А. В. ПРОХОРОВ, В. Г. УШАКОВ, Н. Г. УШАКОВ

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов университетов, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика»

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.171
П 84
УДК 519.2

Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. **Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы:** Учебное пособие.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 328 с.

Сборник задач содержит около 1500 задач и рассчитан на изучение расширенного курса теории вероятностей (содержит, в частности, разделы, посвященные безгранично делимым распределениям, условным математическим ожиданиям и условным вероятностям, случайным процессам).

Для студентов математических специальностей университетов.

Библиогр. 41 назв.

Рецензенты:

кафедра теории вероятностей и математической статистики Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук профессор *В. В. Петров*),

доктор физико-математических наук профессор *В. П. Чистяков*

П $\frac{1702060000-055}{053(02)-86}$ 64-85

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последнее десятилетие значительно увеличился объем преподавания теории вероятностей в высших учебных заведениях. В университетах на математических факультетах читается годовой или полутораговой курс теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики, появились новые курсы по вероятности в технических вузах, изданы новые учебники.

Предлагаемый сборник задач был задуман как учебное пособие, приспособленное к университетским курсам теории вероятностей и таким современным учебникам, как «Теория вероятностей» А. А. Боровкова, «Вероятность» А. Н. Ширяева, «Курс теории случайных процессов» А. Д. Вентцеля, «Теория вероятностей. Случайные процессы. Математическая статистика» Ю. А. Розанова, «Курс теории вероятностей и математической статистики» Б. А. Севастьянова. В книге отражен опыт авторов, работавших на механико-математическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики Московского университета. Сборник содержит около 1500 задач по многим разделам теории вероятностей, в том числе и по теории случайных процессов. При этом материал, соответствующий программе общего курса, расширен за счет включения тем, которые традиционно составляли содержание курса «Дополнительные главы теории вероятностей», читавшегося в течение многих лет в МГУ. Это относится в первую очередь к главам «Аналитические методы теории вероятностей», «Безгранично делимые распределения», «Условные распределения и условные математические ожидания». Задачник имеет небольшой отдел по элементарной теории вероятностей. Это оправдано тем, что начальная часть курса теории вероятностей очень хорошо обеспечена задачами в первом томе известной книги В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения» и в недавно изданном «Сборнике задач по теории вероятностей» Б. А. Севастьянова, В. П. Чистякова и А. М. Зубкова. В гл. 1 представлены основные схемы элементарной теории вероятностей: урновая схема, схема размещения частиц по ячейкам и схема случайного блуждания. В параграфе, посвященном геометрическим вероятностям, собраны известные («классические») задачи ввиду их поучительности (эти задачи легко формулируются в терминах «выбора точки наудачу»). Сборник содержит большое число задач, связанных с распределениями вероятностей, характеристическими функциями и предельными теоремами. Разделы, посвященные предельным теоремам и случайным процессам, ни в коей мере не претендуют на полноту и объединяют задачи, естественно связанные с содержанием общего (хотя и достаточно широкого по программе) курса теории вероятностей.

Задачи в сборнике имеют разную степень трудности и рассчитаны на читателей, находящихся на различных этапах овладения основами теории вероятностей. Кроме задач учебного характера, в сборник включены задачи, которые могут быть полезны студентам и даже аспирантам, занимающимся углубленным изучением специальных разделов теории. Задачи, как правило, снабжены ответами, многие задачи имеют указания к решению, некоторые задачи имеют подробное решение. В конце книги приведен список учебников и сборников задач по теории вероятностей, используемых в высших учебных заведениях.

Авторы сознают, что сборник задач такого большого объема неизбежно вызовет критические замечания читателей как с точки зрения структуры, так и с точки зрения содержания отдельных разделов и отдельных задач. Решившись издать сборник задач в настоящем виде, авторы рассчитывают получить указания, замечания и предложения и заранее благодарны всем своим корреспондентам.

Авторы выражают свою глубокую благодарность сотрудникам кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики и кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского университета за неоценимую помощь и поддержку в работе над сборником задач. Доброжелательные критические указания, полученные авторами от профессора В. П. Чистякова и коллектива кафедры теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Ленинградского университета, помогли освободить рукопись книги от многих недочетов и погрешностей. Авторы выражают рецензентам сердечную признательность за их труд.

А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Исходным понятием теории вероятностей является понятие вероятностного пространства как математической модели изучаемого явления.

Пусть Ω — непустое множество, элементы которого интерпретируются как неразложимые, исключающие друг друга исходы ω случайного эксперимента и называются *элементарными событиями* (само Ω называется *пространством элементарных событий*), $\mathscr{A}$ — класс подмножеств $A \subset \Omega$, называемых *событиями*, $\mathbf{P}$ — числовая функция, определенная для каждого события $A \in \mathscr{A}$ и носящая название *вероятности.*

Поскольку события являются подмножествами Ω, можно использовать теоретико-множественную терминологию и определить новые события путем объединения, пересечения, перехода к дополнениям соответствующих множеств. По аналогии с операциями над множествами определим операции над событиями, используя специфическую вероятностную терминологию.

Если случайный эксперимент заканчивается исходом ω и $\omega \in A$, то говорят, что осуществилось (произошло) событие A, если $A \in \mathscr{A}$. Пусть A, $B \in \mathscr{A}$ — события. Событие $A \cup B$ (объединение множеств A и B) осуществляется тогда, когда осуществляется по крайней мере одно из событий A или B. Событие $A \cap B = AB$ (пересечение множеств A и B) осуществляется тогда, когда осуществляются оба события A и B. Событие $\bar{A}$, противоположное событию A (дополнение A), осуществляется тогда, когда не осуществляется A. Событие $A \setminus B$ (разность множеств A и B) осуществляется тогда, когда осуществляется A, но B не осуществляется. Событие $A \bigtriangleup B$ (симметрическая разность множеств A и B) осуществляется тогда, когда осуществляется A и не осуществляется B, или когда осуществляется B и не осуществляется A. Событие Ω называют *достоверным событием*, а событие $\varnothing$ (пустое множество) — *невозможным событием*. События A и B *несовместны*, если $AB = \varnothing$.

Класс событий $\mathscr{A}$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\Omega \in \mathscr{A}$;
2) если $A \in \mathscr{A}$, то $\bar{A} \in \mathscr{A}$;
3) если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{A}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$. Класс множеств с указанными свойствами называется *σ-алгеброй множеств.*

Вероятность $\mathbf{P}$ определена как функция множеств на σ-алгебре $\mathscr{A}$ и удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathscr{A}$;
2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
3) $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$, если $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ называется *вероятностным пространством.* Его общая конструкция рассматривается в следующей главе. Здесь мы будем иметь дело с простейшими формулами для вычисления вероятностей в двух важных частных случаях, в которых формализовано понятие равновозможности исходов случайного эксперимента.

Наиболее просто устроено следующее вероятностное пространство:

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$,

$\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω,

$\mathsf{P}(A) = \frac{n_A}{n}$, где n_A — число элементарных событий ω, содержащихся в $A \in \mathscr{A}$.

Это определение вероятности как отношения числа элементарных событий, благоприятствующих некоторому событию, к общему числу элементарных событий, называют *классическим определением.* Оно имеет непосредственное отношение к опытам с конечным числом равновозможных исходов. Известная симметрия опыта, нашедшая свое выражение в гипотезе равновозможности, проявляется в словах «наудачу», «правильная» монета или кость и т. п.

Для вычисления вероятностей в таком вероятностном пространстве используются комбинаторные методы подсчета числа подмножеств некоторого множества. Главнейшие понятия здесь: сочетания, размещения и перестановки.

Пусть задано множество из N различных элементов. Рассмотрим его подмножества объема n. Обозначим.

$$N! = N(N-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1, \quad A_N^n = N(N-1)\ldots(N-n+1).$$

Упорядоченный набор n различных элементов из общего числа N называется *размещением.* Общее число размещений равно A_N^n. При $n = N$ размещения называются *перестановками* и в этом случае $A_N^N = N!$. Если не учитывать порядок элементов в размещении, то получающиеся различные подмножества называются *сочетаниями*, их общее число равно

$$C_N^n = A_N^n / A_n^n.$$

Другой простой случай вероятностного пространства описывается следующим образом:

Ω — ограниченное множество n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, имеющее n-мерный объем (лебегову меру) $\operatorname{mes}\Omega$;

$\mathscr{A}$ — класс подмножеств $A \subseteq \Omega$, имеющих n-мерный объем (лебегову меру) $\operatorname{mes} A$, $A \in \mathscr{A}$;

$\mathsf{P}(A) = \operatorname{mes} A / \operatorname{mes}\Omega, \quad A \in \Omega.$

Это определение обычно называют *геометрическим определением вероятности.* В большинстве задач вероятность определяется как отношение обычных площадей или объемов некоторых геометрических фигур в $\mathbb{R}^n$. В таком случае образно говорят, что «точка наудачу выбрана в некотором множестве» или «брошена в некоторое множество» и подразумевают, что вероятность выбора точки из множества пропорциональна его площади или объему.

Важную роль в теории вероятностей играют понятия условной вероятности и независимости событий.

Пусть A и B — события и $P(B) > 0$. *Условная вероятность события A при условии B* определяется формулой

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}.$$

События A и B называются *независимыми*, если $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$; в этом случае $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$ и $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$.

События $A_1, \ldots, A_n$ называются *взаимно независимыми* (*независимыми в совокупности*), если для любого $k \leqslant n$ и любых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$

$$\mathsf{P}\left(A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right) = \mathsf{P}\left(A_{i_1}\right) \ldots \mathsf{P}\left(A_{i_k}\right).$$

При решении некоторых задач, связанных с вычислением вероятностей, бывают полезны следующие формулы.

Пусть события $B_1, \ldots, B_n$ попарно несовместны, т. е. $B_iB_j = \varnothing$, $i \neq j$; пусть $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \supset A$ и $\mathsf{P}(B_i) > 0$ для всех i. Тогда

1) $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i)\,\mathsf{P}(A \mid B_i)$ (*формула полной вероятности*);

2) если $\mathsf{P}(A) > 0$, то

$$\mathsf{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A \mid B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i)\,\mathsf{P}(A \mid B_i)}$$

(*формула Байеса*).

§ 1. Операции над событиями. Свойства вероятностей

1.1. Пусть A и B — события. Найти все события X такие, что $AX = AB$.

1.2. Найти все события X такие, что

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \bar{A})} = B,$$

где A и B — некоторые события.

1.3. Определить события A и B, если:

а) $A \cup B = \bar{A}$; б) $AB = \bar{A}$.

1.4. Доказать, что для любых событий A и B соотношения $A \subset B$, $\bar{A} \supset \bar{B}$, $A \cup B = B$, $AB = A$, $A \setminus B = \varnothing$ равносильны.

1.5. При любых A и B сравнить события $(A \cup B)(A \cup \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})$, $(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B)$ и $(A \cup B)(A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})$.

1.6. Доказать равенства:

а) $\overline{\bar{A}\bar{B}} = A \cup B$; б) $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = AB$; в) $A \cup B = AB \cup (A \triangle B)$; г) $\overline{A \triangle B} = AB \cup \bar{A}\bar{B}$; д) $A \triangle B = (A\bar{B}) \triangle (\bar{A}B)$;

е) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i$; ж) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i$.

1.7. Верны ли следующие равенства:

а) $A \cup B = AB \triangle (A \triangle B)$; б) $A \setminus B = A \triangle (AB)$; в) $\overline{\bar{A} \setminus \bar{B}} = A \setminus B$; г) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$; д) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$; е) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; ж) $\overline{AB \cup CD} = (\bar{A} \cup \bar{B})(\bar{C} \cup \bar{D})$; з) $(A \cup B)(A \cup C)(B \cup C) = AB \cup BC \cup AC$; и) $ABC \cup ABD \cup ACD \cup BCD = (A \cup B)(A \cup C)(A \cup D)(B \cup C)(B \cup D)(C \cup D)$; к) $(A \cup \bar{B}) \triangle (\bar{A} \cup B) = A \triangle B$.

1.8. Обязаны ли совпадать события A и B, если:

а) $\bar{A} = \bar{B}$; б) $A \cup C = B \cup C$ (C — некоторое событие); в) $AC = BC$ (C — некоторое событие); г) $A(A \cup B) = B(A \cup B)$; д) $A(A \setminus B) = B(B \setminus A)$; е) $A(A \setminus B) = B(A \setminus B)$; ж) $A \setminus B = \varnothing$?

1.9. Пусть A, B, C — некоторые события. Доказать, что

а) $AB \cup BC \cup AC \supset ABC$; б) $AB \cup BC \cup AC \subset A \cup B \cup C$.

1.10. Двое играют в шахматы. Событие A означает, что выиграл первый игрок, событие B — что выиграл второй игрок. Что означают события:

а) $A \triangle \bar{B}$; б) $\bar{A} \triangle B$; в) $\bar{A} \cap \bar{B}$; г) $\bar{B} \setminus A$; д) $\bar{A} \setminus B$?

1.11. Из урны, содержащей черные и белые шары, извлечены n шаров. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что i-ый шар белый $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Выразить через A_i следующие события:

а) все шары белые; б) хотя бы один шар белый; в) ровно один шар белый; г) не более k шаров белые $(1 \leqslant k \leqslant n)$; д) по крайней мере k шаров белые; е) ровно k шаров белые; ж) все n шаров одного цвета.

1.12. Эксперимент состоит в выборе одной из возможных перестановок чисел 1, 2, ..., n. Пусть событие A_{ij} состоит в том, что в выбранной перестановке число i стоит на j-ом месте $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Выразить с помощью A_{ij} следующие события:

а) число 1 стоит левее числа 2; б) число 1 стоит не далее j-го места.

1.13. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $R_1 < R_2 < \ldots < R_{10}$. Событие A_k означает попадание в круг радиуса R_k. Что означают события

$$B = A_1 \cup A_3 \cup A_6; \quad C = A_2 A_4 A_6 A_8;$$
$$D = (A_1 \cup A_3) A_6?$$

1.14. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — любые события и $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Представить событие A в виде объединения n несовместных событий.

1.15. Является ли операция симметрической разности

а) коммутативной; б) ассоциативной?

1.16. Доказать, что если $A \triangle B = C \triangle D$, то $A \triangle C = B \triangle D$.

1.17. Доказать, что события A и B совместны тогда и только тогда, когда пересечение трех событий $A \cup B$, $\bar{A} \cup B$ и $A \cup \bar{B}$ непусто.

1.18. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события. Доказать, что

$$\bigcup_{n=1}^{N} \bigcap_{k=n}^{N} A_k = \bigcap_{n=1}^{N} \bigcup_{k=n}^{N} A_k = A_N.$$

1.19. Доказать, что

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB).$$

1.20. Пусть вероятность каждого из событий A и B равна 1/2. Доказать, что $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B})$.

1.21. Доказать, что

$$\mathbf{P}(A \triangle B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB).$$

1.22. Пусть A, B, C — события. Доказать, что:

а) $\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(BC) \geqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - 1$;

б) $\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) \leqslant \mathbf{P}(A)$.

1.23. Доказать, что для любых A, B, C

$$\mathbf{P}(A \triangle B) \leqslant \mathbf{P}(A \triangle C) + \mathbf{P}(C \triangle B).$$

1.24. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события. Доказать, что:

а) $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n);$$

б) $$\mathbf{P}(A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - 2 \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + 4 \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) + \ldots + (-2)^{n-1} \mathbf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

1.25. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые события и B_m — событие, заключающееся в том, что осуществится ровно m событий из $A_1, \ldots, A_n$. Доказать, что

$$\mathbf{P}(B_m) = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^{m} S_{m+k},$$

где

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_k}).$$

§ 2. Классическое определение вероятности

1.26 (*урновая схема: выбор с возвращением*) Некий сосуд (урна) содержит N различных шаров с номерами $1, 2, \ldots, N$. На каждом шаге из урны «наудачу» извлекается шар и затем возвращается назад, после чего шары в урне перемешиваются. Исход n последовательных извлечений называется *выборкой объема n с возвращением*. Описать пространство элементарных событий, соответствующих данному эксперименту. Рассмотреть отдельно случай, когда порядок шаров в выборке важен, и случай, когда порядок не учитывается.

1.27 (*продолжение*). Рассмотрим случай упорядоченных выборок и предположим, что они все равновозможны. Предположим дополнительно, что все шары с номерами $1, 2, \ldots, M$ ($M \leqslant N$) окрашены в белый цвет, а остальные шары — в черный цвет. Найдите вероятность того, что в выборке объема n окажется ровно m, $0 \leqslant m \leqslant n$, белых шаров.

1.28. В схеме выбора с возвращением найдите вероятность того, что все шары встретятся в выборке не более одного раза.

1.29 (*урновая схема: выбор без возвращения*). Пусть урна содержит N различных шаров с номерами $1, 2, \ldots, N$. На каждом шаге из урны «наудачу» извлекается шар и назад в урну не возвращается. Исход n последовательных извлечений называется *выборкой объема n без возвращения* или *бесповторной выборкой*.

Описать пространство элементарных событий в двух случаях: когда выборка упорядочена и когда не упорядочена.

1.30 (*продолжение*). Рассмотрим случай упорядоченных выборок и предположим, что они равновероятны. Так же как в задаче 1.15, предположим, что шары с первыми $M (M \leqslant N)$ номерами окрашены в белый цвет, а остальные — в черный. Найдите вероятность того, что в выборке объема n окажется ровно m белых шаров.

1.31 (*генуэзская лотерея*). Из общего числа 90 номеров разыгрываются 5 номеров. Можно заранее сделать ставку на любое число номеров в пределах пяти. Если ставка сделана на k, $k=1, 2, 3, 4, 5$, номеров и именно эти k номеров находятся среди номеров, вышедших в тираж, то соответствующие выигрыши таковы:

если $k=1$, то 15 ставок,
$k=2$, то 270 ставок,
$k=3$, то 5500 ставок,
$k=4$, то 75000 ставок,
$k=5$, то 1000000 ставок.

Подсчитать вероятности выигрышей при ставке на любое число номеров.

1.32. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 и 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

1.33. Из полного набора 28 костей домино наудачу берутся 5 костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна кость с шестью очками.

1.34. Бросается n игральных костей. Найти вероятность события, состоящего в том, что на всех костях выпало одинаковое число очков.

1.35. Монета подбрасывается n раз. Найти вероятность того, что число появлений герба нечетно.

1.36. Брошены шесть игральных костей. Найти вероятности следующих событий:

а) на всех костях выпало разное число очков; б) суммарное число выпавших очков равно 7.

1.37. Игральная кость бросается n раз. Чему равна вероятность того, что:

а) хотя бы один раз выпадет шестерка? б) шестерка выпадет в точности один раз?

1.38. (*задача игрока де Мере*). Какое событие более вероятно: {при четырех бросаниях кости хотя бы раз выпадет шесть очков} или {при двадцати четырех бросаниях двух костей хотя бы раз одновременно выпадут шесть и шесть очков}? Найдите эти вероятности.

1.39. Несколько раз бросается игральная кость. Какое событие более вероятно: {сумма выпавших очков четна} или {сумма выпавших очков нечетна}?

1.40. Между двумя игроками проводится n партий, причем каждая партия кончается или выигрышем, или проигрышем, и всевозможные исходы партий равновероятны. Найти вероятность того, что определенный игрок выиграет ровно m партий, $0 \leqslant m \leqslant n$.

1.41. В зале, насчитывающем $n+k$ мест, случайным образом занимают места n человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные $m \leqslant n$ мест.

1.42. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов разбиваются на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся:

а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

1.43. Сорок участников турнира разбиваются на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах.

1.44. Рассмотрим множество из N элементов. Наудачу выбирается одно из непустых подмножеств. Найти вероятность того, что в выбранном подмножестве четное число элементов.

1.45. Из урны, содержащей $2n$ белых и $2n$ черных шаров, извлекаются с возвращением $2n$ шаров. Найти вероятность того, что в выборке будет одинаковое число белых и черных шаров.

1.46. В урне a белых и b черных шаров ($a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$). Из урны без возвращения извлекаются два шара. Найти вероятность того, что:

а) шары одного цвета; б) шары разных цветов.

1.47. В урне находятся 5 шаров различных цветов. Производится выборка с возвращением объема 25. Найти вероятность того, что в выборке будет по 5 шаров каждого цвета.

1.48. В урне K красных, L белых и M черных шаров. Из урны с возвращением (без возвращения) извлекается n шаров. Найти вероятность того, что в выборке будет k красных, l белых и m черных шаров.

1.49. В урне находятся черные и белые шары, которые без возвращения извлекаются из урны. Какое событие более вероятно: {первый шар оказался белым} или {последний шар оказался белым}?

1.50. В урне находятся черные и белые шары, причем отношение числа белых шаров к числу черных шаров равно α. Найти вероятность того, что при извлечении всех шаров из урны последним окажется черный шар.

1.51. В урне находятся a белых и b черных шаров. Шары без возвращения извлекаются из урны. Найти вероятность того, что k-й вынутый шар оказался белым.

1.52. Из урны, в которой находятся черные и белые шары, с возвращением извлекаются два шара. Доказать, что вероятность того, что шары одного цвета, не меньше 1/2.

1.53. В урне содержится a белых и b черных шаров ($a \neq b$). Все шары без возвращения извлекаются из урны. Какое событие более вероятно: {в некоторый момент число извлеченных белых шаров равно числу извлеченных черных шаров} или {в некоторый момент число оставшихся в урне белых шаров равно числу оставшихся черных шаров}? Найти эти вероятности.

1.54. n лиц рассаживаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность, что два определенных лица окажутся рядом? Найти соответствующую вероятность, если те же лица садятся за круглый стол.

1.55. n лиц рассаживаются в ряд или за круглый стол в случайном порядке. Найти в том и другом случае вероятность того, что между двумя определенными лицами окажется ровно s человек.

1.56 (*размещение шаров по ящикам*). Рассмотрим случайный эксперимент, в котором различимые (занумерованные) шары размещаются по нескольким ящикам, так что каждый шар может попасть в ящик с любым номером. Описать множество всех различимых размещений — элементарных исходов данного эксперимента. Считая все элементарные события равновероятными, вычислить соответствующие вероятности.

1.57 (*продолжение*). Рассмотрим тот же эксперимент, но на этот раз будем считать шары неразличимыми. Подсчитать число всех различных размещений.

1.58 (*продолжение*). Рассмотрим задачу размещения n шаров по N ящикам. Считаем возможными только те размещения, при которых в каждый ящик попадает не более одного шара. Построить пространство элементарных событий в случае различимых и в случае неразличимых шаров.

1.59. 30 шаров размещаются по 8 ящикам так, что для каждого шара одинаково возможно попадание в любой ящик. Найти вероятность размещения, при котором будет 3 пустых ящика, 2 ящика — с тремя, 2 ящика — с шестью и 1 ящик — с двенадцатью шарами.

1.60. Найти вероятность того, что при размещении n различимых шаров по N ящикам заданный ящик будет содержать ровно k, $0 \leqslant k \leqslant n$, шаров (все различимые размещения равновероятны).

1.61. n различимых шаров размещаются по N ящикам. Найти вероятность того, что ящики с номерами 1, 2, ..., N будут содержать $n_1, \ldots, n_N$ шаров соответственно ($n_1 + \ldots + n_N = n$).

1.62. В n ящиках размещают n шаров так, что для каждого шара равновозможно попадание в любой ящик. Найти вероятность того, что ни один ящик не пуст.

1.63 (*продолжение*). В n ящиках размещают $n+2$ шаров. Найти вероятность того, что по крайней мере один ящик будет пустым.

1.64 (*продолжение*). В n ящиках размещают $n+1$ шаров. Найти вероятность того, что ровно два ящика окажутся пустыми.

1.65. В n ящиках размещают $2n$ шаров. Найти вероятность того, что ни один ящик не пуст, если шары неразличимы и все различимые размещения имеют равные вероятности.

1.66 (*продолжение*). Найти вероятность $q_m^{(n)}$ того, что заданный ящик содержит ровно m шаров.

1.67 (*продолжение*). Найти предел $q_m^{(n)}$ при $n \to \infty$.

1.68 (*продолжение*). Найти вероятность того, что ровно k ящиков останутся пустыми.

1.69. Имеется $2n$ карточек, на которых написаны числа от 1 до $2n$, и $2n$ конвертов, на которых написаны те же числа. Карточки случайным образом вкладываются в конверты (в каждый конверт по одной карточке). Найти вероятность того, что сумма чисел на любом конверте и лежащей в нем карточке четна.

1.70. Два игрока независимым образом подбрасывают (каждый свою) монеты. Найти вероятность того, что после n подбрасываний у них будет одно и то же число гербов.

1.71. Имеется тщательно перетасованная колода из 52 карт (4 масти, по 13 карт в каждой от двойки до туза). Найти вероятность того, что:

а) первые четыре карты в колоде — тузы; б) первая и последняя карты — тузы; в) между тузами находится одинаковое число карт l.

1.72. Колода из 52 карт раздается поровну четверым игрокам. Найти вероятность того, что:

а) у каждого из игроков окажется по одному тузу; б) у одного из игроков все тринадцать карт будут одной масти; в) у каждого из игроков будут все карты, от двойки до туза; г) у 1-го, 2-го, 3-го и 4-го игроков окажется соответственно a_1, a_2, a_3, a_4 карт масти «пик» $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 13)$.

1.73. Сравниваются две перетасованные колоды, содержащие по N различных карт. Если карта находится на одном и том же месте в обеих колодах, будем говорить, что имеет место совпадение. Найти вероятность того, что будет:

а) по крайней мере одно совпадение; б) по крайней мере k совпадений.

1.74. Две колоды из N различных карт сравниваются между собой и одновременно с такой же третьей колодой. Найти вероятность того, что будет ровно m двойных совпадений.

1.75. Найти вероятность того, что при случайном размещении r шаров по n ящикам ровно в m ящиках окажется по k шаров, если для каждого шара равновозможно попадание в любой ящик.

1.76. Найти вероятность того, что при размещении r шаров по n ящикам ровно m ящиков останутся пустыми, если шары неразличимы и все различные размещения равновероятны.

1.77. Восемь ладей случайным образом расставлены на шахматной доске. Найти вероятность того, что ни одна из них не бьет другую и ни одна не стоит на главной белой диагонали.

1.78. Из колоды, содержащей 52 карты, извлекаются 13 карт. Найти вероятность того, что в выборке содержится ровно k пар «туз — король» одной масти.

1.79. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ кусочно-линейных функций вида

$$f(0) = 0,$$

$$f(x) = f(i) + \alpha_i (x - i), \qquad i \leqslant x \leqslant i + 1, \quad 0 \leqslant i \leqslant n - 1,$$

где α_i — принимает значения 1 или -1. Найти вероятность того, что наудачу выбранная функция из множества $\mathcal{F}$ принимает в точке n значение k.

1.80 (*продолжение*). Найти вероятность того, что наудачу выбранная функция из $\mathcal{F}$ имеет в полуинтервале $(0, n]$ i корней.

1.81 (*продолжение*). Найти вероятность того, что для случайно выбранной функции $f \in \mathcal{F}$

$$\int_0^n f(x)\,dx = 0.$$

1.82. Пусть $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ — множество функций f из $\mathcal{F}$ таких, что $f(n) = 0$. Найти вероятность того, что наудачу выбранная функция из $\mathcal{F}_1$ не имеет нулей в интервале $(0, n)$.

1.83 (*продолжение*). Найти вероятность того, что минимальный корень в интервале $(0, n)$ случайно выбранной функции из $\mathcal{F}_1$ равен i.

§ 3. Геометрические вероятности

1.84. Двое условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

1.85. Содержание предыдущей задачи дополнить третьим лицом при тех же условиях встречи. Найти вероятность того, что:

а) встреча трех лиц состоится; б) встреча по крайней мере двух лиц состоится.

1.86. На отрезке длины l наудачу выбираются две точки. Какова вероятность, что из трех отрезков, на которые делится исходный отрезок выбранными точками, можно составить треугольник?

1.87 (*задача Бюффона*). На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии a, наудачу бросается игла длиною $2r$ $(2r < a)$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из проведенных прямых?

1.88 (*продолжение*). На плоскости проведены две взаимно перпендикулярные совокупности параллельных прямых, которые разбивают плоскость на прямоугольники со сторонами a и b. Найти вероятность того, что наудачу брошенная на плоскость игла длиною $2r$ $\left(2r < a + b - \sqrt{(a+b)^2 - \pi ab}\right)$ пересечет хотя бы одну из проведенных прямых.

1.89 (*задача Бертрана*). На окружности радиуса r наудачу выбираются две точки и соединяются хордой. Найти вероятность того, что длина хорды превысит $\sqrt{3}\,r$.

1.90 (*продолжение*). На окружности радиуса r выбирается наудачу точка, и через нее проводится диаметр. На диаметре наудачу выбирается точка — середина хорды, перпендикулярной диаметру. Найти вероятность того, что длина полученной хорды превзойдет $\sqrt{3}r$.

1.91 (*продолжение*). Внутри круга радиуса r наудачу выбирается точка. Эта точка служит серединой хорды, перпендикулярной проведенному через нее диаметру. Найти вероятность того, что полученная хорда превзойдет по длине $\sqrt{3}r$.

1.92. На плоскость нанесены параллельные прямые на одинаковом расстоянии a друг от друга. На плоскость наудачу бросается монета (круг) радиуса R $(R < a/2)$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одну из прямых.

1.93. Две точки выбираются наудачу из отрезка $[-1, 1]$. Пусть p и q — координаты этих точек. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь вещественные корни.

1.94. В круг вписан квадрат. Точка наудачу бросается в круг. Найти вероятность того, что она попадет в квадрат.

1.95. На отрезок наудачу бросают три точки, одну за другой. Какова вероятность того, что третья по счету точка упадет между двумя первыми?

1.96. Отрезок длины $a_1 + a_2$ поделен на две части длины a_1 и a_2 соответственно. n точек последовательно бросаются наудачу на отрезок. Найти вероятность того, что ровно m из n точек попадут на часть отрезка длины a_1.

1.97 (*продолжение*). Отрезок длины $a_1 + a_2 + \ldots + a_s$ поделен на s частей длины $a_1, a_2, \ldots, a_s$ соответственно. Наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что на части длины $a_1, a_2, \ldots, a_s$ попадет соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_s$ точек $(m_1 + \ldots + m_s = n)$.

1.98. В шар радиуса R наудачу бросаются N точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

1.99. В квадрат наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что они образуют вершины:

а) какого-нибудь треугольника; б) правильного треугольника; в) прямоугольного треугольника.

1.100. В квадрат наудачу брошены две точки A и B. Найти вероятность того, что круг, диаметром которого является отрезок AB, целиком содержится в исходном квадрате.

1.101. В квадрат наудачу брошены две точки A и B. Найти вероятность того, что квадрат, диагональю которого является отрезок AB, целиком содержится в исходном квадрате.

1.102. В единичный квадрат наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка будет удалена от центра квадрата на расстояние меньше, чем 1/3, если известно, что от каждой из сторон квадрата она удалена больше, чем на 1/6?

1.103. На окружности наудачу выбраны три точки A, B, C. Найти вероятность того, что треугольник ABC будет остроугольным.

§ 4. Условная вероятность. Независимость

1.104. Доказать, что

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\ldots\mathsf{P}(A_n|A_1\ldots A_{n-1}),$$

если все входящие в правую часть условные вероятности определены.

1.105. Доказать, что

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_n|C) = \mathsf{P}(A_1|C)\mathsf{P}(A_2|A_1C)\ldots\mathsf{P}(A_n|A_1\ldots A_{n-1}C),$$

если все входящие в правую часть условные вероятности определены.

1.106. Доказать формулу полной вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_k)\mathsf{P}(B_k),$$

где $\mathsf{P}(B_i) > 0$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k$.

1.107. Доказать формулу Байеса.

1.108. Доказать, что

$$\mathsf{P}(A|C) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_k C)\mathsf{P}(B_k|C),$$

где

$$\mathsf{P}(B_i C) > 0, \quad B_i \cap B_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad AC \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

1.109. Пусть $\mathsf{P}(A|B) > \mathsf{P}(B|A)$ и $\mathsf{P}(A) > 0$, $\mathsf{P}(B) > 0$. Будет ли $\mathsf{P}(A) > \mathsf{P}(B)$?

1.110. Верно ли равенство

$$\mathsf{P}(A|B) + \mathsf{P}(A|\bar{B}) = 1?$$

1.111 (*урновая схема Пойа*). Урна содержит a белых и b черных шаров. Наудачу извлекается шар. Он возвращается обратно, и, кроме того, добавляется c шаров одного с ним цвета. Производится новое извлечение, и процедура изменения состава урны повторяется и т. д. Доказать, что вероятность того, что при первых $n = n_1 + n_2$ извлечениях появилось n_1 белых и n_2 черных шаров, равна

$$C_n^{n_1} \frac{a(a+c)(a+2c)\ldots(a+n_1c-c)\,b(b+c)\ldots(b+n_2c-c)}{(a+b)(a+b+c)(a+b+2c)\ldots(a+b+nc-c)}.$$

1.112 (*продолжение*). Доказать, что вероятность извлечения белого шара на k-м шаге равна $a/(a+b)$.

1.113 (*продолжение*). Доказать, что условная вероятность извлечения белого шара на m-м шаге, при условии, что на k-м шаге, $k < m$, был извлечен белый шар, равна $(a+c)/(a+b+c)$.

1.114 (*продолжение*). Пусть событие A_m означает извлечение белого шара на m-м шаге. Доказать, что

$$\mathbf{P}(A_m|A_n)=\mathbf{P}(A_n|A_m).$$

1.115. Имеются три урны с белыми и черными шарами, причем отношение числа белых шаров к числу черных равно p_1, p_2, p_3 для 1-й, 2-й, 3-й урн соответственно. Наудачу (с вероятностью 1/3) выбирается урна и из нее шар. Какова вероятность того, что он белый?

1.116 (*продолжение*). Наудачу выбирается урна и из нее шар. Оказалось, что он белый. Какова вероятность того, что шар был вынут из первой урны?

1.117. Два стрелка стреляют по мишени. Один из них попадает в цель в среднем в 5 случаях, а второй — в 8 случаях из 10. Перед выстрелом они бросают правильную монету для определения очередности. Посторонний наблюдатель знает условия стрельбы, но не знает, кто в данный момент стреляет. Вот он видит, что стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что стрелял первый стрелок?

1.118. Урна содержит N шаров, из которых M — белого цвета. Производится выборка объема n. Пусть событие A_k состоит в том, что на k-м шаге извлечен шар белого цвета, а событие B_m — в том, что в выборке ровно m белых шаров. Доказать, что

$$\mathbf{P}(A_k|B_m)=m/n$$

в случае выбора с возвращением и без возвращения.

1.119. В урне 7 белых и 3 черных шара. Без возвращения извлекаются 3 шара. Известно, что среди них есть черный шар. Какова вероятность того, что другие два шара белые?

1.120. Вероятность того, что в справочное бюро в течение часа обратятся k человек, равна $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ при некотором $\lambda>0$. Для каждого человека вероятность отказа равна p. Найти вероятность того, что в течение часа s человек не получат ответа на свой вопрос.

1.121. Имеются три урны. В первой урне находится N_1 белых и M_1 черных, во второй — N_2 белых и M_2 черных, в третьей — N_3 белых и M_3 черных шаров. Наудачу выбирается одна из урн и из нее выбираются без возвращения 2 шара. Один из них оказывается белым, другой — черным. Найти вероятности того, что выбор производился из первой, второй или третьей урн.

1.122. В урне первоначально находилось N белых и M черных шаров. Один шар потерян, и цвет его неизвестен. Из урны без возвращения извлечены 2 шара, и оба оказались белыми. Определить вероятность того, что потерян белый шар.

1.123. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй — N_2 белых и M_2 черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывают шар. После тщательного перемешивания из второй урны извлекают один шар. Какова вероятность, что он белый?

1.124. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй — N_2 белых и M_2 черных и в третьей — N_3 белых и M_3 черных. Из первой урны наудачу извлекают один шар и перекладывают во вторую урну. Затем перекладывают один шар из второй урны в третью и, наконец, из третьей в первую. С какой вероятностью состав шаров в первой урне останется прежним?

1.125. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй — N_2 белых и M_2 черных шаров. Из первой урны без возвращения извлекаются n_1 шаров, а из второй — n_2 шаров. Все извлеченные шары кладутся в третью урну, из которой наудачу извлекается один шар. Какова вероятность, что он белый?

1.126. В урне N белых и M черных шаров. Без возвращения извлекаются $n \leqslant N$ шаров. Известно, что среди них m белых шаров. Какова вероятность, что остальные $n-m$ шаров также белые?

1.127. Имеется n урн одинакового состава: N белых и M черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй урны в третью перекладывается один шар и т. д. Из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

1.128. Урна содержит один шар, про который известно, что он либо белый, либо черный с одинаковыми вероятностями. В урну кладут один белый шар и затем наудачу извлекают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность, что оставшийся в урне шар — белый?

1.129. Брошено три игральных кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпала шестерка, если известно, что

а) на одной кости выпало 6 очков; б) на первой кости выпало 6 очков; в) на двух костях выпали «шестерки»; г) по крайней мере на двух костях выпало одинаковое число очков; д) на всех костях выпало одинаковое число очков; е) по крайней мере на одной кости выпало 6 очков.

1.130. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной выпадет 6 очков, при условии, что на всех костях выпали грани с четным числом очков.

1.131. Группа студентов, сдающая экзамен, состоит из 5 отличников, 10 хороших студентов и 15 слабых студентов; отличник всегда получает оценку «отлично», хороший студент — «отлично» и «хорошо» с равными вероятностями, слабый студент — «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно» с равными вероятностями. Какова вероятность, что наугад вызванный студент получит оценку

а) «отлично»; б) «хорошо»?

1.132. В урне находятся белые и черные шары. Пусть имеется s предположений $A_1, \ldots, A_s$ о том, что доля белых шаров в урне равна соответственно $p_1, \ldots, p_s$. Считаем, что эти предположения выполняются с вероятностями $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_s=1$. Для проверки произведем выбор шаров с возвращением объема n_1. Пусть выборка содержит m_1 белых шаров (событие B). Вычислим $\tilde{\alpha}_i = \mathbf{P}(A_i|B)$, $i=1, \ldots, s$, и рассмотрим их как исправленные значения взамен $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ (для удобства переобозначим и сами исходные предположения: $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_s$). Для дополнительной корректировки произведем выбор с возвращением объема n_2. Допустим, что число белых шаров в выборке равно m_2 (событие C). Находим $\mathbf{P}(\tilde{A}_i|C)$. Пусть, далее, событие D состоит в том, что выборка объема n_1+n_2 содержит m_1+m_2 белых шаров. Доказать, что $\mathbf{P}(A_i|D)=\mathbf{P}(\tilde{A}_i|C)$, $i=1, \ldots, s$.

1.133. Доказать, что если A и B независимы, то независимы A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

1.134. Доказать, что если $\mathbf{P}(A|B)=\mathbf{P}(A|\bar{B})$, то события A и B независимы.

1.135. Пусть A и B независимы, $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A\triangle B)=p$ и $\mathbf{P}(A\setminus B)<p$. Найти $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ и $\mathbf{P}(A\setminus B)$.

1.136. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя. Показать, что тогда $\mathbf{P}(A)$ равно 0 или 1.

1.137. Пусть событие A таково, что $\mathbf{P}(A)$ равно 0 или 1. Показать, что A и любое событие B независимы.

1.138. Пусть A и B — независимые события и $\mathbf{P}(A\cup B)=1$. Доказать, что либо A, либо B имеет вероятность, равную единице.

1.139. Пусть A и B — независимые события. Доказать, что если $A\cup B$ и $A\cap B$ независимы, то либо $\mathbf{P}(A)=1$, либо $\mathbf{P}(B)=1$, либо $\mathbf{P}(A)=0$, либо $\mathbf{P}(B)=0$.

1.140. Подбрасываются три игральные кости. Событие A состоит в том, что одинаковое число очков выпало на первой и второй костях, событие B — одинаковое число очков на второй и третьей костях, C — на первой и третьей. Будут ли события A, B и C:

а) попарно независимы, б) независимы в совокупности?

1.141. Пусть события A, B и C независимы в совокупности, причем каждое из этих событий имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Могут ли события AB, BC и AC быть:

а) независимыми в совокупности, б) попарно независимыми?

1.142. Пусть события A, B и C попарно независимы и каждое из них имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Могут ли события AB, BC и AC быть:

а) попарно независимыми, б) независимыми в совокупности?

1.143. Пусть A и B — независимые события, а событие C не зависит от событий AB и $A\cup B$. Обязаны ли события A, B и C быть попарно независимыми?

1.144. Пусть A, B, C, D — события, причем A и B не зависят от C и D. Доказать, что если $AB=\varnothing$ и $CD=\varnothing$, то $A\cup B$ не зависит от $C\cup D$.

1.145. Пусть события A, B и C таковы, что A не зависит от BC и от $B\cup C$, B не зависит от AC, а C — от AB, причем вероятности $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(C)$ положителвны. Доказать, что события A, B и C независимы в совокупности.

1.146. Показать, что из попарной независимости A_1, A_2, A_3 не следует их взаимная независимость.

1.147. Показать, что из равенства

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)$$

не следует попарная независимость A_1, A_2, A_3.

1.148. Пусть A и B независимы и A и C независимы. Показать, что A и $B \cup C$ могут быть зависимы.

1.149 (*продолжение*). Доказать, что если, кроме того, A и BC независимы, то A и $B \cup C$ также независимы. Будут ли независимы A, B, C?

1.150. Из урны, содержащей белые и черные шары, с возвращением извлекаются шары. Пусть событие A_k означает, что k-й по счету вынутый шар — белый. Доказать, что события $A_1, \ldots, A_n$ взаимно независимы.

1.151 (*продолжение*). Показать, что если выбор производится без возвращения, то события $A_1, \ldots, A_n$ зависимы.

1.152 (*продолжение*). Доказать, что в случае выбора без возвращения:

а) $\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A_1)$ при любом k; б) $\mathbf{P}(A_{k+1}|A_n)$ не зависит от k; в) $\mathbf{P}(A_{k+m}|A_k)$ не зависит от m.

1.153. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — взаимно независимые события. Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\overline{A}_i).$$

1.154. Доказать, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, заданные на одном вероятностном пространстве независимы тогда и только тогда, когда выполнены 2^n условия

$$\mathbf{P}\left(A_1^{\delta_1} \ldots A_n^{\delta_n}\right) = \mathbf{P}\left(A_1^{\delta_1}\right) \ldots \mathbf{P}\left(A_n^{\delta_n}\right), \quad \delta_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A_i^{\delta_i} = \begin{cases} A_i, & \text{если } \delta_i = 1 \\ \overline{A}_i, & \text{если } \delta_i = 0. \end{cases}$$

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В основе любой теоретико-вероятностной схемы лежит понятие вероятностного пространства. Для описания вероятностного пространства напомним некоторые понятия и факты теории множеств и теории меры.

Пусть Ω — некоторое непустое множество. Элементы его будем обозначать ω. *Дополнение*, *объединение*, *пересечение*, *разность*, *симметрическая разность* подмножеств Ω определяются следующим образом:

$$\overline{A} = \{\omega \in \Omega:\ \omega \notin A\},$$
$$A \cup B = \{\omega \in \Omega:\ \omega \in A \text{ или } \omega \in B\},$$
$$A \cap B = \{\omega \in \Omega:\ \omega \in A \text{ и } \omega \in B\},$$
$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$
$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Наряду с $A \cap B$ будем применять обозначение AB. Множества A и B называются *непересекающимися*, если $A \cap B = \varnothing$ ($\varnothing$ — *пустое множество*).

Пусть $I = \{\alpha\}$ — некоторое множество индексов. Имеют место *формулы двойственности*:

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A}_\alpha, \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A}_\alpha.$$

Класс $\mathscr{D}$ подмножеств Ω называется *полуалгеброй*, если:

1) $\Omega \in \mathscr{D}$;

2) если A, $B \in \mathscr{D}$, то $A \cap B \in \mathscr{D}$;

3) если A, $B \in \mathscr{D}$ и $A \subset B$, то существуют попарно не пересекающиеся множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, принадлежащие $\mathscr{D}$, такие, что $B \setminus A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$.

Класс $\mathscr{A}$ подмножеств Ω называется *алгеброй*, если:

1) $\Omega \in \mathscr{A}$;

2) если $A \in \mathscr{A}$, то $\overline{A} \in \mathscr{A}$;

3) если A, $B \in \mathscr{A}$, то $A \cup B \in \mathscr{A}$.

Класс $\mathscr{F}$ подмножеств Ω называется *σ-алгеброй*, если:

1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

2) если $A \in \mathscr{F}$, то $\overline{A} \in \mathscr{F}$;

3) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Пересечение любого числа алгебр (σ-алгебр) является алгеброй (σ-алгеброй). Каждая алгебра является полуалгеброй, а каждая σ-алгебра — алгеброй.

Класс $\mathscr{R}$ подмножеств Ω называется *разбиением* Ω, если:

1) элементы $\mathscr{R}$ отличны от $\varnothing$ и попарно не пересекаются;

2) объединение всех элементов $\mathscr{R}$ совпадают с Ω.

Пусть $\mathscr{E}$ — некоторый класс подмножеств Ω. *σ-алгеброй, порожденной классом* $\mathscr{E}$, называется минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathscr{E}$, которая равна пересечению всех σ-алгебр, содержащих $\mathscr{E}$.

Пространство Ω вместе с σ-алгеброй его подмножеств $\mathscr{A}$ называется *измеримым пространством* и обозначается $(\Omega, \mathscr{A})$. Элементы $\mathscr{A}$ называются *из-*

меримыми или $\mathscr{A}$-измеримыми множествами. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$ есть вещественная прямая и пусть $\mathscr{E}$ — класс всех непересекающихся интервалов вида $(a, b]$. Обозначим через $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \mathscr{B}(\mathscr{E})$ σ-алгебру, порожденную классом $\mathscr{E}$. Эта σ-алгебра подмножеств прямой называется *борелевской σ-алгеброй*, а ее элементы *борелевскими множествами.* Аналогично определяется борелевская σ-алгебра и борелевские множества в евклидовом пространстве n измерений.

Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, где Ω — непустое множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, P — вещественная функция, определенная на $\mathscr{A}$ и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathscr{A}$;
2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;
3) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

Элементы Ω называются элементарными событиями или исходами, множество Ω называется пространством элементарных событий, элементы $\mathscr{A}$ — событиями, функция множеств $\mathsf{P}(A)$ (вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{A})$) называется вероятностью или вероятностным распределением. (Следует различать события и элементарные события: они являются элементами разных множеств; подчеркнем, что вероятность определена на множестве событий.) В вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ событие Ω называется *достоверным* событием, $\varnothing$ называется *невозможным* событием, A и $\bar{A} = \Omega \setminus A$ — *противоположными* событиями, события A и B называются *несовместными* событиями при $AB = \varnothing$ и т. п., см. введение в гл. 1.

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий из $\mathscr{A}$. *Верхним* и *нижним пределами* этой последовательности называются события

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Событие $\limsup A_n$ состоит в том, что произойдет бесконечно много событий из числа $A_1, A_2, \ldots$, событие $\liminf A_n$ — в том, что произойдут все $A_1, A_2, \ldots$ за исключением, быть может, только конечного числа. Очевидно,

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n.$$

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Событие $A \in \mathscr{A}$ называется *атомом*, если $\mathsf{P}(A) > 0$ и для любого $B \subset A$ либо $\mathsf{P}(B) = 0$, либо $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)$. Вероятностное пространство называется *неатомическим*, если оно не имеет атомов; если же Ω представимо в виде объединения непересекающихся атомов, вероятностное пространство называется *атомическим.*

Пусть $(\Omega, \mathscr{A})$ — некоторое измеримое пространство. Вещественная функция $f = f(\omega)$, определенная на $(\Omega, \mathscr{A})$, называется *измеримой* относительно σ-алгебры $\mathscr{A}$ или *$\mathscr{A}$-измеримой*, если прообраз любого борелевского множества принадлежит $\mathscr{A}$:

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega,\ f(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}, \quad B \in \mathscr{B}.$$

Если $(\Omega, \mathscr{A})$ есть измеримое пространство $\left(\mathbb{R}_n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_n}\right)$, где $\mathbb{R}_n$ евклидово пространство n измерений, а $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_n}$ — борелевская σ-алгебра, то любая $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_n}$- измеримая функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}_n$, называется *борелевской.*

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$. *Случайной величиной* на $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ называется любая вещественная функция $\xi = \xi(\omega)$, измеримая относительно $\mathscr{A}$. *Случайным вектором* со значениями в $\left(\mathbb{R}_n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_n}\right)$ (n-мерной случайной величиной) называется любая $\mathscr{A}$-измеримая функция $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ со значениями в $\mathbb{R}_n$.

Вещественная функция $\xi(\omega)$ является случайной величиной, если для любого вещественного x

$$\{\xi \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}.$$

σ-алгеброй, порожденной случайной величиной ξ, называется σ-алгебра, порожденная классом всех событий вида

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\},$$

где B пробегает множество всех борелевских множеств прямой. Эта σ-алгебра совпадает с σ-алгеброй, порожденной событиями вида

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant x\},$$

где x — произвольное вещественное число.

Пусть A — событие. *Индикатором* A называется случайная величина

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in A, \\ 0 & \text{при } \omega \notin A. \end{cases}$$

Случайная величина ξ называется *простой*, если она представима в виде

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{j=1}^{m} x_j I_{A_j}(\omega), \qquad (1)$$

где события $A_1, \ldots, A_m$ образуют разбиение Ω, а $x_1, \ldots, x_m$ — вещественные числа.

Математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi$ *простой случайной величины* (1) называется величина

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbf{P}(A_j).$$

Математическим ожиданием неотрицательной случайной величины ξ называется конечный или бесконечный предел

$$\mathbf{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\;_n,$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — монотонно неубывающая последовательность простых случайных величин, при каждом ω сходящаяся к ξ: $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ при $n \to \infty$.

Пусть ξ — произвольная случайная величина. Положим

$$\xi^+ = \xi \cdot I_{\{\xi \geqslant 0\}}, \quad \xi^- = |\xi| \cdot I_{\{\xi < 0\}}.$$

Очевидно, $\xi = \xi^+ - \xi^-$.

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется величина

$$\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\xi^+ - \mathbf{E}\xi^-$$

в том случае, когда $\mathbf{E}\xi^+$ и $\mathbf{E}\xi^-$ не равны ∞ одновременно. Если $\mathbf{E}\xi^+ = \mathbf{E}\xi^- = \infty$, то говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует. (Иногда говорят, что математическое ожидание не существует и в том случае, когда оно бесконечно.)

Математическое ожидание случайной величины ξ есть не что иное, как интеграл Лебега от функции $\xi(\omega)$ по мере $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{E}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, d\mathbf{P}.$$

Приведем основные свойства математического ожидания. Предполагается, что все написанные математические ожидания существуют.

1 $\mathbf{E}\xi \leqslant \mathbf{E}\eta$, если $\xi \leqslant \eta$.

2. $\mathbf{E}c = c$ для любого действительного c.

3. $\mathbf{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbf{E}\xi + b\mathbf{E}\eta$ для любых вещественных a и b.

4. $|\mathbf{E}\xi| \leqslant \mathbf{E}|\xi|$.

5. (*теорема о монотонной сходимости*). Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — неубывающая последовательность неотрицательных случайных величин, сходящаяся при каждом ω к случайной величине ξ, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi.$$

6 (*теорема Лебега о мажорируемой сходимости*). Если при каждом ω $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$ и $|\xi_n| \leqslant \eta$, где $\mathbf{E}\eta < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi.$$

7. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}|\xi_n|,$$

то

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\xi_n.$$

Одним из основных и наиболее важных понятий теории вероятностей является понятие независимости.

Два события A и B называются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

События, не являющиеся независимыми, называются зависимыми.

События $A_1, \ldots, A_n$, $n > 2$, называются *взаимно независимыми*, если для любого набора индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}\right) = \mathbf{P}\left(A_{i_1}\right) \ldots \mathbf{P}\left(A_{i_r}\right).$$

Взаимно независимые события иногда называют независимыми в совокупности или независимыми. Из независимости следует попарная независимость каждой пары событий, обратное, вообще говоря, неверно.

События, составляющие бесконечное множество $\mathscr{B}$, называются *взаимно независимыми*, если при каждом n любые n из этих событий взаимно независимы.

Пусть $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots$ — некоторые классы событий. Классы $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots$ называются *независимыми*, если любые события $B_1, B_2, \ldots$, такие, что $B_k \in \mathscr{B}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, являются независимыми.

В соответствии с этим определением мы будем говорить о независимости алгебр, σ-алгебр, полуалгебр, разбиений и т. д.

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называются *независимыми*, если независимы порожденные ими σ-алгебры. Случайные величины, не являющиеся независимыми, называются зависимыми

§ 1. Вероятностное пространство

2.1. Правильная монета подбрасывается до тех пор, пока герб не выпадет два раза подряд. Построить вероятностное пространство. Найти вероятность того, что число подбрасываний не превосходит 5.

2.2. Правильная монета подбрасывается до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной стороной. Построить вероятностное пространство. Найти вероятность того, что число подбрасываний будет четным.

2.3. Правильная монета подбрасывается до тех пор, пока герб не появится r раз. Построить вероятностное пространство. Сколько элементарных событий будет содержать событие {эксперимент заканчивается после n-го подбрасывания}?

2.4. На отрезке $[0, 1]$ случайным образом выбирается точка. Пусть событие A_n означает, что точка выбрана из полуинтервала $\left[0, \frac{n}{n+1}\right)$, событие B_n — что точка выбрана из интервала $\left(0, \frac{1}{n}\right)$. Что означают события $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$?

2.5. Доказать, что каждая алгебра является полуалгеброй.

2.6. Привести пример полуалгебры, не являющейся алгеброй.

2.7. Привести пример алгебры, не являющейся σ-алгеброй.

2.8. Пусть $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Привести примеры σ-алгебр, содержащих множества $A = \{0, 1\}$ и $B = \{1, 2\}$.

2.9. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порожденную множествами:

а) $[0, 2/3]$, $[1/3, 1]$; б) $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$; в) $\{0\}$, $\{1\}$; г) $[1/3, 1/2]$; д) $\varnothing$; е) $[0, 1]$; ж) множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$.

2.10. Пусть Ω — несчетное множество. Описать σ-алгебру, порожденную:

а) всеми одноточечными подмножествами Ω; б) всеми счетными подмножествами Ω; в) всеми несчетными подмножествами Ω; г) всеми бесконечными подмножествами Ω.

2.11. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра подмножеств пространства Ω порождается некоторым конечным разбиением Ω.

2.12. Пусть $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — две σ-алгебры подмножеств пространства Ω. Являются ли σ-алгебрами классы множеств:

а) $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$; б) $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$; в) $\mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$; г) $\mathscr{B}_1 \triangle \mathscr{B}_2$?

2.13. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность непересекающихся подмножеств пространства Ω. Определить мощность σ-алгебры, порожденной этой последовательностью.

2.14. Доказать, что если $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$ — неубывающая последовательность σ-алгебр, то $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$ — алгебра.

2.15. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 129; 130; 128?

2.16. Пусть $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств пространства Ω. Доказать, что если $\mathscr{A}$ бесконечно, то существует счетная последовательность непустых непересекающихся элементов $\mathscr{A}$.

2.17. Доказать, что для любого пространства Ω никакая σ-алгебра его подмножеств не может иметь счетную мощность.

2.18. Может ли число элементарных событий быть строго больше, чем число всех событий?

2.19. Может ли быть: а) число элементарных событий конечно, а число событий бесконечно; б) число событий конечно, а число элементарных событий бесконечно?

2.20. Число элементарных событий некоторого вероятностного пространства равно n. Указать минимальное и максимальное возможные значения для числа событий.

2.21. Описать σ-алгебру, порожденную:

а) событиями нулевой вероятности; б) событиями вероятности единица.

2.22. Образует ли σ-алгебру множество всех событий, вероятности которых выражаются рациональными числами.

2.23. Доказать, что:

а) $\overline{\limsup A_n} = \liminf \overline{A}_n$; б) $\overline{\liminf A_n} = \limsup \overline{A}_n$.

2.24. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий. Доказать, что события $\limsup A_n$ и $\liminf A_n$ принадлежат σ-алгебре, порожденной этой последовательностью.

2.25. Доказать следующие соотношения:

$$\limsup (A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n,$$

$$\liminf A_n B_n = \liminf A_n \cap \liminf B_n,$$

$$\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup (A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n.$$

2.26. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ — невозрастающая последовательность событий. Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

2.27. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ — неубывающая последовательность событий. Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

2.28. Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2) + \mathbf{P}(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) + \ldots$$

2.29. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — произвольное вероятностное пространство. Доказать, что множество значений функции $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathscr{A}$ представляет собой замкнутое подмножество отрезка $[0, 1]$.

2.30. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — неатомическое вероятностное пространство. Доказать, что множество значений функции $\mathbf{P}(A)$ есть весь отрезок $[0, 1]$.

2.31. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Назовем события A и B эквивалентными, если $\mathbf{P}(A \triangle B) = 0$. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество классов эквивалентных событий. Для любых двух классов эквивалентных событий $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ положим

$$\rho(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = \mathbf{P}(B_1 \triangle B_2),$$

где B_1 и B_2 — произвольные представители классов $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ соответственно. Доказать, что ρ — метрика на $\mathfrak{B}$ и что $\mathfrak{B}$ с таким образом введенной метрикой представляет собой полное метрическое пространство.

2.32. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, причем $\mathscr{A}$ порождено некоторой алгеброй $\mathscr{B}$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $A \in \mathscr{A}$ существует такое $B \in \mathscr{B}$, что $\mathbf{P}(A \triangle B) \leqslant \varepsilon$.

2.33. Привести пример последовательности событий $A_1, A_2, \ldots$ такой, что $\mathbf{P}(A_n) \to 1$ при $n \to \infty$, но

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$$

для любого n.

2.34. Доказать, что для любой последовательности событий $A_1, A_2, \ldots$

$$\mathbf{P}(\liminf A_n) \leqslant \liminf \mathbf{P}(A_n) \leqslant \limsup \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(\limsup A_n).$$

2.35. Справедливы ли следующие соотношения:

а) $\mathbf{P}(\limsup A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i\right)$;

б) $\mathbf{P}(\liminf A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=n}^{\infty} A_i\right)$?

2.36. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n \bar{A}_{n+1}) < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(A_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказать, что $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.

2.37. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий. Верно ли, что если $\liminf \mathbf{P}(A_n) > 0$, то $\mathbf{P}(\liminf A_n) > 0$?

2.38. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ — две последовательности событий, причем $\mathbf{P}(B_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n B_n)$$

при условии, что хотя бы один из указанных пределов существует.

2.39. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ — две последовательности событий, причем $\mathbf{P}(B_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что если

$$\liminf \mathbf{P}(A_n) \geqslant a > 0, \tag{1}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(A_n)}{\mathbf{P}(A_n B_n)} = 1.$$

Можно ли отказаться от условия (1)?

§ 2. Случайные величины. Математическое ожидание

2.40. Пусть ξ и η — случайные величины, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$. Доказать, что множества

$$A = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < \eta(\omega)\},$$
$$B = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\},$$
$$C = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant \eta(\omega)\}$$

являются событиями.

2.41. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\xi(\omega)$ — определенная на Ω вещественная функция такая, что для каждого вещественного c множество

$$A_c = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = c\}$$

является событием. Обязана ли ξ быть случайной величиной?

2.42. Пусть ξ и η — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что следующие функции являются случайными величинами:

а) $\xi + \eta$; б) $\xi - \eta$; в) $\xi \cdot \eta$; г) $|\xi|$; д) $\max\{\xi, \eta\}$; е) $\min\{\xi, \eta\}$; ж) ξ^η, если $\mathsf{P}(\eta > 0) = 1$.

2.43. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\xi(\omega)$ — вещественная функция, определенная на Ω. Обязана ли ξ быть случайной величиной, если случайной величиной является:

а) ξ^2; б) $|\xi|$; в) $\cos \xi$; г) e^ξ; д) ξ^ξ; е) $[\xi]$ ($[\cdot]$ — целая часть)?

2.44. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функции $\inf\limits_n \xi_n$ и $\sup\limits_n \xi_n$ являются случайными величинами.

2.45. Пусть $\mathfrak{M}$ — несчетное семейство случайных величин. Обязаны ли функции $\inf\limits_{\xi \in \mathfrak{M}} \xi$ и $\sup\limits_{\xi \in \mathfrak{M}} \xi$ быть случайными величинами?

2.46. Доказать, что если ξ — случайная величина, а $f(x)$ — борелевская функция, то $\eta = f(\xi)$ — случайная величина.

2.47. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — вещественная борелевская функция n переменных. Доказать, что функция $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является случайной величиной.

2.48. Пусть A и B — события одного вероятностного пространства, I_A и I_B — их индикаторы. Доказать, что

$$I_{A \triangle B} = (I_A - I_B)^2.$$

2.49. В урне 3 белых и 2 черных шара. Эксперимент состоит в последовательном извлечении всех шаров из урны. Построить вероятностное пространство. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной ξ, если:

а) ξ — число белых шаров, предшествующих первому черному шару; б) ξ — число черных шаров среди извлеченных; в) $\xi = \xi_1 +$

$+\xi_2$, где ξ_1 — число белых шаров, предшествующих первому черному шару, и ξ_2 — число черных шаров, предшествующих первому белому.

2.50. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ представляет собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной ξ, если:

$$\text{а) } \xi = \begin{cases} 1/4, & \omega \in [0, 1/4), \\ 1/2, & \omega \in [1/4, 3/4), \\ 1, & \omega \in [3/4, 1], \end{cases} \qquad \text{б) } \xi = \frac{\omega}{2}, \qquad \text{в) } \xi = 1/2.$$

2.51. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, причем Ω — вещественная прямая, а $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских множеств. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной $\xi = \cos\omega$.

2.52. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве. Доказать, что следующие множества являются событиями:

а) $A = \{\omega \in \Omega$: последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ограничена$\}$;

б) $B = \{\omega \in \Omega$: последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится$\}$.

2.53. Привести пример нетривиального вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ и случайной величины ξ на нем, таких, что любая случайная величина η, определенная на этом вероятностном пространстве, является борелевской функцией от ξ.

2.54. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ следующим образом: $\xi_n = \omega^n$. Положим $A_n = \{\omega \in \Omega : \xi_n \leqslant \leqslant 1/n\}$. Найти $\bigcup\limits_{n=1}^{n} A_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

2.55. Пусть ξ и η — эквивалентные случайные величины, то есть $\mathbf{P}(\xi \neq \eta) = 0$. Доказать, что если существует $\mathbf{E}\xi$, то существует $\mathbf{E}\eta$ и $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta$.

2.56. Доказать, что $\mathbf{E}\xi^2 = 0$ равносильно $\mathbf{P}(\xi = 0) = 1$.

2.57. Пусть ξ и η — случайные величины. Доказать, что если существует $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{E}\eta$, то существует $\mathbf{E}\max\{\xi, \eta\}$. Верно ли обратное?

2.58. Пусть ξ и η — случайные величины. Доказать, что если существует $\mathbf{E}\max\{\xi, \eta\}$ и $\mathbf{E}\min\{\xi, \eta\}$, то существуют $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{E}\eta$, причем

$$\mathbf{E}\xi + \mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\max\{\xi, \eta\} + \mathbf{E}\min\{\xi, \eta\}.$$

2.59. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, имеющие конечные математические ожидания. Доказать, что

$$\mathbf{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \geqslant \max\{\mathbf{E}\xi_1, \ldots, \mathbf{E}\xi_n\}$$

и

$$\mathbf{E}\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leqslant \min\{\mathbf{E}\xi_1, \ldots, \mathbf{E}\xi_n\}.$$

2.60. Привести пример случайных величин ξ и η, таких, что $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{E}\eta$ существуют, а $\mathbf{E}\xi\eta$ не существует.

2.61. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность неотрицательных случайных величин. Доказать, что

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\xi_n,$$

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1.

2.62. Пусть η, ξ, ξ_1, ξ_2, ...— случайные величины на $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, такие, что при каждом ω $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$. Известно, что $\mathbf{E}\xi_n$ не обязательно сходится к $\mathbf{E}\xi$ (даже если $\mathbf{E}\xi$ существует). Доказать, что $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$, если выполнено одно из условий:

а) $\xi_n \geqslant \eta$ для всех $n \geqslant 1$, $\mathbf{E}\eta > -\infty$ и последовательность ξ_1, ξ_2, ... монотонно не убывает; б) $\xi_n \leqslant \eta$ для всех $n \geqslant 1$, $\mathbf{E}\eta < \infty$ и последовательность ξ_1, ξ_2, ... монотонно не возрастает.

§ 3. Независимость

2.63. Пусть A_1, A_2, ...— последовательность независимых событий. Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

2.64. Пусть A_1, A_2, ...— последовательность независимых событий. Доказать, что для сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \mathbf{P}(A_k))$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) > 0.$$

Можно ли условие независимости заменить условием попарной независимости событий A_1, A_2, ...?

2.65. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство такое, что для любого события A множество всех событий, не зависящих от A, образует алгебру. Доказать, что в этом случае из попарной независимости любого набора событий следует их независимость.

2.66. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Доказать, что для того, чтобы все события на нем были попарно независимы, необходимо и достаточно, чтобы каждое событие имело вероятность, равную 0 или 1.

2.67. Является ли транзитивным отношение независимости на множестве событий произвольного вероятностного пространства?

2.68. Является ли транзитивным отношение зависимости на множестве событий произвольного вероятностного пространства?

2.69. Доказать, что для того чтобы отношение независимости на некотором вероятностном пространстве было транзитивным, необходимо и достаточно, чтобы каждое событие этого вероятностного пространства имело вероятность 0 или 1.

2.70. События A и B называются ε-независимыми, если

$$|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\leqslant\varepsilon.$$

Доказать, что если A ε-независимо с самим собой, то либо $\mathbf{P}(A)\leqslant 2\varepsilon$, либо $\mathbf{P}(A)\geqslant 1-2\varepsilon$.

2.71. Пусть событие A таково, что $\mathbf{P}(A)\leqslant\varepsilon$ или $\mathbf{P}(A)\geqslant 1-\varepsilon$. Доказать, что A и любое событие B ε-независимы.

2.72. Пусть A и B — ε-независимые события. Доказать, что события:

а) $\bar{A}$ и B, б) A и $\bar{B}$, в) $\bar{A}$ и $\bar{B}$

также ε-независимы.

2.73. Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — независимые полуалгебры. Доказать, что порожденные ими алгебры также независимы.

2.74. Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — независимые алгебры. Доказать, что порожденные ими σ-алгебры также независимы.

2.75. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — две под-σ-алгебры $\mathscr{A}$, причем $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}_2$. Могут ли $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ быть независимыми, если $\mathscr{B}_1$ содержит событие, вероятность которого отлична от 0 и 1?

2.76. Доказать, что объединение двух независимых σ-алгебр, каждая из которых содержит событие, вероятность которого отлична от 0 и 1, не может быть алгеброй.

2.77. Пусть ξ и η — случайные величины. Обязаны ли они быть независимыми, если независимы случайные величины ξ^2 и η^2?

2.78. Пусть ξ, η и ζ — случайные величины, причем ξ не зависит от $\eta+\zeta$. Верно ли, что ξ не зависит от η и от ζ?

2.79. Доказать, что случайная величина не зависит от самой себя тогда и только тогда, когда она с вероятностью 1 равна постоянной.

2.80. Какие условия нужно наложить на ξ, чтобы случайные величины ξ и $\sin\xi$ были независимы?

2.81. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, представляющем собой отрезок [0, 1] с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, заданы случайные величины ξ и η. Будут ли ξ и η независимы, если:

а) $\xi=\omega^2$, $\eta=1-\omega^2$; б) $\xi=1/2$, $\eta=\omega$;

$$\text{в) } \xi=\omega,\quad \eta=\begin{cases}1/2, & \omega\in[0,\,1/4),\\ 1, & \omega=1/4,\\ 1/2, & \omega\in(1/4,\,3/4),\\ 1/4, & \omega=3/4,\\ 1/2, & \omega\in(3/4,\,1].\end{cases}$$

2.82. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, причем Ω состоит ровно из n точек, каждая из которых имеет положительную вероятность. Доказать, что на этом вероятностном пространстве не существует двух независимых случайных величин, каждая из которых принимает n различных значений.

2.83. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство такое, что $\mathscr{A}$ содержит ровно n событий, $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ — попарно независимые случайные величины, определенные на этом вероятностном пространстве. Доказать, что по крайней мере одна из них есть с вероятностью единица постоянная.

2.84. Определим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ следующим образом: $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω, $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(3) = 1/3$. Доказать, что на этом вероятностном пространстве нельзя определить две независимые случайные величины, каждая из которых принимает по крайней мере два значения.

2.85. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ определено следующим образом: $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω, $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(3) = \mathbf{P}(4) = 1/4$. Построить на этом вероятностном пространстве две независимые случайные величины, не равные с вероятностью единица постоянным.

2.86. Существует ли на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских множеств и мерой Лебега, случайная величина, не равная с вероятностью единица постоянной и не зависящая от случайной величины $\xi(\omega) = \omega$?

2.87. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Доказать, что случайные величины $\min\{1, \xi\}$ и $\min\{1, \eta\}$ независимы.

2.88. Пусть ξ и η — случайные величины, причем для любых вещественных a и b случайные величины $\min\{a, \xi\}$ и $\min\{b, \eta\}$ независимы. Доказать, что ξ и η независимы.

2.89. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, $f(x)$ и $g(x)$ — борелевские функции. Доказать, что случайные величины $f(\xi)$ и $g(\eta)$ независимы.

2.90. Пусть ξ и η — зависимые случайные величины, $f(x)$ и $g(x)$ — борелевские функции. Могут ли случайные величины $f(\xi)$ и $g(\eta)$ быть независимыми? Изменится ли ответ, если дополнительно предположить, что $f(\xi)$ и $g(\eta)$ имеют невырожденные распределения?

2.91. Может ли существовать случайная величина ξ и две борелевские функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что случайные величины $f(\xi)$ и $g(\xi)$ независимы и имеют невырожденные распределения? Изменится ли ответ, если дополнительно предположить, что f и g — строго монотонные функции?

2.92. Пусть ξ и η — случайные величины, $\mathbf{P}(\xi > 0) = \mathbf{P}(\eta > 0) = 3/4$, $\mathbf{P}(\xi + \eta > 0) = 1/2$. Доказать, что ξ и η зависимы.

2.93. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины, $p = \mathbf{P}(\xi > 0)$, $q = 1 - p$. Доказать, что $p^2 \leqslant \mathbf{P}(\xi + \eta > 0) \leqslant 1 - q^2$.

2.94. Пусть ξ, η и ζ — случайные величины, причем ξ не зависит от η и от ζ. Верно ли, что ξ не зависит от $\eta + \zeta$?

2.95. Пусть ξ, η и ζ — независимые в совокупности случайные величины. Будут ли независимыми случайные величины ξ и $\eta+\zeta$? Изменится ли ответ, если предположить лишь попарную независимость ξ, η и ζ?

2.96. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n-k})$ — борелевские функции k и $n-k$ аргументов соответственно. Доказать, что случайные величины $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ и $\psi(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$ независимы.

2.97. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Доказать, что на этом же вероятностном пространстве существует двойная последовательность случайных величин

$$\begin{array}{l} \xi_{11}, \xi_{21}, \ldots, \\ \xi_{12}, \xi_{22}, \ldots, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

удовлетворяющая следующим условиям:

а) все ξ_{ij} принимают не более чем счетное число значений; б) при каждом k $\xi_{1k}, \xi_{2k}, \ldots$ независимы; в) при каждом n последовательность ξ_{nk} равномерно по ω сходится при $k \to \infty$ к ξ_n.

2.98. Существуют ли случайные величины ξ и η такие, что ξ и η не равны с вероятностью единица постоянным и:

а) ξ и $\xi+\eta$ независимы? б) ξ и $\xi\cdot\eta$ независимы? в) ξ, $\xi+\eta$ и $\xi\cdot\eta$ независимы в совокупности?

2.99. Показать, что из равенства $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ не следует, вообще говоря, независимость ξ и η.

2.100. Доказать, что если случайные величины ξ и η принимают по два значения, то из равенства $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ следует независимость ξ и η.

2.101. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что

$$\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\xi_k.$$

2.102. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — борелевские функции. Доказать, что

$$\mathbf{E}\varphi(\xi)\psi(\eta) = \mathbf{E}\varphi(\xi)\mathbf{E}\psi(\eta),$$

если написанные математические ожидания существуют.

2.103. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, каждая из которых принимает не более чем счетное число значений. Доказать, что они независимы тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \ldots, x_n$

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k = x_k).$$

2.104. Пусть ξ и η — случайные величины, не равные с вероятностью единица постоянным, причем $\mathsf{P}(\xi < \eta) = 1$. Могут ли ξ и η быть независимыми? Изменится ли ответ, если дополнительно предположить, что для любого $a > 0$ $\mathsf{P}(\xi > a) > 0$?

2.105. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены $\mathsf{P}\left(\xi_i = \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{N}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Положим

$$\eta_{ik} = \begin{cases} 1, & \xi_i = \xi_k, \\ 0, & \xi_i \neq \xi_k. \end{cases}$$

Будут ли случайные величины η_{ik} попарно независимыми? Независимыми?

2.106. События $A_1, \ldots, A_n$ называются симметрично зависимыми, если вероятность

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r}\right), \qquad 1 \leqslant r \leqslant n, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n,$$

зависит только от r и не зависит от конкретного набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Доказать, что независимые события, имеющие одинаковую вероятность, являются симметрично зависимыми. Можно ли отказаться от условия равновероятности?

2.107. Следует ли из симметричной зависимости событий их независимость?

2.108. В урне N белых и M черных шаров. Из урны извлекается n шаров по схеме выбора без возвращения $(n \leqslant \min\{N, M\})$. Пусть A_k — событие, состоящее в том, что k-й извлеченный шар оказался белым. Доказать, что события $A_1, \ldots, A_n$ симметрично зависимы.

2.109. Доказать, что неотрицательные числа $p_1, \ldots, p_n$ тогда и только тогда могут быть вероятностями n попарно независимых событий таких, что пересечение любых трех из них не пусто, когда выполнены следующие неравенства:

$$p_1 + \ldots + p_{n-1} \leqslant 1;$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-2} + p_n \leqslant 1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_2 + \ldots + p_n \leqslant 1.$$

Глава 3

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$,— случайная величина, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Функция $\mathbf{P}(\xi \in A) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$, определенная для всех борелевских множеств B прямой, является вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ (где $\mathbb{R}$ — прямая с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$) и называется *распределением вероятностей случайной величины* $\xi(\omega)$.

Функцией распределения случайной величины $\xi(\omega)$ называется функция вещественной переменной, определяемая равенством

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi(\omega) \leqslant x).$$

Каждая функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ неубывающая функция;

2) $F(x)$ непрерывна справа при каждом x;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1.$

Любая функция $F(x)$, удовлетворяющая свойствам 1)—3), является функцией распределения некоторой случайной величины.

Точка x называется *точкой роста* функции распределения (или распределения), если для любого $\varepsilon > 0$

$$F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0.$$

Распределение случайной величины называется *вырожденным*, если $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$ для некоторого вещественного a.

Распределение случайной величины ξ называется *дискретным*, если ξ с вероятностью 1 принимает конечное или счетное число значений. Соответствующая функция распределения является ступенчатой (кусочно постоянной) функцией: если $x_1, x_2, \ldots$ — значения случайной величины ξ и $p_i = \mathbf{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}$, то $F(x)$ имеет скачки в точках x_i, равные $p_i = F(x_i) - F(x_i - 0)$.

Наиболее важными дискретными распределениями являются *решетчатые* (или *арифметические*) распределения, сосредоточенные на множестве точек вида $a + kh$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, где h называется шагом распределения:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi = a + kh) = F(a + kh) - F(a + kh - 0).$$

Распределения случайных величин, которые принимают только целые значения, называют *целочисленными*.

Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Если для любого борелевского множества $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ существует неотрицательная борелевская функция $f(x)$, такая, что

$$\mathbf{P}(\xi \in B) = \int_B f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1,$$

то распределение ξ и функция распределения $F(x)$ называются *абсолютно непрерывными*, а $f(x)$ называется *плотностью* распределения вероятностей или просто плотностью случайной величины ξ. В этом случае $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ и для почти всех x $f(x) = F'(x)$.

Непрерывная функция распределения называется *сингулярной*, если множество ее точек роста образует множество нулевой меры Лебега.

Любую функцию распределения $F(x)$ можно однозначно представить в виде (разложение Лебега)

$$F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + a_3F_3(x),$$

где $a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$ — дискретная, абсолютно непрерывная и сингулярная функции распределения.

Случайная величина и ее распределение называются *симметричными* относительно начала координат, если функции распределения случайных величин ξ и $-\xi$ совпадают:

$$F(x) = 1 - F(-x-0).$$

Распределение называется *одновершинным* (или унимодальным), если существует a такое, что $F(x)$ выпукла вверх при $x > a$ и выпукла вниз при $x < a$ (в точке $x = a$ функция $F(x)$ может иметь разрыв); точка a называется *вершиной* (или модой) распределения.

Укажем наиболее часто встречающиеся распределения вероятностей.

Дискретные распределения:

1. *Биномиальное распределение* с параметрами p и n (n — целое положительное число, $0 \leqslant p \leqslant 1$):

$$\mathbf{P}(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

2. *Геометрическое распределение* с параметром $0 \leqslant p \leqslant 1$:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p, \; k = 1, 2, \ldots$$

3. *Пуассоновское распределение* с параметром $\lambda > 0$:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

4. *Гипергеометрическое распределение* с параметрами n, M, N:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, \ldots, \min(n, M).$$

Абсолютно непрерывные распределения (приводим плотности случайной величины):

1. *Равномерное распределение* на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{и} \quad f(x) = 0 \quad \text{при других} \quad x;$$

2. *Показательное* (экспоненциальное) *распределение* с параметром $\lambda > 0$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geqslant 0 \text{ и } f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

3. *Нормальное распределение* с параметрами m и σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0.$$

4. *Распределение Коши* с параметрами a и $b > 0$:

$$f(x) = \frac{b}{\pi\left(b^2 + (x-a)^2\right)}.$$

Медианой случайной величины ξ (или ее распределения) называется число $m\xi$ такое, что

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant m\xi\} \geqslant 1/2 \text{ и } \mathsf{P}\{\xi \leqslant m\xi\} \geqslant 1/2.$$

Медиана, вообще говоря, определяется неоднозначно.

Моментом (или *абсолютным моментом*) порядка α (α — вещественное число) случайной величины ξ (или ее распределения) называется математическое ожидание $\mathsf{E}\xi^\alpha$ (или $\mathsf{E}|\xi|^\alpha$), если оно существует (число α может быть как положительным, так и отрицательным; чаще всего момент определяется для целых положительных α).

Центральным моментом (или *абсолютным центральным моментом*) порядка $\alpha > 0$ называется математическое ожидание $\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^\alpha$ (или $\mathsf{E}|\xi - \mathsf{E}\xi|^\alpha$). Центральный момент порядка $\alpha = 2$ называется *дисперсией* и обозначается $\mathsf{D}\xi$.

Отметим некоторые важные неравенства, в которых участвуют моменты случайных величин. Некоторые из этих неравенств дают возможность оценивать вероятности событий, связанных с этими случайными величинами.

Неравенство Чебышёва: если $\xi \geqslant 0$ и $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{E}\xi}{\varepsilon};$$

если ξ — произвольная случайная величина с $\mathsf{E}\xi^2 < \infty$, то

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Колмогорова: если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины и $\mathsf{E}\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\xi_i < \infty$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_1 + \ldots + \xi_k| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}\xi_i}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Коши — Буняковского — Шварца: если случайные величины ξ и η таковы, что $\mathsf{E}\xi^2 < \infty$, $\mathsf{E}\eta^2 < \infty$, то

$$\mathsf{E}|\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathsf{E}\xi^2} \cdot \sqrt{\mathsf{E}\eta^2}.$$

Неравенство Иенсена: если ξ — случайная величина с $\mathsf{E}|\xi| < \infty$ и $f(x)$ — выпуклая вниз функция, то

$$\mathsf{E}f(\xi) \geqslant f(\mathsf{E}(\xi)),$$

если математическое ожидание слева существует и $\mathsf{E}\xi$ принадлежит области определения функции f.

Неравенство Ляпунова: при $0 < s < r$

$$(\mathsf{E}|\xi|^s)^{1/s} \leqslant (\mathsf{E}|\xi|^r)^{1/r}.$$

Неравенство Гёльдера: если $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\mathsf{E}|\xi|^p < \infty$, $\mathsf{E}|\eta|^q < \infty$, то

$$\mathsf{E}|\xi\eta| \leqslant (\mathsf{E}|\xi|^p)^{1/p}(\mathsf{E}|\eta|^q)^{1/q}.$$

Неравенство Минковского: если $\mathsf{E}|\xi|^r < \infty$, $\mathsf{E}|\eta|^r < \infty$ при $r \geqslant 1$, то

$$(\mathsf{E}|\xi + \eta|^r)^{1/r} \leqslant (\mathsf{E}|\xi|^r)^{1/r} + (\mathsf{E}|\eta|^r)^{1/r}.$$

Если случайные величины $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, то вектор $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ называется *n-мерной случайной величиной* или *случайным вектором* со значениями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$. Функция $\mathbf{P}(\xi \in B) = \mathbf{P}(\omega : (\xi_1(\omega), \ldots$ $\ldots, \xi_n(\omega)) \in B)$, определенная для всех борелевских множеств B пространства $\mathbb{R}_n$, называется *распределением вероятностей случайного вектора* ξ. Можно также говорить о совместном распределении случайных величин $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n$. Определенная для любых вещественных $x_1, \ldots, x_n$ функция

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n)$$

называется *функцией распределения случайного вектора* ξ. Свойства этой функции аналогичны свойствам одномерной функции распределения.

Если существует неотрицательная борелевская функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, такая, что для всех $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$

$$\mathbf{P}(\xi \in B) = \int\limits_B f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)\,dx = 1,$$

то соответствующее распределение называется абсолютно непрерывным, а функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — плотностью распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Распределения случайных величин ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, компонент вектора ξ, называются *маргинальными* (частными) распределениями и вычисляются по распределению вектора; так например функция распределения ξ_1 определяется равенством:

$$F_1(x_1) = F(x_1, +\infty, \ldots, +\infty).$$

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда функция распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n),$$

где $F_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$,— функции распределений величин ξ_i (маргинальных распределений). Если распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ абсолютно непрерывно, то необходимым и достаточным условием независимости $\xi_1, \ldots, \xi_n$ служит соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n),$$

где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — совместная плотность распределения, а $f_i(x_i)$ — маргинальные плотности.

Характеристикой связи между двумя случайными величинами с совместным распределением вероятностей служит ковариация и определяемый с ее помощью коэффициент корреляции.

Ковариацией случайных величин ξ и η называется величина $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$, где $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{E}\eta$ — математические ожидания ξ и η. *Коэффициентом корреляции* ξ и η, имеющих конечные дисперсии $\mathbf{D}\xi$ и $\mathbf{D}\eta$, называется величина

$$\rho(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\xi, \eta)/\sqrt{\mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta}.$$

Если $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$ или $\rho(\xi, \eta) = 0$, то случайные величины называются *некоррелированными.*

Если случайные величины ξ и η независимы, то $(\mathbf{E}|\xi| < \infty$, $\mathbf{E}|\eta| < \infty)$

$$\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi \cdot \mathbf{E}\eta$$

и тогда $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$ и величины ξ и η некоррелированы.

Ковариационной матрицей случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется квадратная $n \times n$ матрица с элементами $\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$, определенная в предположении, что все указанные моменты конечны.

Многомерным нормальным распределением в $\mathbb{R}_n$ называется распределение вероятностей с плотностью

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} |M|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(M^{-1}(x-m),\, x-m\right)\right\},$$

где M — ковариационная матрица, $|M|$ — ее определитель, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$. Если компоненты случайного вектора некоррелированы, то плотность приобретает вид:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_1 \ldots \sigma_n)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right\},$$

где m_i и $\sigma_i^2 > 0$ — параметры маргинальных распределений.

Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Функцией распределения их суммы $\xi + \eta$ является *свертка* F и G:

$$\mathbf{P}(\xi + \eta \leqslant x) = F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\, dG(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\, dF(t).$$

Симметризацией функции распределения $F(x)$ называется функция распределения

$$F^{(s)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+t)\, dF(t).$$

Симметризация $F(x)$ совпадает с функцией распределения случайной величины $\xi_1 - \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одинаковую функцию распределения $F(x)$, случайная величина $\xi^{(s)} = \xi_1 - \xi_2$ называется *симметризацией* величин ξ_1 и ξ_2.

Функция распределения $F_1(x)$ называется *компонентой* функции распределения $F(x)$, если существует функция распределения $F_2(x)$ такая, что

$$F(x) = F_1 * F_2(x).$$

Имеется несколько употребительных способов измерять расстояние между функциями распределения. Наиболее важными являются следующие.

1. *Расстояние по вариации* для любых двух распределений вероятностей $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ определяется как

$$\sup_{A \in \mathfrak{B}} |\mathbf{P}(A) - \mathbf{Q}(A)|,$$

где $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра множеств.

2. *Равномерная метрика* (*метрика Колмогорова*) для любых двух функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ определяется как

$$\sup_x |F(x) - G(x)|.$$

3. *Метрика Леви* определяется как точная нижняя грань таких h, что

$$F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h$$

и

$$G(x-h) - h \leqslant F(x) \leqslant G(x+h) + h$$

§ 1. Функции распределения

3.1. Найти функцию распределения случайной величины ξ, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега в качестве вероятности, если:

а) $\xi = \omega$; б) $\xi = \omega^2$; в) $\xi = \omega^\alpha$, $\alpha < 0$;

г) $\xi = \sin \pi\omega$; д) $\xi = \begin{cases} 2\omega, & 0 \leqslant \omega \leqslant 1/2, \\ 2(1-\omega), & 1/2 < \omega \leqslant 1; \end{cases}$

е) $\xi = \begin{cases} \omega, & 0 \leqslant \omega \leqslant 1/3, \\ -1, & 1/3 < \omega \leqslant 2/3, \\ -\omega^3, & 2/3 < \omega \leqslant 1; \end{cases}$ ж) $\xi = \begin{cases} 1/4, & 0 \leqslant \omega \leqslant 1/4, \\ 1, & 1/4 < \omega \leqslant 3/4, \\ 1/4, & 3/4 < \omega \leqslant 1. \end{cases}$

3.2. Пусть ξ и η — случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где Ω — квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств Ω, $\mathbf{P}$ — мера Лебега. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\xi + \eta$, если:

а) $\xi = \omega_1 + \omega_2$, $\eta = \omega_1 - \omega_2$; б) $\xi = \omega_1$, $\eta = \omega_2$;

в) $\xi = 1$ при $\omega_1 = \omega_2$, $\xi = 0$ при $\omega_1 \neq \omega_2$, $\eta = \omega_1\omega_2$.

Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

3.3. Пусть случайная величина ξ определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где Ω — треугольник с вершинами в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств указанного треугольника, $\mathbf{P}$ — мера Лебега. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ, если:

а) $\xi = \omega_1$; б) $\xi = \omega_2$.

3.4. Равнобедренный треугольник образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении. Найти функцию распределения длины третьей стороны:

а) в $\mathbb{R}^2$; б) в $\mathbb{R}^3$.

3.5. Окружность единичного радиуса с центром в нуле имеет северный полюс на положительной полуоси абсцисс. Из полюса случайным образом направлен луч, причем его угол с осью абсцисс распределен равномерно на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Найти функцию распределения длины хорды внутри окружности.

3.6. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Найти функции распределения следующих случайных величин:

а) $\max\{\xi, \eta\}$; б) $\min\{\xi, \eta\}$; в) $\max\{2\xi, \eta\}$; г) $\min\{\xi^3, \eta\}$.

3.7. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие одинаковое показательное с параметром α распределение. Найти функции распределения и плотности распределения следующих случайных величин:

а) ξ^3; б) $\xi - \eta$; в) $\max\{\xi, \eta^3\}$; г) $\min\{\xi, \eta^3\}$, д) $3 + 2\xi$;

е) $|\xi - \eta|$.

3.8. Решить предыдущую задачу в предположении, что ξ и η равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$.

3.9. Пусть ξ — случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром λ, $f(x)$ — положительная строго монотонная дифференцируемая функция. Найти плотность распределения случайной величины $f(\xi)$.

3.10. Пусть ξ, η и ζ — независимые случайные величины, причем ζ принимает значения 1 и 0 с вероятностями p и q соответственно, $p+q=1$, а ξ и η имеют функции распределения $F(x)$ и $G(x)$. Найти функции распределения следующих случайных величин:

а) $\zeta\xi+(1-\zeta)\eta$; б) $\zeta\xi+(1-\zeta)(\max\{\xi, \eta\})$;

в) $\zeta\xi+(1-\zeta)(\min\{\xi, \eta\})$.

3.11. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{P}(\xi_i=1)=\mathbf{P}(\xi_i=-1)=1/2$, $i=1, 2, \ldots, n$. Найти распределение случайной величины

$$\eta_n=\prod_{i=1}^{n}\xi_i.$$

3.12. Можно ли подобрать постоянную c так, чтобы функция cx^{-3} определяла плотность распределения вероятностей на:

а) луче $[1, +\infty)$; б) луче $[0, +\infty)$; в) отрезке $[-2, -1]$.

3.13. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\varphi(x, y)$ — борелевская функция двух переменных. Доказать, что случайные величины $\varphi(\xi, \eta)$ и $\varphi(\eta, \xi)$ одинаково распределены. Можно ли отказаться от условия независимости?

3.14. Пусть ξ — случайная величина с симметричным распределением, A — симметричное относительно нуля борелевское множество на прямой. Положим

$$\eta=\begin{cases}\xi, & \text{если } \xi\in A,\\ -\xi, & \text{если } \xi\notin A.\end{cases}$$

Доказать, что случайные величины ξ и η одинаково распределены.

3.15. Пусть ξ и η — случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Доказать, что если $\mathbf{P}(\xi>\eta)=1$, то $F(x)<G(x)$ при всех x. Верно ли обратное при условии, что ξ и η определены на одном вероятностном пространстве?

3.16 (*продолжение*). Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две функции распределения, причем $F(x)<G(x)$ для всех x. Доказать, что существует вероятностное пространство и две случайные величины ξ и η, определенные на этом вероятностном пространстве и такие, что $F(x)=P(\xi\leqslant x)$, $G(x)=P(\eta\leqslant x)$ и $\xi>\eta$.

3.17. Доказать, что множество точек разрыва любой функции распределения не более чем счетно.

3.18. Может ли множество точек разрыва функции распределения быть всюду плотным на прямой?

3.19. Доказать, что любая функция распределения $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x), \quad a_1\geqslant 0, \quad a_2\geqslant 0, \quad a_1+a_2=1,$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, причем $F_1(x)$ непрерывна, и $F_2(x)$ — дискретная функция распределения. Доказать, что такое представление единственно.

3.20. Пусть борелевская функция двух переменных $F(x, y)$ при каждом фиксированном y является функцией распределения. Доказать, что если $G(x)$ — функция распределения, то функция

$$H(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\, dG(y)$$

также является функцией распределения.

3.21. Функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ непрерывна в нуле. Найти распределение случайной величины

$$\eta=\begin{cases} \dfrac{\xi}{|\xi|}, & \text{если} \quad \xi\neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad \xi=0. \end{cases}$$

3.22. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\frac{1}{2}(\xi+|\xi|)$.

3.23. Доказать, что если функция распределения непрерывна в каждой точке прямой, то она равномерно непрерывна на всей прямой.

3.24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 0 и 1 с вероятностью 1/2 каждое. Найти распределение случайной величины

$$\eta=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^k}.$$

3.25. Пусть ξ — случайная величина, имеющая равномерное на отрезке [0, 1] распределение. Доказать, что для любой функции распределения $F(x)$ существует борелевская функция $f(x)$ такая, что $F(x)$ будет функцией распределения случайной величины $f(\xi)$.

3.26. Пусть ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке [0, 1), и $\xi=\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_2}{2^2}+\frac{\delta_3}{2^3}+\ldots, \delta_n=0$ или 1 — двоичное разложение ξ. Доказать, что при любом натуральном n

$$\mathbf{P}(\delta_n=0)=\mathbf{P}(\delta_n=1)=\frac{1}{2}$$

и случайные величины $\delta_1, \delta_2, \ldots$ взаимно независимы.

3.27. Пусть выполнены условия предыдущей задачи. Расположим знаки двоичного разложения ξ — случайные величины $\delta_1, \delta_2, \ldots$ —

в виде следующей квадратной таблицы:

$$\begin{array}{l} \delta_1\ \delta_3\ \delta_6 \dots \\ \delta_2\ \delta_5 \dots \\ \delta_4 \dots \\ \delta_7 \dots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Из знаков k-й строки этой таблицы построим двоичное разложение, определяющее случайную величину ξ_k, например:

$$\xi_1 = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_3}{2^2} + \dots,$$

$$\xi_2 = \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_5}{2^2} + \dots,$$

$$\xi_3 = \frac{\delta_4}{2} + \frac{\delta_8}{2^2} + \dots,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Доказать, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и каждая из них имеет равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение.

3.28. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, представляющее собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, $F_1(x), F_2(x), \dots$ — произвольная последовательность функций распределения. Доказать, что на указанном вероятностном пространстве существует последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ таких, что при каждом n функция распределения случайной величины ξ_n совпадает с $F_n(x)$.

3.29. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения. Найти необходимые и достаточные условия того, что функция $H(x) = F(G(x))$ является функцией распределения.

3.30. Привести пример случайной величины ξ с плотностью $p(x)$ и непрерывной функции $g(x)$, таких, что $g(\xi)$ является невырожденной случайной величиной с дискретным распределением.

3.31. Пусть $\mathbf{P}$ — произвольное вероятностное распределение на прямой. Доказать, что для любого борелевского множества A и любого положительного ε найдутся открытое множество G и замкнутое множество F такие, что $F \subseteq A \subseteq G$ и $\mathbf{P}(G \setminus F) < \varepsilon$.

3.32. Пусть $\mathbf{P}$ — произвольное вероятностное распределение на прямой. Доказать, что для любого борелевского множества A и любого положительного ε найдется компакт K такой, что $K \subseteq A$ и $P(A \setminus K) < \varepsilon$.

3.33. Какова мощность множества всех функций распределения?

3.34. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных величин с функциями распределения $F_1(x), F_2(x), \dots$ соответственно, а ν — положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от всех $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Положим $p_k = \mathbf{P}(\nu = k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти функцию распределения случайной величины ξ_ν.

3.35. Доказать, что для любой непрерывной функции распределения $F(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dF(x) = \frac{1}{2}.$$

3.36. Доказать, что для любой непрерывной функции распределения $F(x)$ и любых натуральных n и k

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^k(x)\,dF^n(x) = \frac{n}{(n+k)}.$$

3.37. Пусть ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $F(\xi)$.

3.38. Доказать, что если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, то случайная величина $|\xi|$ также имеет абсолютно непрерывное распределение. Верно ли обратное утверждение?

3.39. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одинаковое распределение:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \mathbf{P}(\eta = k) = 1/N, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Положим

$$\nu = \min\{\xi, \eta\}, \quad \mu = \max\{\xi, \eta\}, \quad \lambda = \mu - \nu.$$

Найти распределения случайных величин ν, μ и λ.

3.40. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с непрерывными функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Найти функцию распределения произведения $\xi\eta$.

3.41. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $F(x)$ — функция распределения ξ_1. Введем функцию двух переменных $\varphi(x, y)$ следующим образом:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geqslant y, \\ 0 & \text{при} \quad x < y. \end{cases}$$

При каждом фиксированном x найти распределение случайной величины

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(x, \xi_k)$$

3.42. Функция распределения $F(x)$ неотрицательной случайной величины называется *полуаддитивной*, если

$$F(x+y) \leqslant F(x) + F(y)$$

для любых $x, y \geqslant 0$. Привести пример полуаддитивной функции распределения.

3.43. Пусть $p(x)$ — плотность распределения, не возрастающая при $x \geqslant 0$ и равная нулю при $x < 0$. Доказать, что соответствующая функция распределения полуаддитивна (определение см. в предыдущей задаче).

3.44. Доказать, что для любой функции распределения $F(x)$ справедливы соотношения:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \int\limits_x^\infty \frac{dF(y)}{y} = 0$, б) $\lim\limits_{x\to-\infty} x \int\limits_{-\infty}^x \frac{dF(y)}{y} = 0$,

в) $\lim\limits_{x\to-0} x \int\limits_{-\infty}^x \frac{dF(y)}{y} = 0$, г) $\lim\limits_{x\to+0} x \int\limits_x^\infty \frac{dF(y)}{y} = 0$.

3.45. Пусть функция распределения $F(x)$ непрерывна в нуле. Доказать, что функция

$$p(x) = \begin{cases} \int\limits_x^{+\infty} \frac{dF(y)}{y} & \text{при} \quad x > 0, \\ -\int\limits_{-\infty}^x \frac{dF(y)}{y} & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

является плотностью распределения.

3.46. Доказать, что если в предыдущей задаче отказаться от условия непрерывности в нуле, т. е. предположить, что $0 < F(0) - F(0-0) = \alpha < 1$, то функция $p(x)/(1-\alpha)$ является плотностью распределения вероятностей.

