{-\alpha t}+(2\alpha t-3)]$. **864.** $D_y/k_x(0)=$ $=1360/10=136$. **866.** $r_{x\dot{x}}(\tau)=-|\tau|\,e^{-|\tau|}\operatorname{sign}\tau$, $r_{\dot{x}x}(\tau)=-r_{x\dot{x}}(\tau)$,

где $\operatorname{sign}\tau=\begin{cases}-1 & \text{при } \tau<0,\\ 0 & \text{при } \tau=0,\\ 1 & \text{при } \tau>0.\end{cases}$ **868.** $r_{x\ddot{x}}(\tau)=r_{\ddot{x}x}(\tau)=k''_x(\tau)$.

869. $r_{x\ddot{x}}(\tau)-(D\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}/3)\,(\alpha^2\tau^2-\alpha|\tau|-1)$. **871.** $k_y(\tau)-(3-4\tau^2)\,e^{-\tau^2}$. **872.** а) $k_y(\tau)=k_x(\tau)+2k''_x(\tau)+k^{\mathrm{IV}}_x(\tau)$; б) $k_y(\tau)=-k''_x(\tau)+k^{\mathrm{IV}}_x(\tau)$. **873.** $k_y(\tau)=(4/3)\,e^{-|\tau|}(\tau^2-|\tau|+1)$. **874*.** $k_y(\tau)=k_x(\tau)+k''_x(\tau)+$ $+k^{\mathrm{IV}}_x(\tau)$. **875.** $r_{x\dddot{x}}(\tau)=k'''_x(\tau)$, $r_{\dddot{x}x}(\tau)=-k'''_x(\tau)$. **876.** $r_{\dot{x}\ddot{x}}(\tau)=$ $=-k'''_x(\tau)$. **879.** $D_x=10$. **881.** $D_{\dot{x}}=\pi a^2/2$. **884.** $s_x(\omega)=$ $=2\sin^2(5\omega/2)/5\pi\omega^2$. **886.** $s_x(\omega)=D\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)$. **888*.** $s_x(\omega)=(D\alpha/\pi)\times$ $\times(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)/[(\omega-\beta)^2+\alpha^2]\,[(\omega+\beta)^2+\alpha^2]$. **889*.** $s_x(\omega)=(2D\alpha/\pi)\cdot(\alpha^2+$ $+\beta^2)/[(\omega^2\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2]$. **890.** $s_x(\omega)=De^{-(\omega^2/4\alpha^2)}/\alpha\sqrt{2\pi}$. **892.** $s_x(\omega)=$ $=(1/5)/(\omega^2+0{,}01)^2\ \pi$. **894*.** $s_y(\omega)=2D\alpha^3\ (1+\omega^2)/\pi\ (\alpha^2+\omega^2)^2$. **897.** $s_{x\,\text{норм}}(\omega)=\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)$. **898.** $S_x(\omega)=D\,[(1/\pi)\operatorname{arctg}(\omega/\alpha)+0{,}5]$. **903.** $s_{x\dot{x}}(\omega)=i\omega 2D\alpha^3/\pi(\omega^2+\alpha^2)^2$. **904.** $s_{x\dot{x}}(\omega)=(i\omega/\sqrt{\pi})\,e^{-(\omega^2/4)}$.

906. $k_x(\tau)=(2s_0\ \sin\omega_0\tau)\,(2\cos\omega_0\tau-1)/\tau$. **908.** $k_x(\tau)=e^{-2|\tau|}$. **911.** $m_y=4$. **913.** а) $m_y=8$; б) $D_y=22/3$. **914.** а) $m_y=2/3$; б) $s_y(\omega)=(1/\pi)\times$ $\times[1/25\omega^2+(6-\omega^2)^2]$. **915.** а) $s_y(\omega)=4\,(5-7\omega^2)^2/\pi(\omega^2+1)^2(\omega^2+4)\times$ $\times(\omega^2+9)$; б) $s_y(\omega)=4\,(5-7\omega^2)^2/\pi\ (\omega^2+1)^3(\omega^2+4)\ (\omega^2+9)$. **916.** $D_y=s_0\pi$. **917.** $s_y(\omega)=s_0/(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2$. **918*.** Вторая система: $D_{y_1}=10$, $D_{y_2}=10/7$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,099
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии, k_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0,01$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4.44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3.45