3.47. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две функции распределения. Доказать, что $F_1(x) \leqslant F_2(x)$ при всех x тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dF_1(x) \geqslant \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dF_2(x)$$

для любой монотонно неубывающей функции $f(x)$, для которой указанные интегралы существуют.

3.48. Пусть вещественная функция $f(x)$ такова, что для любых двух функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, удовлетворяющих неравенству $F_1(x) \leqslant F_2(x)$, выполнено неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dF_1(x) \geqslant \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dF_2(x).$$

Доказать, что $f(x)$ монотонно не убывает.

3.49. Распределение P называется *доминирующим* для семейства распределений $\mathfrak{P}$, если для любого борелевского множества A

такого, что $P(A)=0$, выполнены равенства $Q(A)=0$ для всех Q из $\mathfrak{B}$. Семейство распределений называется *доминируемым*, если существует распределение, доминирующее его.

Доказать, что любое счетное семейство распределений доминируемо.

3.50. Привести пример не доминируемого семейства распределений.

3.51. Доказать, что если $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ — последовательность доминируемых семейств распределений, то доминируемо и их объединение

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n.$$

3.52. *Выпуклой оболочкой* семейства распределений $\mathfrak{B}$ называется множество всех распределений вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_i,$$

где $\alpha_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, $P_i \in \mathfrak{B}$, $i=1, 2, \ldots$. Доказать, что выпуклая оболочка доминируемого семейства распределений доминируема.

3.53. Доказать, что семейство распределений $\mathfrak{B}$ доминируемо тогда и только тогда, когда существует не более чем счетное подсемейство $\mathfrak{B}'$ семейства $\mathfrak{B}$ такое, что если борелевское множество A удовлетворяет условию $P(A)=0$ для любого $P \in \mathfrak{B}'$, то $Q(A)=0$ для любого $Q \in \mathfrak{B}$.

3.54. *Функцией концентрации* случайной величины ξ называется функция

$$Q_\xi(x) = \sup_a \mathbf{P}(a \leqslant \xi \leqslant a+x).$$

Очевидно, функция концентрации однозначно определяется функцией распределения. Верно ли обратное?

3.55. Доказать, что для любой случайной величины ξ и любого положительного x найдется a такое, что

$$Q_\xi(x) = \mathbf{P}(a \leqslant \xi \leqslant a+x).$$

3.56. Доказать, что для любой случайной величины ξ и любых неотрицательных α и x имеет место неравенство

$$Q_\xi(\alpha x) \leqslant ([\alpha]+1) Q_\xi(x),$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α.

3.57. Пусть $F(x)$ — функция распределения, $Q(x)$ — соответствующая функция концентрации.

1. Может ли $F(x)$ иметь больше точек разрыва, чем $Q(x)$?
2. Может ли $Q(x)$ иметь больше точек разрыва, чем $F(x)$?

3.58. Может ли функция распределения иметь бесконечное число точек разрыва, а соответствующая функция концентрации — конечное?

3.59. Пусть $F(x)$ — функция распределения, $Q(x)$ — соответствующая функция концентрации, n — число точек разрыва $F(x)$, m — число точек разрыва $Q(x)$. Доказать, что

$$m \leqslant C_n^2 + 1.$$

3.60. Пусть ξ — произвольная случайная величина. Доказать, что для любых положительных a и l множество

$$A_{l,a} = \{x : \mathbf{P}(x \leqslant \xi \leqslant x + l) \geqslant a\}$$

является компактным (может быть, пустым).

§ 2. Моменты

3.61. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = \xi(\omega)$, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, если:

а) $\xi = \omega^2$, б) $\xi = \omega - 1/2$, в) $\xi = \sin \pi\omega$, г) $\xi = \sin 2\pi\omega$.

3.62. Диаметр круга d измерен приближенно, и известно лишь, что $0 < a \leqslant d \leqslant b$. Считая d случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

3.63. Брошены две игральные кости. Найти математическое ожидание суммы выпавших очков, если известно, что выпали разные грани.

3.64. Доказать, что равенство нулю дисперсии $\mathbf{D}\xi = 0$ равносильно тому, что случайная величина ξ с вероятностью единица равна постоянной: $\mathbf{P}(\xi = c) = 1$ для некоторого числа c.

3.65. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией. Доказать, что ξ с вероятностью единица принимает значения одного знака тогда и только тогда, когда случайные величины $\xi - \eta$ и $|\xi| - |\eta|$ одинаково распределены.

3.66. Пусть ξ — случайная величина такая, что $\mathbf{P}(0 < \xi < 1) = 1$. Доказать, что $\mathbf{D}\xi < \mathbf{E}\xi$.

3.67. Пусть случайные величины ξ и η независимы и $\mathbf{E}\xi = 1$, $\mathbf{E}\eta = 2$, $\mathbf{D}\xi = 1$, $\mathbf{D}\eta = 4$.

Найти математические ожидания случайных величин:

а) $\xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4$; б) $(\xi + \eta + 1)^2$.

3.68. Доказать, что для любых случайных величин ξ и η, имеющих конечные дисперсии, справедливы неравенства

$$(\sqrt{\mathbf{D}\xi} - \sqrt{\mathbf{D}\eta})^2 \leqslant \mathbf{D}(\xi + \eta) \leqslant (\sqrt{\mathbf{D}\xi} + \sqrt{\mathbf{D}\eta})^2.$$

3.69. Доказать, что если $\mathbf{E}|\xi|^\alpha < \infty$, $\alpha > 0$, то $\mathbf{E}|\xi|^\beta < \infty$ при $0 < \beta \leqslant \alpha$.

3.70. Привести пример распределения, не имеющего моментов ни положительного, ни отрицательного порядков.

3.71. Пусть ξ и η — одинаково распределенные случайные величины. Верно ли, что

$$\mathbf{E}\,\frac{\xi}{\xi+\eta} = \mathbf{E}\,\frac{\eta}{\xi+\eta}?$$

3.72. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные положительные случайные величины. Доказать, что

$$\mathbf{E}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\xi_1+\ldots+\xi_n}\right) = \frac{k}{n}$$

для любого $1 \leqslant k \leqslant n$. Можно ли отказаться от условия независимости?

3.73. Случайная величина ξ принимает значения $0, 1, \ldots, n, \ldots$ с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии:

а) найти зависимость между $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$; б) известно, что $\mathbf{E}\xi = a$; найти $\mathbf{P}(\xi = n)$, $n = 0, 1, \ldots$.

3.74. Пусть случайная величина ξ принимает конечное число неотрицательных значений $x_1, \ldots, x_r$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}\xi^{n+1}}{\mathbf{E}\xi^n} = \max(x_1, \ldots, x_r),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathbf{E}\xi^n} = \max(x_1, \ldots, x_r).$$

3.75. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi \geqslant i).$$

3.76. Написаны n писем, предназначенных разным адресатам. Имеется n конвертов с соответствующими адресами. Письма в случайном порядке вложены в конверты. Пусть ξ_n — число писем, которые посланы тем адресатам, которым они предназначены. Найти $\mathbf{E}\xi_n$.

3.77. Пусть ξ — ограниченная с вероятностью единица случайная величина: $\mathbf{P}(|\xi| \leqslant c) = 1$. Доказать, что

$$\mathbf{D}\xi \leqslant c\mathbf{E}|\xi|.$$

3.78. Доказать, что $\mathbf{E}\xi$ существует тогда и только тогда, когда существует $\mathbf{E}[\xi]$ ($[\cdot]$ — целая часть), причем $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}[\xi]$ тогда и только тогда, когда ξ — целочисленная случайная величина.

3.79. Пусть $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{E}|\xi| = 1$. Найти $\mathbf{E}\max\{0, \xi\}$ и $\mathbf{E}\min\{0, \xi\}$.

3.80. Каким условиям должны удовлетворять числа a и b для того, чтобы существовала случайная величина ξ такая, что $\mathbf{E}\xi = a$, $\mathbf{E}|\xi| = b$?

3.81. Доказать неравенство Иенсена.

3.82. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с конечными дисперсиями. Доказать, что

$$\mathbf{D}\xi\eta \geqslant \mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta.$$

3.83. Каким условиям должны удовлетворять независимые случайные величины ξ и η, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{D}\xi\eta = \mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta?$$

3.84. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $\mathbf{E}\xi_i = m_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$; $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместные события, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$, $\mathbf{P}(A_j) = p_j$; случайные величины ξ_i и I_{A_j} независимы; случайная величина ξ равна $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i I_{A_i}$; случайная величина μ принимает значения m_i с вероятностями p_i, соответственно. Доказать, что

$$\mathbf{D}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathbf{D}\xi_i + \mathbf{D}\mu.$$

3.85. Случайная величина ξ имеет конечный абсолютный момент порядка $p > 0$:

$$\mathbf{E}|\xi|^p < \infty.$$

Доказать, что

$$t^p \mathbf{P}(|\xi| > t) \to 0$$

при $t \to \infty$.

3.86. Доказать, что функция распределения $F(x)$ имеет конечный абсолютный момент порядка $\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда функция $|x|^{\alpha-1}(1 - F(x) + F(-x))$ интегрируема на всей вещественной оси.

3.87. Доказать, что для того чтобы у случайной величины ξ существовал конечный абсолютный момент порядка $\alpha > 0$: $\mathbf{E}|\xi|^\alpha < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \mathbf{P}(|\xi| \geqslant n).$$

3.88. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения и $\mathbf{E}|\xi| < \infty$. Доказать, что

$$\mathbf{E}\min\{\xi, \eta\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi \geqslant i)\,\mathbf{P}(\eta \geqslant i).$$

3.89. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$ и конечным математическим ожиданием.

Доказать, что

$$\mathbf{E}\xi = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx.$$

3.90. Пусть ξ — положительная случайная величина с функцией распределения $F(x)$ и

$$\mathbf{E}\,\frac{1}{\xi^\alpha} < \infty, \quad \alpha > 0.$$

Доказать, что

$$\frac{F(x)}{x^\alpha} \to 0$$

при $x \to 0$.

3.91. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$ и конечным моментом порядка $\alpha > 0$. Доказать, что

$$\mathbf{E}\xi^\alpha = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} (1 - F(x))\,dx.$$

3.92. Пусть ξ — положительная случайная величина с функцией распределения $F(x)$ и конечным моментом порядка $\alpha < 0$. Доказать, что

$$\mathbf{E}\xi^\alpha = |\alpha| \int_0^\infty x^{\alpha-1} F(x)\,dx.$$

3.93. Доказать, что если $F(x)$ — функция распределения с конечным математическим ожиданием и такая, что $F(0) = 0$, то функция

$$G(x) = \prod_{n=1}^\infty F(x+n)$$

является функцией распределения.

3.94. Пусть ξ — случайная величина с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Доказать, что

$$\mathbf{E}|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(\mathbf{D}\xi + 1).$$

3.95. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Положим

$$a_n = \mathbf{E}\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}\right|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Доказать, что последовательность $a_1, a_2, \ldots$ равномерно ограничена.

3.96. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены. Каждая из случайных величин ξ_i принимает два значения: 1 и 0 с вероятностями p и $q=1-p$ соответственно. Пусть η_k — случайная величина, равная 0, если $\xi_k=\xi_{k+1}$, и 1, если $\xi_k \neq \xi_{k+1}$. Положим $\zeta_n=\eta_1+\ldots+\eta_{n-1}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ζ_n.

3.97. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[a, b]$. Найти a и b, если $\mathbf{E}\xi^2=1$ и $\mathbf{E}\xi=-\mathbf{E}\xi^3$.

3.98. Пусть ξ — случайная величина с симметричным относительно нуля распределением. Доказать, что для любого вещественного a

$$\mathbf{E}|\xi+a| \geqslant \mathbf{E}|\xi|.$$

3.99. Показать, что существуют две случайные величины ξ и η, такие, что $\mathbf{E}|\xi|<\infty$, $\mathbf{E}|\eta|<\infty$ и

$$\mathbf{E}|\xi+a|>\mathbf{E}|\eta+a|$$

для любого вещественного a.

3.100. Пусть ξ и η — случайные величины такие, что для любого a

$$\mathbf{E}|\xi+a|^\alpha=\mathbf{E}|\eta+a|^\alpha$$

(α — некоторое вещественное число), и пусть ζ — случайная величина, не зависящая от ξ и η. Доказать, что

$$\mathbf{E}|\xi+\zeta|^\alpha=\mathbf{E}|\eta+\zeta|^\alpha.$$

3.101. Пусть ξ и η — случайные величины такие, что для любого a

$$\mathbf{E}|\xi+a|^\alpha \leqslant \mathbf{E}|\eta+a|^\alpha$$

(α — некоторое вещественное число), и пусть ζ — случайная величина, не зависящая от ξ и η. Доказать, что

$$\mathbf{E}|\xi+\zeta|^\alpha \leqslant \mathbf{E}|\eta+\zeta|^\alpha.$$

3.102. Пусть ξ и η — неотрицательные случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно, причем $F(x) \geqslant G(x)$ для всех x. Доказать, что:

а) $\mathbf{E}\xi^\alpha \leqslant \mathbf{E}\eta^\alpha$, $0 \leqslant \alpha<\infty$; б) $\mathbf{E}\xi^\alpha \geqslant \mathbf{E}\eta^\alpha$, $\alpha<0$, если указанные моменты существуют.

3.103. Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что для любого x

$$\max\{x, \mathbf{E}\xi\} \leqslant \mathbf{E}\max\{x, \xi\}.$$

3.104. Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Доказать, что

$$\int_x^\infty (1-F_1(t))\,dt \leqslant \int_x^\infty (1-F_2(t))\,dt$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}\max\{x, \xi_1\} \leqslant \mathbf{E}\max\{x, \xi_2\}.$$

3.105. Пусть ξ и η — случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и такие, что для любого x

$$\mathbf{E}\max\{x, \xi\} \leqslant \mathbf{E}\max\{x, \eta\}.$$

Доказать, что для любой выпуклой функции $f(x)$

$$\mathbf{E}f(\xi) \leqslant \mathbf{E}f(\eta).$$

3.106. Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Доказать, что если для любого x

$$\int_x^\infty (1 - F_1(t))\,dt \leqslant \int_x^\infty (1 - F_2(t))\,dt,$$

то

$$\mathbf{E}\xi_1^r \leqslant \mathbf{E}\xi_2^r$$

для любого $r \geqslant 1$ (при условии, что эти моменты существуют).

3.107. Пусть ξ — случайная величина с конечным абсолютным моментом порядка $\alpha > 0$. Доказать, что

$$\mathbf{E}|\xi + a|^\alpha \to \infty$$

при $a \to \infty$.

3.108. Пусть ξ — случайная величина с конечным абсолютным моментом порядка $2n - 1$ (n — целое положительное число). Доказать, что существует такое вещественное a, что

$$\mathbf{E}(\xi - a)^{2n-1} = 0,$$

причем такое a единственно.

3.109. Пусть ξ — случайная величина с конечным абсолютным моментом порядка $\alpha > 0$: $\mathbf{E}|\xi|^\alpha < \infty$. Доказать, что для любого вещественного a

$$\mathbf{E}|\xi - a|^\alpha < \infty.$$

3.110. Доказать, что

$$\mathbf{D}\xi = \min_a \mathbf{E}(\xi - a)^2.$$

3.111. Пусть ξ — случайная величина с конечным абсолютным моментом порядка $2n$: $\mathbf{E}\xi^{2n} < \infty$. Доказать, что число a удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}(\xi - a)^{2n-1} = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}(\xi - a)^{2n} < \mathbf{E}(\xi - b)^{2n}$$

для любого вещественного b.

3.112. Пусть ξ и η — случайные величины с плотностями распределения $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, причем существует такое a, что $f(x) \leqslant g(x)$ при $x > a$ и $f(x) \geqslant g(x)$ при $x < a$. Доказать, что $\mathbf{E}\xi \leqslant \mathbf{E}\eta$, если указанные математические ожидания существуют, а если дополнительно $f(x) = g(x) = 0$ при $x < 0$, то $\mathbf{E}\xi^\alpha \leqslant \mathbf{E}\eta^\alpha$ для любого $\alpha > 0$.

3.113. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, a_1 и a_2 — соответствующие математические ожидания (предполагается, что они существуют). Доказать, что если $F_1(x) \geqslant F_2(x)$ для любого x, то $a_1 \leqslant a_2$.

3.114. Пусть ξ_1 и ξ_2 - случайные величины с симметричными относительно нуля плотностями распределения $p_1(x)$ и $p_2(x)$ и конечными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно, причем $p_1(x) = p_2(x) = 0$ при $|x| > a$ $(a > 0)$. Пусть $p_1(x)$ выпукла вниз, а $p_2(x)$ выпукла вверх на отрезке $[-a, a]$. Что больше: σ_1^2 или σ_2^2?

3.115. Можно ли в предыдущей задаче сказать, что больше: σ_1^2 или σ_2^2, если отказаться от предположения симметричности распределений случайных величин ξ_1 и ξ_2?

3.116. Доказать неравенство Коши — Буняковского — Шварца.

3.117 (*неравенство Гёльдера*). Доказать, что если $r > 1$ и $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, то

$$\mathbf{E}|\xi\eta| \leqslant (\mathbf{E}|\xi|^r)^{1/r} (\mathbf{E}|\eta|^s)^{1/s}.$$

3.118. Доказать, что $(\mathbf{E}|\xi|^r)^{1/r}$ — неубывающая функция от r.

3.119. Доказать, что для любых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с конечными моментами порядка $\alpha \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}|\xi_1 + \ldots + \xi_n|^\alpha \leqslant n^{\alpha-1} (\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha + \ldots + \mathbf{E}|\xi_n|^\alpha).$$

3.120. Доказать, что для любых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, имеющих конечные моменты порядка $\alpha \leqslant 1$, справедливо неравенство

$$\mathbf{E}|\xi_1 + \ldots + \xi_n|^\alpha \leqslant \mathbf{E}|\xi_1|^\alpha + \ldots + \mathbf{E}|\xi_n|^\alpha.$$

3.121 (*неравенство Минковского*). Доказать, что при $r \geqslant 1$

$$(\mathbf{E}|\xi + \eta|^r)^{1/r} \leqslant (\mathbf{E}|\xi|^r)^{1/r} + (\mathbf{E}|\eta|^r)^{1/r}.$$

3.122. Доказать, что $\log \mathbf{E}|\xi|^r$ — выпуклая функция от r $(r \geqslant 0)$.

3.123. Доказать, что $\log \mathbf{E}|\xi|^r$ как функция от r $(r \geqslant 0)$ линейна тогда и только тогда, когда ξ имеет вырожденное распределение.

3.124. Пусть ξ — случайная величина. Положим $\beta_k = \mathbf{E}|\xi|^k$. Доказать, что если $0 \leqslant l \leqslant m \leqslant n$, то $\beta_m^{n-l} \leqslant \beta_l^{n-m} \beta_n^{m-l}$.

3.125. Пусть ξ — случайная величина. Доказать, что при $0 < r \leqslant 1$ для любого вещественного a

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}|\xi - m\xi|^r \leqslant \mathbf{E}|\xi^{(s)}|^r \leqslant 2\mathbf{E}|\xi - a|^r.$$

3.126. Пусть ξ — случайная величина. Доказать, что при $1 < r < 2$ для любого вещественного a

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}|\xi - m\xi|^r \leqslant \mathbf{E}|\xi^{(s)}|^r \leqslant 2^r\mathbf{E}|\xi - a|^r.$$

3.127. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем η имеет симметричное распределение. Доказать, что для любого $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$

$$\mathbf{E}|\xi + \eta|^\alpha \leqslant \mathbf{E}|\xi|^\alpha + \mathbf{E}|\eta|^\alpha.$$

3.128. Доказать, что если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют симметричные распределения, то для любого $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$

$$\mathbf{E}|\xi_1 + \ldots + \xi_n|^\alpha \leqslant \mathbf{E}|\xi_1|^\alpha + \ldots + \mathbf{E}|\xi_n|^\alpha.$$

3.129. Доказать, что если случайные величины ξ и η независимы и $\mathbf{E}\eta = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^\alpha < \infty$, $\mathbf{E}|\eta|^\alpha < \infty$, $\alpha \geqslant 1$, то

$$\mathbf{E}|\xi + \eta|^\alpha \geqslant \mathbf{E}|\xi|^\alpha.$$

3.130. Доказать, что если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $\mathbf{E}|\xi_i|^\alpha < \infty$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, то

$$\mathbf{E}|\xi_1 + \ldots + \xi_n|^\alpha \leqslant 2^\alpha(\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha + \ldots + \mathbf{E}|\xi_n|^\alpha).$$

3.131. Случайная величина ξ имеет решетчатое распределение с шагом h. Положим

$$\nu_k = \mathbf{E}|\xi - \mathbf{E}\xi|^k$$

(k — целое положительное число). Доказать, что

$$\nu_{k-1} \leqslant \frac{2}{h}\nu_k.$$

3.132. Пусть ξ — положительная невырожденная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\frac{1}{\mathbf{E}\xi} \leqslant \mathbf{E}\frac{1}{\xi}$$

3.133. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, принимающие положительные значения. Доказать, что для любого $r \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^r \geqslant \frac{\mathbf{E}\xi^r}{\mathbf{E}\eta^r}$$

§ 3. Корреляция

3.134. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений «единиц» и числом выпадений «шестерок» при n независимых бросаниях правильной игральной кости.

3.135. Пусть неотрицательные целочисленные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ таковы, что $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_s = n$ и для любых

$m_1, \ldots, m_s,\ m_i \geqslant 0,\ m_1 + \ldots + m_s = n,$

$$\mathbf{P}(\xi_1 = m_1, \ldots, \xi_s = m_s) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_s!} p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s},$$

где $p_i \geqslant 0$, $p_1 + \ldots + p_s = 1$. Найти коэффициент корреляции между ξ_i и ξ_j, $i, j = 1, 2, \ldots, s$.

3.136. Доказать, что коэффициент корреляции любых двух случайных величин, имеющих конечные ненулевые дисперсии, заключен между -1 и $+1$; равен нулю, если величины независимы; равен -1 или $+1$ тогда и только тогда, когда случайные величины линейно связаны.

3.137. Построить пример, показывающий, что из равенства нулю коэффициента корреляции двух случайных величин не следует их независимость.

3.138. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ случайные величины с конечными ненулевыми дисперсиями. Доказать, что $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n$ тогда и только тогда, когда ξ_i и ξ_j, ..., попарно не коррелированы.

3.139. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+m}$ $(n \geqslant m)$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами $\eta_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и $\eta_2 = \xi_{m+1} + \ldots + \xi_{m+n}$.

3.140. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Найти коэффициент корреляции случайных величин $\xi_1 = \alpha\xi + \beta\eta$ и $\xi_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.

3.141. Пусть совместное распределение случайных величин ξ и η нормально, причем $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = 0$, а коэффициент корреляции ξ и η равен ρ. Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ^2 и η^2.

3.142. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, причем коэффициент корреляции любых двух из них равен ρ. Доказать, что $\rho \geqslant -1/(n-1)$.

3.143. Случайные величины ξ и η независимы,

$$\mathbf{P}(\xi = 1) = \mathbf{P}(\xi = -1) = 1/2, \quad \mathbf{P}(\eta = 1) = \mathbf{P}(\eta = -1) = 1/4, \quad \mathbf{P}(\eta = 0) = 1/2.$$

Будут ли случайные величины $\xi\eta$ и η независимыми?

3.144 (*продолжение*). Будут ли в условиях предыдущей задачи случайные величины $\xi\eta$ и η некоррелированными?

3.145. Пусть ξ — случайная величина с конечной дисперсией. Доказать, что коэффициент корреляции случайных величин ξ и $\operatorname{sign}\xi$ неотрицателен.

3.146. Пусть ξ — случайная величина с симметричным распределением и конечной дисперсией. Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ и $|\xi|$.

3.147. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, σ_{ij} — ковариация между ξ_i и ξ_j $(i, j = 1, \ldots, n)$. Доказать, что ковариационная матрица

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \dots \sigma_{1n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \sigma_{n1} \dots \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена.

3.148. Пусть ξ — случайная величина.

$$\mathbf{P}(\xi > 0) = \alpha, \quad \mathbf{P}(\xi < 0) = \beta, \quad \mathbf{E}\xi = a, \quad \mathbf{E}|\xi| = b.$$

Найти $\operatorname{cov}(\xi, \operatorname{sign}\xi)$.

3.149. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, одинаково распределены и имеют конечные дисперсии. Доказать, что случайные величины $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$ некоррелированы. Можно ли утверждать, что они независимы?

3.150. Пусть ξ и η — случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентом корреляции ρ. Доказать, что

$$\mathbf{E}\max\{\xi^2, \eta^2\} \leqslant 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

3.151. Пусть ξ, η и ζ — попарно некоррелированные случайные величины. Можно ли утверждать, что некоррелированными будут случайные величины:

а) ξ и $\eta + \zeta$; б) ξ и $\eta\zeta$?

3.152. Пусть ξ, η и ζ — независимые случайные величины с конечными положительными дисперсиями. Могут ли быть независимыми случайные величины $\xi + \zeta$ и $\eta + \zeta$?

3.153. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным третьим моментом, причем $\mathbf{E}(\xi_i - \mathbf{E}\xi_i)^3 = 0$. Найти коэффициент корреляции случайных величин

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \text{ и } s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2.$$

§ 4. Некоторые важные распределения

3.154. Доказать, что если каждая из независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 имеет геометрическое распределение, то случайная величина $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ также имеет геометрическое распределение. Найти параметр этого распределения, если параметры распределений ξ_1 и ξ_2 равны соответственно p_1 и p_2.

3.155. Случайная величина ξ принимает целые неотрицательные значения. Доказать, что следующие утверждения равносильны:

а) ξ имеет геометрическое распределение;

б) $\mathbf{P}(\xi = n + k \mid \xi \geqslant k) = \mathbf{P}(\xi = n)$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$

3.156. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение. Доказать, что

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{1}{n+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

3.157. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p. Найти распределение случайной величины

$$\eta = \frac{\xi}{2}\left(1-(-1)^{\xi}\right).$$

3.158. Сумма двух независимых целочисленных неотрицательных случайных величин имеет биномиальное распределение. Доказать, что каждое слагаемое имеет биномиальное распределение.

3.159. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1-p$, а ν — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Доказать, что случайные величины $\xi_1+\ldots$ $\ldots+\xi_\nu$ и $\nu-(\xi_1+\ldots+\xi_\nu)$ независимы тогда и только тогда, когда ν имеет пуассоновское распределение.

3.160. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют пуассоновское распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, причем $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Доказать, что для любого $t \geqslant 0$

$$\mathsf{P}(\xi_1 \leqslant t) \geqslant \mathsf{P}(\xi_2 \leqslant t).$$

3.161. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти

$$\mathsf{P}(\xi_1 = k \mid \xi_1+\xi_2 = n), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

3.162. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 нормально распределены с параметрами $(0, \sigma_1^2)$ и $(0, \sigma_2^2)$ соответственно. Доказать, что если $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$, то

$$\mathsf{P}(|\xi_1| \leqslant t) \leqslant \mathsf{P}(|\xi_2| \leqslant t)$$

для любого $t \geqslant 0$.

3.163. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение. Доказать, что случайные величины $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы.

3.164. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Найти распределение случайной величины $\operatorname{sign}\xi$.

3.165. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Найти распределение случайной величины $\xi^2+\eta^2$.

3.166 (*продолжение*). В тех же условиях найти распределение случайной величины $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

3.167. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Найти распределение случайной величины $\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}$.

3.168 (*продолжение*). В тех же условиях найти распределение случайной величины $\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$ (распределение этой случайной величины называется *хи — квадрат распределением с n степенями свободы*).

3.169. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — нормальные функции распределения с математическими ожиданиями a и b и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Подобрать распределение R так, чтобы выполнялось равенство $P * R = Q$. Какие условия на параметры распределений P и Q нужно наложить, чтобы такое распределение существовало?

3.170. Пусть P — равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, Q — распределение, приписывающее точкам $-\pi$ и $-\pi+1/2$ вероятности $1/2$ каждой. Найти распределение R, удовлетворяющее соотношению $R * Q = P$.

3.171. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение. Найти плотность распределения случайной величины

$$\eta_n = \prod_{k=0}^{n} \xi_k.$$

3.172. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение. Найти распределение случайной величины

$$\eta = \min\left\{n\colon \prod_{k=0}^{n} \xi_k < e^{-\lambda}\right\}.$$

3.173. Пусть ξ — случайная величина, имеющая равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение. Найти распределение случайной величины

$$-\frac{1}{\lambda}\log\xi, \quad \lambda > 0.$$

3.174. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1. Найти распределение случайной величины $e^{-\xi}$.

3.175. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковое показательное с параметром λ распределение. Доказать, что случайные величины

$$\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \text{ и } \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \frac{\xi_3}{3} + \ldots + \frac{\xi_n}{n}$$

одинаково распределены.

3.176. Пусть $F(x)$ — функция распределения, $F(0) = 0$ и $F(x) < 1$ при некотором $x > 0$. Доказать, что $F(x)$ является показательной функцией распределения тогда и только тогда, когда

$$F(x+y) - F(y) = F(x)(1 - F(y))$$

при всех $x, y \geqslant 0$.

3.177. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Найти распределение случайной величины ξ_1/ξ_2.

3.178. Пусть ξ — случайная величина, имеющая распределение Коши с плотностью

$$\frac{b}{\pi\left((x-a)^2+b^2\right)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти плотность распределения случайной величины $1/\xi$.

3.179. Случайная величина ξ имеет равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение. Найти плотность распределения случайной величины

$$\eta = \ln\frac{\xi}{1-\xi}.$$

3.180. Случайная величина ξ имеет *логистическое распределение* с плотностью

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти математическое ожидание и медиану ξ.

3.181. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти распределение случайной величины

$$\left(\frac{1}{\xi}\right)^\alpha \quad \alpha > 0.$$

§ 5. Распределения сумм независимых случайных величин

3.182. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем ξ имеет показательное с параметром λ распределение, а η равномерно распределена на отрезке $[0, h]$. Найти плотности распределения случайных величин $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ соответственно.

3.183. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, а η принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_{-1}, p_1, \ldots$ соответственно; $p_0+p_{-1}+p_1+\ldots=1$. Найти плотность распределения суммы $\xi+\eta$.

3.184. Найти плотность распределения суммы $\xi+\eta$ независимых случайных величин ξ и η, если ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, а η — равномерное распределение на отрезке $[c, d]$ $(a<b,\ \ c<d,\ \ b-a\leqslant d-c)$.

3.185. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Найти плотность распределения суммы $\xi+\eta$.

3.186. Найти вероятность того, что функция $x^2-2ax+b$ имеет комплексные корни, если коэффициенты a и b являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими:

а) равномерное распределение на отрезке $[0, h]$, б) показательное распределение с параметром α.

3.187. Пусть ξ и η — независимые случайные величины такие, что сумма $\xi+\eta$ имеет вырожденное распределение. Доказать, что каждая из случайных величин ξ и η имеет вырожденное распределение. Можно ли это утверждать, если ξ и η зависимы?

3.188. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем случайные величины $\xi+\eta$ и ξ одинаково распределены. Найти распределение случайной величины η.

3.189. Сколько нужно произвести бросаний правильной игральной кости, чтобы с вероятностью 1/2 сумма выпавших очков превысила 780?

3.190. Доказать, что в классе распределений операция свертки коммутативна и ассоциативна.

3.191. Доказать, что свертка двух дискретных распределений дискретна.

3.192. Доказать, что свертка непрерывной функции распределения с любой функцией распределения непрерывна.

3.193. Доказать, что свертка абсолютно непрерывного распределения с любым распределением абсолютно непрерывна.

3.194. Доказать, что свертка n раз дифференцируемой функции распределения с любой функцией распределения n раз дифференцируема.

3.195. Доказать, что свертка двух симметричных распределений симметрична.

3.196. Показать, что свертка двух одновершинных распределений не обязана быть одновершинным распределением.

3.197. Доказать, что свертка двух симметричных одновершинных распределений одновершинна.

3.198. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, из которых по крайней мере одна имеет непрерывное распределение. Доказать, что $\mathbf{P}(\xi=\eta)=0$.

3.199. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины с симметричными распределениями и пусть для некоторого $M>0$

$$\mathbf{P}(|\xi_1+\xi_2+\xi_3|\leqslant M)=1.$$

Доказать, что

$$\mathbf{P}(|\xi_1|+|\xi_2|+|\xi_3|\leqslant M)=1.$$

3.200. Для каждой случайной величины ξ положим

$$s(\xi)=\inf\{x\colon\ x\geqslant 0,\quad \mathbf{P}(|\xi|\leqslant x)=1\}.$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с симметричными распределениями. Доказать, что:

а) $s(\xi_1+\ldots+\xi_n)=s(\xi_1)+\ldots+s(\xi_n)$,

б) $s(\xi_1+\ldots+\xi_n)=s(|\xi_1|+\ldots+|\xi_n|)$.

3.201. В обозначениях предыдущей задачи доказать, что равенства а) и б) справедливы, если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (не обязательно симметричные).

3.202. Пусть ξ — случайная величина с равномерным на отрезке $[0, 1]$ распределением, а случайная величина η не зависит от ξ и принимает значения $1, 2, 3, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$ соответственно, причем $p_1 + p_2 + \ldots = 1$, $p_i \geqslant p_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ Доказать, что случайная величина $\xi + \eta$ имеет одновершинное распределение.

3.203. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина. Положим

$$\xi^{(x)} = \begin{cases} \xi & \text{при } \xi > x, \\ 0 & \text{при } \xi \leqslant x, \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Доказать, что если ξ и η — неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, то

$$\mathsf{E}\,(\xi + \eta)^{(x)} \leqslant 2\left(\mathsf{E}\xi^{\left(\frac{x}{2}\right)} + \mathsf{E}\eta^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right).$$

3.204. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что если для некоторого $c > 0$ $\mathsf{P}(0 < \eta < c) = 1$, то

$$\mathsf{P}(0 < \xi_i < c/n) = 1.$$

3.205. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\mathsf{P}(\xi_i = 0) < 1$. Положим $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что для любого $c > 0$ существует $n = n(c)$ такое, что

$$\mathsf{P}(|\eta_n| > c) > 0.$$

3.206. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что для любого $c > 0$ найдется $\alpha = \alpha(c) > 0$ такое, что

$$\mathsf{P}(\eta_n \leqslant c) \leqslant e^{-\alpha n}.$$

3.207. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{P}(\xi > 0) = \mathsf{P}(\eta > 0) \geqslant 1/2$. Верно ли, что $\mathsf{P}(\xi + \eta > 0) \geqslant 1/2$?

3.208. Пусть ξ — целочисленная неотрицательная случайная величина, $\mathsf{P}(\xi = 0) > 0$ и пусть $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины. Доказать, что ξ_i могут принимать только целые значения.

3.209. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с решетчатым распределением с шагами a и b. Доказать, что сумма $\xi + \eta$ имеет решетчатое распределение тогда и только тогда, когда a/b — рациональное число.

3.210. Пусть $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ — функции распределения, причем $F = F_1 * F_2$, и пусть N, n, m — число точек разрыва функций $F(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Доказать, что $n + m - 1 \leqslant N \leqslant nm$.

3.211. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с плотностями распределения $p(x)$ и $q(x)$ соответственно. Доказать, что плотность распределения суммы $\xi + \eta$ равна

$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-t)\, q(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, q(x-t)\, dt.$$

3.212. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем ξ имеет плотность распределения, нигде не обращающуюся в нуль. Доказать, что плотность распределения суммы $\xi + \eta$ также нигде не обращается в нуль.

3.213. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины, $p_i = \mathbf{P}(\xi = i)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Доказать, что

$$\mathbf{P}(\xi - \eta = 0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i^2.$$

3.214. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения $p(x)$. Обозначим $q(x)$ плотность распределения случайной величины $\xi - \eta$. Доказать, что

$$q(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(x)\, dx.$$

3.215. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — две совокупности независимых в каждой совокупности случайных величин. Доказать, что если для любого вещественного a и любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{P}(\xi_k \geqslant a) \geqslant \mathbf{P}(\eta_k \geqslant a),$$

то

$$\mathbf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant a) \geqslant \mathbf{P}(\eta_1 + \ldots + \eta_n \geqslant a).$$

3.216. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Доказать, что функция концентрации их суммы не превосходит функций концентрации слагаемых:

$$Q_{\xi+\eta}(x) \leqslant \min\{Q_\xi(x),\ Q_\eta(x)\}$$

(определение функции концентрации см. в задаче 3.54).

3.217. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины. Доказать, что для любых неотрицательных x_1 и x_2

$$Q_{\xi_1}(x_1)\, Q_{\xi_2}(x_2) \leqslant Q_{\xi_1+\xi_2}(x_1 + x_2).$$

3.218 (*теорема И. В. Романовского*). Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Доказать, что для любого $x \geqslant 0$

$$Q_{\xi}(x) \leqslant Q_{\xi_1}(x) Q_{\xi_2}(x) + (1 - Q_{\xi_1}(x))(1 - Q_{\xi_2}(x)).$$

3.219. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, $\xi = \xi_1 + \xi_2$; пусть для некоторого борелевского множества A

$$\mathsf{P}(\xi \in A) > 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Доказать, что для некоторого вещественного a

$$\mathsf{P}(\xi_1 \in A + a) > 1 - \varepsilon.$$

3.220. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем ξ имеет плотность распределения $p(x)$. Обозначим $q(x)$ плотность распределения суммы $\xi + \eta$. Доказать, что

$$\sup_x q(x) \leqslant \sup_x p(x).$$

3.221. Привести пример случайной величины ξ такой, что ее функция распределения $F(x)$ представима в виде $F = F_1 * F_2$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — некоторые невырожденные функции распределения, но не существует двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 таких, что ξ_i имеет функцию распределения $F_i(x)$, $i = 1, 2$, и $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

3.222. Пусть ξ — случайная величина, $\mathsf{P}(0 < \xi < c) = 1$, $c > 0$, $\mathsf{E}\xi = a$, $\mathsf{D}\xi = b$. Доказать, что если $b > a$, то при $n \geqslant c$ ξ не может быть представлена как сумма n независимых одинаково распределенных случайных величин.

3.223. Пусть ξ — случайная величина, принимающая значения $0^n, 1^n, 2^n, \ldots$ $(n \geqslant 2)$ с положительными вероятностями и

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = i^n) = 1.$$

Доказать, что ξ не может быть представлена как сумма двух независимых случайных величин, каждая из которых имеет невырожденное распределение.

3.224. Пусть случайная величина ξ принимает ровно два значения. Доказать, что она не может быть представлена в виде суммы двух независимых случайных величин, каждая из которых имеет невырожденное распределение.

3.225. Случайная величина ξ принимает значения -1, 0 и 1 с вероятностями p_1, p_2 и p_3 соответственно $(p_1 p_2 p_3 > 0,\ p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Какие условия нужно наложить на p_1, p_2 и p_3, чтобы распределение ξ было представимо в виде свертки двух одинаковых распределений?

3.226. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем функция распределения ξ строго возрастает. Доказать, что функция распределения суммы $\xi + \eta$ также строго возрастает.

3.227. Пусть ξ и η — независимые целочисленные случайные величины. Доказать, что

$$\mathbf{P}(\xi+\eta\sqrt{2}=0)=\mathbf{P}(\xi=0)\mathbf{P}(\eta=0).$$

3.228. Вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$ называются *рационально независимыми*, если ни одно из них не представимо в виде линейной комбинации остальных с рациональными коэффициентами.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — рационально независимые числа, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, принимающие целые значения. Доказать, что для любых вещественных $b_1, \ldots, b_n$

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i=0\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i=0\right).$$

3.229. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые целочисленные случайные величины, $a_1, \ldots, a_n$ — рационально независимые числа. Доказать, что

$$\sup_x \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\xi_i=x\right)=\prod_{i=1}^{n}\sup_{x_i}\mathbf{P}(\xi_i=x_i).$$

3.230. Пусть ξ — целочисленная случайная величина. Положим

$$V(\xi)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}|\mathbf{P}(\xi=i)-\mathbf{P}(\xi=i+1)|.$$

а) Доказать, что $V(\xi)\leqslant 2$, б) пусть ξ и η — независимые случайные величины. Доказать, что

$$V(\xi+\eta)\leqslant \min\{V(\xi),\ V(\eta)\}.$$

§ 6. Неравенства

3.231. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\xi\geqslant n)\leqslant \mathbf{E}\xi\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\xi\geqslant n).$$

3.232. Пусть ξ — случайная величина с конечной дисперсией. Доказать, что

$$|m\xi-\mathbf{E}\xi|\leqslant\sqrt{2\mathbf{D}\xi}$$

($m\xi$ — медиана ξ).

3.233. Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что для любого $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}(\xi\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathbf{E}\max\{0,\ \xi\}/\varepsilon.$$

3.234. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина, $\mathbf{E}e^{h\xi}<\infty$, $h>0$. Доказать, что для любого $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}(\xi\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathbf{E}e^{h\xi}/e^{h\varepsilon}.$$

3.235. Пусть ξ — случайная величина, $f(x)$ — неотрицательная неубывающая функция. Доказать, что для любого вещественного c

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant c) \leqslant \mathsf{E}f(\xi)/f(c).$$

3.236. Пусть ξ — случайная величина, $f(x)$ — положительная, не возрастающая при $x \geqslant 0$ функция. Доказать, что для любого $a \geqslant 0$

$$\mathsf{P}(\xi \leqslant a) \leqslant \mathsf{E}f(\xi)/f(a).$$

3.237. Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием и конечной дисперсией. Доказать, что для любого $x > 0$

$$\mathsf{P}(\xi \leqslant -x) \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\mathsf{D}\xi + x^2}, \quad \mathsf{P}(\xi \geqslant x) \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\mathsf{D}\xi + x^2}.$$

3.238 (*неравенство Гаусса*). Случайная величина ξ имеет симметричное одновершинное распределение. Доказать, что для любого $\varepsilon \geqslant 0$

$$\mathsf{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{4}{9}\frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

3.239. Пусть ξ — случайная величина, имеющая одновершинное распределение с вершиной в точке x_0 и конечную дисперсию. Положим

$$\tau^2 = \mathsf{D}\xi + (x_0 - \mathsf{E}\xi)^2.$$

Доказать, что для любого $\varepsilon \geqslant 0$

$$\mathsf{P}(|\xi - x_0| \geqslant \varepsilon\tau) \leqslant \frac{4}{9\tau^2}.$$

3.240. Пусть выполнены условия предыдущей задачи. Положим

$$s = \frac{\mathsf{E}\xi - x_0}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}}.$$

Доказать, что для любого $\varepsilon > |s|$ справедливо неравенство

$$\mathsf{P}\left(|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\sqrt{\mathsf{D}\xi}\right) \leqslant \frac{4(1+s^2)}{9(\varepsilon - |s|)^2}.$$

3.241. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины. Доказать, что:

а) $\frac{1}{2}\mathsf{P}(\xi_1 - m\xi_1 \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathsf{P}(\xi_1 - \xi_2 \geqslant \varepsilon)$,

б) $\frac{1}{2}\mathsf{P}(|\xi_1 - m\xi_1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathsf{P}(|\xi_1 - \xi_2| \geqslant \varepsilon)$.

3.242. Доказать, что для любого вещественного a

$$\mathsf{P}(|\xi_1 - \xi_2| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathsf{P}(|\xi_1 - a| \geqslant \varepsilon/2).$$

3.243. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем η имеет нулевую медиану. Доказать, что для любого a:

а) $\mathbf{P}(\xi+\eta \geqslant a) \geqslant \frac{1}{2} \mathbf{P}(\xi \geqslant a)$, б) $\mathbf{P}(|\xi+\eta| \geqslant a) \geqslant \frac{1}{2} \mathbf{P}(|\xi| \geqslant a)$.

3.244. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины. Доказать, что для любых неотрицательных x_1 и x_2

$$\mathbf{P}(|\xi_1| \leqslant x_1)\mathbf{P}(|\xi_2| \leqslant x_2) \leqslant \mathbf{P}(|\xi_1+\xi_2| \leqslant x_1+x_2).$$

3.245. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины с конечными математическими ожиданиями, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\eta_k| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_k|}{\varepsilon}.$$

3.246. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и конечными абсолютными моментами порядка $k \geqslant 1$, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\eta_j| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\eta_n^k}{\varepsilon^k}$$

(при $k = 2$ — неравенство Колмогорова).

3.247. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с симметричными распределениями, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что для любого вещественного a

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \eta_k \geqslant a\right) \leqslant 2\mathbf{P}(\eta_n \geqslant a).$$

3.248 (*неравенства Леви*). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$:

а) $\mathbf{P}\left(\max_{k \leqslant n} (\eta_k - m(\eta_k - \eta_n)) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathbf{P}(\eta_n \geqslant \varepsilon)$;

б) $\mathbf{P}\left(\max_{k \leqslant n} |\eta_k - m(\eta_k - \eta_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathbf{P}(|\eta_n| \geqslant \varepsilon)$

($m(\cdot)$ — медиана).

3.249. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что для любого $\varepsilon \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \eta_k \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathbf{P}\left(\eta_n \geqslant \varepsilon - \sqrt{2\mathbf{D}\eta_n}\right).$$

3.250. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с симметричными распределениями и конечными абсолютными моментами порядка $r \geqslant 1$, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Доказать, что

$$\mathbf{E}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\eta_k|^r\right) \leqslant 2\mathbf{E}|\eta_n|^r.$$

3.251. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и конечными абсолютными моментами порядка $r \geqslant 1$, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что

$$\mathbf{E}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\eta_k|^r\right) \leqslant 2^{2r+1}\mathbf{E}|\eta_n|^r.$$

3.252. Функция $\varphi(x)$ четна, неотрицательна и не возрастает при $x \geqslant 0$, ξ и η — случайные величины. Доказать, что если при любом $a \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(|\xi| \leqslant a) \geqslant \mathbf{P}(|\eta| \leqslant a),$$

то

$$\mathbf{E}\varphi(\xi) \geqslant \mathbf{E}\varphi(\eta)$$

и наоборот.

§ 7. Расстояния в пространстве вероятностных распределений

3.253. Доказать неравенство треугольника для расстояния по вариации, то есть доказать, что для любых трех вероятностных распределений $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{P}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Var}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \leqslant \mathrm{Var}(\mathbf{F}, \mathbf{P}) + \mathrm{Var}(\mathbf{P}, \mathbf{G}).$$

Доказать неравенство треугольника для равномерного расстояния $\sup\limits_x |F(x) - G(x)|$.

3.254. Пусть $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — абсолютно непрерывные вероятностные распределения, $p(x)$ и $q(x)$ — соответствующие плотности распределения. Доказать, что

$$\mathrm{Var}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |p(x) - q(x)|\,dx.$$

3.255. Пусть ξ и η — случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Доказать, что

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant \mathbf{P}(\xi \neq \eta).$$

3.256. Найти равномерное расстояние между двумя нормальными распределениями с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

3.257. Равномерное расстояние между распределениями случайных величин ξ и η равно ρ. Найти равномерное расстояние между распределениями случайных величин $c\xi$ и $c\eta$ $(c \neq 0)$.

3.258. Найти равномерное расстояние между двумя равномерными распределениями с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

3.259. Указать распределение, равноудаленное в равномерной метрике от двух нормальных распределений с математическими ожиданиями a_1 и a_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно.

3.260. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — произвольные функции распределения. Указать функцию распределения $F(x)$, равноудаленную в равномерной метрике от функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

3.261. Найти равномерное на отрезке распределение, равноудаленное в равномерной метрике от двух равномерных распределений на отрезках $[-a, a]$ и $[-b, b]$ соответственно.

3.262. Доказать неравенство треугольника для расстояния Леви.

3.263. Найти расстояние Леви между двумя равномерными распределениями с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 $(\sigma_1 \leqslant \sigma_2)$.

3.264. Пусть ξ и η — случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Доказать, что если

$$\mathbf{P}(|\xi - \eta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon$$

для некоторого положительного $\varepsilon > 0$, то

$$L(F, G) \leqslant \varepsilon.$$

3.265. Пусть ξ и η — случайные величины с вероятностными распределениями $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ соответственно. Доказать, что

$$\mathrm{Var}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \leqslant \mathbf{P}(\xi \neq \eta).$$

3.266. Доказать, что для любых функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ справедливы неравенства

$$L(F, G) \leqslant \sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant (1 + \beta) L(F, G),$$

где $\beta = \sup\limits_x G'(x)$, если $G(x)$ дифференцируема, и $\beta = \infty$ в противном случае.

3.267. Доказать, что для любых двух функций распределения $F(x)$ и $G(x)$

$$L^2(F, G) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\, dx.$$

3.268. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две функции распределения с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Доказать, что

$$L(F_1, F_2) \leqslant 2(2 \max\{\sigma_1, \sigma_2\})^{2/3}.$$

3.269. Пусть $F(x)$ — функция распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения. Доказать, что

$$\sup_x |F(x) - \Phi(x)| \leqslant 0{,}5416.$$

3.270. Доказать, что для любых трех функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $G(x)$ справедливо неравенство

$$\sup_x |F_1 * G(x) - F_2 * G(x)| \leqslant \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|.$$

3.271. Доказать, что для любых трех вероятностных распределений $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{G}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Var}(\mathbf{F}_1 * \mathbf{G},\ \mathbf{F}_2 * \mathbf{G}) \leqslant \mathrm{Var}(\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2).$$

3.272. Доказать, что для любых трех функций распределения F_1, F_2 и G справедливо неравенство

$$L(F_1 * G,\ F_2 * G) \leqslant L(F_1,\ F_2).$$

3.273. Пусть $F_1(x), \ldots, F_n(x)$, $G_1(x), \ldots, G_n(x)$ — произвольные функции распределения. Доказать, что

$$\sup_x |F_1 * \ldots * F_n(x) - G_1 * \ldots * G_n(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_x |F_i(x) - G_i(x)|\right).$$

3.274. Доказать, что для любых вероятностных распределений $\mathbf{F}_1(x), \ldots, \mathbf{F}_n(x)$, $\mathbf{G}_1(x), \ldots, \mathbf{G}_n(x)$

$$\mathrm{Var}(\mathbf{F}_1 * \ldots * \mathbf{F}_n,\ \mathbf{G}_1 * \ldots * \mathbf{G}_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i).$$

3.275. Доказать, что для любых функций распределения $F_1(x), \ldots, F_n(x)$, $G_1(x), \ldots, G_n(x)$

$$L(F_1 * \ldots * F_n, G_1 * \ldots * G_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} L(F_i, G_i)$$

3.276. Пусть ξ и η — случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно, ζ — случайная величина, не зависящая от ξ и η и имеющая функцию распределения $H(x)$. Доказать, что

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant \sup_x |F * H(x) - G * H(x)| + \mathbf{P}(\zeta \neq 0).$$

3.277. Доказать, что в условиях предыдущей задачи

$$\mathrm{Var}(\mathbf{F},\ \mathbf{G}) \leqslant \mathrm{Var}(\mathbf{F} * \mathbf{H},\ \mathbf{G} * \mathbf{H}) + \mathbf{P}(\zeta \neq 0).$$

§ 8. Многомерные распределения

3.278. Каким условиям должны удовлетворять числа a, b и c для того, чтобы при подходящем выборе нормирующего множителя A функция

$$A \exp\{-(ax^2 + 2bx + cy^2)\}$$

являлась плотностью распределения вероятностей на плоскости?

3.279. Пусть ξ — случайный вектор, принимающий значения в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что

$$\|E\xi\| \leqslant E\|\xi\|.$$

3.280. Показать, что функция

$$G(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x+y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x+y < 0 \end{cases}$$

является непрерывной справа, возрастающей по каждой переменной, но не является функцией распределения в $\mathbb{R}^2$. Показать то же самое для функции $G(x, y) = [x+y]$ (целой части $x+y$).

3.281. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4 независимы. Доказать, что случайные векторы $\eta = (\xi_1, \xi_2)$ и $\zeta = (\xi_3, \xi_4)$ независимы. Верно ли обратное?

3.282. Привести пример разрывной двумерной плотности распределения вероятностей, у которой обе маргинальные плотности непрерывны.

3.283. Найти и сравнить маргинальные распределения равномерного распределения в единичном квадрате с равномерным распределением на его диагонали.

3.284. Случайный вектор (ξ, η) равномерно распределен в квадрате со стороной, равной единице, и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти коэффициент корреляции величин ξ и η.

3.285. Пусть (ξ, η) — случайный вектор, распределение которого сосредоточено на некоторой прямой. Найти коэффициент корреляции величин ξ и η.

3.286. Каждая из случайных величин ξ, η, ζ имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию, причем выполнено соотношение

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0$$

(a, b и c — вещественные числа, $abc \neq 0$). Найти ковариационную матрицу случайного вектора (ξ, η, ζ) и доказать, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \leqslant 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

3.287. Случайные векторы ξ и η независимы и каждый из них имеет равномерное распределение в круге единичного радиуса с центром в нуле. Найти плотность распределения суммы $\xi + \eta$.

3.288. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — независимые случайные векторы, принимающие значения в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ случайные величины $\langle \xi, x \rangle$ и $\langle \eta, y \rangle$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение) независимы.

3.289. Пусть ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 — случайные векторы, принимающие значения в $\mathbb{R}^n$ причем и ξ_1, и ξ_2 не зависят от η_1 и η_2. Будут ли независимыми случайные величины $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ и $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$?

3.290. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ принимает значения $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, каждое с вероятностью $1/6$. Найти распределение случайной величины $\langle \xi, e \rangle$, где e — вектор с координатами $(1, 1)$.

3.291. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

Найти распределение случайной величины $\langle \xi, e \rangle$, где e — вектор с координатами (1/2, 1/2).

3.292. Пусть $0 < a \leqslant 1$ и

$$f(x, y) = ((1+ax)(1+ay) - a)e^{-x-y-axy}$$

при $x > 0$, $y > 0$ и $f(x, y) = 0$ при остальных x и y. Доказать, что $f(x, y)$ — двумерная плотность распределения вероятностей, и найти ее маргинальные распределения.

3.293. Коэффициент корреляции случайных величин ξ и η равен единице. Может ли случайный вектор (ξ, η) иметь плотность распределения?

3.294. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения $F_2(x, y)$ случайного вектора (ξ, ξ).

3.295. Случайная величина ξ имеет плотность распределения. Будет ли иметь плотность распределения случайный вектор $(\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n)$?

3.296. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения $F_2(x, y)$ случайного вектора $(\xi, |\xi|)$.

3.297. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$. Положим $\xi = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и $\eta = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Найти функцию распределения случайного вектора (ξ, η).

3.298. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор, принимающий значения в $\mathbb{R}^n$, A — неслучайная матрица из m строк и n столбцов. Доказать, что

$$\mathbf{E}(A\xi) = A\ (\mathbf{E}\xi).$$

3.299. Случайный вектор ξ принимает значения в $\mathbb{R}^n$ и имеет дискретное распределение. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ найдется вектор e такой, что распределение ξ однозначно восстанавливается по распределению случайной величины $\langle \xi, e \rangle$.

3.300. Вероятностное распределение в $\mathbb{R}^n$ называется *сферически симметричным*, если оно инвариантно относительно поворотов вокруг нуля.

Пусть случайные векторы ξ и η независимы и каждый из них имеет сферически симметричное распределение. Доказать, что их сумма $\xi + \eta$ также имеет сферически симметричное распределение.

3.301. Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет сферически симметричное распределение. Доказать, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ попарно некоррелированы.

3.302. Доказать, что двумерное распределение, сосредоточенное в n точках, полностью определяется своими проекциями на $n+1$ попарно неколлинеарных векторов.

3.303. Привести пример независимых случайных векторов ξ и η, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ и таких, что при любом $a \in \mathbb{R}^n$ $\xi + a$

и $\eta+a$ имеют распределения, не являющиеся сферически симметричными, но распределение их суммы $\xi+\eta$ сферически симметрично.

3.304. Пусть $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — две нормальные двумерные плотности распределения с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями, но разными ковариационными матрицами. Положим

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)).$$

Является ли плотность распределения $\psi(x, y)$ нормальной?

3.305 (*продолжение*). Являются ли нормальными маргинальные распределения у распределения с плотностью $\psi(x, y)$?

3.306. Пусть $u(x)$ — нечетная непрерывная функция на прямой, равная нулю вне интервала $[-1, 1]$, причем $|u(x)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. Доказать, что функция

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + u(x)\,u(y)$$

есть двумерная плотность распределения, которое не является нормальным, но его маргинальные распределения нормальны.

3.307. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор, принимающий значения в $\mathbb{R}^n$ и имеющий нормальное распределение с матрицей ковариаций

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\langle \xi, e \rangle$, где e — произвольный единичный вектор в $\mathbb{R}^n$.

3.308. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Найти распределение случайного вектора

$$\eta = (\ln|\xi|, \operatorname{sign}\xi).$$

3.309. Доказать, что n-мерный случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет нормальное распределение тогда и только тогда, когда для любого набора n вещественных чисел $c_1, \ldots, c_n$ линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i$$

имеет нормальное распределение в $\mathbb{R}^1$.

3.310. Доказать, что если случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ распределен нормально с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей, то случайная точка, представляющая собой конец вектора $\xi/\|\xi\|$, равномерно распределена на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что то же самое справедливо для любого случайного вектора, имеющего сферически симметричное распределение.

3.311. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\mathbf{E}e^{it\xi_j} = f(t), \quad j = 1, 2, 3, \quad -\infty < t < \infty.$$

Найти

$$\mathbf{E}e^{i(u(\xi_2-\xi_1)+v(\xi_3-\xi_1))}, \quad -\infty < u, \ v < \infty.$$

3.312. Доказать, что для того чтобы квадратная матрица размера $n \times n$ была ковариационной матрицей некоторого n-мерного вероятностного распределения, необходимо и достаточно, чтобы она была симметрична и неотрицательно определена.

3.313. Пусть ξ и η — случайные величины с коэффициентом корреляции ρ. Доказать справедливость следующего двумерного аналога неравенства Чебышева:

$$\mathbf{P}\left(|\xi - \mathbf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\sqrt{\mathbf{D}\xi} \text{ или } |\eta - \mathbf{E}\eta| \geqslant \varepsilon\sqrt{\mathbf{D}\eta}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1 + \sqrt{1-\rho^2}\right).$$

3.314. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \xi_{11}, \ldots, \xi_{1n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn} \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 2,$$

матрица, составленная из случайных величин, имеющих одинаковое конечное математическое ожидание. Обозначим $|A|$ определитель матрицы A. Доказать, что если строки матрицы независимы, то есть случайные векторы $\xi_1 = (\xi_{11}, \ldots, \xi_{1n})$, ..., $\xi_n = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn})$ независимы, то математическое ожидание определителя равно нулю: $\mathbf{E}|A| = 0$. Верно ли обратное? Будет ли справедливо утверждение задачи в том случае, когда элементы матрицы имеют различные математические ожидания?

§ 9. Разные задачи

3.315. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{P}(\xi_i = j) = 1/N$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Найти вероятность $\mathbf{P}(\xi_1 = \ldots = \xi_n)$.

3.316. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \ldots, N$, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что

$$\mathbf{P}(\eta_n \text{ делится на } n) \geqslant 1/N^{n-1}.$$

3.317. Пусть a, b и c — независимые случайные величины, a и b имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$, а c принимает значения -1, 0, 1 с вероятностями 1/4, 1/2, 1/4 соответственно. Найти вероятность того, что (случайная) функция $f(x)$ не убывает при $x \geqslant 0$, если:

а) $f(x) = \frac{x}{2} + a\sin x$; б) $f(x) = \exp\{ax - bx^2\}$;

в) $f(x) = \cos cx$; г) $f(x) = (ab + c)x$.

3.318. Пусть ξ — случайная величина с медианой $m\xi$. Доказать, что для любого вещественного a $ma\xi = am\xi$.

3.319. Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Доказать, что если $F_1(x) \leqslant F_2(x)$ для всех x, то

$$\mathsf{E}\max\{x, \xi_1\} \geqslant \mathsf{E}\max\{x, \xi_2\}.$$

3.320. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и конечными третьими моментами. Доказать, что

$$\mathsf{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^3 = \mathsf{E}\xi_1^3 + \ldots + \mathsf{E}\xi_n^3.$$

3.321. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, $\xi = \xi_1 + \xi_2$, λ_1 и λ_2 — медианы распределений ξ_1 и ξ_2, y_1 и y_2 — соответственно *нижняя* и *верхняя квартили* распределения случайной величины ξ, то есть y_1 — число, удовлетворяющее условию

$$\mathsf{P}(\xi < y_1) \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \mathsf{P}(\xi \leqslant y_1),$$

а y_2 — число, удовлетворяющее условию

$$\mathsf{P}(\xi < y_2) \leqslant \frac{3}{4} \leqslant \mathsf{P}(\xi \leqslant y_2).$$

Доказать, что

$$y_1 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant y_2.$$

3.322. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией σ^2. Положим

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Найти математическое ожидание случайной величины

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \bar{\xi})^2.$$

3.323. Пусть ξ — случайная величина с конечной дисперсией. Доказать, что

$$\mathsf{P}\left(-3{,}2 < \frac{\xi - \mathsf{E}\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}} < 3{,}2\right) > 0{,}9.$$

3.324. Пусть ξ — случайная величина и

$$a = E\xi, \quad 0 < b = (\mathsf{E}(\xi - a)^{10})^{1/10}.$$

Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(-2<\frac{\xi-a}{b}<2\right)>0,999.$$

3.325. Пусть ξ — случайная величина с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Доказать, что вероятность того, что ξ отклонится от a больше чем на 3σ, не превосходит $1/9$.

3.326. Пусть ξ и η — случайные величины с конечными моментами второго порядка. Доказать, что

$$\mathbf{E}(\eta-a\xi-b)^2 \geqslant \mathbf{E}(\eta-a_0\xi-b_0)^2=(1-\rho^2)\cdot\mathbf{D}\eta$$

для любых вещественных a и b, где

$$a_0=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\mathbf{D}\xi},\quad b_0=\mathbf{E}\eta-a_0\mathbf{E}\xi,\quad \rho=\operatorname{cov}(\xi,\eta)$$

и $a_0=0$, если $\mathbf{D}\xi=0$.

3.327. Доказать, что последовательность моментов любой непрерывной функции распределения $F(x)$ положительно определена, то есть для любого целого положительного m и любых вещественных $x_0, x_1, \ldots, x_m$

$$\sum_{i,k=0}^{m}\alpha_{i+k}x_ix_k>0,$$

где

$$\alpha_l=\int_{-\infty}^{\infty}x^l dF(x).$$

3.328. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и пусть ν — случайная величина, равная тому k, при котором впервые сумма $\eta_k=\xi_1+\ldots$ $\ldots+\xi_k$ превосходит единицу. Найти $\mathbf{E}\nu$.

3.329. Пусть ξ — случайная величина, имеющая симметричное распределение и принимающая не менее трех значений. Доказать, что на том же вероятностном пространстве найдутся независимые невырожденные случайные величины η и ζ такие, что $\xi=\eta\cdot\zeta$.

3.330. Пусть ξ и η — случайные величины. Доказать, что если для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$

$$\mathbf{E}f(\xi)=\mathbf{E}f(\eta),$$

то ξ и η одинаково распределены.

3.331. Имеется n шаров, среди которых k белых и $n-k$ черных. Наудачу выбирается ν шаров, где ν — случайная величина, принимающая значения от 1 до n с равными вероятностями. Найти математическое ожидание числа белых шаров среди отобранных.

3.332. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких, что $\mathbf{P}(\xi_i=\xi_j)=0$

при $i \neq j$. Положим $\zeta_{ji} = 1$, если $\xi_j \leqslant \xi_i$, и $\zeta_{ji} = 0$ в остальных случаях, $i, j = 1, 2, \ldots$ Пусть

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{i} \zeta_{ji}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — независимые случайные величины. Найти распределение η_i.

3.333. Пусть ξ и η — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. *Расстоянием Ки-Фана* между ξ и η называется точная нижняя грань таких положительных ε, что $\mathbf{P}(|\xi - \eta| > \varepsilon) < \varepsilon$.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств в качестве $\mathscr{A}$ и мерой Лебега в качестве $\mathbf{P}$ заданы две случайные величины ξ и η. Найти между ними расстояние Ки-Фана, если:

а) $\xi = \xi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant \omega \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{при } 1/2 < \omega \leqslant 1, \end{cases} \quad \eta = \eta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant \omega \leqslant 1/2, \\ 1 & \text{при } 1/2 < \omega \leqslant 1, \end{cases}$

б) $\xi = \xi(\omega) = \omega, \quad \eta = \eta(\omega) = \omega/2$.

3.334. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием, а случайная величина ν не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и принимает целые положительные значения. Положим $\eta_n = \xi_1 + \ldots \ldots + \xi_n$. Доказать, что $\mathbf{E}\eta_\nu = \mathbf{E}\xi_1 \cdot \mathbf{E}\nu$.

3.335. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \ldots & \xi_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица, элементами которой являются независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями σ^2. Найти математическое ожидание и дисперсию определителя матрицы A.

3.336 (*теорема Бирнбаума*). Пусть ξ, η, ζ — случайные величины, причем ζ не зависит от ξ и η и имеет симметричное одновершинное распределение. Доказать, что если

$$\mathbf{P}(|\xi| \leqslant t) \geqslant \mathbf{P}(|\eta| \leqslant t)$$

для любого $t \geqslant 0$, то

$$\mathbf{P}(|\xi + \zeta| \leqslant t) \geqslant \mathbf{P}(|\eta + \zeta| \leqslant t).$$

3.337. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — две совокупности независимых в каждой совокупности случайных величин, имеющих симметричные одновершинные распределения. Доказать, что если

$$\mathbf{P}(|\xi_k| \leqslant t) \geqslant \mathbf{P}(|\eta_k| \leqslant t)$$

для любого $t \geqslant 0$ и всех $k = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\mathsf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right| \leqslant t\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \eta_k\right| \leqslant t\right).$$

3.338. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $F_n(x)$ — функция распределения η_n, $F(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}(\eta_1 \leqslant x_1, \ldots, \eta_n \leqslant x_n)$. Доказать, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \prod_{k=1}^{n} F_k(x_k)$$

для любых $x_1, \ldots, x_n$.

3.339. Доказать, что ни при каком целом положительном $n \geqslant 2$ ни на каком вероятностном пространстве не существует трех положительных целочисленных случайных величин ξ, η, ζ, каждая из которых приписывает всем числам 1, 2, ... положительные вероятности, таких, что ξ и η независимы и

$$\xi^n + \eta^n = \zeta^n.$$

3.340. Правомерно ли следующее рассуждение: «От дома до работы 1 км, хожу я в среднем со скоростью 5 км/час, следовательно, в среднем на дорогу у меня будет уходить 12 мин»?

Глава 4

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Характеристические функции, также как и производящие функции и преобразования Лапласа, составляют основное аналитическое орудие изучения вероятностных распределений, в первую очередь, распределений, возникающих при суммировании случайных величин.

Производящей функцией случайной величины ξ, принимающей целые неотрицательные значения, называется функция комплексной переменной

$$P(z) = \mathbf{E}z^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(\xi = k), \quad |z| \leqslant 1.$$

Если ξ и η — независимые случайные величины с производящими функциями $P(z)$ и $Q(z)$ соответственно (говоря о производящих функциях, мы всегда подразумеваем, что соответствующие случайные величины принимают целые неотрицательные значения), то производящая функция суммы $\xi + \eta$ равна $P(z)Q(z)$.

Характеристической функцией произвольной случайной величины ξ называется функция вещественной переменной

$$f(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$$

(если $F(x)$ — функция распределения ξ, то

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)).$$

Характеристическая функция любой случайной величины обладает следующими свойствами:

1) $f(0) = 1$, $|f(t)| \leqslant 1$ при всех t;

2) $f(t)$ равномерно непрерывна на всей числовой оси;

3) если a и b — постоянные, то характеристическая функция случайной величины $a\xi + b$ равна $f(at)e^{itb}$ ($f(t)$ — характеристическая функция ξ);

4) если ξ и η — независимые случайные величины с характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$, то характеристическая функция суммы $\xi + \eta$ равна $f(t)g(t)$.

Справедлива следующая

Теорема Бохнера — Хинчина. Для того чтобы непрерывная функция $f(t)$, заданная на вещественной оси и удовлетворяющая условию $f(0) = 1$, была характеристической функцией некоторой случайной величины, необходимо и достаточно, чтобы она была положительно определенной, т. е. при каждом целом $n > 0$ для любых комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$ и любых вещественных чисел $t_1, \ldots, t_n$

$$\sum_{k,r=1}^{n} f(t_k - t_r) z_k \bar{z}_r \geqslant 0.$$

Любая функция распределения однозначно определяется своей характеристической функцией, при этом имеет место следующая формула обращения:

если $F(x)$ — функция распределения и $f(t)$ — соответствующая характеристическая функция, то

$$F(x_1) - F(x_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{-it} f(t)\,dt,$$

где x_1 и x_2 — произвольные точки непрерывности $F(x)$.

Справедлива также

Теорема непрерывности. **Последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ слабо сходится к некоторой функции распределения $F(x)$ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций $\{f_n(t)\}$ сходится к непрерывной в нуле функции $f(t)$. При этом $f(t)$ есть характеристическая функция предельного распределения $F(x)$ и сходимость $f_n(t)$ к $f(t)$ равномерна на каждом конечном отрезке.**

Существует тесная связь между моментами вероятностного распределения и производными соответствующей характеристической функции. Так, если $\mathsf{E}|\xi|^k < \infty$ $(k \geqslant 1)$, то характеристическая функция $f(t)$ случайной величины ξ k раз дифференцируема и

$$\mathsf{E}\xi^k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t)\Big|_{t=0}.$$

В свою очередь, существование производной $\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} f(t)\Big|_{t=0}$ влечет за собой существование абсолютного момента порядка $2k$: $\mathsf{E}|\xi|^{2k} < \infty$.

Пусть $\mathsf{E}|\xi|^k < \infty$. Если $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, то величина

$$\varkappa_k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} \ln \varphi(t)\Big|_{t=0}$$

называется ***семиинвариантом*** случайной величины ξ порядка k. В частности, $\varkappa_1 = \mathsf{E}\xi$, $\varkappa_2 = \mathsf{D}\xi$, $\varkappa_3 = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^3$. Существуют соотношения, связывающие между собой моменты и семиинварианты.

Преобразованием Лапласа неотрицательной случайной величины ξ называется функция

$$\varphi(s) = \mathsf{E}e^{-s\xi}$$

(если $F(x)$ — функция распределения ξ, то

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)).$$

Распределение однозначно определяется своим преобразованием Лапласа. При сложении независимых случайных величин соответствующие преобразования Лапласа перемножаются.

§ 1. Производящие функции

4.1. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией $\varphi(z)$. Найти производящие функции случайных величин $\xi + n$ и $n\xi$ (n — целое неотрицательное число).

4.2. Найти распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

а) $\frac{1}{4}(1+z)^2$; б) $p(1-qz)^{-1}$, p, $q>0$, $p+q=1$;

в) $e^{\lambda(z-1)}$, $\lambda>0$; г) $(p+qz)^n$; д) $\frac{2e}{e^2-1}\operatorname{ch} z$;

е) $\left(1+\frac{1-z}{z}\ln(1-z)\right)$.

4.3. Найти распределение, отвечающее производящей функции $\varphi(z)$, если $\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}$, $n=1, 2, \ldots$

4.4. Доказать, что функция $\varphi(z)=|z|$ не может быть производящей функцией вероятностного распределения.

4.5. Пусть ξ — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения, $\varphi(z)$ — ее производящая функция. Доказать, что

$$\mathbf{P}(\xi=0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(a_k),$$

где $|a_k|\leqslant 1$, $a_k\to 0$ при $k\to\infty$.

4.6. Пусть ξ — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения, $\varphi(z)$ — ее производящая функция. Доказать, что $\mathbf{P}(\xi=0)=0$ тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

4.7. При каких значениях параметров дробно-линейная функция $\varphi(z)=\frac{a+bz}{c+dz}$ является производящей функцией вероятностного распределения?

4.8. Пусть ξ и η — случайные величины, причем ξ принимает значения 0 и 1 с вероятностями 1/2 каждое, а η — значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями 1/8, 1/4, 1/2 и 1/8 соответственно. Доказать, что не существует случайной величины ζ, не зависящей от ξ и такой, что $\xi+\zeta=\eta$.

4.9. Пусть ξ и η — случайные величины, причем ξ принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями 1/2, 1/4, 1/4, а η — значения 0, 1, 2, 3, 4 с вероятностями 6/10, 1/10, 1/10, 1/10, 1/10 соответственно. Доказать, что не существует случайной величины ζ, не зависящей от ξ и такой, что $\xi+\zeta=\eta$.

4.10. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем $\xi+\eta$ принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями 1/3 каждое. Доказать, что одна из величин ξ и η имеет вырожденное распределение.

4.11. Пусть $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... — последовательность функций распределения неотрицательных целочисленных случайных величин, $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... — соответствующие им производящие функции. Доказать, что если $\varphi_n(z) \to \varphi(z)$ при $n \to \infty$, то $F_n(x) \to F(x)$ равномерно по x.

4.12. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $F(x)$ — функция распределения ξ_1, и пусть ν — положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от ξ_1, ξ_2, ... и имеющая производящую функцию $\varphi(z)$. Доказать, что функция распределения случайной величины $\max\{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\}$ равна $\varphi(F(x))$.

§ 2. Характеристические функции и их основные свойства

4.13. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, a и b — вещественные числа. Найти характеристическую функцию случайной величины $a\xi + b$.

4.14. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ. Найти характеристическую функцию случайной величины $-\xi$.

4.15. Доказать, что характеристическая функция четна тогда и только тогда, когда соответствующая функция распределения $F(x)$ удовлетворяет соотношению

$$F(x) = 1 - F(-x-0).$$

4.16. Доказать, что характеристическя функция вещественна тогда и только тогда, когда она четна.

4.17. Доказать, что четная характеристическая функция $\varphi(t)$ представима в виде

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, dF(x),$$

где $F(x)$ — соответствующая функция распределения.

4.18. Пусть ξ и η — независимые, одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $f(t)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi - \eta$.

4.19. Доказать, что следующие функции не могут быть характеристическими:

а) $e^{-i|t|}$;

б) $a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos nt + b_1 \sin t + \ldots + b_n \sin nt$, $b_1 \cdot \ldots \cdot b_n \neq 0$, где все a_i и b_i — вещественные числа.

4.20. Доказать, что характеристическая функция любого распределения равномерно непрерывна на всей вещественной прямой.

4.21. Является ли функция $\cos t^2$ характеристической?

4.22. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $\xi(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если:

а) $\xi(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & 0 \leqslant \omega \leqslant 1/2, \\ 2\omega - 1, & 1/2 < \omega \leqslant 1; \end{cases}$ б) $\xi(\omega) = \ln \omega, \quad \xi(0) = 0;$

в) $\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \omega \leqslant 1/3, \\ 0, & 1/3 < \omega < 2/3, \\ 1, & 2/3 \leqslant \omega \leqslant 1. \end{cases}$

4.23. Найти характеристическую функцию, отвечающую плотности распределения $\frac{1}{\pi \operatorname{ch} x}$, $-\infty < x < \infty$.

4.24. Найти характеристические функции следующих распределений:

а) равномерного распределения на отрезке $[a, b]$; б) биномиального распределения; в) распределения Пуассона; г) распределения Коши; д) показательного распределения; е) нормального распределения; ж) геометрического распределения; з) отрицательного биномиального распределения.

4.25. Характеристическая функция суммы двух случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых. Можно ли утверждать, что слагаемые независимы?

4.26. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор в $\mathbb{R}^n$, $f(t_1, \ldots, t_n)$ — его характеристическая функция, $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — характеристические функции случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Доказать, что для того, чтобы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора вещественных $t_1, \ldots, t_n$ выполнялось равенство

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i).$$

4.27. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор в $\mathbb{R}^n$, $f(t_1, \ldots, t_n)$ — его характеристическая функция, $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — характеристические функции случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Показать, что из равенства

$$f(t, \ldots, t) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t)$$

для любого вещественного t не следует независимость случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

4.28. Пусть $f_1(t), f_2(t), \ldots$ — характеристические функции, $a_1, a_2, \ldots$ — неотрицательные числа, такие, что $a_1 + a_2 + \ldots = 1$. Доказать, что функция

$$g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(t)$$

является характеристической функцией.

4.29. Пусть функция $f(t, a)$, $t, a \in R^1$, удовлетворяет следующим условиям:

а) при каждом фиксированном a $f(t, a)$ является характеристической функцией, б) при каждом фиксированном t $f(t, a)$ измерима.

Доказать, что для любой функции распределения $F(x)$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t, a)\, dF(a)$$

характеристическая функция.

4.30. Пусть $f(t)$ — произвольная характеристическая функция. Доказать, что функция $2/(2-f(t))-1$ также является характеристической.

4.31. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что $\operatorname{Re} f(t)$ является характеристической функцией, и найти соответствующую функцию распределения.

4.32. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что $|f(t)|^2$ является характеристической функцией, и найти соответствующую функцию распределения.

4.33. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых имеет несимметричное распределение. Может ли случайная величина $\xi+\eta$ иметь симметричное распределение?

4.34. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ и пусть для некоторого a $\mathbf{P}(\xi=a)>1/2$. Доказать, что $f(t)$ не обращается в нуль нигде на вещественной прямой.

4.35. Пусть ξ — случайная величина с вещественной характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если $\mathbf{P}(\xi=a)>1/4$ при некотором $a\neq 0$, то $f(t)$ обращается в нуль бесконечное число раз.

4.36. Привести пример характеристической функции, обращающейся в нуль, но лишь конечное число раз.

4.37. Найти распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

а) $\cos t$; б) $\cos^2 t$; в) e^{-t^2}; г) $e^{-|t|}$; д) $\frac{1}{1+t^2}$; е) $\frac{1}{1-it}$; ж) $\frac{\sin t}{t}$; з) $e^{-|t|}\cos t$.

4.38. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, ν — случайная величина, не зависящая от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и принимающая целые положительные значения, $p_k=\mathbf{P}(\nu=k)$. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция ξ_1. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi_1+\ldots+\xi_\nu$.

4.39. Доказать, что функция

$$f(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

является характеристической функцией.

4.40. Доказать, что любая четная непрерывная функция выпуклая при $t \geqslant 0$ и такая, что $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ и $f(0)=1$, является характеристической функцией.

4.41. Существуют ли две различные характеристические функции, совпадающие на некотором отрезке, содержащем начало координат?

4.42. Доказать, что при любом $0<\alpha \leqslant 1$ функция

$$f(t)=\frac{1}{1+|t|^{\alpha}}$$

является характеристической функцией.

4.43. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция непрерывного распределения. Доказать, что $|f(t)|<1$ при $t \neq 0$.

4.44. Пусть ξ — случайная величина с симметричным непрерывным распределением. Доказать, что характеристическая функция случайной величины $\max\{0, \xi\}$ нигде не обращается в нуль. Можно ли отказаться от условия непрерывности?

4.45. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины, $\eta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Доказать, что если $0<\mathbf{P}(\xi_1$ делится на два$)<1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta_n \text{ делится на два}) = 1/2.$$

4.46. Пусть $f(t)$ — произвольная характеристическая функция. Доказать, что для любого вещественного t справедливы неравенства:

а) $1-\operatorname{Re} f(2t) \leqslant 4(1-\operatorname{Re} f(t))$; б) $1-|f(2t)|^2 \leqslant 4(1-|f(t)|^2)$;
в) $1-\operatorname{Re} f(2t) \leqslant 2(1-(\operatorname{Re} f(t))^2)$; г) $1-|f(2t)| \leqslant 2(1-|f(t)|^2)$;
д) $1-|f(2t)| \leqslant 4(1-|f(t)|)$.

4.47. Доказать, что для любой характеристической функции $f(t)$ и любого целого неотрицательного n справедливы неравенства

а) $1-\operatorname{Re} f(t) \geqslant \frac{1}{4^n}(1-\operatorname{Re} f(2^n t))$;

б) $1-|f(t)|^2 \geqslant \frac{1}{4^n}(1-|f(2^n t)|^2)$.

4.48. Доказать, что для любой характеристической функции $f(t)$ и любого целого неотрицательного n справедливы неравенства

а) $1-\operatorname{Re} f(nt) \leqslant n(1-(\operatorname{Re} f(t))^n) \leqslant n^2(1-\operatorname{Re} f(t))$;
б) $1-|f(nt)|^2 \leqslant n(1-|f(t)|^{2n}) \leqslant n^2(1-|f(t)|^2)$.

4.49. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, c и b — положительные постоянные. Доказать, что если $|f(t)| \leqslant c$ при $|t| \geqslant b$, то

$$|f(t)| \leqslant 1-\frac{1-c^2}{8b^2}t^2$$

при $|t| \leqslant b$.

4.50. Характеристическая функция $f(t)$ называется *саморазложимой*, если для любого $0<c<1$ существует характеристическая функция $f_c(t)$, такая, что $f(t)=f(ct)f_c(t)$. Доказать, что саморазложимая характеристическая функция нигде не обращается в нуль.

4.51. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что для любого $t>0$

$$1-\operatorname{Re} f(t) \geqslant \frac{2t^2}{\pi^2} \int_{-\pi/t}^{\pi/t} x^2 dF(x).$$

4.52. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ и характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Найти характеристическую функцию $\varphi(t)$ случайной величины $\xi\cdot\eta$.

4.53. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $\varphi(t)$. Найти n-мерную функцию распределения $G(x_1, \ldots, x_n)$, соответствующую характеристической функции $\psi(t_1, \ldots, t_n) = \varphi(t_1 + \ldots + t_n)$.

4.54. Пусть ξ — случайная величина, имеющая распределение Коши. Могут ли существовать две независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2, такие, что $\xi = \xi_1 + \xi_2$ и одна из них имеет равномерное на некотором отрезке распределение?

4.55. Пусть ξ, η и ζ — случайные величины, причем ζ не зависит от ξ и η. Распределения случайных величин $\xi+\zeta$ и $\eta+\zeta$ совпадают. Можно ли утверждать, что распределения случайных величин ξ и η совпадают?

4.56. Пусть ξ, η и ζ — случайные величины, причем ζ не зависит от ξ и η. Доказать, что если распределения случайных величин $\xi+c\zeta$ и $\eta+c\zeta$ совпадают при любом $c>0$, то совпадают распределения ξ и η.

4.57. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные симметричные случайные величины, причем величины $\xi-\eta$ и $|\xi|-|\eta|$ одинаково распределены. Найти распределение ξ.

4.58. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — произвольные функции распределения, $f(t)$ и $g(t)$ — соответствующие характеристические функции. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dG(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, dF(u).$$

4.59. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Доказать, что функция

$$f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u)\, du$$

также является характеристической функцией.

4.60. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Доказать, что при любом $p>0$ функция

$$f(t)=\frac{p}{t^p}\int_0^t \varphi(u)\,u^{p-1}du$$

является характеристической функцией.

4.61. Пусть $g(t)$ — характеристическая функция и p — произвольное положительное число. Доказать, что функция

$$f(t)=e^{p(g(t)-1)}$$

является характеристической функцией.

4.62. Пусть последовательность функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... равномерно на всей прямой сходится к функции распределения $F(x)$. Можно ли утверждать, что соответствующая последовательность характеристических функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... равномерно на всей прямой сходится к характеристической функции распределения F?

4.63. Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... — последовательность функций распределения, $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... — соответствующая последовательность характеристических функций. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)=1$ для всех $-\varepsilon\leqslant t\leqslant\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, то $F_n(x)$ слабо сходится при $n\to\infty$ к вырожденному в нуле распределению.

4.64. Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... и $G_1(x)$, $G_2(x)$, ... — две последовательности функций распределения и пусть существует функция распределения $F(x)$, такая, что обе последовательности F_n и $F_n * G_n$ слабо сходятся к F при $n\to\infty$. Доказать, что последовательность G_n слабо сходится к вырожденному в нуле распределению.

4.65. Доказать, что последовательность функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... слабо сходится к некоторой функции распределения $F(x)$ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... сходится к некоторой функции $f(t)$ и эта сходимость равномерна в некоторой окрестности нуля.

4.66. Пусть $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... — последовательность функций распределения, $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... — соответствующая последовательность характеристических функций. Доказать, что если для любых $a\leqslant b$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt,$$

то F_n слабо сходится к F.

4.67. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция и для бесконечно возрастающей последовательности h_1, h_2, ... функции

$f(t)g(h_n t)$ также являются характеристическими. Доказать, что в этом случае $g(t)$ — характеристическая функция.

4.68. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения, $f(t)$ и $g(t)$ — соответствующие характеристические функции. Доказать, что

$$\sup_t |f(t) - g(t)| \leqslant 2 \operatorname{Var}(F, G).$$

4.69. Пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... — последовательность характеристических функций. Доказать, что следующие два условия эквивалентны:

а) произведения

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(t)$$

сходятся при $n \to \infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве прямой,

б) произведения

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(t)$$

сходятся при $n \to \infty$ к ненулевому пределу на некотором множестве положительной лебеговой меры.

§ 3. Связь свойств характеристических функций со свойствами распределений. Неравенства

4.70. Доказать, что характеристическая функция $f(t)$ соответствует решетчатому распределению тогда и только тогда, когда существует вещественное число $t_0 \neq 0$, такое, что $|f(t_0)| = 1$.

4.71. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция. Доказать, что если найдутся t_1 и t_2, такие, что t_1/t_2 иррационально и $|f(t_1)| = |f(t_2)| = 1$, то $|f(t)| \equiv 1$.

4.72. Пусть характеристическая функция $f(t)$ равна единице в некоторой точке $t_0 > 0$. Доказать, что t_0 является периодом функции $f(t)$.

4.73. Привести пример решетчатого распределения, характеристическая функция которого непериодична.

4.74. Пусть решетчатое распределение сосредоточено на некотором подмножестве множества точек ak, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Доказать, что характеристическая функция такого распределения периодична.

4.75. Доказать, что характеристическая функция любого решетчатого распределения представима в виде $e^{ita} f(t)$, где $f(t)$ — периодическая функция, а a — вещественное число.

4.76. Может ли вещественная часть характеристической функции быть периодической функцией, а мнимая — нет?

4.77. Пусть $u(t)$ — вещественная часть некоторой характеристической функции, а $v(t)$ — мнимая часть некоторой другой характеристической функции. Будет ли, вообще говоря, функция $u(t)+ + iv(t)$ характеристической?

4.78. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция чисто дискретного распределения. Доказать, что

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| = 1.$$

4.79. Доказать, что плотность распределения, отвечающая абсолютно интегрируемой характеристической функции, непрерывна.

4.80. Доказать, что дифференцируемая в нуле характеристическая функция непрерывно дифференцируема на всей прямой.

4.81. Доказать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1 \end{cases}$$

не может быть характеристической функцией.

4.82. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если для некоторого целого положительного n $\mathbf{E}|\xi|^n < \infty$, то $f(t)$ n раз дифференцируема и

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant \mathbf{E}|\xi|^n.$$

4.83. Доказать, что характеристическая функция случайной величины ξ с распределением

$$\mathbf{P}(\xi = 2k) = \mathbf{P}(\xi = -2k) = \frac{c}{k^2 \ln k}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

дифференцируема в нуле, но $E\xi$ не существует.

4.84. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ и с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\mathbf{E}|\xi| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re} f(t)}{t^2}\, dt.$$

4.85. При каких вещественных α функция

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|^{\alpha}, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

является характеристической, а при каких — нет?

4.86. Является ли функция e^{-t^4} характеристической функцией?

4.87. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины, имеющей конечную дисперсию. Доказать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $|f(t)|$ не возрастает при $0 < t < \varepsilon$ и не убывает при $-\varepsilon < t < 0$.

4.88. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция симметричного распределения, a_k — соответствующий момент порядка k. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f^{(2q-1)}(t)}{t}=(-1)^q a_{2q}$; б) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f^{(2q)}(t)-f^{(2q)}(0)}{t^2}=\dfrac{(-1)^{q+1}}{2}a_{2q+2}$.

4.89. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — характеристические функции симметричных распределений и для некоторых положительных α_1 и α_2 в некоторой окрестности нуля выполняется равенство

$$f_1^{\alpha_1}(t)\,f_2^{\alpha_2}(t)=e^{-t^2}.$$

Доказать, что распределения, отвечающие характеристическим функциям $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют конечные дисперсии.

4.90. Пусть выполнены условия предыдущей задачи. Доказать, что распределения, отвечающие характеристическим функциям $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеют моменты всех порядков.

4.91. Выразить первые четыре семиинварианта случайной величины через математическое ожидание и центральные моменты.

4.92. Доказать, что при линейном преобразовании $\xi'=a\xi+b$ случайной величины ξ ее семиинварианты изменяются по закону $\varkappa_1'=a\varkappa_1+b$, $\varkappa_n'=a^n\varkappa_n$ $(n>1)$.

4.93. Доказать, что для любой случайной величины ξ и любого $u>0$

$$\mathbf{P}(|\xi|>2/u)\leqslant\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}(1-\varphi(t))\,dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция ξ.

4.94. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если $1-f(t)=o(|t|^\alpha)$ при $t\to 0$, то $\mathbf{P}(|\xi|>x)=o(x^{-\alpha})$ при $x\to\infty$.

4.95. Пусть ξ — случайная величина с вещественной характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Доказать, что

$$f(t)\geqslant 1-\frac{t^2\sigma^2}{2}.$$

4.96. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Доказать, что если t_0 — наименьший положительный корень $f(t)$, то $t_0\geqslant 1/\sigma$.

4.97. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция распределения, имеющего конечную дисперсию. Доказать, что существуют положительные постоянные c и ε, такие, что

$$|f(t)|\geqslant e^{-ct^2}$$

при $|t|\leqslant\varepsilon$.

4.98. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины, имеющей конечное математическое ожидание. Доказать, что найдутся положительные постоянные c и ε, такие, что

$$|f(t)| \geqslant e^{-c|t|}$$

при $|t| \leqslant \varepsilon$.

4.99. Доказать, что для характеристической функции $f(t)$ любой невырожденной случайной величины ξ существуют положительные постоянные δ и ε, такие, что

$$|f(t)| \leqslant 1 - \varepsilon t^2$$

при $|t| \leqslant \delta$.

4.100. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция. Доказать, что если $f(t) = 1 + w(t) + o(t^2)$ при $t \to 0$, где $w(t) = -w(-t)$, то $f(t) \equiv 1$.

4.101. Пусть ξ — ограниченная случайная величина, $|\xi| \leqslant c$, имеющая симметричное распределение с характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Доказать, что

$$0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-\frac{4}{\pi^2}\sigma^2 t^2}$$

при $|t| \leqslant \frac{\pi}{2c}$.

4.102. Пусть ξ — ограниченная случайная величина, $|\xi| \leqslant c$, с характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Доказать, что

$$|f(t)| \leqslant e^{-\frac{4}{\pi^2}\sigma^2 t^2}$$

при $|t| \leqslant \frac{\pi}{4c}$.

4.103. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Доказать, что для любого $c < 2\sigma^2$ найдется $\varepsilon > 0$, такое, что

$$|f(t)| \leqslant e^{-ct^2}$$

при $|t| \leqslant \varepsilon$.

4.104. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если $E|\xi|^2 = \infty$, то для любого $c > 0$ найдется $\varepsilon > 0$, такое, что

$$|f(t)| \leqslant e^{-ct^2}$$

при $|t| \leqslant \varepsilon$.

4.105. Пусть $p(x)$ — симметричная одновершинная плотность распределения, $f(t)$ — соответствующая характеристическая функция. Доказать, что если

$$p(0) \leqslant A < \infty,$$

то

$$|f(t)| \leqslant 2A/|t|$$

при любом вещественном t.

4.106. Пусть выполнены условия предыдущей задачи. Доказать, что

$$|f(t)| \leqslant \frac{\sin(t/2A)}{t/2A}$$

при $|t| \leqslant \pi A$.

4.107. Пусть $F(x)$ — функция распределения, $f(t)$ — соответствующая характеристическая функция. Доказать, что для любого $r > 0$

$$t^2 \int_{-r}^{r} x^2 dF(x) \leqslant 3|1 - f(t)|$$

при $|t| \leqslant 1/r$.

4.108. Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины с характеристическими функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно, причем существует $\varepsilon > 0$, такое, что $|f_1(t)| > |f_2(t)|$ при $0 < |t| \leqslant \varepsilon$. Может ли быть:

а) $\sigma_1 > \sigma_2$, б) $\sigma_1 < \sigma_2$, в) $\sigma_1 = \sigma_2$?

4.109. Доказать, что распределение с дифференцируемой характеристической функцией $f(t)$ имеет конечную дисперсию тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$, такое, что функция

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t}$$

ограничена при $0 < |t| \leqslant \varepsilon$.

4.110. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если для некоторого положительного $\lambda < 2$ и некоторой последовательности $t_1, t_2, \ldots$, такой, что $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, выполнены неравенства

$$|f(t_n)| \leqslant e^{-c|t_n|^\lambda}$$

(c — положительная постоянная), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\delta dF(x) = \infty$$

для всех $\delta > \lambda$.

4.111. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что $F(x)$ имеет конечную дисперсию тогда и только тогда, когда существуют $c > 0$ и последовательность $t_1, t_2, \ldots$, такие, что $t_n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$|f(t_n)| \geqslant e^{-ct_n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

4.112. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если существует последовательность $t_1, t_2, \ldots,$ такая, что $t_n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\frac{\ln|f(t_n)|}{t_n^2} \to 0$$

при $n \to \infty$, то $F(x)$ — вырожденная функция распределения.

4.113. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$ и характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если $p(x)$ монотонно убывает при $x > 0$, то $f(t)$ нигде не обращается в нуль.

4.114. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$ и характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если $p(x)$ монотонно не возрастает при $x \geqslant 0$, то при $t \geqslant 0$

$$0 \leqslant \operatorname{Im} f(t) \leqslant \frac{2p(0)}{t}.$$

§ 4. Формулы обращения

4.115. Пусть $F(x)$ — функция распределения, $f(t)$ — соответствующая характеристическая функция. Доказать, что если $f(t)$ абсолютно интегрируема, то $F(x)$ абсолютно непрерывна и соответствующая плотность распределения выражается формулой

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt$$

4.116. Доказать, что плотность распределения $p(x)$, отвечающая вещественной интегрируемой характеристической функции $f(t)$ выражается формулой

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx f(t)\, dt.$$

4.117. Пусть $p(x)$ — плотность распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если $f(t)$ симметрична, положительна и интегрируема, то $p(x)$ имеет единственный максимум. В какой точке он достигается?

4.118. Пусть выполнены условия предыдущей задачи и, кроме того, существует вторая производная $p''(x)$. Доказать, что для любого $x \neq 0$

$$p(0) > p(x) > p(0) - \frac{x^2}{2} p''(0).$$

4.119. Доказать, что распределение с характеристической функцией

$$e^{-|t|^\alpha} \qquad (0<\alpha\leqslant 2)$$

имеет ограниченную плотность.

4.120. Пусть характеристическая функция $f(t)$ такова, что $f(t)=0$ при $|t|\geqslant c$ $(c>0)$. Доказать, что соответствующее распределение имеет ограниченную плотность $p(x)$, причем

$$\sup_x p(x)\leqslant c/\pi.$$

4.121 (*равенство Парсеваля*). Пусть $p(x)$ — плотность распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если функция $p^2(x)$ интегрируема, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^2(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt.$$

4.122. Пусть ξ — целочисленная случайная величина с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что

$$\mathbf{P}(\xi=k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}f(t)\,dt, \qquad k=0,\pm 1,\ldots$$

4.123. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что для любого x

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,e^{-itx}dt=F(x+0)-F(x-0).$$

4.124. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что $F(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt=0.$$

4.125. Пусть ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1,\ x_2,\ \ldots$ с вероятностями $p_1,\ p_2,\ \ldots,$ $f(t)$ — соответствующая характеристическая функция. Доказать, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt=\sum_{i=1}^{\infty}p_i^2.$$

4.126. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, такая, что

$$\liminf_{t\to\infty} \operatorname{Re} f(t) \geqslant a > 0.$$

Доказать, что функция

$$g(t) = \frac{f(t)-a}{1-a}$$

является характеристической функцией.

4.127. Доказать, что для любого вещественного a, такого, что $0 \leqslant a \leqslant 1$, существует характеристическая функция $f(t)$, удовлетворяющая соотношению

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = a.$$

4.128. Пусть a — отрицательное число, $|a| \leqslant 1$. Существует ли характеристическая функция $f(t)$, такая, что

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = a?$$

4.129. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих целые значения, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что если ξ_1 не постоянна с вероятностью 1, то

$$\sup_k \mathbf{P}(\eta_n = k) \to 0$$

при $n \to \infty$.

4.130. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения, $f(t)$ и $g(t)$ — соответствующие характеристические функции. Доказать, что

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(t)-g(t)}{t} \right| dt.$$

4.131. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — абсолютно интегрируемые характеристические функции, $p(x)$ и $q(x)$ — соответствующие плотности распределения. Доказать, что

$$\sup_x |p(x) - q(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|\, dt.$$

4.132. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения с симметричными плотностями распределения $p(x)$ и $q(x)$ и неотрицательными характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$, причем

$$\sup_x p(x) \leqslant A, \quad \sup_x q(x) \leqslant B.$$

Доказать, что для любого положительного T

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \frac{2(A+B)}{T}.$$

4.133. Пусть ξ и η — целочисленные случайные величины с характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Доказать, что

$$\sup_n |\mathbf{P}(\xi = n) - \mathbf{P}(\eta = n)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|\, dt.$$

§ 5. Преобразование Лапласа

4.134. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина, $\varphi(u)$ — соответствующее преобразование Лапласа. Найти преобразование Лапласа случайной величины $a\xi + b$ $(a,\ b \geqslant 0)$.

4.135. Найти преобразование Лапласа равномерного на отрезке $[0,\ 1]$ распределения.

4.136. Пусть $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, ... — преобразования Лапласа некоторых вероятностных распределений, a_1, a_2, ... — неотрицательные числа, такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1.$$

Доказать, что функция

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(u)$$

является преобразованием Лапласа некоторого вероятностного распределения.

4.137. Пусть $\varphi(u)$ — преобразование Лапласа некоторого вероятностного распределения. Доказать, что функция

$$\frac{2}{2 - \varphi(u)} - 1$$

также является преобразованием Лапласа.

4.138. Найти преобразование Лапласа распределения, характеристическая функция которого равна

$$\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2} \right)^n e^{\frac{itn}{2}}.$$

4.139. Доказать, что преобразование Лапласа любого невырожденного распределения есть монотонно убывающая функция.

4.140. Доказать, что преобразование Лапласа любого распределения есть выпуклая функция.

4.141. Функция $\varphi(u)$, определенная на положительной полуоси, называется вполне монотонной, если она имеет производные всех порядков, причем все четные производные неотрицательны, а нечетные — неположительны:

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(u) \geqslant 0, \quad u > 0.$$

Доказать, что преобразование Лапласа любого распределения есть вполне монотонная функция.

4.142. Показать, что каждая из указанных ниже функций не может быть преобразованием Лапласа вероятностного распределения:

а) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & t > 1; \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & t > 1; \end{cases}$

в) $f(t) = te^{-t}$; г) $f(t) = e^{-t} + \frac{\sin t}{100}$; д) $f(t) = e^{-t^2}$.

4.143. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, ν — положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Обозначим $\varphi(u)$ преобразование Лапласа ξ_1, а $p(s)$ — производящую функцию ν. Найти преобразование Лапласа случайной величины $\xi_1 + \ldots + \xi_\nu$.

§ 6. Разные задачи

4.144. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

4.145. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Доказать, что функция

$$f(t) = \frac{\sin t}{t^2} \int_0^t \varphi(u)\, du$$

является характеристической функцией абсолютно непрерывного распределения.

4.146. Существует ли вероятностное распределение, сосредоточенное на конечном отрезке и такое, что его характеристическая функция отлична от нуля всюду на вещественной прямой.

4.147. Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ удовлетворяют соотношению

$$f_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u) f_2(u)\, du.$$

Найти $f_1(x)$, если:

а) $f_2(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $f_3(x) = \dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$;

б) $f_2(x) = e^{-x^2}$, $f_3(x) = e^{-x^2/2}$.

4.148. Доказать, что интегральное уравнение относительно неизвестной функции $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)\, dt}{(y-t)^2+1} = e^{-y^2}$$

не имеет решений в классе неотрицательных функций.

4.149. Доказать, что интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1-\cos(y-t))}{(y-t)^2} x(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} \max\left\{0, (1-|u|), \left(1-\frac{|u|}{2}\right)\right\} du$$

относительно неизвестной функции $x(t)$ имеет бесконечно много решений в классе неотрицательных функций.

4.150. Существуют ли невырожденные случайные величины ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 такие, что ξ_1 не зависит от ξ_2, η_1 не зависит от η_2, $\mathbf{E}\xi_i^4 < \mathbf{E}\eta_i^4 < \infty$, $i = 1, 2$, но $\mathbf{E}(\xi_1+\xi_2)^4 > \mathbf{E}(\eta_1+\eta_2)^4$?

4.151. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, у которой существует производная порядка $2n$ $(n \geqslant 0)$. Доказать, что функция

$$f^{(2n)}(t)/f^{(2n)}(0)$$

является характеристической функцией вероятностного распределения.

4.152. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, у которой всюду на вещественной прямой существует производная порядка $2n-1$. Доказать, что распределение, отвечающее характеристической функции $f(t)$ имеет конечный момент порядка $2n$ тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$, такое, что функция

$$\frac{f^{(2n-1)}(t) - f^{(2n-1)}(0)}{t}$$

ограничена при $0 < |t| < \varepsilon$.

4.153. Доказать, что функция $f(t)$, равная $1-\frac{|t|}{a}$ при $|t|\leqslant 2a$ $(a>0)$ и периодическая с периодом $4a$, является характеристической функцией.

4.154. Доказать, что функция $f(t)$, равная $1-\frac{|t|}{a}$ при $|t|\leqslant a$ $(a>0)$ и периодическая с периодом $2a$, является характеристической функцией.

4.155. Привести пример двух различных характеристических функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, таких, что $\varphi^2(t)=\psi^2(t)$.

4.156. На тележку, стоящую на абсолютно твердой, гладкой и ровной поверхности действуют постоянно во времени две силы: слева F_1 и справа F_2, величины которых являются случайными величинами, распределенными равномерно на отрезках $[0, a_1]$ и $[0, a_2]$ соответственно. Можно ли считать, что силы действуют независимо, если путь, пройденный тележкой за время t, есть случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $\left[-\frac{a_2t^2}{2m}, \frac{a_1t^2}{2m}\right]$, где m — масса тележки? Путь вправо считается положительным, влево — отрицательным.

4.157. Пусть выполнены условия предыдущей задачи, но кроме сил F_1 и F_2 на тележку действует еще одна сила F_0, величина которой есть случайная величина с неизвестным распределением. Можно ли считать, что силы F_0, F_1 и F_2 действуют независимо?

4.158. Пусть ξ — случайная величина с симметричным распределением. Положим

$$\eta=\begin{cases}\xi & \text{при } |\xi|\leqslant c,\\ 0 & \text{при } |\xi|>c, \quad c>0.\end{cases}$$

Обозначим $f(t)$ и $g(t)$ — характеристические функции соответственно ξ и η. Доказать, что найдется $\varepsilon>0$, такое, что

$$f(t)\leqslant g(t)$$

при $|t|\leqslant\varepsilon$.

4.159. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$, $\mathbf{E}\xi=0$, $\mathbf{D}\xi=\sigma^2$, $\mathbf{E}|\xi|^3=\beta$. Доказать, что существует абсолютная (не зависящая ни от чего) постоянная K, такая, что

$$|f(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1-K\frac{\beta}{\sigma^2}|t|\right)\right\}$$

для всех вещественных t.

4.160. Пусть ν, ξ_1, ξ_2, ... — независимые случайные величины, причем ξ_1, ξ_2, ... одинаково распределены, а ν имеет распределение Пуассона с параметром λ. Доказать, что если $F(x)$ — функция распределения ξ_1, то характеристическая функция случайной величины $\xi_1+\ldots+\xi_\nu$ равна

$$\exp\left\{\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1\right)dF(u)\right\}.$$

4.161. Пусть $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... — последовательность функций распределения, $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... — соответствующая последовательность характеристических функций. Доказать, что если F_n сходится к F по вариации при $n\to\infty$, то f_n сходится к f равномерно на всей прямой.

4.162. Пусть ξ и η — случайные величины с характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Доказать, что

$$\sup_t|f(t)-g(t)|\leqslant 2\mathbf{P}(\xi\neq\eta).$$

4.163. Пусть ξ — случайная величина с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и характеристической функцией $f(t)$. Положим

$$\eta=\begin{cases}\xi & \text{при } |\xi|\leqslant c,\\ 0 & \text{при } |\xi|>c,\quad c>0.\end{cases}$$

Обозначим $g(t)$ характеристическую функцию η. Доказать, что

$$\sup_t|f(t)-g(t)|\leqslant\frac{2\sigma^2}{c^2}.$$

4.164. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$. *Степенью рассеивания* δ_ξ случайной величины ξ называется величина

$$\delta_\xi=-\ln\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(u)|^2}{1+u^2}\,du.$$

Доказать, что $\delta_\xi=0$ тогда и только тогда, когда ξ есть с вероятностью 1 постоянная.

4.165. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность случайных величин. Доказать, что $\delta_{\xi_n}\to 0$ при $n\to\infty$ (определение δ_{ξ_n} см. в предыдущей задаче) тогда и только тогда, когда найдется последовательность вещественных чисел a_1, a_2, ..., такая, что $\xi_n-a_n\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$.

4.166. Доказать, что при сложении независимых случайных величин степень рассеивания не убывает (определение степени рассеивания см. в задаче 4.164), т. е. если ξ и η — независимые случайные величины, то

$$\delta_{\xi+\eta}\geqslant\max\{\delta_\xi,\delta_\eta\}.$$

Показать, что знак равенства при этом может достигаться тогда и только тогда, когда одно из слагаемых есть с вероятностью 1 постоянная.

4.167. Пусть $\psi(t)$ — комплексная функция вещественной переменной, причем

$$A_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2\, dt < \infty.$$

Доказать, что функция

$$\varphi(u) = \frac{1}{A_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t+u)\, \overline{\psi}(t)\, dt$$

является характеристической функцией абсолютно непрерывного распределения.

4.168. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, причем при некотором $\varepsilon > 0$ $f(t) = e^{-t^2/2}$ для всех $|t| \leqslant \varepsilon$. Доказать, что $f(t) \equiv e^{-t^2/2}$.

4.169. Доказать, что для любых целых положительных k и n, $k \leqslant n$, справедливо неравенство

$$C_n^k \leqslant 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

4.170. Пусть P — равномерное распределение на единичной окружности в $\mathbb{R}^2$ (P, очевидно, сингулярно). Доказать, что свертка $P * P$ абсолютно непрерывна и имеет ограниченную плотность.

4.171. Пусть n-мерный случайный вектор ξ и m-мерный случайный вектор η связаны линейной зависимостью $\eta = A\xi + a$, где A — прямоугольная матрица размером $m \times n$, a — неслучайный n-мерный вектор. Выразить характеристическую функцию случайного вектора η через характеристическую функцию случайного вектора ξ.

4.172 (*теорема А. Я. Хинчина*). Доказать, что для того, чтобы функция $f(t)$ была характеристической функцией одновершинного распределения, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$f(t) = \frac{e^{ita}}{t} \int_0^t \varphi(u)\, du,$$

где $\varphi(u)$ — характеристическая функция, а a — вещественное число.

4.173. Доказать, что функция

$$\frac{1}{1+|t|^\alpha} \quad (0 < \alpha \leqslant 1)$$

является характеристической функцией одновершинного распределения.

4.174. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция одновершинного распределения. Доказать, что функция

$$\varphi(t) = f(t) + tf'(t)$$

является характеристической функцией.

4.175. Существует ли нигде не дифференцируемая характеристическая функция?

4.176. Привести пример двух различных характеристических функций $f(t)$ и $g(t)$ $(f(t) \neq g(-t))$, таких, что

$$|f(t)|^2 = |g(t)|^2.$$

4.177. Привести пример двух различных характеристических функций $f(t)$ и $g(t)$ $(f(t) \neq g(-t))$, отвечающих ограниченным случайным величинам и таких, что

$$|f(t)|^2 = |g(t)|^2.$$

4.178. Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет сферически симметричное распределение (см. определение в задаче **3.300**). Доказать, что если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, то вектор ξ имеет n-мерное нормальное распределение.

Глава 5

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В теории вероятностей обычно рассматриваются следующие виды сходимости последовательностей случайных величин и вероятностных распределений.

Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *сходится* к случайной величине ξ *с вероятностью* 1 *(почти наверное)*, если

$$\mathsf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi\right) = 1.$$

Этот вид сходимости будем обозначать $\xi_n \to \xi$ п. н.

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *сходится по вероятности* к случайной величине ξ $\left(\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi\right)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *сходится в среднем порядка* p $(0 < p < \infty)$ к случайной величине ξ, если

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}|\xi_n - \xi|^p = 0.$$

При $p = 2$ говорят о *сходимости в среднем квадратическом.*

Последовательность вероятностных распределений $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots$ *слабо сходится* к распределению P (обозначается $\mathsf{P}_n \xrightarrow{W} \mathsf{P}$), если для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathsf{P}_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathsf{P}(dx).$$

Если $\mathsf{P}_n \xrightarrow{W} \mathsf{P}$, то слабо сходятся и соответствующие функции распределения: $F_n \xrightarrow{W} F$.

Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, будем называть *сходящейся* к случайной величине ξ *по распределению* $\left(\xi_n \xrightarrow{D} \xi\right)$, если последовательность функций распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ слабо сходится к функции распределения случайной величины ξ.

Семейство вероятностных распределений $\mathcal{F} = \{F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *относительно компактным*, если любая последовательность распределений из $\mathcal{F}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому вероятностному распределению.

Семейство вероятностных распределений $\mathcal{F} = \{F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *плотным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K такой, что

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} F_\alpha\left(\mathbb{R}^n \setminus K\right) \leqslant \varepsilon.$$

Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, называется *равномерно интегрируемой*, если

$$\sup_n \int\limits_{\{|\xi_n|>c\}} |\xi_n| \mathbf{P}(d\omega) \to 0$$

при $c \to \infty$.

Последовательность функций распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

для каждой точки x, в которой функция $F(x)$ непрерывна.

5.1. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$. Доказать, что $\mathbf{P}(\xi = \eta) = 1$.

5.2. Доказать, что если $\xi_n - a_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ и $\xi_n - b_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, где $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — две последовательности вещественных чисел, то $a_n - b_n \to 0$.

5.3. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$. Доказать, что:

а) $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a\xi + b\eta$ (a, b — постоянные), б) $|\xi_n| \xrightarrow{\mathbf{P}} |\xi|$,

в) $\xi_n\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi\eta$.

5.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, причем ξ_n принимает значения e^{-an} и e^{an} с вероятностями $1 - e^{-bn}$ и e^{-bn} $(b \geqslant 0)$ соответственно. При каких значениях a и b $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$?

5.5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, таких, что $\mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant c > 0) \geqslant \delta > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, такая, что $a_n\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Доказать, что $a_n \to 0$.

5.6. Пусть $\xi_n - a_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Доказать, что $m\xi_n - a_n \to 0$ ($m\xi_n$ — медиана ξ_n).

5.7. Доказать, что для того, чтобы последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходилась по вероятности к некоторой случайной величине ξ, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое N, что при $n, m \geqslant N$

$$\mathbf{P}(|\xi_n - \xi_m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

5.8. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$ и $\mathbf{P}(\xi = \eta) = 1$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$$

при $n \to \infty$.

5.9. Пусть $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Доказать, что $\xi_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi^2$.

5.10. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} a$ и пусть $f(x)$ — борелевская функция, имеющая производную в точке $x=a$. Доказать, что

$$f(\xi_n)=f(a)+f'(a)(\xi_n-a)+(\xi_n-a)\eta_n,$$

где $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$.

5.11. Доказать, что если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ почти наверное сходится, то функция $\xi(\omega)$, равная $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, если этот предел существует, и нулю в противном случае, является случайной величиной.

5.12. Пусть $\xi_n \to \xi$ п. н. и $\eta_n \to \eta$ п. н. Доказать, что:

а) $a\xi_n + b\eta_n \to a\xi + b\eta$ п. н. (a, b — постоянные),

б) $|\xi_n| \to |\xi|$ п. н., в) $\xi_n\eta_n \to \xi\eta$ п. н.

5.13. Доказать, что $\xi_n \to \xi$ п. н. тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m-\xi|\geqslant\varepsilon\}\right)\to 0$$

при $n\to\infty$.

5.14. Доказать, что $\xi_n \to \xi$ п. н. тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon \text{ бесконечное число раз})=0.$$

5.15. Доказать, что для того, чтобы последовательность случайных величин с вероятностью 1 сходилась к некоторой случайной величине, необходимо и достаточно, чтобы она была с вероятностью 1 фундаментальной.

5.16. Доказать, что для того, чтобы $\xi_n \to \xi$ п. н., необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}|\xi_k-\xi|\geqslant\varepsilon)\to 0$$

при $n\to\infty$.

5.17. Доказать, что для того, чтобы последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ была с вероятностью 1 фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant 0}|\xi_{n+k}-\xi_n|\geqslant\varepsilon)\to 0$$

при $n\to\infty$.

5.18. Пусть $\varepsilon > 0$, $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин. Доказать, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)<\infty,$$

то $\xi_n \to \xi$ п. н.

5.19. Пусть ξ_1; ξ_2, ... — последовательность случайных величин. Доказать, что если для некоторой суммируемой последовательности положительных чисел ε_1, ε_2, ...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi_{n+1}-\xi_n|>\varepsilon_n)<\infty,$$

то последовательность ξ_1, ξ_2, ... с вероятностью 1 сходится к некоторой почти наверное конечной случайной величине.

5.20. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность случайных величин. Предположим, что существует случайная величина ξ и подпоследовательность целых положительных чисел n_1, n_2, ..., такие, что $\xi_{n_k} \to \xi$ п. н. и

$$\max_{n_{k-1}<l\leqslant n_k} |\xi_l - \xi_{n_{k-1}}| \to 0$$

при $k\to\infty$. Доказать, что тогда $\xi_n \to \xi$ п. н.

5.21. Доказать, что если $\xi_{mn}\to\xi_m$ п. н. при $n\to\infty$ и $\xi_m\to\xi$ п. н. при $m\to\infty$, то существуют две подпоследовательности $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$, такие, что $\xi_{m_k n_k}\to\xi$ п. н. при $k\to\infty$.

5.22. Доказать, что из сходимости с вероятностью 1 следует сходимость по вероятности.

5.23. Показать, что из сходимости по вероятности не следует сходимость с вероятностью 1.

5.24. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность случайных величин. Доказать, что:

а) если $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a \neq 0$, то $\dfrac{1}{\xi_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \dfrac{1}{a}$,

б) если $\xi_n \to a \neq 0$, то $\dfrac{1}{\xi_n} \to \dfrac{1}{a}$ п. н.

5.25. Доказать, что для того, чтобы для некоторого вероятностного пространства понятия сходимости с вероятностью 1 и сходимости по вероятности совпадали, необходимо и достаточно, чтобы это пространство было атомическим.

5.26. Пусть $\mathscr{F}$ — пространство классов случайных величин, совпадающих с вероятностью 1. Для любых двух классов Ξ, $\mathrm{H}\in\mathscr{F}$ положим

$$d(\Xi, \mathrm{H}) = \mathbf{E}\frac{|\xi-\eta|}{1+|\xi-\eta|},$$

где ξ и η — случайные величины из Ξ и H соответственно.

Доказать, что d — метрика на $\mathscr{F}$ и что сходимость по вероятности эквивалентна сходимости в метрике d.

5.27. Доказать, что для сходимости последовательности случайных величин в среднем порядка $p\geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной в среднем порядка p.

5.28. Доказать, что из сходимости в среднем какого-либо положительного порядка следует сходимость по вероятности.

5.29. Привести пример, показывающий, что из сходимости по вероятности не следует сходимость в среднем порядка $p > 0$.

5.30. Привести пример, показывающий, что из сходимости в среднем любого положительного порядка не следует сходимость с вероятностью 1.

5.31. Привести пример последовательности случайных величин, сходящейся с вероятностью 1 и такой, что никакая ее подпоследовательность не сходится в среднем порядка $p > 0$.

5.32. Доказать, что если $\xi_n \to \xi$ п. н. и для некоторого $p > 0$ $\mathbf{E}|\xi_n - \eta|^p \to 0$, то $\mathbf{P}(\xi = \eta) = 1$.

5.33. Пусть $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ — последовательность вероятностных распределений, причем $\mathbf{P}_n$ сосредоточено в точке x_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что слабая сходимость $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$ означает, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и распределение $\mathbf{P}$ сосредоточено в точке x. Доказать обратное.

5.34. Пусть $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ — последовательность целочисленных распределений. Доказать, что $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}_n(k) \to \mathbf{P}(k)$ для каждого целого k.

5.35. Пусть $\mathbf{P}$ — мера Лебега на единичном интервале, а $\mathbf{P}_n$ приписывает массы $\frac{1}{n}$ некоторым точкам, выбранным по одной в интервалах $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, $i = 1, \ldots, n$. Доказать, что $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$.

5.36. Пусть $F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ — последовательность функций распределения. Доказать, что если $F_n(x) \to F(x)$ для всех x из некоторого всюду плотного множества на прямой, то $F_n \xrightarrow{W} F$.

5.37. Привести пример последовательности вероятностных распределений $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ и ограниченной функции $f(x)$, таких, что $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$, но не выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathbf{P}_n \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathbf{P}.$$

5.38. Привести пример последовательности вероятностных распределений $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ и непрерывной функции $f(x)$, таких, что $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$, но не выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathbf{P}_n \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathbf{P}.$$

5.39. Доказать, что $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда каждая подпоследовательность $\{\mathbf{P}_{n'}\}$ последовательности $\{\mathbf{P}_n\}$ содержит подпоследовательность $\{\mathbf{P}_{n''}\}$, такую, что $\mathbf{P}_{n''} \xrightarrow{W} \mathbf{P}$.

5.40. Доказать, что если $F_n \xrightarrow{W} F$ и если $F(x)$ непрерывна в каждой точке замкнутого множества A, то

$$\sup_{x \in A} |F_n(x) - F(x)| \to 0.$$

5.41. Доказать, что $F_n \xrightarrow{W} F$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{n \to \infty} F_n(x) \leqslant F(x)$$

и

$$\limsup_{n \to \infty} F_n(x - 0) \geqslant F(x - 0).$$

5.42. Пусть $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ...— последовательность вероятностных распределений. Доказать, что следующие три условия эквивалентны:

а) $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$,

б) для любого замкнутого множества B

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}_n(B) \leqslant \mathbf{P}(B),$$

в) для любого открытого множества G

$$\liminf_{n \to \infty} \mathbf{P}_n(G) \geqslant \mathbf{P}(G).$$

5.43. Доказать, что для того, чтобы $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mathbf{P}$-непрерывного множества A выполнялось соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A)$$

($\mathbf{P}$-*непрерывным* называется борелевское множество, граница которого удовлетворяет условию $\mathbf{P}(\partial A) = 0$, т. е. имеет вероятность 0).

5.44. Пусть $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ...— последовательность вероятностных распределений и пусть для любой ограниченной равномерно непрерывной функции $f(x)$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathbf{P}_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathbf{P}.$$

Доказать, что $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$.

5.45. Пусть $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ...— последовательность вероятностных распределений и пусть для любой ограниченной функции $f(x)$, обладающей непрерывными производными любого порядка,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathbf{P}_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathbf{P}.$$

Доказать, что $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$.

5.46. Пусть ξ, ξ_1, ξ_2, ...— последовательность случайных величин. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}(F(\xi_n)) \to \mathbf{E}(F(\xi))$$

для каждой непрерывной функции распределения $F(x)$.

5.47. Пусть случайная величина η не зависит от случайных величин ξ, ξ_1, ξ_2, ... и имеет функцию распределения $F(x)$. Доказать, что

$$\mathbf{E}(F(\xi_n)) \to \mathbf{E}(F(\xi))$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}(\eta \leqslant \xi_n) \to \mathbf{P}(\eta \leqslant \xi).$$

5.48. Пусть последовательность функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... слабо сходится к некоторой функции распределения, имеющей по крайней мере две точки роста. Доказать, что последовательность $\{F_n(a_nx+b_n)\}$ слабо сходится к распределению, сосредоточенному в нуле тогда и только тогда, когда $a_n \to \infty$ и $b_n = o(a_n)$, $n \to \infty$.

5.49. Пусть $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ...— последовательность функций распределения, такая, что при некоторых a_n, $b_n > 0$

$$F_n(b_nx + a_n) \xrightarrow{W} F(x).$$

Доказать, что если последовательности вещественных чисел α_1, α_2, ... и β_1, β_2, ... таковы, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{b_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n - a_n}{b_n} = 0,$$

то имеет место сходимость

$$F_n(\beta_nx + \alpha_n) \xrightarrow{W} F(x).$$

5.50. Пусть $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ...— последовательность абсолютно непрерывных вероятностных распределений, $p(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ...— соответствующие плотности. Доказать, что если $p_n(x) \to p(x)$, $n \to \infty$, равномерно на любом конечном отрезке, то $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$. Верно ли обратное?

5.51. Пусть $\mathbf{R}_n \xrightarrow{W} \mathbf{R}$, $\mathbf{P}_n \xrightarrow{W} \mathbf{P}$ и $\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n * \mathbf{Q}_n$. Доказать, что существует распределение $\mathbf{Q}$, такое, что $\mathbf{R} = \mathbf{P} * \mathbf{Q}$.

5.52. Являются ли относительно компактными следующие семейства вероятностных распределений:

а) множество всех равномерных распределений на отрезках, симметричных относительно нуля; б) множество всех нормальных распределений; в) множество всех равномерных распределений на отрезках, содержащихся в отрезке $[0, 1]$; г) множество всех нормальных распределений с фиксированным математическим ожиданием и равномерно ограниченными дисперсиями?

5.53. Указать, какие из семейств вероятностных распределений, приведенных в предыдущей задаче, являются плотными.

5.54 (*теорема Ю. В. Прохорова*). Доказать, что семейство распределений на прямой является относительно компактным тогда и только тогда, когда оно является плотным.

5.55. Доказать, что множество всех распределений, математическое ожидание которых равно a, а дисперсия σ^2, является относительно компактным.

5.56. Доказать, что семейство нормальных распределений является плотным тогда и только тогда, когда равномерно ограничены математические ожидания и дисперсии элементов этого семейства.

5.57. Доказать, что счетное семейство вероятностных мер плотно тогда и только тогда, когда соответствующие функции распределения удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{x\to\infty} F_n(x) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} F_n(x) = 0$$

равномерно по n.

5.58. Доказать, что слабая сходимость распределений эквивалентна сходимости в метрике Леви (определение см. во введении к гл. 3)

$$F_n \xrightarrow{W} F \Leftrightarrow L(F_n, F) \to 0.$$

5.59. Пусть совместное распределение ξ_n и η_n слабо сходится к совместному распределению ξ и η. Доказать, что распределение $\xi_n + \eta_n$ слабо сходится к распределению $\xi + \eta$.

5.60. Доказать, что из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.

5.61. Привести пример, показывающий, что из сходимости по распределению не следует сходимость по вероятности.

5.62. Пусть $\xi_n \xrightarrow{D} a$, где a — постоянная. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a$.

5.63. Пусть $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$. Верно ли, что $\xi_n - \xi \xrightarrow{D} 0$?

5.64. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, то:

а) $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{D} \xi$ и б) $\xi_n\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

5.65. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, $|\xi_n - \eta_n| \leqslant \zeta_n |\xi_n|$ и $\zeta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, то $\eta_n \xrightarrow{D} \xi$.

5.66. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, $|\xi_n - \eta_n| \leqslant \zeta_n |\eta_n|$ и $\zeta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, то $\eta_n \xrightarrow{D} \xi$.

5.67. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — такая последовательность случайных величин, что

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \infty\right) = p \quad \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = -\infty\right) = q, \quad \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\right) = r$$

$$p + r + q = 1.$$

Что можно сказать о последовательности функций распределения

$$F_n(x) = \mathbf{P}(\xi_n \leqslant x)?$$

5.68. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке $x=0$. Доказать, что если $\xi_n\eta_n \xrightarrow{D} \eta$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, то

$$\xi_n(f(\eta_n) - f(0)) \xrightarrow{D} f'(0)\eta.$$

5.69. Пусть функции $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... имеют непрерывные производные, причем $f_n'(x) \to f'(x)$ равномерно по x. Доказать, что если $\xi_n\eta_n \xrightarrow{D} \eta$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, то

$$\xi_n(f_n(\eta_n) - f_n(0)) \xrightarrow{D} f'(0)\eta.$$

5.70. Пусть ξ, ξ_1, ξ_2, ...— последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, причем при каждом $\omega \in \Omega$ $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ при $n \to \infty$. Примером покажите, что $\mathbf{E}\xi_n$ не обязано сходиться к $\mathbf{E}\xi$ даже в том случае, когда все эти математические ожидания существуют.

5.71. Привести пример, показывающий, что из сходимости по вероятности не вытекает сходимость математических ожиданий.

5.72. Пусть $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$. Привести пример, когда $\mathbf{E}\xi_n$ существуют, а $\mathbf{E}\xi$ — нет, и наоборот.

5.73. Пусть последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, ... сходится в среднем квадратическом к случайной величине ξ, причем $\mathbf{E}|\xi|_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что $\mathbf{E}|\xi| < \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi.$$

5.74. Пусть последовательность функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... слабо сходится к функции распределения $F(x)$. Обозначим σ_n^2 и σ^2 дисперсии распределений F_n и F соответственно ($n = 1, 2, \ldots$). Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf \sigma_n^2 \geqslant \sigma^2.$$

5.75. Пусть $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ...— последовательность функций распределения с математическими ожиданиями a, a_1, a_2, ... и дисперсиями $\sigma^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ соответственно. Доказать, что если $F_n \xrightarrow{W} F$ и $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, то $a_n \to a$.

5.76. Пусть последовательность функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... с дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$ с дисперсией σ^2, причем последовательность σ_1^2, σ_2^2, ... сходится к некоторому конечному пределу b. Обязано ли выполняться равенство $b = \sigma^2$?

5.77. Пусть $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$. Доказать, что

$$\mathbf{E}|\xi| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n|.$$

5.78. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируема. Доказать, что

$$\sup_n \mathbf{E}|\xi_n| < \infty.$$

5.79. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин. Доказать, что если при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup_n \mathbf{E}|\xi_n|^{1+\varepsilon} < \infty,$$

то последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируема.

5.80. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин и пусть существует случайная величина η, такая, что

$$\mathbf{E}|\eta| < \infty,$$

и для любого $a > 0$ и всех n

$$\mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant a) \leqslant \mathbf{P}(|\eta| \geqslant a).$$

Доказать, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируема.

5.81. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — равномерно интегрируемая последовательность случайных величин и пусть $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$. Доказать, что $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$.

5.82. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных случайных величин с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ и $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$, то последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируема.

5.83. Доказать, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \mathbf{E}|\xi_n| < \infty$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует δ, такое, что при всех n из неравенства $\mathbf{P}(E) \leqslant \delta$ следует

$$\int_E |\xi_n|\, d\mathbf{P} \leqslant \varepsilon.$$

5.84. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин и

$$\mathbf{E}|\xi_n| \to \mathbf{E}|\xi|$$

при $n \to \infty$. Обязана ли иметь место сходимость

$$\mathbf{E}|\xi_n + a| \to \mathbf{E}|\xi + a|?$$

5.85. Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если дополнительно известно, что $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$?

5.86. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $f(x)$ — положительная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

Доказать, что если

$$\sup_n \mathsf{E}(f(|\xi_n|)) < \infty$$

то последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируема.

5.87. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин. Доказать, что если последовательность $|\xi_1|^r, |\xi_2|^r, \ldots$ $(r>0)$ равномерно интегрируема, то для любого $0<r'<r$ равномерно интегрируема последовательность $|\xi_1|^{r'}, |\xi_2|^{r'}, \ldots$

5.88. Пусть $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ и для некоторого $r>0$

$$\sup_n \mathsf{E}|\xi_n|^r < \infty.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}|\xi_n|^{r'} = \mathsf{E}|\xi|^{r'}$$

для любого положительного $r'<r$.

5.89. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, причем ξ_n принимает значения n^α и 0 с вероятностями $1/n$ и $1-1/n$ соответственно ($n=1, 2, \ldots$). Исследовать сходимость последовательностей $\{\xi_n\}$ (по вероятности) и $\{\mathsf{E}|\xi_n|^r\}$ в зависимости от выбора α и r.

5.90. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных случайных величин, таких, что $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ и $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi < \infty$. Доказать, что $\mathsf{E}|\xi_n - \xi| \to 0$.

5.91. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности случайных величин, такие, что $\mathsf{P}(\xi_n \geqslant \eta_n \geqslant 0) = 1$, $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \eta$ и $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$. Доказать, что $\mathsf{E}|\eta_n - \eta| \to 0$.

5.92. Пусть $\xi_n \to \xi$ в среднем порядка $r>0$:

$$\mathsf{E}|\xi_n - \xi|^r \to 0$$

при $n\to\infty$. Доказать, что

$$\mathsf{E}|\xi_n|^r \to \mathsf{E}|\xi|^r.$$

5.93. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, такая, что для некоторого $p > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}|\xi_n|^p < \infty.$$

Доказать, что $\xi_n \to 0$ п. н.

5.94. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n| \leqslant \mathbf{E}|\xi|.$$

Доказать, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — равномерно интегрируема и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n - \xi| = 0.$$

5.95. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n|^2 \leqslant \mathbf{E}|\xi|^2.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n - \xi|^2 = 0.$$

5.96. Доказать, что если последовательность $|\xi_1|^\delta, |\xi_2|^\delta, \ldots$ равномерно интегрируема при некотором $\delta > 0$, то последовательность распределений случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ плотна.

5.97. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности положительных случайных величин. Могут ли существовать положительные числа α и β, такие, что

$$\left(\frac{\xi_n}{\eta_n}\right)^\alpha \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\xi_n}{\eta_n}\right)^\beta \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty \qquad (n \to \infty)?$$

5.98. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных случайных величин с функциями распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots$ и с конечными математическими ожиданиями. Будем говорить, что эта последовательность *сходится* к нулю *по Хинчину*, если для любого $x > 0$

$$\frac{1}{\mathbf{E}\xi_n} \int_x^\infty t\,dF_n(t) \to 0$$

при $n \to \infty$ (будем обозначать $\xi_n \xrightarrow{X} 0$). Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{X} 0$ то $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad (n \to \infty)$.

5.99. Следует ли из сходимости по вероятности сходимость по Хинчину (определение сходимости по Хинчину см. в предыдущей задаче)?

5.100. Пусть $\xi_n \xrightarrow{X} 0$ и $\eta_n \xrightarrow{X} 0$. Доказать, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{X} 0$.

5.101. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$. Доказать, что ξ имеет вырожденное распределение.

5.102. Доказать, что если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин, то $\mathbf{P}(\xi_n \text{ сходится}) = 0$.

5.103. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, где ξ имеет невырожденное распределение. Возможно ли из последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выделить подпоследовательность $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots$, такую, что все ξ_{nk} не зависят от ξ?

5.104. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и при каждом n распределение ξ_n содержит в качестве компоненты стандартное нормальное распределение. Доказать, что распределение ξ также содержит в качестве компоненты стандартное нормальное распределение.

5.105. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности случайных величин, такие, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) < \infty.$$

Доказать, что если $\eta_n \to a$ п. н., то $\xi_n \to a$ п. н.

5.106. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — последовательность положительных целочисленных случайных величин, таких, что ν_n не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ при любом n.

1. Доказать, что если $\nu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$ и $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, то $\xi_{\nu_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$.

2. Доказать, что если $\nu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$ и $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, то $\xi_{\nu_n} \xrightarrow{D} \xi$.

5.107. Пусть для любого $n = 1, 2, \ldots$ случайные векторы $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ одинаково распределены. Доказать, что если последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности, то последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots$ также сходится по вероятности, причем предельные случайные величины одинаково распределены.

5.108. Пусть $g(x_1, \ldots, x_k)$ — непрерывная вещественная функция k аргументов. Доказать, что если $\xi_{nm} \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi_m$ при $n \to \infty$, $m = 1, 2, \ldots, k$, то

$$g(\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}) \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\xi_1, \ldots, \xi_k)$$

при $n \to \infty$.

5.109. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных векторов, принимающих значения в R^m. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $l \in R^m$ $(\xi_n, l) \xrightarrow{D} (\xi, l)$ ($(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение).

5.110. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} a$, то распределение случайного вектора (ξ_n, η_n) слабо сходится к распределению случайного вектора (ξ, a).

5.111. Доказать, что последовательность вероятностных распределений на плоскости плотна тогда и только тогда, когда плотны обе последовательности ее маргинальных распределений.

5.112. Пусть $F(x)$ — дискретная функция распределения, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... — некоторая последовательность ее компонент. Доказать, что существует последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$, такая, что последовательность $F_1(x-a_1)$, $F_2(x-a_2)$, ... сходится в равномерной метрике к некоторой функции распределения $G(x)$, т. е.

$$|F_n(x-a_n)-G(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Глава 6

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями $a_i = \mathbf{E}\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Говорят, что для этой последовательности выполняется *закон больших чисел* (ЗБЧ), если

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

ЗБЧ выполняется при различных предположениях относительно последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема (*А. Я. Хинчин*). *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями, то для нее выполняется ЗБЧ.*

Для проверки выполнимости ЗБЧ часто оказывается полезным неравенство Чебышёва.

Теорема. *Пусть ξ — случайная величина с конечной дисперсией, тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}(|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant D\xi/\varepsilon^2.$$

Говорят, что для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполняется *усиленный закон больших чисел* (УЗБЧ), если

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\xi_i}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $\mathbf{D}\xi_i < \infty$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_i}{i^2} < \infty$. Тогда для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполняется УЗБЧ.*

Теорема (*А. Н. Колмогоров*). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Для выполнения УЗБЧ необходимо и достаточно существование у величин ξ_i конечного математического ожидания.*

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий и A — событие, состоящее в том, что наступит бесконечно много событий A_n.

Лемма (*Борель — Кантелли*).

1. *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) < \infty$, *то* $\mathsf{P}(A) = 0$.

2. *Если* $A_1, A_2, \ldots$ *независимы и* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = \infty$, *то* $\mathsf{P}(A) = 1$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$; σ-алгебра

$$\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

называется *остаточной σ-алгеброй* относительно последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$, а любое событие $A \in \mathcal{F}$ — *остаточным событием.*

Теорема (*закон «0» или «1» Колмогорова*). *Любое остаточное событие имеет вероятность* 0 *или* 1.

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, то в силу закона «0» или «1» Колмогорова ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ либо с вероятностью 1 сходится, либо с вероятностью 1 расходится. Имеют место следующие критерии, позволяющие определить сходимость или расходимость ряда из независимых случайных величин.

Теорема (*«о двух рядах»*). *Для сходимости с вероятностью* 1 *ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *из независимых случайных величин достаточно, чтобы одновременно сходились два ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_n \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{D}\xi_n.$$

Если, кроме того, $\sup_n \mathsf{P}(|\xi_n| > c) = 0$ *для некоторого* $c > 0$, *то эти условия являются необходимыми.*

Пусть c — неотрицательное число, ξ — случайная величина. Обозначим

$$\xi^c = \begin{cases} \xi, & |\xi| \leqslant c, \\ 0, & |\xi| > c. \end{cases}$$

Теорема (*«о трех рядах»; А. Н. Колмогоров*). *Для сходимости с вероятностью* 1 *ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *из независимых случайных величин необходимо, чтобы для любого* $c > 0$ *сходились ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_n^c, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{D}\xi_n^c, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n| \geqslant c),$$

и достаточно, чтобы эти ряды сходились при некотором $c > 0$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин. Будем говорить, что для этой последовательности выполняется *центральная предельная теорема* (ЦПТ), если последовательность распределений случайных величин

$$\frac{\eta_n - \mathsf{E}\eta_n}{\sqrt{\mathsf{D}\eta_n}} \qquad (\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n)$$

слабо сходится при $n \to \infty$ к стандартному нормальному распределению, т. е. для любого вещественного x

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\eta_n - \mathsf{E}\eta_n}{\sqrt{\mathsf{D}\eta_n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \Phi(x).$$

Обозначим $a_k = \mathsf{E}\xi_k$, $\sigma_k^2 = \mathsf{D}\xi_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, $F_k(x) = \mathsf{P}(\xi_k < x)$. Говорят, что для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполнено

а) *условие Линдеберга*, если для любого $\tau > 0$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left[(\xi_k - a_k)^2;\quad |\xi_k - a_k| \geqslant \tau B_n\right] \to 0$$

при $n \to \infty$, где $\mathsf{E}[(\xi_k - a_k)^2;\ |\xi_k - a_k| \geqslant \tau B_n] = \int\limits_{|x-a_k| \geqslant \tau B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x)$;

б) *условие Ляпунова*, если для некоторого $\delta > 0$

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Имеет место

Теорема. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Если для этой последовательности выполнено условие Линдеберга, то для нее выполняется ЦПТ.*

Если для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_k - a_k}{B_n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и выполнена ЦПТ, то для нее выполняется условие Линдеберга.

Из указанной теоремы, в качестве следствий, вытекают справедливость ЦПТ для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом и справедливость ЦПТ для последовательности случайных величин, для которой выполняется условие Ляпунова.

Для получения оценок скорости сходимости в ЦПТ бывает полезным следующее неравенство.

Теорема (*Берри — Эссеен*). *Пусть* $F(x)$ и $G(x)$ — *функции распределения,* $f(t)$ *и* $g(t)$ — *соответствующие характеристические функции,* $\sup_x |G'(x)| \leqslant C$. *Тогда для любого* $T > 0$ *и* $b > 1/(2\pi)$

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant b \int_{-T}^{T} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right| dt + \frac{C}{T}\alpha(b),$$

где $\alpha(b)$ — *положительная постоянная, зависящая только от* b.

Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\xi_n - a_n}{B_n} < x\right) = \Phi(x)$$

при некоторых a_n и $B_n > 0$, то говорят, что случайная величина ξ_n имеет *асимптотически нормальное распределение с параметрами* (a_n, B_n^2).

Вероятностное распределение называется *устойчивым*, если для его функции распределения $F(x)$ при любых вещественных $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, b_1, b_2 имеет место равенство

$$F(a_1x+b_1) * F(a_2x+b_2) = F(ax+b),$$

где $a > 0$ и b — некоторые постоянные. Для соответствующей характеристической функции $f(t)$ имеет место равенство при любых $a_1 > 0$, $a_2 > 0$:

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) f\left(\frac{t}{a_2}\right) = f\left(\frac{t}{a}\right) e^{ibt},$$

где $a > 0$ и b — некоторые постоянные. Характеристическая функция симметричного устойчивого распределения имеет вид $e^{-|t|^{\alpha}}$; $0 < \alpha < 2$.

Переформулируем некоторые общие теоремы для схемы испытаний Бернулли.

Говорят, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ соответствуют *схеме испытаний Бернулли*, если они взаимно независимы и одинаково распределены, так что

$$\mathbf{P}(\xi_k = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\xi_k = 0) = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

Событие $\{\xi_k = 1\}$ называется «успехом», а $\{\xi_k = 0\}$ — «неудачей».

Бесконечная последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ соответствует схеме Бернулли (с данным p), если вышеприведенные условия выполняются при любом n.

Теорема Бернулли (*закон больших чисел*). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — схема Бернулли и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} p.$$

Теорема Бореля (*усиленный закон больших чисел*). *В схеме Бернулли*

$$\frac{S_n}{n} \to p \text{ п.н.}$$

Теорема Пуассона. *Дана последовательность серий испытаний Бернулли: в n-й серии имеется n случайных величин ξ_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, n$, соответствующих испытаниям с вероятностью успеха p_n. Пусть $S_n = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$* — число успехов в n-й серии. Если $n \to \infty$, $p_n \to 0$ и $np_n \to \lambda$, где λ — действительное положительное число, то при любом m

$$\mathbf{P}(S_n = m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Теорема Муавра — Лапласа. *Пусть $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ — число успехов в схеме n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. При $n \to \infty$ равномерно по x (p — постоянно)*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \to \Phi(x), \quad q = 1 - p.$$

Для вычислений используется приближенная формула

$$\mathbf{P}\{m_1 \leqslant S_n \leqslant m_2\} \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

или более точная формула

$$\mathbf{P}\{m_1 \leqslant S_n \leqslant m_2\} \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np + 0{,}5}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np - 0{,}5}{\sqrt{npq}}\right).$$

Оценка скорости сходимости в теореме Муавра — Лапласа (*неравенство Берри — Эссеена*):

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}.$$

§ 1. Закон больших чисел

6.1. Проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью успеха. Пусть

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е и } (i+1)\text{-е испытания закончились успехом,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Выполняется ли для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ?

6.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения $\sqrt{n}$, 0 и $-\sqrt{n}$ с вероятностями $1/(2n)$, $1-1/n$, $1/(2n)$ соответственно. Выполняется ли для этой последовательности ЗБЧ?

6.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения $-n$, 0 и n с вероятностями $1/(2n^2)$, $1-1/n^2$, и $1/(2n^2)$ соответственно. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин,

$$\mathbf{P}(\xi_n = \pm 2^n) = 2^{-(2n+1)}, \quad \mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2^{-2n}.$$

Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения 2^n и -2^n с вероятностями 1/2. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.6. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения -2^n, -1, 1, 2^n с вероятностями 2^{-n-1}, $\frac{1-2^{-n}}{2}$, $\frac{1-2^{-n}}{2}$, 2^{-n-1} соответственно. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения $-n$, 0, n с вероятностями 1/4, 1/2, 1/4 соответственно. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения $-n$, 0, n с вероятностями 2^{-n}, $1-2^{-n+1}$, 2^{-n} соответственно. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения $-\varphi(n)$, 0, $\varphi(n)$ с вероятностями $1/\psi(n)$, $1-2/\psi(n)$, $1/\psi(n)$ соответственно, где $\varphi(n)$

и $\psi(n)$ таковы, что

$$\varphi(n) \geqslant 0, \quad \psi(n) \geqslant 2, \quad \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \leqslant C$$

(C — постоянная). Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. В случае, когда n — точный квадрат, ξ_n принимает значения $-\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$ с вероятностью 1/2 каждое, при остальных n ξ_n принимает значения -2^{-n}, 2^{-n} с вероятностью 1/2 каждое. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения $-\sqrt{n}$ и $\sqrt{n}$ с вероятностью 1/2 каждое. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

6.12. При каких значениях $\alpha > 0$ к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, таких, что

$$\mathbf{P}(\xi_n = n^\alpha) = \mathbf{P}(\xi_n = -n^\alpha) = 1/2,$$

применим ЗБЧ?

6.13 (*теорема Чебышёва*). Доказать, что ЗБЧ выполняется для последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерно ограниченные дисперсии.

6.14. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями σ_i^2. Доказать, что если

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то к последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ применим ЗБЧ.

6.15. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с дисперсиями σ_i^2. Доказать, что если ковариация ξ_i и ξ_j неположительна при $i \neq j$ и

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполняется ЗБЧ.

6.16. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями, причем ξ_n зависит только от ξ_{n-1} и ξ_{n+1}, но не зависит от остальных ξ_i. Доказать, что для этой последовательности выполняется ЗБЧ.

6.17. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями, причем $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \leqslant 0$ при $i \neq j$. Доказать, что к этой последовательности применим ЗБЧ.

6.18. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с конечными дисперсиями и пусть коэффициент корреляции величин ξ_i и ξ_j не превосходит $g(|j-i|)$, где $g(k) \geqslant 0$. Доказать, что если

$$[g(0) + \ldots + g(n-1)]\left[\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2\right] = o(n^2) \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то к последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ применим ЗБЧ.

6.19 (*теорема Бернштейна*). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями, причем $\mathrm{cov}(\xi_j, \xi_k) \to 0$ равномерно при $|j-k| \to \infty$. Доказать, что к этой последовательности применим ЗБЧ.

6.20. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}\xi_i = a$, $\mathbf{D}\xi_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$ Доказать, что последовательность случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$, где

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2},$$

сходится по вероятности, и найти предел.

6.21. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что если $|\eta_n| < cn$, а $\mathbf{D}\eta_n > \alpha n^2$, то к последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ неприменим.

6.22. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной ненулевой дисперсией, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что ЗБЧ не выполняется для последовательности $\eta_1, \eta_2, \ldots$, но выполняется для последовательности $a_1\eta_1, a_2\eta_2, \ldots$, если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

6.23. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называется *эквивалентной* последовательности независимых случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_n \neq \eta_n).$$

Доказать, что если при каждом n случайные величины ξ_n и η_n имеют одинаковое математическое ожидание и ЗБЧ применим к одной из двух эквивалентных последовательностей, то он применим и к другой.

6.24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, для которой выполняется ЗБЧ. Обязан ли выполняться ЗБЧ для последовательности $|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots$?

6.25. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Вытекает ли из сходимости $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ сходимость $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$?

6.26. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, таких, что

$$\mathbf{E}|\xi_i - \mathbf{E}\xi_i| \leqslant C, \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (C \text{ — постоянная}),$$

и пусть $a_1, a_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что для последовательности $a_1\xi_1, a_2\xi_2, \ldots$ выполняется ЗБЧ.

6.27. Верно ли следующее утверждение: если для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполняется ЗБЧ и $a_1, a_2, \ldots$ —

равномерно ограниченная последовательность неотрицательных чисел, то для последовательности $\eta_1, \eta_2, \ldots$, где $\eta_n = a_n\xi_n$, также выполняется ЗБЧ?

6.28. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $a_1, a_2, \ldots$ — равномерно ограниченная последовательность неотрицательных чисел. Можно ли утверждать, что если ЗБЧ выполняется для $\xi_1, \xi_2, \ldots$, то он выполняется и для $\eta_1, \eta_2, \ldots$, где $\eta_i = a_i\xi_i$?

6.29. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности независимых случайных величин, причем

$$\xi_n = \begin{cases} \varphi(n) & \text{с вероятностью } p_n, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-2p_n, \\ -\varphi(n) & \text{с вероятностью } p_n, \end{cases}$$

$$\eta_n = \begin{cases} \varphi(n) & \text{с вероятностью } q_n, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-2q_n, \\ -\varphi(n) & \text{с вероятностью } q_n, \end{cases}$$

$$\frac{p_n}{q_n} \leqslant C < \infty, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что если ЗБЧ выполняется для последовательности $\{\eta_n\}$, то он выполняется и для последовательности $\{\xi_n\}$.

6.30. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности независимых в каждой последовательности случайных величин, причем

$$\xi_n = \begin{cases} \varphi(n) & \text{с вероятностью } p_n, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-2p_n, \\ -\varphi(n) & \text{с вероятностью } p_n, \end{cases}$$

$$\eta_n = \begin{cases} \psi(n) & \text{с вероятностью } p_n, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-2p_n, \\ -\psi(n) & \text{с вероятностью } p_n, \end{cases}$$

$$\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \leqslant C < \infty, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Доказать, что если ЗБЧ выполняется для последовательности $\{\eta_n\}$, то он выполняется и для последовательности $\{\xi_n\}$.

6.31. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности независимых в каждой последовательности случайных величин и пусть

$$\mathbf{P}(|\xi_i - \mathbf{E}\xi_i| \geqslant t) \leqslant \mathbf{P}(|\eta_i - \mathbf{E}\eta_i| \geqslant t)$$

для любого $t \geqslant 0$. Верно ли, что если для последовательности $\eta_1, \eta_2, \ldots$ выполняется ЗБЧ, то он выполняется и для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$?

6.32. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями, $C_1, C_2, \ldots$ — неубывающая последовательность положительных чисел. Доказать, что к последовательности $C_1\xi_1, C_2\xi_2, \ldots$ применим ЗБЧ тогда и только тогда, когда

$$C_n/\sqrt{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

§ 2. Сходимость рядов из независимых случайных величин

6.33. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и равномерно ограниченными дисперсиями. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n/n$ почти наверное сходится.

6.34. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Доказать, что ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum \mathbf{D}\xi_n$.

6.35. Доказать, что если ряд из независимых случайных величин сходится почти наверное к постоянной, то каждый член ряда есть почти наверное постоянная.

6.36. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Может ли ряд $\sum \xi_n$ сходиться почти наверное, а последовательность медиан $m\eta_n$ не сходиться?

6.37. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Доказать, что ряд $\sum \xi_n^{(s)}$ ($\xi_n^{(s)}$ — симметризация ξ_n) сходится почти наверное тогда и только тогда, когда существует последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$, такая, что почти наверное сходится ряд $\sum (\xi_n - a_n)$.

6.38. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$ — независимые в совокупности случайные величины. Доказать, что если почти наверное сходится ряд $\sum (\xi_n + \eta_n)$, то для некоторых последовательностей вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ почти наверное сходятся ряды

$$\sum (\xi_n - a_n) \quad \text{и} \quad \sum (\eta_n - b_n).$$

6.39. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится почти наверное тогда и только тогда, когда он сходится по вероятности.

6.40. Доказать, что ряд из независимых случайных величин сходится почти наверное тогда и только тогда, когда он сходится по распределению.

6.41. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $f_1(t), f_2(t), \ldots$ — соответствующие характеристические функции. Доказать, что ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} f_k(t) = f(t),$$

где $f(t)$ — непрерывная в нуле функция.

6.42. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с характеристическими функциями $f_1(t), f_2(t), \ldots$ соответственно. Доказать, что если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ сходится к отличному от нуля пределу на некотором множестве положительной лебеговой меры, то ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится, и обратно.

6.43. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с характеристическими функциями $f_1(t), f_2(t), \ldots$ соответственно. Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|$ строго положительно на множестве положительной лебеговой меры тогда и только тогда, когда существует последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такая, что ряд $\sum (\xi_n - a_n)$ почти наверное сходится.

6.44. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathbf{P}(\xi_1 = -1) = \mathbf{P}(\xi_1 = 1) = 1/2.$$

Доказать, что ряд $\sum c_n\xi_n$, где $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum c_n^2$.

6.45. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с равномерным на отрезке $[-1, +1]$ распределением. Доказать, что ряд $\sum c_n\xi_n$ сходится почти наверное тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum c_n^2$.

6.46. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных ограниченных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Доказать, что ряд $\sum c_n\xi_n$, где $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, почти наверное сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum c_n^2$.

6.47. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\xi_n$, где $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, почти наверное сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum c_n^2 < \infty$.

6.48. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Пуассона.

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ почти наверное сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\xi_n$.

6.49. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых неотрицательных случайных величин, таких, что $\mathbf{P}(\xi_n > c) = 0$. Доказать, что ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum \mathbf{E}\xi_n$.

6.50. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию $|\xi_n| \leqslant c < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится, если сходится ряд $\sum \mathbf{E} |\xi_n - E\xi_n|$. Верно ли обратное?

6.51. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение Коши с плотностью

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Доказать, что ряд $\sum c_n\xi_n$, где $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, почти наверное сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum |c_n|$.

6.52. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения

$$\frac{1-\cos x}{\pi x^2},$$

$c_1, c_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел. Доказать, что ряд $\sum c_n\xi_n$ почти наверное сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum |c_n|$.

6.53. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих симметричное устойчивое с показателем $\alpha > 0$ распределение. Доказать, что ряд $\sum c_n\xi_n$, где $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, почти наверное сходится тогда и только тогда, когда $\sum |c_n|^\alpha < \infty$.

6.54. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными третьими моментами. Положим $\sigma_i^2 = \mathbf{D}\xi_i$, $\beta_i = \mathbf{E}|\xi_i|^3$. Доказать, что если величины β_i/σ_i^2 равномерно ограничены: $\beta_i/\sigma_i^2 \leqslant c$, $i = 1, 2, \ldots$, и ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится, то сходится ряд $\sum \sigma_n^2$.

6.55. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с конечными третьими моментами. Положим $\sigma_i^2 = \mathbf{D}\xi_i$, $\beta_i = \mathbf{E}|\xi_i|^3$. Доказать, что если величины β_i/σ_i^2 равномерно ограничены, то для сходимости почти наверное ряда $\sum \xi_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды $\sum \mathbf{E}\xi_n$ и $\sum \sigma_i^2$.

6.56. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел. Доказать, что если ряд $\sum c_n \xi_n$ почти наверное сходится, то $\sum c_n^2 < \infty$.

6.57. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание, $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел. Доказать, что если $\sum |c_n| < \infty$, то ряд $\sum c_n (\xi_n - a_n)$ почти наверное сходится при некотором выборе вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$

6.58. Привести пример последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, имеющих нулевые математические ожидания, такой, что ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится, а ряд $\sum \mathbf{D}\xi_n$ расходится.

6.59. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых целочисленных случайных величин. Доказать, что если ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится, то $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k > 0$, где p_k — максимальный скачок функции распределения случайной величины ξ_k.

6.60. Доказать, что радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n$, где $\{\xi_n\}$ — независимые случайные величины, есть почти наверное постоянная.

6.61. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Доказать, что ряд $\sum \xi_n^2$ почти наверное сходится тогда и только тогда, когда

$$\sum \mathbf{E} \frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} < \infty.$$

6.62. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Доказать, что если

$$\sum \mathbf{E} \frac{\xi_n^2}{1+|\xi_n|} < \infty,$$

то ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится.

6.63. Последовательность случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$ называется ограниченной по вероятности, если

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \mathbf{P}(|\eta_n| > c) = 0.$$

Доказать, что если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые симметричные случайные величины, а случайные величины $\eta_n = \sum_{i=1} \xi_i$ ограничены по вероятности, то ряд $\sum \xi_n$ почти наверное сходится. Можно ли отказаться от условия симметричности?

§ 3. Усиленный закон больших чисел

6.64. Пусть ν_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Доказать, что

$$\nu_n/n \to p \text{ п. н. при } n \to \infty.$$

6.65. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Доказать, что если

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \to c \text{ п. н. при } n \to \infty,$$

где c — некоторое вещественное число, то $\mathbf{E}|\xi_1| < \infty$ и $\mathbf{E}\xi_1 = c$.

6.66. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, $b_1, b_2, \ldots$ — неубывающая последовательность вещественных чисел, такая, что $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_n}{b_n^2} < \infty,$$

то

$$\frac{\eta_n - \mathbf{E}\eta_n}{b_n} \to 0 \text{ п. н. при } n \to \infty.$$

6.67. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, таких, что $|\xi_i| \leqslant C$, $C > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Положим $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что

$$\frac{\eta_n - \mathbf{E}\eta_n}{\sqrt{n} \log n} \to 0 \text{ п. н.}, \quad n \to \infty.$$

6.68. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $0 < r < 2$. Доказать, что если

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k) \to 0 \text{ п. н.},$$

то $\mathbf{E}|\xi_k|^r < \infty$, где $a_k = 0$ при $r < 1$ и $a_k = \mathbf{E}\xi_k$ при $r \geqslant 1$.

6.69. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что если при некотором $r \geqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}|\xi_n|^{2r}}{n^{r+1}} < \infty,$$

то

$$\frac{\eta_n}{n} \to 0 \text{ п. н.}, \quad n \to \infty.$$

6.70. Показать, что, какова бы ни была последовательность неотрицательных чисел $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty,$$

существует последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, такая, что

$$\mathbf{E}\xi_n = 0, \quad \mathbf{D}\xi_n = \sigma_n^2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots$, где $\eta_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ не сходится почти наверное к нулю.

6.71. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, такая, что

$$\mathbf{E}\xi_n = 0, \quad \left|\frac{\xi_n}{n}\right| \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где C — некоторая постоянная, и пусть

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \to 0 \text{ п. н.}, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_n}{n^{2+\varepsilon}} < \infty.$$

6.72. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение. Доказать, что если последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяет условию $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \mathbf{D}\xi_n > 0$, то УЗБЧ для нее не выполняется.

6.73. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}|\xi_j|^r < \infty$, $1 \leqslant r < 2$. Доказать, что

$$n^{-\frac{1}{r}} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \mathbf{E}\xi_j) \to 0 \text{ п. н. при } n \to \infty.$$

6.74. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}|\xi_j|^r < \infty$, $0 < r < 1$.

Доказать, что

$$n^{-\frac{1}{r}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\to 0 \text{ п. н. при } n\to\infty.$$

6.75. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Доказать, что если $\mathbf{E}|\xi_1|^p=\infty$ для некоторого $0<p<2$, то

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{p}}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)\right|=+\infty \text{ п. н.}$$

для любого вещественного a.

6.76. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием a, $\eta_n=(\xi_1+\ldots+\xi_n)/n$. Доказать, что к последовательности $\eta_1, \eta_2, \ldots$ применим УЗБЧ.

§ 4. Центральная предельная теорема

6.77. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин с конечными дисперсиями, $\eta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Доказать, что для любых конечных вещественных чисел a и b

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(a\leqslant\eta_n\leqslant b)=0.$$

6.78. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными положительными дисперсиями. Доказать, что для любого вещественного числа x предел

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n<x)$$

равен либо 0, либо 1, либо 1/2. Указать условия, при которых имеет место каждая из указанных ситуаций.

6.79. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями. Доказать, что для любого положительного x предел

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n^{\alpha}}\right|\leqslant x\right)$$

равен 0 при $\alpha<1/2$ и 1 при $\alpha>1/2$.

6.80. Пусть $P_n=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}(\nu_n=k)$, где ν_n — число успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}P_n\sqrt{n}$.

6.81. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Найти $\mathsf{D}\xi_i$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{n}} > 1\right) = 1/3.$$

6.82. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(0 < \frac{\eta_n}{\sqrt{n}} < 1\right),$$

если ξ_n равномерно распределена на отрезке $[a_n - 1, a_n + 1]$ ($a_1, a_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, $\sum a_i = A < \infty$).

6.83. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Найти последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\eta_n \leqslant a_n \sqrt{n}) = p, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1.$$

6.84. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией и

$$0 < \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}\right| < a\right) = b < 1.$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}\right| < 2a\right).$$

6.85. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с единичными дисперсиями, $\mathsf{E}[\xi_1] = 0$ ($[x]$ — целая часть x) и пусть

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}} > 0\right) = 1/2.$$

Найти $\mathsf{E}\{\xi_1\}$ ($\{x\}$ — дробная часть x).

6.86. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\mathsf{P}(\xi_1 = 0) > 0$, $\mathsf{P}(\xi_1 = 1) > 0$. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности распределений случайных величин $\{\eta_n/2 + 1/2\}$ ($\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $\{x\}$ — дробная часть x). Будет ли иметь место сходимость по вариации?

6.87. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности распределений случайных величин $[\eta_n/\sqrt{n}]$ $\left(\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ [x] — \text{целая часть } x\right)$.

Будет ли иметь место сходимость по вариации?

6.88. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Доказать, что величины

$$\eta = \sqrt{n}\,\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2} \quad \text{и} \quad \zeta = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}}$$

асимптотически нормальны.

6.89. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем $\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots$ одинаково распределены и $\xi_2, \xi_4, \xi_6, \ldots$ одинаково распределены,

$$\mathsf{E}\xi_1^2 < \infty, \quad \mathsf{E}\xi_2^2 < \infty, \quad \mathsf{D}\xi_1 > 0, \quad \mathsf{D}\xi_2 > 0.$$

Положим

$$\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad \overset{*}{\eta}_n = \frac{\eta_n - \mathsf{E}\eta_n}{\sqrt{\mathsf{D}\eta_n}}.$$

Найти предельное (в смысле слабой сходимости) распределение для $\overset{*}{\eta}_n$.

6.90. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое пуассоновское с параметром λ распределение. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (\xi_{2i-1} - \xi_{2i})}{\sqrt{n}} < x\right).$$

6.91. Доказать, что условие Линдеберга выполнено для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией.

6.92. Доказать, что если для последовательности случайных величин выполнено условие Ляпунова, то выполнено и условие Линдеберга.

6.93. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин, $\mathsf{E}\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\mathsf{D}\xi_1 = 1$, $\mathsf{D}\xi_k = 2^{k-2}$, $k \geqslant 2$. Показать, что в этом случае условие Линдеберга не выполнено, но ЦПТ имеет место.

6.94. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — последовательность целочисленных положительных случайных величин, таких, что при каждом i ν_i не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Пусть $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что если $\nu_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ при $n \to \infty$, то распределение $\eta_{\nu_n}/\sqrt{\nu_n}$ слабо сходится при $n \to \infty$ к стандартному нормальному закону.

6.95. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — последовательность целочисленных положительных случайных величин, таких, что $\mathsf{E}\nu_k = \alpha_k$, $\mathsf{D}\nu_k = \beta_k$ и при каждом k ν_k не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Пусть $\alpha_n \to \infty$ и $\beta_n = o(\alpha_n^2)$ при $n \to \infty$. Найти предельное (в смысле слабой сходимости) распределение для $\eta_{\nu_n}/\sqrt{D\eta_{\nu_n}}$ $(\eta_k = \xi_1 + \ldots \xi_k)$.

6.96. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием, единичной дисперсией и абсолютно интегрируемой характеристической функцией. Пусть $p^{(n)}(x)$ — плотность распределения случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}.$$

Доказать, что равномерно по x

$$\lim_{n \to \infty} p^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

6.97. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое равномерное на отрезке $[-a, a]$ распределение, $F_n(x)$ — функция распределения нормированной суммы

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n\mathsf{D}\xi_1}}.$$

Доказать, что

$$\sup_x \left| F_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leqslant \frac{1}{4\pi n} \left(1 + \frac{4}{n-1}\right).$$

6.98. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и конечным третьим абсолютным моментом $\mathsf{E}|\xi_1|^3 = \beta_3$. Пусть $f_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Доказать, что

$$\left| f_n(t) - e^{-t^2/2} \right| \leqslant 16 \frac{\beta_3}{\sigma^3 \sqrt{n}} e^{-t^2/3} |t|^3$$

при $|t| \leqslant \frac{\sigma^3 \sqrt{n}}{4\beta_3}$.

6.99. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с одинаковой функцией распределения $F(x)$, причем $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = \sigma^2$, $\mathbf{E}|\xi_1|^3 = \beta_3$, $F(x)$ симметрична, а соответствующая характеристическая функция $f(t)$ неотрицательна. Пусть

$$\sup_x F'(x) \leqslant A < \infty.$$

Доказать, что

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right| \leqslant \frac{C(A)\,\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

где $C(A)$ — положительная постоянная, зависящая только от A.

§ 5. Разные задачи

6.100. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $b_1, b_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел, $m\xi_i$ — медиана случайной величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$ Доказать, что если $\xi_n - b_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \to \infty$, то $\xi_n - m\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

6.101. Пусть последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ почти наверное сходится. Доказать, что существует постоянная a, такая, что $\mathbf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = a) = 1$.

6.102. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с функциями распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots$ соответственно. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\,dF_n(x) = 0.$$

6.103. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с конечными дисперсиями. Положим $a_n = \mathbf{E}\xi_n$, $\sigma_n^2 = \mathbf{D}\xi_n$. Доказать, что если $a_n \to \infty$ и $\sigma_n^2 = o\left(a_n^2\right)$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{\xi_n}{a_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

6.104. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями, $\eta_n = \xi_1 \ldots \xi_n$. Доказать, что если $\mathbf{E}|\xi_1| = \mathbf{E}|\xi_2| = \ldots < 1$, то $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \to \infty$. Верно ли обратное утверждение, если $\{\xi_i\}$ одинаково распределены?

6.105. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $\eta_n = \xi_1 \ldots \xi_n$. Доказать, что если для некоторого

$\alpha > 0$ $\mathsf{E}|\xi_1|^\alpha = \mathsf{E}|\xi_2|^\alpha = \ldots < 1$, то $n^\beta \eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $n \to \infty$ для любого вещественного β.

6.106. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\eta_n = \xi_1 \ldots \xi_n$. Доказать, что если $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} a$ при $n \to \infty$ (a — конечное вещественное число), то либо $a = 0$, либо $a = 1$, причем в последнем случае $\mathsf{P}(\xi_i = 1) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$

6.107. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с математическим ожиданием a,

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Доказать, что последовательность случайных величин $\zeta_n = \sqrt[n]{\eta_1 \ldots \eta_n}$ почти наверное сходится к a.

6.108. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями, а ξ — случайная величина с конечной дисперсией, такая, что при любом натуральном n $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ и $\xi - (\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ независимы. Доказать, что в этом случае все ξ_n имеют конечные дисперсии и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \mathsf{E}\xi_n)$ почти наверное сходится.

6.109. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин с конечным абсолютным моментом порядка $p > 0$. Положим

$$\eta_n = \begin{cases} 0, & |\xi_n| < n^{1/p}, \\ 1, & |\xi_n| \geqslant n^{1/p}. \end{cases}$$

Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\eta_n \leqslant \mathsf{E}|\xi_1|^p.$$

6.110. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин с конечным абсолютным моментом порядка $p > 0$. Положим

$$\eta_n = \begin{cases} \xi_n, & |\xi_n| < n^{1/p}, \\ 0, & |\xi_n| \geqslant n^{1/p}. \end{cases}$$

Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi_n \neq \eta_n) \leqslant \mathsf{E}|\xi_1|^p < \infty.$$

6.111. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $\alpha > \beta > 0$. Следует ли из сходимости ряда $\sum \mathsf{E}|\xi_n|^\alpha$ сходимость ряда $\sum \mathsf{E}|\xi_n|^\beta$?

6.112. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — равномерно интегрируемая последовательность случайных величин. Доказать, что

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{n} \sup_{1 \leqslant m \leqslant n} |\xi_m|\right) \to 0$$

при $n \to \infty$.

6.113. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности случайных величин, причем ξ_n асимптотически нормальна с параметрами $(a, h/\sqrt{n})$, а η_n асимптотически нормальна с параметрами $(b, k/\sqrt{n})$, $b \neq 0$. Доказать, что случайная величина

$$\zeta_n = \sqrt{n}\,\frac{\xi_n - a}{\eta_n}$$

асимптотически нормальна с параметрами $(0, h/b)$.

6.114. Пусть $f(x)$ — непрерывная ограниченная на $[0, \infty)$ функция. Доказать, что при $h > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \frac{(nh)^k}{k!} e^{-hn} = f(x + h).$$

6.115. Доказать, что случайная величина, измеримая относительно остаточной σ-алгебры, имеет вырожденное распределение.

6.116. Привести пример остаточной σ-алгебры, содержащей больше двух событий.

6.117. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Доказать, что случайные величины $\limsup \xi_n$ и $\liminf \xi_n$ являются вырожденными.

6.118. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, и пусть событие A_n заключается в том, что

$$\xi_1 + \ldots + \xi_n > a(2n \ln n)^{1/2},$$

где a — фиксированная постоянная. Доказать, что при $a > 1$ с вероятностью 1 осуществится только конечное число событий A_n.

6.119. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение. Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(\limsup \frac{\xi_n}{\sqrt{2 \ln n}} = 1\right) = 1.$$

6.120. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих пуассоновское распределение. Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(\limsup \frac{\xi_n \ln\ln n}{\ln n} = 1\right) = 1.$$

6.121. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с характеристической функцией

$$f(t) = \exp\{-|t|^\alpha\}, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Доказать, что

$$\mathbf{P}\left(\limsup \left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n^{1/\alpha}}\right|^{\frac{1}{\ln\ln n}} = e^{1/\alpha}\right) = 1.$$

6.122. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин,

$$\mathbf{E}\xi_k = m_k > 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} m_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_k}{\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)^2} < \infty.$$

Доказать, что с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = 1.$$

6.123. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $B_1, B_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел. Пусть последовательность распределений случайных величин

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n}$$

слабо сходится при $n \to \infty$ к некоторому невырожденному распределению F. Доказать, что в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = 1.$$

6.124. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием, $B_1, B_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел. Доказать, что если последовательность распределений случайных величин

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n}$$

слабо сходится при $n \to \infty$ к некоторому невырожденному распределению, то $\mathbf{E}\xi_i = 0$.

6.125. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих характеристическую функцию

$$f(t)=\begin{cases}1-|t|^{\alpha}, & |t|\leqslant 1,\\ 0 \quad, & |t|>1, \quad 0<\alpha\leqslant 1.\end{cases}$$

Подобрать последовательность вещественных чисел B_1, B_2, ... так, чтобы последовательность распределений случайных величин

$$\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{B_n}$$

слабо сходилась при $n\to\infty$ к некоторому предельному невырожденному распределению. Найти предельный закон.

6.126. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения

$$\frac{1-\cos x}{\pi x^2},$$

$\eta_n=\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$, $F_n(x)$ — функция распределения η_n. Доказать, что существует функция распределения $F(x)$, такая, что F_n слабо сходится к F при $n\to\infty$. Найти функцию распределения $F(x)$.

6.127. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, B_1, B_2, ...— последовательность положительных чисел, причем последовательность распределений случайных величин

$$\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{B_n}$$

слабо сходится при $n\to\infty$ к распределению с характеристической функцией

$$e^{-c|t|^{\alpha}},\quad c>0,\quad 0<\alpha\leqslant 2.$$

Доказать, что $B_n=n^{1/\alpha}h(n)$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} h(tx)/h(x)=1$ при $t>0$.

6.128. Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... ($B_n>0$) — две последовательности вещественных чисел, причем последовательность распределений случайных величин

$$\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n-A_n}{B_n}$$

слабо сходится при $n\to\infty$ к некоторому распределению. Доказать, что предельное распределение устойчиво.

6.129. Пусть случайная величина $\xi_{N,M,n}$ имеет *гипергеометрическое распределение* с параметрами N, M, n:

$$\mathbf{P}(\xi_{N,M,n}=m)=\begin{cases} C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n, & \max(0,\ M+n-N)\leqslant m\leqslant \min(n,\ M),\\ 0 & \text{в ином случае}\end{cases}$$

$$(M\leqslant N,\ n\leqslant N).$$

Доказать, что при $N\to\infty$, $M\to\infty$, $\frac{M}{N}\to p$, $0<p<1$, и фиксированном n гипергеометрическое распределение сходится к биномиальному распределению с параметром p:

$$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

6.130. Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ образует *схему Пуассона*, т. е. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и распределены так, что

$$\mathbf{P}(\xi_k=1)=p_k,\quad \mathbf{P}(\xi_k=0)=1-p_k,\qquad k=1, \ldots, n.$$

Обозначим $\mu_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Доказать, что если $p_1+\ldots+p_n\to\lambda>0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\mu_n=m)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}.$$

6.131 (*продолжение*). Пусть в схеме Пуассона $\mu_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$, $\lambda=p_1+\ldots+p_n$, $\delta=p_1^2+\ldots+p_n^2$, $0<p_j\leqslant 1/2$. Доказать, что при $n\geqslant 2$

$$\left|\mathbf{P}(\mu_n=m)-\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\right|\leqslant 2\delta.$$

6.132. Пусть случайные величины ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, имеют распределение, сосредоточенное на интервале $[0, 1)$. Доказать, что если при любом целом $k\neq 0$

$$\mathbf{E}e^{2\pi ik\xi_n}\to 0$$

при $n\to\infty$, то для любых α и β, $0\leqslant\alpha<\beta<1$,

$$\mathbf{P}(\alpha\leqslant\xi_n<\beta)\to\beta-\alpha.$$

6.133. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и одинаково распределены, причем $\mathbf{P}(0\leqslant\xi_n<1)=1$. Пусть $\eta_n=\{\xi_1+\ldots+\xi_n\}$ — дробная часть суммы $\xi_1+\ldots+\xi_n$. Если при $k\neq 0$

$$\mathbf{E}e^{2\pi ik\eta_n}\to 0,\quad n\to\infty,$$

то при любых α и β, $0\leqslant\alpha<\beta<1$,

$$\mathbf{P}(\alpha\leqslant\eta_n<\beta)\to\beta-\alpha.$$

(Это утверждение служит аналогом центральной предельной теоремы, когда случайные величины складываются по mod 1.)

§ 6. Применения предельных теорем

6.134. Найти приближенное значение для вероятности того, что число «успехов» S_n в схеме $n=100$ испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» $p=0{,}5$ лежит в пределах 35 и 65; 47 и 53. При каких значениях n вероятность того, что $0{,}35 \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant 0{,}65$, будет больше 0,998?

6.135 (*продолжение*). Каково должно быть число испытаний n, чтобы с вероятностью $1-\alpha$ частота «успеха» $\frac{S_n}{n}$ отличалась от вероятности «успеха» p не более, чем на $\varepsilon > 0$? Решить задачу при $\alpha = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}01$.

6.136 (*продолжение*). Предположим, что в схеме Бернулли с вероятностью «успеха» $p = \mathbf{P}(\xi_k = 1)$, $k = 1, \ldots, n$, значение p неизвестно и нужно определить его по значениям, которые принимают случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Наиболее естественно в качестве оценки p взять частоту «успеха» $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, поскольку $\mathbf{E}\hat{p}_n = p$ и $\mathbf{P}\{|\hat{p}_n - p| < \varepsilon\} > 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ при любом n. В качестве оценки можно указать интервал $[\bar{p}_n(\xi_1, \ldots, \xi_n), \bar{\bar{p}}_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)]$, $0 < \bar{p}_n < \bar{\bar{p}}_n < 1$, такой, что

$$\mathbf{P}(\bar{p}_n \leqslant p \leqslant \bar{\bar{p}}_n) \geqslant 1 - \alpha$$

для любого наперед заданного $0 < \alpha < 1$. Такой интервал называется *доверительным* интервалом для p уровня $1-\alpha$. Найти с помощью теоремы Муавра — Лапласа приближенный доверительный интервал для p.

6.137 (*экспериментальная оценка* π). Опыт Бюффона с бросанием иглы на плоскость, расчерченную параллельными прямыми (см. задачу **1.75**) использовался для вычисления числа π. В 19 и 20 веках было произведено множество экспериментов (см. о них подробнее в книге: Кендалл М. и Моран П. Геометрические вероятности: Пер. с англ.— М: Наука, 1972). В опыте Р. Вольфа из Цюриха длина иглы $l = 36$ мм, расстояние между прямыми $a = 45$ мм, игла была брошена $n = 5000$ раз и $m = 2532$ раза пересекла прямые. Если считать, что последовательность бросаний иглы соответствует схеме Бернулли с вероятностью «успеха» (игла пересекает прямую) $p = \frac{2l}{a\pi}$, то можно оценить погрешность экспериментальной оценки π.

1. В опыте Вольфа отклонение $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ не превышает 0,0029. Найти число бросаний иглы, при котором с вероятностью, большей 0,5, имеет место подобное отклонение.

2. По результатам опыта Вольфа найти доверительный интервал для числа π.

6.138. В январе 1935 г. в Швеции (по данным Г. Крамера) из общего числа 7280 новорожденных родилось 3743 мальчика. Гипотезу о конкретном значении вероятности p рождения мальчика можно проверить следующим образом. Допустим, что можно использовать схему Бернулли. По приведенным данным при определенном $0<\alpha<1$ нужно построить доверительный интервал $[\underline{p}_n, \overline{p}_n]$ для p уровня $1-\alpha$, а затем сравнить гипотетическое значение p_0 с границами доверительного интервала: если $p_0 \in [\underline{p}_n, \overline{p}_n]$, то считать гипотезу о том, что $p=p_0$ совместимой с данными, а в случае $p_0<\underline{p}_n$ или $p_0>\overline{p}_n$ — отказываться от гипотезы, имея в виду, что вероятность ошибочного заключения не превосходит α. Проверить гипотезы $p_0=0{,}5$; $p_0=0{,}515$; $p_0=0{,}55$.

6.139. В урне находятся шары белого и черного цвета. О составе урны известно лишь то, что доля белых шаров равна либо 0,5, либо 0,4. Из урны извлечено с возвращением 100 шаров и обнаружено, что белые шары составляют бо́льшую часть выборки. На почве этого наблюдения сделан вывод, что доля белых шаров в урне равна 0,5. Чему равна вероятность того, что принято ошибочное заключение?

6.140. Пусть произведено n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Допустим, что число успехов S_n оказалось равным m, $0<m<n$, и нужно проверить, согласуется ли это с какой-либо гипотезой относительно неизвестного значения p. Можно воспользоваться следующим критерием. Зададим число α, $0<\alpha<1$, и в предположении, что верна гипотеза $p=p_0$ вычислим вероятность $\mathbf{P}(S_n \geqslant m)$. Если эта вероятность меньше α, то отказываемся от гипотезы. В противоположном случае считаем, что гипотеза согласуется со статистическими данными.

При 1000 независимых бросаниях монеты герб выпал в 540 случаях. Проверить гипотезу о том, что монета симметрична при $\alpha=0{,}05$.

6.141 (*продолжение*). Пусть α задано. В предположении, что некоторая гипотеза $p=p_0$ верна, найдем наименьшее целое m_α, такое, что $\mathbf{P}(S_n \geqslant m_\alpha) \leqslant \alpha$. Критерий проверки гипотезы $p=p_0$ может быть таким: если $S_n \geqslant m_\alpha$, то отказываемся от гипотезы $p=p_0$; если же $S_n<m_\alpha$, то считаем, что гипотеза согласуется с данными. Вероятность ошибочного отказа от гипотезы не превосходит α.

Проверить гипотезу о вероятности рождения мальчиков из задачи 6.138.

6.142. Предположим, что в схеме испытаний Бернулли есть две гипотезы о вероятности «успеха» p_1 и p_2, $0<p_1<p_2<1$. Для различения этих гипотез произведено n испытаний и в результате получено $\{S_n=m\}$. Пусть заданы числа α и β, $0<\alpha$, $\beta<1$, и пусть n таково, что существует целое положительное число m^*, такое, что

$$\mathbf{Q}_1=\mathbf{P}_{p_1}(S_n>m^*) \leqslant \alpha, \quad \mathbf{Q}_2=\mathbf{P}_{p_2}(S_n \leqslant m^*) \leqslant \beta,$$

где первая вероятность вычислена в предположении, что $p=p_1$, а вторая — в предположении $p=p_2$. Тогда критерий проверки гипотез строится так: если $m>m^*$, то гипотеза $p=p_1$ отбрасывается, а гипотеза $p=p_2$ считается приемлемой; если же $m\leqslant m^*$, то наоборот, гипотеза $p=p_1$ принимается, а $p=p_2$ — отбрасывается. Указанные выше вероятности $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ интерпретируются как вероятности ошибочных заключений.

Применить предложенную процедуру проверки к задаче де Мере (см. задачу **1.26**), а именно ответить на вопрос: сколько нужно провести испытаний, чтобы различить две вероятности успеха $p_1=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ и $p_2=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$ при заданных $\alpha=\beta=0{,}05$.

6.143. Доказать, что гипергеометрическое распределение при $N\to\infty$, $M\to\infty$, $n\to\infty$, $\frac{nM}{N}\to\lambda>0$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ.

6.144. Доказать, что гипергеометрическое распределение при $N\to\infty$, $M\to\infty$, $n\to\infty$, $\frac{nM}{N}\to\infty$ сходится к нормальному распределению.

6.145. Случайная величина χ_n^2 имеет хи-квадрат распределение с n степенями свободы (так называется распределение с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,x^{n-1}e^{-x^2/2},\quad x\geqslant 0,$$

см. задачу **3.167**). Доказать, что распределение нормированной случайной величины $\dfrac{\chi_n^2-\mathbf{E}\chi_n^2}{\sqrt{\mathbf{D}\chi_n^2}}$ асимптотически нормально с параметрами $(0, 1)$.

6.146. Случайная величина ξ_λ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda>0$. Доказать, что при $\lambda\to\infty$ случайная величина $\dfrac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

6.147. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и имеют одинаковое распределение Пуассона с параметром λ. Обозначим $\bar{\xi}_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\ldots+\xi_n)$.

1. Доказать, что $\bar{\xi}_n\xrightarrow{\mathbf{P}}\lambda$ при $n\to\infty$.
2. Построить доверительный интервал для λ, т. е. указать такие $\lambda_1(\bar{\xi}_n)$ и $\lambda_2(\bar{\xi}_n)$, чтобы при заданном $0<\alpha<1$

$$\mathbf{P}(\lambda_1(\bar{\xi}_n)\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2(\bar{\xi}_n))\geqslant 1-\alpha.$$

6.148. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и имеют одинаковое равномерное распределение на отрезке $[\theta-1/2, \theta+1/2]$. Предполагается, что значение θ неизвестно. Пусть при

$n=100$ величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ приняли некоторое конкретное значение, так что среднее арифметическое $\overline{\xi} = \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ равно a. Пользуясь центральной предельной теоремой, найти доверительный интервал, который содержит неизвестное значение θ с вероятностью, приближенно равной 0,95.

6.149. Необходимо сложить миллион чисел, округленных с точностью до пятого десятичного знака. В предположении, что ошибки округления всех чисел взаимно независимы и имеют равномерное распределение в соответствующем интервале, найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 находится суммарная ошибка округления.

6.150. Пусть α — произвольное иррациональное число. Рассмотрим числа $n\alpha$, кратные α при $n=1, \ldots, N$, и их дробные части $\{n\alpha\} = n\alpha - [n\alpha]$. Доказать, что дробные доли $\{n\alpha\}$ распределены в интервале $[0, 1)$ почти равномерно в следующем смысле: для любых α и β, $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$,

$$\frac{N(\alpha, \beta)}{N} \to \beta - \alpha, \quad N \to \infty,$$

где $N(\alpha, \beta)$ — число значений $\{n\alpha\}$, при $n=1, \ldots, N$ содержащихся в интервале (α, β).

6.151. Пусть действительная случайная величина ξ распределена с плотностью $p(x)$, у которой существует абсолютно интегрируемая на всей прямой производная $p'(x)$. Рассмотрим десятичное разложение ξ:

$$\xi = [\xi] + \frac{a_1(\xi)}{10} + \frac{a_2(\xi)}{10^2} + \ldots + \frac{a_n(\xi)}{10^n} + \delta^{(n)}(\xi),$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — первые n десятичных знаков, а $\delta^{(n)}(\xi)$ — ошибка округления. Доказать, что случайная величина $\Delta^{(n)} = 10^n \delta^{(n)}(\xi)$ имеет при $n \to \infty$ асимптотически равномерное распределение в интервале $[0, 1)$, т. е. при $n \to \infty$ и $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$

$$\mathbf{P}(\alpha \leqslant \Delta^{(n)} \leqslant \beta) \to \beta - \alpha.$$

6.152. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ при каждом n взаимно независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$. Определим для каждого действительного x случайную величину $\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\mu_n(x)$, где $\mu_n(x)$ — число $\xi_1, \ldots, \xi_n$, удовлетворяющих неравенству $\xi_k < x$. Доказать, что при каждом x

$$\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{\mathbf{P}} F(x).$$

Будет ли эта сходимость выполняться с вероятностью 1?

$\widehat{F}_n(x)$ называется *эмпирической функцией распределения* для $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

6.153 (*продолжение*). Обозначим через α_k и μ_k соответствующие моменты распределения ξ_i:

$$\alpha_k = \mathsf{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x),$$

$$\mu_k = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha_1)^k dF(x).$$

Рассмотрим случайные величины

$$a_1^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad m_2^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a_1^{(n)})^2.$$

Показать, что при $n \to \infty$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|a_1^{(n)} - \alpha_1| > \varepsilon) \to 0, \quad \mathsf{P}(|m_2^{(n)} - \mu_2| > \varepsilon) \to 0.$$

Случайные величины $a_1^{(n)}$ и $m_2^{(n)}$ называются, соответственно, *выборочным средним* и *выборочной дисперсией*, а утверждаемое свойство их — *состоятельностью.*

6.154 (*продолжение*). Доказать следующие утверждения. Если $\alpha_2 < \infty$, то при $n \to \infty$ величина a_1 асимптотически нормальна с параметрами $\left(\alpha_1, \frac{\alpha_2 - \alpha_1^2}{n}\right)$.

Если $\mu_4 < \infty$, то при $n \to \infty$ величина m_2 асимптотически нормальна с параметрами $\left(\mu_2, \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}\right)$.

Если $\alpha_{2k} < \infty$, то при $n \to \infty$ величина a_k асимптотически нормальна с параметрами $\left(\alpha_k, \frac{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}{n}\right)$.

6.155 (*метод Монте-Карло статистических испытаний*). Вычисление интеграла $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ можно описать следующим образом. Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$\mathsf{E}f(\xi) = \int_0^1 f(x)\,dx = I.$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$. Рассмотрим $\bar{f}_n = \frac{1}{n}[f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)]$ и предположим, что $\sigma^2 = \mathsf{D}\bar{f}_n \leqslant C$. Показать, что $\mathsf{E}\bar{f}_n = I$ и $\bar{f}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} I$, $n \to \infty$. Оценить $\mathsf{P}(|\bar{f}_n - I| < \varepsilon)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ с помощью центральной предельной теоремы.

6.156 (*теорема Вейерштрасса*). Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[0,1]$. Пусть последовательность случайных величин

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ соответствует схеме Бернулли с вероятностью успеха $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = x$, $0 < x < 1$, и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Введем многочлены

$$B_n(x) = \mathbf{E} f\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Доказать, что при $n \to \infty$

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - B_n(x)| \to 0.$$

(Многочлены $B_n(x)$ называются *многочленами Бернштейна.*)

6.157. Рассмотрим двоичное разложение числа $\xi \in [0, 1)$

$$\xi = \frac{\xi_1}{2} + \frac{\xi_2}{2^2} + \ldots + \frac{\xi_n}{2^n} + \ldots$$

(с бесконечным числом нулей). Тогда по отношению к лебеговой мере знаки двоичного разложения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = \mathbf{P}(\xi_i = 0) = 1/2$.

Доказать, что для почти всех чисел $\xi \in [0, 1)$ доля единиц и нулей в двоичном разложении ξ с вероятностью 1 стремится к 1/2:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{(\xi_k = 1)} \to \frac{1}{2}.$$

Глава 7

УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, ξ — определенная на нем случайная величина, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, содержащаяся в $\mathscr{A}$. Если ξ неотрицательна и $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, то *ее условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$* определяется как случайная величина $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})$ измерима относительно $\mathscr{B}$;

2) для любого $A \in \mathscr{B}$

$$\int_A \xi(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega) = \int_A \mathbf{E}(\xi|B)\,\mathbf{P}(d\omega).$$

Для произвольной случайной величины ξ *условное математическое ожидание относительно $\mathscr{B}$* определяется как

$$\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) = \mathbf{E}(\xi^+|\mathscr{B}) - \mathbf{E}(\xi^-|\mathscr{B}),$$

при условии, что

$$\min\{\mathbf{E}(\xi^+|\mathscr{B}),\ \ \mathbf{E}(\xi^-|\mathscr{B})\} < \infty,$$

где $\xi^+ = \max\{\xi, 0\}$, $\xi^- = -\min\{\xi, 0\}$.

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно случайной величины η называется условное математическое ожидание ξ относительно σ-алгебры, порожденной η.

Пусть B — произвольное событие $(B \in \mathscr{A})$. *Условной вероятностью* события B относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$ называется условное математическое ожидание индикатора этого события I_B: $\mathbf{P}(B|\mathscr{B}) = \mathbf{E}(I_B|\mathscr{B})$. Таким образом, для любого $A \in \mathscr{B}$

$$\mathbf{P}(AB) = \int_A \mathbf{P}(B\,|\,\mathscr{B})\,\mathbf{P}(d\omega).$$

Имеют место следующие свойства условного математического ожидания.

1. Если c — постоянная и $\xi = c$ почти наверное (п. н.), то $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) = c$ п. н.
2. Если $\xi \leqslant \eta$ п. н., то $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) \leqslant \mathbf{E}(\eta|\mathscr{B})$ п. н.
3. $|\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})| \leqslant \mathbf{E}(|\xi|\,|\mathscr{B})$ п. н.
4. Если a и b — постоянные и существует $a\mathbf{E}\xi + b\mathbf{E}\eta$, то

$$\mathbf{E}(a\xi + b\eta|\mathscr{B}) = a\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) + b\mathbf{E}(\eta|\mathscr{B}).$$

5. Если $\mathscr{B} = \{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная σ-алгебра, то

$$\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) = \mathbf{E}\xi \text{ п. н.}$$

6. $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{A}) = \xi$ п. н.
7. $\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})) = \mathbf{E}\xi$.
8. Если ξ не зависит от $\mathscr{B}$, то

$$\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) = \mathbf{E}\xi \text{ п. н.}$$

9. Если η $\mathscr{B}$-измерима и $\mathbf{E}|\xi|<\infty$, $\mathbf{E}|\eta|<\infty$, то

$$\mathbf{E}(\xi\eta|\mathscr{B})=\eta\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) \text{ п. н.}$$

10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин. Если $|\xi_n|\leqslant\eta$, $\mathbf{E}\eta<\infty$ и $\xi_n\to\xi$ п. н., то

$$\mathbf{E}(\xi_n|\mathscr{B})\to\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) \text{ п. н.}, \quad \mathbf{E}(|\xi_n-\xi||\mathscr{B})\to 0 \text{ п. н.}$$

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, содержащаяся в $\mathscr{A}$. Семейство условных вероятностей $\mathbf{P}(A|\mathscr{B})$, $A\in\mathscr{A}$ называется *регулярным*, если существует функция $p(\omega, A)$, такая, что:

1) при фиксированном ω $p(\omega, A)$ является вероятностью на $\mathscr{A}$;

2) $\mathbf{P}(A|\mathscr{B})=p(\omega, A)$ п. н. при любом фиксированном A.

Пусть $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ и $\mathscr{B}$ — σ-алгебры, содержащиеся в $\mathscr{A}$. Будем говорить, что $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ *условно независимы при данном* $\mathscr{B}$, если для любых $\mathscr{B}_1\in\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2\in\mathscr{B}_2$

$$\mathbf{P}(B_1B_2|\mathscr{B})=\mathbf{P}(B_1|\mathscr{B})\mathbf{P}(B_2|\mathscr{B}).$$

Случайные величины ξ и η будем называть *условно независимыми при данном* $\mathscr{B}$, если условно независимы порождаемые ими σ-алгебры.

Пусть ξ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, $\mathscr{B}\subset A$ — некоторая σ-алгебра. Функция $Q(\omega, B)$, $\omega\in\Omega$, B — борелевское множество на прямой, называется *регулярным условным распределением* случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$, если:

1) при фиксированном B $Q(\omega, B)$ $\mathscr{B}$-измерима;

2) для почти всех ω $Q(\omega, B)$ является вероятностной мерой;

3) при каждом B $Q(\omega, B)=\mathbf{P}(\xi\in B|\mathscr{B})$ п. н.

7.1. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega=[0,1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, $\mathbf{P}$ — мера Лебега, задана случайная величина ξ. Пусть $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, порожденная множествами $[0, 1/3)$, $\{1/3\}$ и $(1/3, 1/2)$. Найти $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})$, если

а) $\xi=\omega$; б) $\xi=\sin\pi\omega$; в) $\xi=\omega^2$; г) $\xi=1-\omega$;

д) $\xi=\begin{cases}1, & \omega\in[0, 1/3],\\ 2, & \omega\in(1/3, 1].\end{cases}$

7.2. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})$.

7.3. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega=[0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, $\mathbf{P}$ — мера Лебега, задана случайная величина $\xi=\omega$. Найти $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})$, если:

а) $\mathscr{B}$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$, симметричных относительно точки $1/2$; б) $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, порожденная множествами $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$; в) $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, порожденная случайной величиной $\eta=\min\{2\omega, 1\}$.

7.4. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Найти $\mathbf{DE}(\xi\eta|\xi)$, если:

а) ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, а η имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2; б) ξ и η имеют показательное распределение с параметрами λ и μ соответственно.

7.5. Пусть случайная величина ξ принимает не более n значений. Верно ли, что $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})$ также принимает не более n значений?

7.6. Доказать, что если все события σ-алгебры $\mathscr{B}$ имеют вероятность 0 или 1, то с вероятностью 1

$$\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})=\mathbf{E}\xi.$$

7.7. Пусть ξ — случайная величина и $\varphi(x)$ — борелевская функция, такая, что $\mathbf{E}\varphi(\xi)$ существует. Доказать, что

$$\mathbf{E}(\varphi(\xi)\,|\,\xi)=\varphi(\xi).$$

7.8. Доказать, что если σ-алгебры $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ независимы, то для любых ξ и η случайные величины $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}_1)$ и $\mathbf{E}(\eta|\mathscr{B}_2)$ независимы.

7.9. Пусть $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — независимые σ-алгебры. Доказать, что для любой случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание, с вероятностью 1

$$\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}_1\cap\mathscr{B}_2)=\mathbf{E}\xi.$$

7.10. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где Ω — отрезок $[0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств Ω, $\mathbf{P}$ — мера Лебега, задана случайная величина $\eta=\omega$. Доказать, что для любой случайной величины ξ с вероятностью 1 $\mathbf{E}(\xi|\eta)=\xi$.

7.11. Обязана ли случайная величина $\mathbf{E}(\xi|\eta)$ быть измеримой относительно σ-алгебры, порожденной случайной величиной ξ?

7.12. Пусть ξ и η — случайные величины с конечным математическим ожиданием. Доказать, что если существует случайная величина ζ такая, что $\mathbf{E}(\xi|\zeta)=\eta$, то $\mathbf{E}\xi=\mathbf{E}\eta$. Верно ли обратное, т. е. следует ли из равенства $\mathbf{E}\xi=\mathbf{E}\eta$, существование ζ такой, что $\mathbf{E}(\xi|\zeta)=\eta$?

7.13. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием. Доказать, что случайные величины $\mathbf{E}(\xi|\xi+\eta)$ и $\mathbf{E}(\eta|\xi+\eta)$ одинаково распределены. В каком случае они будут независимы?

7.14. Доказать, что в условиях предыдущей задачи

$$\mathbf{E}(\xi|\xi+\eta)=\mathbf{E}(\eta|\xi+\eta)\quad \text{п. н.}$$

7.15. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\mathbf{E}(\xi\,|\,\xi+\eta)=\mathbf{E}(\eta\,|\,\xi+\eta)=\frac{\xi+\eta}{2}\quad \text{п. н.}$$

7.16. Пусть $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, ... — невозрастающая последовательность σ-алгебр, ξ — случайная величина. Найти

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\ldots\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}_1)|\mathscr{B}_2)\ldots|\mathscr{B}_n).$$

7.17. Пусть $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, ... — неубывающая последовательность σ-алгебр, ξ — случайная величина. Найти

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\ldots\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}_1)|\mathscr{B}_2)\ldots|\mathscr{B}_n).$$

7.18. Пусть ξ и η — случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что если с вероятностью 1 $\mathbf{E}(\xi|\eta)=\eta$ и $\mathbf{E}(\eta|\xi)=\xi$, то $\xi=\eta$ п. н.