Уровень значимости $\alpha = 0,05$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Критические точки распределения Кочрена
(k—число степеней свободы, l—количество выборок)

Уровень значимости $\alpha = 0,01$

l \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha = 0,01$

l \ k	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha = 0,05$

l \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha = 0,05$

l \ k	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2538	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Равномерно распределенные случайные числа

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56

98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15

ПРИЛОЖЕНИЕ 10

Квантили нормального распределения u_p
(перед всеми значениями квантилей в этой части таблицы нужно поставить знак минус)

100Pi %	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	—	3,090	2,878	2,748	2,652	2,576	2,512	2,457	2,409	2,366
1	2,326	2,290	2,257	2,226	2,197	2,170	2,144	2,120	2,097	2,075
2	2,054	2,034	2,014	1,995	1,977	1,960	1,943	1,927	1,911	1,896
3	1,881	1,866	1,852	1,838	1,825	1,812	1,799	1,787	1,774	1,762
4	1,751	1,739	1,728	1,717	1,706	1,695	1,685	1,675	1,665	1,655
5	1,645	1,635	1,626	1,616	1,607	1,598	1,589	1,580	1,572	1,563
6	1,555	1,546	1,538	1,530	1,522	1,514	1,506	1,499	1,491	1,483
7	1,476	1,468	1,461	1,454	1,447	1,440	1,433	1,426	1,419	1,412
8	1,405	1,398	1,392	1,385	1,379	1,372	1,366	1,359	1,353	1,347
9	1,341	1,335	1,329	1,323	1,317	1,311	1,305	1,299	1,293	1,287
10	1,282	1,276	1,270	1,265	1,259	1,254	1,248	1,243	1,237	1,232
11	1,227	1,221	1,216	1,211	1,206	1,200	1,195	1,190	1,185	1,180
12	1,175	1,170	1,165	1,160	1,155	1,150	1,146	1,141	1,136	1,131
13	1,126	1,122	1,117	1,112	1,108	1,103	1,098	1,094	0,089	1,085
14	1,080	1,076	1,071	1,067	1,063	1,058	1,054	1,049	1,045	1,041
15	1,036	1,032	1,028	1,024	1,019	1,015	1,011	1,007	1,003	0,999
16	0,994	0,990	0,986	0,982	0,978	0,974	0,970	0,966	0,962	0,958
17	0,954	0,950	0,946	0,942	0,938	0,935	0,931	0,927	0,923	0,919
18	0,915	0,912	0,908	0,904	0,900	0,896	0,893	0,889	0,885	0,882
19	0,878	0,874	0,871	0,867	0,863	0,860	0,856	0,852	0,849	0,845
20	0,842	0,838	0,834	0,831	0,827	0,824	0,820	0,817	0,813	0,810
21	806	803	800	796	793	789	786	782	779	776
22	772	769	765	762	759	755	752	749	745	742
23	739	736	732	729	726	722	719	716	713	710
24	706	703	700	697	693	690	687	684	681	678
25	674	671	668	665	662	659	656	653	650	646
26	643	640	637	634	631	628	625	622	619	616
27	613	610	607	604	601	598	595	592	589	586
28	583	580	577	574	571	568	565	562	559	556
29	553	550	548	545	542	539	536	533	530	527

100P_i %	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
30	0,524	0,522	0,519	0,516	0,513	0,510	0,507	0,504	0,502	0,499
31	496	493	490	487	485	482	479	476	473	470
32	468	465	462	459	457	454	451	448	445	443
33	440	437	434	432	429	426	423	421	418	415
34	412	410	407	404	402	399	396	393	391	388
35	385	383	380	377	375	372	369	366	364	361
36	358	356	353	350	348	345	342	340	337	335
37	332	329	327	324	321	319	316	313	311	308
38	305	303	300	298	295	292	290	287	285	282
39	279	277	274	272	269	266	264	261	259	256
40	0,253	0,251	0,248	0,246	0,243	0,240	0,238	0,235	0,233	0,230
41	228	225	222	220	217	215	212	210	207	204
42	202	199	197	194	192	189	187	184	181	179
43	176	174	171	169	166	164	161	159	156	154
44	151	148	146	143	141	138	136	133	131	128
45	126	123	121	118	116	113	111	108	105	103
46	100	098	095	093	090	088	085	083	080	078
47	075	073	070	068	065	063	060	058	055	053
48	050	048	045	043	040	038	035	033	030	028
49	025	023	020	018	015	013	010	008	005	003