7.19. Пусть ξ — случайная величина с математическим ожиданием a, $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — независимые σ-алгебры, $\xi_1 = \mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}_1)$, $\xi_2 = \mathbf{E}(\xi_1|\mathscr{B}_2)$. Найти распределение ξ_2.

7.20. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что

$$\mathbf{E}(\xi_1|\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots) = \eta_n/n$$

с вероятностью единица.

7.21 (*неравенство Иенсена*). Пусть $\varphi(x)$ — выпуклая функция, ξ — случайная величина, такая, что $E|\varphi(\xi)| < \infty$. Доказать, что

$$\mathbf{E}(\varphi(\xi)|\mathscr{B}) \geqslant \varphi(\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})).$$

7.22. Доказать, что $\mathbf{DE}(\xi|\mathscr{B}) \leqslant \mathbf{D}\xi$.

7.23. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \beta \leqslant 1$, $\alpha + \beta \leqslant 1$, ξ и η — случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что

$$\mathbf{E}(|\xi|^\alpha |\eta|^\beta|\mathscr{B}) \leqslant [\mathbf{E}(|\xi||\mathscr{B})]^\alpha [\mathbf{E}(|\eta||\mathscr{B})]^\beta.$$

7.24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, η — случайная величина с конечной дисперсией, $a = \mathbf{E}\eta$. Доказать, что

$$\frac{1}{n}(\mathbf{E}(\eta|\xi_1) + \ldots + \mathbf{E}(\eta|\xi_n)) \xrightarrow{\mathbf{P}} a$$

при $n \to \infty$.

7.25. Справедливо ли следующее утверждение: если $\xi_n \to \xi$ п. н., то для любой случайной величины η

$$\mathbf{E}(\eta|\xi_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}(\eta|\xi)?$$

7.26. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра. Доказать, что если для некоторого $p \geqslant 1$ $\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\mathbf{E}|\mathbf{E}(\xi_n|\mathscr{B}) - \mathbf{E}(\xi|\mathscr{B})|^p \to 0.$$

7.27. Пусть $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots$ — последовательность σ-алгебр, ξ и η — случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что если $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}_n) \to \eta$ п. н. при $n \to \infty$, то $\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}) = \mathbf{E}(\eta|\mathscr{B})$ п. н., где $\mathscr{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$.

7.28. Пусть ξ и η — случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что если существует последовательность случайных величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ такая, что $\mathbf{E}(\xi|\zeta_n) \to \eta$ п. н. при $n \to \infty$, то $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta$.

7.29. Пусть $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2 \subset \ldots$ — неубывающая последовательность σ-алгебр, ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\mathbf{E}(\xi|\mathscr{B}_k)| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}|\xi|}{\varepsilon}.$$

7.30. Пусть $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2 \subset \ldots$ — неубывающая последовательность σ-алгебр,

$$\mathscr{B} = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n\right),$$

ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_n) \to \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B})$ п. н.

7.31. Пусть $\mathscr{B}_1 \supset \mathscr{B}_2 \supset \ldots$ — невозрастающая последовательность σ-алгебр,

$$\mathscr{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n,$$

ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_n) \to \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B})$ п. н.

7.32. Пусть $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, ... — последовательность σ-алгебр, ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что последовательность $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_1)$, $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_2)$, ... равномерно интегрируема.

7.33. Доказать, что случайная величина ξ и σ-алгебра $\mathscr{B}$ независимы тогда и только тогда, когда для любой борелевской функции $\varphi(x)$, такой, что $\mathsf{E}|\varphi(\xi)| < \infty$, выполнено равенство

$$\mathsf{E}(\varphi(\xi)|\mathscr{B}) = \mathsf{E}\varphi(\xi).$$

7.34. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Доказать, что для любого события A

$$\mathsf{P}(A) = \int_{\Omega} \mathsf{P}(A|\mathscr{B})\,\mathsf{P}(d\omega).$$

7.35. Доказать, что любые две случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, условно независимы относительно σ-алгебры $\mathscr{A}$.

7.36. Доказать, что случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда они условно независимы относительно тривиальной σ-алгебры $\mathscr{B} = \{\varnothing, \Omega\}$.

7.37. Доказать, что σ-алгебры $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ условно независимы относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда для любого $B_2 \in \mathscr{B}_2$

$$\mathsf{P}(B_2|\mathscr{B}\mathscr{B}_1) = \mathsf{P}(B_2|\mathscr{B}).$$

7.38. Пусть случайные величины ξ и η независимы. Могут ли они быть условно зависимыми относительно какой-нибудь σ-алгебры $\mathscr{B}$?

7.39. Пусть $\mathsf{P}(A|\mathscr{B})$, $A \in \mathscr{A}$, — регулярное семейство условных вероятностей, ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\mathbf{E}(\xi\,|\,\mathscr{B}) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega\,|\,\mathscr{B}) \text{ п. н.}$$

7.40. Пусть $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\Omega=(0, 1)$, $\mathbf{P}$ — мера Лебега на $\mathscr{B}$, $C\subset\Omega$ — множество, имеющее внешнюю меру Лебега 1 и внутреннюю меру Лебега 0. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}_C)$, где $\mathscr{A}$ — σ-алгебра множеств вида $A=B_1C+B_2\overline{C}$, B_1, $B_2\in\mathscr{B}$, $\mathbf{P}_C(A)=\frac{1}{2}\mathbf{P}(B_1)+\frac{1}{2}\mathbf{P}(B_2)$. Доказать, что семейство условных вероятностей $\mathbf{P}_C(A\,|\,\mathscr{B})$ не является регулярным.

7.41. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega=[0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, $\mathbf{P}$ — мера Лебега. Доказать, что семейство условных вероятностей $\mathbf{P}(A\,|\,\mathscr{B})$ является регулярным, если:

а) $\mathscr{B}=\{\varnothing, \Omega\}$; б) $\mathscr{B}=\mathscr{A}$; в) $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, порожденная множеством $[0, 1/2)$.

7.42. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega=[0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских множеств, $\mathbf{P}$ — мера Лебега, задана случайная величина $\xi(\omega)=\omega$. Найти условное распределение ξ относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$, порожденной случайной величиной η, если

а) $\eta=\begin{cases}1, & \omega\in[0, 1/3),\\ 0, & \omega\in[1/3, 1];\end{cases}$ б) $\eta=\sin\pi\omega$;

в) $\eta=\begin{cases}1-3\omega, & \omega\in[0, 1/3),\\ \dfrac{3\omega-1}{2}, & \omega\in[1/3, 1].\end{cases}$

Глава 8

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие безгранично делимого распределения возникает при изучении случайных процессов с независимыми приращениями и при исследовании распределений, являющихся предельными для распределений сумм независимых случайных величин.

Распределение вероятностей или соответствующая функция распределения $F(x)$ называются *безгранично делимыми*, если для любого целого положительного n существует функция распределения $F_n(x)$, такая, что

$$F(x) = \underbrace{F_n * \ldots * F_n}_{n \text{ раз}}(x).$$

Соответствующая характеристическая функция называется безгранично делимой. Таким образом, характеристическая функция $f(t)$ называется *безгранично делимой*, если для любого целого положительного n существует характеристическая функция $f_n(t)$, такая, что

$$f(t) = [f_n(t)]^n.$$

Примерами безгранично делимых распределений могут служить нормальное, пуассоновское, показательное распределения, распределение Коши (см. задачи 8.14, 8.5).

Безгранично делимые характеристические функции распределений допускают следующее каноническое представление.

Каноническое представление Леви — Хинчина. Функция $f(t)$ является безгранично делимой характеристической функцией тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$f(t) = \exp\left\{it\gamma + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right\}, \tag{1}$$

где $G(u)$ — неубывающая ограниченная функция, γ — вещественное число. При $u = 0$ подынтегральная функция полагается равной $-\frac{t^2}{2}$.

Иногда предпочтительнее пользоваться другим представлением.

Каноническое представление Леви. Функция $f(t)$ является безгранично делимой характеристической функцией тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$f(t) = \exp\left\{i\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{-0}\left(e^{itu} - 1 + \frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u) + \right.$$

$$\left. + \int_{+0}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 + \frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u)\right\}, \tag{2}$$

где γ и σ — вещественные постоянные, $M(u)$ и $N(u)$ — неубывающие функции, $M(u) \geqslant 0$, $N(u) \leqslant 0$,

$$\lim_{u \to -\infty} M(u) = \lim_{u \to \infty} N(u) = 0.$$

В случае, когда существует дисперсия, имеет место более удобное представление Колмогорова.

Каноническое представление Колмогорова. Функция $f(t)$ является характеристической функцией безгранично делимого распределения с конечной дисперсией тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$f(t) = \exp\left\{i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - itu\right)\frac{1}{u^2}\, dK(u)\right\}, \tag{3}$$

где γ — вещественная постоянная, а $K(u)$ — неубывающая ограниченная функция, такая, что $K(-\infty) = 0$.

Каждое из представлений (1), (2) и (3) единственно.

Важным подклассом безгранично делимых распределений является класс устойчивых распределений.

Распределение вероятностей или соответствующая функция распределения $F(x)$ называются *устойчивыми*, если для любых положительных b_1 и b_2 и любых вещественных c_1 и c_2 существуют положительное число b и действительное число c, такие, что

$$F\left(\frac{x - c_1}{b_1}\right) * F\left(\frac{x - c_2}{b_2}\right) = F\left(\frac{x - c}{b}\right).$$

В терминах характеристических функций это определение может быть сформулировано следующим образом. Характеристическая функция $f(t)$ называется *устойчивой*, если для любых положительных b_1 и b_2 существуют положительное число b и действительное число γ, такие, что

$$f(b_1 t)\cdot f(b_2 t) = f(bt)e^{i\gamma t}.$$

Характеристические функции устойчивых распределений допускают следующее представление: $f(t)$ устойчива тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$f(t) = \exp\left\{it\beta - d\,|t|^{\alpha}\left(1 + i\theta\frac{t}{|t|}G(t, \alpha)\right)\right\},$$

где $0 < \alpha \leqslant 2$, β — вещественное число, $d \geqslant 0$, $|\theta| \leqslant 1$, при $t = 0$ полагаем $\dfrac{t}{|t|} = 0$,

$$G(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}\alpha & \text{при} \quad \alpha \neq 1, \\ \dfrac{2}{\pi}\ln|t| & \text{при} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

В симметричном случае это представление может быть существенно упрощено: для того, чтобы симметричная характеристическая функция $f(t)$ была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$f(t) = e^{-d|t|^{\alpha}}, \quad d \geqslant 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 2.$$

8.1. Пусть случайная величина ξ имеет безгранично делимое распределение. Доказать, что при любых вещественных a и b распределение случайной величины $a\xi + b$ также безгранично делимо.

8.2. Доказать, что слабый предел последовательности безгранично делимых распределений безгранично делим.

8.3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с безгранично делимым распределением. Доказать, что случайная величина $\xi+\eta$ имеет также безграничное распределение.

8.4. Пусть $f(t)$ — безгранично делимая характеристическая функция. Доказать, что характеристическая функция $|f(t)|$ также безгранично делима.

8.5. Доказать, что безгранично делимая характеристическая функция нигде не обращается в нуль.

8.6. Доказать, что показательное распределение безгранично делимо и найти его «корень k-й степени».

8.7. Пусть $f(t)$ — безгранично делимая характеристическая функция. Доказать, что для любого $\alpha>0$ функция $(f(t))^{\alpha}$ также является безгранично делимой характеристической функцией.

8.8. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, такая, что для некоторой последовательности целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots$, удовлетворяющей условию $n_k \to \infty$ при $k\to\infty$, функции

$$(f(t))^{1/n_k}, \quad k=1,2,\ldots,$$

являются характеристическими. Доказать, что $f(t)$ безгранично делима.

8.9. Доказать, что равномерное на отрезке распределение не может быть безгранично делимым.

8.10. Доказать, что распределение с плотностью $\frac{2}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{2}$ не является безгранично делимым.

8.11. Доказать, что:

а) распределение Пуассона, б) отрицательное биномиальное распределение, в) нормальное распределение, г) распределение Коши являются безгранично делимыми.

8.12. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем ξ имеет равномерное на некотором отрезке распределение. Доказать, что случайная величина $\xi+\eta$ не может иметь безгранично делимое распределение.

8.13. Пусть $F(x)$ — произвольная функция распределения. Доказать, что ни при каком $a\neq 0$ функция распределения

$$\frac{F(x)+F(x+a)}{2}$$

не может быть безгранично делимой.

8.14. Доказать, что непрерывная, линейная на каждом отрезке $[n, n+1]$, $n=0, \pm 1, \ldots$ функция не может быть безгранично делимой функцией распределения.

8.15. Случайная величина ξ, определенная на некотором вероятностном пространстве, может быть названа *безгранично делимой*, если при любом целом положительном n она может быть представлена в виде суммы n независимых, одинаково распределенных случайных величин, заданных на том же вероятностном пространстве. Привести пример величины, которая не является безгранично делимой, но имеет безгранично делимое распределение.

8.16. Доказать, что безгранично делимая невырожденная случайная величина не может быть с вероятностью единица ограниченной.

8.17. Пусть $\varphi(t)$ — любая характеристическая функция и p — произвольное положительное число. Доказать, что функция

$$f(t)=\exp\{p(\varphi(t)-1)\}$$

является безгранично делимой характеристической функцией.

8.18. Доказать, что любая безгранично делимая характеристическая функция $f(t)$ представима в виде

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\exp\{p_n(\varphi_n(t)-1)\},$$

где p_n — положительные числа, а $\varphi_n(t)$ — некоторые характеристические функции.

8.19. Пусть $\varphi(t)$ — произвольная характеристическая функция. Доказать, что для любого $a>1$ функция

$$f(t)=\frac{a-1}{a-\varphi(t)}$$

есть безгранично делимая характеристическая функция.

8.20. Доказать, что геометрическое распределение безгранично делимо.

8.21. Пусть $\psi(t)$ — произвольная непрерывная неположительная четная функция, выпуклая при $t\geqslant 0$, $\psi(0)=0$ Доказать, что $e^{\psi(t)}$ — безгранично делимая характеристическая функция.

8.22. Доказать, что нормальное распределение и распределение Коши являются устойчивыми.

8.23. Можно ли утверждать, что сумма независимых случайных величин, каждая из которых имеет устойчивое распределение, также имеет устойчивое распределение?

8.24. Доказать, что любое устойчивое распределение является безгранично делимым.

8.25. Является ли устойчивым показательное распределение?

8.26. Доказать, что распределение с характеристической функцией $\exp\{-c|t|^{\alpha}\}$, где $c>0$ и $0<\alpha\leqslant 2$, является устойчивым.

8.27. Доказать, что для устойчивой случайной величины ξ

$$\mathbf{E}|\xi|^r<\infty$$

для всех $r\in(0,\alpha)$, где α — параметр в каноническом представлении устойчивых распределений.

8.28. Доказать, что характеристическая функция устойчивого с параметром α распределения при $0<\alpha\leqslant 1$ не дифференцируема в нуле.

8.29. Может ли безгранично делимое распределение быть дискретным, но не решетчатым?

8.30. Пусть $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_n$ — произвольные положительные числа, такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

Доказать, что распределение с плотностью

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k c_k}{\pi\left(c_k^2 + x^2\right)}$$

безгранично делимо.

8.31. Пусть $f(x)$ — положительная измеримая функция, $F(x)$ — функция распределения. Доказать, что распределение с плотностью

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)\, dF(u)}{\pi\left(f^2(u) + x^2\right)}$$

безгранично делимо.

8.32. Доказать, что функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left\{-c_k |t|^{\alpha_k}\right\},$$

где $a_k \geqslant 0$, $\sum a_k = 1$, $c_k \geqslant 0$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, является характеристической функцией безгранично делимого распределения.

8.33. Может ли производящая функция целочисленного неотрицательного безгранично делимого распределения обращаться в нуль?

8.34. Пусть ξ — целочисленная случайная величина с безгранично делимым распределением. Доказать, что $\mathbf{P}(\xi$ делится на два$) \neq$ $\neq \mathbf{P}(\xi$ не делится на два$)$.

8.35. Пусть ξ — целочисленная случайная величина с симметричным безгранично делимым распределением. Доказать, что $\mathbf{P}(\xi$ делится на два$) > \mathbf{P}(\xi$ не делится на два$)$.

8.36. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с безгранично делимым распределением, $\mathbf{P}(\xi = 0) > 0$. Доказать, что $\mathbf{P}(\xi$ делится на два$) > \mathbf{P}(\xi$ не делится на два$)$.

8.37. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с безгранично делимым распределением. Доказать, что если $\mathbf{P}(\xi = 0) > 0$ и $\mathbf{P}(\xi = 1) > 0$, то $\mathbf{P}(\xi = k) > 0$ для любого целого положительного k.

8.38. Доказать, что плотность безгранично делимого распределения, симметричная относительно некоторой точки a, достигает в точке a своего максимума.

8.39. Пусть $F(x)$ — целочисленная безгранично делимая функция распределения, симметричная относительно точки k. Доказать, что в точке k $F(x)$ имеет максимальный скачок.

8.40. Показать, что характеристическая функция

$$f(t)=\frac{1-\beta}{1+\alpha}\cdot\frac{1+\alpha e^{-it}}{1-\beta e^{it}}\quad(0<\alpha\leqslant\beta<1)$$

не является безгранично делимой.

8.41. Может ли безгранично делимая характеристическая функция быть произведением двух не безгранично делимых характеристических функций?

8.42. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с безгранично делимым распределением, $p_k=\mathbf{P}(\xi=k)$, $p_0>0$, $p_1>0$. Доказать, что $p_1^2\leqslant 2p_0p_2$.

8.43. Пусть ξ_{nk}, $n\geqslant 1$, $1\leqslant k\leqslant n$ — последовательность случайных величин, причем при каждом n случайные величины

$$\xi_{n1},\ \ldots,\ \xi_{nn}$$

независимы и одинаково распределены. Положим

$$\eta_n=\xi_{n1}+\ldots+\xi_{nn}.$$

Доказать, что если распределения η_n слабо сходятся при $n\to\infty$ к некоторому предельному распределению, то последнее безгранично делимо.

8.44. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина, $\mathbf{P}(\xi=0)>0$. Доказать, что для того, чтобы ξ имела безгранично делимое распределение, необходимо и достаточно, чтобы ее производящая функция допускала представление

$$P(z)=\exp\{\lambda(Q(z)-1)\},$$

где $Q(z)$ — производящая функция некоторой целочисленной неотрицательной случайной величины, а λ — положительное число.

8.45. Пусть $\psi(t)$ — произвольная характеристическая функция. Доказать, что функция

$$f(t)=\exp\left\{-\int_0^t\int_0^u\psi(y)\,dy\,du\right\}$$

является характеристической функцией безгранично делимого распределения с конечной дисперсией.

8.46. Доказать, что функция

$$f(t)=\exp\{-|t|+1-e^{-|t|}\}$$

является характеристической функцией безгранично делимого распределения с конечной дисперсией.

8.47. Пусть ξ — целочисленная случайная величина, имеющая безгранично делимое распределение. Доказать, что ее характеристическая функция $\varphi(z)$ представима в виде

$$\varphi(z)=\exp\left\{imz+\sum_{k=-\infty}^{\infty}q_k\left(e^{ikz}-1\right)\right\},$$

где m — целое, $q_k\geqslant 0$.

8.48. Пусть ξ — безгранично делимая случайная величина с решетчатым распределением (h — шаг решетки). Доказать, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kh\nu_k,$$

где $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона.

8.49. Доказать, что для того, чтобы последовательность безгранично делимых характеристических функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$ сходилась к характеристической функции $\varphi(z)$, необходимо и достаточно, чтобы почти для всех x $G_n(x) \to G(x)$ и $\gamma_n \to \gamma$ при $n \to \infty$, где G_n, G, γ_n, γ — функции и постоянные из канонического представления Леви — Хинчина характеристических функций $\varphi_n(z)$ и $\varphi(z)$.

8.50. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, ν — случайная величина, не зависящая от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и имеющая пуассоновское распределение. Доказать, что случайная величина

$$\eta_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k, \quad \eta_0 = 0,$$

имеет безгранично делимое распределение.

8.51. Доказать, что для всех $\alpha > 0$ функция

$$\frac{1}{(1+iz)^\alpha}$$

является безгранично делимой характеристической функцией. Найти ее представление в форме Леви — Хинчина.

8.52. Найти представление Леви — Хинчина характеристических функций нормального и пуассоновского распределений.

8.53. Пусть $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют безгранично делимые распределения. Доказать, что:

а) если ξ нормально распределена, то ξ_1 и ξ_2 нормально распределены; б) если ξ имеет пуассоновское распределение, то ξ_1 и ξ_2 имеют пуассоновские распределения.

Глава 9

ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Одним из наиболее важных обобщений последовательностей независимых случайных величин являются последовательности случайных величин, связанных в цепь Маркова.

Пусть дана последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$, определенных на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ и принимающих не более чем счетное множество значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ *образует цепь Маркова* (*связана в цепь Маркова*), если для любого n и любых $i_0, i_1, \ldots, i_n$ таких, что

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_0 = x_{i_0}\right) > 0,$$

имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left(\xi_n = x_{i_n} \mid \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_0 = x_{i_0}\right) = \mathbf{P}\left(\xi_n = x_{i_n} \mid \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}\right)$$

(*марковское свойство*).

Случайная величина ξ_n интерпретируется как состояние цепи Маркова на n-м шаге. Во многих задачах, связанных с изучением цепей Маркова, множество значений случайных величин ξ_i, $i = 0, 1, \ldots$, можно отождествить с подмножеством множества натуральных чисел (номерами состояний цепи).

Цепь Маркова $\xi_0, \xi_1, \ldots$ называется *однородной*, если для любых i и j $\mathbf{P}(\xi_n = x_j \mid \xi_{n-1} = x_i) = P_{ij}$ не зависит от n. В дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматриваются только однородные цепи Маркова.

Матрица P с элементами P_{ij} называется *матрицей вероятностей перехода за один шаг.*

Матрица P является *стохастической*, т. е. для любых i и j $P_{ij} \geqslant 0$ и $\sum_j P_{ij} = 1$.

Матрица $P^{(n)}$ с элементами $P_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}(\xi_n = j \mid \xi_0 = i)$ называется *матрицей вероятностей перехода за n шагов*. Для любых неотрицательных n и m справедливо (уравнение Колмогорова — Чепмена

$$P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)},$$

$P^{(0)}$ — единичная матрица).

Пусть $p^{(n)} = \left(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots\right)$ — распределение вероятностей цепи Маркова на n-м шаге: $p_i^{(n)} = \mathbf{P}\left(\xi_n = x_i\right)$, тогда $p^{(n+m)} = p^{(n)}P^{(m)}$ или $p^{(n)} = p^{(0)}P^n$, где распределение $p^{(0)}$ называется *начальным распределением* цепи Маркова. Отсюда следует, что матрица вероятностей перехода за один шаг и начальное распределение полностью определяют все распределения цепи Маркова, а значит и саму цепь Маркова, если отождествлять цепи с одинаковыми распределениями.

Важную роль в теории цепей Маркова играет классификация состояний. Говорят, что состояние x_j *достижимо* из состояния x_i, если существует такое $n > 0$, что $P_{ij}^{(n)} > 0$. Состояния x_i и x_j называется *сообщающимися*, если они достижимы друг из друга.

Состояние x_i называется *несущественным*, если существует такое состояние x_j, что x_j достижимо из x_i, а x_i недостижимо из x_j и называется *существенным* в противном случае. Множество всех существенных состояний цепи Маркова разбивается на непересекающиеся классы сообщающихся состояний так, что любые два состояния из одного класса сообщаются между собой, а для любых двух состояний x_i и x_j из разных классов $P_{ij}^{(n)} = P_{ji}^{(n)} = 0$ для любого n.

Цепь Маркова, все состояния которой составляют один класс сообщающихся состояний, называется *неразложимой*.

Состояние x_i называется *возвратным*, если вероятность возвращения в это состояние равна 1, и *невозвратным* в — противном случае. Если для возвратного состояния среднее время возвращения конечно, то оно называется *возвратным положительным*, в противном случае *возвратным нулевым*.

Состояние x_i называется *периодическим*, если Н. О. Д.*) $\{n\colon P_{ii}^{(n)} > 0\} = d > 1$, при этом d называется *периодом* состояния. Если $d = 1$, состояние называется *непериодическим*. В неразложимой цепи Маркова все состояния имеют одинаковый период, в частности, одновременно являются непериодическими. Неразложимая цепь Маркова называется *непериодической*, если все ее состояния являются непериодическими.

Цепь Маркова называется *эргодической*, если для любых i и j существует

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = p_j > 0, \quad \sum_j p_j = 1.$$

Распределение вероятностей $\pi_1, \pi_2, \ldots$ называется *стационарным распределением* цепи Маркова, если для любого n

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}^{(n)}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Справедливы следующие критерии эргодичности неразложимых цепей Маркова.

Теорема 1. *Если для однородной цепи Маркова с конечным числом состояний существует n_0 такое, что $P_{ij}^{(n_0)} > 0$ для любых i и j, то цепь Маркова является эргодической.*

Теорема 2. *Для эргодичности однородной, неразложимой, непериодической цепи Маркова со счетным числом состояний достаточно существования конечного множества $I_0 \subset \{1, 2, \ldots\}$, действительного $\varepsilon > 0$, натурального n и неотрицательных действительных чисел $u_1, u_2, \ldots$, таких, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} u_j \leqslant u_i - \varepsilon, \quad i \notin I_0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} u_j < \infty, \qquad i \in I_0.$$

§ 1. Основные понятия и соотношения

9.1. Доказать, что для любой стохастической матрицы P существует вероятностное пространство и последовательность случайных величин на нем, образующих цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг P.

9.2. Всякая ли стохастическая матрица может быть матрицей вероятностей перехода за два шага некоторой цепи Маркова?

---

*) Н. О. Д.— наибольший общий делитель.

9.3. Известно, что цепь Маркова полностью определяется начальным распределением и матрицей вероятностей перехода за один шаг. Определяется ли цепь Маркова начальным распределением и матрицей вероятностей перехода за два шага?

9.4. Доказать, что стохастическая матрица второго порядка является матрицей вероятностей перехода за два шага некоторой цепи Маркова тогда и только тогда, когда сумма ее диагональных элементов больше или равна единице.

9.5. Определить, при каких значениях c и d цепь Маркова определяется однозначно начальным распределением и матрицей вероятностей перехода за два шага:

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-d & d \end{pmatrix}.$$

9.6. Доказать, что для цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \ldots$ при любых $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

а) $\mathbf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_k = i_k) = \mathbf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1})$;

б) $\mathbf{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k, \ldots, \xi_0 = i_0) =$
$$= \mathbf{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k);$$

в) $\mathbf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_k = i_k, \ldots, \xi_0 = i_0) = \mathbf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_k = i_k)$.

9.7. Пусть A — событие, зависящее только от состояний цепи Маркова на первых $n-1$ шагах, а B — событие, зависящее от состояний на $(n+1)$-м, ..., $(n+m)$-м шагах. Доказать, что при фиксированном состоянии на n-м шаге события A и B независимы.

9.8. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — цепь Маркова. Доказать, что для любых $0 \leqslant n_i \leqslant n$

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_{n_1} = i_{n_1}, \ldots, \xi_{n_k} = i_{n_k}\right) = \mathbf{P}\left(\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_{n_s} = i_{n_s}\right),$$

где $n_s = \max\limits_i \{n_i\}$.

9.9. Пусть случайная величина τ не зависит от однородной цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \ldots$ и принимает целые неотрицательные значения. Доказать, что для любого $n \geqslant 1$ и любых $i_0, \ldots, i_{n+1}$

$$\mathbf{P}(\xi_{\tau+n+1} = i_{n+1} \mid \xi_{\tau+n} = i_n, \ldots, \xi_\tau = i_0) = \mathbf{P}(\xi_{\tau+n+1} = i_{n+1} \mid \xi_{\tau+n} = i_n).$$

Верны ли указанные равенства, если цепь Маркова $\xi_0, \xi_1, \ldots$ неоднородна?

9.10. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — последовательность независимых положительных целочисленных случайных величин, не зависящих от цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \ldots$ Доказать, что

$$\mathbf{P}(\xi_{\tau_1+\ldots+\tau_n} = i_n \mid \xi_{\tau_1+\ldots+\tau_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{\tau_1} = i_1) =$$
$$= \mathbf{P}(\xi_{\tau_1+\ldots+\tau_n} = i_n \mid \xi_{\tau_1+\ldots+\tau_{n-1}} = i_{n-1}).$$

9.11. Цепь Маркова имеет матрицу вероятностей перехода за один шаг

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу вероятностей перехода за n шагов и предел при $n \to \infty$.

9.12. Пусть в матрице вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с тремя состояниями

$$P_{ij} = \begin{cases} P_{1,i-j+1}, & i \geqslant j, \\ P_{1,j-i+1}, & j > i. \end{cases}$$

Найти матрицу вероятностей перехода за n шагов и предел при $n \to \infty$.

9.13. В матрице вероятностей перехода P за один шаг

$$P_{ij} = \begin{cases} P_{1,j-i+1}, & j \geqslant i, \\ P_{i-j+1,1}, & j < i. \end{cases}$$

Доказать, что аналогичные соотношения выполняются для вероятностей перехода за m шагов.

9.14. Пусть $P_{ij}^{(n)}$ — вероятность перехода за n шагов из i-го состояния в j-е некоторой цепи Маркова,

$$\alpha_j(n) = \min_i P_{ij}^{(n)}, \quad \beta_j(n) = \max_i P_{ij}^{(n)}.$$

Доказать, что

$$\alpha_j(1) \leqslant \alpha_j(2) \leqslant \ldots \leqslant \alpha_j(n) \leqslant \ldots \leqslant \beta_j(n) \leqslant \ldots \leqslant \beta_j(2) \leqslant \beta_j. \qquad (1)$$

9.15. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ образует цепь Маркова. Доказать, что любая подпоследовательность последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ также образует цепь Маркова.

9.16. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин. Доказать, что она образует цепь Маркова. Найти матрицу вероятностей перехода за n шагов.

9.17. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность случайных величин, образующих однородную цепь Маркова. Доказать, что для того, чтобы случайные величины $\xi_0, \xi_1, \ldots$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы все строки матрицы вероятностей перехода за один шаг были одинаковыми.

9.18. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность попарно независимых (не обязательно независимых в совокупности) случайных величин. Образуют ли $\xi_0, \xi_1, \ldots$ цепь Маркова?

9.19. Точки $A_1, \ldots, A_n$ представляют собой вершины правильного n-угольника. Некоторая частица совершает случайное блуждание по точкам $A_1, \ldots, A_n$. Определить, является ли последовательность положений частицы цепью Маркова, если

а) частица совершает детерминированное движение по часовой стрелке; б) частица в начальный момент случайно выбирает направление по или против часовой стрелки и далее постоянно движется в выбранном направлении; в) из любой точки A_i, $i \neq 1$, частица с вероятностью p сдвигается по часовой стрелке, а с вероятностью $q = 1 - p$ — против часовой стрелки в соседнюю точку. Попадая в точку A_1, частица возвращается в ту точку, из которой она пришла в A_1.

9.20. Частица совершает случайное блуждание в плоскости по целочисленным точкам (i, j), таким, что $0 \leqslant i, j \leqslant n$. Из любой внутренней точки указанного квадрата частица с равными вероятностями, независимо от ее предыдущего движения, переходит в одну из соседних (по вертикали или горизонтали) точек. При выходе на границу квадрата частица далее:

а) движется по границе квадрата детерминированно по часовой стрелке;

б) возвращается в ту точку, из которой она вышла на границу;

в) выбирает случайным образом направление на границе и движется по границе в выбранном направлении.

Для каждого из указанных случаев определить, будет ли последовательность положений, занимаемых частицей, цепью Маркова.

9.21. В условиях предыдущей задачи частица из каждой внутренней точки с равной вероятностью может переходить в одну из соседних (по горизонтали, вертикали или диагонали). Будет ли последовательность положений частицы цепью Маркова для каждого из трех указанных в предыдущей задаче условий движения после выхода на границу?

9.22. В начальный момент времени в урне n_0 белых и m_0 черных шаров. Через каждую единицу времени из урны по схеме выбора без возвращения извлекается один шар. Пусть n_k — число белых, а m_k — число черных шаров в урне в момент времени k. Какие из указанных ниже последовательностей образуют цепь Маркова, а какие нет:

а) n_k, б) $n_k - m_k$, в) $n_k + m_k$, г) пара (n_k, m_k), д) $n_k - m_k + 1/(n_k + m_k + 2)$?

9.23. Пусть случайные величины $\xi_0, \ldots, \xi_n$ образуют цепь Маркова. Доказать, что случайные величины $\eta_0, \ldots, \eta_n$, где $\eta_i = \xi_{n-i}$, также образуют цепь Маркова. Образуют ли цепь Маркова случайные величины $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$, где $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ — произвольная перестановка $\xi_0, \ldots, \xi_n$?

9.24. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Образует ли цепь Маркова последовательность $\xi_0 + \xi_1$, $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3, \ldots$?

9.25. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность случайных величин, образующих цепь Маркова. Будет ли цепью Маркова последовательность $\xi_0 + \xi_1$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_4 + \xi_5, \ldots$?

9.26. Дана цепь Маркова с конечным числом состояний. Пусть ξ_i — состояние цепи на i-м шаге. Будет ли цепью Маркова последовательность $\eta_0, \eta_1, \ldots$, где

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_i = x_1, \\ 0, & \text{если } \xi_i \neq x_1. \end{cases}$$

9.27. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения

-1 и $+1$ с вероятностями p и $q=1-p$ соответственно. Положим:

а) $\eta_n=\xi_n\xi_{n+1}$; б) $\eta_n=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\xi_i$; в) $\eta_n=\prod\limits_{i=0}^{n}\xi_i$.

Будет ли последовательность $\eta_0, \eta_1, \ldots$ цепью Маркова?

9.28. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность независимых целочисленных случайных величин, причем

$$\mathsf{P}(\xi_n=k)=p_k, \quad k=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Положим $\eta_n=\xi_0+\ldots+\xi_n$. Доказать, что последовательность $\eta_0, \eta_1, \ldots$ образует цепь Маркова. Найти соответствующую матрицу вероятностей перехода за один шаг.

9.29. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ и $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — две цепи Маркова. Будет ли цепью Маркова последовательность $\xi_0+\eta_0, \xi_1+\eta_1, \ldots$?

9.30. Пусть $(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$, $i\geqslant 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, ξ_0 — случайная величина, не зависящая от $\{(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})\}$, $i=1, 2, \ldots$. Пусть ξ_0 и $\xi_j^{(i)}$ принимают значения $1, \ldots, n$. Построим последовательность случайных величин $\eta_0, \eta_1, \ldots$ следующим образом:

$$\eta_0=\xi_0, \quad \eta_i=\xi^{(i)}_{\eta_{i-1}}, \quad i\geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\eta_0, \eta_1, \ldots$ образует цепь Маркова.

9.31. Для цепи Маркова, определенной в предыдущей задаче, найти число состояний, матрицу вероятностей перехода за один шаг и вектор начальных вероятностей, если

$$\mathsf{P}(\xi_i^{(1)}=j)=p_{ij}, \quad i=0, 1, \ldots, n; \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

9.32. Доказать, что любая цепь Маркова с конечным числом состояний может быть представлена как последовательность случайных величин $\eta_0, \eta_1, \ldots$, определенных в задаче 9.30.

9.33. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — независимые случайные величины с дискретным распределением, $f_0, f_1, \ldots$ — некоторые функции. Доказать, что последовательность случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$, где $\eta_{k+1}=f_k(\eta_k, \xi_{k+1})$, образует цепь Маркова.

9.34. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность случайных величин, образующих цепь Маркова, $f(x)$ — некоторая функция. Будет ли последовательность $f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots$ цепью Маркова?

9.35. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — цепь Маркова со счетным множеством состояний $\{1, 2, \ldots\}$ и матрицей вероятностей перехода за один шаг P, причем состояния $1, 2, \ldots, N$ возвратны. Положим

$$\nu_0=\min(i\colon \xi_i\leqslant N), \quad \nu_n=\min(i>\nu_{n-1}\colon \xi_i\leqslant N), \quad n\geqslant 1,$$

$$\eta_j=\xi_{\nu_j}.$$

Доказать, что последовательность $\eta_0, \eta_1, \ldots$ образует цепь Маркова. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг.

9.36. Для всякой ли цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \ldots$ со счетным числом состояний $\{1, 2, \ldots\}$ можно выбрать последовательность независимых между собой и не зависящих от $\xi_0, \xi_1, \ldots$ случайных величин

$\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ со значениями в множестве $\{1, 2, \ldots, N\}$, таких, что последовательность $\eta_0, \eta_1, \ldots$, где

$$\eta_i = I(\xi_i \leqslant N)\xi_i + I(\xi_i > N)\zeta_i,$$

является цепью Маркова?

§ 2. Классификация состояний

9.37. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — цифровая последовательность, в которой цифры появляются случайно, независимо друг от друга и равновероятно. Имеется счетчик, который в момент n показывает, сколько различных цифр встретилось среди первых n цифр последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ Доказать, что показания счетчика образуют цепь Маркова. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг. Указать существенные и несущественные состояния.

9.38. Частица случайным образом блуждает на прямой по целочисленным точкам $0, 1, \ldots, n$. Из любой внутренней точки частица передвигается с вероятностью p на один шаг вправо или, с вероятностью $q = 1 - p$, на один шаг влево. Попадая в точки 0 и n частица остается в них навсегда (поглощающие экраны). Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг. Указать существенные и несущественные состояния.

9.39. Частица случайным образом блуждает на прямой по целочисленным точкам $0, 1, \ldots, n$. Из любой внутренней точки частица передвигается с вероятностью p на один шаг вправо или, с вероятностью $q = 1 - p$, на один шаг влево. Попадая в точки 0 и n частица в следующий момент времени с вероятностью 1 переходит соответственно в точки 1 или $n - 1$ (отражающие экраны). Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг. Указать существенные и несущественные состояния.

9.40. Указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.41. Могут ли все состояния цепи Маркова с конечным числом состояний быть несущественными?

9.42. Могут ли все состояния цепи Маркова со счетным числом состояний быть несущественными?

9.43. Матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указать все пары сообщающихся состояний.

9.44. Цепь Маркова имеет r состояний. Доказать, что:

а) если j-е состояние достижимо из i-го $(i \neq j)$, то оно может быть достигнуто меньше чем за r шагов; б) если вероятность возвращения в состояние i положительна, то возвращение может произойти за r или менее шагов.

9.45. Будет ли цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг P периодической, если

$$\text{а) } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } P = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\text{в) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Для периодических цепей указать период.

9.46. а) Доказать, что неразложимая цепь, у матрицы переходных вероятностей которой хотя бы один диагональный элемент P_{jj} положителен, не может быть периодической.

б) Может ли неразложимая цепь, у которой все диагональные элементы равны нулю, быть непериодической?

9.47. Доказать, что конечная неразложимая цепь Маркова является непериодической тогда и только тогда, когда существует n такое, что $P_{ij}^{(n)} > 0$ для всех i и j.

9.48. Указать возвратные и невозвратные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

9.49. Доказать, что все состояния цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P возвратны, если

$$\text{а) } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } P = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & 1/n & 0 & \ldots \\ 0 & 1/n & 0 & 1/n & \ldots \\ 1/n & 0 & 1/n & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

9.50. Доказать, что если j-е состояние невозвратно, то для всех i $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} < \infty$.

9.51. Доказать, что любая цепь Маркова с конечным числом состояний имеет по крайней мере одно возвратное состояние.

9.52. Могут ли все состояния цепи Маркова со счетным числом состояний быть невозвратными?

9.53. Доказать, что для конечной цепи Маркова состояние возвратно тогда и только тогда, когда оно существенно. Показать, что это неверно для цепей со счетным числом состояний.

9.54. Имеется цепь Маркова со счетным числом состояний и матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_2 & 0 & 1-p_2 & 0 & 0 & \dots \\ p_3 & 0 & 0 & 1-p_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Доказать, что если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится, то все состояния этой цепи возвратны, в противном случае — невозвратны.

9.55. Пусть все состояния цепей Маркова с матрицами вероятностей перехода за один шаг A и B возвратны. Доказать, что возвратны все состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода:

а) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

9.56. Доказать, что для любого состояния i цепи Маркова вероятность Q_{ii} возвращения в него бесконечное число раз равна 0 или 1, причем в первом случае состояние невозвратно, а во втором возвратно.

9.57. Пусть цепь Маркова имеет $m < \infty$ состояний и пусть k-е состояние возвратно. Доказать, что существует положительное число $q < 1$, такое, что при $n \geqslant m$ вероятность того, что время возвращения в k-е состояние превысит n, меньше, чем q^n.

9.58. Доказать, что для того, чтобы неразложимая цепь со счетным числом состояний была невозвратной, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_j P_{ij}, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

имела ограниченное решение, такое, что $u_i \neq \text{const}$, $i = 0, 1, \dots$

9.59. Доказать, что для того, чтобы неразложимая цепь со счетным числом состояний была возвратной, достаточно существования такой последовательности $u_0, u_1, \dots$, что $u_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и для всех $i \neq 0$

$$u_i \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} u_j P_{ij}.$$

9.60. Доказать, что для того, чтобы неразложимая цепь со счетным числом состояний была возвратной и положительной, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$u_j = \sum_{i=0}^{\infty} u_i P_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

имела не равное тождественно нулю решение, для которого

$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i| < \infty.$$

9.61. Имеется цепь Маркова со счетным числом состояний и переходными вероятностями $P_{00} = r_0$, $P_{01} = p_0 > 0$

$$P_{ij} = \begin{cases} p_i > 0, & j = i + 1, \\ r_i \geqslant 0, & j = i, \\ q_i > 0, & j = i - 1, \\ \ \ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_m = \frac{q_1 \ldots q_m}{p_1 \ldots p_m}.$$

Доказать справедливость следующих утверждений:

а) цепь возвратна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty;$$

б) цепь невозвратна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m < \infty;$$

в) цепь положительна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty, \quad \sum_{m=0}^{\infty} [p_m \rho_m]^{-1} < \infty;$$

г) цепь нулевая тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty, \quad \sum_{m=0}^{\infty} [p_m \rho_m]^{-1} = \infty.$$

9.62. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — цепь Маркова,

$$\xi_{k+1} = \max\{0, \xi_k - 1\} + \eta_{k+1}, \quad k \geqslant 0,$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $P(\eta_k = j) = p_j$, $j = 0, 1, \ldots$ Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг и доказать, что если $p_0 > 0$, $p_0 + p_1 < 1$, то цепь возвратна тогда и только тогда, когда

$$\sum_k kp_k \leqslant 1.$$

§ 3. Стационарные и предельные распределения

9.63. Доказать, что если цепь Маркова имеет по крайней мере одно несущественное состояние, то она не является эргодической.

9.64. Показать, что у неэргодической марковской цепи может существовать стационарное распределение, причем единственное.

9.65. Доказать, что для конечной цепи Маркова всегда существует стационарное распределение.

9.66. Матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова имеет вид:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти стационарное распределение.

9.67. Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{е)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{ж)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

9.68. Пусть цепь Маркова имеет по крайней мере два несообщающихся состояния. Доказать, что она не является эргодической.

9.69. Пусть цепь Маркова имеет два состояния. Доказать, что имеет место один из следующих трех случаев:

а) цепь эргодична; б) состояния не сообщаются; в) матрица вероятностей перехода за один шаг имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.70. Эргодичная цепь Маркова с двумя состояниями имеет предельные вероятности p и $q = 1 - p$. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг.

9.71. Доказать, что если все существенные состояния однородной цепи Маркова с конечным числом состояний образуют один непериодический класс, то существуют не зависящие от i пределы

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

9.72. Цепь Маркова имеет следующую матрицу вероятностей перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{m-1} \\ p_{m-1} & p_0 & p_1 & \dots & p_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_0 \end{pmatrix},$$

где $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi_n = x_i) = 1/m, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

9.73. Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots$ и $\eta_0, \eta_1, \dots$ — две цепи Маркова с конечным числом состояний, одинаковой матрицей вероятностей перехода за один шаг и начальными распределениями $(p_1, \dots, p_m)$ и $(q_1, \dots, q_m)$ соответственно. Доказать, что если

$$\min_{i,j} P_{ij} \geqslant \varepsilon > 0,$$

то

$$\sum_{i=1}^{m} \left| p_i^{(n)} - q_i^{(n)} \right| \leqslant 2(1 - m\varepsilon)^n,$$

где $p_i^{(n)} = \mathbf{P}(\xi_n = i)$, $q_i^{(n)} = \mathbf{P}(\eta_n = i)$.

9.74. Пусть конечная цепь Маркова является эргодической и $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$. Доказать, что существуют $0 < \rho < 1$ и C, такие, что

$$\left| P_{ij}^{(n)} - \pi_j \right| < C\rho^n$$

для любых i, j и n.

9.75. Доказать, что если матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет два собственных значения, по модулю равных единице, то цепь неэргодична.

9.76. Рассмотрим цепь Маркова из задачи 9.62. Доказать, что при $p_0 > 0$, $p_0 + p_1 < 1$, $\sum kp_k < 1$ она является эргодической. Найти производящую функцию стационарного распределения.

9.77. Найти стационарное распределение цепи Маркова из задачи 9.54 в случае сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$.

9.78. Рассмотрим цепь Маркова со счетным числом состояний и матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}.$$

Доказать, что при $p_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, \sum ip_i < \infty$ цепь является эргодической. Найти производящую функцию стационарного распределения.

§ 4. Разные задачи

9.79. Рассмотрим цепь Маркова со счетным числом состояний $\{\ldots -k, -k+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k, \ldots\}$ и вероятностями перехода за один шаг

$$P_{ij} = \begin{cases} p, & j = i+1, \\ 1-p, & j = i-1, \\ 0 & \text{для остальных } j. \end{cases}$$

Найти производящую функцию времени возвращения в состояние 0.

9.80. Пусть дана цепь Маркова с состояниями $(0, \ldots, N)$ и матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P_{ij} = \begin{cases} p, & j = i+1 \\ 1-p, & j = i-1, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

$$P_{00} = P_{NN} = 1.$$

Найти математическое ожидание времени до поглощения, при условии, что начальное состояние k.

9.81. Пусть цепь Маркова с состояниями $0, 1, \ldots, N$ имеет матрицу вероятностей перехода за один шаг

$$P_{ij} = \begin{cases} b_i, & j = i-1, \\ a_i, & j = i+1, \\ 1-(a_i+b_i), & j = i, \\ 0, & |j-i| > 1, \end{cases}$$

где $a_0 = b_0 = a_N = b_N = 0$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, N-1$. Найти вероятность поглощения в состоянии 0, исходя из состояния k.

9.82. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_1 = -1) = 1/2$, $z_0 = 0$, $z_k = z_{k-1} + \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Положим $\tau_N = \min\{n \geqslant 1 : |z_n| = N\}$. Найти $\mathbf{E}\tau_N$.

9.83. Матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с множеством состояний $(0, 1, \ldots, N)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу вероятностей перехода за n шагов.

9.84. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — неразложимая возвратная положительная цепь Маркова, $\mathbf{P}(\xi_0 = i) = 1$, $N_n(i)$ — число возвращений в состояние i за первые n шагов. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}(N_n(i))}{n} = \frac{1}{\mu_i}$, где μ_i — среднее время возвращения в состояние i.

9.85. Пусть для неразложимой марковской цепи с состояниями $\{0, 1, 2, \ldots\}$ существует $\alpha > 0$, такое, что $f_{i0} \geqslant \alpha$ для всех $i \neq 0$. Доказать, что все состояния цепи возвратны.

Глава 10

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Основные понятия. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство. Функция двух переменных $\xi_t(\omega)$, определенная при $t \in T$, $\omega \in \Omega$, принимающая значения в пространстве X, $\mathscr{A}$-измеримая как функция ω при каждом $t \in T$, называется *случайной функцией*, а X — ее *областью значений*.

В том случае, когда T представляет собой подмножество числовой прямой, случайную функцию чаще называют *случайным процессом*.

При фиксированном ω $\xi_t(\omega)$ называют *реализацией* (*траекторией*) случайного процесса.

Два случайных процесса ξ_t и ξ_t', $t \in T$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве, называются *стохастически эквивалентными*, если для любого $t \in T$

$$\mathbf{P}\left(\xi_t \neq \xi_t'\right) = 0.$$

Случайный процесс ξ_t, $t \in T$, называется *сепарабельным*, если существуют в T счетное всюду плотное множество $\{t_j\}_{j \geq 1}$ и в Ω множество N вероятности 0 такие, что для любого открытого множества $G \subset T$ и замкнутого множества $F \subset X$ два множества

$$\{\omega\colon\ \xi_{t_j}(\omega) \in F, \quad \forall t_j \in G\},$$

$$\{\omega\colon\ \xi_t(\omega) \in F, \quad \forall t \in G\}$$

отличаются только на подмножество N.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\xi_t(\omega)$, $t \in T$,— заданный на нем случайный процесс со значениями в метрическом пространстве (X, ρ). Пусть на T определена σ-алгебра $\mathscr{B}$, содержащая борелевские множества, и на $\mathscr{B}$ — некоторая полная мера μ. Обозначим через $\sigma(\mathscr{B} \times \mathscr{A})$ σ-алгебру, порожденную в $T \times \Omega$ произведением σ-алгебр $\mathscr{B} \times \mathscr{A}$, и через $\overline{\sigma}(\mathscr{B} \times \mathscr{A})$ — ее пополнение относительно меры $\mu \times \mathbf{P}$.

Случайный процесс $\xi_t(\omega)$ называется *измеримым*, если функция $(t, \omega) \to \xi_t(\omega)$ измерима относительно $\overline{\sigma}(\mathscr{B} \times \mathscr{A})$.

Всюду в дальнейшем в случае $T \subset R$ в качестве σ-алгебры $\mathscr{B}$ будем выбирать σ-алгебру борелевских множеств, в качестве меры μ — меру Лебега. В случае $T \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$ в качестве $\mathscr{B}$ будем выбирать множество всех подмножеств T.

Пусть ξ_t, $t \in T$,— случайный процесс, на T задана метрика r.

Случайный процесс ξ_t со значениями в $\mathbb{R}^n$ называется *стохастически непрерывным* (*непрерывным в среднем порядка* $p > 0$) в точке t_0, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi_t - \xi_{t_0}| > \varepsilon\} \to 0 \quad \left(\mathbf{E}|\xi_t - \xi_{t_0}|^p \to 0\right)$$

при $r(t, t_0) \to 0$.

Случайный процесс ξ_t, $t \in T$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ называется *стохастически ограниченным*, если

$$\sup_{t \in T} \mathsf{P}(|\xi_t| > N) \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Случайный процесс ξ_t, $t \in T$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ называется *равномерно стохастически непрерывным* на множестве $K \subset T$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $\mathsf{P}(|\xi_t - \xi_{t'}| > \varepsilon) < \varepsilon$ для всех $t, t' \in K$, $r(t, t') < \delta$.

Функция $K(t, s) = \mathsf{E}\xi_t\bar{\xi}_s - \mathsf{E}\xi_t\mathsf{E}\bar{\xi}_s$ называется *корреляционной функцией случайного процесса* ξ_t ($X = Z$ — множество комплексных чисел).

Марковские процессы. Пусть ξ_t, $t \in T$, — случайный процесс, X — область его значений, $\mathscr{B}$ — некоторая σ-алгебра на X, содержащая все одноточечные множества. Обозначим $\mathscr{F}_{\leqslant t}$, $\mathscr{F}_{\geqslant t}$ и $\mathscr{F}_{=t}$ — σ-алгебры, порождённые случайными величинами

$$\mathscr{F}_{\leqslant t} = \sigma\{\xi_s,\ s \leqslant t\},\quad \mathscr{F}_{\geqslant t} = \sigma\{\xi_s,\ s \geqslant t\},\quad \mathscr{F}_{=t} = \sigma\{\xi_t\}.$$

Случайный процесс ξ_t, $t \in T$, называется *марковским процессом* с фазовым пространством $(X, \mathscr{B})$, если для любых $A \in \mathscr{F}_{\leqslant t}$, $B \in \mathscr{F}_{\geqslant t}$ почти наверное

$$\mathsf{P}(AB|\mathscr{F}_{=t}) = \mathsf{P}(A|\mathscr{F}_{=t})\mathsf{P}(B|\mathscr{F}_{=t}).$$

В случае $T = \{0, 1, \ldots\}$ марковский процесс называют *цепью Маркова* (*марковской последовательностью*).

Функция $P(s, x, t, \Gamma)$, определенная для $s, t \in T$, $s \leqslant t$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ является *переходной функцией марковского процесса* ξ_t, $t \in T$, если:

а) при фиксированных s, t, x функция $P(s, x, t, \Gamma)$ является вероятностной мерой на $\mathscr{B}$; б) при фиксированных s, t, Γ функция $P(s, x, t, \Gamma)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$; в) $P(s, x, s, \Gamma) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \Gamma; \end{cases}$ г) для любых $s \leqslant t$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathscr{B}$

$$\mathsf{P}(\xi_t \in \Gamma | \xi_s) = P(s, \xi_s, t, \Gamma) \text{ п. н.}$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\mathsf{P}(s, x, t, \Gamma) = P(\xi_t \in \Gamma | \xi_s = x).$$

Если X — не более чем счетно, переходная функция полностью определяется заданием вероятностей перехода $p(s, x, t, y) = P(s, x, t, \{y\})$.

Переходные функции марковских процессов удовлетворяют соотношению

$$P(s, x, u, \Gamma) = \int_X P(s, x, t, dy)\, P(t, y, u, \Gamma),$$

называемому *уравнением Колмогорова — Чепмена.*

Пусть фиксировано некоторое множество T на прямой и фазовое пространство $(X, \mathscr{B})$. Пусть функция $P(s, x, t, \Gamma)$ удовлетворяет условиям а) — в), Ω — множество элементарных событий, $\xi_t(\omega)$ — функция, определенная на $T \times \Omega$ со значениями в X. Положим

$$\mathscr{F}_T = \sigma\{\xi_t,\ t \in T\},\quad \mathscr{F}_{[s,t]} = \sigma\{\xi_u,\ s \leqslant u \leqslant t\},$$
$$\mathscr{F}_{\leqslant t} = \sigma\{\xi_s,\ s \leqslant t\},\quad \mathscr{F}_{\geqslant t} = \sigma\{\xi_s,\ s \geqslant t\}.$$

Предположим, что для каждого $s \in T$ и каждого $x \in X$ на σ-алгебре $\mathscr{F}_{\geqslant}$ определена вероятностная мера $\mathsf{P}_{s,x}$.

Пара $(\xi_t(\omega), \mathsf{P}_{s,x})$ называется *марковским семейством с переходной функцией* $P(s, x, t, \Gamma)$, если для любых s, x:

1) случайный процесс $\xi_t(\omega)$, $t \in T \cap [s, \infty)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}_{\geq s}, \mathbf{P}_{s,x})$ — марковский;

2) этот марковский процесс обладает переходной функцией $P(s, x, t, \Gamma)$;

3) $\mathbf{P}_{s,x}(\xi_s = x) = 1$.

Наиболее часто в дальнейшем мы будем иметь дело с *однородными марковскими процессами и семействами*, т. е. такими, у которых переходная функция $P(s, x, t, \Gamma)$ однородна по времени:

$$P(s+h, x, t+h, \Gamma) = P(s, x, t, \Gamma)$$

для любого h, причем в качестве T рассматриваются

$$T = R = (-\infty, \infty), \qquad T = R^+ = [0, \infty),$$
$$T = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}, \quad T = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

В случае однородного процесса переходную функцию можно задать как функцию трех переменных $P(t, x, \Gamma) = P(s, x, s+t, \Gamma)$.

Для однородных марковских процессов с множеством состояний $X \subset \subset \{0, 1, \ldots\}$ для переходных вероятностей будем использовать обозначение $P(t, i, \{j\}) = P_{ij}(t)$.

Мера μ на фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$, удовлетворяющая условию

$$\mu(\Gamma) = \int_X \mu(dx) P(t, x, \Gamma), \quad t \geqslant 0, \quad \Gamma \in \mathscr{B},$$

называется инвариантной мерой однородного марковского семейства с переходной функцией $P(t, x, \Gamma)$.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $T \subset R$, $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ — неубывающее семейство σ-алгебр: $\mathscr{F}_{t_1} \subset \mathscr{F}_{t_2}, t_1 < t_2, \mathscr{F}_t \subset \mathscr{A}$.

Случайная величина τ, принимающая значения из $T \cup \{+\infty\}$, называется *марковским моментом* относительно семейства $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$, если для любого $t \in T$

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t.$$

Пусть, далее, $\mathscr{B}_{\leqslant t}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств множества $T \cap \cap (-\infty, t]$.

Случайный процесс ξ_t, $t \in T$, называется *прогрессивно измеримым* относительно семейства $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$, если для каждого $t \in T$ функция $\xi_s^{(\omega)}$ на множестве $(T \cap (-\infty, t]) \times \Omega$ измерима по (s, ω) относительно σ-алгебры $\mathscr{B}_{\leqslant t} \times \mathscr{F}_t$.

Марковское семейство (ξ_t, P_x) с фазовым пространством $(X, \mathfrak{B})$ называется *строго марковским*, если:

1) процесс ξ_t прогрессивно измерим;

2) для любого марковского момента τ, любой функции $\eta = \eta(\omega)$, принимающей значения из $T \cup \{\infty\}$ и определенной на $\Omega_\tau = \{\omega: \tau < \infty\}$ и измеримой относительно $\mathscr{F}_t$, любого $x \in X$ и $\Gamma \in \mathfrak{B}$ и любого $A \subset \Omega_\tau \cap \Omega_\eta$, принадлежащего $\mathscr{F}_\tau$,

$$\mathbf{P}_x(A \cap \{\xi_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \int_A P(\eta, \xi_\tau, \Gamma) \mathbf{P}_x(d\omega).$$

Пусть ξ_t, $t \in T$,— однородный марковский процесс, $X = \{0, 1, \ldots\}$, T представляет собой либо полупрямую $[0, \infty)$, либо множество целых неотрицательных чисел.

Ветвящиеся процессы. Случайный процесс ξ_t, $t \in T$, называется *ветвящимся*, если

$$P_{ij}(t) = \sum_{j_1+\ldots+j_i=j} P_{1j_1}(t) P_{1j_2}(t) \ldots P_{1j_i}(t), \quad i \geqslant 1, \; P_{00}(t) = 1.$$

Определение ветвящегося процесса допускает следующую наглядную интерпретацию: пусть ξ_t — число частиц в момент времени t. Предположим, что за время T_0 одна частица независимо от ее происхождения и наличия других частиц, с вероятностью $P_{1n}(T_0)$ превращается в n частиц ($n = 0, 1, \ldots$). Тогда

$$\mathsf{P}(\xi_{t+s} = j|\xi_s = i) = P_{ij}(t) = \sum_{j_1+\ldots+j_i=j} P_{1j_1}(t) \ldots P_{1j_i}(t).$$

Пусть ξ_t — ветвящийся процесс. Тогда $\mathsf{P}(\xi_t = 0), \lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}(\xi_t = 0)$ называются соответственно *вероятностью вырождения за время* t и *вероятностью вырождения*; $\tau = \min\{t\colon\ \xi_t = 0\}$ называется *временем до вырождения*.

Пусть ξ_t — ветвящийся процесс с непрерывным временем ($T = [0, \infty)$). Положим

$$a_k = \lim_{h\to 0} \frac{P_{1k}(h) - \delta_{1,k}}{h},$$

где $\delta_{1,k}$ — символ Кронекера. Числа $a_0, a_1, \ldots$ называются *инфинитезимальными параметрами ветвящегося процесса*. Производящую функцию инфинитезимальных параметров

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

будем называть *производящей функцией ветвящегося процесса*.

Теорема 1. *Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — ветвящийся процесс с дискретным временем, $\xi_0 = 1, \varphi_n(z) = \mathsf{E}z^{\xi_n}$, $\varphi(z) = \mathsf{E}z^{\xi_1}$. Тогда*

$$\varphi_{n+1}(z) = \varphi(\varphi_n(z)), \quad n \geqslant 1,$$

а вероятность вырождения q — наименьший неотрицательный корень уравнения $q = \varphi(q)$.

2. *Пусть ξ_t, $\xi_0 = 1$ — ветвящийся процесс с непрерывным временем и производящей функцией $f(z)$. Положим $F(t, z) = \mathsf{E}z^{\xi_t}$. Тогда*

а) *$F(t, z)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$F(t+\tau, z) = F(t, F(\tau, z)), \quad F(0, z) = z;$$

б) *$F(t, z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial F(t, z)}{\partial t} = f(F(t, z)), \quad F(0, z) = z;$$

в) *$F(t, z)$ удовлетворяет уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial F(t, z)}{\partial t} = f(z)\frac{\partial F(t, z)}{\partial z}, \quad F(0, z) = z;$$

г) *вероятность вырождения процесса равна наименьшему неотрицательному корню уравнения $f(q) = 0$.*

Процессы массового обслуживания. Случайным потоком событий называется любой случайный процесс ν_t, $t \geqslant 0$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\nu_0 = 0$;

2) ν_t для каждого $t \geqslant 0$ принимает лишь целые неотрицательные значения и значение $+\infty$;

3) траектории процесса ν_t не убывают и непрерывны справа.

Поток ν_t считается заданным, если для каждого целого $n \geqslant 1$ и неотрицательных действительных $\tau_1, \ldots, \tau_n$ задано совместное распределение случайных величин $\nu_{\tau_1}, \ldots, \nu_{\tau_n}$. Случайная величина ν_t имеет смысл числа событий, наступивших в интервале $[0, t)$.

Можно дать следующее эквивалентное определение случайного потока. Пусть t_1, t_2, ... — последовательные моменты наступления событий; $t_k \geqslant t_{k-1}$ при $k \geqslant 1$, $t_0 = 0$. Положим $z_k = t_k - t_{k-1}$, $k \geqslant 1$. Говорят, что задан случайный поток событий, если для каждого целого $n \geqslant 1$ задано совместное распределение случайных величин $z_1, \ldots, z_n$.

Случайный поток, у которого z_1, z_2, ... независимы в совокупности и z_2, z_3, ... одинаково распределены, называется *рекуррентным потоком с запаздыванием*. Для задания такого потока достаточно задать две функции распределения:

$$A_1(t) = P(z_1 < t), \quad A(t) = P(z_k < t), \quad k \geqslant 2.$$

Рекуррентный поток с запаздыванием, у которого $A_1(t) = A(t)$, называется *рекуррентным*.

Поток ν_t называется потоком *без последействия* (*с отсутствием последействия*), если для любого целого $n > 1$ и для любых действительных $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n$ случайные величины $\nu_{\tau_k} - \nu_{\tau_{k-1}}$, $k = 1, \ldots, n$, независимы в совокупности.

Поток ν_t называется *стационарным*, если для любого целого $n \geqslant 1$ и для любых неотрицательных чисел $\tau_1, \ldots, \tau_n$ распределение случайного вектора $\{\nu_{c+\tau_k} - \nu_c,\ k = 1, \ldots, n\}$ не зависит от выбора $c \geqslant 0$. Часто поток называют стационарным, если последнее условие выполняется хотя бы при $n = 1$.

Поток ν_t называется *ординарным*, если для любого $t \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\nu_{t+h} - \nu_t \geqslant 2 \mid \nu_{t+h} - \nu_t \geqslant 1) \to 0 \quad \text{при } h \downarrow 0.$$

Стационарный ординарный поток без последействия называется *простейшим*. Для задания такого потока достаточно для любого $t \geqslant 0$ и целого $k \geqslant 0$ задать вероятности $P_k(t) = \mathbf{P}(\nu_t = k)$.

Если дополнительно потребовать выполнение двух условий:

1) $\mathbf{P}(\nu_t < +\infty) = 1$ для каждого $t \geqslant 0$;

2) существуют t_1 и t_2, такие, что

$$\mathbf{P}\left(\nu_{t_1} = 0\right) > 0, \quad \mathbf{P}\left(\nu_{t_2} = 0\right) < 1,$$

то существует $\lambda > 0$, такое, что

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Простейший поток будем называть также пуассоновским (иногда под пуассоновским понимают более широкий класс потоков).

Для простейшего потока $E\nu_t = \lambda t$. Число λ имеет смысл среднего числа событий, поступивших в единицу времени, и называется интенсивностью.

Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, T]$, $T > 0$. Положим

$$\nu_t^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_k \geqslant t, \\ 1, & \text{если } \tau_k < t, \end{cases}$$

$$\nu_t = \nu_t^{(1)} + \ldots + \nu_t^{(N)}.$$

Случайный поток ν_t называется *потоком Бернулли*.

Пусть заданы $n \geqslant 1$ случайных потоков $\nu_t^{(1)}, \ldots, \nu_t^{(n)}$. Говорят, что случайный поток

$$\nu_t = \nu_t^{(1)} + \ldots + \nu_t^{(n)}$$

получается *наложением* (*суперпозицией*) потоков $\nu_t^{(1)}, \ldots, \nu_t^{(n)}$.

Пусть $\{z_k\}_{k \geqslant 1}$ — последовательность неотрицательных случайных величин. Положим $t_n = z_1 + \ldots + z_n$, $n \geqslant 1$, $t_0 = 0$; $\nu_t = \max\{n\colon t_n < t\}$, $t \geqslant 0$. Процесс ν_t называется *процессом восстановления*. Так как ν_t полностью определяется последовательностью $\{z_k\}$ (и наоборот), ее также будем называть процессом восстановления.

Процесс восстановления $\{z_k\}$ называется *рекуррентным с запаздыванием*, если $z_1, z_2, \ldots$ независимы в совокупности и $z_2, z_3, \ldots$ одинаково распределены. Если $z_1, z_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, процесс восстановления $\{z_k\}$ называется *рекуррентным*.

Циклом длительности z назовем упорядоченную пару (z, ξ_t), где z — неотрицательная случайная величина, а ξ_t — случайный процесс, определенный при $0 \leqslant t < z$, причем $P(z = 0) < 1$, $P(z < +\infty) = 1$.

Рассмотрим последовательность циклов $\left\{\left(z_k, \xi_t^{(k)}\right)\right\}_{k \geqslant 1}$, в которой циклы независимы и, начиная со второго, стохастически эквивалентны. Положим

$$A_1(x) = P(z_1 < x), \quad A(x) = P(z_k < x), \quad k \geqslant 2.$$

Случайный процесс ξ_t, $t \geqslant 0$, определяемый соотношениями

$$\xi_t = \begin{cases} \xi_t^{(1)} & \text{при } 0 \leqslant t < t_1, \\ \xi_{t-t_1}^{(2)} & \text{при } t_1 \leqslant t < t_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \xi_{t-t_{k-1}}^{(k)} & \text{при } t_{k-1} \leqslant t < t_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \end{cases}$$

называется *регенерирующим процессом*. Случайные величины $t_1, t_2, \ldots$ называются *моментами регенерации*.

Положим

$$\mu_B'(t) = P\left(\xi_t^{(1)} \in B,\ z_1 > t\right) = P\left(\xi_t \in B,\ z_1 > t\right),$$

$$\mu_B(t) = P\left(\xi_t^{(k)} \in B,\ z_k > t\right) = P\left(\xi_{t_{k-1}+t} \in B,\ z_k > t\right), \quad k \geqslant 2.$$

Теорема. *Пусть $A(x)$ — нерешетчатая функция распределения; существует целое $n \geqslant 0$, такое, что функция*

$$Q(t) = \int_0^t \mu_B(t-x)\, dF(x), \quad t \geqslant 0,$$

где $F(x) = A^{*n}(x)$, является непосредственно интегрируемой по Риману на $[0, \infty)$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} P(\xi_t \in B) = a \int_0^\infty \mu_B(x)\, dx,$$

где

$$a^{-1} = \int_0^\infty x\, dA(x).$$

Следствие. *Пусть $A(x)$ — нерешетчатая функция распределения и выполнено хотя бы одно из условий:*

1) *функция $\mu_B(t)$ не возрастает и интегрируема;*

2) *$\mu_B(t)$ имеет ограниченную вариацию на любом конечном интервале времени и*

$$a^{-1} = \int_0^\infty x\, dA(x) < +\infty;$$

3) *для некоторого целого* $n \geqslant 1$ $A^{*n}(x)$ *является абсолютно непрерывной и*

$$\int\limits_0^\infty x\,dA(x) < +\infty.$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} P(\xi_t \in B) = a\int\limits_0^\infty \mu_B(x)\,dx.$$

Для обозначения систем обслуживания используются четыре символа или комбинации символов, разделенные вертикальными чертами: $a|b|c|d$, где a — характеризует входящий поток, b — длительность обслуживания, c — число обслуживающих приборов, d — число мест для ожидания. Если на первом месте стоит символ M, то входящий поток пуассоновский, E_k — эрланговский порядка k (т. е. рекуррентный поток, у которого

$$A(x) = \int\limits_0^{ax} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}e^{-u}du),$$

D — регулярный (т. е. требования поступают через фиксированные (неслучайные) интервалы времени), GI — рекуррентный, G — произвольный.

Если на втором месте стоит буква G, то длительности обслуживания требований имеют произвольное распределение и могут быть зависимыми. Если стоит символ, отличный от G, то длительности обслуживания независимы в совокупности и одинаково распределены, причем если стоит буква M, то — по показательному закону, если сочетание GI — по произвольному. Например, $M|GI|2|10$ означает, что в систему обслуживания, состоящую из 2 приборов и имеющую 10 мест для ожидания, поступает пуассоновский поток требований. Длительности обслуживания независимы в совокупности и одинаково распределены по произвольному закону.

В качестве характеристик функционирования системы обслуживания чаще всего рассматриваются следующие случайные процессы и величины:

n_t — общее число требований в системе в момент времени t;

W_N — время ожидания до начала обслуживания N-го требования (нумерация требований производится в порядке их поступления в систему);

П — длительность периода занятости, т. е. промежутка времени с момента поступления в свободную систему требования до следующего непосредственно момента освобождения системы.

Если существуют $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}(n_t = k) = \pi_k \geqslant 0$, причем $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\pi_k = 1$, и $\lim\limits_{N\to\infty}\mathbf{P}(W_N < x) = W(x)$, где $W(x)$ — собственная функция распределения, будем говорить, что существует *стационарное распределение* процессов n_t и $\{W_N\}$.

Формулами Поллачека — Хинчина для системы $M|GI|1|\infty$ называют соотношения

$$\omega(s) = \frac{(1-\lambda\beta_1)\,s}{s-\lambda+\lambda\beta(s)}, \quad P(z) = \frac{(1-\lambda\beta_1)(z-1)\,\beta(\lambda-\lambda z)}{z-\beta(\lambda-\lambda z)},$$

справедливые при $\lambda\beta_1 < 1$, где $\omega(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}dW(x)$, $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k\pi_k$, λ — интенсивность входящего потока, $B(x)$ — функция распределения времени обслуживания,

$$\beta_1 = \int\limits_0^\infty x\,dB(x), \quad \beta(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}dB(x).$$

Процессы с независимыми приращениями. Случайный процесс ξ_t, $t \in [a, b]$, $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$, называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любых $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины ξ_{t_0}, $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, … …, $\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

Процесс ξ_t, $t \geqslant 0$, с независимыми приращениями называется *однородным*, если распределение $\xi_{t+s} - \xi_s$ не зависит от s, $\xi_0 = 0$.

Винеровский процесс. Однородный случайный процесс w_t, $t \geqslant 0$ с независимыми приращениями называется *винеровским*, если:

1) $w_0 = 0$ почти наверное;

2) для любых s, $t \geqslant 0$ $w_{t+s} - w_s$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией ct (в дальнейшем будут в основном рассматриваться винеровские процессы с $c = 1$).

Случайный процесс w_t, $t \geqslant 0$ является винеровским тогда и только тогда, когда он является гауссовским процессом (т. е. процессом, конечномерные распределения которого гауссовские (нормальные)) с математическим ожиданием 0 и ковариационной функцией $K(t, s) = \min(t, s)$.

Стационарные процессы. Случайный процесс ξ_t, $t \in T$ со значениями в комплексной плоскости называется *стационарным в узком смысле*, если для любого n, любых s, t_1, …, $t_n \in T$, таких, что $t_1 + s$, …, $t_n + s \in T$, распределения случайных векторов $\left(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}\right)$ и $\left(\xi_{t_1+s}, \ldots, \xi_{t_n+s}\right)$ совпадают.

Случайный процесс ξ_t, $t \in T$ называется *стационарным в широком смысле*, если

$$\mathsf{E}\xi_t = m = \text{const}, \quad \mathsf{E}\xi_t\overline{\xi}_s = \varphi(t-s).$$

Процессы, стационарные в узком смысле, будем называть просто *стационарными*.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство.

Измеримое отображение T пространства Ω в себя называется *сохраняющим меру преобразованием*, если для любого $A \in \mathscr{A}$

$$\mathsf{P}(T^{-1}A) = \mathsf{P}(A).$$

Множество A называется *инвариантным* относительно преобразования T, если $\mathsf{P}(A \triangle T^{-1}A) = 0$.

Сохраняющее меру преобразование T называется эргодическим, если каждое инвариантное множество A имеет меру 0 или 1.

Случайная величина $\xi(\omega)$ называется *инвариантной* относительно T, если $\xi(\omega) = \xi(T\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Сохраняющее меру преобразование T называется *перемешиванием*, если для любых A, $B \in \mathscr{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(A \cap T^{-n}B\right) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ — последовательность случайных величин. Множество $A \in \mathscr{A}$ называется *инвариантным по отношению к последовательности* ξ, если существует $B \in \mathscr{B}(R^\infty)$ (σ-алгебра борелевских подмножеств R^∞) такое, что для любого $n \geqslant 1$

$$A = \{\omega\colon (\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots) \in B\}.$$

Стационарная последовательность ξ называется *эргодической*, если мера любого инвариантного множества равна 0 или 1.

Пусть ξ_t — стационарный в широком смысле случайный процесс, $K(t)$ — его ковариационная функция. Тогда существует неубывающая функция $F(\lambda)$ такая, что

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda).$$

$F(\lambda)$ называется *спектральной функцией* процесса ξ_t. Если $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна, ее производная $f(\lambda)$ называется *спектральной плотностью*.

Для всякого стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t, $\xi_0 = 0$, $t \in R$ $(t \in \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\})$, существует процесс Z_λ, $\lambda \in R$ $(-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi)$, с ортогональными приращениями, такой, что

$$\mathsf{E}Z_\lambda = 0, \quad \mathsf{E}\,|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$$

и

$$\xi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_\lambda \qquad \left(\xi_t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ_\lambda\right).$$

Если потребовать $Z_{-\infty} = 0$ $(Z_{-\pi} = 0)$, то процесс Z_λ определяется однозначно с точностью до эквивалентности. Указанное представление процесса ξ_t называется его *спектральным представлением*.

Мартингалы. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство. T — подмножество либо числовой прямой, либо множества целых чисел, ξ_t, $t \in T$,— случайный процесс. Пусть далее, $\{\mathcal{F}_t\}$ — поток σ-алгебр, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ для любого t, $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$, $t_1 < t_2$, ξ_t — измерима относительно $\mathcal{F}_t$.

Случайный процесс $(\xi_t, \mathcal{F}_t, t \in T)$ называется *мартингалом* (*супермартингалом*, *субмартингалом*), если $\mathsf{E}|\xi_t| < \infty$, $t \in T$, $\mathsf{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) = \xi_s$ $(\mathsf{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) \leqslant \xi_s, \mathsf{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) \geqslant \xi_s)$ при $s < t$, $s, t \in T$.

Когда не будет указан явно поток σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, предполагается, что $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_s, s \leqslant t)$.

§ 1. Основные понятия

10.1. Пусть случайный процесс $\xi_t(\omega)$ задан на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, где $\Omega = \{1, 2\}$, $\mathcal{A}$ — множество всех подмножеств Ω, а P приписывает вероятности 1/2 множествам $\{1\}$ и $\{2\}$. Пусть множество значений параметра t есть отрезок $[0, 1]$ и $\xi_t(\omega) = \omega t$. Найти:

а) все реализации процесса $\xi_t(\omega)$; б) все двумерные, трехмерные, n-мерные распределения процесса $\xi_t(\omega)$.

10.2. Пусть случайный процесс $\xi_t(\omega)$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, P — мера Лебега, $t \in [0, 1]$ и

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leqslant \omega, \\ 0 & \text{при} \quad t > \omega. \end{cases}$$

Найти:

а) все реализации процесса $\xi_t(\omega)$; б) двумерные распределения процесса $\xi_t(\omega)$.

10.3. Пусть η — случайная величина с функцией распределения $F(x)$, $t \in R$. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $\xi_t = \eta + t$.

10.4. Пусть η и ζ — независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1/2, $t > 0$. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $\xi_t = (\eta + \zeta)/t$.

10.5. Пусть ξ и η — случайные величины, причем η имеет симметричное относительно нуля распределение и $\mathbf{P}(\eta=0)=0$. Найти вероятность того, что реализации случайного процесса

$$\zeta_t=\xi+t(\eta+t), \quad t\geqslant 0,$$

возрастают.

10.6. Пусть η_1 и η_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое равномерное на отрезке $[-1, 1]$ распределение, $t=(t_1, t_2)\in R^2$. Найти значения a, при которых почти все реализации случайной функции $t_1(\eta_1+t_2(\eta_2+2a))$, монотонно возрастают по t_1 при $t_2=a$.

10.7. Привести пример случайного процесса ξ_t, такого, что множество элементарных событий, которым отвечают непрерывные реализации процесса ξ_t, не является событием.

10.8. Доказать, что если случайный процесс ξ_t, $t\in R$, стохастически непрерывен на компактном множестве $A\subset R$, то он равномерно стохастически непрерывен на этом множестве.

10.9. Доказать, что если случайный процесс стохастически непрерывен на компактном множестве $A\subset R$, то на этом множестве он ограничен по вероятности.

10.10. Пусть ξ_t — стохастически непрерывный процесс, а $g(x)$ — непрерывная функция. Доказать, что процесс $g(\xi_t)$ также стохастически непрерывен.

10.11. Привести пример стохастически непрерывного на отрезке случайного процесса, все траектории которого разрывны.

10.12. Пусть ξ_t, $t\in[0, 1]$,— случайный процесс, такой, что все ξ_t независимы в совокупности и имеют одинаковое невырожденное распределение. Доказать, что этот процесс не является стохастически непрерывным ни в какой точке.

10.13. Пусть случайный процесс ξ_t непрерывен в среднем порядка $p>0$ на компактном множестве A. Доказать, что ξ_t равномерно непрерывен в среднем порядка p на множестве A.

10.14. Пусть случайный процесс ξ_t непрерывен в среднем порядка $p>0$ на компактном множестве A. Доказать, что существует такое положительное число $C<\infty$, что

$$\mathbf{E}|\xi_t|^p\leqslant C \quad \text{при} \quad t\in A.$$

10.15. Доказать, что для того, чтобы случайный процесс ξ_t был стохастически непрерывным на множестве T, необходимо и достаточно, чтобы для любых t_0, $s_0\in T$

$$\lim_{t\to t_0, s\to s_0}\mathbf{P}(\xi_t<x_1, \xi_s<x_2)=\mathbf{P}(\xi_{t_0}<x_1, \xi_{s_0}<x_2),$$

для всех x_1, x_2, для которых $\mathbf{P}(\xi_{t_0}<x_1, \xi_{s_0}<x_2)$ непрерывна.

10.16. Пусть ξ_t, $a\leqslant t\leqslant b$ — стохастически непрерывный процесс, $f(t)$ — неслучайная функция, определенная на $[a, b]$. Доказать, что случайный процесс $\eta_t=\xi_t+f(t)$ стохастически непрерывен в тех и только тех точках отрезка $[a, b]$, где непрерывна функция $f(t)$.

10.17. Пусть $\xi_t(\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,— измеримый случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, а $\tau(\omega)$ — случайная величина, заданная на том же вероятностном пространстве, причем $\mathbf{P}(0 \leqslant \tau \leqslant 1) = 1$. Доказать, что $\xi_\tau = \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ — случайная величина.

10.18. Случайный процесс ξ_t, $-\infty < t < \infty$, и случайная величина τ заданы на одном вероятностном пространстве. Всегда ли является случайной величиной функция ξ_τ, если:

а) τ принимает конечное число значений; б) τ принимает счетное число значений; в) τ — произвольная случайная величина?

10.19. Пусть ξ_t — стохастически непрерывный случайный процесс. Доказать, что для всякой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ функция $\mathbf{E}\varphi(\xi_t)$ непрерывна по t.

10.20. Привести пример случайного процесса ξ_t, $t \in [a, b]$, такого, что для любой непрерывной ограниченной функции $g(x)$ функция $\mathbf{E}g(\xi_t)$ непрерывна на $[a, b]$, но ξ_t не является стохастически непрерывным.

10.21. Пусть ξ_t — стохастически непрерывный случайный процесс, а $g(x)$ — непрерывная функция. Доказать, что если при некотором $\alpha > 1$

$$\sup_t \mathbf{E}\,|g(\xi_t)|^\alpha < \infty,$$

то функция $\mathbf{E}g(\xi_t)$ непрерывна по t.

10.22. Показать, что стохастически эквивалентные процессы имеют одинаковые конечномерные распределения.

10.23. Доказать, что процесс, стохастически эквивалентный стохастически непрерывному процессу, стохастически непрерывен.

10.24. Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, случайный процесс $\xi_t(\omega)$, определенный следующим образом:

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если прямая, проходящая через точку } (t, \omega) \\ & \text{параллельно прямой } t = \omega, \text{ пересекает} \\ & \text{ось } t \text{ в рациональной точке,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Показать, что $\xi_t(\omega)$ стохастически непрерывен, но все его траектории разрывны в каждой точке.

10.25. Пусть ξ_t — случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Доказать, что если Ω счетно и все одноточечные множества имеют положительную вероятность, то стохастическая непрерывность процесса ξ_t эквивалентна непрерывности всех его траекторий.

10.26. Доказать, что если множество значений параметра t случайного процесса ξ_t счетно, то процесс измерим.

10.27. Пусть ξ_t — случайный процесс, все траектории которого непрерывны, а множество значений параметра t представляет собой отрезок прямой. Доказать, что ξ_t измерим.

10.28. Доказать, что все траектории измеримого случайного процесса измеримы. Обязан ли случайный процесс быть измеримым, если все его траектории измеримы?

10.29. Пусть ξ_t, $a \leqslant t \leqslant b$,— случайный процесс. Доказать, что для его измеримости достаточно, чтобы все его траектории были непрерывны справа (или слева).

10.30. Пусть ξ_t, $a \leqslant t \leqslant b$,— стохастически непрерывный процесс. Доказать, что на $[a, b]$ существует измеримый процесс ξ_t^*, стохастически эквивалентный ξ_t.

10.31. Пусть ξ_t — стохастически непрерывный на $[a, b]$ (за исключением не более чем счетного числа точек отрезка $[a, b]$) случайный процесс. Доказать, что на $[a, b]$ существует измеримый процесс ξ_t^*, стохастически эквивалентный ξ_t.

10.32. Пусть ξ_t, $t \in T$,— случайный процесс, $N = \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$ — счетное всюду плотное в T множество. Процесс называется N-сепарабельным, если для любого $t \in T$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{|t-t_n|<\delta} \xi_{t_n} \geqslant \xi_t \geqslant \lim_{\delta \to 0} \inf_{|t_n-t|<\delta} \xi_{t_n}.$$

Пусть $T = [a, b]$. Доказать, что если ξ_t стохастически непрерывен на $[a, b]$, то для всякого счетного всюду плотного в $[a, b]$ множества N существует процесс ξ_t', стохастически эквивалентный ξ_t и N-сепарабельный.

10.33. Пусть все траектории пуассоновского процесса непрерывны справа. Доказать, что тогда почти все траектории — неубывающие целочисленные функции, возрастающие только скачками величины 1.

10.34. Доказать, что для того, чтобы случайный процесс ξ_t был непрерывен в среднем квадратическом на множестве T, необходимо и достаточно, чтобы функция $L(t, s) = \mathbf{E}\xi_t\bar{\xi}_s$ была непрерывна на множестве $T \times T$ по совокупности аргументов.

10.35. Доказать, что для того, чтобы случайный процесс ξ_t был непрерывно дифференцируем в среднем квадратическом на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы функция $L(t, s) = \mathbf{E}\xi_t\bar{\xi}_s$ обладала на множестве $(a, b) \times (a, b)$ непрерывной смешанной производной второго порядка по t и s.

10.36. Доказать, что пуассоновский процесс дифференцируем по вероятности, но не дифференцируем в смысле сходимости в среднем любого порядка $p \geqslant 1$.

10.37. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi_t = \gamma_1 f_1(t) + \ldots + \gamma_n f_n(t)$, где $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — неслучайные функции, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — некоррелированные случайные величины с дисперсиями $d_1, \ldots, d_n$ соответственно.

10.38. Пусть ξ_t, $t \in T$,— случайный процесс с корреляционной функцией $K(t, s)$. Доказать, что $K(t, s)$ неотрицательно определена.

10.39. Пусть $\xi_t^{(1)}, \ldots, \xi_t^{(n)}$ — независимые случайные процессы, такие, что $\mathbf{E}\xi_t^{(i)} = 0$, $i = 1, \ldots, n$; $K_1(t, s), \ldots, K_n(t, s)$ — соответствующие корреляционные функции. Найти корреляционную функцию процесса $\xi_t^{(1)} + \ldots + \xi_t^{(n)}$.

10.40. Доказать положительную определенность следующих функций:

$$K_1(t, s) = \min[t, s], \quad t, s \geqslant 0;$$

$$K_2(t, s) = \begin{cases} 1 - |t - s|, & |t - s| < 1 \\ \quad 0, & |t - s| \geqslant 1, \quad t, s \in R; \end{cases}$$

$$K_3(t, s) = \min[t, s] - ts, \quad t, s \in [0, 1];$$

$$K_4(t, s) = e^{-|t-s|}, \quad t, s \in R.$$

10.41. Пусть $K(t, s)$, $t, s \in T$,— корреляционная функция некоторого случайного процесса, $Q(z)$ — полином с положительными коэффициентами. Доказать, что функция $K_1(t, s) = Q(K(t, s))$ также является корреляционной функцией некоторого случайного процесса.

10.42. Найти спектральную плотность случайного процесса ξ_t, корреляционная функция которого равна $K(t) = ce^{-\alpha|t|}$, c, $\alpha > 0$, $t \in R$.

10.43. Пусть ξ_t, $t \in R$,— случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K(t, s) = e^{st}$. Доказать, что он бесконечно дифференцируем в среднем квадратическом.

10.44. Пусть ξ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, b — вещественное число. Найти корреляционную функцию процесса

$$\xi_t = \xi t + b, \ t \geqslant 0.$$

10.45. Пусть A, η и φ — случайные величины, φ не зависит от A и η, $A \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, φ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию процесса

$$\xi_t = A\cos(\eta t + \varphi), \quad t \in R.$$

10.46. Пусть $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — произвольные вещественные функции, $c_1, \ldots, c_n$ — неотрицательные числа. Доказать, что функция

$$K(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2)$$

является корреляционной функцией некоторого случайного процесса.

10.47. Пусть $\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$ — два независимых случайных процесса с корреляционными функциями $K_1(t, s)$ и $K_2(t, s)$ соответственно. Найти корреляционную функцию процесса

$$\eta_t = \xi_t^{(1)}\xi_t^{(2)}.$$

§ 2. Ветвящиеся процессы

10.48. Найти производящую функцию числа частиц в n-м поколении, если производящая функция непосредственных потомков одной частицы равна:

а) $pz+1-p$; б) $(1-p)/(1-pz)$; в) $1-p(1-z)^{\alpha}$, $0<p<1$, $0<\alpha<1$.

10.49. Найти вероятности вырождения для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы:

а) $(1-p)/(1-pz)$; б) $1-p(1-z)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$; в) $(1+z+z^2+z^3)/4$.

10.50. Найти распределение времени вырождения T для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы:

а) $pz+1-p$; б) $1-p(1-z)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$.

10.51. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ — ветвящийся процесс, $X_0=1$. Доказать, что

$$\mathbf{P}(X_n>N \text{ при некотором } 1\leqslant n\leqslant m-1 \mid X_m=0)\leqslant[\mathbf{P}(X_m=0)]^N.$$

10.52. Найти производящую функцию общего числа частиц в первых n поколениях, если производящая функция числа потомков одной частицы равна $pz+1-p$.

10.53. Рассмотрим ветвящийся процесс $X_0, X_1, \ldots$ с производящей функцией

$$\varphi(z)=\frac{1-(b+c)}{1-c}+\frac{bz}{1-cz},$$

$$0<c<b+c<1, \quad (1-b-c)/[c(1-c)]>1.$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}(X_n=k\mid X_n>0)$.

10.54. Пусть в ветвящемся процессе $X_0, X_1, \ldots$ из задачи 10.53 $1-b-c=c(1-c)$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}(X_n\leqslant nx\mid X_n>0)$.

10.55. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ — ветвящийся процесс, $X_0=1$, $\mathbf{E}X_1=m$. Доказать, что

$$\mathbf{E}\{X_{n+k}\mid X_n\}=m^kX_n.$$

10.56. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ — ветвящийся процесс, $X_0=1$, $\varphi(z)=\mathbf{E}z^{X_1}$, $\varphi_n(z)=\mathbf{E}z^{X_n}$, $\varphi'(1)>1$. Обозначим через Y_n число всех частиц в n-м поколении, имеющих бесконечное число поколений потомков. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(Y_n = k \mid Y_0 = X_0 = 1) = \frac{\varphi_n\,(z(1-q)+q)-q}{1-q},$$

где q — вероятность вырождения.

10.57. Найти производящую функцию числа частиц в момент t для ветвящегося процесса с непрерывным временем и производящей функцией инфинитезимальных параметров:

а) $f(z) = a_2 z^2 + a_1 z - (a_1 + a_2)$, $a_2 > 0$;

б) $f(z) = z^k - z$, $k \geqslant 2$;

в) $f(z) = 1 - z - \sqrt{1-z}$;

г) $f(z) = \lambda(1-z)[1 + \ln(1-z)]$, $\lambda > 0$.

10.58. Найти вероятности вырождения ветвящихся процессов из задачи **10.57.**

10.59. Пусть X_t — ветвящийся процесс с производящей функцией инфинитезимальных параметров $f(z) = a_2 z^2 + a_1 z - (a_1 + a_2)$, где $a_2 > 0$, $a_1 + 2a_2 < 0$. Доказать, что

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(a_1+2a_2)t}\,\mathbf{P}(X_t > 0) = 1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2}.$$

10.60. Доказать, что для ветвящегося процесса X_t с производящей функцией $f(z) = 3 - 5z + z^2 + z^3$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\mathbf{P}(X_t > 0) = \frac{1}{4}.$$

10.61. Пусть X_t — ветвящийся процесс с производящей функцией $f(z) = z^2 - z$. Доказать, что $X_t e^{-t}$ сходится при $t \to \infty$ в среднем квадратическом к случайной величине ξ, имеющей показательное распределение с параметром 1.

10.62. Пусть X_t — ветвящийся процесс с производящей функцией $f(z) = z^2 - 2z + 1$. Доказать, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{X_t}{\mathsf{E}(X_t \mid X_t > 0)} < x \mid X_t > 0\right\} = 1 - e^{-x}.$$

§ 3. Марковские процессы

10.63. Доказать, что следующие определения марковского процесса ξ_t эквивалентны:

а) для любого t и любых $A \in \mathcal{F}_{<t}$, $B \in \mathcal{F}_{>t}$

$$\mathbf{P}(AB \mid \mathcal{F}_{=t}) = \mathbf{P}(A \mid \mathcal{F}_{=t})\,\mathbf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t}) \text{ п. н.};$$

б) для любого t и любого $B \in \mathcal{F}_{>t}$

$$\mathbf{P}(B \mid \mathcal{F}_{<t}) = \mathbf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t}) \text{ п. н.};$$

в) для любого t и любого $A \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$

$$\mathsf{P}(A|\mathcal{F}_{\geqslant t}) = \mathsf{P}(A|\mathcal{F}_{=t}) \text{ п. н.}$$

10.64. Докажите, что случайный процесс ξ_t, $t \in T$, со значениями в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ является марковским, тогда и только тогда, когда для любых $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_m \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, s_i, t, $t_j \in T$, и любых $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}$

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{\xi_{s_i} \in A_i\} \cap \bigcap_{j=1}^{n}\{\xi_{t_j} \in B_j\} \mid \xi_t\right) = \\ = \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{\xi_{s_i} \in A_i\} \mid \xi_t\right)\mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{\xi_{t_j} \in B_j\} \mid \xi_t\right).$$

10.65. Для того чтобы случайный процесс ξ_t, $t \in T$, со значениями в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ был марковским, необходимо и достаточно, чтобы для любых $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_m \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, s_i, t, $t_j \in T$, и любых ограниченных $\mathfrak{B}$-измеримых функций $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{m} f_i(\xi_{s_i}) \prod_{j=1}^{n} g_j(\xi_{t_j}) \mid \xi_t\right] = \mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{m} f_i(\xi_{s_i}) \mid \xi_t\right] \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} g_j(\xi_{t_j}) \mid \xi_t\right] \text{ п. н.}$$

10.66. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— марковский процесс. Доказать, что ξ_n, $n = 0, 1, \ldots$ — марковский процесс с дискретным временем.

10.67. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— марковский процесс. Будет ли последовательность

$$\eta_n = [\xi_n],$$

где $[x]$ — целая часть x, цепью Маркова?

10.68. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковую плотность распределения $p(x)$, $p(x) > 0$, $-\infty < x < \infty$. Будет ли последовательность $\{\eta_n\}$ марковской, если:

а) $\eta_n = \xi_n$, $n = 0, 1, \ldots$; б) $\eta_n = \xi_0 + \ldots + \xi_n$, $n = 0, 1, \ldots$;

в) $\eta_n = \max\{0, \xi_0, \ldots, \xi_n\}$.

Для цепей Маркова найти переходные вероятности за один шаг.

10.69. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковую плотность распределения $p(x)$, $p(x) > 0$, $-\infty < x < \infty$. Положим

$$S_t = S_k(t-k) + S_{k+1}(k+1-t), \quad k \leqslant t \leqslant k+1,$$
$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Будет ли процесс S_t марковским?

10.70. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— однородный марковский процесс со счетным числом состояний $\{0, 1, \ldots\}$. Доказать, что если переходные функции $P_{ij}(t)$ непрерывны при $t=0$, то они равномерно непрерывны при $t \geqslant 0$.

10.71. Пусть ξ_t и η_t, $t \geqslant 0$,— два однородных марковских процесса со счетным числом состояний, $P_{ij}(t)$ и $Q_{ij}(t)$ — соответствующие переходные функции. Доказать, что если для некоторого $t_0 > 0$ и всех i и j $P_{ij}(t)=Q_{ij}(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, то $P_{ij}(t)=Q_{ij}(t)$ при всех $t \geqslant 0$.

10.72. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— однородный марковский процесс с конечным числом состояний $\{0, 1, \ldots, N\}$ и переходными функциями $P_{ij}(t)$. Доказать, что определитель матрицы $P(t)$ с элементами $P_{ij}(t)$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, положителен для всех $t > 0$.

10.73. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— однородный марковский процесс с конечным числом состояний $\{0, 1, \ldots, N\}$ и переходными функциями $P_{ij}(t)$. Предположим, что $P_{ij}(t)$ непрерывны при всех $t \geqslant 0$. Доказать, что существуют конечные пределы

$$a_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

причем $\sum\limits_{j \neq i} a_{ij} = -a_{ii}$.

10.74. Привести пример однородного марковского процесса со счетным числом состояний, для которого существуют конечные пределы

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_{ii}(t) - 1}{t} = a_{ii}, \quad \lim_{t \to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = a_{ij}, \quad i \neq j,$$

но $\sum\limits_{j \neq i} a_{ij} \neq -a_{ii}$.

10.75. Доказать, что любая однородная цепь Маркова является строго марковской относительно семейства σ-алгебр $\mathscr{F}_{\leqslant n}$, $n=0, 1, \ldots$.

10.76. Привести пример марковского, но не строго марковского семейства.

10.77. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— марковский случайный процесс со счетным множеством состояний $\{0, 1, \ldots\}$. Предположим, что в момент $t=0$ процесс находится в состоянии i. Найти функцию распределения времени до первого изменения состояния процесса.

10.78. Найти все инвариантные меры, соответствующие матрице вероятностей перехода

$$P(t) = (P_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} (2+e^{-3t})/3 & (1-e^{-3t})/3 \\ (2-2e^{-3t})/3 & (1+2e^{-3t})/3 \end{pmatrix}.$$

10.79. Привести пример марковского семейства с двумя не пропорциональными друг другу конечными инвариантными мерами.

10.80. Показать, что не существует марковского процесса ξ_t, $t \geqslant 0$, $\xi_0 = 0$, с двумя состояниями $\{0, 1\}$ и непрерывными почти наверное траекториями, переходные вероятности которого равны $P_{00}(t)=e^{-t}$, $P_{01}(t)=1-e^{-t}$, $P_{11}(t)=1$.

§ 4. Процессы массового обслуживания

10.81. Пусть ξ и η — независимые неотрицательные случайные величины

$$\mathsf{P}(\xi < x) = 1 - e^{-ax}, \quad \mathsf{P}(\eta < x) = G(x).$$

Доказать, что

$$\mathsf{P}(\xi < u + \eta \mid \xi \geqslant \eta) = 1 - e^{-au}, \ u \geqslant 0,$$

в частности, для любого $t \geqslant 0$

$$\mathsf{P}(\xi < u + t \mid \xi \geqslant t) = 1 - e^{-au}, \ u \geqslant 0.$$

(Свойство отсутствия памяти у показательного распределения.)

10.82. Доказать, что случайный поток является пуассоновским с интенсивностью λ тогда и только тогда, когда он является рекуррентным потоком с $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$.

10.83. Доказать, что случайный поток ν_t, полученный в результате наложения k независимых пуассоновских потоков $\nu_t^{(1)}, \ldots, \nu_t^{(k)}$ с интенсивностями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, является пуассоновским с интенсивностью $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$.

10.84. Пусть задан пуассоновский поток с интенсивностью λ. Каждое требование этого потока с вероятностью p_i, $i = 1, \ldots, k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, отнесем к i-му подпотоку независимо от остальных требований. Доказать, что i-й подпоток является пуассоновским с интенсивностью λp_i.

10.85. Пусть пуассоновский поток с интенсивностью λ подвергается следующей операции просеивания: первые k требований теряются, $(k+1)$-е — остается, затем снова k теряются, следующее остается и т. д. Доказать, что просеянный поток (он называется потоком Эрланга порядка k) является рекуррентным потоком, определяемым функцией распределения

$$A(t) = \int\limits_0^{\lambda t} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx.$$

10.86. Обозначим через ν_t случайное число требований пуассоновского потока, поступивших в интервале $[0, t)$. Доказать, что при $t \leqslant T$, $k \leqslant n$

$$P(\nu_t = k \mid \nu_T = n) = C_n^k \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k}.$$

10.87. Доказать, что если известно, что на отрезке $[0, T]$, $T > 0$, поступило N требований пуассоновского потока, то поток требований на этом отрезке является потоком Бернулли.

10.88. Пусть задан рекуррентный поток требований, определяемый функцией распределения $A(t)$. Каждое требование независимо от остальных либо с вероятностью p выбрасываем из потока, либо с вероятностью $1 - p$ оставляем. Показать, что поток оставленных требований является рекуррентным потоком, определяемым функцией распределения $B(t)$, где

$$B(t) = A(t) - p\int_0^t P(p, t-u)\,dA(u),$$

а преобразование Лапласа функции $P(z, t)$ равно

$$\int_0^\infty e^{-st}P(z, t)\,dt = \frac{1}{s}\,\frac{1-\alpha(s)}{1-z\alpha(s)}, \quad \alpha(s) = \int_0^\infty e^{-st}dA(t).$$

10.89. Доказать, что для любого стационарного потока существует

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-P_0(t)}{t} = \mu,$$

где $P_0(t)$ — вероятность того, что за время t не поступит ни одного требования. Число μ (конечное или бесконечное) называется параметром стационарного потока.

10.90. Пусть μ — параметр, а λ — интенсивность (т. е. среднее число требований, поступивших в единицу времени) стационарного потока. Доказать, что если параметр является конечным положительным числом, то условия:

а) ординарность потока; б) $\lambda = \mu$

равносильны.

10.91. Для каждого $n \geqslant 1$ рассмотрим суммарный поток $\sum_n$, получающийся наложением n независимых потоков, где k-й поток ($k = 1, \ldots, n$) является рекуррентным потоком с запаздыванием, определяемым функциями распределения $A_{1k}(t)$ и $A_k(t)$:

$$A_{1k}(t) = a_k\int_0^t [1 - A_k(u)]\,du, \quad a_k^{-1} = \int_0^\infty [1 - A_k(u)]\,du.$$

Предположим, что при $n \to \infty$:

1) $a_1 + \ldots + a_n = a = \mathrm{const}$;

2) $\max\limits_{1<k<n}\{a_k\} \to 0$;

3) при каждом фиксированном t

$$\max_{1<k<n}\{A_k(t)\} \to 0.$$

Доказать, что при $n \to \infty$ поток $\sum_n$ равномерно сходится к пуассоновскому с параметром a.

10.92. Поток пассажиров на остановку — пуассоновский с интенсивностью λ. Через случайные интервалы времени $\xi_1, \xi_2, \ldots$ на остановку прибывают автобусы. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы в совокупности и одинаково распределены с нерешетчатой функцией распределения $G(x)$, $\mu^{-1} = \int_0^\infty x\,dG(x) < \infty$. Автобус забирает всех пассажиров, находящихся на остановке в момент его прибытия. Пусть w_t — время ожидания до прихода автобуса начиная с момента t. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}(w_t < y)$.

В задачах **10.93—10.95** рассматривается та же система обслуживания, что и в задаче **10.92**.

10.93. Пусть α_t — время, прошедшее с момента последнего прихода автобуса до момента t. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}(\alpha_t < y)$.

10.94. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}(w_t < u,\ \alpha_t < v)$.

10.95. Пусть ν_t — число пассажиров на остановке в момент времени t. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}(\nu_t = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

10.96. Найти вероятность $P_0(t)$ свободного состояния в момент t системы $M|M|1|0$, если интенсивность входящего потока равна λ, среднее время обслуживания $-\mu^{-1}$ и:

а) в момент $t = 0$ система была свободна; б) в момент $t = 0$ система была занята.

10.97. Найти вероятность q_n того, что в стационарном режиме в системе $M|M|n|\infty$ все приборы заняты, если интенсивность входящего потока равна λ, среднее время обслуживания — μ^{-1}, причем $\lambda < n\mu$.

10.98. Рассмотрим систему обслуживания $M|M|1|\infty$. Предположим дополнительно, что длительность пребывания n-го требования (нумерация требований производится в порядке их поступления в систему) в очереди ограничено случайной величиной ξ_n. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы в совокупности и одинаково распределены с функцией распределения $1 - e^{-\nu x}$, $x \geqslant 0$. Пусть λ — интенсивность входящего потока, μ^{-1} — среднее время обслуживания. Найти вероятность P_0 того, что в стационарном режиме система свободна.

10.99. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти математическое ожидание $\bar{n}$ числа требований в системе в стационарном режиме.

10.100. Найти стационарную вероятность того, что в системе $M|M|n|m$:

а) заняты все приборы (P_n); б) заняты все места для ожидания (P_{n+m}).

10.101. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти математическое ожидание $\bar{N}$ числа приборов, занятых обслуживанием в стационарном режиме.

10.102. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти математическое ожидание числа требований:

а) в очереди $\bar{q}$; б) в системе $\bar{n}$
в стационарном режиме.

10.103. Рассмотрим систему $M|GI|1|\infty$. Пусть λ — интенсивность входящего потока, $B(x)$ — функция распределения длительности обслуживания, π_j — вероятность нахождения в системе j требований в стационарном режиме. Доказать, что при

$$B(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\alpha,\\ 1, & x>\alpha,\end{cases}$$

$$\pi_0=1-\lambda\alpha,\ \pi_1=(e^{\lambda\alpha}-1)(1-\lambda\alpha),$$

$$\pi_j=(1-\lambda\alpha)\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j-k}e^{k\lambda\alpha}\left[\frac{(k\lambda\alpha)^{j-k}}{(j-k)!}+\frac{(k\lambda\alpha)^{j-k-1}}{(j-k-1)!}\right]+$$
$$+(1-\lambda\alpha)e^{\alpha j\lambda},\quad j\geqslant 2.$$

10.104. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Пусть f_j — вероятность того, что за период занятости обслужено j требований. Показать, что при

$$B(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\alpha,\\ 1, & x>\alpha,\end{cases}\qquad f_j=\frac{e^{-\lambda\alpha j}}{j!}(\lambda\alpha j)^{j-1}.$$

10.105. Рассмотрим систему $M|GI|1|\infty$. Пусть $W(x)$ — функция распределения времени ожидания в стационарном режиме, λ — интенсивность входящего потока, $B(x)$ — функция распределения времени обслуживания. Доказать, что $W(x)$ — безгранично делимая функция распределения.

10.106. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти функцию распределения интервалов времени между уходом из системы требований в стационарном режиме.

10.107. Рассмотрим систему $M|GI|1|\infty$. Пусть после окончания обслуживания каждого требования с вероятностью p оно покидает систему и с вероятностью $1-p$ возвращается в очередь для повторного обслуживания независимо от остальных требований и числа предыдущих поступлений на прибор данного требования. Найти преобразование Лапласа — Стилтьеса $\pi(s)$ функции распределения длительности периода занятости.

10.108. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти производящую функцию $P(z)$ числа требований в системе в стационарном режиме.

10.109. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти функцию распределения $F(x)$ интервалов времени между выходящими из системы требованиями в стационарном режиме.

10.110. Найти преобразование Лапласа вероятности свободного состояния системы $M|GI|1|0$ в момент t при условии, что в момент $t=0$ система была свободна.

10.111. Найти $\pi(s)$ — преобразование Лапласа — Стилтьеса функции распределения длительности периода занятости в системе $M|GI|1|1$.

10.112. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти производящую функцию $f(z)$ числа требований, обслуженных за период занятости.

10.113. Рассмотрим систему обслуживания $M|GI|\infty$. Пусть λ — интенсивность входящего потока, $B(x)$ — функция распределения времени обслуживания на любом приборе, n_t — число требований в системе в момент t. Найти совместное распределение (n_{t_1}, n_{t_2}), $t_1 < t_2$.

10.114. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Пусть μ_t — число требований, обслуженных до момента t. Найти совместное распределение (μ_{t_1}, μ_{t_2}), $t_1 < t_2$.

10.115. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти совместное распределение (n_t, μ_t).

10.116. Рассмотрим систему обслуживания $M|GI|1|\infty$. Предположим дополнительно, что длительность обслуживания требования, поступающего в свободную систему, имеет функцию распределения $B_1(t)$, отличную от функции распределения длительности обслуживания $B(t)$ требований, поступающих в занятую систему. Найти преобразование Лапласа — Стилтьеса длительности периода занятости $\pi(s)$.

10.117. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти производящую функцию $f(z)$ числа требований, обслуженных за период занятости.

10.118. Рассмотрим систему обслуживания $M|GI|1|\infty$. Предположим, что обслуживающий прибор ненадежен в занятом состоянии. Длительность работы прибора до поломки имеет показательное распределение $1 - e^{-\nu x}$, $x \geqslant 0$. Сразу после поломки прибора начинается его восстановление, которое длится случайное время с функцией распределения $G(x)$. Требование, во время обслуживания которого прибор вышел из строя, теряется. Пусть λ — интенсивность входящего потока, $B(x)$ — функция распределения времени обслуживания. Найти преобразование Лапласа — Стилтьеса длительности периода занятости.

10.119. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти преобразование Лапласа — Стилтьеса функции распределения времени ожидания в стационарном режиме.

10.120. Рассматривается та же система обслуживания, что и в предыдущей задаче. Найти производящую функцию $P(z)$ числа требований в системе в стационарном режиме.

§ 5. Винеровский процесс

10.121. Найти корреляционную функцию винеровского процесса w_t.

10.122. Пусть w_t — винеровский процесс. Найти совместную плотность распределения величин w_u и w_v $0 < u < v < 1$ при условии, что $w_1 = 0$.

10.123. Пусть w_t — винеровский процесс. Найти ковариацию величин w_s и w_t, $s < t < 1$, при условии, что $w_1 = 0$.

10.124. Пусть w_t — винеровский процесс. Найти корреляционную функцию процесса $w_t^{(0)} = w_t - tw_1$, рассматриваемого на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ (условный винеровский процесс).

10.125. Пусть $w_t^{(0)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,— условный винеровский процесс, определенный в предыдущей задаче. Доказать, что процесс $\overline{w}_t = (1 + t)\, w^{(0)}_{t/(1+t)}$, $t \geqslant 0$, — винеровский.

10.126. Пусть w_t — винеровский процесс. Доказать, что следующие процессы также винеровские:

а) $w_t^{(1)} = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ tw_{1/t}, & t > 0; \end{cases}$ б) $w_t^{(2)} = \sqrt{c}\, w_{t/c}$, $t \geqslant 0$, $c = \mathrm{const} > 0$.

10.127. Пусть $w_t^{(1)}$ и $w_t^{(2)}$ — независимые винеровские процессы. Доказать, что процесс $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(w_t^{(1)} + w_t^{(2)}\right)$, $t \geqslant 0$, также винеровский.

10.128. Пусть w_t, $t \geqslant 0$,— винеровский процесс. Положим

$$w_t^{(0)} = \begin{cases} w^t, & t \leqslant T, \\ 2w_T - w_t, & t > T. \end{cases}$$

Доказать, что $w_t^{(0)}$ — винеровский процесс.

10.129. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Доказать, что

$$w_t = \frac{t}{\sqrt{\pi}}\xi_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{\sin kt}{k} \xi_k, \qquad t \in [0, \pi],$$

— винеровский процесс.

10.130. Доказать, что винеровский процесс не дифференцируем по вероятности.

10.131. Пусть w_t — винеровский процесс. Доказать, что

$$E\left((w_t - w_s)^{2n+1}\right) = 0,$$
$$E\left((w_t - w_s)^{2n}\right) = (2n - 1)!!\,(t - s)^n.$$

10.132. Доказать, что винеровский процесс является марковским. Найти его переходную функцию.

10.133. Найти конечномерные распределения винеровского процесса.

10.134. Доказать, что почти все траектории винеровского процесса нигде не дифференцируемы.

10.135. Пусть w_t — винеровский процесс. Найти условную плотность величины w_t, $t_1 < t < t_2$, при условии, что

$$w_{t_1} = A, \quad w_{t_2} = B.$$

10.136. Пусть w_t — винеровский процесс. Доказать, что при $z \geqslant 0$

$$P\left(\max_{0 \leqslant s \leqslant t} w_s \geqslant z\right) = 2P(w_t \geqslant z).$$

Найти плотность распределения случайной величины $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} w_s$.

10.137. Пусть $\tau(z)$, $z > 0$,— случайный момент времени, в который винеровский процесс w_t впервые достигает значения z. Найти плотность распределения $\tau(z)$. Показать, что математическое ожидание $\tau(z)$ бесконечно.

10.138. Пусть $\tau(z)$ — случайная величина, определенная в предыдущей задаче. Доказать, что композиция распределений случайных величин $\tau(z_1)$ и $\tau(z_2)$ совпадает с распределением случайной величины $\tau(z_1 + z_2)$.

10.139. Показать, что распределение случайной величины $\tau(z)$, определенной в задаче **10.137**, совпадает с распределением случайной величины $z^2\tau(1)$.

10.140. Найти характеристическую функцию случайной величины $\tau(1)$, определенной в задаче **10.137**.

10.141. Найти вероятность того, что винеровский процесс w_t не обращается в нуль в интервале (t_0, t_1), $0 < t_0 < t_1$.

10.142. Пусть w_t — винеровский процесс. Найти вероятность события

$$\left\{\max_{0 \leqslant s \leqslant t} w_s \geqslant z,\ w_t < x\right\}.$$

10.143. Пусть w_t — винеровский процесс. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} w_s$ при условии, что $w_1 = 0$.

10.144. Найти вероятность того, что винеровский процесс w_t достигнет наклонной границы, задаваемой в координатах (t, w) уравнением $w = a(t + 1)$, $t \geqslant 0$, $a > 0$.

10.145. Пусть $P(a, b)$ означает вероятность того, что винеровский процесс w_t достигнет наклонной границы, задаваемой в координатах (t, w) уравнением $w = at + b$, $t \geqslant 0$, $a, b > 0$. Доказать, что:

а) $P(a, b) = P(b, a)$; б) $P(a, b_1 + b_2) = P(a, b_1)P(a, b_2)$.

10.146. Пусть $P(a, b)$ — величина, определенная в предыдущей задаче. Доказать, что

$$P(a, b) = e^{-\gamma ab},$$

где γ — некоторая неотрицательная постоянная.

10.147. Определить значение постоянной γ в предыдущей задаче.

§ 6. Процессы с независимыми приращениями

10.148. Доказать, что всякий процесс с независимыми приращениями является марковским.

10.149. Пусть $\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$, $t \geqslant 0$,— независимые случайные процессы, каждый из которых является процессом с независимыми приращениями. Доказать, что их сумма

$$\xi_t = \xi_t^{(1)} + \xi_t^{(2)}, \quad t \geqslant 0,$$

также является процессом с независимыми приращениями.

10.150. Пусть ξ_t — случайный процесс с независимыми приращениями, $t \in R$. Доказать, что если для некоторых t_1 и t_2 и некоторой постоянной a

$$P\left(\xi_{t_1} - \xi_{t_2} = a\right) = 1,$$

то для любой пары u_1 и u_2, такой, что $t_1 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant t_2$, существует постоянная b, такая, что

$$P\left(\xi_{u_1} - \xi_{u_2} = b\right) = 1.$$

10.151. Доказать, что функция распределения приращения любого однородного случайного процесса с независимыми приращениями безгранично делима.

10.152. Пусть $\varphi(t, z)$ — характеристическая функция однородного стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями ξ_t. Доказать, что $\varphi(t, z)$ непрерывна как функция t.

10.153. Пусть ξ_t — процесс с независимыми приращениями, $\varphi(t, z)$ — его характеристическая функция. Доказать, что если $\varphi(t, z)$ непрерывна по t в точке t_0, то ξ_t стохастически непрерывен в точке t_0.

10.154. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ — точки из интервала $[a, b)$. Положим $\xi_t = \sum\limits_{t_k < t} \xi_k$. Доказать, что ξ_t — процесс с независимыми приращениями.

10.155. Пусть ξ_t — процесс с независимыми приращениями, $\varphi(t, z)$ — его характеристическая функция. Доказать, что при каждом z $|\varphi(t, z)|$ не возрастает как функция t.

10.156. Пусть ξ_t — однородный случайный процесс с независимыми приращениями, $\xi_0 = 0$, $\varphi(t, z)$ — его характеристическая функция. Доказать, что для любых t и s

$$\varphi(t + s, z) = \varphi(t, z)\varphi(s, z).$$

10.157. Пусть ξ_t — процесс с независимыми приращениями. Доказать, что если ξ_{t_0} имеет абсолютно непрерывное распределение при некотором t_0, то ξ_t имеет абсолютно непрерывное распределение при любом $t \geqslant t_0$.

10.158. Пусть ξ_t — процесс с независимыми приращениями. Доказать, что функция $\mathbf{D}\xi_t$ не убывает по t.

10.159. Пусть ξ_t, $a \leqslant t \leqslant b$, — однородный процесс с независимыми приращениями. Доказать, что ξ_t стохастически непрерывен всюду на $[a, b]$.

10.160. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$, — однородный случайный процесс с независимыми приращениями, $\varphi_\lambda(u)$ — характеристическая функция случайной величины $\xi_\lambda - \xi_0$. Доказать, что

$$\varphi_\lambda(u) = \{\varphi_1(u)\}^\lambda.$$

10.161. Пусть ξ_t — процесс с независимыми приращениями, η — некоторая случайная величина, определенная на том же вероятностном пространстве, что и ξ_t. Будет ли процесс $\zeta_t = \xi_t + \eta$ процессом с независимыми приращениями?

10.162. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— однородный процесс с независимыми приращениями, не равный почти наверное постоянной. Доказать, что ξ_t не является стохастически ограниченным.

10.163. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— процесс с независимыми приращениями. Доказать, что если при некотором t_0 $\mathbf{P}(\xi_{t_0} = \mathrm{const}) = 1$, то $\mathbf{P}(\xi_t = \mathrm{const}) = 1$ для всех $t \leqslant t_0$.

10.164. Пусть ξ_t, $a \leqslant t \leqslant b$,— симметричный процесс с независимыми приращениями. Доказать, что если для некоторой последовательности $t_1, t_2, \ldots$, такой, что $t_n \to b$ при $n \to \infty$ и $t_n < b$, $n = 1, 2, \ldots$, $\xi_{t_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi_b$, $n \to \infty$, то

$$\xi_t \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi_b, \quad t \to b.$$

10.165 (*продолжение*). Можно ли отказаться от условия симметричности?

10.166. Пусть ξ_t, $a \leqslant t \leqslant b$,— процесс с независимыми приращениями. Будет ли процесс $\eta_t = \xi_{-t}$, $-b \leqslant t \leqslant -a$, процессом с независимыми приращениями?

10.167. Доказать, что если ξ_t — однородный процесс с независимыми приращениями, то существует положительная постоянная c (c может равняться $+\infty$), такая, что $\mathbf{D}\xi_t = ct$.

10.168. Пусть ξ_t, $a \leqslant t < b$, $0 \leqslant a < b$,— процесс с независимыми приращениями. Можно ли его доопределить на отрезках $[0, a)$ и $[b, \infty)$ так, чтобы полученный (на $[0, \infty)$) процесс также был процессом с независимыми приращениями?

10.169. Пусть ξ_t — процесс с независимыми приращениями. Доказать, что если функция $\mathbf{D}\xi_t$ непрерывна по t, то ξ_t стохастически непрерывен.

10.170. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— однородный невырожденный процесс с независимыми приращениями. Доказать, что для любого $t > 0$ и любого $A > 0$ $\mathbf{P}(|\xi_t| > A) > 0$.

10.171. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$,— случайный процесс, причем ξ_0 равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, а ξ_{t_0}, $t_0 > 0$, имеет показательное распределение. Доказать, что ξ_t не может быть процессом с независимыми приращениями.

10.172. Доказать, что гауссовский случайный процесс с некоррелированными приращениями является процессом с независимыми приращениями.

10.173. Доказать, что любой процесс с некоррелированными приращениями и нулевым математическим ожиданием имеет пределы в среднем квадратическом слева и справа в любой точке $t \in T$.

10.174. Пусть ξ_t — случайный процесс с некоррелированными приращениями, $t \in R$. Доказать, что существует неубывающая функция $F(t)$, такая, что при любых t и s случайная величина $\xi_t - \xi_s$ имеет дисперсию, равную $F(t) - F(s)$.

§ 7. Стационарные процессы

10.175. Пусть A, η и φ — случайные величины, причем A, η неотрицательны и имеют произвольное совместное распределение, а φ не зависит от них и имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi)$. Доказать, что случайный процесс

$$\xi_t = A\cos(\eta t + \varphi),\ t \in R,$$

является стационарным.

10.176. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значение $+1$ и -1 с вероятностями 1/2. Доказать, что случайный процесс

$$\eta_t = \xi_1 \cos\lambda t + \xi_2 \sin\lambda t, \quad t \in R,$$

не является стационарным, но является стационарным в широком смысле.

10.177. Пусть ξ_t — действительный гауссовский стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и непрерывной корреляционной функцией $K(t)$. Найти корреляционную функцию процесса $\eta_s = \xi_{t+s}\xi_s$.

10.178. Пусть π_t, $t \geqslant 0$,— пуассоновский процесс с параметром λ. Доказать, что процесс $\xi_t = \pi_{t+1} - \pi_t$, $t \geqslant 1$, является стационарным в широком смысле.

10.179. Доказать, что если ξ_t — стационарный процесс и существует предел ξ_t при $t \to \infty$ по вероятности, то для любых t_1, t_2 $\mathbf{P}(\xi_{t_1} = \xi_{t_2}) = 1$.

10.180. Пусть T — сохраняющее меру преобразование и $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\mathbf{E}\xi(\omega) = \mathbf{E}\xi(T\omega).$$

10.181. Пусть $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — множество, состоящее из конечного числа точек, $n \geqslant 2$, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств, $T\omega_i = \omega_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, и $T\omega_n = \omega_1$. Доказать, что если $\mathbf{P}(\omega_i) = 1/n$, то T — сохраняющее меру преобразование.

10.182. Пусть $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств, $\mathbf{P}$ — мера Лебега. Пусть $\lambda \in [0, 1)$ и

а) $T(x) = (x + \lambda) \bmod 1$; б) $T(x) = 2x \bmod 1$.

Доказать, что T является сохраняющим меру преобразованием.

10.183. Пусть $\Omega = [0, 1)$, $\mathscr{A}$ — множество борелевских подмножеств $[0, 1)$, $\mathbf{P}$ — некоторая мера с непрерывной функцией распределения. Показать, что преобразования $Tx=\lambda x$, $0<\lambda<1$, и $Tx=x^2$ не являются преобразованиями, сохраняющими меру.

10.184. Доказать, что класс множеств, инвариантных относительно сохраняющего меру преобразования, образует σ-алгебру.

10.185. Рассмотрим то же вероятностное пространство, что и в задаче **10.182**. Доказать, что преобразование $T\omega=(\omega+\lambda) \bmod 1$ эргодично в том и только том случае, когда λ иррационально.

10.186. Показать, что случайная величина является инвариантной относительно некоторого сохраняющего меру преобразования тогда и только тогда, когда она измерима относительно σ-алгебры инвариантных событий.

10.187. Показать, что событие A является инвариантным относительно T тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{P}(T^{-1}A\backslash A)=0 \text{ или } \mathsf{P}(A\backslash T^{-1}A)=0.$$

10.188. Обладает ли преобразование, рассмотренное в задаче 10.185, свойством перемешивания?

10.189. Доказать, что преобразование T есть перемешивание в том и только в том случае, когда для любых двух случайных величин ξ и η, имеющих конечные дисперсии,

$$\mathsf{E}\xi(T^n\omega)\eta(\omega)\to\mathsf{E}\xi(\omega)\mathsf{E}\eta(\omega),\quad n\to\infty$$

10.190. Является ли стационарной последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин?

10.191. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин, причем ξ_i не зависит от ξ_{i-1} и ξ_{i+1}. Является ли эта последовательность стационарной?

10.192. Пусть $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — гауссовская стационарная последовательность с $\mathsf{E}\xi_n=0$ и ковариационной функцией $R(n)=\mathsf{E}\xi_{k+n}\xi_k$. Показать, что условие $R(n)\to 0$ является достаточным для эргодичности ξ.

10.193. Доказать, что всякая последовательность, состоящая из независимых одинаково распределенных случайных величин, является эргодической.

10.194. Показать, что стационарная последовательность $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ эргодична в том и только том случае, когда для любого $B\in\mathscr{B}(R^k)$, $k=1, 2, \ldots$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_B(\xi_i, \ldots, \xi_{i+k})\xrightarrow{\text{п.н.}}\mathsf{P}((\xi_1, \ldots, \xi_{k+1})\in B).$$

10.195. Указать условия, при которых однородная цепь Маркова является стационарной последовательностью.

10.196. Пусть $f(x_0, \ldots, x_m)$ — измеримая вещественная функция, определенная в R^{m+1}, и $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность случайных величин. Доказать, что последовательность $\{\eta_n\}$, где $\eta_n=f(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m})$, также стационарна.

10.197. Доказать, что для того, чтобы последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ была стационарной, необходимо и достаточно, чтобы для любого $m \geqslant 0$ и для любой ограниченной измеримой функции $f(x_0, \ldots, x_m)$ $\mathbf{E}f(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m})$ не зависело от n.

10.198. Доказать, что из эргодичности последовательности $\{\xi_k, k \geqslant 0\}$ вытекает эргодичность последовательности $\{\eta_k, k \geqslant 0\}$, где $\eta_k = f(\xi_k, \ldots, \xi_{k+m})$, а $f(x_0, \ldots, x_m)$ — произвольная измеримая функция.

10.199. Пусть $\{\xi_k\}$ — стационарная последовательность, а $f_n(x_0, \ldots, x_n)$ такая последовательность функций, что $f_n(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ сходится по вероятности к некоторой случайной величине η_0. Положим $\eta_k = \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\lim}} f_n(\xi_k, \ldots, \xi_{k+n})$. Доказать, что $\{\eta_k\}$ — стационарная последовательность и она эргодична, если эргодична $\{\xi_k\}$.

10.200. Доказать, что последовательность $\{\xi_k\}$ эргодична тогда и только тогда, когда для каждой измеримой ограниченной функции $f(x_0, \ldots, x_m)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \ldots, \xi_{k+m}) = \mathbf{E}f(\xi_0, \ldots, \xi_m).$$

10.201. Пусть $\{\xi_k\}$ — стационарная последовательность, $\mathbf{E}\xi_0\xi_n - (\mathbf{E}\xi_0)^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = \mathbf{E}\xi_0.$$

10.202. Пусть $\{\xi_k\}_{k\geqslant 0}$ — гауссовская последовательность. Доказать, что для стационарности этой последовательности необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi_0, \quad n > 0, \quad \mathbf{E}\xi_0\xi_n = \mathbf{E}\xi_k\xi_{k+n}, \quad k \geqslant 0, \quad n \geqslant 0.$$

10.203. Пусть ξ_t — однородный процесс с независимыми приращениями. Доказать, что при $h > 0$ процесс $\zeta_t^{(h)} = \xi_{t+h} - \xi_t$ стационарен.

10.204. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T, ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, T]$. Показать, что процесс $\xi_t = \varphi(t + \xi)$ является стационарным.

10.205. Доказать, что сумма независимых стационарных случайных процессов является стационарным случайным процессом.

10.206. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \theta_1, \ldots, \theta_n$ — независимые случайные величины, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ равномерно распределены на отрезке $[0, 2\pi]$. Доказать, что процесс

$$\xi_t = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cos[k(\theta_k + t)]$$

является стационарным.

10.207. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$ — гауссовский процесс. Доказать, что он стационарен тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}\xi_t = \mathsf{E}\xi_0$, $\mathsf{E}\xi_t\xi_{t+s} = \mathsf{E}\xi_0\xi_s$ для всех $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$.

10.208. Пусть корреляционная функция стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t стремится к нулю на бесконечности. Доказать, что $\frac{1}{t_2 - t_1}\int\limits_{t_1}^{t_2} \xi_t dt$ сходится к $\mathsf{E}\xi_t$ в среднеквадратическом при $t_2 - t_1 \to 0$.

10.209. Доказать, что если ξ_t — непрерывный в среднем квадратическом стационарный процесс, $\mathsf{E}\xi_t \neq 0$, то не существует случайной величины η, такой, что $\eta + \int\limits_0^t \xi_s ds$ — стационарный процесс.

10.210. Пусть ξ_t — стационарный процесс, η — случайная величина. Будет ли процесс $\zeta_t = \xi_t + \eta$ стационарным?

10.211. Найти спектральное представление случайного процесса ξ_t, определенного в задаче **10.175**.

10.212. Пусть ξ_t — действительный стационарный процесс с математическим ожиданием m и спектральной плотностью $f(\lambda)$. Положим $\eta_t = \xi_t \cos(\Lambda t + \varphi)$, где $\Lambda = \mathrm{const}$, φ — независимая от ξ_t случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi)$. Найти спектральное представление для η_t.

§ 8. Мартингалы

10.213. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями, $S_n = \xi_0 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что последовательность $\{S_n\}$ образует мартингал.

10.214. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $\mathsf{E}\xi_n = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, $X_n = \prod\limits_{i=0}^{n} \xi_i$. Доказать, что последовательность $\{X_n\}$ образует мартингал.

10.215. Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием, $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — неубывающая последовательность σ-алгебр. Положим $\xi_n = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$. Доказать, что последовательность $\{\xi_n, \mathscr{F}_n\}$ образует мартингал.

10.216. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых случайных величин, $\{\eta_k\}$ — последовательность случайных величин, таких, что при каждом k $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ и $\{\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots\}$ независимые совокупности случайных величин. Доказать, что если $\mathsf{E}\xi_k = 0$, $\mathsf{E}|\eta_k\xi_k| < \infty$, то последовательность

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \xi_k, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

является мартингалом.

10.217. Пусть $\{\xi_n\}$ — мартингал, $\mathsf{E}\xi_n^2 < \infty$. Доказать, что $\{\xi_n^2\}$ — субмартингал.

10.218. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания $S_n = \xi_0 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что последовательность $\{S_n\}$ образует субмартингал.

10.219. Пусть $\{X_n, \mathscr{F}_n\}$ — мартингал, а $g(x)$ — выпуклая функция, такая, что $\mathsf{E}|g(X_n)| < \infty$, $n = 0, 1, \ldots$ Доказать, что последовательность $\{g(X_n), \mathscr{F}_n\}$ образует субмартингал.

10.220. Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — две последовательности случайных величин, такие, что при каждом n существуют совместная плотность распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ и совместная плотность распределения случайных величин $\eta_1, \ldots$ $\ldots, \eta_n$ — $g_n(x_1, \ldots, x_n)$. Доказать, что последовательность

$$\zeta_n = \frac{g_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

образует мартингал.

10.221. Пусть $\{X_n, \mathscr{F}_n\}$ — субмартингал, а $g(x)$ — выпуклая неубывающая функция, такая, что $\mathsf{E}|g(X_n)| < \infty$, $n = 0, 1, \ldots$ Доказать, что последовательность $\{g(X_n), \mathscr{F}_n\}$ также образует субмартингал.

10.222. Пусть $\{\mathscr{F}_n\}$ — неубывающая последовательность σ-алгебр, $\{X_n\}$ — последовательность случайных величин, таких, что X_n измерима относительно $\mathscr{F}_n$. Пусть B — произвольное борелевское множество на прямой. Доказать, что момент первого попадания в множество B: $\tau_B = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in B\}$ является марковским моментом.

10.223. Пусть τ и σ — марковские моменты. Доказать, что $\tau + \sigma$, $\min\{\tau, \sigma\}$, $\max\{\tau, \sigma\}$ — также марковские моменты относительно той же последовательности σ-алгебр, что и τ, σ.

10.224. Пусть τ и σ — марковские моменты. Будет ли случайная величина $\tau - \sigma$ марковским моментом?

10.225. Пусть $\{X_n, \mathscr{F}_n\}$ — мартингал (субмартингал), τ — марковский момент относительно последовательности σ-алгебр $\{\mathscr{F}_n\}$. Положим $\tau_n = \min\{n, \tau\}$. Доказать, что последовательность $\{X_{\tau_n}, \mathscr{F}_n\}$ также является мартингалом (субмартингалом).

10.226. Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathsf{P}(\xi_i = 0) = \mathsf{P}(\xi_i = 2) = 1/2$, $X_n = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$. Показать, что не существует такой интегрируемой случайной величины ξ и неубывающего семейства σ-алгебр $\{\mathscr{F}_n\}$, что $X_n = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$.

10.227. Пусть ξ_t — однородный процесс Пуассона с параметром λ. Доказать, что $\zeta_t = \exp\{\xi_t - at\}$ представляет собой субмартингал при $a \leqslant \lambda(e-1)$ и супермартингал при $a \geqslant \lambda(e-1)$.

10.228. Пусть $\{\mathscr{F}_n\}$ — неубывающая последовательность σ-алгебр, $\mathscr{F}$ — σ-алгебра, порожденная $\bigcup \mathscr{F}_n$. Пусть ξ — измеримая относительно $\mathscr{F}$ неотрицательная случайная величина, имеющая конечное математическое ожидание. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n) = \xi$.

10.229. Пусть $\{\xi_n\}$ — равномерно интегрируемый мартингал, $\xi_n \geqslant 0$, $\xi = \lim \xi_n$. Доказать, что $\xi_n = \mathbf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$, где $\mathscr{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

10.230. Пусть $\{X_n\}$, $n \geqslant 0$ — мартингал. Доказать, что $\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X_0$ для любого $n = 1, 2, \ldots$

10.231. Доказать, что винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом.

10.232. Доказать, что если $\xi_t (t \geqslant 0)$ — процесс с независимыми приращениями, $\xi_0 = 0$ и $\mathbf{E}\xi_t = 0$ для любого $t \geqslant 0$, то ξ_t образует мартингал.

10.233. Пусть ξ_t, $t \in T$ — мартингал относительно семейства $\mathscr{F}_t$, $\mathbf{E}\,|\xi_t|^2 < \infty$. Доказать, что ξ_t имеет некоррелированные приращения.

10.234. Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$ — процесс с независимыми приращениями, $\xi_0 = 0$, $\mathbf{E}\xi_t = 0$, $\mathbf{E}(\xi_t - \xi_s)^2 = F(t) - F(s)$, $s \leqslant t$. Доказать, что $\left(\xi_t^2 - F(t), \mathscr{F}_t\right)$ — мартингал, где $\mathscr{F}_t = \sigma(\xi_u, u \leqslant t)$.

10.235. Пусть $\{\xi_n\}$ — мартингал и $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty, n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что для любого $a > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\xi_n^2}{a^2}.$$

10.236. Пусть $\{\xi_n\}$ — субмартингал. Доказать, что $\xi_n = \eta_n + \zeta_n$, где $\{\eta_n\}$ — мартингал, а ζ_n измерима относительно $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ и $\mathbf{P}(0 \leqslant \zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \ldots) = 1$.

10.237. Пусть $\{\xi_n\}$ — субмартингал. Доказать, что для любого $a > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\max\{0, \xi_n\}}{a}.$$

10.238. Пусть $\{\xi_n\}$ — супермартингал. Доказать, что для любого $a \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k \geqslant a\right) \leqslant \frac{1}{a}\left(\mathbf{E}\max\{0, \xi_n\} - \mathbf{E}\xi_n + \mathbf{E}\xi_1\right).$$

10.239. Пусть $\{\xi_n\}$ — субмартингал. Доказать, что для любого $a \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| \geqslant a\right) \geqslant \frac{1}{a}\left(\mathbf{E}\,|\xi_n| - \mathbf{E}\xi_1 + \mathbf{E}\xi_n\right).$$

10.240. Пусть $\{\xi_n\}$ — неотрицательный субмартингал, $\mathbf{E}\xi_n^2 \leqslant C$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что почти наверное существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

10.241. Пусть $\{\xi_n\}$ — произвольный субмартингал, $\mathsf{E}\xi_n^2 \leqslant C$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что почти наверное существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

10.242. Пусть $\{\xi_n\}$ — неотрицательный мартингал. Доказать, что почти наверное существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

§ 9. Разные задачи

10.243. Найти переходную функцию пуассоновского процесса, рассматривая его как марковский процесс.

10.244. Пусть w_t, $t \geqslant 0$ — винеровский процесс. Найти переходную функцию процесса $\xi_t = w_{-t}$, $t \leqslant 0$, рассматривая его как марковский процесс.

10.245. Пусть w_t, $t \geqslant 0$ — винеровский процесс. Доказать, что $|w_t|$ — марковский процесс. Найти его переходную функцию.

10.246. Пусть π_t — пуассоновский процесс. Найти $\mathsf{E}([\pi_t - \pi_s]^n)$, $n = 1, 2, \ldots$

10.247. Пусть π_t, $t \geqslant 0$,— пуассоновский процесс с параметром λ. Доказать, что распределение $\pi_t - \lambda t/\sqrt{\lambda t}$ слабо сходится при $t \to \infty$ к нормальному распределению с параметрами 0 и 1.

10.248. Показать, что если стационарный процесс является гауссовским и марковским, то его ковариационная функция имеет вид $ce^{-\alpha|t|}$, $\alpha \geqslant 0$, $c > 0$ — некоторая постоянная.

10.249. Пусть w_s — винеровский процесс, $\xi_t = e^{-t} w_{e^{2t}}$. Показать, что ξ_t — стационарный марковский процесс. Найти его ковариационную функцию и спектральную плотность.

10.250. Пусть $\tau(a)$ — момент первого достижения винеровским процессом w_t уровня a. Положим

$$w_t^a = \begin{cases} w_t, & t \leqslant \tau(a), \\ a, & t > \tau(a). \end{cases}$$

Доказать, что w_t^a — марковский процесс. Найти его переходную функцию.

10.251. Пусть w_t — винеровский процесс. Найти вероятность события $\left\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} |w_s| \geqslant z,\ a \leqslant w_t \leqslant b\right\}$, где $z > 0$ и $-z < a < b < z$.

10.252. Пусть w_t — винеровский процесс. Найти функцию распределения случайной величины $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |w_t|$ при условии, что $w_1 = 0$.

10.253. Пусть $w_s^{(1)}$ и $w_s^{(2)}$ — независимые винеровские процессы. Для любого вещественного t положим

$$\bar{w}_t = \begin{cases} w_t^{(1)}, & t \geqslant 0, \\ w_{-t}^{(2)}, & t < 0. \end{cases}$$

Пусть, далее, $\xi_t = \frac{1}{h}\left(\bar{w}_t - \bar{w}_{t-h}\right)$, $h = \text{const}$. Показать, что ξ_t — стационарный процесс. Найти его ковариационную функцию и спектральную плотность.

10.254. Пусть $\ldots \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, такие, что $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{E}\xi_k^2 = \sigma^2$. Положим $\eta_n = \xi_n + \xi_{n-1} + \ldots + \xi_{n-m}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots$ $\ldots, m = \mathrm{const})$. Показать, что последовательность $\{\eta_n\}$ образует стационарный процесс. Найти ковариационную функцию этого процесса.

10.255. Пусть $\ldots \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, такие, что $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{E}\xi_k^2 = \sigma^2$. Положим $\eta_n = c_0\xi_n + \ldots + c_m\xi_{n-m}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, где $c_0, \ldots, c_m$ — произвольные вещественные числа, m фиксировано. Показать, что последовательность $\{\eta_n\}$ образует стационарный процесс и найти его ковариационную функцию.

10.256. Показать, что функция $R(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} \cos \beta t$, где α, β и σ — некоторые положительные постоянные, может быть ковариационной функцией непрерывного и стационарного в широком смысле процесса. Определить спектральную плотность, отвечающую такой ковариационной функции.

10.257. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ — ветвящийся процесс, $X_0 = 1$, $\mathbf{E}X_1 = m$, $Z_n = X_n/m^n$. Доказать, что $\{Z_n\}$ образует мартингал.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.1. $X = AB \cup \bar{A}D$, где D — произвольное событие. **1.2.** $X = \bar{B}$. **1.3.** а) $A = \varnothing$; $B = \Omega$; б) $A = \Omega$, $B = \varnothing$. **1.4.** Например, пусть $A \subset B$, тогда $\omega \in \bar{B} \Rightarrow \omega \notin B \Rightarrow \omega \in \bar{A}$, т. е. $\bar{A} \supset \bar{B}$ и т. д. **1.5.** Первые два события достоверны, а третье — невозможно. **1.7.** а), б) да; в), г) нет; д) да; е) нет; ж), з), и), к) да. **1.8.** В случаях а), г), д), ж) — да, в остальных — нет. **1.9.** а) Пусть $\omega \in ABC$, тогда $\omega \in AB$ и, следовательно, $\omega \in AB \cup BC \cup AC$; б) пусть $\omega \in AB \cup BC \cup AC$, тогда либо $\omega \in AB$, либо $\omega \in AC$, либо $\omega \in BC$. Пусть, например, $\omega \in AB$, тогда $\omega \in A$ и, следовательно, $\omega \in A \cup B \cup C$. **1.10.** Во всех случаях а) — д) — ничья. **1.11.** а) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$; б) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$; в) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(A_i \cap \left(\bigcap\limits_{j\neq i} \bar{A}_j\right)\right)$; г) $\bigcup\limits_{i_1\neq\ldots\neq i_{n-k}} \bar{A}_{i_1}\ldots\bar{A}_{i_{n-k}}$; д) $\bigcup\limits_{i_1\neq\ldots\neq i_k} A_{i_1}\ldots A_{i_k}$; е) $\bigcup\limits_{i_1\neq\ldots\neq i_n} A_{i_1}A_{i_2}\ldots$ $\ldots A_{i_k}\bar{A}_{i_{k+1}}\ldots\bar{A}_{i_n}$; ж) $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right)$. **1.12.** а) $\bigcup\limits_{i<j}(A_{1i} \cap A_{2j})$; б) $\bigcup\limits_{i=1}^{j} A_{1i}$. **1.13.** Событие B означает попадание в круг радиуса R_6, событие C — в круг радиуса R_2 и D — в круг радиуса R_3. **1.14.** $A_1 \cup (A_2\setminus A_1) \cup (A_3\setminus(A_1 \cup A_2)) \cup \ldots \cup \left(A_n\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right)$. Впрочем, можно и $A = A \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing$.
1.15. а) да; б) да. **1.16.** Используя коммутативность и ассоциативность операции $\triangle$ (предыдущая задача), получаем $A\triangle B = C\triangle D \Rightarrow (A\triangle B)\triangle\varnothing = (C\triangle D)\triangle\varnothing \Rightarrow (A \triangle B) \triangle (C \triangle C) = (C \triangle D) \triangle (B \triangle B) \Rightarrow (A \triangle C) \triangle (B \triangle C) = (B \triangle C) \triangle (B \triangle D) \Rightarrow (A \triangle C) \triangle (B \triangle C) \triangle (B \triangle C) = (B \triangle D) \triangle (B \triangle C) \triangle (B \triangle C) \Rightarrow A \triangle C = B \triangle D$ (мы воспользовались тем, что для любого события E $E \triangle E = \varnothing$). **1.17.** $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (A\bar{A} \cup AB \cup B\bar{A} \cup BB) \cap (A \cup \bar{B}) = (AB \cup \bar{A}B \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = B \cap (A \cup \bar{B}) = BA \cup B\bar{B} = AB$.
1.19. $A \cup B = A \cup (B\setminus AB)$, причем $A \cap (B\setminus AB) = \varnothing$. Следовательно, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B\setminus AB)$. Далее, $B = (B\setminus AB) \cup AB$ и $(B\setminus AB) \cap AB = \varnothing$. Отсюда $\mathbf{P}(B\setminus AB) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$. **1.20.** Имеем $\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(AB)$. **1.21.** Воспользуйтесь равенством $A \triangle B = (A\setminus AB) \cup (B\setminus AB)$. **1.23.** Воспользуйтесь задачами 1.21 и 1.22. **1.24.** Примените метод математической индукции. **1.26.** Пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega\colon \omega = (j_1, \ldots, j_n)\}$, $j_k = 1, \ldots, N$; j_k — номер шара, вынутого на k-м шаге. Число различных упорядоченных наборов $(j_1, \ldots, j_n)$ равно N^n, число различных неупорядоченных наборов — C_{N+n-1}^{n}.
1.27. $C_n^m M^m (N - M)^{n-m}/N^n = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$, $0 \leqslant m \leqslant n$, где p — доля белых шаров в урне. **1.28.** A_N^n/N^n. **1.29.** Пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega : \omega = (j_1, \ldots, j_n)\}$, $j_k = 1, \ldots, N$, все j_k различны; j_k — номер шара, вынутого на k-м шаге. Число различных упорядоченных выборок равно A_N^n, число различных неупорядоченных выборок — C_N^n.

1.30. $C_n^m A_M^m A_{N-M}^{n-m} / A_N^n = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n$, $0 \leqslant m \leqslant \min(n, M)$. **1.31.** 1/18 при $k = 1$; 2/801 при $k = 2$; 1/11748 при $k = 3$; 1/511038 при $k = 4$; 1/43949268 при $k = 5$. **1.32.** C_5^2/C_8^2. **1.33.** $1 - C_{21}^5/C_{28}^5$. **1.34.** $1/6^{n-1}$. **1.35.** 1/2. **1.36.** а) $6!/6^6$; б) $1/6^5$; в) $\left(6 + C_6^2\right)/6^6$. **1.37.** а) $(6^n - 5^n)/6^n$; б) $n5^{n-1}/6^n$; в) $(6^n - 5^n - n5^{n-1})/6^n$. **1.38.** Вероятность события {хотя бы раз шесть очков при 4-х бросаниях кости} $= 1 - 5^4/6^4 \approx 0{,}5177$. Вероятность события {хотя бы раз одновременное выпадение шести очков при 24-х бросаниях двух костей} $= 1 - 35^{24}/36^{24} \approx 0{,}4914$. **1.39.** Вероятности равны. **1.40.** $C_n^m/2^n$. **1.41.** $C_{n+k-m}^{n-m}/C_{n+k}^n$.
1.42. а) $n/(2n-1)$; б) $(n-1)/(2n-1)$. **1.43.** $(24 \cdot 10^4 \cdot 36!)/40!$.
1.44. $(2^{n-1} - 1)/(2^n - 1)$. **1.45.** $\left(C_{2n}^n\right)^2/C_{4n}^{2n}$. **1.46.** а) $\dfrac{a(a-1) + b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$; б) $\dfrac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$. **1.47.** $25!/\left([5!]^5 5^{25}\right)$. **1.48.** $\dfrac{n!}{k!\,l!\,m!}\, a^k b^l c^m/(a+b+c)^n$, если $k + l + m = n$. **1.49.** Вероятности равны. **1.50.** $1/(1+\alpha)$. **1.51.** $a/(a+b)$. **1.52.** Пусть N и M — соответственно число черных и белых шаров. Покажите, что вероятность выбора двух шаров одного цвета равна $(N^2 + M^2)/(N+M)^2$.
1.53. Вероятности равны. **1.54.** $2/N$; $2/(N-1)$. **1.55.** $\dfrac{2(N-r-1)}{N(N-1)}$; $2/(N-1)$.
1.56. Пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega : \omega = (j_1, \ldots, j_n)\}$, $j_k = 1, \ldots, N$; j_k — номер ящика, в который помещен k-й шар. **1.57.** Множество всех различимых размещений можно описать как множество наборов $(r_1, \ldots, r_N)$, где r_k — количество шаров в k-м ящике, $r_k = 0, 1, \ldots, n$. Число различных размещений равно C_{N+n-1}^n. **1.58.** A_N^n для различимых шаров; C_N^n для неразличимых. **1.59.** $\dfrac{30!}{(3!)^2 (6!)^2 12!} \cdot \dfrac{8!}{3!2!2!} \cdot \dfrac{1}{8^{30}}$.
1.60. $C_n^k (N-1)^{n-k}/N^n = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где $p = 1/N$ — вероятность любому шару попасть в данный ящик. **1.61.** $\dfrac{n!}{n_1! \ldots n_N!}\, \dfrac{1}{N^n}$. **1.62.** $n!/n^n$.

1.63. $1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^{n+2}\right)/n^{n+2}$.

1.64. $\left(C_n^2 \sum\limits_{k=0}^{n-2} (-1)^k C_{n-2}^k (n-2-k)^{n+1}\right)/n^{n+1}$. **1.65.** $C_{2n-1}^{n-1}/C_{3n-1}^{n-1}$.
1.66. $q_m = C_{3n-m-2}^{2n-m}/C_{3n-1}^{n-1}$. **1.67.** $2^m/3^{m+1}$. **1.68.** $C_n^k C_{2n-1}^{n-k-1}/C_{3n-1}^{2n}$.
1.69. $1/C_{2n}^n$. **1.70.** $C_{2n}^n/2^{2n}$. **1.71.** а) $(4!48!)/52!$; б) $2C_4^2 50!/52!$; в) $(49 - 3l)\, 4!48!/52!$. **1.72.** а) $\dfrac{24 C_{48}^{12} C_{36}^{12} C_{24}^{12}}{C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13}}$; б) $4/C_{52}^{13}$; в) $(4!)^{13}/\left(C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13}\right)$; г) $C_{13}^{a_1} C_{39}^{13-a_1} C_{13-a_1}^{a_2} C_{26+a_1}^{13-a_2} C_{13-a_1-a_2}^{a_3} C_{13+a_1+a_2}^{13-a_2} \Big/ \left(C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13}\right)$.

1.73. а) $1 - 1/2! + \ldots + (-1)^{N-1}/N!$; б) $\sum\limits_{m=k}^{N} \sum\limits_{j=m}^{N} (-1)^{j-m} [m!\,(j-m)!]^{-1}$.

1.74. $\sum\limits_{k=0}^{N-m} \left((-1)^k (N-m-k)!/(m!N!k!)\right)$.

1.75. $(-1)^m n!r!/(m!n^r) \sum\limits_{\substack{j \geqslant m \\ j < n \\ kj < r}} \left((-1)^j (n-j)^{r-jk}/\left((j-m)!\,(n-j)!\,(r-jk)!\,(k!)^j\right)\right)$.

1.76. $C_n^M C_{r-1}^{n-m-1}/C_{n+r-1}^r$. **1.77.** $8!\,(1/2! - 1/3! + \ldots + 1/8!)/C_{64}^8$.

1.79. $C_n^{\frac{n+k}{2}} \Big/ 2^n$, если $n+k$ четно и 0, если $n+k$ нечетно. 1.80. $C_{2k-1}^k / 2^{2k-1}$, где $k = \left[\frac{n}{2}\right]$. 1.81. 0, если n не делится на 4, $\left(C_{2k}^k 2^{-2k}\right)^2$, если $n = 4k$.

1.82. Множество $\mathscr{F}_1$ не является пустым, только если n — четное. В этом случае искомая вероятность равна $1/(n-1)$. 1.84. Пусть x и y — моменты прихода двух человек на встречу. В качестве пространства элементарных событий рассмотрим множество точек (x, y) плоскости, образующих квадрат: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. В качестве класса событий возьмем класс всех подмножеств квадрата, имеющих площадь. Вероятности событий будут измеряться площадями. Все точки (x, y), которые «благоприятствуют» встрече, удовлетворяют условию: $|x-y| \leqslant 1/6$. Площадь полученной геометрической фигуры равна $1-(1-1/6)^2 = 11/36$, это и есть искомая вероятность. 1.85. а) 2/27; б) 83/108. 1.86. 1/4. Ср. с задачей 1.103. 1.87. Обозначим через x расстояние от середины случайной хорды до ближайшей прямой, $0 \leqslant x \leqslant a/2$, через φ — острый угол между иглой и перпендикуляром к прямым, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Положение иглы полностью определяется значением координат x и φ. Бросание иглы «наудачу» интерпретируем как бросание точки с координатами (x, φ) «наудачу» в квадрат: $0 \leqslant x \leqslant a/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Площадь области в которой лежат точки, благоприятствующие пересечению иглой прямых, равна

$$\int_0^{\pi/2} l \cos x\,dx = l/2.$$ Поэтому искомая вероятность есть $2l/(a\pi)$.

1.88. $(4r(a+b) - 4r^2)/\pi ab$. 1.89. 1/3. Эта задача и две следующие имеют отношение к так называемому парадоксу Бертрана; если «наудачу» выбирать хорду в некотором круге, то вычисления вероятности того, что хорда превзойдет сторону правильного вписанного треугольника, приводят к разным ответам, в зависимости от смысла, вкладываемого в предположение о случайности положения хорды в круге. 1.90. 1/2. 1.91. 1/4. 1.92. $1-2R/a$. 1.93. 13/24. 1.94. $2/\pi$.

1.95. 1/3. 1.96. $C_n^m \left(a_1/(a_1+a_2)\right)^m \left(a_2/(a_1+a_2)\right)^{n-m}$.

1.97. $$\frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_s!} \left(\frac{a_1}{a_1+\ldots+a_s}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{a_s}{a_1+\ldots+a_s}\right)^{m_s},$$ если $n = m_1 + \ldots + m_s$. 1.98. $[1-(a/R)^3]^N$. 1.102. $\pi/4$. 1.103. 1/4. 1.106. Воспользуйтесь тем, что $P(A) = P\left(\bigcup_k AB_k\right) = \sum_k P(AB_k)$. 1.107. Воспользуйтесь формулой полной вероятности. 1.108.

$$\mathbf{P}(A|C) = \frac{\mathbf{P}(AC)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\sum_k \mathbf{P}(AB_kC)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\sum_k \mathbf{P}(A|B_kC)\,\mathbf{P}(B_kC)}{\mathbf{P}(C)} = \sum_k \mathbf{P}(A|B_kC)\,\mathbf{P}(B_k|C).$$

1.109. Да. 1.110. Вообще говоря, нет. 1.111. Докажите, что вероятность извлечения n_1 белых и n_2 черных шаров в фиксированном порядке равна

$$\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots(a+n_1c-c)\,b(b+c)\ldots(b+n_2c-c)}{(a+b)(a+b+c)\ldots(a+b+nc-c)}.$$

1.112. Используйте метод математической индукции. 1.113. Докажите по индукции, что вероятность извлечения белого шара на k-м и m-м шагах равна $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+c}{a+b+c}$. 1.114. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

1.115. $(p_1/(1+p_1) + p_2/(1+p_2) + p_3/(1+p_3))/3$.

1.116. $$\frac{p_1/(1+p_1)}{p_1/(1+p_1) + p_2/(1+p_2) + p_3/(1+p_3)}.$$ 1.117. 5/13. 1.119. 3/7.

1.120. $e^{-\lambda p}(\lambda p)^s/s!$.

1.121. $\dfrac{2N_kM_k}{(N_k+M_k)(N_k+M_k-1)}\left[\sum_{i=1}^{3}\dfrac{2N_iM_i}{(N_i+M_i)(N_i+M_i-1)}\right]^{-1}_{,k=1,2,3.}$

1.122. $(N-2)/(2N-2)$. 1.123. $\dfrac{N_1(N_2+1)+M_1N_2}{(N_1+M_1)(N_2+M_2+1)}$. 1.128. 2/3.

1.129. а) 1/75; б) 1/25; в) 1/15; г) 1/24; д) 1/6; е) 1/91. 1.130. 19/27.

1.131. а) 1/3; б) 1/3. 1.132. Воспользуйтесь формулой Байеса и найдите $\widetilde{\alpha}_i=\alpha_i$ $p_i^{m_1}(1-p_i)^{n_1-m_1}\Big/\left(\sum\limits_{j=1}^{s}\alpha_jp_j^{m_1}(1-p_j)^{n_1-m_1}\right)$,

$$\mathsf{P}\left(\widetilde{A}_i\,|\,C\right)=\frac{\widetilde{\alpha}_ip_i^{m_2}(1-p_i)^{n_2-m_2}}{\sum\limits_{k=1}^{s}\alpha_kp_k^{m_2}(1-p_k)^{n_2-m_2}},$$

$$\mathsf{P}\left(A_i\,|\,D\right)=\frac{\alpha_ip_i^{m_1+m_2}(1-p_i)^{n_1+n_2-m_1-m_2}}{\sum\limits_{k=1}^{s}\alpha_kp_k^{m_1+m_2}(1-p_k)^{n_1+n_2-m_1-m_2}}.$$

1.134. Воспользуйтесь равенствами $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(A\,|\,\overline{B})=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$ или формулой полной вероятности. 1.135. $\mathsf{P}(A)=0$, $\mathsf{P}(B)=p$, $\mathsf{P}(A\backslash B)=0$. Действительно, из первого равенства следует, что $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)=0$, т. е. либо $\mathsf{P}(A)=0$, либо $\mathsf{P}(B)=0$. Отсюда и из второго равенства следует, что либо $\mathsf{P}(A\backslash B)=p$, либо $\mathsf{P}(B\backslash A)=p$. Третье равенство показывает, что справедливо последнее. Отсюда получаем нужные равенства. 1.136. $\mathsf{P}^2(A)=\mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(A\cap A)=\mathsf{P}(A)$ или $\mathsf{P}(A)(1-\mathsf{P}(A))=0$. 1.137. Всегда $\mathsf{P}(AB)\leqslant\mathsf{P}(A)$. Пусть $\mathsf{P}(A)=0$. Имеем $\mathsf{P}(AB)\leqslant\mathsf{P}(A)=0$, $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)=0\cdot\mathsf{P}(B)=0$. Если же $\mathsf{P}(A)=1$, то $\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(AB)+0=\mathsf{P}(AB)+\mathsf{P}(\overline{A}B)=\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(B)\cdot1=\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A)$. 1.138. $1=\mathsf{P}(A\cup B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$, откуда $1-\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(A)(1-\mathsf{P}(B))$. Отсюда следует, что либо $\mathsf{P}(A)=1$, либо $\mathsf{P}(B)=1$. 1.139. $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}((A\cup B)\cap AB)=\mathsf{P}(A\cup B)\mathsf{P}(AB)=(\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B))\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$, откуда, применяя предыдущую задачу, получаем нужные соотношения. 1.140. а) Да, б) нет. 141. а) Нет, б) нет. 142. а) Да, б) нет. Приведем решения: а) пусть $\Omega=[0,1]$, вероятность равна мере Лебега, а события A, B и C есть соответственно $A=[0,\ 1/2]$, $B=[1/4,\ 3/4]$, $C=[1/16,\ 5/16]\cup[9/16,\ 13/16]$. Тогда $\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(C)=1/2$, $\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(BC)=\mathsf{P}(AC)=1/4$ (и, следовательно, A, B и C попарно независимы), $\mathsf{P}(ABC)=1/16$, $\mathsf{P}(AB\cap BC)=\mathsf{P}(ABC)=1/16=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}^2(B)\mathsf{P}(C)=\mathsf{P}(AB)\mathsf{P}(BC)$, и аналогично $\mathsf{P}(BC\cap AC)=\mathsf{P}(BC)\mathsf{P}(AC)$, $\mathsf{P}(AB\cap AC)=\mathsf{P}(AB)\mathsf{P}(AC)$; б) независимость в совокупности означает, во-первых, что $\mathsf{P}(ABC)=\mathsf{P}(AB\cap BC)=\mathsf{P}(AB)\mathsf{P}(BC)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}^2(B)\mathsf{P}(C)$, и, во-вторых, что $\mathsf{P}(ABC)=\mathsf{P}(AB\cap BC\cap AC)=\mathsf{P}(AB)\mathsf{P}(BC)\mathsf{P}(AC)=\mathsf{P}^2(A)\mathsf{P}^2(B)\mathsf{P}^2(C)$, откуда $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C)\mathsf{P}^2(B)=\mathsf{P}^2(A)\mathsf{P}^2(C)\mathsf{P}^2(B)$. Но это невозможно, так как вероятности событий A, B и C по условию отличны от нуля и единицы. 1.143. Нет, не обязаны. Возьмем вероятностное пространство предыдущей задачи и положим $A=[0,\ 1/2]$, $B=[1/4,\ 3/4]$, $C=[3/8,\ 7/8]$. Тогда $\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(C)=1/2$, $\mathsf{P}(AB)=1/4$ (и, следовательно, A и B независимы), $\mathsf{P}(ABC)=1/8$, $\mathsf{P}(C(A\cup B))=3/8$, $\mathsf{P}(A\cup B)=3/4$ и, таким образом, C не зависит от AB и $A\cup B$, но, очевидно, C зависит от A и от B, так как $\mathsf{P}(AC)=1/8\neq\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C)$, $\mathsf{P}(BC)=3/8\neq\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$. 1.144. $\mathsf{P}((A\cup B)\cap(C\cup D))=\mathsf{P}(AC\cup AD\cup BC\cup BD)=\mathsf{P}(AC)+\mathsf{P}(AD)+\mathsf{P}(BC)+\mathsf{P}(BD)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C)+\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(D)+\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)+\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(D)=\mathsf{P}(A)(\mathsf{P}(C)+\mathsf{P}(D))+\mathsf{P}(B)(\mathsf{P}(C)+\mathsf{P}(D))=(\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B))\times$

$\times (\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(D)) = \mathbf{P}(A \cup B)\mathbf{P}(C \cup D)$. **1.145.** Имеем

$$\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(AC), \tag{1}$$

$$\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(AB), \tag{2}$$

$$\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(BC), \tag{3}$$

$$\mathbf{P}(A)(\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(BC)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \cup C) = \\ = \mathbf{P}(A(B \cup C)) = \mathbf{P}(AB \cup AC) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(ABC).$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $\mathbf{P}(ABC)$ из (3), получаем $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(BC) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(BC)$ или $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC)$. Запишем это в виде

$$\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AC). \tag{4}$$

Приравнивая правые части (1) и (2), получим $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(AC)/\mathbf{P}(C)$. Подставим это выражение в (4):

$$\mathbf{P}(B)\left[\frac{\mathbf{P}(AC)}{\mathbf{P}(C)} - \mathbf{P}(A)\right] = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(C)\left[\mathbf{P}(A) - \frac{\mathbf{P}(AC)}{\mathbf{P}(C)}\right],$$

откуда $\mathbf{P}(A) - \dfrac{\mathbf{P}(AC)}{\mathbf{P}(C)} = 0$ или $\mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$. Отсюда и из (1) получаем $\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$. Используя это равенство, из (2) и (3) получаем утверждение. **1.146.** Пусть $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, $P(\omega_i) = 1/4$, $A_1 = (\omega_1, \omega_4)$, $A_2 = (\omega_2, \omega_4)$, $A_3 = (\omega_3, \omega_4)$. Тогда $\mathbf{P}(A_j) = 1/2$, $\mathbf{P}(A_iA_j) = \mathbf{P}(\omega_4) = 1/4$, $i \neq j$, $\mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \mathbf{P}(\omega_4) = 1/4$. **1.148.** Пусть A_1, A_2, A_3 — события, введенные в ответе к задаче 1.146. Тогда $A = A_1$, $B = A_2$, $C = A_3$ удовлетворяют условию данной задачи. **1.149.** В силу независимости A и B, A и C, A и BC имеем $\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(A)[\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(BC)]$, откуда следует независимость A и $B \cup C$; B и C могут быть зависимы. **1.150.** Найдите $\mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_n)$. **1.151.** Пусть в урне N белых и M черных шаров Покажите, что $\mathbf{P}(\bar{A}_1A_2) = \dfrac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)}$, $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = N/(N+M)$.

1.153. $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\bar{A}_n)$.

1.154. Воспользуйтесь методом математической индукции.

Глава 2

2.1. В качестве пространства элементарных событий возьмем множество всех конечных цепочек длины не меньшей 2 из символов Г и Р, в которых сочетание ГГ содержится только в конце цепочки, а также множество бесконечных цепочек из Г и Р, не содержащих сочетания ГГ. В качестве σ-алгебры событий возьмем множество всех подмножеств этого пространства, а вероятности определим следующим образом: каждому событию, определенному цепочкой длины n припишем вероятность $1/2^n$, а событию, определенному цепочкой бесконечной длины — вероятность 0. Разыскиваемая в задаче вероятность равна 19/32. **2.2.** Пространство элементарных событий — множество всех цепочек конечной длины (не менее 2) и бесконечной длины, в которых гербы и решки строго чередуются. σ-алгебра событий — множество всех подмножеств. Вероятность события, состоящего из одной цепочки длины n, равна $1/2^n$. Искомая вероятность равна 2/3. **2.3.** В качестве пространства элементарных событий возьмем все конечные цепочки длины r, $r+1$, ..., содержащие ровно r букв Г и оканчивающиеся буквой Г, а также бесконечные цепочки, содержащие не более $r-1$ букв Г. Указанное в задаче событие насчитывает C_{n-1}^{r-1} элементарных событий. **2.4.** Первое событие означает, что выбранная точка не равна 1, второе событие совпадает с $\varnothing$. **2.5.** Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная алгебра. Покажите, что если $A, B \in \mathscr{A}$, то $A \setminus B \in \mathscr{A}$. **2.6.** Например, множество всех отрезков вида $(a, b]$ на отрезке $(0, 1]$ $(0 < a < b \leqslant 1)$. **2.7.** Например, множество всех конечных подмножеств отрезка $[0, 1]$ и их дополнений. **2.8.** Единственный пример — множество всех подмножеств Ω. 2.9. а) $\varnothing$, $[0, 1]$, $[0, 1/3)$, $[1/3, 2/3]$, $(2/3, 1]$, $[0, 2/3]$, $[1/3, 1]$, $[0, 1/3) \cup (2/3, 1]$; б) $\varnothing$, $[0, 1]$, $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[0, 1/2)$, $(1/2, 1]$, $\{1/2\}$, $[0, 1]\setminus\{1/2\}$; в) $\varnothing$, $[0, 1]$, $\{0\}$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $[1, 0)$, $(0, 1)$, $\{0, 1\}$; г) $\varnothing$, $[0, 1]$, $[0, 1/3)$, $[1/3, 1/2]$, $(1/2, 1]$, $[0, 1/2]$, $[1,/3, 1]$, $[0, 1/3) \cup (1/2, 1]$; д) $\varnothing$, $[0, 1]$; е) $\varnothing$, $[0, 1]$; ж) $\varnothing$, $[0, 1]$, множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$, множество всех иррациональных точек отрезка $[0, 1]$. **2.10.** а) Все не более чем счетные подмножества Ω и все подмножества Ω, отличающиеся от Ω не более чем в счетном числе точек; б) то же самое; в) множество всех подмножеств Ω; г) то же самое. **2.12.** а) да, б) вообще говоря, нет, в) заведомо нет, г) заведомо нет. **2.13.** Мощность континуума. **2.14.** Очевидно, что $\varnothing \in \mathscr{A}$ и $\Omega \in \mathscr{A}$. Пусть $A \in \mathscr{A}$. Тогда существует такое n_0, что $A \in \mathscr{A}_{n_0}$ и, следовательно, $\overline{A} \in \mathscr{A}_{n_0} \subset \mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{A}$ замкнуто относительно взятия дополнений. Остается доказать, что $\mathscr{A}$ замкнуто относительно взятия конечных объединений. Пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$. Тогда существуют такие $m_1, \ldots, m_n$, что $A_i \in \mathscr{A}_{m_i}$. Положим $m_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} m_i$. Тогда $A_i \in \mathscr{A}_{m_0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и, следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}_{m_0} \subset \mathscr{A}$. **2.15.** Нет; нет; да. **2.17.** Воспользуйтесь задачами 2.13 и 2.16. **2.18.** Может. **2.19.** а) Нет, б) да. **2.20.** 2 и 2^n. **2.21.** В обоих случаях это множество всех событий вероятности 0 или 1. **2.22.** Вообще говоря, нет. **2.23.** Воспользуйтесь формулами двойственности. **2.24.** Имеем $\limsup A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. При каждом n $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ принадлежит σ-алгебре, порожденной $A_1, A_2, \ldots$ (как счетное объединение элементов σ-алгебры), и, следовательно, их счетое пересечение также принадлежит этой σ-алгебре. **2.25.** $\limsup (A_n \cup B_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} (A_k \cup B_k) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cup \left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} B_k\right)\right) = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cup \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} B_k\right) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$. **2.26, 2.27.** Воспользуйтесь σ-аддитивностью вероятностной меры. Доказанное соотношение характеризует непрерывность вероятности (вообще, σ-аддитивной меры). **2.28.** Рассмотрим множества $B_i = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{i-1}A_i$. Они не пересекаются и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. **2.30.** Докажите, что множество значений функции $\mathbf{P}(A)$ плотно на отрезке $[0, 1]$, и воспользуйтесь предыдущей задачей. **2.32.** Каждый элемент $\mathscr{A}$ представим в виде счетного объединения или пересечения элементов $\mathscr{B}$. **2.33.** В качестве Ω возьмем окружность единичной длины. A_1 — дуга длины 1/2 с произвольным началом, каждое $A_n (n = 2, 3, \ldots)$ — дуга длины $1 - \frac{1}{n+1}$ с началом в конце дуги A_{n-1} (дуги берутся в одном направлении, скажем, против часовой стрелки). **2.34.** $\mathbf{P}(\liminf A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leqslant \liminf \mathbf{P}(A_n) \leqslant \limsup \mathbf{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \mathbf{P}(\limsup A_n)$. **2.35.** Да. **2.36.** $\mathbf{P}(\limsup A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$, но $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) =$

$$= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m+n} A_k\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{k=n}^{n+m-1} A_k\overline{A}_{k+1}\right) \cup A_{n+m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{n+m+1} \mathbf{P}\left(A_k\overline{A}_{k+1}\right) + \mathbf{P}(A_{n+m})\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_k\overline{A}_{k+1}\right) + \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}(A_{n+m}) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_kA_{k+1}) \to 0$$

при $n \to \infty$. 2.37. Не обязательно, например, $A_{2n-1} = A$, $A_{2n} = \bar{A}$, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$. 2.38. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\mathbf{P}\left(A_n\bar{B}_n\right) + \mathbf{P}(A_nB_n)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(A_n\bar{B}_n\right) + \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_nB_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bar{B}_n\right) + \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_nB_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_nB_n)$. Обратное неравенство очевидно. 2.39. Воспользуйтесь соотношениями $\frac{\mathbf{P}(A_n)}{\mathbf{P}(A_nB_n)} = \frac{\mathbf{P}\left(A_n\bar{B}_n\right) + \mathbf{P}(A_nB_n)}{\mathbf{P}(A_nB_n)} = 1 + \frac{\mathbf{P}\left(A_n\bar{B}_n\right)}{\mathbf{P}(A_nB_n)}$. От условия (1) отказаться, вообще говоря, нельзя. Например, возьмите в качестве вероятностного пространства отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега и $A_n = [0, 1/n]$, $B_n = [1/(2n), 1]$. 2.40. Легко видеть, что $A = \bigcup\limits_a (\{\xi(\omega) < a\} \cap \{\eta(\omega) > a\})$, $B = \Omega \setminus \left(A \cup \left(\bigcup\limits_a (\{\xi(\omega) > a\} \cap \{\eta(\omega) < a\})\right)\right)$, $C = A \cup B$, где $\bigcup\limits_a$ означает объединение по всем рациональным a. Множества $\{\xi(\omega) > a\}$ и $\{\eta(\omega) < a\}$ являются событиями по определению. 2.41. Нет, не обязана. Например, Ω — отрезок $[0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра счетных подмножеств и их дополнений, $\mathbf{P}$ — мера Лебега, $\xi = \omega$. 2.42. е) $\{\min\{\xi, \eta\} \leqslant x\} = \{\xi \leqslant x\} \cup \{\eta \leqslant x\}$ — событие. Таким образом, все подмножества вида $\{\min\{\xi, \eta\} \leqslant x\}$ принадлежат σ-алгебре событий, следовательно, ей принадлежит σ-алгебра, порожденная классом множеств такого вида, т. е. σ-алгебра, порожденная функцией $\min\{\xi, \eta\}$. Это по определению означает, что $\min\{\xi, \eta\}$ — случайная величина. Аналогично проводится доказательство в других случаях. 2.43. а) Нет, б) нет, в) нет, г) да, д) да, е) нет. 2.44. Воспользуйтесь соотношениями $\{\omega\colon \inf\limits_n \xi_n < x\} = \bigcup\limits_n \{\omega\colon \xi_n < x\}$ и $\sup\limits_n \xi_n = -\inf\limits_n(-\xi_n)$.

2.45. Нет. 2.46. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, на котором задана случайная величина ξ и $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств прямой. Пусть $B \in \mathscr{B}$. Так как $f(x)$ — борелевская функция, $f^{-1}(B) = B_1 \in \mathscr{B}$. Но $\eta^{-1}(B) = \xi^{-1}(B_1) \in \mathscr{A}$ и, следовательно, η — случайная величина. 2.47. Воспользуйтесь определением борелевской функции. 2.48. $(I_A - I_B)^2 = I_A^2 - 2I_AI_B + I_B^2 = I_A + I_B - 2I_AI_B = I_{A\setminus B} + I_{AB} + I_{B\setminus A} + I_{AB} - 2I_AI_B = I_{A\setminus B} + I_{B\setminus A} + I_AI_B + I_AI_B - 2I_AI_B = I_{A\setminus B} + I_{B\setminus A} = I_{A\triangle B}$.

2.49. Ω — множество всевозможных последовательностей из пяти букв, две из которых — буквы Ч, а три — буквы Б, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω, $\mathbf{P}$ приписывает равные вероятности всем одноточечным событиям. σ-алгебры, порожденные случайной величиной ξ: а) σ-алгебра, порожденная событиями A_0, A_1, A_2, A_3, где A_0 — множество всех элементарных событий, начинающихся буквой Ч, A_1 — начинающихся комбинацией БЧ, A_2 — комбинацией ББЧ, A_3 — БББЧ, б) тривиальная σ-алгебра: $\varnothing$, Ω, в) σ-алгебра, порожденная событиями B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, где B_1 — множество всех элементарных событий, начинающихся комбинацией БЧ, B_2 — ЧБ, B_3 — ББЧ, B_4 — ЧЧБ, B_5 — БББЧ. 2.50. а) $\varnothing$, Ω, $[0, 1/4)$; $[1/4, 3/4)$, $[3/4, 1]$, $[0, 3/4)$, $[1/4, 1]$, $\Omega \setminus [1/4, 3/4)$, б) $\mathscr{A}$ (т. е. σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$), в) $\varnothing$, Ω. 2.51. Всевозможные множества вида $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} (A + 2\pi k)$, где A — борелевские симметричные относительно начала координат подмножества отрезка $[-\pi, \pi]$, $A + a$ — сдвиг множества A на a вправо. 2.52. а) $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\xi_n \leqslant m\}$. 2.53. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ представляет собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Положим $\xi = \omega$. Поскольку каждая случайная величина на этом вероятностном пространстве является борелевской функцией ω, а $\omega = \xi$, каждая случайная величина является борелевской функцией ξ.

2.54. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[0, 1/\sqrt[3]{3}\right]$ (воспользуйтесь тем, что $\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to \infty$ и $\min_n 1/\sqrt[n]{n} = 1/\sqrt[3]{3}$). 2.55. Интеграл Лебега по множеству нулевой меры равен нулю. 2.56. Если $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1$, то $\mathsf{P}(\xi^2 = 0) = 1$ и, в силу предыдущей задачи, $\mathsf{E}\xi^2 = \mathsf{E}0 = 0$. Пусть $\mathsf{E}\xi^2 = 0$ и предположим, что $\mathsf{P}(\xi = 0) < 1$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, такие, что $\mathsf{P}(|\xi| > \varepsilon) > \delta$. Но тогда $\mathsf{E}\xi^2 = \int_{\Omega} \xi^2(\omega)\,\mathsf{P}\{d\omega\} \geqslant \int_{|\xi|>\varepsilon} \xi^2(\omega)\,P\{d\omega\} \geqslant \varepsilon\cdot\delta > 0$. 2.57. Достаточно воспользоваться неравенством $|\max\{\xi, \eta\}| \leqslant |\xi| + |\eta|$ Обратное, вообще говоря, неверно. 2.58. Воспользуйтесь равенством $\xi + \eta = \min\{\xi, \eta\} + \max\{\xi, \eta\}$ и следующим очевидным неравенством, справедливом для любых вещественных a и b: $|a| \leqslant |\max(a, b)| + |\min(a, b)|$. 2.59. Докажем, например, первое неравенство. Для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ $\xi_i \leqslant \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и, значит, $\mathsf{E}\xi_i \leqslant \mathsf{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. В силу произвольности i это означает, что $\max\{\mathsf{E}\xi_1, \ldots, \mathsf{E}\xi_n\} \leqslant \mathsf{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. 2.60. $\xi = \eta$ и ξ имеет распределение с плотностью $\frac{c}{1+x^3}$ при $x > 0$ и 0 при $x < 0$. 2.61. Последовательность $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ частичных сумм удовлетворяет условиям теоремы о монотонной сходимости, поэтому $\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\eta_n = \mathsf{E}\lim_{n\to\infty} \eta_n$, откуда следует нужное соотношение. 2.62. Воспользуйтесь теоремой о монотонной сходимости. 2.63. Положим $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$. Тогда последовательность $B_1, B_2, \ldots$ не возрастает и, следовательно, в силу задачи 2.36 $\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k)$. 2.64. Воспользуйтесь предыдущей задачей и тем, что для абсолютной сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ к некоторому отличному от нуля пределу, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходился. 2.65. Пусть $\mathscr{B}$ — произвольное семейство попарно независимых событий. Докажем, что для любого $k = 2, 3, \ldots$ и любых $A_1, A_2, \ldots A_k \in \mathscr{B}$ выполняется равенство

$$\mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \mathsf{P}(A_1)\cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_k) \tag{1}$$

(т. е. все элементы $\mathscr{B}$ независимы). Поскольку $A_2, A_3, \ldots A_k$ не зависят от A_1, этим же свойством обладает их пересечение (множество событий, не зависящих от A_1, образует алгебру и, следовательно, замкнуто относительно конечных пересечений), поэтому $\mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2 \cap \ldots \cap A_k)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\mathsf{P}(A_2 \cap \ldots \cap A_k) = \mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3 \cap \ldots \cap A_k)$ и т. д. В конце концов приходим к (1). 2.66. Если все события имеют вероятности, равные 0 или 1, то все они, очевидно, независимы и тем более попарно независимы. Обратно. Пусть все события попарно независимы и существует такое событие A, что $0 < \mathsf{P}(A) < 1$. Тогда $0 < \mathsf{P}(\bar{A}) < 1$, и $\mathsf{P}(A\bar{A}) = \mathsf{P}(\varnothing) = 0 \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(\bar{A})$. 2.67. Нет (например, A не зависит от B и, следовательно, B не зависит от A, но A, если оно имеет вероятность отличную от нуля и единицы, зависит от A). 2.68. Нет. Пример: $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{4\}$, $C = \{2, 3\}$, $\mathsf{P}\{1\} = \mathsf{P}\{2\} = \mathsf{P}\{3\} = \mathsf{P}\{4\} = 1/4$. B зависит от A, C зависит от B, но C не зависит от A. 2.69. Достаточность очевидна. Необходимость. Пусть отношение независимости транзитивно и существует событие A такое, что $0 < \mathsf{P}(A) < 1$. Тогда $\varnothing$ не зависит от A и $\bar{A}$ не зависит от $\varnothing$, но A, очевидно, зависит от $\bar{A}$, что противоречит транзитивности. 2.70. $|\mathsf{P}(A \cap A) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(A)| = |\mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(A)| = \mathsf{P}(A)(1 - \mathsf{P}(A)) \leqslant \varepsilon$. Решая относительно $\mathsf{P}(A)$ полученное квадратное неравенство, получаем $\mathsf{P}(A) \leqslant (1 - \sqrt{1-4\varepsilon})/2$, либо $\mathsf{P}(A) \geqslant (1 + \sqrt{1-4\varepsilon})/2$. Остается воспользоваться неравенствами $(1 - \sqrt{1-4\varepsilon})/2 \leqslant 2\varepsilon$, $(1 + \sqrt{1-4\varepsilon})/2 \geqslant 1 - 2\varepsilon$. 2.71. Пусть $\mathsf{P}(A) \leqslant \varepsilon$. Тогда $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \leqslant \varepsilon$ и $\mathsf{P}(AB) \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $|\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)| \leqslant \max\{\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B), \mathsf{P}(AB)\} \leqslant \varepsilon$. Если же $\mathsf{P}(A) \geqslant 1 - \varepsilon$, то $\mathsf{P}(\bar{A}) \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $\bar{A}$ и любое событие B ε-независимы, откуда (см. следующую задачу) получаем ε-независимость событий A и B. 2.72. а) Имеем $\mathsf{P}(\bar{A}B) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$, $\mathsf{P}(\bar{A})\mathsf{P}(B) = (1 - \mathsf{P}(A))\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$, поэтому $|\mathsf{P}(\bar{A})\mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(\bar{A}B)| = |\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)| \leqslant \varepsilon$; б) и в) доказываются аналогично. 2.73. Каждый элемент алгебры, порожденной полуалгеброй, представим в виде конечного объединения непересекающихся элементов полуалгебры. 2.74. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная алгебра событий и $\sigma(\mathscr{A})$ — порожденная ей σ-алгебра. Покажите, что для любого $A \in \sigma(\mathscr{A})$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $B_\varepsilon \in \mathscr{A}$, такое, что $\mathsf{P}(A \triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. 2.75. Нет. 2.76. Обозначим σ-алгебры, фигурирующие в условии задачи, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Пусть $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{B}$ и $0 < \mathsf{P}(A) < 1$, $0 < \mathsf{P}(B) < 1$. Предположим, что $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ — алгебра. Тогда $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) = 0$ или 1 и $AB \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ и, следовательно, либо $AB \in \mathscr{A}$, либо $AB \in \mathscr{B}$. В первом случае AB не зависит от B, во втором — от A и, следовательно, в первом случае $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}^2(B) = \mathsf{P}(AB)\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(AB \cap B) = \mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$, во втором — $\mathsf{P}^2(A)\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(AB)\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(AB \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$. В обоих случаях приходим к противоречию. 2.77. Нет. Положим

$$\xi = \eta = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2, \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$$

2.78. Нет. ξ не равно с вероятностью 1 постоянной, $\eta = \xi$, $\varphi = -\xi$. 2.79. Если случайная величина ξ не равна с вероятностью 1 постоянной, то существует борелевское множество B на прямой, такое, что $0 < \mathsf{P}(\xi \in B) < 1$. Но тогда $\mathsf{P}(\xi \in B, \xi \in \bar{B}) = 0 \neq \mathsf{P}(\xi \in B)\mathsf{P}(\xi \in \bar{B})$. Если же ξ равна с вероятностью 1 постоянной, то она не зависит от любой случайной величины, заданной на том же вероятностном пространстве и, в частности, от самой себя. 2.80. Когда для некоторого вещественного a событие $\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{\xi = a + 2\pi k\}\right) \cup \left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{\xi = -a + 2\pi k\}\right)$ имеет вероятность 1. 2.81. а) Нет, б) да, в) да. 2.82. Возьмем произвольное из n элементарных событий — ω_1. Пусть ξ и η — произвольные случайные величины, определенные на этом вероятностном пространстве и принимающие n различных значений каждая. Положим $\xi(\omega_1) = a$, $\eta(\omega_1) = b$. Тогда $\mathsf{P}(\xi = a) = \mathsf{P}(\{\omega_1\}) = \mathsf{P}(\eta = b)$ (это справедливо, так как не существует других элементарных событий, на которых ξ принимало бы значение a или $\eta - b$). Имеем $\mathsf{P}(\xi = a, \eta = b) = \mathsf{P}(\{\omega_1\})$, $\mathsf{P}(\xi = a)\mathsf{P}(\eta = b) = \mathsf{P}^2(\{\omega_1\})$, т. е. ξ и η зависимы. 2.83. Пусть k — число различных событий из $\mathscr{A}$, вероятности которых отличны от 0 и 1. Очевидно, $k \leqslant n - 2$. Предположим, что ни одна из случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ не равна с вероятностью 1 постоянной. Тогда существуют вещественные числа $a_1, \ldots, a_{n-1}$, такие, что $0 < \mathsf{P}(\xi_i = a_i) < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Обозначим $A_i = \{\xi_i = a_i\}$. Имеем $n - 1$ событие, вероятности которых отличны от 0 и 1, следовательно, по крайней мере два из них совпадают: $A_i = A_j$, $i \neq j$. Но тогда $\mathsf{P}(A_i) = \mathsf{P}(A_i A_j) = \mathsf{P}(\xi_i = a_i, \xi_j = a_j) = \mathsf{P}(\xi_i = a_i)\mathsf{P}(\xi_j = a_j) = \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A_j) = \mathsf{P}^2(A_i)$. Противоречие. 2.84. Воспользуйтесь тем, что на этом вероятностном пространстве нет двух независимых событий, каждое из которых отлично от $\varnothing$ и Ω. 2.85. Например, $\xi(1) = \xi(2) = 0$, $\xi(3) = \xi(4) = 1$, $\eta(1) = \eta(4) = 0$, $\eta(2) = \eta(3) = 1$. 2.86. Нет. (σ-алгебра, порожденная случайной величиной ξ, совпадает с $\mathscr{A}$ и, следовательно, содержит σ-алгебру, порожденную любой другой случайной величиной). 2.87. Воспользуйтесь тем, что σ-алгебра, порожденная случайной величиной $\min\{1, \xi\}$ содержится в σ-алгебре, порожденной ξ, и то же самое для η. 2.88. Воспользуйтесь тем, что $\{\omega\colon \min\{a, \xi\} \geqslant a\} = \{\omega\colon \xi \geqslant a\}$, $\{\omega\colon \min\{b, \eta\} \geqslant b\} = \{\omega\colon \eta \geqslant b\}$

для любых a и b. 2.89. σ-алгебры, порожденные случайными величинами $f(\xi)$ и $g(\eta)$ принадлежат соответственно σ-алгебрам, порожденным случайными величинами ξ и η. 2.90. Могут; ответ не изменится. 2.91. Да. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ представляет собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Положим $\xi = \omega$. $f(x) = 1$ при $x \geqslant 1/2$ и $f(x) = 0$ при $x < 1/2$, $g(x) = 1$ при $1/4 \leqslant x \leqslant 3/4$ и $g(x) = 0$ при остальных значениях аргумента. Тогда $f(\xi) = f(\omega)$ и $g(\xi) = g(\omega)$ и легко видеть, что $f(\omega)$ и $g(\omega)$ независимы. 2.92. $\mathbf{P}(\xi > 0, \eta > 0) \leqslant \mathbf{P}(\xi + \eta > 0) = 1/2 < 9/16 = \mathbf{P}(\xi > 0)\mathbf{P}(\eta > 0)$. 2.93. $p^2 = \mathbf{P}(\xi > 0)\mathbf{P}(\eta > 0) = \mathbf{P}(\xi > 0, \eta > 0) \leqslant \mathbf{P}(\xi + \eta > 0) \leqslant \mathbf{P}(\{\xi > 0, \eta > 0\} \cup \{\xi > 0, \eta \leqslant 0\} \cup \{\xi \leqslant 0, \eta > 0\}) = \mathbf{P}(\xi > 0, \eta > 0) + \mathbf{P}(\xi > 0, \eta \leqslant 0) + \mathbf{P}(\xi \leqslant 0, \eta > 0) = \mathbf{P}(\xi > 0)\mathbf{P}(\eta > 0) + \mathbf{P}(\xi > 0)\mathbf{P}(\eta \leqslant 0) + \mathbf{P}(\xi \leqslant 0)\mathbf{P}(\eta > 0) = p^2 + pq + pq = p^2 + 2pq = 1 - q^2$. 2.94. Нет. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω, вероятности задаются следующим образом: $\mathbf{P}(\{1\}) = \mathbf{P}(\{2\}) = \mathbf{P}(\{3\}) = \mathbf{P}(\{4\}) = 1/4$. И положим $\xi(1) = \xi(3) = 0$, $\xi(2) = \xi(4) = 1$, $\eta(1) = \eta(2) = 1$, $\eta(3) = \eta(4) = 0$, $\varphi(1) = \varphi(4) = 0$, $\varphi(2) = \varphi(3) = 1$. Очевидно, ξ, η, φ попарно независимы, но $\mathbf{P}(\xi = 1, \eta + \varphi = 2) = 1/4 \neq \mathbf{P}(\xi = 1)\mathbf{P}(\eta + \varphi = 2)$. 2.95. Да; вообще говоря, изменится. 2.96. Для любых $x_1, \ldots, x_n$ события $\{\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_k \leqslant x_k\}$ и $\{\xi_{k+1} \leqslant x_{k+1}, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\}$ независимы, т. е. независимы σ-алгебры, порожденные соответственно случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$. Но σ-алгебра, порожденная $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)(\psi(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n))$, принадлежит σ-алгебре, порожденной $\xi_1, \ldots, \xi_k$ $(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$. 2.97. Положите $\xi_{kn} = i/k$ при $i/k \leqslant \xi_n < i + 1/k$. 2.98. а) Да ($\eta = -\xi$), б) да ($\eta = 1/\xi$), в) да ($\xi$ принимает значения -1 и $+1$, $\eta = -\xi$; тогда $\xi + \eta = 0$, $\xi\eta = -1$). 2.99. Положим $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω, $\mathbf{P}(\{1\}) = \mathbf{P}(\{2\}) = \mathbf{P}(\{3\}) = \mathbf{P}(\{4\}) = 1/4$, и рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ случайные величины ξ и η, определенные следующим образом: $\xi(1) = 1$, $\xi(2) = -1$, $\xi(3) = \xi(4) = 0$, $\eta(1) = \eta(2) = 0$, $\eta(3) = 1$, $\eta(4) = -1$. Эти величины зависимы, так как $\mathbf{P}(\xi = 1, \eta = -1) = 0 \neq 1/16 = \mathbf{P}(\xi = 1)\mathbf{P}(\eta = -1)$, но тем не менее $\mathbf{E}\xi\eta = 0 = \mathbf{E}\xi E\eta$. 2.100. Равенство $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ эквивалентно равенству $\mathbf{E}(\xi - a)(\eta - b) = \mathbf{E}(\xi - a)\mathbf{E}(\eta - b)$ для любых a и b (проверяется непосредственно), поэтому достаточно рассмотреть случай, когда каждая из величин ξ и η принимает два значения: 0 и 1. 2.101. Воспользуйтесь задачей 2.126. 2.102. Случайные величины $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ независимы (задача 2.126). 2.103. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — произвольные борелевские множества на прямой

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k_1} \{\xi_1 = x_{k_1}\}, \ldots, \bigcup_{k_n} \{\xi_n = x_{k_n}\}\right)$$

(объединение берется по всем элементам множеств $A_1, \ldots, A_n$ положительной вероятности). Значит,

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n) = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\ldots\sum_{k_n} \mathbf{P}(\xi_1 = x_{k_1}, \ldots, \xi_n = x_{k_n}) =$$
$$= \sum_{k_1}\sum_{k_2}\ldots\sum_{k_n} \mathbf{P}(\xi_1 = x_{k_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(\xi_n = x_{k_n}) =$$
$$= \sum_{k_1} \mathbf{P}(\xi_1 = x_{k_1}) \cdot \ldots \cdot \sum_{k_n} \mathbf{P}(\xi_n = x_{k_n}) = \mathbf{P}(\xi_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(\xi_n \in A_n).$$

2.104. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω, $\mathbf{P}(\{1\}) = \mathbf{P}(\{2\}) = \mathbf{P}(\{3\}) = \mathbf{P}(\{4\}) = 1/4$, случайные величины ξ и η определим следующим образом: $\xi(1) = \xi(2) = 1$, $\xi(3) = \xi(4) = 0$, $\eta(1) = \eta(4) = 2$, $\eta(2) = \eta(3) = 3$. Ясно, что ξ и η независимы и $\mathbf{P}(\xi < \eta) = 1$. Если же дополнительно известно, что для любого $a > 0$ $\mathbf{P}(\xi > a) > 0$, то ξ и η обязательно зависимы. Действительно, существует событие E единичной вероятности, такое, что $E \cap A =$

$= \{\omega : \xi > a\} \cap E \subset B \cap E = \{\omega : \eta > a\} \cap E$ (для любого $a > 0$). Выберем a достаточно большим, чтобы $\mathbf{P}(A) < 1$. Тогда $\mathbf{P}(EAB) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) \neq \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. **2.105.** Да; нет. **2.106.** От условия равновозможности отказаться, вообще говоря, нельзя, например, $A_1 = A_2 = \Omega$, $A_3 = A_4 = \varnothing$. **2.107.** Нет. Так, любые два равновозможных события симметрично зависимы; любые n попарно непересекающихся равновозможных событий симметрично зависимы. **2.108.** Рассмотрите события $B_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \{$при извлечении n шаров i_1-й, ..., i_m-й шары оказались белыми$\}$ и покажите, что при фиксированном m все они равновероятны. **2.109.** Воспользуйтесь задачей 2.39.

Глава 3

3.1. а) $F(x) = P(\xi \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1; \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sqrt{x} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 1 - x^{-1/\alpha} & \text{при } x > 1; \end{cases}$ г) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{2}{\pi} \arcsin x & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1; \end{cases}$

д) то же, что и в а); е) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ 4/3 - \sqrt[3]{x} & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant -8/27, \\ 2/3 & \text{при } -8/27 < x < 0, \\ 2/3 + 1/3x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$

ж) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1/4, \\ 1/2 & \text{при } 1/4 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases}$

3.2. а) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x/2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при остальных } x; \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2/2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{(2-x)^2}{2} & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0,\ x > 2, \\ x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} x\left(1 + \ln \dfrac{1}{x}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{x} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x < 0,\ x > 1. \end{cases}$

В случае б) случайные величины ξ и η независимы, в случаях а), в) зависимы.

3.3. а) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2/4 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } x < 0,\ x > 2; \end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-(1-x)^2 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } x>1,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}2(1-x) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ и } x>1.\end{cases}$

3.4. а) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2;\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x^2/4 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$

3.5. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-\dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{x}{2} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$

3.6. а) $F(x)G(x)$, б) $1-(1-F(x-0))(1-G(x-0))$, в) $F\left(\dfrac{x}{2}\right)G(x)$,

г) $1-\left(1-F\left(\sqrt[3]{x}-0\right)\right)(1-G(x-0))$.