Квантили нормального распределения u_p
(все значения квантилей в этой части таблицы — положительные)

100P_i %	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
50	—	0,003	0,005	0,008	0,010	0,013	0,015	0,018	0,020	0,023
51	0,025	028	030	033	035	038	040	043	045	048
52	050	053	055	058	060	063	065	068	070	073
53	075	078	080	083	085	088	090	093	095	098
54	100	103	105	108	111	113	116	118	121	123
55	126	128	131	133	136	138	141	143	146	148
56	151	154	156	159	161	164	166	169	171	174
57	176	179	181	184	187	189	192	194	197	199
58	202	204	207	210	212	215	217	220	222	225
59	228	230	233	235	238	240	243	246	248	251

100P_i %	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
60	0,253	0,256	0,259	0,261	0,264	0,266	0,269	0,272	0,274	0,277
61	279	282	285	287	290	292	295	298	300	303
62	305	308	311	313	316	319	321	324	327	329
63	332	335	337	340	342	345	348	350	353	356
64	358	361	364	366	369	372	375	377	380	383
65	385	388	391	393	396	399	402	404	407	410
66	412	415	418	421	423	426	429	432	434	437
67	440	443	445	448	451	454	457	459	462	465
68	468	470	473	476	479	482	485	487	490	493
69	496	499	502	504	507	510	513	516	519	522
70	0,524	0,527	0,530	0,533	0,536	0,539	0,542	0,545	0,548	0,550
71	553	556	559	562	565	568	571	574	577	580
72	583	586	589	592	595	598	601	604	607	610
73	613	616	619	622	625	628	631	634	637	640
74	643	646	650	653	656	659	662	665	668	671
75	674	678	681	684	687	690	693	697	700	703
76	706	710	713	716	719	722	726	729	732	736
77	739	742	745	749	752	755	759	762	765	769
78	772	776	779	782	786	789	793	796	800	803
79	806	810	813	817	820	824	827	831	834	838
80	0,842	0,845	0,849	0,852	0,856	0,860	0,863	0,867	0,871	0,874
81	0,878	0,882	0,885	0,889	0,893	0,896	0,900	0,904	0,908	0,912
82	0,915	0,919	0,923	0,927	0,931	0,935	0,938	0,942	0,946	0,950
83	0,954	0,958	0,962	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982	0,986	0,990
84	0,994	0,999	1,003	1,007	1,011	1,015	1,019	1,024	1,028	1,032
85	1,036	1,041	1,045	1,049	1,054	1,058	1,063	1,067	1,071	1,076
86	1,080	1,085	1,089	1,094	1,098	1,103	1,108	1,112	1,117	1,122
87	1,126	1,131	1,136	1,141	1,146	1,150	1,155	1,160	1,165	1,170
88	1,175	1,180	1,185	1,190	1,195	1,200	1,206	1,211	1,216	1,221
89	1,227	1,232	1,237	1,243	1,248	1,254	1,259	1,265	1,270	1,276
90	1,282	1,287	1,293	1,299	1,305	1,311	1,317	1,323	1,329	1,335
91	1,341	1,347	1,353	1,359	1,366	1,372	1,379	1,385	1,392	1,398
92	1,405	1,412	1,419	1,426	1,433	1,440	1,447	1,454	1,461	1,468
93	1,476	1,483	1,491	1,499	1,506	1,514	1,522	1,530	1,538	1,546
94	1,555	1,563	1,572	1,580	1,589	1,598	1,607	1,616	1,626	1,635
95	1,645	1,655	1,665	1,675	1,685	1,695	1,706	1,717	1,728	1,739
96	1,751	1,762	1,774	1,787	1,799	1,812	1,825	1,838	1,852	1,866
97	1,881	1,896	1,911	1,927	1,943	1,960	1,977	1,995	2,014	2,034
98	2,054	2,075	2,097	2,120	2,144	2,170	2,197	2,226	2,257	2,290
99	2,326	2,366	2,409	2,457	2,512	2,576	2,652	2,748	2,878	3,090