3.7. а) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha\sqrt[3]{x}} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^{-\alpha\sqrt[3]{x}} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0;\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}e^{-\alpha x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}e^{\alpha x} & \text{при } x<0,\end{cases}$ $\quad f(x)=\dfrac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|}$;

в) $F(x)=\begin{cases}\left(1-e^{-\alpha x}\right)\left(1-e^{-\alpha\sqrt[3]{x}}\right) & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}\left(1-e^{-\alpha\sqrt[3]{x}}\right)+\dfrac{\alpha}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^{-\alpha\sqrt[3]{x}}\left(1-e^{-\alpha x}\right) & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0;\end{cases}$

г) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha\left(x+\sqrt[3]{x}\right)} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}\alpha\left(1+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)e^{-\alpha\left(x+\sqrt[3]{x}\right)} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0;\end{cases}$

д) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{\alpha}{2}(x-3)} & \text{при } x\geqslant 3,\\ 0 & \text{при } x<3,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}(x-3)} & \text{при } x\geqslant 3,\\ 0 & \text{при } x<3;\end{cases}$

е) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$

3.8. а) $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2}, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^{-2/3}, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}, & -2\leqslant x<0,\\ -\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & x>2,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}|x|, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2;\end{cases}$

в) $F(x)=$

$=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{4}(x+1)\left(\sqrt[3]{x}+1\right), & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{3}x^{1/3}+\dfrac{1}{3}x^{-2/3}+1\right), & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

г) $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1-\left(1-\dfrac{1}{2}(x+1)\right)\left(1-\dfrac{1}{2}(x^{1/3}+1)\right), & |x|\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^{1/3}+\dfrac{1}{12}x^{-2/3}+\dfrac{1}{2}, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

д) $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-3}{2}\right)+\dfrac{1}{2}, & 1\leqslant x\leqslant 5,\\ 1, & x>5,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 1\leqslant x\leqslant 5,\\ 0, & x<1 \text{ и } x>5;\end{cases}$

е) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x-\dfrac{x^2}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & x>2,\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & x<0 \text{ и } x>2.\end{cases}$

3.9. $\dfrac{\lambda}{|f'(x)|}e^{-\lambda f^{-1}(x)}$, где $f^{-1}(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, а $f'(x)$ — производная $f(x)$. **3.10.** Соответствующие функции распределения равны а) $pF(x)+qG(x)$, б) $F(x)(p+qG(x))$, в) $F(x)+qG(x)(1-F(x))$. Получим, например, выражение а): $\mathsf{P}(\xi\zeta+(1-\zeta)\eta\leqslant x)=\mathsf{P}(\xi\zeta+(1-\zeta)\eta\leqslant x\mid\zeta=0)\mathsf{P}(\zeta=0)+\mathsf{P}(\xi\zeta+(1-\zeta)\eta\leqslant x\mid\zeta=1)\mathsf{P}(\zeta=1)=\mathsf{P}(\eta\leqslant x)q+\mathsf{P}(\xi\leqslant x)p=pF(x)+qG(x)$. В случаях б) и в) выкладки аналогичны. **3.11.** $\mathsf{P}(\eta_n=+1)=\mathsf{P}(\eta_n=-1)=1/2$. Для доказательства применим индукцию: $\mathsf{P}(\eta_n=1)=\mathsf{P}(\eta_n=1\mid\xi_n=1)\mathsf{P}(\xi_n=1)+\mathsf{P}(\eta_n=1\mid\xi_n=-1)\mathsf{P}(\xi_n=-1)=\mathsf{P}(\eta_{n-1}=1)\mathsf{P}(\xi_n=1)+\mathsf{P}(\eta_{n-1}=-1)\mathsf{P}(\xi_n=-1)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

3.12. а) Можно ($c=2$), б) нельзя (интеграл расходится), в) можно $\left(c=-\dfrac{8}{3}\right)$. **3.13.** Положим $A_z=\{(x,\ y):\ \varphi(x,\ y)\leqslant z\}$. Тогда $\mathsf{P}((\xi,\ \eta)\in A_z)=\mathsf{P}((\eta,\ \xi)\in A_z)=\mathsf{P}(\varphi(\xi,\ \eta)\leqslant z)$.

Отказаться от условия независимости нельзя: достаточно в качестве ξ и η взять случайные величины из а) и д) задачи 3.1 и положить $\varphi(x,\ y)=x/y$

$(\varphi(\xi, \eta)$ и $\varphi(\eta, \xi)$ заведомо имеют в этом случае различные распределения, так как $\mathsf{P}(\xi/\eta > 1) = 1/3$, $\mathsf{P}(\eta/\xi > 1) = 2/3$. **3.14.** Воспользуйтесь тем, что случайные величины ξ и $-\xi$ одинаково распределены. **3.15.** Первая часть задачи тривиальна. Обратное, вообще говоря, неверно, например, если в качестве вероятностного пространства взять отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега и положить $\xi(\omega) = \omega$, $\eta(\omega) = \frac{1}{2}(1 - \omega)$. **3.16.** Возьмите в качестве вероятностного пространства отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. **3.17.** Функция распределения $F(x)$ имеет конечное число точек, скачок в которых $p = F(x) - F(x - 0)$ удовлетворяет неравенству $\frac{1}{2^{k+1}} < p \leqslant \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$. **3.18.** Может (можно, например, занумеровать все рациональные точки и приписать точке с номером n вероятность $1/2^n$). **3.19.** Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — точки разрыва функции $F(x)$ (их число не более чем счетно). В качестве $F_2(x)$ возьмите функцию, изменяющуюся скачками в точках $x_1, x_2, \ldots$ так, что $F_2(x_i + 0) - F_2(x_i - 0) = \frac{1}{a_2}(F(x_i + 0) - F(x_i - 0))$, где a_2 — суммарная величина скачков функции $F(x)$. Покажите, что функция $F(x) - a_2F_2(x)$ непрерывна и монотонно не убывает. **3.20.** Покажите, что функция $H(x)$ непрерывна справа, удовлетворяет соотношениям $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = 1$ и монотонно не убывает. **3.21.** Случайная величина η принимает два значения 1 и -1 с вероятностями $1 - F(0)$ и $F(0)$ соответственно. **3.22.** $G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$ **3.23.** Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любых x_1 и x_2, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$, выполнено неравенство $|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \varepsilon$. Фиксируем произвольное положительное ε и выберем $A > 0$ столь большим, чтобы $1 - F(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $F(-A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. На отрезке $[-A, A]$ функция $F(x)$ равномерно непрерывна (функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна). Возьмем δ из определения равномерной непрерывности $F(x)$ на отрезке $[-A, A]$ с заменой ε на $\frac{\varepsilon}{2}$. Если $x_1, x_2 \in [-A, A]$, то все очевидно, если $x_1 \leqslant A$, $x_2 > A$, то $|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant |F(x_1) - F(A)| + |F(A) - F(x_2)| \leqslant \varepsilon$ и т. д. **3.24.** Пусть $\eta_n = \frac{\xi_1}{2} + \ldots + \frac{\xi_n}{2^n}$. Покажите, что η_n принимает значения $0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}$ с вероятностями $\frac{1}{2^n}$ каждое (воспользуйтесь индукцией). **3.25.** Рассмотрите вначале случай, когда $F(x)$ монотонно возрастает и положите $f(\xi) = F^{-1}(\xi)$. **3.26.** Воспользуйтесь следующими соотношениями:

$$\{\delta_n = 0\} = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left\{\frac{2(i-1)}{2^n} \leqslant \xi < \frac{2i-1}{2^n}\right\},$$

$$\{\delta_n = 1\} = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left\{\frac{2i-1}{2^n} \leqslant \xi < \frac{2i}{2^n}\right\}.$$

3.27. Независимость случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ следует из независимости случайных величин $\delta_1, \delta_2, \ldots$ (см. предыдущую задачу); равномерная распределенность на отрезке $[0, 1]$ каждой ξ_i следует из задачи 3.24. **3.28.** Рассмотрим случайную величину $\xi = \omega$. Очевидно, ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\xi = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{4} + \ldots + \frac{\delta_n}{2^n} + \ldots$ — двоичное разложение ξ. Тогда (задача 3.27) величины

$$\xi_1 = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_3}{4} + \ldots, \quad \xi_2 = \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_5}{4} + \ldots, \quad \ldots$$

взаимно независимы и каждая равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Но в силу задачи 3.25 существуют борелевские функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... такие, что случайные величины $f_1(\xi_1)$, $f_2(\xi_2)$, ... имеют функции распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... соответственно. Далее, поскольку $f_1(\xi_1)$, $f_2(\xi_2)$, ..., являются борелевскими функциями от независимых случайных величин, они независимы. **3.29.** Для того чтобы функция $H(x)$ являлась функцией распределения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. **3.30.** В качестве $p(x)$ и $g(x)$ можно взять функции, определенные следующим образом: $p(x) = 1$ на отрезках $[-1, -1/2]$ и $[1/2, 1]$ и $p(x) = 0$ в остальных точках, $g(x) = 0$ при $x \leqslant -1/2$, $g(x) = 1$ при $x \geqslant 1/2$ и $g(x)$ линейна на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Легко видеть, что $g(\xi)$ принимает значения 0 и 1 с вероятностями 1/2 каждое. **3.31.** Если A замкнуто, то можно положить $F = A$ и $G = \left\{x\colon \sup\limits_{y \in A} |x - y| < \delta\right\}$ при некотором $\delta > 0$, поскольку последние множества убывают при монотонном стремлении δ к нулю и в пересечении дают A. Обозначим $\mathfrak{S}$ класс множеств, для которых утверждение задачи выполнено, т. е. для любого $A \in \mathfrak{S}$ и любого положительного ε существуют открытое множество $G \supseteq A$ и замкнутое множество $F \subseteq A$ такие, что $\mathbf{P}(G \backslash F) < \varepsilon$. Покажем, что класс $\mathfrak{S}$ является σ-алгеброй. Пусть A_1, A_2, ... — множества из $\mathfrak{S}$. Выберем замкнутые множества F_n и открытые множества G_n так, чтобы $F_n \subseteq A_n \subseteq G_n$ и $\mathbf{P}(G_n \backslash F_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Если $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ и если $F = \bigcup\limits_{n \leqslant n_0} F_n$, где n_0 выбрано так, что $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \diagdown F\right) < \frac{\delta}{2}$, то $F \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq G$ и $\mathbf{P}(G \backslash F) < \varepsilon$. Таким образом, $\mathfrak{S}$ замкнуто относительно взятия счетных объединений. Очевидно, $\mathfrak{S}$ — замкнуто относительно взятия дополнений, следовательно, $\mathfrak{S}$ — σ-алгебра. Но, с одной стороны, $\mathfrak{S}$, как было показано выше, содержит все замкнутые множества, а с другой стороны — содержится в σ-алгебре борелевских множеств, следовательно, оно совпадает с последней. **3.32.** Пусть $A_c = A \cap [-c, c]$. Выберем c достаточно большим, чтобы $\mathbf{P}(R^1 \backslash [-c, c]) < \varepsilon/2$. В силу предыдущей задачи существует замкнутое множество F, такое, что $\mathbf{P}(A_c \backslash F) < \varepsilon/2$. Далее, $F_c = F \cup [-c, c]$ — компакт и $\mathbf{P}(A_c \backslash F_c) = \mathbf{P}(A_c \backslash F) = \varepsilon/2$, по $\mathbf{P}(A \backslash F_c) \leqslant \mathbf{P}(A_c \backslash F_c) + \mathbf{P}((R^1 \backslash [-c, c]) \backslash F_c) \leqslant \varepsilon/2 + \mathbf{P}(R^1 \backslash [-c, c]) < \varepsilon$. **3.33.** Мощность континуума. (Воспользуйтесь тем, что монотонная функция полностью определяется своими значениями на некотором счетном множестве точек числовой прямой.) **3.34.** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x)$. **3.35.** Достаточно сделать замену переменной $y = F(x)$. **3.36.** Сделайте замену переменной $y = F(x)$. **3.37.** Равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. **3.38.** Пусть ξ имеет абсолютное непрерывное распределение, т. е. $\mathbf{P}(\xi \in A) = 0$ для всякого множества A нулевой лебеговой меры. Имеем $\mathbf{P}(|\xi| \in A) = \mathbf{P}(|\xi| \in \{A \cap [0, \infty)\}) = \mathbf{P}(\{\xi \in A \cap [0, \infty)\} \cup \{\xi \in -\{A \cap [0, \infty)\}\}) \leqslant \mathbf{P}(\xi \in A \cap [0, \infty)) + \mathbf{P}(\xi \in -\{A \cap [0, \infty)\}) = 0$. Обратное утверждение доказывается аналогично. **3.39.** $\mathbf{P}(\nu \leqslant k) = 2k/N - k^2/N^2$, $\mathbf{P}(\mu \leqslant k) = k^2/N$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $\mathbf{P}(\lambda = 0) = 1/N$, $\mathbf{P}(\lambda = m) = 2(N - m)/N^2$, $m = 1, 2, \ldots, N - 1$ (при вычислении λ воспользуйтесь равенством $\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$). **3.40.** $\int\limits_{-\infty}^{0} \left[1 - G\left(\frac{x}{t}\right)\right] dF(t) + \int\limits_{0}^{\infty} G\left(\frac{x}{t}\right) dF(t)$. **3.41.** $\mathbf{P}\left(\eta_n = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F^k(x)(1 - F(x))^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ (покажите, что случайные величины $\varphi(x, \xi_1)$, $\varphi(x, \xi_2)$, ... независимы и $\varphi(x, \xi_k) = 1$ с вероятностью

$F(x)$ и $\varphi(x, \xi_k) = 0$ с вероятностью $1 - F(x)$). **3.42.** Например, равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение. **3.43.** Пусть $F(x)$ — функция распределения, соответствующая плотности $p(x)$. Тогда $F(x) = \int\limits_0^x p(u)\,du$. Имеем $F(x+y) =$

$$= \int\limits_0^{x+y} p(u)\,du = \int\limits_0^x p(u)\,du + \int\limits_x^{x+y} p(u)\,du = \int\limits_0^x p(u)\,du + \int\limits_0^y p(v+x)\,dv \leqslant \int\limits_0^x p(u)du +$$

$$+ \int\limits_0^y p(v)\,dv = F(x) + F(y).$$ **3.44.** а) $0 \leqslant x \int\limits_x^\infty \frac{dF(y)}{y} \leqslant \int\limits_x^\infty dF(y) \to 0$ при $x \to \infty$,

б) доказывается аналогично а), в) $0 \leqslant x \int\limits_x^\infty \frac{dF(y)}{y} = x \int\limits_x^{\sqrt{x}} \frac{dF(y)}{y} + x \int\limits_{\sqrt{x}}^\infty \frac{dF(y)}{y} <$

$$\leqslant \int\limits_x^{\sqrt{x}} dF(y) + \sqrt{x} \int\limits_{\sqrt{x}}^\infty dF(y) = G(\sqrt{x}) - G(x) + \sqrt{x}\,(1 - G(\sqrt{x})) \to 0 \quad \text{при}$$

$x \to +0$, г) доказывается аналогично в). **3.45.** Непосредственной проверкой убедитесь, что $p(x) \geqslant 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. **3.46.** Покажите, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1 - \alpha$ и воспользуйтесь предыдущей задачей. **3.47.** Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрите сначала случай, когда функция $f(x)$ ограничена — в этом случае нужное неравенство доказывается интегрированием по частям. Если функция $f(x)$ не ограничена, рассмотрите последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... ограниченных неубывающих функций, монотонно сходящихся к $f(x)$. **3.48.** Пусть $x_1 \leqslant x_2$ — произвольные вещественные числа, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, вырожденные в точках x_1 и x_2 соответственно. Тогда $F_1(x) \geqslant F_2(x)$ и, следовательно, $f(x_1) = \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dF_1(x) \leqslant$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dF_2(x) = f_2(x).$$ В силу произвольности x_1 и x_2 это означает, что $f(x)$ монотонно не убывает. **3.49.** Пусть $\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots\}$ — любое счетное семейство распределений. Легко видеть, что его доминирует, например, распределение $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathbf{Q}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{Q}_2 + \ldots$ **3.50.** Например, множество всех вырожденных распределений. **3.51.** Пусть $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ — распределения, доминирующие соответственно семейства $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ Легко видеть, что распределение $\mathbf{P} = \sum\limits_{i=1}^\infty a_i \mathbf{P}_i$, $\sum\limits_{i=1}^\infty a_i = 1$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ доминирует объединение $\bigcup\limits_{i=1}^\infty \mathfrak{B}_i$. **3.52.** Покажите, что любое распределение, доминирующее $\mathfrak{B}$, будет доминировать и его выпуклую оболочку. **3.53.** Воспользуйтесь задачей 3.49. **3.54.** Нет, не верно. В частности, всем функциям распределения вида $G_a(x) = G(x+a)$, $-\infty < a < \infty$, где $G(x)$ — некоторая функция распределения, отвечает одна и та же функция концентрации. **3.55.** По условию существует последовательность $a_1, a_2, \ldots$, такая, что $\mathbf{P}(a_n \leqslant \xi \leqslant a_n + x) \to Q_\xi(x)$ при $n \to \infty$. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ очевидно, ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots a_{k_n}, \ldots \to a$ при $n \to \infty$. Не ограничивая общно-

сти, можно считать, что последовательность $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ монотонна, например, монотонно возрастает. Тогда множества $\{a_{k_n} \leqslant \xi \leqslant a+x\}$ монотонно убывают и $\mathsf{P}\left(a_{k_n} \leqslant \xi \leqslant a+x\right) \to Q_\xi(x)$. Таким образом, $\mathsf{P}(a \leqslant \xi \leqslant a+x) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\{a_{k_n} \leqslant \xi \leqslant a+x\}\right) = Q_\xi(x)$. **3.56.** $Q_\xi(\alpha x) \leqslant Q_\xi(([\alpha]+1)x) = \sup\limits_a \mathsf{P}(a \leqslant \xi \leqslant a + ([\alpha]+1)x) \leqslant ([\alpha]+1)\sup\limits_a \mathsf{P}(a \leqslant \xi \leqslant a+x) = ([\alpha]+1)\,Q_\xi(x)$. **3.57.** а) Да. Например,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3/8 & \text{при } 0 \leqslant x < 2, \\ 3/4 & \text{при } 2 \leqslant x < 3, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 3, \end{cases}$$

$F(x)$ имеет три точки разрыва, а соответствующая функция концентрации — четыре, б) Да. Например,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x/3 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 2/3 & \text{при } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 2, \end{cases}$$

$F(x)$ имеет две точки разрыва, а соответствующая функция концентрации — только одну. **3.58.** Да. Например,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 0{,}1 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ F_1(x) & \text{при } 1 \leqslant x < 2, \\ 0{,}2 & \text{при } 2 \leqslant x < 4, \\ 0{,}8 & \text{при } 4 \leqslant x < 6, \\ 0{,}9 & \text{при } 6 \leqslant x < 8, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 8, \end{cases}$$

где $F_1(x)$ выбрана так, чтобы $F(x)$ была функцией распределения и $F_1(x)$ имеет бесконечное число точек разрыва. Имеем

$$Q_F(z) = \begin{cases} 0{,}6, & \text{если } 0 \leqslant z < 2, \\ 0{,}7, & \text{если } 2 \leqslant z < 4, \\ 0{,}8, & \text{если } 4 \leqslant z < 6, \\ 0{,}9, & \text{если } 6 \leqslant z < 8, \\ 1, & \text{если } z \geqslant 8. \end{cases}$$

3.59. Используйте следующий факт: если $x_0 > 0$ — точка разрыва $Q_\xi(x)$ и a таково, что $Q_\xi(x_0) = \mathsf{P}(a \leqslant \xi \leqslant a + x_0)$, где ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$, то точки a и $a + x_0$ являются точками разрыва $F(x)$. **3.60.** При любых положительных a и l множество $A_{l,a}$, очевидно, ограничено, поэтому достаточно доказать его замкнутость. Пусть $x_n \to x$ и $x_n \in A_{l,a}$, т. е. $\mathsf{P}(x_n \leqslant \xi \leqslant x_n + l) \geqslant a$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ мотононна. Для определенности будем считать, что она монотонно возрастает. Имеем $\mathsf{P}(x \leqslant \xi \leqslant x+l) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_n \leqslant \xi \leqslant x+l\}\right)$. Но множества $\{x_n \leqslant \xi \leqslant x+l\}$ монотонно убывают и для каждого n $\mathsf{P}(x_n \leqslant \xi \leqslant x+l) \geqslant a$. Отсюда окончательно получаем $\mathsf{P}(x \leqslant \xi \leqslant x+l) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(x_n \leqslant \xi \leqslant x+l) \geqslant a$. **3.61.** а) $1/3$, $4/45$; б) 0, $1/12$; в) $2/\pi$, $1/2\pi$, г) 0, $\dfrac{1}{2\pi}$.

3.62. $\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2)$, $\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{b^5-a^5}{5(b-a)}-\frac{(b^3-a^3)^2}{9(b-a)^2}\right)$. 3.63. 7. 3.64. Положим $c = \mathsf{E}\xi$, $A_n = \left\{|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $\{\xi \neq c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Но в силу неравенства Чебышёва $\mathsf{P}(A_n) \leqslant n\mathsf{D}\xi = 0$, откуда $\mathsf{P}(\xi \neq c) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ (см. также задачу 2.72). 3.65. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\xi - \eta$ и $|\xi| - |\eta|$ одинаково распределены. Тогда $\mathsf{D}(\xi - \eta) = \mathsf{D}(|\xi| - |\eta|)$ и, следовательно, $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}|\xi|$, или $\mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}|\xi|)^2$, то есть $|\mathsf{E}\xi| = \mathsf{E}|\xi|$. Но это, как легко видеть, и означает, что случайная величина ξ с вероятностью единица принимает значения одного знака. 3.66. Имеем $\mathsf{P}(\xi^2 < \xi) = 1$ и, следовательно, $\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 < \mathsf{E}\xi^2 < \mathsf{E}\xi$. 3.67. а) 18, б) 22. 3.68. Имеем $\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi + \eta - \mathsf{E}\eta)^2 = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta + 2\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)(\eta - \mathsf{E}\eta)$. Теперь нужные неравенства следуют из неравенства Коши — Буняковского: $|\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)(\eta - \mathsf{E}\eta)| \leqslant \sqrt{\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2\mathsf{E}(\eta - \mathsf{E}\eta)^2} = \sqrt{\mathsf{D}\xi\mathsf{D}\eta}$. 3.69. Воспользуйтесь неравенством $a^\beta \leqslant 1 + a^\alpha$, $a \geqslant 0$, $0 < \beta \leqslant \alpha$. 3.70. Распределение с плотностью $p(x)$, равной $1/x\ln^2 x$ на отрезках $(0, 1/e^2)$ и (e^2, ∞) и нулю при всех остальных x. 3.71. Нет. Рассмотрим, например вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, где $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω, $\mathsf{P}(\{1\}) = \mathsf{P}(\{2\}) = \mathsf{P}(\{3\}) = 1/3$, и положим $\xi(1) = 2$, $\xi(2) = 1$, $\xi(3) = 0$, $\eta(1) = 0$, $\eta(2) = 2$, $\eta(3) = 1$. Тогда $\mathsf{E}\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} = -1/3 \neq 0$, т. е. $\mathsf{E}\frac{\xi}{\xi + \eta} \neq \mathsf{E}\frac{\eta}{\xi + \eta}$. 3.72. В силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_1, \ldots, \xi_n$, случайные величины $\frac{\xi_1}{\xi_1 + \ldots + \xi_n}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_1 + \ldots + \xi_n}$ одинаково распределены, следовательно, $\mathsf{E}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\xi_1 + \ldots + \xi_n}\right) = \mathsf{E}\frac{\xi_1}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} + \ldots + \mathsf{E}\frac{\xi_k}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} = k\mathsf{E}\frac{\xi_1}{\xi_1 + \ldots + \xi_n}$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n$. Положив $k = n$, получим $\mathsf{E}\frac{\xi_1}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} = \frac{1}{n}$, откуда следует нужное соотношение.

3.73. а) $\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi(\mathsf{E}\xi + 1)$, б) $\mathsf{P}(\xi = n) = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 3.74. Пусть $x_1 = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $p_i = \mathsf{P}(\xi = x_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда

$$\frac{\mathsf{E}\xi^{n+1}}{\mathsf{E}\xi^n} = \frac{x_1^{n+1}p_1 + x_2^{n+1}p_2 + \ldots + x_r^{n+1}p_r}{x_1^n p_1 + x_2^n p_2 + \ldots + x_r^n p_r} = \frac{x_1^{n+1}p_1}{x_1^n p_1 + \ldots + x_r^n p_r} + \ldots + \frac{x_r^{n+1}p_r}{x_1^n p_1 + \ldots + x_r^n p_r}.$$

Все слагаемые, начиная со второго, стремятся к нулю при $n \to \infty$, первое слагаемое стремится к x_1. Аналогично доказывается второе соотношение. 3.75. Имеем $\mathsf{E}\xi = \mathsf{P}(\xi = 1) + 2\mathsf{P}(\xi = 2) + 3\mathsf{P}(\xi = 3) + \ldots = \mathsf{P}(\xi = 1) + \mathsf{P}(\xi = 2) + \mathsf{P}(\xi = 2) + \mathsf{P}(\xi = 3) + \mathsf{P}(\xi = 3) + \mathsf{P}(\xi = 3) + \ldots$ Ряд абсолютно сходится, следовательно, можно перегруппировать его члены: $\mathsf{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = i) + \sum_{j=2}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = j) + \ldots = \mathsf{P}(\xi \geqslant 1) + \mathsf{P}(\xi \geqslant 2) + \ldots$ 3.77. $\mathsf{D}\xi \leqslant \mathsf{E}|\xi|^2 \leqslant c\mathsf{E}|\xi|$. 3.78. Воспользуйтесь неравенствами $[x] \leqslant x \leqslant [x] + 1$ и тем, что если ξ не является целочисленной, то $\mathsf{P}(\xi > [\xi]) > 0$. 3.79. 1/2, —1/2. Действительно, обозначим $\xi^+ = \max\{0, \xi\}$, $\xi^- = -\min\{0, \xi\}$. Тогда $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$ и, следовательно, $\mathsf{E}\xi^+ - \mathsf{E}\xi^- = 0$, $\mathsf{E}\xi^+ + \mathsf{E}\xi^- = 1$, откуда $\mathsf{E}\xi^+ = 1/2$, $\mathsf{E}\xi^- = 1/2$. 3.80. $b \geqslant |a|$. 3.81. В силу выпуклости $f(x)$ для каждого x_0 найдется число $\lambda(x_0)$, такое, что для всех x $f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)\lambda(x_0)$. Отсюда, полагая $x = \xi$ и $x_0 = \mathsf{E}\xi$, получаем $f(\xi) \geqslant f(\mathsf{E}\xi) + (\xi - \mathsf{E}\xi)\lambda(\mathsf{E}\xi)$ и, следовательно, $\mathsf{E}f(\xi) \geqslant \mathsf{E}(f(\mathsf{E}\xi) + (\xi - \mathsf{E}\xi)\lambda(\mathsf{E}\xi)) = f(\mathsf{E}\xi) + \lambda(\mathsf{E}\xi)\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi) = f(\mathsf{E}\xi)$. 3.82. Имеем $\mathsf{D}\xi\eta = \mathsf{E}\xi^2\mathsf{E}\eta^2 - (\mathsf{E}\xi)^2(\mathsf{E}\eta)^2$; $\mathsf{D}\xi\mathsf{D}\eta = \mathsf{E}\xi^2\mathsf{E}\eta^2 - (\mathsf{E}\xi)^2\mathsf{E}\eta^2 - \mathsf{E}\xi^2(\mathsf{E}\eta)^2 + (\mathsf{E}\xi)^2(\mathsf{E}\eta)^2$. Теперь достаточно воспользоваться элементарным неравенством $\mathsf{E}\xi^2 \geqslant (\mathsf{E}\xi)^2$, справедливом для любой случайной величины в силу того, что $0 \leqslant \mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2$. 3.83. Должно выполняться хотя бы одно из условий: $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta = 0$ или $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta = 0$. 3.84. Обозначим $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... функции распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Тогда $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x)$.

Отсюда следует, что $\mathsf{E}\xi^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \mathsf{E}\xi_i^2$ и $\mathsf{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \mathsf{E}\xi_i$, поэтому $\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\mathsf{E}\xi_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\mathsf{E}\xi_i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\mathsf{E}\xi_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(\mathsf{E}\xi_i)^2 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(\mathsf{E}\xi_i)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\mathsf{E}\xi_i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\left(\mathsf{E}\xi_i^2 - (\mathsf{E}\xi_i)^2\right) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i M_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i M_i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \mathsf{D}\xi_i + \mathsf{D}\mu$. 3.85. Имеем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha\, dF(x) < \infty$, следовательно, $\int\limits_{|x|>t} |x|^\alpha\, dF(x) \to 0$ при $t \to \infty$. Но $\int\limits_{|x|>t} |x|^\alpha\, dF(x) \geqslant t^\alpha \int\limits_{|x|>t} dF(x) = t^\alpha \mathsf{P}(|\xi| > t) \geqslant 0$. Отсюда следует нужное соотношение. 3.86. Положим $G(x) = 1 - F(x) + F(-x)$. При любом $T > 0$ интегрированием по частям получаем

$-\int\limits_0^T x^\alpha\, dG(x) + T^\alpha G(T) = \int\limits_0^T \alpha x^{\alpha-1} G(x)\, dx$, откуда следует равенство интегралов $-\int\limits_0^\infty x^\alpha dG(x)$ и $\alpha\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} G(x)\, dx$, если хотя бы один из них конечен.

3.87. Воспользуйтесь предыдущей задачей. 3.88. В силу задачи 3.75 имеем

$\mathsf{E}\min\{\xi, \eta\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\min\{\xi, \eta\} \geqslant i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant i,\ \eta \geqslant i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant i)\,\mathsf{P}(\eta \geqslant i)$.

3.89. Прежде всего заметим, что в силу существования $\mathsf{E}\xi$ $x(1 - F(x)) \to 0$ при $x \to \infty$ (см. задачу 3.86). Итак, имеем

$$a = \int\limits_0^\infty x dF(x) = -\int\limits_0^\infty x d(-F(x)) = \int\limits_0^\infty x d(1 - F(x)) = -x(1 - F(x))\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty (1 - F(x))\, dx = \int\limits_0^\infty (1 - F(x))\, dx.$$

3.90. Имеем $\int\limits_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}\, dF(t) < \infty$, следовательно, $\int\limits_0^x \frac{1}{t^\alpha}\, dF(t) \to 0$ при $x \to 0$. Но $\int\limits_0^x \frac{1}{t^\alpha}\, dF(t) \geqslant \frac{1}{x^\alpha}\int\limits_0^x dF(t) =$

$= \frac{1}{x^\alpha} \mathbf{P}(\xi \leqslant x) = \frac{F(x)}{x^\alpha} \geqslant 0.$ Отсюда следует нужное соотношение. **3.91.** Решение полностью аналогично решению задачи 3.89. **3.92.** Имеем $\mathbf{E}\xi^\alpha = \int\limits_0^\infty x^\alpha dF(x) =$
$= x^\alpha F(x)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty F(x)\,dx^\alpha = -\alpha \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}F(x)\,dx = |\alpha| \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}F(x)\,dx.$

3.93. Функция $G(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} F(x+n) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} F(x+i)$ существует как предел монотонно невозрастающей последовательности функций. Далее, $G(x)$, очевидно, непрерывна справа, монотонно не убывает и $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$, поэтому достаточно доказать, что $G(x) \to 1$ при $x \to +\infty$. В силу конечности математического ожидания сходится интеграл $\int\limits_0^\infty (1 - F(x))\,dx$ (см. задачу 3.86) и, следовательно, при $x > 0$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(F(x+n) - 1) =$
$= -\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 - F(x+n))$. Выберем x_0 так, чтобы $F(x_0) > 0$. Тогда при $x \geqslant x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln F(x+n)}{F(x+n) - 1} = 1$ и, значит, при $x \geqslant x_0$ равномерно сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln F(x+n)$. Осуществляя почленный переход к пределу, получим $\lim\limits_{x\to\infty} \ln G(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln F(x+n) = 0$, т. е. $G(x) \to 1$ при $x \to \infty$. **3.94.** $0 \leqslant$
$\leqslant (\mathbf{E}|\xi| - 1)^2 = \mathbf{E}|\xi|^2 - 2\mathbf{E}|\xi| + 1 = \mathbf{D}\xi + 1 - 2\mathbf{E}|\xi|$. **3.95.** Воспользуемся предыдущей задачей. Имеем $\mathbf{E}\left|\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathbf{D}\left(\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{\sqrt{n}}\right) + 1\right) =$
$= \frac{1}{2}(\mathbf{D}\zeta_1 + 1)$. **3.96.** $\mathbf{E}\zeta_n = 2pqn$, $\mathbf{D}\zeta_n = 2pq(1 - 2pq)n + 2pq(p - q)^2(n - 1)$.
3.97. $a = -\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$. **3.98.** Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Не ограничивая общности, будем считать, что $a < 0$. Полагая $b = -a$, имеем $\mathbf{E}|\xi + a| = \mathbf{E}|\xi - b| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x - b|\,dF(x) = \int\limits_b^{+\infty} x\,dF(x) -$
$- \int\limits_{-\infty}^{b} x\,dF(x) - b\int\limits_b^{+\infty} dF(x) + b\int\limits_{-\infty}^{b} dF(x) \geqslant 2\int\limits_0^\infty x\,dF(x) = \mathbf{E}|\xi|$. **3.99.** Пусть случайная величина η с вероятностью 1 равна нулю, а ξ принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями 1/2 каждое. Тогда $\mathbf{E}|\eta + a| = |a| =$
$= \frac{1}{2}|a - 1 + a + 1| \leqslant \frac{|a-1|}{2} + \frac{|a+1|}{2} = \mathbf{E}|\xi + a|$. **3.100.** Пусть $F(x)$ — функция распределения ζ. Тогда $\mathbf{E}|\xi + \zeta|^\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|\xi + x|^\alpha dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|\eta + x|^\alpha dF(x) =$
$= \mathbf{E}|\eta + \zeta|^\alpha$. **3.101.** Пусть $F(x)$ — функция распределения ζ. Тогда $\mathbf{E}|\xi + \zeta|^\alpha =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\,|\xi + x|^\alpha dF(x) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\,|\eta + x|^\alpha dF(x) = \mathbf{E}\,|\eta + \zeta|^\alpha$. **3.102.** В случае а) воспользуйтесь задачей 3.91, а в случае б) — 3.92. **3.103.** Если $x < m$, то $\max\{x, m\} = m = \mathbf{E}\xi \leqslant \mathbf{E}\max\{x, \xi\}$, если $x \geqslant m$, то $\max\{x, m\} = x = \mathbf{E}x \leqslant \mathbf{E}\max\{x, \xi\}$. **3.104.** Функция распределения случайной величины $\max\{x, \xi_i\}$ равна

$$\mathbf{P}(\max\{x, \xi_1\} \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < x, \\ F_i(t) & \text{при } t \geqslant x \end{cases}$$

и, следовательно, в силу задачи 3.89 $\mathbf{E}\max\{x, \xi_i\} = x + \int\limits_x^\infty (1 - F_i(t))\,dt$, отсюда следует нужное утверждение. **3.105.** Используйте предыдущую задачу. **3.106.** Воспользуйтесь задачами 3.104 и 3.105. **3.107.** Существует A, такое, что $\mathbf{P}(\xi \geqslant A) \geqslant 1/2$. Тогда $\mathbf{E}\,|\xi + a|^\alpha \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{E}\,|A + a|^\alpha \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{E}\,|a - |A||^\alpha = \frac{1}{2}|a - |A||^\alpha \to \infty$ при $a \to \infty$. **3.108.** Покажите, что функция $f(a) = \mathbf{E}(\xi - a)^{2n-1}$ монотонно убывает по a (можно, например, продифференцировать $(\xi - a)^{2n-1}$ по a при каждом фиксированном элементарном событии). **3.109.** Воспользуйтесь неравенствами $(a + b)^\alpha \leqslant a^\alpha + b^\alpha$, a, $b \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $(a + b)^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha)$, a, $b \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 1$. **3.110.** Для любого вещественного a имеем $\mathbf{E}(\xi - a)^2 - \mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - 2a\mathbf{E}\xi + a^2 - \mathbf{E}\xi^2 + (\mathbf{E}\xi)^2 = a^2 - 2a\mathbf{E}\xi + (\mathbf{E}\xi)^2 = (a - \mathbf{E}\xi)^2 \geqslant 0$. **3.111.** Продифференцируем по x функцию $f(x) = \mathbf{E}(\xi - x)^{2n}$ под знаком математического ожидания; получим $f'(x) = -2n\mathbf{E}(\xi - x)^{2n-1}$. Используя задачу 3.108, видим, что $\mathbf{E}(\xi - x)^{2n}$ достигает минимального значения в единственной точке, а именно там, где $\mathbf{E}(\xi - x)^{2n-1} = 0$. **3.112.** $\mathbf{E}\xi - \mathbf{E}\eta =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} xg(x)\,dx = \int\limits_a^{\infty} x(f(x) - g(x))\,dx + \int\limits_{-\infty}^{a} x(f(x) - g(x))\,dx \leqslant$$

$$\leqslant a\int\limits_a^{\infty}(f(x) - g(x))\,dx + a\int\limits_{-\infty}^{a}(f(x) - g(x))\,dx = a\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f(x) - g(x))\,dx.$$

Вторая часть доказывается аналогично. **3.113.** См. задачу 3.47. **3.114.** $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$. **3.115.** Нет. **3.116.** Для любого вещественного x $\mathbf{E}(x\xi + \eta)^2 \geqslant 0$. Но $\mathbf{E}(x\xi + \eta^2) = x^2\mathbf{E}\xi^2 + 2x\mathbf{E}\xi\eta + \mathbf{E}\eta^2$. Таким образом, дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в правой части последнего равенства, неположителен: $4(\mathbf{E}\xi\eta)^2 - 4\mathbf{E}\xi^2\mathbf{E}\eta^2 \leqslant 0$ или $(\mathbf{E}\xi\eta)^2 \leqslant \mathbf{E}\xi^2\mathbf{E}\eta^2$. **3.117.** Воспользуйтесь элементарным неравенством $|ab| \leqslant \frac{|a|^r}{r} + \frac{|b|^s}{s}$, $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ $\left(\text{положите } a = \frac{\xi}{(\mathbf{E}\,|\xi|^r)^{\frac{1}{r}}},\ b = \frac{\eta}{(\mathbf{E}\,|\eta|^s)^{\frac{1}{s}}}\right)$. **3.118.** Покажем, что если $0 < s < t$, то $(\mathbf{E}\,|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \leqslant (\mathbf{E}\,|\xi|^t)^{\frac{1}{t}}$.

Положим $r = \frac{t}{s}$, $\eta = |\xi|^s$ и применим неравенство Иенсена к функции $g(x) = |x|^r$. Получим $|\mathbf{E}\eta|^r \leqslant \mathbf{E}|\eta|^r$, т. е. $(\mathbf{E}\,|\xi|^s)^{\frac{t}{s}} \leqslant \mathbf{E}\,|\xi|^t$. **3.119.** Воспользуйтесь неравенством Иенсена. **3.120.** Используйте элементарное неравенство $|a + b|^\alpha \leqslant |a|^\alpha + |b|^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$. **3.121.** При $r = 1$ неравенство очевидно. Пусть $r \neq 1$. Имеем

$$\mathbf{E}|\xi + \eta|^r \leqslant \mathbf{E}(|\xi||\xi + \eta|^{r-1}) + \mathbf{E}(|\eta||\xi + \eta|^{r-1}) \leqslant (\mathbf{E}|\xi|^r)^{1/r}(\mathbf{E}|\xi + \eta|^{(r-1)s})^{1/s} +$$
$$+ (\mathbf{E}|\eta|^r)^{1/r}(\mathbf{E}|\xi + \eta|^{(r-1)s})^{1/s} = ((\mathbf{E}|\xi|^r)^{1/r} + (\mathbf{E}|\eta|^r)^{1/r})(\mathbf{E}|\xi + \eta|^{(r-1)s})^{1/s}$$

Исключая тривиальный случай $\mathbf{E}|\xi+\eta|^r = 0$ и замечая, что $(r-1)s = r$, разделим обе части на $(\mathbf{E}|\xi+\eta|^r)^{1/s}$ и получим доказываемое неравенство. 3.122. Пусть $r' \leqslant r$. По неравенству Коши — Буняковского $\mathbf{E}|\xi|^r = \mathbf{E}|\xi|^{\frac{r-r'}{2}}|\xi|^{\frac{r+r'}{2}} \leqslant (\mathbf{E}|\xi|^{r-r'}\cdot\mathbf{E}|\xi|^{r+r'})^{\frac{1}{2}}$. Взяв логарифм от обеих частей, получим $\log \mathbf{E}|\xi|^r \leqslant \frac{1}{2}\log \mathbf{E}|\xi|^{r-r'} + \frac{1}{2}\log \mathbf{E}|\xi|^{r+r'}$, что и означает выпуклость функции $\log \mathbf{E}|\xi|^r$ по r. 3.123. См. решение задачи 3.122. 3.124. В силу задачи 3.122 $\log \mathbf{E}|\xi|^r$ выпукла как функция r, т. е. $\log \mathbf{E}|\xi|^{\alpha x+(1-\alpha)y} \leqslant \alpha \log \mathbf{E}|\xi|^x + (1-\alpha)\log \mathbf{E}|\xi|^y$, $x,\ y > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Положим $\alpha = \frac{n-m}{n-l}$, $x = l$, $y = n$. Получим $\log \mathbf{E}|\xi|^m \leqslant \frac{n-m}{n-l}\log \mathbf{E}|\xi|^l + \frac{m-l}{n-l}\log \mathbf{E}|\xi|^n$ или $\log(\mathbf{E}|\xi|^m)^{n-l} \leqslant \log(\mathbf{E}|\xi|^l)^{n-m} + \log(\mathbf{E}|\xi|^n)^{m-l}$, откуда вытекает нужное неравенство. 3.125. Докажем вначале правое неравенство. Используя неравенство задачи 3.120, получим $\mathbf{E}|\xi_1-\xi_2|^r = \mathbf{E}|(\xi_1-a)-(\xi_2-a)|^r \leqslant \mathbf{E}|\xi_1-a|^r + \mathbf{E}|\xi_2-a|^r = 2\mathbf{E}|\xi_1-a|^r$. Докажем теперь левое неравенство. Положим $q(t) = \mathbf{P}(|\xi_1 - m\xi_1| \geqslant t)$ и $p(t) = \mathbf{P}(|\xi_1-\xi_2| \geqslant t)$. Тогда в силу задачи 3.121 $q(t) = 2p(t)$. Отсюда, применяя интегрирование по частям, получаем
$$\mathbf{E}|\xi_1 - m\xi_1|^r = -\int_0^\infty t^r dq(t) \leqslant \int_0^\infty q(t)\,dt^r \leqslant 2\int_0^\infty p(t)\,dt^r = -2\int_0^\infty t^r dp(t) = 2\mathbf{E}|\xi_1 - \xi_2|^r.$$
3.126. Доказательство левого неравенства в точности такое же, как и в предыдущей задаче. Для доказательства правого неравенства используем задачу 3.119 (при $n = 2$). Получим $\mathbf{E}|\xi_1-\xi_2|^r = \mathbf{E}|(\xi_1-a)-(\xi_2-a)|^r \leqslant 2^{r-1}\mathbf{E}|\xi_1-a|^r + 2^{r-1}\mathbf{E}|\xi_2-a|^r = 2^r\mathbf{E}|\xi_1-a|^r$. 3.127. Воспользуйтесь элементарным неравенством $|x+y|^r + |x-y|^r \leqslant 2(|x|^r+|y|^r)$, $1 \leqslant r \leqslant 2$, и одинаковой распределенностью случайных величин $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$, из которой, в частности, следует, что $\mathbf{E}|\xi+\eta|^r = \frac{1}{2}(\mathbf{E}|\xi+\eta|^r + \mathbf{E}|\xi-\eta|^r)$.
3.128. Используйте предыдущую задачу. 3.129. Из неравенства Иенсена следует, что для любого x и $r \geqslant 1$ $\mathbf{E}|x+\eta|^r \geqslant |\mathbf{E}(x+\eta)|^r = |x|^r$. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Имеем $\mathbf{E}|\xi+\eta|^r = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|x+\eta|^r dF(x) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF(x) = \mathbf{E}|\xi|^r$. 3.130. Используйте задачи 3.119, 3.127—3.129. 3.131. Не ограничивая общности, можно считать, что ξ принимает целочисленные значения. Пусть $a = \{\mathbf{E}\xi\}$ ($\{\cdot\}$ — дробная часть) и $b = 1-a$ и пусть для определенности $a < 1/2$. Тогда $2\nu_k - \nu_{k-1} = a^{k-1}(2a-1)\times\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]) + (a+1)^{k-1}(2(a+1)-1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]-1) + b^{k-1}(2b-1)\times\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+1) + (a+2)^{k-1}(2(a+2)-1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]-2) + (b+1)^{k-1}\times(2b-1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+2) + \ldots$ В написанной сумме все члены, кроме первого, неотрицательны. Если $\Delta = a^{k-1}(2a-1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]) + b^{k-1}(2b-1)\times\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+1) \geqslant 0$, то утверждение становится очевидным. Пусть $\Delta < 0$. Тогда, учитывая, что $2a-1 = 1-2b$, получаем $a^{k-1}(2a-1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]) + b^{k-1}(2b-1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+1) \geqslant b^{k-1}\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+1) - a^{k-1}\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]) \geqslant a^{k-2}(b\cdot\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+1) - a\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi])) \geqslant b\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+1) - a\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi])$. Окончательно получаем $2\nu_k - \nu_{k-1} \geqslant b\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+1) - a\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]) + (a+1)^{k-1}(2(a+1)-1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]-1) + (b+1)^{k-1}(2b-1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+2) + \ldots \geqslant b\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+1) - a\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]) - (a+1)\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]-1) + (b+1)\times\mathbf{P}(\xi = [\mathbf{E}\xi]+2) + \ldots = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi) = 0$. 3.132. Воспользуйтесь неравенством $1 = \left(\mathbf{E}\frac{1}{\sqrt{\xi}}\sqrt{\xi}\right) \leqslant \mathbf{E}\frac{1}{\xi}\,\mathbf{E}\xi$ (задача 3.117). 3.133. Воспользуемся предыдущей задачей. Имеем $\mathbf{E}\frac{\xi^r}{\eta^r} = \mathbf{E}\xi^r\mathbf{E}\frac{1}{\eta^r} \geqslant \frac{\mathbf{E}\xi^r}{\mathbf{E}\eta^r}$. 3.134. $-1/5$. Это частный случай сле-

дующей задачи. 3.135. $-\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, s$. 3.136. Используйте неравенство Коши — Буняковского. 3.137. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ представляет собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега P. Тогда случайные величины

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant \omega \leqslant 1/4, \\ -1 & \text{при } 1/4 < \omega < 1/2, \\ 0 & \text{при } 1/2 < \omega \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \eta = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant \omega \leqslant 1/2, \\ 1 & \text{при } 1/2 < \omega \leqslant 3/4, \\ -1 & \text{при } 3/4 < \omega \leqslant 1, \end{cases}$$

очевидно, некоррелированы, но зависимы (так как $\mathsf{P}(\xi = 1, \eta = 1) = 0$, но $\mathsf{P}(\xi = 1)\mathsf{P}(\eta = 1) = 1/16 > 0$. 3.138. Это следует из формулы для дисперсии суммы: $\mathsf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\xi_i + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$. 3.139. $\frac{n-m}{n}$.

3.140. $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$. 3.141. ρ^2. 3.142. Положим $\eta_i = \frac{\xi_i - \mathsf{E}\xi_i}{\sqrt{\mathsf{D}\xi_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\rho = \mathsf{E}\eta_i\eta_j$, $i \neq j$, и $\mathsf{E}\eta_i^2 = 1$. Имеем

$$0 \leqslant \mathsf{E}(\eta_1 + \ldots + \eta_n)^2 = \mathsf{E}(\eta_1 + \ldots + \eta_n)(\eta_1 + \ldots + \eta_n) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \sum_{i\neq j} \eta_i\eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\eta_i^2 + \sum_{i\neq j} \mathsf{E}\eta_i\eta_j,$$

откуда $n(n-1)\rho \geqslant -n$ или $\rho \geqslant -\frac{1}{n-1}$. 3.143. Нет. 3.144. Да. Легко видеть, что $\xi\eta$ принимает значения -1, 0, 1 с вероятностями 1/4, 1/2, 1/4 соответственно. Имеем $\mathsf{P}(\xi\eta = 1, \eta = 1) = \mathsf{P}(\xi = 1, \eta = 1) = \mathsf{P}(\xi = 1)\mathsf{P}(\eta = 1) = 1/8 \neq \neq 1/16 = \mathsf{P}(\xi\eta = 1)\mathsf{P}(\eta = 1)$, т. е. $\xi\eta$ и η зависимы. Очевидно, $\mathsf{E}\xi\eta = 0$ и $\mathsf{E}\eta = 0$, поэтому $\operatorname{cov}(\xi\eta, \eta) = \mathsf{E}\xi\eta\eta = \mathsf{E}\xi\eta^2 = \mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta^2 = 0$, т. е. $\xi\eta$ и η некоррелированы. 3.145. Достаточно показать, что $\operatorname{cov}(\xi, \operatorname{sign}\xi) \geqslant 0$. Имеем $\operatorname{cov}(\xi, \operatorname{sign}\xi) = \mathsf{E}\xi \operatorname{sign}\xi - \mathsf{E}\xi\, \mathsf{E}\operatorname{sign}\xi = \mathsf{E}|\xi| - \mathsf{E}\xi\, \mathsf{E}\operatorname{sign}\xi$. Остается воспользоваться неравенствами $|\mathsf{E}\xi| \leqslant \mathsf{E}|\xi|$ и $|\mathsf{E}\operatorname{sign}\xi| \leqslant 1$. 3.146. 0 Достаточно показать, что $\operatorname{cov}(\xi, |\xi|) = 0$. Имеем $\operatorname{cov}(\xi, |\xi|) = \mathsf{E}\xi|\xi| - \mathsf{E}\xi\mathsf{E}|\xi| = \mathsf{E}\xi|\xi|$. Далее, ξ^2 и $\operatorname{sign}\xi$ независимы (действительно, для любого $x \geqslant 0$ имеем $\mathsf{P}(\xi^2 \leqslant x, \operatorname{sign}\xi = 1) = \mathsf{P}(-\sqrt{x} \leqslant \xi \leqslant \sqrt{x}, \xi \geqslant 0) = \mathsf{P}(0 \leqslant \xi \leqslant \sqrt{x}) = \frac{1}{2}\mathsf{P}(-\sqrt{x} \leqslant \xi \leqslant \sqrt{x}) = \mathsf{P}(\xi^2 \leqslant x)\,\mathsf{P}(\operatorname{sign}\xi = 1))$ и $|\xi| = \xi \operatorname{sign}\xi$, поэтому $\mathsf{E}\xi|\xi| = \mathsf{E}\xi^2 \operatorname{sign}\xi = \mathsf{E}\xi^2\mathsf{E}\operatorname{sign}\xi = 0$. 3.147. Нужно доказать, что для любых вещественных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\lambda_i\lambda_j \geqslant 0$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(\xi_i - \mathsf{E}\xi_i)(\xi_j - \mathsf{E}\xi_j)\lambda_i\lambda_j = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathsf{E}\xi_i)\lambda_i\right)^2 \geqslant 0.$$

3.148. $b - a(\alpha - \beta)$. $(\operatorname{cov}(\xi, \operatorname{sign}\xi) = \mathsf{E}\xi \operatorname{sign}\xi - \mathsf{E}\xi\, \mathsf{E}\operatorname{sign}\xi = \mathsf{E}|\xi| - \mathsf{E}\xi \times \times \mathsf{E}\operatorname{sign}\xi = b - a(\alpha - \beta))$. 3.149. Положим $\bar{\xi}_i = \xi_i - \mathsf{E}\xi_i$, $i = 1, 2$. Имеем $\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = \mathsf{E}(\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2)(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2) = \mathsf{E}(\bar{\xi}_1^2 - \bar{\xi}_2^2) = \mathsf{D}\xi_1 - \mathsf{D}\xi_2 = 0$. 3.150. Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\mathsf{E}\max\{\xi^2, \eta^2\} = \mathsf{E}\frac{|\xi^2+\eta^2| + |\xi^2-\eta^2|}{2} = \frac{\mathsf{E}\xi^2 + \mathsf{E}\eta^2}{2} + \frac{1}{2}\mathsf{E}|\xi - \eta||\xi + \eta| =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\mathsf{E}|\xi - \eta||\xi + \eta| \leqslant 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\mathsf{E}(\xi - \eta)^2\,\mathsf{E}(\xi + \eta)^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(\mathsf{E}\xi^2 + \mathsf{E}\eta^2 - 2\mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta)(\mathsf{E}\xi^2 + \mathsf{E}\eta^2 + 2\mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta)} =$$

$$= 1 + \sqrt{(1-\rho)(1+\rho)} = 1 + \sqrt{1-\rho^2}.$$

3.151. а) Да, б) вообще говоря, нет. 3.152. Нет; $\operatorname{cov}(\xi+\zeta, \eta+\zeta) = \mathsf{E}(\xi+\zeta)(\eta+\zeta) - \mathsf{E}(\xi+\zeta)\mathsf{E}(\eta+\zeta) = \mathsf{E}\zeta^2 - (\mathsf{E}\zeta^2) = \mathsf{D}\zeta > 0$. 3.153. 0.

3.154. $\mathsf{P}(\xi = k) = \mathsf{P}(\xi_1 = k)\mathsf{P}(\xi_2 > k) + \mathsf{P}(\xi_1 > k)\mathsf{P}(\xi_2 = k) = p_1 q_1^k \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} p_2 q_2^i +$

$$+ p_2 q_2^k \sum_{i=k+1}^{\infty} p_1 q_1^i = p_1 q_1^k q_2^{k+1} + p_2 q_2^k q_1^{k+1} = (p_1 q_2 + p_2 q_1) q_1^k q_2^k.$$

Параметр распределения ξ равен $p_1 q_2 + p_2 q_1 = 1 - q_1 q_2$. 3.155. а) $\Rightarrow$ б): $\mathsf{P}(\xi = n+k \mid \xi \geqslant k) = \dfrac{\mathsf{P}(\xi = n+k, \xi \geqslant k)}{\mathsf{P}(\xi \geqslant k)} = \dfrac{\mathsf{P}(\xi = n+k)}{\mathsf{P}(\xi \geqslant k)} =$

$= \dfrac{(1-p)^{n+k} p}{(1-p)^k p + (1-p)^{k+1} p + \ldots} = (1-p)^n p = \mathsf{P}(\xi = n)$. б) $\Rightarrow$ а): пусть $p_k = \mathsf{P}(\xi = k)$. Имеем $\mathsf{P}(\xi = n+k \mid \xi \geqslant k) = \dfrac{\mathsf{P}(\xi = n+k, \xi \geqslant k)}{\mathsf{P}(\xi \geqslant k)} = \dfrac{\mathsf{P}(\xi = n+k)}{\mathsf{P}(\xi \geqslant k)} =$

$= \dfrac{p_{n+k}}{p_k + p_{k+1} + \ldots} = p_n$. Положим $n = 0$, $k = 1$. Тогда $\dfrac{p_1}{p_1 + p_2 + \ldots} = p_0$

или $p_1 = p_0(p_1 + p_2 + \ldots) = p_0(1 - p_0)$. При $n = 1$, $k = 1$ $\dfrac{p_2}{1 - p_0} = p_1 = p_0(1 - p_0)$

или $p_2 = p_0(1 - p_0)^2$ и т. д. Окончательно получаем $p_i = p_0(1 - p_0)^i$ для любого $i = 1, 2, \ldots$ 3.156. Пусть $0 \leqslant k \leqslant n$. Имеем $\mathsf{P}(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n) =$

$$= \frac{\mathsf{P}(\xi_1 = k, \xi_1 + \xi_2 = n)}{\mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \frac{\mathsf{P}(\xi_1 = k)\mathsf{P}(\xi_2 = n-k)}{\mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \frac{p(1-p)^k\, p(1-p)^{n-k}}{\mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)} =$$

$= \dfrac{p^2(1-p)^n}{\mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)}$, откуда видно, что правая часть не зависит от k.

3.157. $\mathsf{P}(\eta = 0) = \dfrac{1}{1+q}$, $\mathsf{P}(\eta = 2k) = 0$, $\mathsf{P}(\eta = 2k+1) = pq^{2k+1}$. 3.158. Пусть $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1, ξ_2 независимы и принимают целые неотрицательные значения, а ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Пусть ξ_1 принимает значения $0, 1, \ldots, k$. Тогда, очевидно, ξ_2 принимает значения $0, 1, \ldots, n-k$. Положим $p_i = \mathsf{P}(\xi_1 = i)$, $q_j = \mathsf{P}(\xi_2 = j)$. Из равенства $\xi = \xi_1 + \xi_2$ имеем $\sum\limits_{j=0}^{i} p_j q_{i-j} = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Покажите, что последняя система уравнений (относительно $p_0, \ldots, p_k, q_0, \ldots, q_{n-k}$) имеет единственное решение. 3.160. Имеем $\lambda_2^k - \lambda_1^k \leqslant (\lambda_2 - \lambda_1)^k$, поэтому

$$e^{\lambda_2 - \lambda_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^k}{k!} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{k!} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_2^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \text{ откуда } e^{-\lambda_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} \geqslant$$

$\geqslant e^{-\lambda_2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\lambda_2^k}{k!}$. 3.161. $\mathsf{P}(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = C_n^k \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}$.

3.162. Достаточно показать, что $\mathsf{P}(\xi_1 \leqslant t) \leqslant \mathsf{P}(\xi_2 \leqslant t)$. Имеем $\mathsf{P}(\xi_1 \leqslant t) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t/\sigma_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t/\sigma_2} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_2^2}} du = \mathbf{P}(\xi_2 \leqslant t)$. 3.163. Найдите совместное распределение случайных величин $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$. 3.164. $\mathbf{P}(\operatorname{sign}\xi=-1)=$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$, $\mathbf{P}(\operatorname{sign}\xi = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$.

3.165. Показательное распределение с параметром 1/2. 3.166. $xe^{-x^2/2}$ при $x \geqslant 0$ и 0 при $x < 0$. 3.167. $\frac{x^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x^2}{2}}$ при $x \geqslant 0$ и 0 при $x < 0$. 3.168. $\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}$ при $x \geqslant 0$ и 0 при $x < 0$. 3.169. R — нормальное распределение с математическим ожиданием $b-a$ и дисперсией $\sigma_2^2-\sigma_1^2$. Необходимо выполнение условия $\sigma_2^2 \geqslant \sigma_1^2$. 3.170. R — равномерное распределение на отрезке $\left[\pi, \pi+\frac{1}{2}\right]$. 3.171. $\frac{(-\ln x)^n}{n!}$ при $0 < x \leqslant 1$ и 0 при остальных x. 3.172. Распределение Пуассона с параметром λ. 3.173. Показательное распределение с параметром λ. 3.174. Равномерное распределение на отрезке [0, 1] (ср. с предыдущей задачей). 3.175. Имеем при $x>0$: $\mathbf{P}(\max(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_i < x) = (1-e^{-\lambda x})^n$. Отсюда плотность распределения $\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ равна $n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$, $x > 0$. Далее, ξ_1, $\xi_2/2$, $\xi_3/3$, … — независимы и показательно распределены с параметрами λ, 2λ, 3λ, … соответственно. Покажите по индукции, что плотность распределения $\xi_1+\xi_2/2+\xi_3/3+\ldots+\xi_n/n$ равна $n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$, $x > 0$. 3.176. Покажите, что функция $F(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $F'(x) = \lambda(1-F(x))$, где λ — постоянная. 3.177. Распределение Коши с параметрами 0, 1, то есть распределение с плотностью $\frac{1}{\pi(x^2+1)}$. 3.178. Распределение Коши с параметрами $\frac{a}{a^2+b^2}$, $\frac{b}{a^2+b^2}$, т. е. распределение с плотностью

$$\frac{b}{\pi(a^2+b^2)\left(\left(x-\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}\right)}.$$

3.179. Логистическое распределение с параметрами 0, 1, т. е. распределение с плотностью $e^x/(1+e^x)^2$. 3.180. 0, 0. 3.181. Распределение с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1-x^{-1/\lambda} & \text{при } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } x < 1 \end{cases}$$

(*распределение Парето с параметром* $1/\lambda$). 3.182. $\frac{e^{-\lambda x}(e^{\lambda h}-1)}{h}$, $\frac{e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda h})}{h}$.

3.183. $p(x) = p_i$ при $i \leqslant x < i+1$, $i = 0, \pm 1, \ldots$ 3.184. Плотность распределения суммы $\xi + \eta$ равна нулю вне отрезка $[a+c,\ b+d]$, равна $\frac{1}{d-c}$ на отрезке $[c+b,\ a+d]$ и линейна на каждом из отрезков $[a+c,\ b+c]$ и $[a+d,\ b+d]$. 3.185. $\frac{1}{4} e^{-|x|}(|x|+1)$. 3.186. В обоих случаях вероятность равна 1/2 (покажите, что распределение случайной величины $b^2 - a^2$ симметрично относительно нуля). 3.187. Имеем $\mathbf{P}(\xi + \eta = a) = 1$ при некотором a. Предположим, что ξ имеет невырожденное распределение. Тогда существуют два непересекающихся отрезка $[a, b]$ и $[c, d]$ $(d > c > b > a)$, такие, что $\mathbf{P}(a \leqslant \xi \leqslant b) > 0$ и $\mathbf{P}(c \leqslant \xi \leqslant d) > 0$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$, очевидно, существует отрезок $[\Delta,\ \Delta + \varepsilon]$ длиной ε, такой, что $\mathbf{P}(\Delta \leqslant \eta \leqslant \Delta + \varepsilon) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{c-b}{4}$. Тогда $\mathbf{P}(a + \Delta \leqslant \xi + \eta \leqslant b + \Delta + {}$ $+ \varepsilon) \geqslant \mathbf{P}(a \leqslant \xi \leqslant b,\ \ \Delta \leqslant \eta \leqslant \Delta + \varepsilon) = \mathbf{P}(a \leqslant \xi \leqslant b)\mathbf{P}(\Delta \leqslant \eta \leqslant \Delta + \varepsilon) > 0$ и аналогично $\mathbf{P}(c + \Delta \leqslant \xi + \eta \leqslant d + \Delta + \varepsilon) > 0$. Но $b + \Delta + \varepsilon = \frac{3b}{4} + \Delta + \frac{c}{4} <$ $< c + \Delta$, т. е. отрезки $[a + \Delta,\ b + \Delta + \varepsilon]$ и $[c + \Delta,\ d + \Delta + \varepsilon]$ не пересекаются. Следовательно, распределение случайной величины $\xi + \eta$ невырождено. Противоречие.

Если ξ и η зависимы, утверждение перестает быть верным. Пример: $\eta = -\xi$ и ξ имеет невырожденное распределение. 3.188. $\mathbf{P}(\eta = 0) = 1$. 3.189. 223 раза. Воспользуйтесь симметричностью распределения суммы выпавших очков относительно ее математического ожидания. 3.190. В частности, это следует из коммутативности и ассоциативности операции сложения случайных величин. 3.191. Укажите счетное множество, такое, что сумма скачков свертки в точках этого множества равна единице. 3.192. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две функции распределения, причем $F(x)$ непрерывна. Тогда (см. задачу 3.23) $F(x)$ равномерно непрерывна. Следовательно, для любого положительного ε существует $\delta > 0$, такое, что если $\Delta x < \delta$, то $|F(x + \Delta x) - F(x)| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon$ при любом x. Имеем

$$|F * G(x + \Delta x) - F * G(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x + \Delta x - t)\, dG(t) - \int_{-\infty}^{\infty} F(x - t)\, dG(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F(x + \Delta x - t) - F(x - t)|\, dG(t) \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} dG(t) = \varepsilon.$$

3.193. Пусть $\mathbf{P} = \mathbf{Q} * \mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$ абсолютно непрерывно, т. е. $\mathbf{Q}(A) = 0$ для любого борелевского множества A, имеющего нулевую лебегову меру. Имеем $\mathbf{P}(A) =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}(A - x)\, d\mathbf{P}(x)$. Но если A имеет нулевую лебегову меру, то $A - x$ также имеет нулевую лебегову меру при любом x, следовательно, $\mathbf{Q}(A - x) = 0$ при любом x и, значит, $\mathbf{P}(A) = 0$. 3.194. Приведем доказательство для случая $n = 1$. Пусть $F(x)$ n раз дифференцируема. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F * G(x + \Delta x) - F * G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x + \Delta x - t) - F(x - t)}{\Delta x}\, dG(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x - t) - F(x - t)}{\Delta x}\, dG(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F'_x(x - t)\, dG(t).$$

3.195. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две функции распределения, причем $F(x)$ симметрична, т. е. $F(x) = 1 - F(x-0)$. Докажем, что $H(x) = F * G(x)$ также симметрична. Имеем $H(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\,dG(t)$, $1 - H(x-0) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-t-0)\,dG(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - F(x-t-0))\,dG(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\,dG(t) = H(x)$. 3.196. Рассмотрите свертку двух одинаковых распределений с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 5 & \text{при } -1/30 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } \quad 0 < x \leqslant \dfrac{5}{6}, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

3.197. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — симметричные одновершинные функции распределения и $F_0(x) = F_1 * F_2(x)$. Условие одновершинности функции распределения $F_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, (с учетом ее симметричности) означает, что для любых $x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$ $\frac{1}{2}(F_i(x_1) + F_i(x_2)) \leqslant F_i\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. Положим $G_h(y) = F_1(y) - \frac{1}{2}(F_1(y+h) + F_1(y-h))$. Нетрудно проверить, что $G_h(y) = -G_h(-y)$, $G_h(y)\,\operatorname{sign} y \geqslant 0$ и что $d(F_2(y-x) - F_2(y+x)) \geqslant 0$, $x > 0$, $y > 0$. Положим $x_1 = x + h$, $x_2 = x - h$, $x > h > 0$. Тогда, очевидно,

$$\int\limits_0^{\infty} G_h(u)\,d\left(F_2(u-x) - F_2(u+x)\right) \geqslant 0.$$

Используя определение функции $G_h(x)$, можно преобразовать это неравенство к виду

$$F_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - u\right) dF_2(u) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(F_1(x_1 - u) + F_1(x_2 - u)\right) dF_2(u) = \frac{1}{2}\left(F_0(x_1) + F_0(x_2)\right).$$

Последнее неравенство с учетом симметричности функции распределения $F_0(x)$ означает, что $F_0(x)$ одновершинна. 3.198. Положим $\zeta = \xi - \eta$. ζ имеет непрерывное распределение (см. задачу 3.192), то есть $\mathsf{P}(\zeta = x) = 0$ для любого x и, в частности, для $x = 0$. 3.199. В силу симметричности распределений одновременно все 8 комбинаций $\pm\xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3$ с вероятностью единица ограничены по модулю числом M, а среди них есть и сумма модулей. 3.200. а) Неравенство $s(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \leqslant s(\xi_1) + \ldots + s(\xi_n)$ очевидно. Докажем, что $s(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \geqslant s(\xi_1) + \ldots + s(\xi_n)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем $\mathsf{P}\left(\xi_i > s(\xi_i) - \frac{\varepsilon}{n}\right) > 0$ и, следовательно,

$$\mathsf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n > s(\xi_1) + \ldots + s(\xi_n) - \varepsilon) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_i > s(\xi_i) - \frac{\varepsilon}{n}\right) > 0,$$

т. е. $s(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \geqslant s(\xi_1) + \ldots + s(\xi_n) - \varepsilon$. В силу произвольности ε отсюда следует нужное неравенство.

б) Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте, показываем, что $s(|\xi_1|+\ldots+|\xi_n|)=s(|\xi_1|)+\ldots+s(|\xi_n|)$, откуда $s(|\xi_1|+\ldots+|\xi_n|)=s(|\xi_1|)+\ldots+s(|\xi_n|)=s(\xi_1)+\ldots+s(\xi_n)=$ $=s(\xi_1+\ldots+\xi_n)$.

В случае, когда ξ_i зависимы или не являются симметричными, равенства а) и б), вообще говоря, неверны. **3.201.** Неравенство $s(\xi_1+\ldots+\xi_n)\leqslant s(\xi_1)+\ldots+s(\xi_n)$ очевидно. Докажем, что $s(\xi_1+\ldots+\xi_n)\geqslant$ $\geqslant s(\xi_1)+\ldots+s(\xi_n)$. Фиксируем произвольное положительное $\varepsilon>0$. Имеем $\mathsf{P}\left(|\xi_i|>s(\xi_i)-\frac{\varepsilon}{n}\right)>0$ и, таким образом, либо $\mathsf{P}\left(\xi_i>s(\xi_i)-\frac{\varepsilon}{n}\right)>0$, либо $\mathsf{P}\left(\xi_i<-s(\xi_i)+\frac{\varepsilon}{n}\right)>0$. Пусть, например, выполнено первое неравенство. Тогда

$$\mathsf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n>s(\xi_1)+\ldots+s(\xi_n)-\varepsilon)\geqslant\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}\left(\xi_i>s(\xi_i)-\frac{\varepsilon}{n}\right)>0.$$

В силу произвольности ε отсюда следует нужное неравенство. **3.202.** См. задачу 3.183. **3.203.** Пусть $A=\{\xi\geqslant\eta\}$. Тогда $\mathsf{E}(\xi+\eta)^{(x)}=\mathsf{E}(\xi+\eta)^{(x)}I_A+$ $+\mathsf{E}(\xi+\eta)^{(x)}I_{\bar{A}}\leqslant\mathsf{E}(2\xi)^{(x)}+E(2\eta)^{(x)}=\mathsf{E}2\xi^{\left(\frac{x}{2}\right)}+\mathsf{E}2\eta^{\left(\frac{x}{2}\right)}=2\left(\mathsf{E}\xi^{\left(\frac{x}{2}\right)}+\mathsf{E}\eta^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$

(мы воспользовались тем, что $(c\xi)^{(x)}=c\xi^{\left(\frac{x}{c}\right)}$). **3.204.** Предположим противное: $\mathsf{P}\left(\xi_i\geqslant\frac{c}{n}\right)>0$. Тогда

$$\mathsf{P}(\eta\geqslant c)\geqslant\mathsf{P}(\xi_1\geqslant c/n,\ldots,\xi_n\geqslant c/n)=\mathsf{P}(\xi_1\geqslant c/n)\cdot\ldots\cdot\mathsf{P}(\xi_n\geqslant c/n)>0.$$

Противоречие. **3.205.** Поскольку $\mathsf{P}(\xi_1=0)<1$, существует положительное ε, такое, что $\mathsf{P}(|\xi_1|\geqslant\varepsilon)>0$. Но тогда либо $\mathsf{P}(\xi_1\geqslant\varepsilon)>0$, либо $\mathsf{P}(\xi_1\leqslant-\varepsilon)>0$. Пусть, например, выполнено первое неравенство. Тогда при $n\geqslant\frac{c}{\varepsilon}\mathsf{P}(|\eta_n|>$ $>c)\geqslant\mathsf{P}(\eta_n>c)\geqslant\mathsf{P}(\xi_1\geqslant\varepsilon,\ldots,\xi_n\geqslant\varepsilon)=\mathsf{P}(\xi_1\geqslant\varepsilon)\cdot\ldots\cdot\mathsf{P}(\xi_n\geqslant\varepsilon)>0$. **3.206.** Если $\mathsf{P}(\xi_i\leqslant c)=0$, то утверждение очевидно (причем в качестве α можно взять любое положительное число). Пусть $\mathsf{P}(\xi_i\leqslant c)>0$. Имеем

$$\mathsf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n\leqslant c)\leqslant\mathsf{P}(\max\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\leqslant c)=$$

$$=\mathsf{P}(\xi_1\leqslant c)\,\mathsf{P}(\xi_2\leqslant c)\cdot\ldots\cdot\mathsf{P}(\xi_n\leqslant c)=(\mathsf{P}(\xi_1\leqslant c))^n=e^{-n\ln\frac{1}{\mathsf{P}(\xi_1\leqslant c)}}.$$

3.207. Нет. Пример, ξ и η одинаково распределены и принимают значения 1 и -2 с вероятностью 1/2 каждое. В этом случае $\mathsf{P}(\xi+\eta>0)=1/4$. **3.208.** Прежде всего заметим, что ξ_1 и ξ_2 также неотрицательны, а потому $\mathsf{P}(\xi_i=0)>0$. Пусть существует нецелое a, такое, что $\mathsf{P}(\xi_i=a)>0$. Тогда $\mathsf{P}(\xi=a)\geqslant\mathsf{P}(\xi_1=a)\mathsf{P}(\xi_2=0)>0$. Противоречие. **3.209.** Из условия задачи следует, что существуют такие вещественные x, y и такие целые k и n, что $\mathsf{P}(\xi=x)>0$, $\mathsf{P}(\xi=x+ka)>0$, $\mathsf{P}(\eta=y)>0$, $\mathsf{P}(\eta=y+nb)>0$. Но тогда $\mathsf{P}(\xi+\eta=x+y)>0$, $\mathsf{P}(\xi+\eta=x+y+ka)>0$, $\mathsf{P}(\xi+\eta=x+y+nb)>0$. Нужное утверждение следует теперь из того, что ka и nb соизмеримы тогда и только тогда, когда a/b — рациональное число. **3.210.** Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — точки разрыва функции $F_1(x)$, $y_1,\ldots,y_n$ — точки разрыва функции $F_2(x)$ (расположенные в порядке возрастания). Точками разрыва $F(x)$ будут те и только те значения x, которые представимы в виде $x=x_i+y_j$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$. Среди таких значений не меньше $n+m-1$ различных, так как $x_1+y_1<x_1+y_2<x_1+y_3<\ldots<x_1+y_m<x_2+y_m<x_3+y_m<\ldots<$

$< x_n + y_m$, и не больше чем mn различных, так как всего из элементов двух множеств, содержащих n и m элементов соответственно, можно образовать mn различных пар. **3.211.** Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ — функции распределения случайных величин ξ, η и $\xi+\eta$ соответственно. Имеем

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x-t)\,dQ(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x-t)\,q(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-t)\,dP(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-t)\,p(t)\,dt.$$

Дифференцируя под знаком интеграла, получаем $r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-t)q(t)\,dt = = \int_{-\infty}^{\infty} q(x-t)\,p(t)\,dt$. **3.212.** Покажите, что для любых a и b, таких, что $b > a$, справедливо $\mathbf{P}(a \leqslant \xi \leqslant b) > 0$ и $\mathbf{P}(a \leqslant \eta \leqslant b) > 0$, и воспользуйтесь задачей 3.211. **3.213.** $\mathbf{P}(\xi-\eta=0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi-\eta=0,\ \xi=i) =$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi=i,\ \eta=i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi=i)\,\mathbf{P}(\eta=i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i^2$$

3.214. Заметим, что случайная величина $-\eta$ имеет плотность распределения $p(-x)$. Имеем

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y-x)\,p(-x)\,dx, \quad \text{откуда} \quad q(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(x)\,dx.$$

3.215. Пусть $F_i(x)$ и $G_i(x)$ — функции распределения случайных величин ξ_i и η_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ соответственно. Тогда условие задачи можно записать как $F_i(x) \leqslant G_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, а доказываемое неравенство как $F_1 * \ldots * F_n(x) \leqslant G_1 * \ldots * G_n(x)$. Доказательство будем вести по индукции. Пусть $F_1 * \ldots * F_k(x) \leqslant G_1 * \ldots * G_k(x)$. Имеем

$$F_1 * \ldots * F_{k+1}(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_{k+1}(x-t)\,dF_1 * \ldots * F_k(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} G_{k+1}(x-t)\,dF_1 * \ldots * F_k(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_1 * \ldots * F_k(x-t)\,dG_{k+1}(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} G_1 * \ldots * G_k(x-t)\,dG_{k+1}(t) =$$

$$= G_1 * \ldots * G_{k+1}(x).$$

3.216. Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F(x)$ — функции распределения случайных величин ξ, η и $\xi+\eta$ соответственно. Для любого a имеем

$$\mathbf{P}(a \leqslant \xi+\eta \leqslant a+x) =$$

$$= F(a+x) - F(a-0) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(F_1(a+x-t) - F_1(a-t-0)\big)\,dF_2(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(a \leqslant \xi \leqslant a+x)\,dF_2(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} Q_\xi(x)\,dF_2(t) = Q_\xi(x)\int_{-\infty}^{\infty} dF_2(t) = Q_\xi(x).$$

В силу произвольности a это означает, что $Q_{\xi+\eta}(x) \leqslant Q_\xi(x)$. Аналогично доказывается, что $Q_{\xi+\eta}(x) \leqslant Q_\eta(x)$. **3.217.** Для любых положительных x_1, x_2 и любых a, b имеем

$$\mathsf{P}(a \leqslant \xi_1 \leqslant a + x_1)\,\mathsf{P}(b \leqslant \xi_2 \leqslant b + x_2) = \mathsf{P}(a \leqslant \xi_1 \leqslant a + x_1,\ b \leqslant \xi_2 \leqslant b + x_2) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}(a + b \leqslant \xi_1 + \xi_2 \leqslant a + b + x_1 + x_2) = Q_{\xi_1+\xi_2}(x_1 + x_2).$$

В силу произвольности a и b это означает, что $Q_{\xi_1}(x_1)\,Q_{\xi_2}(x_2) \leqslant Q_{\xi_1+\xi_2}(x_1 + x_2)$. **3.219.** Для произвольной случайной величины η положим $\mathbf{Q}_\eta(A) = \sup\limits_a \mathsf{P}(\eta \in A + a)$. Пусть F_1 и F_2 — распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 соответственно. Имеем $1 - \varepsilon < \mathsf{P}(\xi \in A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(A - x)\,dF_2(x) \leqslant$ $\leqslant \mathbf{Q}_{\xi_1}(A) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF_2(x) = \mathbf{Q}_{\xi_1}(A)$. **3.220.** Для любого x имеем $q(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x-t)\,dF(t)$, где $F(t)$ — функция распределения случайной величины η. Таким образом, $q(x) \leqslant \sup\limits_x p(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF(t) = \sup\limits_x p(x)$. **3.221.** В качестве вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ возьмем множество $\Omega = \{1, 2, 3\}$ с σ-алгеброй всех подмножеств Ω и мерой P, определяемой равенствами $\mathsf{P}(\{1\}) = \mathsf{P}(\{3\}) = 1/4$, $\mathsf{P}(\{2\}) = 1/2$. Положим $\mathsf{P}(\xi = 0) = \mathsf{P}(\xi = 2) = 1/4$, $\mathsf{P}(\xi = 1) = 1/2$. Тогда функция распределения случайной величины ξ есть

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1/4 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 3/4 & \text{при } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 2 \end{cases}$$

и представима в виде свертки $F = G * G$, где

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1, \end{cases}$$

но на указанном вероятностном пространстве вообще не существует двух независимых невырожденных случайных величин. **3.222.** Предположим противное: $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда $\mathsf{E}\xi_1 = \frac{1}{n}\mathsf{E}\xi = \frac{a}{n}$, $\mathsf{D}\xi_1 = \frac{1}{n}\mathsf{D}\xi = \frac{b}{n}$ и, следовательно,

$$\mathsf{D}\xi_1 > \mathsf{E}\xi_1. \tag{1}$$

С другой стороны, в силу задачи 3.204 $\mathsf{P}\left(0 < \xi_1 < \frac{c}{n}\right) = 1$ и, значит (поскольку $n \geqslant c$), $\mathsf{P}(0 < \xi_1 < 1) = 1$, поэтому в силу задачи 3.66 $\mathsf{D}\xi_1 < \mathsf{E}\xi_1$, что противоречит (1). **3.223.** Воспользуйтесь тем, что если ξ принимает целые неотрицательные значения и $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые невырожденные случайные величины, то существуют независимые невырожденные случайные величины ξ_1' и ξ_2', принимающие целые неотрицательные значения, такие, что $\xi=\xi_1'+\xi_2'$. 3.224. Предположим противное: $\xi=\xi_1+\xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые невырожденные случайные величины. Очевидно, ξ_1 и ξ_2 дискретны. В силу невырожденности существуют a_1, a_2, b_1 и b_2, такие, что $a_1<a_2$, $b_1<b_2$ и

$$\mathsf{P}(\xi_1=a_1)>0,\quad \mathsf{P}(\xi_1=a_2)>0, \tag{1}$$

$$\mathsf{P}(\xi_2=b_1)>0,\quad \mathsf{P}(\xi_2=b_2)>0, \tag{2}$$

но $a_1+b_1<a_1+b_2<a_2+b_2$ и в силу (1) и (2) $\mathsf{P}(\xi=a_1+b_1)>0$, $\mathsf{P}(\xi=a_1+b_2)>0$, $\mathsf{P}(\xi=a_2+b_2)>0$. Получили противоречие с тем, что ξ принимает ровно два значения. 3.225. $p_2=2(\sqrt{p_1}-p_1)$, $p_3=1+p_1-2\sqrt{p_1}$. 3.226. Пусть $F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ — функции распределения случайных величин ξ, η и $\xi+\eta$ соответственно. Для любых $x_1>x_2$ функция $f(t)=F(x_1-t)-F(x_2-t)$ строго положительна, поэтому $H(x_1)-H(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}(F(x_1-t)-F(x_2-t))\,dG(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dG(t)>0$. 3.227. $\mathsf{P}(\xi+\eta\sqrt{2}=0)=\sum_{k=-\infty}^{k-\infty}\mathsf{P}(\xi+\eta\sqrt{2}=0,\ \eta=k)=\mathsf{P}(\xi=0,\ \eta=0)+\sum_{k\neq 0}\mathsf{P}(\xi+\eta\sqrt{2}=0,\ \eta=k)$. Каждое слагаемое в последней сумме равно нулю, так как при $k\neq 0$ $\mathsf{P}(\xi+\eta\sqrt{2}=0,\ \eta=k)=\mathsf{P}(\xi=-k\sqrt{2},\ \eta=k)\leqslant\mathsf{P}(\xi=-k\sqrt{2})=0$, следовательно, $\mathsf{P}(\xi+\eta\sqrt{2}=0)=\mathsf{P}(\xi=0,\ \eta=0)=\mathsf{P}(\xi=0)\mathsf{P}(\eta=0)$. 3.228. $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i=0\right)=\sum\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}(\xi_i=k_i)$, где суммирование ведется по всем наборам $k_1,\ldots,k_n$, таким, что $\sum_{i=1}^{n}a_ik_i=0$. Но в силу рациональной независимости чисел $a_1,\ldots,a_n$ последнее равенство может выполняться только при $k_1=\ldots=k_n=0$, следовательно, $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i=0\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}(\xi_i=0)$. Но, очевидно, для любых вещественных $b_1,\ldots,b_n$ $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\xi_i=0\right)\geqslant\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}(\xi_i=0)$. 3.229. Неравенство $\sup_x\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i=x\right)\geqslant\prod_{i=1}^{n}\sup_{k_i}\mathsf{P}(\xi_i=k_i)$ очевидно. Докажем, что $\sup_x\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i=x\right)\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sup_{k_i}\mathsf{P}(\xi_i=k_i)$. Для этого достаточно показать, что для любого x, такого, что $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i=x\right)>0$, существует только один набор $k_1,\ldots,k_n$, такой, что $\mathsf{P}(\xi_i=k_i)>0$ и $x=\sum_{i=1}^{n}a_ik_i$. Действительно, пусть существует второй такой набор: $m_1,\ldots,m_n$ (существует по крайней мере одно i, такое, что $k_i\neq m_i$). Имеем $\sum_{i=1}^{n}a_ik_i=\sum_{i=1}^{n}a_im_i$ или $\sum_{i=1}^{n}a_i(k_i-m_i)=0$, что противоречит рациональной независимости чисел $a_1, \ldots, a_n$. **3.230.** а) $V(\xi) = \sum_k |\mathbf{P}(\xi = k+1) - \mathbf{P}(\xi = k)| \leqslant \sum_k (\mathbf{P}(\xi = k+1) + \mathbf{P}(\xi = k)) = \sum_k \mathbf{P}(\xi = k+1) + \sum_k \mathbf{P}(\xi = k) = 2$. б) Имеем $\mathbf{P}(\xi + \eta = k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k-n)\,\mathbf{P}(\eta = n)$, поэтому

$$V(\xi+\eta) = \sum_k |\mathbf{P}(\xi+\eta = k) - \mathbf{P}(\xi+\eta = k+1)| =$$

$$= \sum_k \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbf{P}(\xi = k-n)\,\mathbf{P}(\eta = n) - \mathbf{P}(\xi = k+1-n)\,\mathbf{P}(\eta = n)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sum_n |\mathbf{P}(\xi = k-n) - \mathbf{P}(\xi = k+1-n)|\,\mathbf{P}(\eta = n) =$$

$$= \sum_n \sum_k |\mathbf{P}(\xi = k-n) - \mathbf{P}(\xi = k+1-n)|\,\mathbf{P}(\eta = n) = V(\xi) \sum_n \mathbf{P}(\eta = n) = V(\xi).$$

Аналогично доказывается, что $V(\xi+\eta) \leqslant V(\eta)$. **3.231.** Примените задачу 3.88. **3.232.** Покажем, что $m\xi - \mathbf{E}\xi \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}\xi}$. Действительно, событие $\{m\xi - \mathbf{E}\xi \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}\xi}\}$ имеет, очевидно, вероятность 0 или 1. Имеем $m\xi - \mathbf{E}\xi = m\xi - \xi + \xi - \mathbf{E}\xi$. Но $\mathbf{P}(m\xi - \xi \leqslant 0) \geqslant 1/2$, $\mathbf{P}(\xi - \mathbf{E}\xi \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}\xi}) > 1/2$ (в силу неравенства Чебышёва), следовательно, $\mathbf{P}(m\xi - \mathbf{E}\xi \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}\xi}) \geqslant \mathbf{P}(\{m\xi - \xi \leqslant 0\} \cap \{\xi - \mathbf{E}\xi \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}\xi}\}) > 0$, и поэтому $\mathbf{P}(m\xi - \mathbf{E}\xi \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}\xi}) = 1$. Аналогично доказывается, что $m\xi - \mathbf{E}\xi \geqslant -\sqrt{2\mathbf{D}\xi}$. **3.233.** Воспользуйтесь тем, что $\xi \leqslant \max\{0, \xi\}$. **3.234.** Используйте схему доказательства неравенства Чебышёва. **3.235.** См. указание к предыдущей задаче. **3.236.** Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Имеем

$$\mathbf{E}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x) \geqslant \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dF(x) \geqslant f(a) \int_{-\infty}^{a} dF(x) = f(a)\,\mathbf{P}(\xi \leqslant a),$$

откуда следует нужное неравенство. **3.237.** Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{D}\xi = 1$. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Фиксируем $x > 0$. Для любого $b \geqslant 0$ имеем

$$1 + b^2 \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} (y-b)^2\,dF(y) \geqslant \int_{-\infty}^{-x} (y-b)^2\,dF(y) \geqslant (x+b)^2 F(-x)$$

или $F(-x) \leqslant (1+b^2)(x+b)^{-2}$. Полагая $b = 1/x$, получим $F(-x) \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$.

Аналогично доказывается второе неравенство. **3.241.** а) Очевидно, $m\xi_1 = m\xi_2$. Имеем

$$\mathbf{P}(\xi_1 - \xi_2 \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}((\xi_1 - m\xi_1) - (\xi_2 - m\xi_2) \geqslant \varepsilon) \geqslant \mathbf{P}(\xi_1 - m\xi_1 \geqslant \varepsilon,\ \xi_2 - m\xi_2 \leqslant 0) =$$

$$= \mathbf{P}(\xi_1 - m\xi_1 \geqslant \varepsilon)\,\mathbf{P}(\xi_2 - m\xi_2 \leqslant 0) \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{P}(\xi_1 - m\xi_1 \geqslant \varepsilon).$$

б) Заменяя в неравенстве а) ξ_i на $-\xi_i$, $i = 1, 2$, получим $\frac{1}{2}\mathbf{P}(\xi_1 - m\xi_1 \leqslant -\varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\xi_1 - \xi_2 \leqslant -\varepsilon)$, отсюда и из неравенства а) получаем нужное соотношение. **3.242.** $\mathbf{P}(|\xi_1 - \xi_2| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(|(\xi_1 - a) - (\xi_2 - a)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(|\xi_1 - a| \geqslant \varepsilon/2) + \mathbf{P}(|\xi_2 - a| \geqslant \varepsilon/2) = 2\mathbf{P}(|\xi_1 - a| \geqslant \varepsilon/2)$. **3.243.** Имеем $\mathbf{P}(\xi + \eta \geqslant a) \geqslant$

$\geqslant \mathbf{P}(\xi \geqslant a,\ \eta \geqslant 0) = \mathbf{P}(\xi \geqslant a)\,\mathbf{P}(\eta \geqslant 0) \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{P}(\xi \geqslant a)$. Второе неравенство следует из первого. **3.244.** $\mathbf{P}(|\xi_1| \leqslant x_1)\mathbf{P}(|\xi_2| \leqslant x_2) = \mathbf{P}(|\xi_1| \leqslant x_1,\ |\xi_2| \leqslant x_2) \leqslant \mathbf{P}(|\xi_1| + |\xi_2| \leqslant x_1 + x_2) \leqslant \mathbf{P}(|\xi_1 + \xi_2| \leqslant x_1 + x_2)$. **3.245.** Имеем

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\eta_k| > \varepsilon\right) = \mathbf{P}(\{|\eta_1| > \varepsilon\} \cup \ldots \cup \{|\eta_n| > \varepsilon\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\{|\xi_1| > \varepsilon\} \cup \{|\xi_1 + \xi_2| > \varepsilon\} \cup \ldots \cup \{|\xi_1 + \ldots + \xi_n| > \varepsilon\}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(|\xi_1| + \ldots + |\xi_n| > \varepsilon),$$

откуда, применяя неравенство Чебышёва, получаем

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\eta_k| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|)}{\varepsilon} = \frac{\mathbf{E}|\xi_1| + \ldots + \mathbf{E}|\xi_n|}{\varepsilon}.$$

3.246. Положим $\eta_0 = 0$ и рассмотрим события $C_k = \left\{\sup_{j<k} |\eta_j| < \varepsilon,\ |\eta_k| \geqslant \varepsilon\right\}$, $C = \left\{\sup_{k \leqslant n} |\eta_k| \geqslant c\right\}$. Тогда $\mathbf{E}|\eta_n|^r I_C = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|\eta_n|^r I_{C_k}$. Но в силу задачи 3.129 $\mathbf{E}|\eta_n|^r \geqslant \mathbf{E}|\eta_k|^r$, поэтому $\mathbf{E}|\eta_n|^r I_C \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|\eta_k|^r I_{C_k} \geqslant \varepsilon^r \mathbf{P}(C)$, откуда следует нужное неравенство. **3.247.** Это *неравенство Леви* для случайных величин с симметричными распределениями (обобщение см. в следующей задаче). **3.248.** а) Положим $\eta_0 = 0$, $\eta_k^* = \max_{j \leqslant k} (\eta_j - m(\eta_j - \eta_n))$ и рассмотрим события

$$A_k = \{\eta_{k-1}^* < \varepsilon,\ \eta_k - m(\eta_k - \eta_n) \geqslant \varepsilon\},\quad B_k = \{\eta_n - \eta_k - m(\eta_n - \eta_k) \geqslant 0\}.$$

События A_k не пересекаются и $\{\eta_n^* \geqslant \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k B_k \subset \{\eta_n \geqslant \varepsilon\}$. Кроме того, очевидно, $\mathbf{P}(B_k) \geqslant 1/2$ для любого k. Учитывая, что при каждом k события A_k и B_k независимы (первое зависит только от $\xi_1, \ldots, \xi_k$, а второе — от $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$), окончательно получаем $\mathbf{P}(\eta_n \geqslant \varepsilon) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)\,\mathbf{P}(B_k) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(\eta_n^* \geqslant \varepsilon)$, что доказывает неравенство а).

Изменяя знаки всех случайных величин в неравенстве а) и комбинируя полученные неравенства, получим неравенство б). **3.249.** В силу задачи 3.232 $|m(\eta_k - \eta_n)| \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}(\eta_n - \eta_k)} \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}\eta_n}$. Применяя неравенство а) задачи 3.248 и заменяя ε на $\varepsilon - \sqrt{2\mathbf{D}\eta_n}$, получим нужное неравенство. **3.250.** Пусть $F_{n,r}(x)$ и $G_{n,r}(x)$ — функции распределения случайных величин $\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\eta_k|^r$ и $|\eta_n|^r$ соответственно. Используя задачи 3.89 и 3.248, получим $\mathbf{E}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\eta_k|^r\right) = \int_0^\infty (1 - F_{n,r}(x))\,dx \leqslant 2\int_0^\infty (1 - G_{n,r}(x))\,dx = 2\mathbf{E}|\eta_n|^r$. **3.251.** Рассмотрите симметризованные случайные величины и воспользуйтесь предыдущей задачей. **3.252.** Заметим, что $\mathbf{E}\varphi(\xi) = \mathbf{E}\varphi(|\xi|)$ и $\mathbf{E}\varphi(\eta) = \mathbf{E}\varphi(|\eta|)$. Положим $R(x) = \mathbf{P}(|\xi| \leqslant x) - \mathbf{P}(|\eta| \leqslant x)$. Очевидно, $R(x) \geqslant 0$. Имеем $\mathbf{E}\varphi(\xi) - \mathbf{E}\varphi(\eta) =$

$= \mathsf{E}\varphi(|\xi|) - \mathsf{E}\varphi(|\eta|) = \int_0^\infty \varphi(x)\,dR(x) = -\int_0^\infty R(x)\,d\varphi(x)$. Но в силу неотрицательности $R(x)$ и убывания $\varphi(x)$ $\int_0^\infty R(x)\,d\varphi(x) \leqslant 0$, следовательно, $\mathsf{E}\varphi(\xi) - \mathsf{E}\varphi(\eta) \geqslant 0$. 3.253. Для любого борелевского множества A имеем $|\mathsf{F}(A) - \mathsf{G}(A)| = |\mathsf{F}(A) - \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(A) - \mathsf{G}(A)| \leqslant |\mathsf{F}(A) - \mathsf{P}(A)| + |\mathsf{P}(A) - \mathsf{G}(A)| \leqslant \mathrm{Var}(\mathsf{F}, \mathsf{P}) + \mathrm{Var}(\mathsf{P}, \mathsf{G})$. В силу произвольности A отсюда следует нужное неравенство. Для равномерного расстояния доказательство аналогично. 3.254. Обозначим $B = \{x\colon p(x) \geqslant q(x)\}$. Имеем

$$|\mathsf{P}(A) - \mathsf{Q}(A)| = |\mathsf{P}(AB) - \mathsf{Q}(AB) + \mathsf{P}(A\bar{B}) - \mathsf{Q}(A\bar{B})|. \qquad (1)$$

Заметим, что $\mathsf{P}(AB) - \mathsf{Q}(AB) \geqslant 0$, а $\mathsf{P}(A\bar{B}) - \mathsf{Q}(A\bar{B}) \leqslant 0$. Пусть для определенности $|\mathsf{P}(AB) - \mathsf{Q}(AB)| \geqslant |\mathsf{P}(A\bar{B}) - \mathsf{Q}(A\bar{B})|$. Тогда из (1) следует, что $|\mathsf{P}(A) - \mathsf{Q}(A)| \leqslant \mathsf{P}(AB) - \mathsf{Q}(AB) = \int_{AB} (p(x) - q(x))\,dx \leqslant \int_B (p(x) - q(x))\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |p(x) - q(x)|\,dx$. 3.255. См. решение предыдущей задачи.

3.256. $\left|\Phi\left(\frac{\sigma_2\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}\sqrt{\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma_2\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}\sqrt{\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\right)\right|$, где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения. 3.257. ρ. 3.258. $\frac{1}{2}\left|1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right|$.

3.259. Распределение с плотностью $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}\right)$.

3.260. $F(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2}$. 3.261. Равномерное распределение на отрезке $[-\sqrt{ab}, \sqrt{ab}]$. 3.262. Из определения метрики Леви следует, что для любого $h > L(F, H)$ и любого x

$$H(x - h) - h \leqslant F(x) \leqslant H(x + h) + h, \qquad (1)$$

а для любого $h' > L(G, H)$ и любого y

$$G(y - h') - h' \leqslant H(y) \leqslant G(y + h') + h'. \qquad (2)$$

Положим в (2) $y = x - h$. Из левых неравенств (1) и (2) получаем $G(x - (h + h')) - (h + h') = G(x - h - h') - h - h' \leqslant H(x - h) - h \leqslant F(x)$. Аналогично, положив в (2) $y = x + h$, получим $F(x) \leqslant G(x + h + h') + h + h'$. Из последних двух неравенств следует нужное соотношение.

3.263. $\frac{\sqrt{3}(\sigma_2 - \sigma_1)}{1 + 2\sqrt{3}\sigma_2}$. 3.264. Из условия задачи следует, что $\mathsf{P}(\xi \geqslant \eta + \varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и $\mathsf{P}(\xi \leqslant \eta - \varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Из первого неравенства получаем $\mathsf{P}(\xi \leqslant x) \geqslant \mathsf{P}(\eta + \varepsilon \leqslant x) - \varepsilon = \mathsf{P}(\eta \leqslant x - \varepsilon) - \varepsilon$ для любого x. Аналогично из второго — $\mathsf{P}(\xi \leqslant x) \leqslant \mathsf{P}(\eta \leqslant x + \varepsilon) + \varepsilon$, т. е. $G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant G(x + \varepsilon) + \varepsilon$, откуда $L(F, G) \leqslant \varepsilon$. 3.265. Для любого борелевского множества A, применяя формулу полной вероятности, получаем

$$|\mathsf{P}(\xi \in A) - \mathsf{P}(\eta \in A)| =$$
$$= |\mathsf{P}(\xi \in A \mid \xi = \eta)\mathsf{P}(\xi = \eta) + \mathsf{P}(\xi \in A \mid \xi \neq \eta)\mathsf{P}(\xi \neq \eta) -$$

$$-\mathbf{P}(\eta\in A\,|\,\xi=\eta)\mathbf{P}(\xi=\eta)-\mathbf{P}(\eta\in A\,|\,\xi\neq\eta)\mathbf{P}(\xi\neq\eta)|=$$
$$=|\mathbf{P}(\xi\in A\,|\,\xi\neq\eta)\mathbf{P}(\xi\neq\eta)-\mathbf{P}(\eta\in A\,|\,\xi\neq\eta)\mathbf{P}(\xi\neq\eta)|=$$
$$=\mathbf{P}(\xi\neq\eta)\,|\mathbf{P}(\xi\in A\,|\,\xi\neq\eta)-\mathbf{P}(\eta\in A\,|\,\xi\neq\eta)|\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}(\xi\neq\eta)\max\{\mathbf{P}(\xi\in A\,|\,\xi\neq\eta),\ \mathbf{P}(\eta\in A\,|\,\xi\neq\eta)\}\leqslant\mathbf{P}(\xi\neq\eta).$$

3.266. Докажем левое неравенство. Положим $h=\sup\limits_x|F(x)-G(x)|$. Тогда $G(x)\leqslant F(x)+h$ и $F(x)\leqslant G(x)+h$ и, следовательно, $G(x-h)-h\leqslant G(x)-h\leqslant F(x)+h-h=F(x)\leqslant G(x+h)\leqslant G(x+h)+h$. Докажем правое неравенство. Для любого $h>L(G,F)$ $G(x-h)-h\leqslant F(x)\leqslant G(x+h)+h$ и, следовательно, $F(x)-G(x)\leqslant G(x+h)-G(x)+h\leqslant\sup\limits_x G'(x)\,h+h$. Аналогично $F(x)-G(x)\geqslant-\sup\limits_x G'(x)-h$. **3.267.** Не ограничивая общности, можно считать, что $L(F,G)>0$. Для любого положительного $h<L(F,G)$ существует такое x_h, что верно одно из следующих двух неравенств:

$$F(x_h)<G(x_h-h)-h,\quad F(x_h)>G(x_h+h)+h.$$

Пусть, например, выполнено первое неравенство. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(x)-G(x)|\,dx\geqslant\int\limits_{x_h-h}^{x_h}(G(x)-F(x))\,dx\geqslant\int\limits_{x_h-h}^{x_h}(G(x)-F(x_h))\,dx>$$
$$>\int\limits_{x_h-h}^{x_h}(G(x)-G(x_h-h)+h)\,dx\geqslant h^2,$$

откуда следует нужное неравенство. **3.268.** Не ограничивая общности, можно считать, что математические ожидания, соответствующие функциям распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, равны нулю. Положим

$$h=(2\max\{\sigma_1,\ \sigma_2\})^{2/3},\quad A=\left\{x:|x|\geqslant\frac{h}{2}\right\}. \tag{1}$$

Из неравенства Чебышёва следует, что (см. задачу 3.65) $|F_1(x)-F_2(x)|\leqslant\dfrac{\max\{\sigma_1^2,\ \sigma_2^2\}}{x^2}$, поэтому $\sup\limits_{x\in A}|F_1(x)-F_2(x)|\leqslant h$. Следовательно, при всех $x\in A$

$$F_2(x-h)-h\leqslant F_1(x)\leqslant F_2(x+h)+h. \tag{2}$$

Если $x\notin A$, то, применяя неравенство Чебышева, получаем $1-F_2(x+h)\leqslant 1-F_2(h/2)\leqslant h$, $F_2(x-h)\leqslant F_2(h/2)\leqslant h$. Поэтому при $x\notin A$

$$F_2(x-h)-h\leqslant 0\leqslant F_1(x)\leqslant 1\leqslant F_2(x+h)+h. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) получаем нужное неравенство. **3.269.** Воспользуйтесь задачей 3.237. **3.270.** Для любого x имеем

$$|F_1*G(x)-F_2*G(x)|=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_1(x-t)\,dG(x)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_2(x-t)\,dG(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_1(x-t)-F_2(x-t)|\,dG(x)\leqslant\sup_x|F_1(x)-F_2(x)|\int\limits_{-\infty}^{\infty}dG(x)=\sup_x|F_1(x)-F_2(x)|.$$

3.271. $\operatorname{Var}(\mathbf{F}_1*\mathbf{G},\ \mathbf{F}_2*\mathbf{G})=\sup\limits_A\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}_1(A-x)\,\mathbf{G}(dx)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}_2(A-x)\,\mathbf{G}(dx)\right|\leqslant$

(sup берется по всем борелевским множествам A)

$$\leqslant \sup_A \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_1(A-x) - \mathbf{F}_2(A-x)|\,\mathbf{G}(dx) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Var}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)\,\mathbf{G}(dx) = \operatorname{Var}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2).$$

3.272. Положим $h = L(F_1, F_2)$. Имеем $F_1(x-h) - h \leqslant F_2(x) \leqslant F_1(x+h) + h$, откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-t)\,dG(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(x+h-t)+h)\,dG(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x+h-t)\,dG(t) + h$$

и аналогично $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-t)\,dG(t) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-h-t)\,dG(t) - h$. **3.273.** Примените индукцию и воспользуйтесь задачей 3.270. **3.274.** Воспользуйтесь задачей 3.271. **3.275.** Достаточно провести доказательство для случая $n = 2$ (далее по индукции). Воспользуемся задачами 3.272 и 3.262. Имеем $L(F_1 * F_2, G_1 * G_2) \leqslant$ $\leqslant L(F_1 * F_2, G_1 * F_2) + L(G_1 * F_2, G_1 * G_2) \leqslant L(F_1, G_1) + L(F_2, G_2)$. **3.276.** См. решение следующей задачи. **3.277.** Имеем $\operatorname{Var}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \sup_{A \in \mathfrak{B}} |\mathbf{F}(A) - \mathbf{G}(A)|$. Пусть A — произвольное борелевское множество. Имеем

$$\mathbf{F}*\mathbf{H}(A) - \mathbf{G}*\mathbf{H}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(A-x)\,\mathbf{H}(dx) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(A-x)\,\mathbf{H}(dx) =$$

$$= \int_{\{x=0\}} (\mathbf{F}(A) - \mathbf{G}(A))\,\mathbf{H}(dx) + \int_{\{x\neq 0\}} (\mathbf{F}(A-x) - \mathbf{G}(A-x))\,\mathbf{H}(dx) =$$

$$= (\mathbf{F}(A) - \mathbf{G}(A))\,\mathbf{P}(\zeta = 0) + \int_{\{x\neq 0\}} (\mathbf{F}(A-x) - \mathbf{G}(A-x))\,\mathbf{H}(dx),$$

откуда

$$|\mathbf{F}(A) - \mathbf{G}(A)| \leqslant |\mathbf{F}*\mathbf{H}(A) - \mathbf{G}*\mathbf{H}(A)| + \int_{\{x\neq 0\}} |\mathbf{F}(A-x) -$$

$$- \mathbf{G}(A-x)|\,\mathbf{H}(dx) \leqslant |\mathbf{F}*\mathbf{H}(A) - \mathbf{G}*\mathbf{H}(A)| + \mathbf{P}(\zeta \neq 0).$$

3.278. $a > 0$, $c > 0$, b — любое. **3.279.** Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. По неравенству Коши — Буняковского

$$\|\xi_1 \mathbf{E}\xi_1 + \ldots + \xi_n \mathbf{E}\xi_n\| \leqslant \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}\,\sqrt{(\mathbf{E}\xi_1)^2 + \ldots + (\mathbf{E}\xi_n)^2}$$

и, значит, $\dfrac{\|\xi_1\mathbf{E}\xi_1 + \ldots + \xi_n\mathbf{E}\xi_n\|}{\|\mathbf{E}\xi\|} \leqslant \|\xi\|$, откуда

$$\|\mathbf{E}\xi\| = \frac{\|\mathbf{E}\xi\|^2}{\|\mathbf{E}\xi\|} = \frac{\|(\mathbf{E}\xi_1)^2 + \ldots + (\mathbf{E}\xi_n)^2\|}{\|\mathbf{E}\xi\|} = \frac{\|\mathbf{E}(\xi_1\mathbf{E}\xi_1 + \ldots + \xi_n\mathbf{E}\xi_n)\|}{\|\mathbf{E}\xi\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathbf{E}\|\xi_1\mathbf{E}\xi_1 + \ldots + \xi_n\mathbf{E}\xi_n\|}{\|\mathbf{E}\xi\|} \leqslant \mathbf{E}\|\xi\|.$$

3.280. Каждая функция распределения G в $\mathbb{R}^2$ должна удовлетворять условию $G(x_2, y_2) - G(x_2, y_1) - G(x_1, y_2) + G(x_1, y_1) \geqslant 0$ при любых $x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$. **3.282.** $f(x, y) = 1$ в квадрате с вершинами в точках $(\sqrt{2}/2, 0)$, $(0, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, 0)$, $(0, -\sqrt{2}/2)$ и $f(x, y) = 0$ вне этого квадрата. Другой пример: $f(x, y) = 1$ в единичном круге и $f(x, y) = 0$ вне этого круга; здесь непрерывны плотности всех проекций. **3.283.** Маргинальные распределения этих двумерных распределений совпадают: оба они равны равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$. **3.284.** 0. **3.285.** $+1$ или -1.

$$
3.286.\quad \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{c^2-a^2-b^2}{2ab} & \dfrac{b^2-a^2-c^2}{2ac} \\ \dfrac{c^2-a^2-b^2}{2ab} & 1 & \dfrac{a^2-b^2-c^2}{2bc} \\ \dfrac{b^2-a^2-c^2}{2ac} & \dfrac{a^2-b^2-c^2}{2bc} & 1 \end{Vmatrix}.
$$

3.287. $p(x, y) = 2\left(2\alpha - \dfrac{x^2+y^2}{2}\sin\alpha\right)$, где $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, при $x^2+y^2 \leqslant 4$ и $p(x, y) = 0$ при остальных x. 3.288. σ-алгебра, порожденная случайной величиной $\langle\xi, e\rangle$, содержится в σ-алгебре, порожденной случайным вектором ξ, и аналогично для $\langle\eta, x\rangle$ и η. 3.289. Вообще говоря, нет. 3.290. $\mathsf{P}(\langle\xi, e\rangle = 0) = \mathsf{P}(\langle\xi, e\rangle = 3) = 1/6$, $\mathsf{P}(\langle\xi, e\rangle = 1) = \mathsf{P}(\langle\xi, e\rangle = 2) = 1/3$. 3.291. Распределение с плотностью $p(x) = 2x+1$ при $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$ и $p(x) = 0$ при остальных x. 3.292. Маргинальные плотности совпадают и равны e^{-x} при $x \geqslant 0$ и 0 при $x < 0$. 3.293. Нет. 3.294. $F_2(x, y) = F(\min\{x, y\})$.

3.295. Нет. 3.296. $F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -y,\ y < 0, \\ F(x) - F(-y) & \text{при } -y < x < y,\ y \geqslant 0, \\ F(y) - F(-y) & \text{при } x \geqslant y,\ y \geqslant 0. \end{cases}$

3.297. $G(x, y) = (F(y))^n - (F(y) - F(x))^n$ при $x < y$ и $G(x, y) = (F(y))^n$ при $x \geqslant y$. 3.298. Пусть

$$
\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$
\mathsf{E}\xi = \begin{pmatrix} \mathsf{E}\xi_1 \\ \vdots \\ \mathsf{E}\xi_n \end{pmatrix}, \quad A\xi = \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\xi_1 + \ldots + a_{mn}\xi_n \end{pmatrix},
$$

$$
\mathsf{E}(A\xi) = \begin{pmatrix} a_{11}\mathsf{E}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\mathsf{E}\xi_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\mathsf{E}\xi_1 + \ldots + a_{mn}\mathsf{E}\xi_n \end{pmatrix}
$$

и

$$
A(\mathsf{E}\xi) = \begin{pmatrix} a_{11}\mathsf{E}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\mathsf{E}\xi_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\mathsf{E}\xi_1 + \ldots + a_{mn}\mathsf{E}\xi_n \end{pmatrix}.
$$

3.299. Покажите, что для любого не более чем счетного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ найдется единичный вектор e, такой, что проекции всех элементов A на прямую, порожденную вектором e, различны. 3.300. Пусть P — распределение. Рассмотрим поворот пространства вокруг начала координат, при котором единичный вектор e переходит в вектор $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Пусть $P_{(e)}$ — распределение, в которое при данном повороте переходит распределение P. Покажите, что $(P*Q)_{(e)} = P_{(e)}*Q_{(e)}$. 3.301. Имеем

$$\mathsf{E}\xi_i\xi_j = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_ix_jdF = \int\limits_{\substack{\{x_i\geqslant 0,\ x_j\geqslant 0\}\\ \{x_i<0,\ x_j<0\}}} x_ix_jdF + \int\limits_{\substack{\{x_i>0,\ x_j<0\}\\ \{x_i<0,\ x_j>0\}}} x_ix_jdF.$$

Последние два интеграла имеют противоположные знаки и равны по абсолютной величине. 3.302. Среди этих $n+1$ векторов найдется по крайней мере один такой, что проекции всех n точек на него различны. 3.303. Пусть ξ' и ξ'' — независимые одномерные случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение. Можно положить $\xi = (\xi', 0)$, $\eta = (0, \xi'')$. 3.304. Нет.

3.305. Да. 3.306. Легко проверить, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$ и в силу условия $|u(x)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ функция $f(x, y)$ всюду неотрицательна. Найдем маргинальные распределения $f(x, y)$:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + u(x)\,u(y)\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy + u(x)\int\limits_{-1}^{1} u(y)\,dy =$$

(в силу нечетности функции $u(y)$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Аналогично $f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. 3.307. $\mathsf{E}\langle\xi, e\rangle = 0$, $\mathsf{D}\langle\xi, e\rangle = 1$. 3.308. $F(x, y) = G(x)B(y)$, где $B(x)$ — функция распределения случайной величины, принимающей значения 1 и -1 с вероятностью 1/2 каждое, $G(x) = 2\Phi(e^x) - 1$, $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения. 3.310. Распределение ξ инвариантно относительно поворотов вокруг начала координат. 3.311. $g(u, v) = f(u)f(v)f(-u-v)$. 3.312. Для доказательства достаточности рассмотрите многомерное нормальное распределение; по поводу необходимости см. задачу 3.147. 3.313. Воспользуемся задачей 3.150. Имеем

$$\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\sqrt{\mathsf{D}\xi} \text{ или }$$

$$|\eta - \mathsf{E}\eta| \geqslant \varepsilon\sqrt{\mathsf{D}\eta}) = \mathsf{P}\left((\xi - \mathsf{P}\xi)^2 \geqslant \varepsilon^2\mathsf{D}\xi \text{ или } (\eta - \mathsf{E}\eta)^2 \geqslant \varepsilon^2\mathsf{D}\eta\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\max\left\{\left(\frac{\xi - \mathsf{E}\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}}\right)^2, \left(\frac{\eta - \mathsf{E}\eta}{\sqrt{\mathsf{D}\eta}}\right)^2\right\} \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathsf{E}\max\left\{\left(\frac{\xi - \mathsf{E}\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}}\right)^2, \left(\frac{\eta - \mathsf{E}\eta}{\sqrt{\mathsf{D}\eta}}\right)^2\right\}}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1 + \sqrt{1-\rho^2}}{\varepsilon^2}.$$

3.314. Обратное, вообще говоря, неверно. Если элементы матрицы имеют различные математические ожидания, то утверждение задачи, вообще говоря, неверно. 3.315. N^{1-n}. 3.316. Легко видеть, что $\mathsf{P}(\eta_n$ делится на $n) > \mathsf{P}(\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n)$. Отсюда, используя результат предыдущей задачи, получаем нужное неравенство. 3.317. а) 1/2, б) 1/2 (случайная величина $f(x)$ имеет симметричное распределение при любом x), в) 1/2, г) 1/2. 3.318. Если $a = 0$, то утверждение очевидно. Если $a > 0$, то

$$\mathsf{P}(a\xi \geqslant am\xi) = \mathsf{P}(\xi \geqslant m\xi) \geqslant 1/2, \quad \mathsf{P}(a\xi \leqslant am\xi) = \mathsf{P}(\xi \leqslant m\xi) \geqslant 1/2.$$

Если $a < 0$, то

$$\mathsf{P}(a\xi \geqslant am\xi) = \mathsf{P}(\xi \leqslant m\xi) \geqslant 1/2, \quad \mathsf{P}(a\xi \leqslant am\xi) = \mathsf{P}(\xi \geqslant m\xi) \geqslant 1/2.$$

3.319. Следует из задачи 3.104. **3.320.** Достаточно доказать для случая $n = 2$ (в общем случае доказывается по индукции). Имеем

$$\mathsf{E}(\xi_1 + \xi_2)^3 = \mathsf{E}\left(\xi_1^3 + 3\xi_1^2\xi_2 + 3\xi_1\xi_2^2 + \xi_2^3\right) = \mathsf{E}\xi_1^3 + 3\mathsf{E}\xi_1^2\mathsf{E}\xi_2 + 3\mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2^2 + \mathsf{E}\xi_2^3 = \\ = \mathsf{E}\xi_1^3 + \mathsf{E}\xi_2^3.$$

3.321. Обозначим $F(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции распределения случайных величин ξ, ξ_1 и ξ_2 соответственно. Имеем

$$1/4 \leqslant F_1(\lambda_1 + 0) F_2(\lambda_2 + 0) \leqslant \int_{-\infty}^{\lambda_2+0} F_1(\lambda_1 + \lambda_2 - s + 0)\, dF_2(s) \leqslant F(\lambda_1 + \lambda_2 + 0)$$

и

$$1/4 \leqslant (1 - F_1(\lambda))(1 - F_2(\lambda)) \leqslant \int_{\lambda_2}^{\infty} (1 - F_1(\lambda_1 + \lambda_2 - s))\, dF_2(s) \leqslant 1 - F(\lambda_1 + \lambda_2).$$

3.322. σ^2. **3.323.** Воспользуйтесь неравенством Чебышёва. **3.324.** Воспользуйтесь обобщенным неравенством Чебышёва (задача 3.235). **3.325.** Воспользуйтесь неравенством Чебышёва. **3.326.** Продифференцируйте выражение

$$\mathsf{E}(\eta - a\xi - b)^2 \tag{1}$$

под знаком математического ожидания по a и b, приравняйте производные нулю и из полученных уравнений найдите a_0 и b_0, при которых (1) достигает минимального значения. **3.327.** Имеем

$$\sum_{i,k=0}^{m} \alpha_{i+k} x_i x_k = \sum_{i,k=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} y^{i+k} dF(y)\, x_i x_k = \sum_{i,k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^i x_i y^k x_k\, dF(y) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_0 + x_1 y + \ldots + x_m y^m\right)^2 dF(y) > 0$$

(строгое неравенство следует из непрерывности $F(x)$). **3.328.** $\mathsf{E}\nu = e$. **3.329.** $\xi = |\xi| \operatorname{sign} \xi$ и случайные величины $|\xi|$ и $\operatorname{sign} \xi$ независимы (см. решение задачи 3.146). Невырожденность распределений $|\xi|$ и $\operatorname{sign} \xi$ следует из того, что ξ принимает не менее трех значений. **3.330.** Приблизьте индикаторную функцию отрезка последовательностью непрерывных ограниченных функций. **3.331.** $\dfrac{(n+1)k}{2n}$. **3.332.** $\mathsf{P}(\eta_i = j) = 1/i$, $j = 1, 2, \ldots, i$, $i \geqslant 1$. **3.333.** а) 1, б) 1/2. **3.334.** Пусть $F_\nu(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... — функции распределения случайных величин η_ν, η_1, η_2, ... соответственно. Тогда

$$\mathsf{P}(\eta_\nu = x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\eta_k \leqslant x, \nu = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\eta_k \leqslant x)\, \mathsf{P}(\nu = k) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x)\, \mathsf{P}(\nu = k),$$

откуда получаем

$$\mathsf{E}\eta_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\eta_k \mathsf{P}(\nu = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathsf{E}\eta_1 \mathsf{P}(\nu = k) = \mathsf{E}\eta_1 \mathsf{E}\nu.$$

3.335. 0; $\sigma^{2n}n!$. **3.337.** Воспользуйтесь предыдущей задачей и тем, что сумма независимых случайных величин, имеющих симметричные одновершинные распределения, имеет симметричное одновершинное распределение (задачи 3.195 и 3.197). **3.339.** Воспользуйтесь задачей 3.223. **3.340.** Прежде всего уточним формулировку задачи: имеется в виду, что скорость — случайная величина, математическое ожидание которой равно 5 км/час.

Рассуждение неправомерно, так как, вообще говоря, $\mathsf{E}\frac{1}{\xi} \neq \frac{1}{\mathsf{E}\xi}$.

Глава 4

4.1. $z^n\varphi(z)$; $\varphi(z^n)$. **4.2.** а) распределение, приписывающее точкам 0, 1, 2 вероятности 1/4, 1/2, 1/4 соответственно, б) распределение, приписывающее каждой точке k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) вероятность pq^k (геометрическое распределение), в) распределение Пуассона с параметром λ, г) биномиальное распределение с параметрами p и n, д) распределение, приписывающее нечетным точкам $2k+1$ вероятности $\frac{2e}{(e^2-1)(2k+1)!}$ четным — нулевые, е) распределение, приписывающее каждой точке k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) вероятность $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Приведем, например, решение в случае е): $1 + \frac{1-z}{z}\ln(1-z) =$
$= 1 + \frac{1}{z}\ln(1-z) - \ln(1-z) = 1 - \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{z^i}{i} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{z^i}{i} = 1 - \sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{i+1} +$
$+ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{z^i}{i} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)z^i$. **4.3.** Распределение, сосредоточенное в точке 1. **4.4.** Производящая функция аналитична в области $|z| < 1$. **4.5.** Воспользуйтесь непрерывностью производящей функции. **4.6.** Пусть $\mathsf{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда $\varphi(1/2) \leqslant 1$, $\varphi(1/4) \leqslant 1/2, \ldots, \varphi(1/2n) \leqslant 1/2^{n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(1/2^n)$ сходится.

Обратно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(1/2^n)$ сходится, то для любого N

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(1/2^n) \geqslant \sum_{n=1}^{N}\varphi(1/2^n) \geqslant N\cdot\mathsf{P}(\xi = 0),$$

откуда получаем $\mathsf{P}(\xi = 0) = 0$. **4.7.** $0 \leqslant a/c \leqslant 1$, $-1 < d/c \leqslant 0$, $b/c = 1 - a/c + d/c$. **4.8.** Предположим, что такая случайная величина ζ существует. Обозначим $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\gamma(z)$ производящие функции ξ, ζ и η соответственно. Имеем

$$\varphi(z)\psi(z) = \gamma(z), \quad |z| \leqslant 1, \tag{1}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(1+z), \tag{2}$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{8}z^3. \tag{3}$$

Из (1) следует, что все корни уравнения $\varphi(z) = 0$ являются одновременно корнями уравнения $\gamma(z) = 0$. Но из (2) и (3) следует, что $\varphi(-1) = 0$, а $\gamma(-1) = 1/4$. **4.9.** Предположим, что такая случайная величина ζ существует. Обозначим $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\gamma(z)$ производящие функции ξ, ζ и η соответственно. Имеем $\varphi(z)\psi(z) = \gamma(z)$, $|z| \leqslant 1$, откуда $|\varphi(z)| \geqslant |\gamma(z)|$ (при всех $|z| \leqslant 1$), но $\varphi(-1) = 1/2 < 6/10 = \gamma(-1)$. **4.10.** Не ограничивая общности, можно считать, что ξ и η принимают целые неотрицательные значения. Пусть $\varphi(z) = \frac{1}{3}(1 + z + z^2)$ — производящая функция случайной величины $\xi + \eta$ и пусть

$\varphi_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $\varphi_2(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ — производящие функции ξ и η соответственно. Тогда $\frac{1}{3}(1+z+z^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ и, значит, $a_0 b_0 = 1/3$, $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 1/3$, $a_1 b_1 = 1/3$, откуда $a_1^2 b_0^2 + 2a_0 a_1 b_0 b_1 + a_0^2 b_1^2 = 1/9 = a_0 b_0 a_1 b_1$, что, очевидно, невозможно. **4.11.** Пусть $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots$ — вероятности, которые F_n приписывает точками $0, 1, 2, \ldots$, а $a_0, a_1, \ldots$ — вероятности, которые этим точкам приписывает распределение F. Достаточно доказать, что при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$ $a_k^{(n)} \to a_k$ при $n \to \infty$. Из условия задачи следует, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} z^i \to \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ при $n \to \infty$. Положив $z = 0$, получим $a_0^{(n)} \to a_0$, и, значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} z^i \to \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i. \tag{1}$$

Пусть $a_1^{(n)} \not\to a_1$. Тогда существуют $\delta > 0$ и подпоследовательность $a_1^{(n')}$, такие, что $|a_1^{(n')} - a_1| > \delta$ и, следовательно, существует подпоследовательность $a_1^{(n'')}$ такая, что либо $a_1^{(n'')} > a_1 + \delta$, либо $a_1^{(n'')} < a_1 - \delta$. Пусть, например, выполнено первое неравенство. Тогда при $z > 0$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(n'')} z^i > a_1 z + \delta z + \sum\limits_{i=2}^{\infty} a_i^{(n'')} z^i$. Выбирая z достаточно малым (так, чтобы $\sum\limits_{i=2}^{\infty} z^i < \frac{\delta}{2} z$), придем к противоречию с (1).

Для произвольного k доказательство проводится по индукции.

4.12. $\mathbf{P}(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\} \leqslant x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leqslant x)\, \mathbf{P}(\nu = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F^n(x)\, \mathbf{P}(\nu = n) = \varphi(F(x))$. **4.13.** $e^{itb} f(at)$. **4.14.** $f(-t)$ или, что то же самое, $\overline{f(t)}$. **4.15.** Воспользуйтесь предыдущей задачей. **4.16.** Воспользуйтесь задачей 4.14. **4.17.** $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx\, dF(x) + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin tx\, dF(x)$. **4.18.** $|f(t)|^2$. **4.19.** В случае а) функция четна, но не вещественна, в случае б) — вещественна, но не четна. В силу задачи 4.16 такие функции не могут быть характеристическими. **4.20.** Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, а $F(x)$ — соответствующая ей функция распределения. Имеем

$$|f(t+h) - f(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixh} - 1|\, dF(x) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \left|\sin\frac{xh}{2}\right| dF(x) \leqslant 2\int_{-\infty}^{-A} \left|\sin\frac{xh}{2}\right| dF(x) + 2\int_{-A}^{B} \left|\sin\frac{xh}{2}\right| dF(x) +$$

$$+ 2\int_{B}^{\infty} \left|\sin\frac{xh}{2}\right| dF(x$$

при любых A, $B > 0$. Заметим, что правая часть не зависит от t. Первый и третий интегралы в правой части могут быть сделаны сколь угодно малыми, если A и B выбрать достаточно большими, а второй интеграл при выбранных A и B может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора достаточно малого h. То есть $|f(t+h)-f(t)| \to 0$ при $h \to 0$ равномерно по t. **4.21.** Нет, поскольку она не является равномерно непрерывной (см. предыдущую задачу).

4.22. а) $e^{\frac{it}{2}}\dfrac{\sin t/2}{t/2}$, б) $\dfrac{1}{1+it}$, в) $\dfrac{1}{3}(1+2e^{it})$. **4.23.** $\left(\operatorname{ch}\dfrac{t\pi}{2}\right)^{-1}$. **4.24.** а) $\exp\left\{\dfrac{it(a+b)}{2}\right\}\dfrac{\sin t\dfrac{(b-a)}{2}}{t\dfrac{(b-a)}{2}}$, б) $(q+pe^{it})^n$, в) $\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$, г) $\exp\{iat-b|t|\}$, д) $\left(1-\dfrac{it}{\lambda}\right)^{-1}$, е) $\exp\left\{i\mu t-\dfrac{\sigma^2t^2}{2}\right\}$, ж) $\dfrac{p}{1-qe^{it}}$, з) $\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^r$.

4.25. Нет. Пример: $\xi=\eta$ и ξ имеет распределение Коши с характеристической функцией $e^{-|t|}$. **4.26.** Необходимость следует непосредственно из определения характеристической функции случайного вектора. Для доказательства достаточности воспользуйтесь формулой обращения. **4.27.** Пусть $\xi_1=\ldots=\xi_n=\xi$ и ξ имеет распределение Коши с характеристической функцией $e^{-|t|}$. Тогда $f(t,\ldots,t)=\mathsf{E}e^{i(t\xi+\ldots+t\xi)}=\mathsf{E}e^{int\xi}=e^{-n|t|}=(e^{-|t|})^n=\prod\limits_{i=1}^{n}f_i(t)$. **4.28.** Пусть $F_i(x)$ — функция распределения, соответствующая характеристической функции $f_i(t)$. Найдите характеристическую функцию, отвечающую функции распределения $G(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_iF_i(x)$. **4.29.** Пусть $G(x,a)$ — функция распределения, отвечающая характеристической функции $f(t,a)$. Найдите характеристическую функцию, отвечающую функции распределения $\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,a)\,dF(a)$. **4.30.** Имеем

$$\frac{2}{2-f(t)}-1=\frac{f(t)}{2-f(t)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f^i(t)}{2^i},$$

и, в силу задачи 4.28, это — характеристическая функция. **4.31.** Воспользуйтесь тем, что $\operatorname{Re}f(t)=\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(t)})=\frac{1}{2}(f(t)+f(-t))$. Соответствующая функция распределения равна $\dfrac{1+F(x)-F(-x-0)}{2}$. **4.32.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}[1-F(u-x-0)]\,dF(u)$. **4.33.** Да. **4.34.** Не ограничивая общности, положим $a=0$. Имеем

$$|f(t)|=\left|\mathsf{P}(\xi=0)+\int_{x\neq0}e^{itx}dF(x)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\mathsf{P}(\xi=0)-\left|\int_{x\neq0}e^{itx}dF(x)\right|\geqslant\mathsf{P}(\xi=0)-\int_{x\neq0}|e^{itx}|\,dF(x)=\mathsf{P}(\xi=0)-$$

$$-\int_{x\neq0}dF(x)=\mathsf{P}(\xi=0)-\mathsf{P}(\xi\neq0)>0.$$

4.35. Используйте равенство $f(t) = \mathbf{P}(|\xi| = a)\cos at + \int\limits_{|x| \neq a} \cos tx\, dF(x)$. 4.36. Например, $f(t) = a + (1 - a)e^{-t^2}\cos t$, $0 < a < 1$, причем для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ можно подобрать a таким образом, что $f(t)$ будет иметь ровно $2k$ нулей. 4.37. а) Распределение, приписывающее вероятности 1/2 точкам —1 и 1, б) распределение, приписывающее точкам —2, 0, 2 вероятности 1/4, 1/2, 1/4 соответственно, в) нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1/2, г) распределение Коши с плотностью $\frac{1}{\pi(1 + x^2)}$, д) распределение с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ (распределение Лапласа), е) показательное распределение с параметром $\lambda = 1$, ж) равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$ з) распределение с плотностью $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1 + (x - 1)^2} + \frac{1}{1 + (x + 1)^2}\right)$. 4.38. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k f^k(t)$. 4.39. Покажите, что функция $p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt$ является плотностью распределения и, следовательно, функция $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\, dx$ является характеристической функцией. 4.40. В силу предыдущей задачи каждая функция вида

$$f_a(t) = \begin{cases} 1 - a|t|, & |t| \leqslant 1/a, \\ 0, & |t| > 1/a \end{cases}$$

является характеристической функцией. Покажите, что любая функция, указанная в условии задачи, может быть представлена как предел линейных комбинаций функций такого вида и примените задачу 4.28. 4.41. Да. Примеры таких характеристических функций легко построить, используя предыдущую задачу. 4.42. Покажите, что функция $\frac{1}{1 + t^{\alpha}}$ выпукла при $t > 0$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и воспользуйтесь задачей 4.40. 4.43. Обозначим $F(x)$ функцию распределения, отвечающую характеристической функции $f(t)$. Рассмотрите множества $A_t(\varepsilon) = \{x\colon |\cos tx| < 1 - \varepsilon\}$ и покажите, что для каждого t найдется $\varepsilon > 0$, такое, что $\int\limits_{A_t(\varepsilon)} dF(x) > 0$. 4.44. Обозначим $F(x)$ и $G(x)$ функции распределения случайных величин ξ и $\max\{0, \xi\}$ соответственно, и пусть $E(x)$ — вырожденная в нуле функция распределения. Тогда $G(x) = F(x)E(x)$. Легко видеть, что $G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}G_1(x)$, где $G_1(x)$ — непрерывная функция распределения. Пусть $g(t)$ и $g_1(t)$ — характеристические функции распределений G и G_1. Тогда $g(t) = \frac{1}{2}(1 + g_1(t))$, но в силу непрерывности $G_1(x)$ $|g_1(t)| < 1$ при $t \neq 0$ (см. предыдущую задачу); следовательно, $|g(t)| > \frac{1}{2}(1 - |g_1(t)|) > 0$. От условия непрерывности отказаться нельзя (пример: $\mathbf{P}(\xi = -1) = \mathbf{P}(\xi = 1) = 1/2$). 4.45. Пусть $g_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины η_n. Положим $p_k = \mathbf{P}(\xi_1 = k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Имеем $f(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itk}$, поэтому $f(\pi) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k p_k = \mathbf{P}(\xi_1$ делится на два$) - \mathbf{P}(\xi_1$ не делится на два$)$.

Аналогично $g_n(\pi) = \mathbf{P}(\eta_n$ делится на два$) - \mathbf{P}(\eta_n$ не делится на два$)$. Но $g_n(\pi) = f^n(\pi) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда получаем нужное соотношение. **4.46.**

а) $1 - \operatorname{Re} f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx)\, dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2\sin^2 \frac{tx}{2} dF(x) \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2\sin^2 \frac{tx}{2} \cos^2 \frac{tx}{2} dF(x) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \sin^2 tx\, dF(x) = \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos 2tx)\, dF(x) = \frac{1}{4} \operatorname{Re} f(2t);$$

б) следует из а); в) доказываемое неравенство эквивалентно следующему: $\frac{1 + \operatorname{Re} f(2t)}{2} \geqslant (\operatorname{Re} f(t))^2$. Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем $\frac{1 + \operatorname{Re} f(2t)}{2} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + \cos 2tx)\, dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos^2 tx dF(x) \geqslant$

$\geqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF(x) \right)^2 = (\operatorname{Re} f(t))^2$; г) следует из в); д) из г) получаем $1 - |f(2t)| \leqslant 2(1 - |f(t)|^2) = 2(1 - |f(t)|)(1 + |f(t)|) \leqslant 4(1 - |f(t)|)$. **4.47.** Примените индукцию, имея в виду предыдущую задачу. **4.48.** См. решение задачи 4.46. **4.49.** В силу задачи 4.47 $1 - |f(2^n t)|^2 \leqslant 4^n(1 - |f(t)|^2)$ для любого n. При $t = 0$ доказываемое неравенство очевидно. Пусть $t \neq 0$, $|t| < b$. Выберем n так, чтобы $2^{-n} b \leqslant |t| < 2^{-n+1} b$. Тогда $|f(2^n t)|^2 \leqslant c^2$ и $1 - |f(t)|^2 \geqslant \frac{1 - n^2}{4b^2} t^2$ или

$|f(t)| \leqslant 1 - \frac{1 - c^2}{8b^2} t^2$. **4.50.** Проведем доказательство от противного. Предположим, что $f(t)$ имеет нули. Тогда существует $t_0 > 0$, такое, что $f(t_0) = 0$ и $f(t) \neq 0$ при $|t| < t_0$. Следовательно, $f_c(t_0) = 0$ и $f_c(t) \neq 0$ при $|t| < t_0$. Положив $t = t_0/2$ и применяя задачу 4.46, получаем $4\left(1 - \left| f_c\left(\frac{t_0}{2}\right) \right|^2\right) \geqslant 1 -$

$- |f_c(t_0)|^2 = 1$. Так как функция $f_c\left(\frac{t_0}{2}\right) = f\left(\frac{t_0}{2}\right) \Big/ f\left(\frac{ct_0}{2}\right)$ непрерывна по c, то, выбирая c достаточно близким к единице, приходим к противоречию.

4.51. Имеем $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$, откуда

$$\frac{2f(0) - f(t) - f(-t)}{h^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin^2 \frac{xt}{2}}{t^2} dF(x). \tag{1}$$

Далее, при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ справедливо элементарное неравенство $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$. Следовательно, при $|x| \leqslant \pi/t$ $\sin^2 \frac{xt}{2} \geqslant \frac{4}{\pi^2} \frac{x^2 t^2}{4} = \frac{x^2 t^2}{\pi^2}$. Отсюда и из (1) получаем

$\frac{2f(0) - f(t) - f(-t)}{h^2} \geqslant \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{-\pi/t}^{\pi/t} x^2 dF(x)$. Для получения нужного неравенства

остается заметить, что $f(t) + f(-t) = 2\operatorname{Re} f(t)$. **4.52.** $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{x}\right) dG(x) =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) dF(x)$. 4.53. $G(x_1, \ldots, x_n) = F(\min\{x_1, \ldots, x_n\})$. 4.54. Нет, не могут. Характеристическая функция равномерного на отрезке распределения обязательно имеет нули, а характеристическая функция распределения Коши нигде не обращается в нуль. 4.55. Нет, нельзя. Воспользуйтесь задачами 4.40 и 4.41. 4.56. Обозначим $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ характеристические функции случайных величин ξ, η и ζ соответственно. Из условия задачи следует, что

$$f(t)h(ct) = g(t)h(ct) \tag{1}$$

для любого $c > 0$. Фиксируем произвольное t. Выберем c настолько малым, чтобы $h(ct) \neq 0$ (это всегда можно сделать, так как $h(0) = 1$ и $h(t)$ — непрерывная функция). Учитывая (1), получаем $f(t) = g(t)$. В силу произвольности t это означает, что $f(t) \equiv g(t)$. 4.57. $\mathbf{P}(\xi = 0) = 1$. 4.58. Имеем $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$. Проинтегрируем обе части этого равенства по $G(t)$ от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dG(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \right) dG(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(t) \right) dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x).$$

4.59. Пусть $\Phi(x)$ — функция распределения, соответствующая характеристической функции $\varphi(t)$. Обозначим $R_t(x)$ и $r_t(u)$ соответственно функцию распределения и характеристическую функцию равномерного на отрезке $[0, t]$ распределения. Имеем

$$f(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(u)\, du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, dR_t(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_t(u)\, d\Phi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tu}{tu} e^{itu} d\Phi(u)$$

(мы воспользовались предыдущей задачей). Подынтегральное выражение в последнем интеграле является характеристической функцией (как по t, так и по u), следовательно, в силу задачи 4.29 последний интеграл представлят собой характеристическую функцию. 4.60. Решение аналогично решению предыдущей задачи, только в качестве $R_t(x)$ теперь нужно взять распределение с плотностью $\frac{p}{t^p} u^{p-1}$ при $0 < u < t$ и 0 при остальных u. 4.61. Пусть $n > p$ — некоторое целое положительное число. Тогда функция $f_n(t) = \left(\left(1 - \frac{p}{n}\right) + \frac{p}{n} g(t)\right)^n = \left(1 + \frac{p(g(t) - 1)}{n}\right)^n$ является характеристической функцией (см. задачу 4.28). Но $f_n(t) \to e^{p(g(t)-1)}$ при $n \to \infty$ и предельная функция непрерывна в нуле, следовательно, по теореме непрерывности, она является характеристической функцией. 4.62. Нет (например, когда $F_1, F_2, \ldots$ — дискретные распределения, а F — непрерывное). 4.63. Воспользуйтесь теоремой непрерывности. 4.64. Пусть $f_n(t)$, $g_n(t)$ и $f(t)$ — характеристические функции распределений F_n, G_n и F соответственно. Существует $\delta > 0$, такое, что $|f(t)| \geqslant a > 0$ (a — положительное число) при $|t| \leqslant \delta$. Следовательно, при $|t| \leqslant \delta$ для достаточно больших n $f_n(t) \neq 0$ и $g_n(t) = \frac{f(t)}{f_n(t)} \to 1$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что G_n слабо сходится к вырожденному в нуле распределению (см. предыдущую задачу). 4.65. Достаточно показать, что функция $f(t)$ непрерывна в нуле. Ясно, что $f(0)=1$. Имеем

$$|1-f(t)| \leqslant |1-f_n(t)| + |f_n(t)-f(t)|. \qquad (1)$$

По условию, для некоторого $\delta>0$ сходимость $f_n(t)$ к $f(t)$ равномерна на отрезке $|t|\leqslant\delta$, то есть для любого $\varepsilon>0$ и всех $|t|\leqslant\delta$ существует n_0 такое, что при $n\geqslant n_0$ $|f_n(t)-f(t)|\leqslant\varepsilon/2$. Первое слагаемое в правой части (1) можно, зафиксировав $n\geqslant n_0$, сделать меньше $\varepsilon/2$, выбирая t достаточно близко к нулю. Левая часть от n не зависит, следовательно, $|1-f(t)|\leqslant\varepsilon$ при достаточно близком к нулю t. Но это и означает, что функция $f(t)$ непрерывна в нуле. 4.66. Покажите, что в каждой точке t $f_n(t)\to f(t)$ при $n\to\infty$. 4.67. Имеем $g(t)=f_1(t/h_1)/f(t/h_1)$, причем $f_1(t)$ и $f(t)$ — характеристические функции, следовательно, $g(t)$ непрерывна в нуле. Далее,

$$g(t)\,f\left(\frac{t}{h_n}\right)=f_n\left(\frac{t}{h_n}\right) \qquad (1)$$

и при $n\to\infty$ $f\left(\frac{t}{h_n}\right)\to 1$, т. е. левая часть (1) при $n\to\infty$ сходится к $g(t)$, и, следовательно, $f_n\left(\frac{t}{h_n}\right)\to g(t)$, т. е. последовательность характеристических функций сходится к непрерывной в нуле функции, следовательно, предельная функция $g(t)$ является характеристической.

4.68. $$|f(t)-g(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|e^{itx}|\,|d(F(x)-G(x))|=\int_{-\infty}^{\infty}|d(F(x)-G(x))|=2\mathrm{Var}(F,G).$$

4.69. Покажите, что оба условия эквивалентны сходимости в некоторой окрестности нуля к непрерывной в нуле функции. 4.70. Если $F(x)$ — решетчатое распределение, приписывающее положительные вероятности p_k точкам $a+kh$, $k=0$, $\pm1,\ldots$, то $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_ke^{it(a+kh)}$ и, как легко видеть, $|f(2\pi/h)|=1$. Обратно. Пусть существует $t_0\neq0$, такое, что $|f(t_0)|=1$. Это означает, что $f(t_0)=e^{it_0\alpha}$ для некоторого вещественного α, или $\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_0x}dF(x)=e^{it_0\alpha}$. Отсюда следует, что $\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos t_0(x-\alpha))\,dF(x)=0$. Так как функция $1-\cos t_0(x-\alpha)$ непрерывна и неотрицательна, последнее равенство может иметь место только тогда, когда $F(x)$ является решетчатой функцией распределения, точки разрыва которой содержатся в множестве нулей функции $1-\cos t_0(x-\alpha)$. Поэтому точки разрыва $F(x)$ имеют вид $\alpha+2\pi k/t_0$ (k — целое). 4.71. Воспользуйтесь предыдущей задачей. 4.72. Пусть $F(x)$ — функция распределения, отвечающая характеристической функции $f(t)$. Тогда (см. решение задачи 4.70) точки разрыва $F(x)$ имеют вид $2\pi k/t_0$ (k — целое), следовательно, $f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{i\frac{2\pi kt}{t_0}}$, $a_k\geqslant0$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k=1$. Отсюда следует, что функция $f(t)$ периодична с периодом t_0. 4.73. Любое распределение, сосредоточенное на множестве точек $a+bk$, $k=0,\pm1,\ldots$, где a — иррациональное, а b — рациопальное числа. 4.74. См. решение задачи 4.70. 4.75. См. задачу 4.70. В случае, когда распределение целочисленное, можно положить $a = 0$. 4.76. Нет. 4.77. Вообще говоря, не будет. 4.78. Вначале докажите утверждение в случае, когда распределение сосредоточено в конечном числе точек. При этом используйте следующий факт: если $x_1, \ldots, x_n$ — вещественные числа, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся целые $k_1, \ldots, k_n$ и вещественное t, такие, что $|x_i t - 2\pi k_i| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

4.79. $$|p(x+h) - p(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ith} - 1|\,|e^{-itx}|\,|f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-A}^{A} |e^{-ith} - 1|\,|f(t)|\,dt + 2 \int_{|t|>A} |f(t)|\,dt$$

Выбирая A достаточно большим, можно второй интеграл в правой части сделать сколь угодно малым, а первый интеграл в правой части при фиксированном A можно сделать сколь угодно малым, выбирая достаточно малым h. 4.81. Функция дифференцируема в нуле, но не дифференцируема в точке $t = 1$ (см. предыдущую задачу). 4.82. Учитывая абсолютную и равномерную сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{itx} dF(x)$ ($F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ) и применяя теорему о дифференцировании под знаком интеграла, получаем

$$|f^{(n)}(t)| = \left| i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{itx} dF(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n dF(x) = \mathbf{E}\,|\xi|^n.$$

4.83. Покажите, что характеристическая функция случайной величины ξ $f(t) = c \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\cos jt}{j^2 \ln j}$, дифференцируема в точке $t = 0$.

4.84. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re} f(t)}{t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2}\,dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos t|x|}{(tx)^2}\,dt\,|x| = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2}\,dy =$$

$$= \pi \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dF(x) = \pi \mathbf{E}\,|\xi|.$$ 4.85. При $0 < \alpha \leqslant 1$ $f(t)$ — характеристическая функция, при остальных α — нет. 4.86. Вторая производная в нуле функции $f(t)$ равна нулю, следовательно, дисперсия должно была бы равняться нулю. Но тогда $f(t)$ — характеристическая функция вырожденного распределения и по модулю должна равняться единице, что противоречит условию задачи. Таким образом, $f(t)$ не может быть характеристической функцией вероятностного распределения. 4.87. Рассмотрите функцию $|f(t)|^2$ (это характеристическая функция) и исследуйте знак ее второй и первой производной в окрестности нуля (при этом воспользуйтесь тем, что первая производная в нуле равна нулю). 4.88. Используйте соотношения

$$f^{(2q-1)}(t) = (-1)^q \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx \cdot x^{2q-1} dF(x), \quad f^{(2q)}(t) = (-1)^q \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \cdot x^{2q} dF(x)$$

и равенство $\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$. 4.89. Имеем $f_j(t) = 1 - 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{tx}{2}dF_j(x) <$

$< \exp\left(-2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{tx}{2}dF_j(x)\right)$. При достаточно малых t это неравенство можно возводить в положительную степень α_j, поэтому, учитывая равенство $f_1^{\alpha_1}(t)f_2^{\alpha_2}(t) = e^{-t^2}$, получаем $\sum\limits_{j=1}^{s}\alpha_j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{tx}{2}dF_j(x) \leqslant \frac{t^2}{2}$. Таким образом, при каждом j получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{tx}{2}dF_j(x) \leqslant \frac{t^2}{2\alpha_j}$. Но $\frac{f_j(t) - f_j(0)}{t^2} =$

$= -\frac{2}{t^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{tx}{2}dF_j(x)$. И в силу предыдущей задачи дисперсии существуют.

4.91. $\varkappa_1 = \mathsf{E}\xi$, $\varkappa_2 = \mu_2 = \mathsf{D}\xi$, $\varkappa_3 = \mu_3 = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^3$, $\varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$. 4.92. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция ξ. Воспользуйтесь тем, что характеристическая функция ξ' есть $e^{itb}f(at)$. 4.93. Пусть $F(x)$ — функция распределения ξ. Тогда

$$\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}(1-\varphi(t))\,dt = \frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1 - e^{itx}\right)dF(x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{u}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-u}^{u}\left(1 - e^{-itx}\right)dt\,dF(x) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin ux}{ux}\right)dF(x),$$

откуда получаем

$$\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u}(1-\varphi(t))\,dt \geqslant 2\int\limits_{-\infty}^{-2/u}\left(1 - \frac{\sin ux}{ux}\right)dF(x) + 2\int\limits_{2/u}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin ux}{ux}\right)dF(x) \geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_{-\infty}^{-2/u}\left(1 - \frac{1}{|ux|}\right)dF(x) + 2\int\limits_{2/u}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{|ux|}\right)dF(x) \geqslant F\left(-\frac{2}{u}\right) + \left(1 - F\left(\frac{2}{u}\right)\right).$$

4.94. Используйте предыдущую задачу. 4.95. Пусть $F(x)$ — функция распределения ξ. Воспользуемся элементарным неравенством $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$. Имеем

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,dF(x) \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2x^2}{2}\right)dF(x) = 1 - \frac{t^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}.$$

4.96. Рассмотрим характеристическую функцию $|f(t)|^2$. Дисперсия соответствующего распределения равна $2\sigma^2$. Используя предыдущую задачу, получаем $|f(t)|^2 \geqslant 1 - t^2\sigma^2$, откуда следует нужное соотношение. 4.97. Воспользуйтесь тем, что $f(t)\ e^{-ita} = 1 - \frac{\sigma^2t^2}{2} + o\left(t^2\right)$, $t \to 0$, где a — математическое ожидание распределения, соответствующего характеристической функции $f(t)$. **4.98.** Воспользуйтесь тем, что $|f'(t)| \leqslant \mathbf{E}|\xi|$ и, следовательно, $|f(t)|$ не может убывать быстрее некоторой линейной функции. **4.99.** Предположим вначале, что ξ имеет конечную дисперсию σ^2. Тогда, поскольку ξ имеет невырожденное распределение, $\sigma^2 > 0$. Положим $a = \mathbf{E}\xi$. Тогда $f(t) = e^{-iat}$ — характеристическая функция случайной величины $\xi - a$, т. е. случайной величины, имеющей нулевое математическое ожидание, поэтому $f(t)\,e^{-iat} = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)$ при $t \to 0$. Модуль правой части этого равенства не превосходит $1 - \frac{\sigma^2 t^2}{4}$ для всех достаточно малых t. Отсюда следует требуемое утверждение.

Перейдем теперь к общему случаю (когда дисперсия может и не существовать). Пусть $c = \mathbf{P}(|\xi| \leqslant b)$. Выберем b так, чтобы было $c > 0$. Пусть $F(x)$ — функция распределения ξ. Определим функцию $G(x)$ равенством

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant -b, \\ \dfrac{1}{c}(F(x) - F(-b)), & \text{если} \quad -b < x \leqslant b, \\ 1, & \text{если} \quad x > b. \end{cases}$$

Очевидно, $G(x)$ — невырожденная функция распределения с конечной дисперсией и характеристической функцией $g(t) = \frac{1}{c}\int\limits_{|x| \leqslant b} e^{itx}dF(x)$. По ранее доказанному $\frac{1}{c}\left|\int\limits_{|x|\leqslant b} e^{itx}dF(x)\right| \leqslant 1 - \varepsilon t^2$ при $|t| \leqslant \delta$ для некоторых положительных δ и ε. Далее, $|f(t)| \leqslant \left|\int\limits_{|x|\leqslant b} e^{itx}dF(x)\right| + \int\limits_{|x|>b} dF(x)$. Поэтому $|f(t)| \leqslant$ $\leqslant c(1 - \varepsilon t^2) + 1 - c = 1 - c\varepsilon t^2$ при $|t| \leqslant \delta$. **4.100.** Рассмотрите характеристическую функцию $\operatorname{Re} f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$ и воспользуйтесь предыдущей задачей. **4.101.** Воспользуемся следующими элементарными неравенствами:

$$0 \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2 \qquad (1)$$

при $|x| \leqslant \pi/2$. Имеем при $|t| \leqslant \pi/(2c)$ $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx\,dF(x) = \int\limits_{-c}^{c} \cos tx\,dF(x)$. Используя левое неравенство в (1), получаем $f(t) \geqslant 0$. Используя правое неравенство в (1), получаем $f(t) \leqslant \int\limits_{-c}^{c}\left(1 - \frac{4}{\pi^2}t^2x^2\right)dF(x) =$ $= \int\limits_{-c}^{c} dF(x) - \frac{4}{\pi^2}t^2\int\limits_{-c}^{c} dF(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}t^2\sigma^2 \leqslant e^{-\frac{4}{\pi^2}t^2\sigma^2}$ **4.102.** Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, распределенные как ξ. Тогда $\xi_1 - \xi_2$ имеет дисперсию $2\sigma^2$ и характеристическую функцию $|f(t)|^2$. Кроме того, очевидно, $|\xi_1 - \xi_2| \leqslant 2c$, поэтому в силу предыдущей задачи $|f(t)|^2 \leqslant e^{-\frac{8}{\pi}\sigma^2 t^2}$ при $|t| \leqslant \pi/(4c)$, или $|f(t)| \leqslant e^{-\frac{4}{\pi}\sigma^2 t^2}$ при $|t| \leqslant \pi/(4c)$. **4.103.** Воспользуйтесь соотношением $f(t)\,e^{-iat} = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)$ при $t \to 0$, где $a = \mathbf{E}\xi$.

4.104. Перейдите к усеченным распределениям и воспользуйтесь предыдущей задачей. 4.105. Имеем $f(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos txp(x)\,dx=2\int\limits_{0}^{\infty}\cos tx\,p(x)\,dx$. Фиксируем произвольное $t>0$. Получим

$$f(t)=2\left(\int\limits_{0}^{\pi/2t}\cos txp(x)\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\pi/2t+\pi(k-1)/t}^{\pi/2t+\pi k/t}\cos txp(x)\,dx\right). \quad (1)$$

Положим $a_k(t)=\int\limits_{\pi/2t+\pi(k-1)/t}^{\pi/2t+\pi k/t}\cos txp(x)\,dx$. Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k$, очевидно, знакопеременный, причем $|a_k|\geqslant|a_{k+1}|$ для любого k (это следует из того, что функция $p(x)$ не возрастает при $x\geqslant 0$), поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\leqslant 0,\quad \sum_{k=2}^{\infty}a_k\geqslant 0. \quad (2)$$

Если $f(t)\geqslant 0$ (при данном фиксированном t), то из (1) и (2) получаем $f(t)\leqslant 2\int\limits_{0}^{\pi/2t}\cos txp(x)\,dx\leqslant 2A\int\limits_{0}^{\pi/2t}\cos tx\,dx=2A/t$. Если же $f(t)<0$, то $f(t)\geqslant$ $\geqslant\int\limits_{\pi/2t}^{\pi/t}\cos tx\,p(x)\,dx$ и $f(t)\geqslant -2A/t$. Таким образом, $|f(t)|\leqslant 2A/t$. 4.106. Покажите, что при некотором $|f(t)|\leqslant\int\limits_{-\pi/2t+\pi k/t}^{\pi/2t+\pi k/t}|\cos tx|\,p(x)\,dx$ и что последний интеграл не превосходит величины $A\int\limits_{-1/(2A)}^{1/(2A)}\cos tx\,dx$. 4.107. $|1-f(t)|\geqslant$ $\geqslant\operatorname{Re}(1-f(t))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF(x)$ и далее воспользуйтесь неравенством $\cos x\leqslant 1-x^2/3$ при $|x|\leqslant 1$. 4.108. а) нет, б) да, в) да. 4.109. Обозначим $F(x)$ функцию распределения, отвечающую характеристической функции $f(t)$. Пусть функция $\varphi(t)=(f'(t)-f'(0))/t$ ограничена при $0<|t|<$ $<\varepsilon$: $|\varphi(t)|\leqslant c<\infty$. По теореме о среднем $f(t)+f(-t)-2f(0)=$ $=tf'(t\theta(t))-tf'(-t\theta(-t))$, где $0<\theta\ (\pm t)<1$ и, таким образом, $f(t)+$ $+f(-t)-2f(0)=t^2(\theta(t)\varphi(t\theta(t))+\theta(-t)\varphi(-t\theta(-t)))$, так что

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx-1}{t^2}\,dF(x)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{f(t)+f(-t)-2f(0)}{t^2}\right|\leqslant c$$

при $0<|t|<\varepsilon$. Отсюда, применяя лемму Фату, получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)<\infty$.

Обратное утверждение тривиально, поскольку $\frac{f'(t)-f'(0)}{t}\to f''(0)$ при $t\to 0$, если $\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)<\infty$. 4.110. Имеем $|f(t_n)|^2\leqslant e^{-2c|t_n|^\lambda}$ Пусть $\lambda<\delta\leqslant 2$. Обозначим $F^{(s)}(x)$ симметризацию функции распределения $F(x)$. Характеристическая функция распределения $F^{(s)}$ есть $|f(t)|^2$. Предположим, что момент порядка δ существует. Положим $u_n = t_n/2$. По лемме Фату

$$\infty > 2\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\delta dF^{(s)}(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sin u_n x}{u_n}\right|^\delta dF^{(s)}(x) \geqslant$$

$$\geqslant 2\limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin u_n x}{u_n}\right|^\delta dF^{(s)}(x) \geqslant 2\limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u_n x}{|u_n|^\delta} dF^{(s)}(x) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} 2^\delta\left(\frac{1-|f(t_n)|^2}{|t_n|^\delta}\right) \geqslant 2^\delta \lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-2c|t_n|^\lambda}}{|t_n|^\delta} = \infty$$

(мы использовали интегрируемость $\left|\frac{\sin u_n x}{u_n}\right|^\delta \leqslant |x|^\delta$ и условие $\delta > \lambda$). Таким образом, $F^{(s)}$ и, следовательно, F не имеют моментов порядка $\delta > \lambda$. **4.111.** Обозначим $F^{(s)}(x)$ симметризацию функции распределения $F(x)$ (характеристическая функция $F^{(s)}(x)$ есть $|f(t)|^2$). Имеем $|f(t_n)|^2 \geqslant e^{-ct_n^2}$, так что по лемме Фату

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF^{(s)}(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1-\cos t_n x}{t_n^2}\right) dF^{(s)}(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2\liminf_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos t_n x}{t_n^2} dF^{(s)}(x) = 2\liminf_{n\to\infty}\frac{1-|f(t_n)|^2}{t_n^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\liminf_{n\to\infty}\frac{1-e^{-ct_n^2}}{t_n^2} = 2c.$$

Таким образом, $F^{(s)}$, а следовательно, и F имеют второй момент. Обратное тривиально. **4.112.** Имеем (см. решение предыдущей задачи) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF^{(s)}(x) \leqslant c$ для любого $c > 0$. Таким образом, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF^{(s)}(x) = 0$, откуда следует, что $F^{(s)}$, а значит, и F являются вырожденными распределениями. **4.113.** Достаточно доказать, что $\operatorname{Im} f(t) \neq 0$ для всех $t > 0$. Положим $a_k(t) = \int_{\pi k/t}^{\pi(k+1)/t} \sin tx\, p(x)\, dx$. Фиксируем $t > 0$. Имеем $\operatorname{Im} f(t) = \int_0^\infty \sin tx\, p(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)$. Но, как легко видеть, $a_k(t) > 0$ при k четном, $a_k(t) < 0$ при k нечетном и $|a_k(t)| > |a_{k+1}(t)|$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ (в силу убывания $p(x)$ и периодичности $\sin x$). Отсюда получаем, что $\operatorname{Im} f(t) > 0$. **4.114.** Сохраним обозначения, принятые при решении задачи 4.113. Легко показать (см. решение предыдущей задачи), что

$0 \leqslant \operatorname{Im} f(t) \leqslant a_0(t)$, но

$$a_0(t) = \int_0^{\pi/t} \sin tx\, p(x)\, dx \leqslant p(0) \int_0^{\pi/t} \sin tx\, dx = \frac{p(0)}{t} \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2p(0)}{t}$$

$$0 \leqslant \operatorname{Im} f(t) \leqslant \frac{2p(0)}{t}$$

при $t \geqslant 0$. **4.115.** По формуле обращения

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx}(e^{-ith}-1)}{ith} f(t)\, dt.$$

При $h \to 0$ $\dfrac{e^{-ith}-1}{ith} \to 1$, следовательно,

$$\lim_{h\to\infty} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-itx} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt.$$

4.116. Используйте равенство $e^{-itx} = \cos tx - i \sin tx$. **4.117.** Используя предыдущую задачу, получаем

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\{\cos tx>0\}} \cos tx f(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\{\cos tx<0\}} \cos tx f(t)\, dt < \frac{1}{2\pi} \int_{\{\cos tx>0\}} \cos tx f(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\{\cos tx>0\}} f(t)\, dt < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = p(0).$$

Таким образом, $p(x)$ достигает наибольшего значения в нуле. **4.118.** По поводу левого неравенства см. предыдущую задачу. Докажем правое неравенство. Воспользуемся задачей 4.116 и следующим элементарным неравенством: $\cos x > 1 - x^2/2$ $(x \neq 0)$. Имеем

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx f(t)\, dt > \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2x^2}{2}\right) f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\, dt = p(0) - \frac{x^2}{2} p''(0).$$

4.119. Воспользуйтесь задачей 4.115. **4.120.** $p(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt \leqslant \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-c}^{c} dt = c/\pi$.

4.121. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $p(x)$. Случайная величина $\xi - \eta$ имеет плотность распределения

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x+y)\,p(y)\,dy. \tag{1}$$

С другой стороны, $\xi - \eta$ имеет характеристическую функцию $|f(t)|^2$ и, следовательно, по формуле обращения для плотностей (задача 4.115)

$$q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,|f(t)|^2\,dt. \tag{2}$$

Положив $x=0$ и приравняв правые части (1) и (2), получим нужное соотношение. **4.122.** Воспользуйтесь периодичностью функции $f(t)$. **4.123.** Имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}f(t)\,dt = \int_{|y|<h} \frac{\sin Ty}{Ty}\,d_yF(y+x) + \int_{|y|\geqslant h} \frac{\sin Ty}{Ty}\,d_yF(y+x),$$

где h — произвольное положительное число. Обозначим $p_x = F(x+0) - F(x-0)$. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $h_0 > h_1 > 0$ и T_0, такие, что

$$\int_{|y|\geqslant h_0} \frac{\sin T_0 y}{T_0 y}\,d_yF(y+x) \leqslant \varepsilon, \qquad \int_{h_1\leqslant|y|\leqslant h_0} \frac{\sin T_0 y}{T_0 y}\,d_yF(y+x) \leqslant 2\varepsilon,$$

$$\left|\int_{|y|<h_1} \frac{\sin T_0 y}{T_0 y}\,d_yF(y+x) - p_x\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

4.124. Пусть $F^{(s)}(x)$ — симметризация функции распределения $F(x)$, т. е. $F^{(s)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+t)\,dF(t)$. Ясно, что $F^{(s)}(0+0) - F^{(s)}(0-0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k^2$, где p_k — всевозможные скачки функции $F(x)$. Но характеристическая функция функции распределения $F^{(s)}(x)$ есть $|f(t)|^2$, поэтому в силу задачи 4.123 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt = 0$, т. е. $F(x)$ не имеет ни одного скачка.
4.125. Пусть $F(x)$ — функция распределения ξ. Симметризации $F^{(s)}(x)$ соответствует характеристическая функция $|f(t)|^2$. Очевидно, $F^{(s)}(0+0) - F^{(s)}(0-0) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^2$, а в силу задачи 4.123 $F^{(s)}(0+0) - F^{(s)}(0-0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt$, откуда $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^2$. **4.126.** Пусть $F(x)$ — функция распределения, соответствующая характеристической функции $f(t)$, а $E(x)$ — вырожденная в нуле функция распределения. В силу задачи 4.123 $F(x)$ имеет в нуле скачок больше или равный a, следовательно, $F(x) = (1-a)G(x) + aE(x)$, где $G(x)$ — некоторая функция распределения. Обозначим $g(t)$ характеристическую функцию распределения G. Тогда $f(t) = (1-a)g(t) + a$, откуда $g(t) = \frac{f(t)-a}{1-a}$. **4.127.** Достаточно положить $f(t) =$

$=(1-a)e^{-t^2/2}+a$. 4.128. Нет (воспользуйтесь задачей 4.123). **4.129.** Из условия $\sup_k \mathbf{P}(\xi_1=k)<1$ следует, что всюду на отрезке $[-\pi,\pi]$ за исключением конечного числа точек $|f(t)|<1$, поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^n dt\to 0 \tag{1}$$

при $n\to\infty$. Но в силу задачи 4.122 для любого k

$$\mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_\eta=k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itk}f^n(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int|f(t)|^n dt.$$

Правая часть не зависит от k, следовательно,

$$\sup_k \mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n=k)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^n dt.$$

Учитывая (1), получаем, что $\sup_k \mathbf{P}(\eta_n=k)\to 0$ при $n\to\infty$. **4.130.** По формуле обращения для любого y имеем

$$|F(x)-F(y)-(G(x)-G(y))|=\frac{1}{2\pi}\left|\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{-it}(f(t)-g(t))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{2}{|t|}|f(t)-g(t)|\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)-g(t)|}{|t|}\,dt.$$

Правая часть не зависит от x и y. Устремляя $y\to-\infty$ получаем нужное неравенство. **4.131.** По формуле обращения для плотностей (задача 4.115)

$$|p(x)-q(x)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}(f(t)-g(t))\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-g(t)|\,dt.$$

Правая часть не зависит от x, следовательно, $\sup_x|p(x)-q(x)|\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-g(t)|\,dt$. **4.132.** Имеем $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt=p(0)\leqslant A$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,dt=q(0)\leqslant B$. Используя эти неравенства и задачу 4.130, получаем

$$\sup_x|F(x)-G(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>T}\frac{f(t)}{t}\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>T}\frac{g(t)}{t}\,dt\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt+\frac{1}{\pi T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(t)\,dt\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt+\frac{2A}{T}+\frac{2B}{T}.$$

4.133. Воспользуйтесь задачей 4.122. **4.134.** $e^{-bu}\varphi(au)$. **4.135.** $\frac{1-e^{-u}}{u}$. **4.136.** Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$, ...— функции распределения, отвечающие $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, ... Тогда, как легко видеть, преобразование Лапласа функции распределения $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nF_n(x)$ равно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(u)$. **4.137.** Имеем $\frac{2}{2-\varphi(u)}-1=\frac{\varphi(u)}{2-\varphi(u)}=$ $=\frac{\frac{\varphi(u)}{2}}{1-\frac{\varphi(u)}{2}}=\frac{1}{2}\varphi(u)+\frac{1}{4}\varphi^2(u)+\ldots$ При каждом $n=1, 2, \ldots$ $\varphi^n(u)$ — преобразование Лапласа, следовательно в силу предыдущей задачи функция $\frac{1}{2}\varphi(u)+\frac{1}{4}\varphi^2(u)+\ldots$, также является преобразованием Лапласа. **4.138.** $\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n$. **4.139.** Функция $e^{-u_1x}-e^{-u_2x}$ строго положительна при $x>0$ и $u_1<u_2$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-u_1x}dF(x)-\int\limits_0^{\infty}e^{-u_2x}dF(x)=\int\limits_0^{\infty}\left(e^{-u_1x}-e^{-u_2x}\right)dF(x)>0.$$

4.140. Покажите, что вторая производная неотрицательна. **4.141.** Дифференцируя n раз функцию $\varphi(u)=\int\limits_0^{\infty}e^{-ux}dF(x)$ по u под знаком интеграла, получаем $\varphi^{(n)}(u)=\int\limits_0^{\infty}(-x)^ne^{-ux}dF(x)$, откуда $(-1)^n\varphi^{(n)}(u)\geqslant 0$. **4.142.** а) $f(t)$ не является непрерывной, б) $f(t)$ не дифференцируема в точке $t=1$, в) $f(0)=0\neq 1$, г) то же самое, д) не является выпуклой. **4.143.** $P(\varphi(u))$. **4.144.** $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. **4.145.** $f(t)=\frac{\sin t}{t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\varphi(u)\,du\right)$. Выражение, стоящее в скобках является характеристической функцией (задача 4.59), а $\frac{\sin t}{t}$ — характеристическая функция равномерного на отрезке $[-1, 1]$ распределения. Таким образом $f(t)$ — характеристическая функция свертки двух распределений, одно из которых абсолютно непрерывно. Следовательно, $f(t)$ — характеристическая функция абсолютно непрерывного распределения (см. задачу 3.193). **4.146.** Да, например, распределение с характеристической функцией $p+qe^{it}$, $p\neq q$ **4.147.** а) $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, б) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2}$. **4.148.** Воспользуйтесь тем, что нормальное распределение не может быть сверткой двух распределений, одно из которых является распределением Коши. **4.149.** Воспользуйтесь тем, что характеристическая функция ядра равна нулю вне отрезка $[-1, 1]$ и задачей 4.40

4.150. Существует. Достаточно в качестве ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 взять симметричные случайные величины, для которых $\mathsf{E}\eta_1^2\mathsf{E}\eta_2^2 - \mathsf{E}\xi_1^2\mathsf{E}\xi_1^2 > \frac{1}{6}\left(\mathsf{E}\eta_1^4 + \mathsf{E}\eta_2^4 - \mathsf{E}\xi_1^4 - \mathsf{E}\xi_2^4\right)$ (воспользуйтесь равенством $f^{(n)}(t) = i^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n e^{itx}dF(x)$ в случае, когда момент порядка n существует). **4.151.** Воспользуйтесь тем, что функция $G(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} z^{2n}dF(z) \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^{2n}dF(z)$ является функцией распределения. **4.152.** Воспользуйтесь задачей 4.109 и тем, что функция $f^{(2n-2)}(t)/f^{(2n-2)}(0)$ является характеристической функцией с конечной первой производной (см. предыдущую задачу). **4.153.** Покажите, что $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, принимающей значения $j/(2a)$, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ с вероятностями $\mathsf{P}(\xi = j/(2a)) = \dfrac{2(1-\cos \pi j)}{\pi^2}$. **4.154.** Воспользуйтесь предыдущей задачей. **4.155.** $\varphi(t)$ четна и периодична с периодом 2, $\varphi(t) = 1 - |t|$ при $|t| \leqslant 1$; $\psi(t)$ четна и периодична с периодом 4 и $\psi(t) = 1 - |t|$ при $|t| \leqslant 2$. **4.156.** Нет (по пройденному пути определяем ускорение, по ускорению — результирующую силу F и убеждаемся, что распределение F не является сверткой распределений F_1 и F_2). **4.157.** Нет (поступая так же, как и в предыдущей задаче, убеждаемся, что распределение F_1 не может быть компонентой распределения F). **4.158.** Пусть $F(x)$ — функция распределения ξ. Тогда

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x) = \int\limits_{-c}^{c} e^{itx}dF(x) + \int\limits_{|x|>c} e^{itx}dF(x) = f_1(t) + f_2(t).$$

Если $\mathsf{P}(|\xi| \leqslant c) = 0$, то утверждение задачи очевидно. Пусть $\mathsf{P}(|\xi| \leqslant c) > 0$. Тогда $f_1(0) > 0$ и в силу непрерывности $f_1(t)$ существует $\varepsilon > 0$, такое, что $f_1(t) > 0$ при $|t| \leqslant \varepsilon$. Окончательно получаем $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \leqslant f_1(t) + \mathsf{P}(|\xi| > c) = g(t)$ при $|t| \leqslant \varepsilon$. **4.160.** Пусть $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1. Воспользуйтесь тем, что характеристическая функция $f_\nu(t)$ случайной величины $\xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ равна $f_\nu(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-k}}{k!} f^k(t)$.

4.161. Воспользуйтесь задачей 4.68. **4.162.** Положим $\zeta = e^{it\xi} - e^{it\eta}$. Очевидно, $|\zeta| \leqslant 2$ и $\mathsf{P}(\zeta \neq 0) \leqslant \mathsf{P}(\xi \neq \eta)$, откуда $\mathsf{E}|\zeta| \leqslant 2 \cdot \mathsf{P}(\xi \neq \eta)$, но $|f(t) - g(t)| = |\mathsf{E}e^{it\xi} - \mathsf{E}e^{it\eta}| = |\mathsf{E}(e^{it\xi} - e^{it\eta})| \leqslant \mathsf{E}|\zeta|$. Отсюда следует нужное неравенство. **4.163.** Применяя предыдущую задачу и неравенство Чебышёва, получаем $\sup\limits_t |f(t) - g(t)| \leqslant 2\mathsf{P}(\xi \neq \eta) \leqslant 2\mathsf{P}(|\xi| > c) \leqslant 2\sigma^2/c^2$. **4.164.** Если ξ не является с вероятностью 1 постоянной, то $|f(t)| < 1$ на множестве положительной лебеговой меры и, следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(u)|^2}{1+u^2}du < \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$, т. е. $\delta_\xi > -\ln 1 = 0$.

4.165. Покажите, что $|f_n(t)| \to 1$ при $n \to \infty$. **4.166.** Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — характеристические функции случайных величин ξ_1 и ξ_2 соответственно. Тогда

$$\delta_{\xi_1+\xi_2} = -\ln \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_1(t)|^2 |f_2(t)|^2}{1+t^2} dt \geqslant -\ln \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_1(t)|^2}{1+t^2} dt = \delta_{\xi_1}$$

и аналогично $\delta_{\xi_1+\xi_2} \geqslant \delta_{\xi_2}$. Ясно, что равенство может достигаться лишь в том случае, когда $|f_1(t)| = 1$ ($|f_2(t)| = 1$). **4.167.** Очевидно, $\varphi(0) = 1$. Покажем, что $\varphi(u)$ положительно определена. Пусть n — произвольное целое положительное число, $u_1, \ldots, u_n$ — вещественные, $z_1, \ldots, z_n$ — комплексные числа. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{A_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t+u_k-u_r)\overline{\psi(t)}\,dt z_k\bar{z}_r=$$

$$=\frac{1}{A_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\psi(t+u_k\overline{\psi(t+u_r)}\,z_k\bar{z}_r dt=\frac{1}{A_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\psi(t+u_k)\,z_k\right)^2 dt\geqslant 0.$$

Абсолютная непрерывность распределения, соответствующего $\psi(u)$ вытекает из условия $A_\psi<\infty$. **4.168.** Функции $f(t)$ и $e^{-\frac{t^2}{2}}$ равны сумме одного и того же абсолютно сходящегося степенного ряда. **4.169.** Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, каждая из которых принимает два значения 0 и 1 с равными вероятностями. Тогда $\mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n=k)=C_n^k/2^n$. С другой стороны, если $f(t)$ — характеристическая функция ξ_1, то $\mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n=k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^n(t)\,e^{itk}dt$ и, следовательно, $\frac{1}{2^n}C_n^k\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^n dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right)dt$. Воспользуемся элементарным неравенством $\cos t\leqslant e^{-t^2/2}$ при $|t|\leqslant\pi/2$. Получим $\frac{1}{2^n}C_n^k\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-t^2n/2}dt\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{\pi\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$, откуда $C_n^k\leqslant 2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$. **4.170.** Покажите, что характеристическая функция свертки $\mathbf{P}*\mathbf{P}$ абсолютно интегрируема. **4.171.** $g(t)=e^{i(t,a)}f(At)$, где $t=(t_1, \ldots, t_m)$, $\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, (t, a) — скалярное произведение векторов t и a, $f(\tau)$ — характеристическая функция ξ, $g(t)$ — характеристическая функция η. **4.173.** Введем функцию $g(t)=$ $=\frac{1+(1-\alpha)|t|^\alpha}{(1+|t|^\alpha)^2}$. Легко видеть, что при $t>0$

$$g''(t)=\frac{\alpha t^{\alpha-2}}{(1+t^\alpha)^4}\left((1-\alpha^2)+2(1+2\alpha^2)\,t^\alpha+(1-\alpha^2)\,t^{2\alpha}\right)>0$$

и, следовательно (см. задачу 4.40), $g(t)$ — характеристическая функция. С другой стороны, как легко видеть, $g(t)=f(t)+tf'(t)$ при $t>0$, или, что то же самое, $f(t)=\frac{1}{t}\int_0^t g(u)\,du$, откуда в силу предыдущей задачи следует, что $f(t)$ — характеристическая функция одновершинного распределения. **4.174.** Воспользуйтесь задачей 4.172. **4.175.** Да Примером может служить функция Вейерштрасса: $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{it5^k}/2^{k+1}$, которая является характеристической функцией распределения, приписывающего точкам 1, 5, $5^2, \ldots, 5^k, \ldots$ вероятности 1/2, 1/4, 1/8, ..., $1/2^{k+1}$, ... 4.176. В качестве $f(t)$ можно взять любую безгранично делимую характеристическую функцию, а в качестве $g(t)$ — функцию $|f(t)|$. 4.177. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция любой ограниченной несимметричной случайной величины. Положим $f(t) = |\varphi(t)|^2$, $g(t) = \varphi^2(t)$. 4.178. Пусть $f(t_1, \ldots, t_n)$ — характеристическая функция ξ, а $g(t)$ — характеристическая функция ξ_i (случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены). Тогда $f(t_1, \ldots, t_n) = g(t_1) \ldots g(t_n)$.

Глава 5

5.1. Введем события $A_m = \left\{|\xi-\eta| \leqslant \frac{1}{m}\right\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда $\{\xi = \eta\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. Предположим, что $\mathsf{P}(\xi = \eta) < 1$, т. е. $\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right) < 1$. Последнее неравенство означает, что существует m_0, такое, что $\mathsf{P}\left(A_{m_0}\right) < 1$ или

$$\mathsf{P}\left(|\xi-\eta| > \frac{1}{m}\right) > 0. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\mathsf{P}\left(|\xi-\eta| > \frac{1}{m_0}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(|\xi-\xi_n| + |\eta-\eta_n| > \frac{1}{m_0}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(|\xi-\xi_n| > \frac{1}{2m_0}\right) + \mathsf{P}\left(|\eta-\eta_n| > \frac{1}{2m_0}\right) \to 0 \qquad (2)$$

при $n \to \infty$. И, таким образом, (2) противоречит (1). 5.2. Предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots$, такие, что $\left|a_{n_k} - b_{n_k}\right| > \varepsilon$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Имеем $\varepsilon < \left|a_{n_k} - b_{n_k}\right| = \left|a_{n_k} - \xi_n + \xi_n - b_{n_k}\right| \leqslant \left|\xi_n - a_{n_k}\right| + \left|\xi_n - b_{n_k}\right|$. Эти соотношения справедливы для всех элементарных событий, следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\left|\xi_n - a_{n_k}\right| + \left|\xi_n - b_{n_k}\right| > \varepsilon\right) = 1. \qquad (1)$$

Но

$$\mathsf{P}\left(\left|\xi_n - a_{n_k}\right| + \left|\xi_n - b_{n_k}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\left|\xi_n - a_{n_k}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathsf{P}\left(\left|\xi_n - b_{n_k}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) сразу же получается противоречие с условием задачи. 5.3. Воспользуйтесь неравенствами $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$, $|a_nb_n - ab| \leqslant b_n|a_n - a| + a|b_n - b|$. 5.4. Либо $a > 0$, $b > 0$, либо $a < 0$, $b = 0$. 5.5. Предположим противное: существует $\varepsilon > 0$ и последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots$, такие, что $\left|a_{n_k}\right| \geqslant \varepsilon$. Тогда $\mathsf{P}\left(\left|a_{n_k}\xi_{n_k}\right| \geqslant \varepsilon c\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\left|\xi_{n_k}\right| \geqslant c\right) \geqslant \delta \not\to 0$, что противоречит условию задачи. 5.6. Не ограничивая общности, можно считать, что все a_n равны нулю (в противном случае переходим к случайным величинам $\eta_n = \xi_n - a$). По определению медианы

$$\mathsf{P}(\xi_n \leqslant m\xi_n) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(\xi_n \geqslant m\xi_n) \geqslant \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Предположим, что $m\xi_n \not\to 0$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots$, такие, что либо $m\xi_{n_k} \leqslant -\varepsilon$, либо $m\xi_{n_k} \geqslant \varepsilon$. Пусть, например, выполнено второе неравенство. По условию задачи $\mathsf{P}\left(\xi_{n_k} \geqslant \varepsilon\right) \to 0$ при $k \to \infty$ или $\mathsf{P}\left(\xi_{n_k} < \varepsilon\right) \to 1$ и, следовательно, $\mathsf{P}\left(\xi_{n_k} < m\xi_{n_k}\right) \to 1$ или

$\mathbf{P}\left(\xi_{n_k} \geqslant m\xi_{n_k}\right) \to 0$, что противоречит второму неравенству в (1). 5.8. Воспользуйтесь результатами задач 5.1 и 5.3а. 5.9. Покажите, что если $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, то $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и воспользуйтесь задачей 5.3, в. 5.10. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что из $|x - a| \leqslant \delta$ следует

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Для тех элементарных событий, где $\xi_n = a$, положим $\eta_n = 0$ (это упрощает рассуждения). Очевидно, для этих элементарных событий нужное равенство теперь выполнено. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $A_n^\delta = \{\omega\colon |\xi_n - a| \leqslant \delta\}$. Очевидно, $\mathbf{P}(A_n^\delta) \to 1$ при $n \to \infty$ для любого $\delta > 0$. С другой стороны, для всех элементарных событий из A_n^δ, где $\xi_n \neq a$, $|\eta_n| = \left|\frac{f(\xi_n) - f(a)}{\xi_n - a} - f'(a)\right| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, окончательно получаем $\{|\eta_n| \leqslant \varepsilon\} \supseteq A_n^\delta$. И, следовательно, $\mathbf{P}(|\eta_n| \leqslant \varepsilon) \to 1$ при $n \to \infty$. В силу произвольности ε это означает, что $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. 5.11. Множество $\{\omega$: последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится$\}$ является событием. 5.12. Воспользуйтесь аналогичными свойствами числовых последовательностей. 5.13. Прежде всего заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$ (так как события $B_n^\varepsilon = \bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}$ монотонно убывают по n). Далее, множество элементарных событий, для которых $\xi_n \not\to \xi$, совпадает с множеством $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\left\{|\xi_m - \xi| \geqslant \frac{1}{k}\right\}$. Действительно, принадлежность ω множеству A означает, что для этого ω существует k, такое, что для любого $n \geqslant 1$ найдется $m \geqslant n$, такое, что $|\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \frac{1}{k}$. Итак, если $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right) \to 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$ и, следовательно, $\mathbf{P}(A) = 0$, т. е. $\xi_n \to \xi$ п. н. Обратно, если $\xi_n \to \xi$ п. н., то $\mathbf{P}(A) = 0$, следовательно, $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k\geqslant\frac{1}{\varepsilon}}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant k\}\right) = 0$ и, значит, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$, откуда $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right) \to 0$. 5.14. Достаточно заметить, что $\mathbf{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon$ бесконечное число раз$) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right)$ и что последняя вероятность равна нулю тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right) \to 0$ при $n \to \infty$, и воспользоваться предыдущей задачей. 5.15. Воспользуйтесь критерием Коши для числовых последовательностей. 5.16. Воспользуйтесь задачей 5.13 и следующим равенством: $\mathbf{P}\left(\sup\limits_{k\geqslant n}|\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi \ \ - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right)$. 5.17. Используйте две предыдущие задачи. 5.18. Заметим, что из условия задачи следует, что при любом

положительном ε $\sum\limits_{m=n}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$. Применяя задачу 5.13, получаем $\xi_n \to \xi$ п. н.
5.19. Из суммируемости последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ следует, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k \to 0 \qquad (1)$$

при $n \to \infty$. Пусть ε — произвольное положительное число. В силу (1) существует n_0, такое, что при $n \geqslant n_0$ $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$. Имеем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{k\geqslant n} |\xi_{n+k} - \xi_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup |\xi_{n+k} - \xi_n| \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_{k+1} - \xi_k| \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi_{k+1} - \xi_k| \geqslant \varepsilon) \to 0.$$

Применяя теперь задачу 5.17, получим нужное утверждение. 5.20. Для каждого целого положительного m обозначим $n(m)$ максимальный член последовательности, фигурирующей в условии задачи, удовлетворяющий условию $n(m) < m$. Имеем $n(m) \to \infty$ при $m \to \infty$ и, следовательно, $|\xi_m - \xi_{n(m)}| \to 0$ п. н. при $m \to \infty$. Таким образом, $0 \leqslant |\xi_m - \xi| \leqslant |\xi_m - \xi_{n(m)}| + |\xi_{n(m)} - \xi| \to 0$ п. н., т. е. $\xi_m \to \xi$ п. н. при $m \to \infty$. 5.21. Примените задачу 5.13. 5.22. Примените задачу 5.13. 5.23. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, где Ω — окружность единичной длины, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств Ω, $\mathbf{P}$ — мера Лебега. Рассмотрим последовательность дуг $A_1, A_2, \ldots$ следующего вида: A_1 имеет длину 1/2 и откладывается от произвольной точки против часовой стрелки, дуга A_2 имеет длину 1/3 и откладывается в том же направлении и ее начало совпадает с концом дуги A_1, вообще, дуга A_n имеет длину $\frac{1}{n+1}$ и откладывается от конца дуги A_{n-1} в том же направлении, что и все дуги. Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_n(\omega)$ на $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in A_n, \\ 0 & \text{при } \omega \notin A_n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Очевидно, что $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, но ξ_n не сходится ни в одной точке Ω. 5.24. а) Пусть для определенности $a > 0$. Для любого $\delta > 0$ существует n_0 такое, что при $n \geqslant n_0$

$$\mathbf{P}\{\xi_n > a/2\} > 1 - \delta. \qquad (1)$$

Обозначим $A = \bigcap\limits_{n\geqslant n_0} \{\xi_n > a/2\}$. Неравенство (1) означает, что

$$\mathbf{P}(A) > 1 - \delta. \qquad (2)$$

При $n \geqslant n_0$ имеем

$$\mathbf{P}\left(A \cap \left\{\left|\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{a}\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(|\xi_n - a| \geqslant \frac{a^2\varepsilon}{2}\right) \to 0. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{a}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \delta$. В силу произвольности δ это означает, что $\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{\xi_n}-\frac{1}{a}\right|\geqslant\varepsilon\right)\to 0$ при $n\to\infty$ б) Воспользуйтесь аналогичным свойством для числовых последовательностей. 5.25. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть пространство не является атомическим. Тогда существует событие A такое, что $a=\mathsf{P}(A)>0$ и никакое подмножество A не является атомом. Итак, можно выбрать последовательность событий A_1, A_2, ... следующим образом:

$$A_i\subset A,\quad i=1,2,\ldots,$$
$$\mathsf{P}(A_1)=\mathsf{P}(A_2)=a/2,\quad A_1\cap A_2=\varnothing,$$
$$\mathsf{P}(A_3)=\mathsf{P}(A_4)=\mathsf{P}(A_5)=a/3,\quad A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j;\ i,j=3,4,5,$$
$$\mathsf{P}(A_6)=\mathsf{P}(A_7)=\mathsf{P}(A_8)=\mathsf{P}(A_9)=a/4,\quad A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j;\ i,\ j=6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

. . . .

Тогда $I_{A_n}\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, но не сходится с вероятностью 1. 5.26. Пусть ξ_n сходится к ξ в метрике d. Применяя неравенство Чебышёва, получаем для любого $\varepsilon>0$ $\mathsf{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\,\mathsf{E}\frac{|\xi_n-\xi|}{1+|\xi_n-\xi|}\to 0$ при $n\to\infty$. Обратно, пусть $\xi_n\xrightarrow{\mathsf{P}}\xi$. Воспользуемся следующим неравенством (см. задачу 3.236): если $\xi\geqslant 0$ и $f(x)$ — не возрастающая при $x\geqslant 0$ положительная функция, то $\mathsf{P}(\xi\leqslant a)\leqslant\mathsf{E}f(\xi)/f(a)$. Отсюда следует, что при любом $\varepsilon>0$

$$1-(1+\varepsilon)\,\mathsf{E}\frac{1}{1+|\xi_n-\xi|}\leqslant\mathsf{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)\to 0 \tag{1}$$

при $n\to\infty$. Устремляя $\varepsilon\to 0$, получаем $1-(1+\varepsilon)\,\mathsf{E}\frac{1}{1+|\xi_n-\xi|}\to$ $\to 1-\mathsf{E}\frac{1}{1+|\xi_n-\xi|}=\mathsf{E}\frac{|\xi_n-\xi|}{1+|\xi_n-\xi|}$ Отсюда и из (1) окончательно получаем $\mathsf{E}\frac{|\xi_n-\xi|}{1+|\xi_n-\xi|}\to 0$ при $n\to\infty$. 5.28. Воспользуйтесь обобщенным неравенством Чебышёва $\mathsf{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathsf{E}|\xi_n-\xi|^p/\varepsilon^p$ $(\varepsilon>0,\ p>0)$. 5.29. На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})$, представляющем собой отрезок $[0,1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега в качестве P, рассмотрим последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., определенную следующим образом:

$$\xi_n=\xi_n(\omega)=\begin{cases}e^n & \text{при}\quad 0\leqslant\omega\leqslant 1/n,\\ 0 & \text{при}\quad 1/n<\omega\leqslant 1.\end{cases}$$

Очевидно, $\xi_n\xrightarrow{\mathsf{P}}0$ (и даже $\xi_n\to\xi$ п. н.), но $\mathsf{E}|\xi_n|^p=e^{pn}/n\to\infty$ при любом $p>0$. 5.30. См. решение задачи 5.23. 5.31. См. решение задачи 5.29. 5.32. Из задач 5.22 и 5.28 следует, что $\xi_n\xrightarrow{\mathsf{P}}\xi$ и $\xi_n\xrightarrow{\mathsf{P}}\eta$, поэтому, в силу задачи 5.1 $\mathsf{P}(\xi=\eta)=1$. 5.33. Воспользуйтесь тем, что характеристическая функция распределения P_n есть e^{itx_n}. 5.34. Пусть $\mathsf{P}_n\xrightarrow{W}\mathsf{P}$. Это значит, что для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,d\mathsf{P}_n\to\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,d\mathsf{P}$. Положим $f(k)=1$, $f(x)=0$ при $|x-k|\geqslant 1/2$ и $f(x)$ линейна на каждом из отрезков

$[k-1/2, \quad k]$, $\quad [k, k+1/2]$. Тогда $\quad \mathsf{P}_n(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}_n \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P} = \mathsf{P}(k)$.

Обратно, пусть $\mathsf{P}_n(k) \to \mathsf{P}(k)$ для каждого целого k. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}_n =$

$= \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, \mathsf{P}_n(k) \to \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, \mathsf{P}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}$. 5.35. Воспользуйтесь тем, что для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}_n$ представляет собой интегральную сумму Римана для интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P} = \int\limits_{0}^{1} f(x)\, dx$. 5.36. Докажите, что $F_n(x) \to F(x)$ во всех точках непрерывности $F(x)$. 5.37. Возьмем в качестве P_n вероятностную меру, сосредоточенную в точке $1/n$, в качестве P — вероятностную меру, сосредоточенную в нуле, и положим

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

5.38. $\mathsf{P}_n(0) = 1 - 1/n$, $\mathsf{P}_n(n) = 1/n$, $\mathsf{P}(0) = 1$, $f(x) = x$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}_n =$

$= 1 \not\to 0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}$. 5.39. Доказывается так же, как и в случае числовых последовательностей. 5.40. Фиксируем произвольное положительное ε. Выберем в множестве A точки $x_1, \ldots, x_N$ так, чтобы $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ и $|F(x_i) - F(x_{i+1})| \leqslant \varepsilon/5$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, и выберем n_0 достаточно большим, чтобы $|F_n(x_i) - F(x_i)| \leqslant \varepsilon/5$. Пусть $x \in A$. Выберем k так, чтобы $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$. Имеем: $|F_n(x) - F(x)| \leqslant |F_n(x) - F_n(x_k)| + |F_n(x_k) - F(x_k)| + |F(x_k) - F(x)| \leqslant |F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k)| + |F_n(x_k) - F(x_k)| + |F(x_k) - F(x)| \leqslant |F_n(x_{k+1}) - F(x_{k+1})| + |F(x_{k+1}) - F(x_k)| + |F(x_k) - F_n(x_k)| + |F_n(x_k) - F(x_k)| + |F(x_k) - F(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$.

5.42. а)$\to$б) Для любого $\varepsilon > 0$ постройте равномерно непрерывную функцию $f(x)$ такую, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $f(x) = 1$ при $x \in B$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^1 \setminus B} f(x)\, d\mathsf{P} < \varepsilon$.

Тогда $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(B) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P} < \mathsf{P}(B) + \varepsilon$. б) $\to$ в) Перейдите к дополнениям. в) $\to$ а) Вначале покажите, что для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ $\quad \limsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}_n \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mathsf{P}$, затем рассмотрите функцию $-f(x)$. 5.43. Обозначим через A^0 внутренность множества A, а через $\bar{A}$ — его замыкание. В силу предыдущей задачи $\mathsf{P}(\bar{A}) \geqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(\bar{A}) \geqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(A) \geqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(A) \geqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(A^0) \geqslant \mathsf{P}(A^0)$. Если $\mathsf{P}(\partial A) = 0$, то крайние члены равны $\mathsf{P}(A)$ и получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(A) = \mathsf{P}(A)$. Обратно. Пусть B — произвольное замкнутое множество. Обозначим B^δ и C^δ

множества $B^\delta = \left\{x\colon \inf\limits_{y\in B} |x-y| \leqslant \delta\right\}$, $C^\delta = \left\{x\colon \inf\limits_{y\in B} |x-y| = \delta\right\}$. Тогда $\partial B^\delta \subseteq C^\delta$ и, следовательно, множества ∂B^δ при различных δ не пересекаются, поэтому не более чем счетное их число имеет положительную P-меру. Следовательно, для некоторой последовательности положительных δ_k, стремящейся к нулю, множества B^δ являются P-непрерывными множествами и, значит, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(B) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n\left(B^{\delta_k}\right) = \mathsf{P}\left(B^{\delta_k}\right)$ для каждого k. Но множества B^{δ_k} монотонно убывают и сходятся к B, поэтому $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(B) \leqslant \mathsf{P}(B)$. Отсюда, используя предыдущую задачу, получаем $\mathsf{P}_n \xrightarrow{W} \mathsf{P}$. **5.44.** Воспользуйтесь тем, что функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве, равномерно непрерывна. **5.45.** Воспользуйтесь тем, что каждую ограниченную непрерывную функцию можно с любой степенью точности приблизить в равномерной метрике ограниченными непрерывными функциями, обладающими ограниченными непрерывными производными любого порядка. **5.46.** Приблизьте непрерывными функциями распределения индикаторы полупрямых. **5.47.** Обозначим $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ... функции распределения случайных величин ξ, ξ_1, ξ_2, ... соответственно. Тогда функции распределения случайных величин $\eta-\xi_n$ и $\eta-\xi$ равны соответственно $H_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x+t)\,dG_n(t)$ и $H(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x+t)\,dG(t)$. Таким образом, имеем $\mathsf{P}(\eta \leqslant \xi_n) = \mathsf{P}(\eta - \xi_n \leqslant 0) = $

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dG_n(x) = \mathsf{E}(F(\xi_n))$$

и аналогично $\mathsf{P}(\eta \leqslant \xi) = \mathsf{E}(F(\xi))$, откуда следует нужное утверждение. **5.50.** Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная ограниченная функция, $|f(x)| \leqslant C$. Для любого $A > 0$ имеем

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\mathsf{P}_n - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\mathsf{P} \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|p_n(x) - p(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_{|x|\geqslant A} (p_n(x) + p(x))\,dx + \int\limits_{-A}^{A} |p_n(x) - p(x)|\,dx \right)$$

Первый интеграл можно сделать сколь угодно малым, выбирая достаточно большим A, второй интеграл можно сделать при фиксированном A сколь угодно малым, выбирая достаточно большим n. Обратное, вообще говоря, неверно. **5.51.** Пусть $f_n(t)$, $f(t)$, $p_n(t)$, $p(t)$, $q_n(t)$ — характеристические функции распределений R_n, R, P_n, P, Q_n соответственно. Тогда $f_n(t) \to f(t)$, $p_n(t) \to p(t)$ и $f_n(t) = p_n(t) q_n(t)$ при каждом n. Выберем $\delta > 0$ достаточно малым, чтобы $|f_n(t)| > 0$ и $|p_n(t)| > 0$ при $|t| < \delta$. Тогда при $|t| < \delta$ $q_n(t) = f_n(t)/p_n(t) \to f(t)/p(t)$, причем функция $f(t)/p(t)$ непрерывна в нуле, следовательно $f(t)/p(t)$ — характеристическая функция и Q_n слабо сходится к соответствующему распределению. **5.52.** а) Нет; б) нет; в) да; г) да. **5.53.** Плотными являются семейства распределений, указанные в пунктах в) и г). **5.55.** Это семейство является плотным (для доказательства этого достаточно воспользоваться неравенством Чебышёва), и, следовательно, в силу предыдущей задачи оно относительно компактно. **5.56.** Воспользуйтесь задачей 5.54 (впрочем, эту задачу легко решить и непосредственно). **5.57.** Если последовательность $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... плотна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$ такое, что $1 - F_n(A) + F_n(-A) < \varepsilon$ для всех n, откуда $1 - F_n(A) < \varepsilon$ и $F_n(-A) < \varepsilon$, то есть $F_n(x) \to 1$ при $x \to \infty$ и $F_n(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ равномерно по n. Аналогично проводится доказательство в обратную сторону. **5.58.** Пусть $L(F_n, F) \to 0$

Покажем, что $F_n(x) \to F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$. Пусть x — точка непрерывности $F(x)$. Имеем $F(x-\varepsilon_n)-\varepsilon_n \leqslant F_n(x) \leqslant F(x+\varepsilon_n)+\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, или $F(x-\varepsilon_n)-F(x)-\varepsilon_n \leqslant F_n(x)-F(x) \leqslant F(x+\varepsilon_n)-F(x)+\varepsilon_n$. В силу непрерывности $F(x)$ в точке x $F(x-\varepsilon_n)-F(x) \to 0$ и $F(x+\varepsilon_n)-F(x) \to 0$ при $n\to\infty$, откуда $F_n(x)-F(x) \to 0$. Обратно, пусть $F_n(x) \to F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$, т. е.

$$-\varepsilon_n \leqslant F(x)-F_n(x) \leqslant \varepsilon_n, \tag{1}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть x — произвольная точка. Выберем последовательность $\delta_1, \delta_2, \ldots$ так, чтобы $\delta_n \to 0$, а точки $x+\delta_n$ и $x-\delta_n$ были точками непрерывности функции распределения $F(x)$ при любом n. Положим $\Delta_n = \max\{\varepsilon_n, \delta_n\}$. Учитывая (1), получаем $F(x) \leqslant F(x+\delta_n) \leqslant F_n(x+\delta_n)+\varepsilon_n \leqslant F_n(x+\Delta_n)+\Delta_n$ и аналогично $F(x) \geqslant F_n(x-\Delta_n)$. **5.59.** Пусть $f_n(t_1, t_2)$ — характеристическая функция случайного вектора (ξ_n, η_n), а $\varphi_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\xi_n+\eta_n$. Тогда $\varphi_n(t) = \mathbf{E}\exp\{it(\xi_n+\eta_n)\} = \mathbf{E}\exp\{i(t\xi_n+t\eta_n)\} = f_n(t, t)$. Точно так же, если $f(t_1, t_2)$ и $\varphi(t)$ — характеристические функции (ξ, η) и $\xi+\eta$ соответственно, то $\varphi(t) = f(t, t)$. Но по условию $f_n(t_1, t_2) \to f(t_1, t_2)$ для всех t_1 и t_2, поэтому $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ и, следовательно, $\xi_n+\eta_n \xrightarrow{W} \xi+\eta$. **5.60.** Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$. Достаточно показать, что при каждом вещественном t последовательность характеристических функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к характеристической функции $\varphi(t)$ случайной величины ξ. Для любого t и любого положительного ε имеем

$$|\varphi_n(t)-\varphi(t)| \leqslant \int\limits_{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon} \left|e^{it\xi_n}-e^{it\xi}\right| d\mathbf{P} + \int\limits_{|\xi_n-\xi|<\varepsilon} \left|e^{it\xi_n}-e^{it\xi}\right| d\mathbf{P} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon) + \int\limits_{|\xi_n-\xi|<\varepsilon} \left|e^{it(\xi_n-\xi)}-1\right| d\mathbf{P},$$

откуда, учитывая сходимость ξ_n и ξ по вероятности, непрерывность функции e^{ix} и произвольность ε, получаем нужное утверждение. **5.61.** Например, последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$, определенная следующим образом: $\xi_1 = 1$ с вероятностью $1/2$ и $\xi_1 = 0$ с вероятностью $1/2$, $\xi_{2k+1} = \xi_1$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\xi_{2k} = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_1 = 1, \\ 1, & \text{если } \xi_1 = 0. \end{cases}$$

5.62. Воспользуйтесь неравенствами $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,dF_n(x) \leqslant \mathbf{P}(|\xi_n-a|\geqslant\varepsilon) \leqslant$ $\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)\,dF_n(x)$, где $F_n(x)$ — функция распределения ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, а функции $f_\varepsilon(x)$ и $g_\varepsilon(x)$ определяются следующим образом:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leqslant a-\frac{3\varepsilon}{2} \text{ и } x \geqslant a+\frac{3\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{при } a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon \end{cases}$$

и $f_\varepsilon(x)$ линейна на каждом из отрезков $\left[a-\frac{3\varepsilon}{2}, a-\varepsilon\right]$ и $\left[a+\varepsilon, a+\frac{3\varepsilon}{2}\right]$,

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leqslant a-\varepsilon \text{ и } x \geqslant a+\varepsilon, \\ 0 & \text{при } a-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant x \leqslant a+\frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

и $g_\varepsilon(x)$ линейна на каждом из отрезков $\left[a-\varepsilon,\ a-\frac{\varepsilon}{2}\right]$ и $\left[a+\frac{\varepsilon}{2},\ a+\varepsilon\right]$.

5.63. Вообще говоря, нет. Например, в случае, когда все $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. **5.64.** б) $\mathbf{P}(|\xi_n\eta_n| \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathbf{P}(|\xi_n\eta_n| \leqslant \varepsilon,\ |\xi_n| \leqslant A) \geqslant \mathbf{P}(|\eta_n| \leqslant \varepsilon/A,\ |\xi_n| \leqslant A) \geqslant 1 - \mathbf{P}(|\eta_n| > \varepsilon/A) - \mathbf{P}(|\xi_n| > A)$. **5.65.** В силу пункта б) предыдущей задачи $\zeta_n|\xi_n| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ и, следовательно, $\xi_n - \eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, откуда, применяя пункт а) предыдущей задачи, получаем $\eta_n = \xi_n + (\eta_n - \xi_n) \xrightarrow{D} \xi$. **5.66.** Сведите задачу к предыдущей, используя тот факт, что из неравенства $|x-y| \leqslant \varepsilon|y|$ при $\varepsilon < 1/2$ следует неравенство $|x-y| \leqslant 2\varepsilon|x|$. **5.67.** Последовательность $F_1(x), F_2(x), \ldots$ сходится к функции

$$G(x) = \begin{cases} q & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1-p & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

в каждой точке вещественной прямой, за исключением, быть может, точки 0. **5.68.** Используйте задачу 5.64. **5.69.** Воспользуйтесь предыдущей задачей. **5.70.** ξ с вероятностью единица принимает значение 0, а каждое ξ_n с вероятностью $1/2^n$ принимает значение 2^n и с вероятностью $1-1/2^n$ — нулевое значение. **5.71.** $\xi_n = n$ с вероятностью $\frac{1}{n}$ и $\xi_n = 0$ с вероятностью $1-\frac{1}{n}$. **5.72.** Пример, когда $\mathbf{E}\xi_n$ существует, а $\mathbf{E}\xi$ — нет: ξ — любая случайная величина с бесконечным математическим ожиданием,

$$\xi_n = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |\xi| > n. \end{cases}$$

Обратный пример: ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием, η — с бесконечным, $\xi_n = \xi + \frac{1}{n}\eta$. **5.73.** $|\mathbf{E}\xi_n - \mathbf{E}\xi| \leqslant \mathbf{E}|\xi_n - \xi| \leqslant (\mathbf{E}|\xi_n - \xi|)^{1/2} \to 0$ при $n \to \infty$. **5.74.** Достаточно доказать, что существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и n_0, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ и для всех $n \geqslant n_0$

$$\sigma^2 \leqslant \sigma_n^2 + \varepsilon. \tag{1}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что математическое ожидание распределения равно нулю. Для данного $\varepsilon > 0$ найдем такие $N > 1$ и n_0, что при $k = 0, 1, 2$

$$\left| \int\limits_{|x|>N} x^k dF(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

$$\left| \int\limits_{|x|\leqslant N} x^k dF_n(x) - \int\limits_{|x|\leqslant N} x^k dF(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Тогда при $n \geqslant n_0$

$$\sigma_n^2 - \sigma^2 = \int\limits_{|x|\leqslant N} x^2 dF_n(x) - \int\limits_{|x|\leqslant N} x^2 dF(x) + \int\limits_{|x|>N} x^2 dF_n(x) - \int\limits_{|x|>N} x^2 dQ(x) - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_n(x) \right)^2 \geqslant -\frac{2\varepsilon}{3} + \int\limits_{|x|>N} x^2 dF_n(x) - \left(\int\limits_{|x|\leqslant N} x dF_n(x) \right)^2 - \left(\int\limits_{|x|>N} x dF_n(x) \right)^2 - 2 \int\limits_{|x|\leqslant N} x dF_n(x) \int\limits_{|x|>N} x dF_n(x). \tag{4}$$

Применим неравенство Коши — Буняковского:

$$\left(\int\limits_{|x|>N} x dF_n(x)\right)^2 \leqslant \int\limits_{|x|>N} x^2 dF_n(x) \int\limits_{|x|>N} dF_n(x) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} \int\limits_{|x|>N} x^2 dF_n(x). \qquad (5)$$

Для последнего слагаемого в правой части (4) можно написать неравенство

$$2 \int\limits_{|x|\leqslant N} x\, dF_n(x) \int\limits_{|x|>N} x dF_n(x) \leqslant 2 \int\limits_{|x|>N} x^2 dF_n(x) \left| \int\limits_{|x|\leqslant N} x dF_n(x) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{|x|\leqslant N} x dF(x) - \int\limits_{|x|>N} x\, dF(x) \right| \leqslant \frac{4\varepsilon}{3} \int\limits_{|x|>N} x^2\, dF_n(x). \qquad (6)$$

Кроме того,

$$\left(\int\limits_{|x|\leqslant N} x dF_n(x)\right)^2 = \left(\int\limits_{|x|\leqslant N} x dF_n(x) - \int\limits_{|x|\leqslant N} x dF(x) - \int\limits_{|x|>N} x dF(x)\right)^2 \leqslant \frac{4\varepsilon^2}{9}. \qquad (7)$$

Неравенства (4)—(7) означают, что при $\varepsilon < \frac{1}{2}$

$$\sigma_n^2 - \sigma^2 \geqslant -\frac{2\varepsilon}{3} - \frac{4\varepsilon^2}{9} + \int\limits_{|x|>N} x^2 dF_n(x)\,(1-2\varepsilon) \geqslant -\varepsilon. \qquad (8)$$

5.75. Используйте неравенства (2), (3), (8) из решения предыдущей задачи. **5.76.** Нет, не обязано. Пример: F_n приписывает точкам 0, n, $-n$ вероятности $1-\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{2n^2}$, $\frac{1}{2n^2}$ соответственно, F — вырожденное в нуле распределение. В этом случае $\sigma_n^2 = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, $b = 1$, $\sigma^2 = 0$. **5.77.** См. решение задачи 5.75. **5.78.** Равномерная интегрируемость означает, что для любого положительного ε существует $\alpha > 0$, такое, что $\sup\limits_n \int\limits_{|\xi_n|\geqslant\alpha} |\xi_n|\, d\mathbf{P} \leqslant \varepsilon$. Отсюда

$$\sup_n \mathbf{E}|\xi_n| = \sup_n \left(\int\limits_{|\xi_n|\geqslant\alpha} |\xi_n|\, d\mathbf{P} + \int\limits_{|\xi_n|<\alpha} |\xi_n|\, d\mathbf{P}\right) \leqslant \sup_n (\varepsilon+\alpha) = \varepsilon + \alpha < \infty.$$

5.79. Примените обобщенное неравенство Чебышёва. **5.80.** $\int\limits_{|\xi_n|\geqslant a} |\xi_n|\, d\mathbf{P} \leqslant \int\limits_{|\eta|\geqslant a} |\eta|\, d\mathbf{P}$. **5.81.** Докажите, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |\mathbf{E}\xi_n - \mathbf{E}\xi| \leqslant \sup\limits_n \int\limits_{|\xi_n|\geqslant\alpha} |\xi_n|\, d\mathbf{P} + \int\limits_{|\xi|\geqslant\alpha} |\xi|\, d\mathbf{P}$. **5.82.** Покажите, что для тех α, при которых $\mathbf{P}(|\xi| = \alpha) = 0$ $\int\limits_{|\xi_n|\geqslant\alpha} \xi_n\, d\mathbf{P} \to \int\limits_{|\xi|\geqslant\alpha} \xi d\mathbf{P}$. **5.83.** Положим $a = \sup\limits_n \mathbf{E}|\xi_n|$, тогда равномерно по n $\mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant c) \leqslant a/c$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию задачи для него существует $\delta > 0$, такое, что из условия $\mathbf{P}(E) \leqslant \delta$ следует, что $\int\limits_E |\xi_n|\, d\mathbf{P} \leqslant \varepsilon$. Возьмем $c \geqslant \frac{a}{\delta}$, тогда $\mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant c) \leqslant \delta$ и, следовательно, $\sup\limits_n \int\limits_{\{|\xi_n|>c\}} |\xi_n|\, d\mathbf{P} \leqslant \varepsilon$. **5.84.** Нет. Пример: $\mathbf{P}(\xi_n = -1) = \mathbf{P}(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}$,

$\mathbf{P}(\xi = 0) = \mathbf{P}(\xi = 2) = \frac{1}{2}$, $a = 1$. 5.85. Ответ изменится. Имеем $|\xi_n| \xrightarrow{\mathbf{P}} |\xi|$ и значит последовательность $|\xi_1|$, $|\xi_2|$, ... равномерно интегрируема (задача 5.82), но тогда равномерно интегрируема и последовательность $|\xi_1 + a|$, $|\xi_2 + a|$, ... Кроме того, $|\xi_n + a| \xrightarrow{\mathbf{P}} |\xi + a|$, откуда (задача 5.81) следует, что $\mathbf{E}|\xi_n + a| \to \mathbf{E}|\xi + a|$. 5.86. Покажите, что для любого вещественного $A > 0$ существует c, такое, что $\int\limits_{\{|\xi_n|>c\}} f(|\xi_n|)\, d\mathbf{P} \geqslant A \int\limits_{\{|\xi_n|>c\}} |\xi_n|\, d\mathbf{P}$. 5.87. Для любого $\alpha > 1$ и любого n $\int\limits_{|\xi_n|^{r'} \geqslant \alpha} |\xi_n|^{r'} d\mathbf{P} = \int\limits_{|\xi_n|^r \geqslant \alpha^{r/r'}} |\xi_n|^{r'} d\mathbf{P} \leqslant \int\limits_{|\xi_n|^r \geqslant \alpha^{r/r'}} |\xi_n|^r d\mathbf{P}$ и, следовательно, $\sup\limits_n \int\limits_{|\xi_n|^{r'} \geqslant \alpha} |\xi_n|^{r'} d\mathbf{P} \leqslant \sup\limits_n \int\limits_{|\xi_n|^r \geqslant \alpha^{r/r'}} |\xi_n|^r d\mathbf{P} \to 0$, $\alpha \to \infty$.

5.88. Как следует из задачи 5.79 последовательность $|\xi_1|^{r'}$, $|\xi_2|^{r'}$, ... равномерно интегрируема и, следовательно, в силу задачи 5.81, $\mathbf{E}|\xi_n|^{r'}$ сходится к $\mathbf{E}|\xi|^{r'}$. 5.89. ξ_n сходится по вероятности к нулю (при любом α); $\mathbf{E}|\xi_n|^r \to 0$ при $\alpha r < 1$, при $\alpha r = 1$ $\mathbf{E}|\xi_n|^r = 1$ для всех n, при $\alpha r > 1$ $\mathbf{E}|\xi_n|^r \to \infty$. 5.90. Из задачи 5.82 следует, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$, а значит и последовательность $|\xi_1 - \xi|$, $|\xi_2 - \xi|$, ... равномерно интегрируемы. Кроме того, $|\xi_n - \xi| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Отсюда (задача 5.81) следует, что $\mathbf{E}|\xi_n - \xi| \to 0$. 5.91. Из задачи 5.82 следует, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируема. Но тогда в силу задачи 5.80 последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots$, а значит и последовательность $|\eta_1 - \eta|$, $|\eta_2 - \eta|$, ... равномерно интегрируемы. Кроме того, $|\eta_n - \eta| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Отсюда (задача 5.81) следует, что $\mathbf{E}|\eta_n - \eta| \to 0$. 5.92. Если $r \leqslant 1$, то $|\mathbf{E}|\xi_n|^r - \mathbf{E}|\xi|^r| \leqslant \mathbf{E}|\xi_n - \xi|^r \to 0$. Если же $r > 1$, то по неравенству Минковского $|(\mathbf{E}|\xi_n|^r)^{1/r} - (\mathbf{E}|\xi|^r)^{1/r}| \leqslant (\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^r)^{1/r} \to 0$. 5.93. Выберем последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ так, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}|\xi_n|^p/\varepsilon_n^p$ сходится. Тогда, в силу неравенства Чебышёва, $\mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant \varepsilon_n) \leqslant \mathbf{E}|\xi_n|^p/\varepsilon_n^p$ и, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi_n| > \varepsilon_n) < \infty$, откуда, применяя задачу 5.18, получаем $\xi_n \to 0$ п. н.
5.94. Из задачи 5.77 следует, что $\mathbf{E}|\xi_n| \to \mathbf{E}|\xi|$ и, значит, (задача (5.82)) последовательность $|\xi_1|$, $|\xi_2|$, ..., а следовательно, и последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируемы. Следовательно, $|\xi_1 - \xi|$, $|\xi_2 - \xi|$, ... равномерно интегрируема и, кроме того, $|\xi_n - \xi| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ поэтому (задача 5.81) $\mathbf{E}|\xi_n - \xi| \to 0$. 5.95. Решение аналогично решению предыдущей задачи (используйте задачи 5.81, 5.82 и 5.74). 5.96. Из равномерной интегрируемости следует (задача 5.78), что

$$\sup_n \mathbf{E}|\xi_n|^\delta < \infty. \tag{1}$$

С другой стороны, вследствие обобщенного неравенства Чебышёва $\mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant a) \leqslant \mathbf{E}|\xi_n|^\delta/a^\delta$. Отсюда и из (1) следует, что $\sup\limits_n \mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant a) \leqslant \sup\limits_n \mathbf{E}|\xi_n|^\delta/a^\delta$, то есть последовательность распределений случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ плотна. 5.97. Нет. Действительно, из сходимости $(\xi_n^\alpha/\eta_n^\alpha) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ следует сходимость $(\xi_n^\alpha/\eta_n^\alpha)^{\beta/\alpha} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ и, таким образом, $\xi_n^\beta/\eta_n^\beta \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. 5.98. Сходимость по Хинчину, очевидно, эквивалентна тому, что

$$\frac{\int\limits_0^x t\,dF_n(t)}{\int\limits_x^\infty t\,dF_n(t)} \to \infty, \quad n\to\infty. \tag{1}$$

Величина, стоящая в числителе, ограничена сверху числом x и если $\xi_n \overset{P}{\not\to} 0$, то величина, стоящая в знаменателе, ограничена для некоторой подпоследовательности $n_1, n_2, \ldots$ некоторым положительным числом снизу, то есть (2) в этом случае не имеет места. Таким образом, $\xi_n \overset{P}{\to} 0$. **5.99.** Нет. Достаточно положить

$$\xi_n = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } \dfrac{n-1}{n}, \\ n & \text{с вероятностью } \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

5.100. Соотношения $\xi_n \overset{X}{\to} 0$ и $\eta_n \overset{X}{\to} 0$ эквивалентны соответственно следующим: $\mathbf{E}\xi_n^{(x)}/\mathbf{E}\xi_n \to 0$, $\mathbf{E}\eta_n^{(x)}/\mathbf{E}\eta_n \to 0$ для любого $x > 0$, где

$$\xi_n^{(x)} = \begin{cases} \xi_n, & \xi_n \geqslant x, \\ 0, & \xi_n < x, \end{cases} \qquad \eta_n^{(x)} = \begin{cases} \eta_n, & \eta_n \geqslant x, \\ 0, & \eta_n < x \end{cases}$$

(см. задачу 5.98). Имеем

$$\frac{\mathbf{E}(\xi_n+\eta_n)^{(x)}}{\mathbf{E}(\xi_n+\eta_n)} \leqslant 2\left(\frac{\mathbf{E}\xi_n^{(x/2)}}{\mathbf{E}\xi_n+\mathbf{E}\eta_n} + \frac{\mathbf{E}\eta_n^{(x/2)}}{\mathbf{E}\xi_n+\mathbf{E}\eta_n}\right) \leqslant 2\left(\frac{\mathbf{E}\xi_n^{(x/2)}}{\mathbf{E}\xi_n} + \frac{\mathbf{E}\eta_n^{(x/2)}}{\mathbf{E}\eta_n}\right) \to 0.$$

5.101. Из условия задачи следует, что

$$\xi_n - \xi_{n+1} \overset{P}{\to} 0. \tag{1}$$

Пусть $f_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ Из (1) следует, что $f_n(t)f_{n+1}(-t) \to 1$ и, значит, $|f_n(t)|\,|f_{n+1}(-t)| \to 1$, откуда $|f_n(t)| \to 1$. Но $|f_n(t)| \to |f(t)|$, где $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ. Следовательно, $|f(t)| \equiv 1$, т. е. ξ имеет вырожденное распределение. **5.102.** Покажите, что $\mathbf{P}$ (последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ фундаментальна) $= 0$. **5.103.** Нет. **5.104.** Пусть $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\ldots$ — характеристические функции случайных величин ξ, ξ_1, ξ_2, $\ldots$ соответственно. Тогда $f_n(t) \to f(t)$ и $f_n(t) = g_n(t)\,e^{-t^2/2}$, где $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\ldots$ — некоторые характеристические функции. Имеем $g_n(t) \to f(t)/e^{-t^2/2}$, причем предельная функция непрерывна в нуле. Следовательно, она является характеристической функцией. **5.105.** Имеем $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\{|\xi_k - \eta_k| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty}\mathbf{P}(|\xi_k - \eta_k| \geqslant \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, в силу задачи 5.13, $\xi_n - \eta_n \to 0$ п. н. Но тогда (задача 5.12) $\xi_n = (\xi_n - \eta_n) + \eta_n \to a$. **5.106.** Используйте равенства

$$\mathbf{P}(|\xi_{\nu_n} - \xi| \geqslant \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(|\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon)\,\mathbf{P}(\nu_n = k),$$

$$\mathbf{P}(\xi_{\nu_n} \leqslant x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(\xi_k \leqslant x)\,\mathbf{P}(\nu_n = k).$$

5.107. Покажите, что из фундаментальности по вероятности последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ следует фундаментальность по вероятности последовательности $\eta_1, \eta_2, \ldots$ и воспользуйтесь задачей 5.7. 5.108. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные $\delta_1, \ldots, \delta_k$, такие, что если $|x_1 - x_1'| \leqslant \delta_1, \ldots, |x_k - x_k'| \leqslant \delta_k$, то $|g(x_1, \ldots, x_k) - g(x_1', \ldots, x_k')| \leqslant \varepsilon$, поэтому $\mathbf{P}(|g(\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}) - g(\xi_1, \ldots \ldots, \xi_k)| > \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(|\xi_{ni} - \xi_i| > \delta_i) \to 0$ при $n \to \infty$. 5.109. Пусть $f_k(t_1, \ldots \ldots, t_n)$ — характеристическая функция случайного вектора ξ_k, $f(t_1, \ldots, t_n)$ — характеристическая функция случайного вектора ξ, $\varphi_n^l(u)$ и $\varphi^l(u)$ — характеристические функции (ξ_n, l) и (ξ, l) соответственно $(l = (l_1, \ldots, l_n))$. Тогда $f_k(t_1, \ldots, t_n) = \varphi_n^t(1)$, $f(t_1, \ldots, t_n) = \varphi^t(1)$ и, следовательно, $f_k(t_1, \ldots, t_n) \to \to f(t_1, \ldots, t_n)$ для любого t. 5.110. Воспользуйтесь задачами 5.64 и 5.109. 5.111. Воспользуйтесь тем, что каждый замкнутый ограниченный прямоугольник на плоскости является компактом и, что каждый компакт можно поместить в некоторый прямоугольник.

Глава 6

6.1. Выполняется. 6.2. Выполняется. 6.3. Да. 6.4. Да. Воспользуйтесь неравенством Чебышёва и тем, что $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{D}\xi_n = 1/2$. 6.5. Нет. Пусть $\varepsilon < 1$. Тогда $\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \geqslant \mathbf{P}(\xi_n = 2^n, \xi_{n-1} = 2^{n-1}) \times$
$\times \mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{n-2} + 2^{n-1} + 2^n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}(\xi_n = 2^n, \xi_{n-1} = 2^{n-1}) = 1/4$.
6.6. Нет. 6.7. Нет. 6.8. Да. 6.9. Да. 6.10. Применим. Воспользуйтесь равенством $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$. 6.11. Нет. Так как характеристическая функция ξ_n равна $\cos\sqrt{n}\,t$, то характеристическая функция $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ равна $f_n(t) = \cos\frac{t}{n}\cos\frac{\sqrt{2}t}{n}\ldots\cos\frac{\sqrt{n}\,t}{n}$. Пусть $0 < t < \pi/2$ и n — четное. Тогда $0 < f_n(t) < \left[\cos\frac{t}{\sqrt{2n}}\right]^n \to e^{-t^2/4}$. 6.12. $\alpha < 1/2$. 6.13. Воспользуйтесь неравенством Чебышёва. 6.14. Воспользуйтесь неравенством Чебышёва. 6.15. Покажите, что $\mathbf{D}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\xi_i$. 6.16. Пусть $\mathbf{D}\xi_i \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots$ Не ограничивая общности будем считать, что ξ_i имеют нулевые математические ожидания. Имеем $\mathbf{D}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right)\mathbf{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^2 =$
$= \left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\xi_i + \sum_{i \neq j}\mathbf{E}\xi_i\xi_j\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\xi_i + \sum_{|i-j| \leqslant 1, i \neq j}\mathbf{E}\xi_i\xi_j\right) \leqslant \frac{3C}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Используя теперь неравенство Чебышёва, получаем утверждение задачи. 6.17. Пусть $\mathbf{D}\xi_i \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда $\mathbf{D}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\right) =$
$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\xi_i + \frac{1}{n^2}\sum_{i \neq j}\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\xi_i \leqslant \frac{C}{n}$. 6.18. Воспользуйтесь неравенством $2\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \leqslant g(|i-j|)(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)$ и неравенством Чебышёва.
6.19. Воспользуйтесь равенством $\mathbf{D}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\xi_i + \sum_{i \neq j}\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\right)$.

6.20. $\frac{a}{a^2+\sigma^2}$. 6.21. Поскольку $|\eta_n - \mathsf{E}\eta_n| \leqslant 2Cn$, можно без ограничения общности считать, что $\mathsf{E}\xi_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть $A > 0$. Положим $p_A = \mathsf{P}(|\eta_n| \leqslant A)$, $q_A = 1 - p_A$. Тогда $\mathsf{D}\eta_n = \mathsf{E}\eta_n^2 \leqslant A^2 p_A + C^2n^2 q_A \leqslant A^2 + C^2n^2 q_A$, откуда $q_A \geqslant \frac{\alpha}{C^2} - \frac{A^2}{C^2n^2}$, т. е. q_A не стремится к нулю при $n \to \infty$. 6.22. Без ограничения общности можно считать, что ξ_i имеют нулевое математическое ожидание. Имеем $\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{n} = \xi_1 + \frac{(n-1)}{n}\xi_2 + \ldots + \frac{1}{n}\xi_n$. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция ξ_1, $g_n(t)$ — характеристическая функция $\frac{n-1}{n}\xi_2 + \ldots + \frac{1}{n}\xi_n$ и $h_n(t)$ — характеристическая функция $\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{n}$. Достаточно показать, что $h_n(t) \not\to 1$ для некоторого t. Поскольку $\mathsf{D}\xi_1 \neq 0$, существует t, такое, что $|f(t)| < 1$. Но $|h_n(t)| = |f(t)||g_n(t)| \leqslant |f(t)|$. Докажем теперь, что для последовательности $a_1\eta_1, a_2\eta_2, \ldots$ выполняется ЗБЧ. Пусть σ^2 — дисперсия ξ_1. Тогда $\mathsf{D}a_n\eta_n = a_n^2 n\sigma^2$. Далее, так как $a_n^2 \to 0$, $\frac{a_1^2 + 2a_2^2 + \ldots + na_n^2}{n^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Отсюда $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\eta_i \to 0$ при $n \to \infty$. 6.23. Покажите, что $\frac{(\xi_1 - \eta_1) + \ldots + (\xi_n - \eta_n)}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$. 6.24. Нет. 6.25. Нет. 6.26. Воспользуйтесь неравенством Чебышева и следующим утверждением: если $a_1, a_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел таких, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то $(a_1 + \ldots + a_n)/n \to a$ при $n \to \infty$. 6.27. Нет. Достаточно положить $\xi_i = (-1)^i\xi$, где ξ — невырожденная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и $a_{2i} = 1$, $a_{2i-1} = 0$. 6.28. Да. 6.29. Не ограничивая общности можно считать, что $c = 1$. Пусть $f_n(t)$ и $g_n(t)$ — характеристические функции сумм $\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ и $\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{n}$ соответственно. Воспользуйтесь тем, что $f_n(t) = \prod_{k=1}^{n}\left[(1 - 2p_k) + p_k\cos\left(\frac{\varphi(n)t}{n}\right)\right] \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left[(1 - 2q_k) + q_k\cos\left(\frac{\varphi(n)t}{n}\right)\right] = g_n(t)$. 6.30. См. указание к предыдущей задаче. 6.31. Нет. 6.32. Не ограничивая общности будем считать, что $\mathsf{E}\xi_1 = 0$. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция ξ_1 и $\varphi_n(t)$ — характеристическая функция $(c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n)/n$. Тогда $\varphi_n(t) = f\left(\frac{c_1t}{n}\right)f\left(\frac{c_2t}{n}\right)\ldots f\left(\frac{c_nt}{n}\right)$. Далее, для некоторого $\delta > 0$ функция $|f(t)|$ монотонно не возрастает при $0 < t < \delta$. Таким образом, при $0 < t < \delta$ имеем $\left|f\left(\frac{c_nt}{n}\right)\right|^n \leqslant |\varphi_n(t)| \leqslant \left|f\left(\frac{c_{[n/2]}t}{n}\right)\right|^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$, откуда, учитывая, что $f\left(\frac{c_nt}{n}\right) = 1 - \frac{\sigma^2t^2c_n^2}{n^2} + o(t^2)$ при $t \to 0$, получаем, что $|\varphi_n(t)| \to 1$ тогда и только тогда, когда $c_n/\sqrt{n} \to 0$ при $n \to \infty$. 6.33. Воспользуйтесь теоремой «о двух рядах». 6.34. Пусть $f_n(t)$ — характеристическая функция $\xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда $f_n(t) = \prod_{k=1}^{n}\exp\left\{-\frac{\sigma_k^2t^2}{2}\right\} =$

$= \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right\}$ и, следовательно, $f_n(t)$ сходится к непрерывной в нуле функции тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2 < \infty$. **6.35.** Воспользуйтесь тем, что если сумма двух независимых случайных величин почти наверное постоянная, то каждое из слагаемых — почти наверное постоянная. **6.36.** Нет. **6.37.** Воспользуйтесь тем, что $\sum \xi_n^{(s)} = \left(\sum \xi_n\right)^{(s)}$ **6.38.** Пусть $f_n(t)$ и $g_n(t)$ — характеристические функции случайных величин $\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ и $\sum_{k=1}^{n}\eta_k$ соответственно. По условию $f_n(t)g_n(t)\to\psi(t)$, где $\psi(t)$ — характеристическая функция. Отсюда $|f_n(t)|^2|g_n(t)|^2\to|\psi(t)|^2$. Следовательно, последовательности $|f_n(t)|^2$ и $|g_n(t)|^2$ сходятся к непрерывным в нуле функциям. Но $|f_n(t)|^2$ и $|g_n(t)|^2$ — характеристические функции случайных величин $\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(s)}$ и $\sum_{k=1}^{n}\eta_k^{(s)}$, поэтому ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^{(s)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^{(s)}$ почти наверное сходятся. Применяя предыдущую задачу, получаем, что для некоторых последовательностей вещественных чисел $a_1, a_2 \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ почти наверное сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n - a_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(\eta_n - b_n)$. **6.39.** Покажите, что из сходимости по вероятности ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ вытекает существование последовательности $\{a_n\}$ такой, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n - a_n)$ сходится с вероятностью 1. Тогда будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ как разность двух сходящихся по вероятности рядов и, следовательно, будет сходиться с вероятностью 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ как сумма двух сходящихся с вероятностью 1 рядов. **6.40.** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. **6.41.** Воспользуйтесь задачей 6.39. **6.42.** Воспользуйтесь задачей 4.54 **6.43.** Воспользуйтесь результатами задач 4.54 и 6.37. **6.44.** Пусть $f_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\sum_{k=1}^{n}c_k\xi_k$. Достаточно доказать, что $f_n(t)$ сходится в некоторой окрестности нуля к непрерывной в нуле функции. Характеристическая функция ξ_i равна $\cos t$. Существуют положительные a, b и δ, такие, что $\exp\{-at^2\}\leqslant\cos t\leqslant\exp\{-bt^2\}$ при $|t|\leqslant\delta$. Но $f_n(t) = \cos c_1t\cos c_2t\dots\cos c_nt$, следовательно, $\exp\left\{-at^2\left(c_1^2+\dots+c_n^2\right)\right\}\leqslant f_n(t)\leqslant\exp\left\{-bt^2\left(c_1^2+\dots+c_n^2\right)\right\}$ при $|t|\leqslant\delta$. Кроме того, последовательность $\{f_n(t)\}$ монотонно не возрастает, и, следовательно, для сходимости ее к непрерывной в нуле функции при $|t|\leqslant\delta$ необходимо и достаточно выполнения условия $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2<\infty$. **6.45.** См. решение задачи 6.44. **6.46.** См. решение задачи 6.44. **6.47.** Достаточность следует из теоремы о двух рядах. Докажем необходимость. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_n и $g_n(t)$ — характеристическая функция частичной суммы $\sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\xi_n$ почти наверное сходится, то $g_n(t)$ сходится к непрерывной в нуле функции. Имеем $g_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f(c_k t)$. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$. Существуют положительные δ и ε (см. задачу 4.119), такие, что $|f(t)| \leqslant 1 - \varepsilon t^2 \leqslant \exp\{-\varepsilon t^2\}$ при $|t| \leqslant \delta$, поэтому $|g_n(t)| \leqslant \exp\left\{-\varepsilon t^2 \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)\right\}$ и, следовательно, $g_n(t) \to 0$ при $|t| \leqslant \delta$, $t \neq 0$ и $g_n(0) \to 1$. Противоречие. **6.48.** См. решение предыдущей задачи. **6.49.** Не ограничивая общности, можно считать, что $c = 1$ $\left(\text{так как сходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\text{, очевидно, эквивалентна сходимости ряда } \sum_{n=1}^{\infty} C^{-1}\xi_n\right)$. Тогда $\mathbf{D}\xi_n \leqslant \mathbf{E}\xi_n$ и сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_n$ следует из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\xi_n$. Остается применить теорему о двух рядах. **6.50.** Используйте неравенство $\mathbf{D}\xi_n \leqslant 2C\mathbf{E}|\xi_n - \mathbf{E}\xi_n|$ и теорему о двух рядах. Обратное, вообще говоря, неверно; рассмотрите, например, последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ таких, что

$$\xi_n = \begin{cases} 1/n & \text{с вероятностью } 1/2, \\ -1/n & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$$

6.51. Характеристическая функция $g_n(t)$ частичной суммы $\sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k$ равна $\exp\left\{-|t| \sum_{k=1}^{n} |c_k|\right\}$. **6.52.** Покажите, что в некоторой окрестности нуля характеристическая функция $g_n(t)$ частичной суммы $\sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k$ удовлетворяет неравенствам $\exp\left\{-a|t| \sum_{k=1}^{n} |c_k|\right\} \leqslant g_n(t) \leqslant \exp\left\{-b|t| \sum_{k=1}^{n} |c_k|\right\}$ (a, b — положительные числа). **6.53.** Характеристическая функция частичной суммы $\sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k$ равна $\exp\left\{-a|t|^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^{\alpha}\right\}$. **6.54.** Используйте неравенство задачи 4.127. **6.55.** Достаточность вытекает из теоремы о двух рядах. При доказательстве необходимости используйте неравенство задачи 4.127. **6.56.** См. решение задачи 6.47. **6.57.** Используйте задачи 4.126 и 6.37. **6.58.** В качестве такой последовательности можно взять, например, последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющую условиям $\mathbf{D}\xi_1 = \infty$, $\xi_n = 0$ п. н., $n = 2, 3, \ldots$ **6.60.** Покажите, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n$ почти наверное сходится при $z = z_0 > 0$, то он почти наверное сходится при любом $|z| \leqslant z_0$. **6.62.** Воспользуйтесь теоремой о трех рядах. **6.63.** От условия симметричности отказаться нельзя (пример: $\xi_{2n-1} = 1$, $\xi_{2n} = -1$). **6.64.** $\nu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_i = 0) = 1 - p$. **6.65.** Поскольку

$\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} \to c$ п. н., то $\frac{\xi_n}{n} = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - \frac{(n-1)}{n}\frac{\xi_1+\ldots+\xi_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, т. е. с вероятностью 1 осуществляется лишь конечное число событий $\left|\frac{\xi_n}{n}\right| > 1$. Отсюда, в силу леммы Бореля — Кантелли следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi_1| > n) < \infty$. Значит, $\mathbf{E}|\xi_1| < \infty$. **6.66.** Воспользуемся следующим фактом: если $b_1, b_2, \ldots$ — возрастающая последовательность положительных чисел, $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $x_1, x_2 \ldots$ — последовательность чисел таких, что ряд $\sum_n x_n$ сходится, то $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем $\frac{\eta_n - \mathbf{E}\eta_n}{b_n} = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{\xi_k - \mathbf{E}\xi_k}{b_k}\right)$, поэтому достаточно, чтобы почти наверное сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k - \mathbf{E}\xi_k}{b_k}$, но этот ряд сходится в силу теоремы о двух рядах. **6.67.** Воспользуйтесь предыдущей задачей и тем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}$ сходится. **6.70.** Рассмотрите последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, где $\mathbf{P}(\xi_n = n) = \mathbf{P}(\xi_n = -n) = \frac{\sigma_n^2}{2n^2}$, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1 - \frac{\sigma_n^2}{n^2}$ для тех n, для которых $\sigma_n \leqslant n$, и $\mathbf{P}(\xi_n = \sigma_n) = \mathbf{P}(\xi_n = -\sigma_n) = 1/2$ для остальных n. Тогда $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{D}\xi_n = \sigma_n^2$. Покажите, что $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} \not\to 0$ п. н. **6.72.** Исследуйте $\frac{1}{2^k}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}(\xi_i - \mathbf{E}\xi_i)$ на сходимость к 0 с вероятностью 1. **6.76.** Воспользуйтесь тем, что для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполняется УЗБЧ. **6.77.** Пусть $m = \mathbf{E}\xi_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(a \leqslant \eta_n \leqslant b) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{a-nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{\eta_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{b-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

6.78. 0, если $\mathbf{E}\xi_1 > 0$; 1, если $\mathbf{E}\xi_1 < 0$; 1/2, если $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. **6.79.** $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n^\alpha}\right| \leqslant x\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant xn^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$. **6.80.** $1/\sqrt{2\pi p(1-p)}$. **6.81.** $\mathbf{D}\xi_i = 1/\sqrt{x}$, где x — решение уравнения $\Phi(x) = 2/3$. **6.82.** $\Phi(\sqrt{3}) - 1/2$. **6.83.** $\{a_n\}$ — любая последовательность, эквивалентная при $n \to \infty$ последовательности $(t_p/\sqrt{12}) + \sqrt{n}/2$, где t_p — решение уравнения $\Phi(t_p) = p$. **6.84.** $2\Phi(2a/x) - 1$, где x — решение уравнения $\Phi(a/x) = (1+b)/2$. **6.85.** 0. Воспользуйтесь тем, что $\mathbf{E}\xi_1 = \mathbf{E}[\xi_1] + \mathbf{E}\{\xi_1\}$. **6.86.** Распределение, приписывающее точкам 0 и 1/2 вероятность 1/2. Сходимость по вариации будет иметь место. **6.87.** Предельное распределение приписывает точкам m, $m = 0, \pm 1, \ldots$ вероятности $\Phi(m+1) - \Phi(m)$. Сходимость по вариации будет иметь место. 6.88. $\eta=\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}\;\dfrac{1}{\dfrac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n}}$, $\zeta=\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}\times$ $\times\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n}}}$ и $\dfrac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n}\xrightarrow{\mathbf{P}}1$ при $n\to\infty$. 6.89. Нормальное распределение с параметрами (0, 1). 6.90. $\Phi(x\sqrt{2/\lambda})$. 6.91. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, $\mathbf{E}\xi_k=a$, $\mathbf{D}\xi_k=\sigma^2$. Тогда

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[(\xi_k-a)^2;\ |\xi_k-a|>\tau B_n\right]=\frac{\mathbf{E}\left[(\xi_k-a)^2;\ |\xi_k-a|>\tau\sigma\sqrt{n}\right]}{\sigma^2}\to 0$$

при $n\to\infty$ для любого $\tau>0$. 6.92. Пусть для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполнено условие Ляпунова, т. е. $c_n/B_n\to 0$ при $n\to\infty$, где $c_n^{2+\delta}=$ $=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}|\xi_k-a_k|^{2+\delta}$, $B_n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{D}\xi_k$, $a_k=\mathbf{E}\xi_k$. Имеем

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[(\xi_k-a_k)^2;\ |\xi_k-a_k|>\tau B_n\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\tau B_n)^\delta}\mathbf{E}\left[|\xi_k-a_k|^{2+\delta};\ |\xi_k-a_k|>\tau B_n\right]\leqslant\frac{1}{t^\delta}\left(\frac{c_n}{B_n}\right)^{2+\delta}\to 0$$

при $n\to\infty$ для любого $\tau>0$. 6.93. ЦПТ выполняется в силу того, что для любого n $(\xi_1+\ldots+\xi_n)/\sqrt{\mathbf{D}(\xi_1+\ldots+\xi_n)}$ имеет нормальное распределение (0, 1). Далее,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left(\xi_k^2;\ |\xi_k|>\tau B_n\right)\geqslant\tau^2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(|\xi_k|>\tau B_n\right)\geqslant\tau^2\mathbf{P}\left(\frac{\xi_n}{B_n}>\tau\right)\not\to 0$$

при $n\to\infty$, так как $\eta_n=\dfrac{\xi_n}{B_n}$ имеет нормальное распределение с параметрами $\mathbf{E}\eta_n=0$, $\mathbf{D}\eta_n=1/2$. 6.94. По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}}<x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)\mathbf{P}(\nu_n=k).$$

Но $\mathbf{P}\left(\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)\to\Phi(x)$ при $k\to\infty$, следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует k_0, такое, что для любого $k\geqslant k_0$ $\left|\mathbf{P}\left(\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)-\Phi(x)\right|<$ $<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее, $\nu_n\xrightarrow{\mathbf{P}}\infty$. Отсюда следует существование n_0, такого, что для любого $n\geqslant n_0$ $\mathbf{P}(\nu_n<k_0)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\left|\mathsf{P}\left(\frac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}}<x\right)-\Phi(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(\nu_n=k)\left(\mathsf{P}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)-\Phi(x)\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{P}(\nu_n<k_0)+\sum_{k=k_0}^{\infty}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)-\Phi(x)\right|\mathsf{P}(\nu_n=k)\leqslant\varepsilon$$

для любого $n\geqslant n_0$. **6.95.** Нормальное распределение с параметрами (0, 1). **6.96.** Пусть $f_n(t)$ — характеристическая функция η_n. Воспользуйтесь следующим равенством:

$$p^{(n)}(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\left(f_n(t)-e^{-t^2/2}\right)dt.$$

6.98. Рассмотрите два случая: 1) $|t|\geqslant L_n^{-1/3}/2$, $|t|\leqslant 1/(4L_n)$; 2) $|t|<L_n^{-1/3}/2$, $|t|\leqslant 1/(4L_n)$, где $L_n=\beta_3/\sigma^3\sqrt{n}$. **6.99.** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и неравенством

$$\sup_x\left|\mathsf{P}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi(x)\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{|t|<1/4L_n}\left|\frac{f_n(t)-e^{-t^2/2}}{t}\right|dt+C_1(A)L_n,$$

где $C_1(A)$ — постоянная, зависящая только от A. **6.100.** Воспользуйтесь результатом задачи 5.11. **6.101.** Пусть $\xi_n\xrightarrow{\text{п.н.}}\xi$, тогда $\xi_n\xrightarrow{\mathsf{P}}\xi$ и $\xi_n-\xi_{n+1}\xrightarrow{\mathsf{P}}0$. Пусть $f_n(t)$ — характеристическая функция ξ_n. Имеем $|f_n(t)|\,|f_{n+1}(t)|\to 1$ и, значит, $|f_n(t)|\to 1$, т. е. существует a, такое, что $f_n(t)\to\exp(ita)$. Значит, $\xi_n\xrightarrow{\mathsf{P}}a$. Поскольку известно, что ξ_n почти наверное сходится, отсюда следует $\xi_n\to a$ п. н. **6.102.** Заметим, что сходимость $\xi_n\xrightarrow{\mathsf{P}}0$ эквивалентна сходимости $\eta_n=\xi_n^2/(1+\xi_n^2)\xrightarrow{\mathsf{P}}0$. В силу неравенства Чебышёва $\mathsf{P}(\eta_n\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathsf{E}\eta_n/\varepsilon=\mathsf{E}\left(\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2}\right)\Big/\varepsilon$, откуда следует достаточность. Необходимость следует из равномерной ограниченности случайных величин η_n и задачи 5.87. **6.103.** Применяя неравенство Чебышёва, имеем $\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{a_n}-1\right|\geqslant\varepsilon\right)=\mathsf{P}(|\xi_n-a_n|\geqslant a_n\varepsilon)\leqslant\frac{\mathsf{D}\xi_n}{a_n^2\varepsilon^2}\to 0$ при $n\to\infty$. **6.104.** Воспользуемся неравенством Чебышёва: $\mathsf{P}(|\eta_n|>\varepsilon)<\mathsf{E}|\eta_n|/\varepsilon=(\mathsf{E}|\xi_1|)^n/\varepsilon\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$. Обратное утверждение (даже в случае, когда ξ_1, ξ_2, … одинаково распределены), вообще говоря, неверно. Действительно, пусть $\xi_n=0$ с вероятностью $0<p<1$ и $\xi_n=b>\frac{1}{1-p}$ с вероятностью $1-p$. Тогда $\eta_n=0$ с вероятностью $1-(1-p)^n$ и, следовательно, $\eta_n\xrightarrow{\mathsf{P}}0$ при $n\to\infty$, но, очевидно, $\mathsf{E}|\xi_n|=b(1-p)>1$. **6.105.** Применяя неравенство Чебышёва, имеем $\mathsf{P}(|n^\beta\eta_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathsf{E}|n^\beta\eta_n|/\varepsilon=n^\beta(\mathsf{E}|\xi_1|^\alpha)^n/\varepsilon\to 0$ при $n\to\infty$. **6.106.** В случае, когда ξ_i имеют вырожденное распределение, утверждение задачи очевидно. Пусть ξ_i невырождены. Покажите, что если $a\neq 0$ и η_{n_1}, η_{n_2}, … — подпоследовательность последовательности η_1, η_2, …, сходящаяся по вероятности к a, то подпоследовательность η_{n_1+1},

$\eta_{n_2+1}, \ldots$ не может сходиться по вероятности ни к какому числу. **6.107.** Если $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к a, то $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \to a$ при $n \to \infty$. **6.109.** Для любой случайной величины ξ, имеющей конечное математическое ожидание, справедливо неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi| \geqslant n) \leqslant \leqslant \mathsf{E}|\xi|$. Имеем $\mathsf{E}\eta_n = \mathsf{P}(|\xi_n| \geqslant n^{1/p}) = \mathsf{P}(|\xi_n|^p \geqslant n)$; отсюда $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n|^p \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_1|^p \geqslant n) \leqslant \mathsf{E}|\xi_1|^p$. **6.110.** Рассмотрите случайные величины

$$\zeta_n = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_n = \eta_n, \\ 1, & \text{если } \xi_n \neq \eta_n \end{cases}$$

и воспользуйтесь предыдущей задачей. **6.111.** Нет. Пусть, например, ξ_n принимает значения 0 и $1/n$ с вероятностями 1/2, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. **6.115.** Если ξ измерима относительно остаточной σ-алгебры, то для любых a и b вероятность $\mathsf{P}(a \leqslant \xi \leqslant b)$ равна либо 0, либо 1. **6.116.** Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, P — мера Лебега, $\xi_n = 1$ при $\omega \in (0, 1]$, $\xi_n = 0$ при $\omega = 0$. Остаточная σ-алгебра состоит из множеств $\varnothing, \Omega, \{0\}, (0, 1]$. **6.117.** Воспользуйтесь результатом задачи 6.115. **6.118.** Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$ сходится. **6.123.** Воспользуйтесь тем, что если последовательность B_n не стремится к ∞, то существует ее подпоследовательность B_{m_n}, сходящаяся к конечному пределу B. **6.125.** $B_n = n^{1/\alpha}$. Предельный закон — устойчивый с характеристической функцией $\exp\{-|t|^\alpha\}$. **6.126.** Функция распределения Коши с плотностью $[\pi(1 + x^2)]^{-1}$. **6.128.** Воспользуйтесь результатом задачи 6.91. **6.129.** Положим $p = \frac{M}{N}$, $q = \frac{N-M}{N}$ и обозначим $g_m = \mathsf{P}(\xi_{N,M,n} = m)$. Справедливо неравенство

$$C_n^m \left(p - \frac{m}{n}\right)^m \left(q - \frac{n-m}{N}\right)^{n-m} \leqslant g_m \leqslant C_n^m p^m q^{n-m} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{-1}.$$

Отсюда $g_m \to C_n^m p^m q^{n-m}$ при $N, M \to \infty$, $\frac{M}{N} \to p$. **6.130.** См. следующую задачу. **6.131.** В доказательстве используются формулы обращения для характеристических функций:

$$\mathsf{P}(\mu_n = m) - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itm} \left[\prod_{j=1}^{n} \left(q_j + p_j e^{it}\right) - e^{\lambda(e^{it}-1)} \right] dt,$$

где $q_j = 1 - p_j$. Дальнейшие оценки основаны на двух неравенствах для комплексных чисел: 1) $\left|\prod_j a_j - \prod_j b_j\right| \leqslant \sum_j |a_j - b_j|$ при $|a_j| \leqslant 1$, $|b_j| \leqslant 1$; 2) $|e^z - 1 - z| \leqslant |z|^2$ при $|z| \leqslant 1$. Тогда для модуля подынтегральной функции имеем

$$\left| \prod_{j=1}^{n} [1 + p_j(e^{it} - 1)] - \prod_{j=1}^{n} e^{p_j(e^{it}-1)} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| e^{p_j(e^{it}-1)} - 1 - p_j(e^{it} - 1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} p_j^2 |e^{it} - 1|^2 = 2\delta(1 - \cos t).$$

После интегрирования получаем ответ. 6.132. Условие задачи означает, что при любом целом k $\mathsf{E}e^{2\pi ik\xi_n} \to \mathsf{E}e^{2\pi ik\xi}$, $n\to\infty$, где ξ имеет равномерное распределение на $[0, 1)$. Для произвольного тригонометрического многочлена $\Psi(t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{2\pi ikt}$ получаем $\mathsf{E}\Psi(\xi_n) \to \mathsf{E}\Psi(\xi)$ при $n\to\infty$. Используя вторую теорему Вейерштрасса, можно показать, что для любой непрерывной периодической функции $f(t)$ при $n\to\infty$ $\mathsf{E}f(\xi_n) \to \mathsf{E}f(\xi)$. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta],\ 0 \leqslant \alpha < \beta < 1, \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$$

имеем $\mathsf{E}g(\xi_n) = \mathsf{P}(\alpha \leqslant \xi_n \leqslant \beta)$ и $\mathsf{E}g(\xi) = \beta - \alpha$. Остается доказать, что $\mathsf{E}g(\xi_n) \to \mathsf{E}g(\xi)$ при $n\to\infty$. Для этого нужно функцию $g(x)$ доопределить на всей прямой и аппроксимировать двумя непрерывными периодическими с периодом 1 функциями, для которых выполнены доказанные предельные соотношения. 6.133. Доказательство опирается на предыдущую задачу. 6.134. Можно воспользоваться приближенной формулой

$$\mathsf{P}\left\{-a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant a\right\} \approx 2\Phi\left(a + \frac{0{,}5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1.$$

Полученные значения $\mathsf{P}(35 \leqslant S_n \leqslant 65) \approx 0{,}99806$, $\mathsf{P}(47 \leqslant S_n \leqslant 53) \approx 0{,}51608$ интересно сравнить со значениями, вычисленными по таблицам биномиального распределения (точность до 10^{-5}) $\mathsf{P}(35 \leqslant S_n \leqslant 65) = 0{,}99822$, $\mathsf{P}(47 \leqslant S_n \leqslant 53) = 0{,}51588$.

Следует иметь в виду, что оценки вероятностей, близких к 0 или 1, полученные с помощью центральной предельной теоремы менее надежны. Вычислим относительную ошибку при оценке вероятности события $\{S_n < 35,\ S_n > 65\}$. Имеем $\dfrac{0{,}00194 - 0{,}00178}{0{,}00178}\cdot 100\,\% \approx 9\%$. Для вероятности события $\{S_n < 47,\ S_n > 53\}$ получаем $0{,}04\,\%$. При значениях $n > 100$. 6.135. Пользуемся приближенной формулой $\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1$. Так как $p(1-p) \leqslant 1/4$, то $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \geqslant 2\Phi(2\varepsilon\sqrt{n})$. При заданном α приравниваем $2\Phi(2\varepsilon\sqrt{n}) - 1 = 1 - \alpha$ и разыскиваем корень $u = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ уравнения $\Phi(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Тогда $n \geqslant u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}/4\varepsilon^2$. Для данных задачи $n \geqslant 16589$.

6.136. При заданном α имеем $\mathsf{P}\{|\hat{p} - p| \leqslant \varepsilon\} = \mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leqslant \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right\}$, $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1 \geqslant 2\Phi(2\varepsilon\sqrt{n}) - 1 = 1 - \alpha$. Тогда

$$\mathsf{P}\left\{|\hat{p} - p| \leqslant \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right\} \approx 1 - \alpha, \qquad \text{где } u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ — корень уравнения } \Phi(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

и неравенство $\hat{p} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}/2\sqrt{n} \leqslant p \leqslant \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}/2\sqrt{n}$ дает искомый приближенный доверительный интервал уровня $1 - \alpha$.

Более последовательно результат получается из соотношения $1 - \alpha = 2\Phi(\varepsilon) - 1 \approx \mathsf{P}\left\{|\hat{p} - p| \leqslant \varepsilon\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} = \mathsf{P}\{\bar{p}_n \leqslant p \leqslant \bar{\bar{p}}_n\}$, где $\bar{p}_n$ и $\bar{\bar{p}}_n$ —

корни уравнения $(\widehat{p}-p)^2 = \varepsilon^2 p(1-p)/n$, именно

$$\bar{p}_n, \bar{\bar{p}}_n = \frac{\widehat{p}+\frac{\varepsilon^2}{2n} \mp \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}\widehat{p}(1-\widehat{p})+\frac{\varepsilon^4}{2n^2}}}{1+\frac{\varepsilon^2}{n}}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Более точный результат получается при использовании оценки скорости сходимости в теореме Муавра — Лапласа, если дополнительно известно, что $0 < b < p < c < 1$ при некоторых b и c. Тогда $\mathsf{P}\left\{|\widehat{p}-p| \leqslant \varepsilon\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} \geqslant$ $\geqslant 2\Phi(\varepsilon) - 1 - \frac{2(1-2\Delta^2)}{\Delta\sqrt{n}}$, где $\Delta = \sqrt{b(1-c)}$. При заданном α находим $\varepsilon^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ как наименьшее значение ε, удовлетворяющее соотношению $\Phi(\varepsilon) \geqslant 1 + \frac{1-2\Delta^2}{\Delta\sqrt{n}} - \frac{\alpha}{2}$.

6.137. а) Нужно найти такое n, при котором $\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right| \leqslant 0{,}0029\right\} \geqslant 0{,}5$. Используя приближенную формулу Муавра — Лапласа, получаем $n \geqslant 13525$. Отметим, что вероятность получить $\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant 0{,}0029$ при $n = 5000$ равна приближенно 0,318. б) Приближенный доверительный интервал для π уровня 0,95: $3{,}0614 \leqslant \pi \leqslant 3{,}2642$.

6.138. Доверительный интервал для p уровня 0,95: $0{,}502 \leqslant p \leqslant 0{,}526$. Гипотезы $p = 0{,}5$ и $p = 0{,}55$ отбрасываются, гипотезу $p = 0{,}515$ можно считать согласующейся с данными. **6.139.** Заключение о том, что доля белых шаров в урне равна 0,5, сделано на том основании, что в выборке с возвращением объема 100 обнаружено преобладающее количество белых шаров. Вероятность ошибки равна вероятности того, что число белых шаров S_n в выборке объема $n = 100$ превзойдет 50, которая вычислена в предположении, что доля белых шаров в урне равна 0,4: $\mathsf{P}(S_n \geqslant 51) = \mathsf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geqslant 2{,}245\right) \approx 0{,}012$.

6.140. Гипотезу симметричности монеты нужно отклонить, так как вероятность $\mathsf{P}(S_n \geqslant 540)$, вычисленная при $p = 0{,}5$, приблизительно равна 0,006. **6.141.** При $\alpha = 0{,}05$ $m_\alpha = [1{,}645\sqrt{np_0(1-p_0)} + np_0] + 1$ (здесь [ ] — целая часть). Гипотеза $p_0 = 0{,}5$ отклоняется, так как $S_n \geqslant 3711$. Гипотеза $p_0 = 0{,}515$ может быть признана удовлетворительной, так как $S_n < 3820$. **6.142.** Для $\alpha = 0{,}05$ найдем $\varepsilon_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$ из уравнения $\Phi(\varepsilon) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Заменяя Q_1 и Q_2 приближенными выражениями в соответствии с формулой Муавра — Лапласа, найдем соотношения, связывающие n и m^*: $m^* = 1{,}645\sqrt{np_1(1-p_1)} + np_1$, $m^* = -1{,}645\sqrt{np_2(1-p_2)} + np_2$. Значение n, при котором можно различить две гипотезы при заданных вероятностях ошибок $\alpha = \beta = 0{,}05$, равно приближенно $\left[\frac{1{,}645\left(\sqrt{p_1(1-p_1)}+\sqrt{p_2(1-p_2)}\right)}{p_2-p_1}\right]^2$. Для различения вероятностей $p_1 = 0{,}4914$ и $p_2 = 0{,}5178$ в задаче де Мере понадобится около 3895 испытаний. **6.143.** Воспользоваться задачей 6.129 и теоремой Пуассона. **6.144.** Если $\xi_{N,M,n}$ имеет гипергеометрическое распределение, то при сформулированных условиях $\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_{N,M,n}-a}{\sigma} < x\right\} \to \Phi(x)$, где $a = \frac{nM}{N}$, $\sigma^2 = \frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$. Для доказательства воспользоваться задачей 6.129 и теоремой Муавра — Лапласа. **6.145.** Воспользоваться центральной предельной теоремой для одинаково распределенных слагаемых, предварительно вычислив $\mathsf{E}\chi_n^2$ и $\mathsf{D}\chi_n^2$. 6.146. Характеристическая функция случайной величины ξ_λ равна $e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\eta_\lambda = (\xi_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ и показать, что при $\lambda \to \infty$ она стремится к $\exp\{-t^2/2\}$.

С другой стороны, можно воспользоваться тем, что $\xi_\lambda = \xi_{\lambda_0}^{(1)} + \xi_{\lambda_0}^{(2)} + \ldots + \xi_{\lambda_0}^{(n)}$, где $\xi_{\lambda_0}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, взаимно независимы и имеют одинаковое распределение Пуассона с параметром λ_0, а ξ_λ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = n\lambda_0$. По центральной предельной теореме при $n \to \infty$ $\lambda \to \infty$ случайная величина $\dfrac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ асимптотически нормальна с параметрами (0, 1). 6.147. Из предыдущей задачи следует, что $n\overline{X}_n$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $(n\lambda, n\lambda)$. Поэтому с вероятностью, близкой $1-\alpha$, выполняется неравенство $\sqrt{n}\left|\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_{1-\frac{\alpha}{2}}$ есть корень уравнения $\Phi(\varepsilon) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$. Границами доверительного интервала служат корни квадратного уравнения $(\overline{X}_n - \lambda)^2 = \varepsilon^2\lambda/n$: $\lambda_1, \lambda_2 = a + \dfrac{\varepsilon^2}{2n} \mp \sqrt{a\cdot\dfrac{\varepsilon^2}{n} + \dfrac{\varepsilon^4}{4n^2}}$. При $\alpha = 0{,}01$ $(\varepsilon = 2{,}576)$ и $a = 1{,}5$ получается доверительный интервал: $1{,}22 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}85$. Сходимость $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \lambda$ следует из закона больших чисел. 6.148. В силу центральной предельной теоремы случайная величина $n\overline{X}_n$ асимптотически нормально распределена с параметрами $(n\theta, n/12)$. Поэтому $\mathsf{P}\{\sqrt{12n}\,|\bar{x} - \theta| \leqslant \varepsilon\} \simeq 2\Phi(\varepsilon) - 1$ и $\mathsf{P}\left\{\bar{x} - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{12n}} \leqslant \theta \leqslant \bar{x} + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{12n}}\right\} \approx 2\Phi(\varepsilon) - 1$. Пусть $n = 100$, $\alpha = 0{,}05$, $\bar{x} = a$. Тогда $\varepsilon = 1{,}96$ и с вероятностью, близкой к 0,95, $a - 0{,}057 \leqslant \theta \leqslant a + 0{,}057$. 6.149. В предположении, что ошибки Δ_i равномерно распределены в интервале $(-0{,}5\cdot 10^{-5}, 0{,}5\cdot 10^{-5})$, находим $\mathsf{E}\Delta_i = 0$, $\mathsf{D}\Delta_i = \dfrac{0{,}25}{3}10^{-10}$. По центральной предельной теореме для $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_N$, $N = 10^6$, имеем $\mathsf{P}\left\{\dfrac{|\Delta|}{\sqrt{\mathsf{D}\Delta}} \leqslant \varepsilon\right\} \approx 2\Phi(\varepsilon) - 1$. По $\alpha = 0{,}05$ находим соответствующее значение $\varepsilon = 1{,}96$. Отсюда с вероятностью 0,95 $|\Delta| \leqslant 0{,}00566$. 6.150. Рассмотрим при фиксированном N случайную величину η_N, которая принимает значения $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}$, с вероятностями $1/N$. Очевидно, $\mathsf{P}\{a \leqslant \eta_N \leqslant b\} = N(a, b)/N$. Для того чтобы $\mathsf{P}(a \leqslant \eta_N \leqslant b) \to b - a$, достаточно выполнения соотношения $\mathsf{E}e^{2\pi i k\eta_N} \to 0$ при $k \neq 0$ и $N \to \infty$. Имеем при $k \neq 0$

$$\mathsf{E}e^{2\pi i k\eta_N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i k\{n\alpha\}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(e^{2\pi i k\alpha}\right)^n \to 0, \quad N \to \infty.$$

6.151. Перейти к случайным величинам $\Delta^{(n)} = 10^n\delta^{(n)}$, $0 \leqslant \Delta^{(n)} < 1$, и показать, что при $k \neq 0$ $\mathsf{E}e^{2\pi i k\Delta^{(n)}} \to 0$. 6.152. Нужно представить $\widehat{F}_n(x)$ в виде $\widehat{F}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(\xi_k)$, где $I_A(\xi_k)$, $k = 1, \ldots, n$,— индикаторы случайных событий $\{\xi_k \in A\}$. Поскольку $\mathsf{E}\widehat{F}_n(x) = F(x)$, то можно воспользоваться законом больших чисел (теорема Бернулли). Верно более сильное утверждение: $\mathsf{P}\left\{\sup\limits_x \left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right| \to 0\right\} = 1$ (теорема Гливенко — Кантелли). 6.153. Решение следует из закона больших чисел. **6.154.** Воспользоваться центральной предельной теоремой для независимых одинаково распределенных случайных величин. **6.155.** Соотношение $\bar{f}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} I$ есть выражение закона больших чисел. Для ответа на второй вопрос воспользоваться центральной предельной теоремой: $\mathbf{P}\left\{\left|\sqrt{n}\,\frac{\bar{f}_n - I}{\sigma}\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi(\varepsilon) - 1$, где $\sigma^2 = \mathbf{D}f(\xi_1) \leqslant C^2$. **6.156.** Функция $f(x)$ равномерно непрерывна и ограничена на отрезке, $|f(x)| \leqslant K$. В силу этого и закона больших чисел имеем ($\varepsilon > 0$, $\delta > 0$)

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{m:\left|\frac{m}{n} - x\right| \leqslant \delta} \left|f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} +$$

$$+ \sum_{m:\left|\frac{m}{n} - x\right| > \delta} \left|f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + 2K \sum_{m:\left|\frac{m}{n} - x\right| > \delta} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \varepsilon + \frac{K}{2n\delta^2}.$$

Последнее выражение меньше 2ε при n, начиная с некоторого. **6.157.** Доказательство вытекает из усиленного закона больших чисел (теорема Бореля).

Глава 7

7.1. а) $1/6$, $\omega \in [0, 1/3]$, $5/12$, $\omega \in (1/3, 1/2)$, $3/4$, $\omega \in [1/2, 1]$; б) $3/2\pi$, $\omega \in [0, 1/3]$, $3/\pi$, $\omega \in (1/3, 1/2)$, $2/\pi$, $\omega \in [1/2, 1]$; в) $1/27$, $\omega \in [0, 1/3]$, $19/108$, $\omega \in (1/3, 1/2)$, $7/12$, $\omega \in [1/2, 1]$; г) $5/6$, $\omega \in [0, 1/3]$, $7/12$, $\omega \in (1/3, 1/2)$, $1/4$, $\omega \in [1/2, 1]$; д) ξ. **7.2.**

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/6, \\ 1/3, & 1/6 \leqslant x < 5/12, \\ 1/2, & 5/12 \leqslant x < 3/4, \\ 1, & x \geqslant 3/4; \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3/2\pi, \\ 1/3, & 3/2\pi \leqslant x < 2/\pi, \\ 5/6, & 2/\pi \leqslant x < 3/\pi, \\ 1, & x \geqslant 3/\pi; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/27, \\ 1/3, & 1/27 \leqslant x < 19/108, \\ 1/2, & 19/108 \leqslant x < 7/12, \\ 1, & x \geqslant 7/12; \end{cases}$ г) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/4, \\ 1/2, & 1/4 \leqslant x < 7/12, \\ 2/3, & 7/12 \leqslant x < 5/6, \\ 1, & x \geqslant 5/6; \end{cases}$

д) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1/3, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$ **7.3.** а) $1/2$; б) $1/6$, $\omega \in [0, 1/3]$, $1/2$, $\omega \in (1/3, 2/3]$, $5/6$, $\omega \in (2/3, 1]$; в) ξ при $\omega \in [0, 1/2]$, $3/4$ при $\omega \in (1/2, 1]$. **7.4.** а) $a^2/12$; б) $1/(\lambda^2\mu^2)$. **7.5.** Нет. Рассмотрите, например, вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, $\mathbf{P}$ — мера Лебега, ξ — случайная величина, равная 1 при $\omega \in [0, 1/2]$ и 2 при $\omega \in (1/2, 1]$. В качестве $\mathscr{B}$ возьмите σ-алгебру, порожденную множествами $[0, 1/4]$, $(1/4, 3/4]$, $(3/4, 1]$. **7.6.** Покажите, что $\mathbf{E}(\xi \mid \mathscr{B})$ — почти наверное постоянная. **7.7.** Случайная величина $\varphi(\xi)$ измерима относительно σ-алгебры, порожденной ξ. **7.8.** Для любых борелевских множеств A_1 и A_2 $\{\mathbf{E}(\xi \mid \mathscr{B}_1) \in A_1\} \in \mathscr{B}_1$, $\{\mathbf{E}(\eta \mid \mathscr{B}_2) \in A_2\} \in \mathscr{B}_2$ и, в силу независимости σ-алгебр $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$, эти события независимы. **7.9.** Воспользуйтесь результатом задачи 7.6. **7.10.** Воспользуйтесь тем, что σ-алгебра, порожденная случайной величиной η совпадает со всей σ-алгеброй событий. **7.11.** Нет. См., например, указание к задаче 7.5. **7.12.** Для доказательства равенства $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$ достаточно взять математическое ожидание от обеих частей равенства $\mathsf{E}(\xi|\zeta) = \eta$. Обратное, вообще говоря, неверно. **7.13.** $\mathsf{E}(\xi|\xi+\eta)$ и $\mathsf{E}(\eta|\xi+\eta)$ независимы тогда и только тогда, когда они почти наверное постоянные. **7.14.** Используйте определение условного математического ожидания. **7.15.** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. **7.16.** $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_n)$. **7.17.** $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_1)$. **7.18.** Из определения условного математического ожидания и условия задачи следует, что для любых $A\in\sigma(\xi)$ и $B\in\sigma(\eta)$ $\int\limits_A \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega) = \int\limits_A \eta(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$, $\int\limits_B \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega) = \int\limits_B \eta(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$. Покажите, что отсюда следует утверждение задачи. **7.19.** Вырожденное в точке a распределение. **7.20.** $\mathsf{E}(\eta_n|\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots) = \eta_n$,

$$\mathsf{E}(\xi_1|\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots) = \mathsf{E}(\xi_2|\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots) = \mathsf{E}(\xi_n \mid \eta_n, \eta_{n+1}, \ldots).$$

7.21. Поскольку функция $\varphi(x)$ выпукла, для каждого x_0 существует $\lambda(x_0)$, такое, что $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + (x - x_0)\lambda(x_0)$. Положим $x = \xi$, $x_0 = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B})$. Тогда $\varphi(\xi) \geqslant \varphi(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B})) + (\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}))\lambda(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}))$. Вычисляя для обеих частей последнего неравенства условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$ и учитывая, что $\mathsf{E}(\varphi(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}))|\mathscr{B}) = \varphi(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}))$ получим $\mathsf{E}(\varphi(\xi)|\mathscr{B} \geqslant \geqslant \varphi(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}))$. **7.22.** Используя неравенство предыдущей задачи, имеем $\mathsf{DE}(\xi|\mathscr{B}) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}))^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 \leqslant \mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi^2|\mathscr{B})) - (\mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{D}\xi$.
7.23. Воспользуйтесь неравенством из задачи 7.21. **7.24.** Покажите, что случайные величины $\mathsf{E}(\eta|\xi_1)$, $\mathsf{E}(\eta|\xi_2)$, ... независимы и имеют равномерно ограниченные дисперсии (см. задачи 7.8 и 7.22). Отсюда, используя закон больших чисел, получаем утверждение задачи. **7.25.** Нет. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, P — мера Лебега, задана последовательность случайных величин

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, 1/2) \\ 1/n, & \omega \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Тогда почти наверное $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega) \equiv 0$. Положим

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, 1/2), \\ 1, & \omega \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Тогда $\mathsf{E}(\eta|\xi_n) = \eta$, а $\mathsf{E}(\eta|\xi) = 1/2$. **7.26.** Используя задачу 7.21, имеем $\mathsf{E}|\mathsf{E}(\xi_n|\mathscr{B}) - \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B})|^p = \mathsf{E}|\mathsf{E}(\xi_n - \xi|\mathscr{B})|^p \leqslant \mathsf{E}(\mathsf{E}(|\xi_n - \xi|^p|\mathscr{B})) = \mathsf{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0$. **7.27.** $\mathsf{E}(\xi \mid \mathscr{B}) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(\xi \mid \mathscr{B}_n) \mid \mathscr{B}\right) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}(\eta|\mathscr{B})$ при $n \to \infty$. Но левая часть не зависит от n, поэтому $\mathsf{E}(\xi \mid \mathscr{B}) \overset{\text{п.н.}}{=} \mathsf{E}(\eta \mid \mathscr{B})$. **7.28.** Воспользуйтесь тем, что для любого n $\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi|\zeta_n)) = \mathsf{E}\xi$. **7.29.** Не ограничивая общности, можно считать, что ξ — неотрицательная случайная величина. Положим $A = \left\{\omega\colon \sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{E}(\xi \mid \mathscr{B}_k) > \varepsilon\right\}$,

$$A_j = \{\omega\colon\ \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_1) \leqslant \varepsilon,\quad \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_2) \leqslant \varepsilon, \ldots, \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_{j-1}) \leqslant \varepsilon,\qquad \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_j) > \varepsilon\},$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, A_j не пересекаются и $A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$. Поскольку $A_j \in \mathscr{B}_j$, $j = 1, \ldots, n$, то

$$\mathsf{E}|\xi| \geqslant \int\limits_A \xi\mathsf{P}(d\omega) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{A_j} \xi\mathsf{P}(d\omega) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{A_j} \mathsf{E}(\xi|\mathscr{B}_j)\,\mathsf{P}(d\omega) \geqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(A_j) = \varepsilon\mathsf{P}(A),$$

откуда следует нужное неравенство. **7.30.** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. **7.31.** Воспользуйтесь результатом задачи 7.29. **7.33.** Необходимость. Если ξ и $\mathscr{B}$ независимы, то $\varphi(\xi)$ и $\mathscr{B}$ также независимы. Поэтому в силу свойств условного математического ожидания $\mathsf{E}(\varphi(\xi)|\mathscr{B}) = \mathsf{E}\varphi(\xi)$. Достаточность. Пусть A — любое борелевское множество, $\varphi(\xi) = I_A(\xi)$. Тогда из равенства $\mathsf{E}(\varphi(\xi)|\mathscr{B}) = \mathsf{E}\varphi(\xi)$ следует, что для любого $B \in \mathscr{B}$ $\int\limits_B I_A(\xi)\,\mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{E}I_A(\xi) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(\xi \in A)$. Но $\int\limits_B I_A(\xi)\,\mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{P}(B \cap (\xi \in A))$.

7.34. $\mathsf{P}(A) = \mathsf{E}I_A = \mathsf{E}(\mathsf{E}(I_A \mid \mathscr{B})) = \int\limits_\Omega \mathsf{P}(A \mid \mathscr{B})\,\mathsf{P}(d\omega)$. **7.35.** Для любых борелевских множеств A и B $\mathsf{P}(\xi \in A,\ \eta \in B|\mathscr{A}) = \mathsf{E}(I_A(\xi)I_B(\eta))|\mathscr{A} = I_A(\xi)I_B(\eta) = \mathsf{E}(I_A(\xi)\ |\mathscr{A})\mathsf{E}(I_B(\eta)|\mathscr{A}) = \mathsf{P}(\xi \in A|\mathscr{A})\mathsf{P}(\eta \in B|\mathscr{A})$. **7.36.** Воспользуйтесь тем, что при $\mathscr{B} = \{\varnothing, \Omega\}\mathsf{E}(\varphi(\xi)|\mathscr{B}) = \mathsf{E}\varphi(\xi)$. **7.37.** Пусть даны произвольные $B_1 \in \mathscr{B}_1$ и $B_2 \in \mathscr{B}_2$. Нужно показать, что $\mathsf{E}\left(I_{B_1}I_{B_2} \mid \mathscr{B}\right) = \mathsf{E}\left(I_{B_1} \mid \mathscr{B}\right)\mathsf{E}\left(I_{B_2} \mid \mathscr{B}\right)$ п. н. равносильно $\mathsf{E}\left(I_{B_2}|\mathscr{B}\mathscr{B}_1\right) = \mathsf{E}\left(I_{B_2}|\mathscr{B}\right)$ п. н. Для этого достаточно доказать, что второе равенство равносильно $\mathsf{E}\left(I_{B_1}\mathsf{E}\left(I_{B_2}|\mathscr{B}\mathscr{B}_1\right)|\mathscr{B}\right) \overset{\text{п.н.}}{=} \mathsf{E}\left(I_{B_1}\mathsf{E}\left(I_{B_2}|\mathscr{B}\right)|\mathscr{B}\right)$.

7.38. Да. Пусть, например,

$$\xi = \begin{cases} 0, & \omega \in A, \\ 1, & \omega \notin A, \end{cases} \qquad \eta = \begin{cases} 0, & \omega \in B, \\ 1, & \omega \notin B, \end{cases}$$

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = 1/2$, ξ и η независимы. В качестве $\mathscr{B}$ возьмите σ-алгебру, порожденную случайной величиной $\xi\eta$. **7.39.** Докажите сначала утверждение задачи для кусочно-постоянных случайных величин. **7.40.** Воспользуйтесь тем, что $\mathsf{P}_C(B) = \mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}_C(C) = 1/2$. **7.41.** Воспользуйтесь тем, что в случае а) $\mathsf{P}(A|\mathscr{B}) = \mathsf{P}(A)$; б) $\mathsf{P}(A|\mathscr{B}) = I_A$;

в) $$\mathsf{P}(A \mid \mathscr{B}) = \begin{cases} 2\mathsf{P}(A \cap [0, 1/2)), & \omega \in [0, 1/2), \\ 2\mathsf{P}(A \cap [1/2, 1]), & \omega \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

7.42. а) $$\mathsf{P}(\xi \in A \mid \mathscr{B}) = \begin{cases} 3\mathsf{P}(A \cap [0, 1/3)), & \omega \in [0, 1/3), \\ \dfrac{3}{2}\mathsf{P}(A \cap [1/3, 1]), & \omega \in [1/3, 1]; \end{cases}$$ б) $$\mathsf{P}(\xi \in A \mid \mathscr{B}) = \frac{I_A(\omega) + I_A(1-\omega)}{2};$$ в) $$\mathsf{P}(\xi \in A \mid \mathscr{B}) = \begin{cases} \dfrac{I_A(\omega) + 2I_A(1-2\omega)}{3}, & \omega \in [0, 1/3), \\ \dfrac{I_A\left(\dfrac{1-\omega}{2}\right) + 2I_A(\omega)}{3}, & \omega \in [1/3, 1]. \end{cases}$$

Глава 8

8.1. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — характеристические функции случайных величин ξ и $a\xi + b$ соответственно. Тогда $(g(t))^{1/n} = (e^{itb}f(at))^{1/n} = e^{itb/n}(f(at))^{1/n}$ является характеристической функцией при любом целом положительном n. **8.2.** Покажем, что характеристическая функция, являющаяся пределом последовательности безгранично делимых характеристических функций, безгранично делима. Пусть $f_n(t) \to f(t)$. Фиксируем произвольное целое положительное m. Тогда

$$(f_n(t))^{1/m} \to (f(t))^{1/m}. \tag{1}$$

Из непрерывности $f(t)$ следует непрерывность $(f(t))^{1/m}$, и, таким образом, (1) означает, что последовательность характеристических функций сходится к непрерывной функции и, следовательно, последняя является характеристической функцией. **8.3.** Воспользуйтесь тем, что характеристическая функция $\xi + \eta$

равна произведению характеристических функций ξ и η. 8.4. Докажите сначала, что $|f(t)|^2$ — безгранично делимая характеристическая функция и воспользуйтесь тем, что квадратный корень из безгранично делимой характеристической функции — безгранично делимая характеристическая функция. 8.5. Пусть $f(t)$ — безгранично делимая характеристическая функция. Тогда $|f(t)|$ — также безгранично делимая характеристическая функция (см. задачу 8.4) и, следовательно, $|f(t)|^{1/n}$ — характеристическая функция. Далее, последовательность $|f(t)|^{1/n}$ при каждом t монотонно не убывает и, следовательно, стремится при $n \to \infty$ к пределу $g(t)$. Последний непрерывен в нуле и, значит, является характеристической функцией. Но $g(t)$ может принимать только два значения: 0 и 1. Поскольку $g(0) = 1$, это означает, что $g(t) \equiv 1$. Если бы существовала точка t_0, такая, что $f(t_0) = 0$, было бы $g(t_0) = 0$. 8.6. Распределение с плотностью

$$\frac{\lambda^{1/k}}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} x^{\frac{1}{k}-1} e^{-\lambda x}$$

при $x > 0$ и 0 при $x < 0$. 8.7. Рассмотреть сначала случай, когда α рационально; в общем случае приблизить α последовательностью рациональных чисел. 8.8. Покажем, что для любого целого положительного n $(f(t))^{1/n}$ — характеристическая функция. Фиксируем n. Для каждого n_k найдется целое неотрицательное l_k, такое, что $nl_k \leqslant n_k \leqslant nl_{k+1}$. Очевидно, $l_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Имеем $\left|\frac{1}{n} - \frac{l_k}{n_k}\right| \leqslant \left|\frac{l_k}{nl_k} - \frac{l_k}{n\,l_{k+1}}\right| = \frac{1}{n\,l_{k+1}} \to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, $(f(t))^{l_k/n_k} \to (f(t))^{1/n}$ при $k \to \infty$. Но все $(f(t))^{l_k/n_k}$ — характеристические функции, а предельная функция $(f(t))^{1/n}$ непрерывна в нуле (поскольку $f(t)$ непрерывна в нуле). Отсюда $(f(t))^{1/n}$ — характеристическая функция. 8.9. Покажите, что характеристическая функция равномерного на отрезке распределения обязательно обращается в нуль, и воспользуйтесь задачей 8.5. 8.10. Найдите соответствующую характеристическую функцию пуассоновского, отрицательного биномиального, нормального распределений и покажите, что корень n-й степени из характеристической функции пуассоновского, отрицательного биномиального, нормального распределений и распределения Коши представляет собой соответственно характеристическую функцию пуассоновского отрицательного биномиального, нормального распределений и распределения Коши (правда, с другими параметрами). 8.12. См. решение задачи 8.9. 8.13. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция, отвечающая функции распределения $F(x)$. Тогда функция распределения $(F(x) + F(x+a))/2$ имеет характеристическую функцию $\frac{f(t) + f(t)e^{-ita}}{2} = \frac{f(t)}{2}(1 + \cos ta - i\sin ta)$, которая обращается в нуль, например, при $t = \pi/a$.

8.14. Покажите, что непрерывная и линейная на каждом отрезке $[n, n+1]$ функция распределения имеет в качестве компоненты равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение, и воспользуйтесь задачей 8.9. 8.15. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathscr{A}$ — множество всех подмножеств Ω, $\mathbf{P}(\{k\}) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ $(\lambda > 0)$. Тогда случайная величина $\xi(\omega) = \omega$ имеет пуассоновское (и, значит, безгранично делимое) распределение, но не может быть разложена в сумму двух независимых одинаково распределенных случайных величин (действительно, если это не так, т. е. $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 независимы и одинаково распределены, то ξ_1 имеет распределение Пуассона с параметром $\frac{\lambda}{2}$; это означает, что Ω можно разбить на непересекающиеся подмножества $A_0, A_1, A_2, \ldots$ так, что $\mathbf{P}(A_k) = e^{-\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k\Big/k!$, а это невозможно). 8.16. Предположим противное: ξ безгранично делима, невырождена и

$$|\xi| \leqslant l. \qquad (1)$$

Очевидно, $\mathsf{D}\xi \leqslant l^2$. Далее, при каждом n $\xi = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$, где $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ независимы и одинаково распределены. Из (1) следует, что $|\xi_1^{(n)}| \leqslant l/n$ и, значит,

$$\mathsf{D}\xi_1^{(n)} \leqslant l^2/n^2. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\mathsf{D}\xi_1^{(n)} = \frac{1}{n}\mathsf{D}\xi, \tag{3}$$

причем $\mathsf{D}\xi_1^{(n)} \neq 0$. Разделив (2) на (3), получим $1 \leqslant l^2/n\mathsf{D}\xi$ или $\mathsf{D}\xi \leqslant l^2/n$, откуда в силу произвольности n следует, что $\mathsf{D}\xi = 0$, т. е. ξ — вырождена. Противоречие. **8.17.** Достаточно доказать, что $f(t)$ — характеристическая функция (так как $(f(t))^{1/n} = \exp\left\{\frac{p}{n}(\varphi(t) - 1)\right\} = \exp\{p'(\varphi(t) - 1)\}$, т. е. имеет тот же вид, что и $f(t)$). Пусть n — целое положительное число, такое, что $n > p$. Положим $f_n(t) = \left(\left(1 - \frac{p}{n}\right) + \frac{p}{n}\varphi(t)\right)^n = \left(1 + \frac{p(\varphi(t) - 1)}{n}\right)^n$ При каждом $nf_n(t)$ — характеристическая функция (см. задачу 4.28). Но $f_n(t) \to f(t)$ при $n \to \infty$ и $f(t)$ непрерывна в нуле, следовательно, $f(t)$ — характеристическая функция. **8.18.** Поскольку $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{n}\left((\varphi(t))^{1/n} - 1\right)\right\}$ и $(f(t))^{1/n}$ — характеристическая функция при любом n, то достаточно положить $p_n = 1/n$ и $\varphi_n(t) = (f(t))^{1/n}$. **8.19.** Имеем $\ln f(t) = \ln\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \ln\left(1 - \frac{\varphi(t)}{a}\right)$. Разлагая в ряд и переходя к экспонентам, получим $f(t) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{1}{ka^k}\left((f(t))^k - 1\right)\right\}$. Применяя задачи 8.2, 8.3, 8.17, убеждаемся, что $f(t)$ безгранично делима. **8.20.** Воспользуйтесь задачей 8.19 (характеристическая функция геометрического распределения равна $(p-1)/(p - e^{it})$, $p > 1$). **8.21.** Покажите, что функция $\exp\{\psi(t)/n\}$ выпукла при $t > 0$ и воспользуйтесь задачей 4.40. **8.22.** Для любых b_1 и b_2

$$f(b_1 t) f(b_2 t) = e^{-\frac{b_1^2 t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{b_2^2 t^2}{2}} = e^{-\frac{\left(b_1^2 + b_2^2\right)}{2} t^2} = f\left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\, t\right)$$

и, значит, $f(t)$ устойчива. Аналогично доказывается устойчивость распределения Коши. **8.23.** Нельзя. Например, распределение суммы независимых случайных величин, одна из которых имеет нормальное распределение, а другая — распределение Коши, не является устойчивым. **8.24.** Пусть $f(t)$ — произвольная характеристическая функция. Тогда по определению устойчивости

$$\begin{aligned}
&f(t)\,f(t) = f(b_1 t)\exp\{ia_1 t\},\\
&f(b_1 t)\,f(t) = f(b_2 t)\exp\{ia_2 t\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(b_{n-2} t)\,f(t) = f(b_{n-1} t)\exp\{ia_{n-1} t\}
\end{aligned}$$

и, значит, $(f(t))^n = f(b_{n-1}t)\exp\{i(a_1 + \ldots + a_{n-1})t\}$, откуда $\left(f\left(\frac{t}{b_{n-1}}\right)\right)^n \exp\left\{-i\,\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{b_{n-1}}\,t\right\} = f(t)$ и, следовательно,

$(f(t))^{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{t}{b_{n-1}}\right)\exp\left\{-i\,\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{nb_{n-1}}\,t\right\}$ является характеристической функцией. 8.25. Нет. 8.26. Для любых b_1 и b_2

$$f(b_1t)\,f(b_2t) = \exp\{-c\,|b_1|^\alpha\,|t|^\alpha\}\cdot\exp\{-c\,|b_2|^\alpha\,|t|^\alpha\} =$$
$$= \exp\{-c\left(|b_1|^\alpha+|b_2|^\alpha\right)|t|^\alpha\} = f\left(\left(|b_1|^\alpha+|b_2|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}t\right).$$

8.27. Воспользуйтесь каноническим представлением для устойчивых характеристических функций и задачей 4.94. 8.28. Используя каноническое представление устойчивой характеристической функции, покажите, что левая производная в нуле не равна правой. 8.29. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие одинаковое пуассоновское распределение, α — иррациональное число. Тогда $\xi+\alpha\eta$ имеет безгранично делимое распределение (в силу задач 8.1 и 8.3), дискретное, но не решетчатое ($\mathbf{P}(\xi+\alpha\eta=1)>0$ и $\mathbf{P}(\xi+\alpha\eta=\alpha)>0$). 8.30. Характеристическая функция, отвечающая плотности $p(x)$, равна $f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \exp\{-c_k\,|t|\}$. Два раза продифференцировав функцию $(f(t))^{1/n}$ при $t>0$, убедитесь, что она выпукла, монотонно убывает и, следовательно (см. задачу 4.40), является характеристической функцией. 8.31. См. указание к предыдущей задаче. 8.32. Дважды продифференцировав функцию $(f(t))^{1/n}$ при $t>0$ и доказав неравенство $f''(t)f(t)\geqslant(f'(t))^2$, убедитесь, что $f(t))^{1/n}$ выпукла и убывает при $t>0$ и, следовательно (см. задачу 4.40), является характеристической функцией. 8.33. Да, конечно (например, пусть ξ — случайная величина с пуассоновским распределением, тогда производящая функция случайной величины $\xi+1$ равна 0 при $z=0$). 8.34. Положим $p_k=\mathbf{P}(\xi=k)$, $k=0,\pm1,\ldots$. Тогда

$$\mathbf{P}(\xi \text{ делится на } 2) - \mathbf{P}(\xi \text{ не делится на } 2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k p_k. \qquad (1)$$

Пусть $f(t)$ — характеристическая функция ξ. Имеем

$$f(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{i\pi k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k p_k. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2) и учитывая, что характеристическая функция безгранично делимого распределения не обращается в нуль (задача 8.5), получаем нужное утверждение. 8.35. См. решение предыдущей задачи. 8.36. Пусть $f(t)$ — характеристическая функция ξ. Тогда существует характеристическая функция $f_2(t)$, такая, что $f(t)=f_2^2(t)$. Легко видеть, что $f_2(t)$ отвечает целочисленному распределению. Пусть p_0, p_1, p_{-1}, … — вероятности, которые это распределение приписывает точкам 0, $+1$, -1, … Тогда (см. решение задачи 8.34) $f_2(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k p_k$ и, значит, $f_2(\pi)$ вещественно. Но тогда $f(\pi)=f_2^2(\pi)>0$, а $f(\pi) = \mathbf{P}(\xi$ делится на $2) - \mathbf{P}(\xi$ не делится на $2)$ (см. решение задачи 8.34).

8.37. Пусть $f(z)$ — производящая функция ξ: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(\xi=k)\,z^k$. В силу безграничной делимости для каждого целого положительного n существует производящая функция $\varphi_n(z)$, такая, что $f(z)=\varphi_n^n(z)$. Пусть $\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(n)}z^k$. Тогда $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(\xi=k)\,z^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(n)}z^k\right)^n$, откуда $\mathbf{P}(\xi=1)=na_1^{(n)}$ и, следовательно, $a_1^{(n)}>0$. Зафиксировав k и положив $n=k$, получаем $\mathbf{P}\,(\xi=k)\geqslant\left(a_1^{(n)}\right)^k>0$. 8.38. Не ограничивая общности можно считать, что $a=0$. Пусть $p(x)$ — фигурирующая в условии задачи плотность распределения, $f(t)$ — соответствующая характеристическая функция. Тогда $f(t)>0$ и (см. задачу 4.116)

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx f(t)\,dt<\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt=p(0).$$

8.39. См. решение предыдущей задачи. 8.40. Покажите, что $f(t)$ не может быть представлена в каноническом виде формула Леви — Хинчина. 8.41. Может. 8.43. Имеем

$$\eta_{nk}=(\xi_{nk,1}+\xi_{nk,2}+\ldots+\xi_{nk,k})+\ldots+(\xi_{nk,n(k-1)+1}+\ldots+\xi_{nk,nk}).$$

Положим

$$\eta_n^{(1)}=\xi_{nk,1}+\ldots+\xi_{nk,k},\ \ldots,\ \eta_n^{(k)}=\xi_{nk,n(k-1)+1}+\ldots+\xi_{nk,nk}$$

Последовательность распределений величин η_{nk} сходится при $n\to\infty$ и, следовательно, является относительно компактной, а значит, в силу теоремы Прохорова (см. задачу 5.54), плотной. Легко показать, что из плотности множества распределений η_{nk} следует плотность, а значит, в силу теоремы Прохорова, и относительная компактность множества распределений случайных величин $\eta_n^{(1)}$. Отсюда следует существование подпоследовательности n_i, такой, что $\eta_{n_i}^{(1)}\xrightarrow{D}\eta_1$. Аналогично $\eta_{n_i}^{(2)}\xrightarrow{D}\eta_2,\ \ldots,\ \eta_{n_i}^{(k)}\xrightarrow{D}\eta_k$, причем из независимости и одинаковой распределенности $\eta_n^{(1)},\ \ldots,\ \eta_n^{(k)}$ следует независимость и одинаковая распределенность $\eta_1,\ \ldots,\ \eta_k$. Окончательно получаем $\eta_{n_ik}\xrightarrow{D}\eta_1+\ldots$ $\ldots+\eta_k$ и $\eta_{n_ik}\xrightarrow{D}\eta$, откуда следует, что распределения η и $\eta_1+\ldots+\eta_k$ совпадают. В силу произвольности k это означает безграничную делимость распределения η. 8.44. См. решения задач 8.17 и 8.18. 8.45. Пусть $G(x)$ — функция распределения, отвечающая характеристической функции $\psi(t)$. Положим $h(u)=\int_0^u\psi(y)\,dy=\int_0^u\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyx}dG(x)\,dy$. Порядок интегрирования можно изменить, поэтому $h(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iux}-1}{ix}\,dG(x)$. Обозначим $\varphi(t)=$ $=-\int_0^t\int_0^u\psi(u)\,dy\,du$, тогда $\varphi(t)=-\int_0^t h(u)\,du=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{iux}}{ix}\,dG(x)\,du$. Снова изменив порядок интегрирования, получаем $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-ixt\right)\frac{dG(x)}{x^2}$,

т. е. функция $f(t)=\exp\{\varphi(t)\}$ допускает каноническое представление Колмогорова и, следовательно, является характеристической функцией безгранично делимого распределения с конечной дисперсией. 8.46. В предыдущей задаче положите $\psi(t)=e^{-|t|}$. 8.47. Воспользуйтесь каноническим представлением Леви — Хинчина и периодичностью функции $\varphi(z)$. 8.48. Ср. с предыдущей задачей. 8.49. Сходимость $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$ эквивалентна сходимости $\ln\varphi_n(t)\to\ln\varphi(t)$. 8.50. Покажите, что характеристическая функция случайной величины η равна $\exp\{\lambda(f(t)-1)\}$, где $f(t)$ — характеристическая функция

ξ_1, а λ — параметр распределения случайной величины ν, и примените задачу 8.17. 8.52. Для нормального распределения параметр γ и функция $G(x)$ равны $\gamma = a$, $G(x) = \sigma^2 E(x)$ ($E(x)$ — вырожденная в нуле функция распределения), где a — математическое ожидание, а σ^2 — дисперсия. Для пуассоновского распределения — $\gamma = \frac{\lambda}{2}$, $G(x) = \frac{\lambda}{2} E(x-1)$, где λ — параметр распределения. 8.53. Воспользуйтесь каноническим представлением Леви — Хинчина и предыдущей задачей.

Глава 9

9.1. Выразите конечномерные распределения последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ через начальное распределение и вероятности перехода за один шаг. Воспользуйтесь теоремой Колмогорова о согласованных распределениях. 9.2. Нет. Например, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 9.3. Нет. Например, $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Такую матрицу вероятностей перехода за два шага имеют цепи с матрицами вероятностей перехода за один шаг $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 9.4. Пусть $A = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-d & d \end{pmatrix}$ — стохастическая матрица второго порядка. Предположим, что $A = P^2$, где $P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ — стохастическая матрица. Тогда

$$\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + (1-a)(1-b) & (a+b)(1-a) \\ (a+b)(1-b) & b^2 + (1-a)(1-b) \end{pmatrix}.$$

Отсюда $c + d = (a + b - 1)^2 + 1 \geqslant 1$. То есть для того, чтобы матрица A являлась матрицей вероятностей перехода за два шага необходимо, чтобы $c + d \geqslant 1$. Пусть $c + d \geqslant 1$. Докажем, что система уравнений $a^2 + (1-a)(1-b) = c$, $(a+b)(1-a) = 1-c$, $(a+b)(1-b) = 1-d$, $b^2 + (1-a)(1-b) = d$ имеет такое решение, что $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$. При $c + d \geqslant 1$ из 1-го и 4-го уравнений имеем $(a+b-1)^2 = c + d - 1$ или $a + b = 1 \pm \sqrt{c+d-1}$). Рассмотрим отдельно случаи $1 \leqslant c+d < 2$ и $c+d = 2$. В первом случае из 2-го и 3-го уравнений находим $1 - a = (1-c)/(1 \pm \sqrt{c+d-1})$, $1 - b = (1-d)/(1 \pm \sqrt{c+d-1})$. Легко видеть, что указанные a и b удовлетворяют также первому и четвертому уравнениям. Кроме того, очевидно, что по крайней мере решения $1 - a = (1-c)/(1 + \sqrt{c+d-1})$ и $1 - b = (1-d)/(1+\sqrt{c+d-1})$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant 1 - a \leqslant 1$, $0 \leqslant 1 - b \leqslant 1$. Случай $c + d = 2$ (т. е. $c = d = 1$) тривиален. 9.5. $(c + d = 1) \cup (c^2 - c + 1 < d \leqslant 1) \cup (d^2 - d + 1 < c \leqslant 1)$.

9.6. а) $$\mathsf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_k = i_k) = \frac{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{k-1}} \mathsf{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0)}{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{k-1}} \mathsf{P}(\xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0)} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{k-1}} \mathsf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}) \mathsf{P}(\xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0)}{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{k-1}} \mathsf{P}(\xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0)} =$$
$$= \mathsf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}).$$

б) $$\mathsf{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k, \ldots, \xi_0 = i_0) = \frac{\mathsf{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0)}{\mathsf{P}(\xi_k = i_k, \ldots, \xi_0 = i_0)} =$$
$$= \mathsf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_k = i_k) \mathsf{P}(\xi_{n-1} = i_{n-1} \mid \xi_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, \xi_k = i_k) \ldots \mathsf{P}(\xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k) = \mathsf{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k).$$

в) $$\mathsf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_k = i_k, \ \ldots, \ \xi_0 = i_0) = \frac{\sum\limits_{i_{k+1}} \ldots \sum\limits_{i_{n-1}} \mathsf{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0)}{\mathsf{P}(\xi_k = i_k, \ldots, \xi_0 = i_0)} =$$

$$= \sum_{i_{k+1}} \ldots \sum_{i_{n-1}} \mathsf{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k) = \mathsf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_k = i_k).$$

9.7. Пусть $A = \{\xi_0 \in A_0, \ldots, \xi_{n-1} \in A_{n-1}\}$, $B = \{\xi_{n+1} \in B_1, \ldots, \xi_{n+m} \in B_m\}$. Тогда

$$\mathsf{P}(AB \mid \xi_n = x_n) = \frac{\mathsf{P}(AB \cap (\xi_n = x_n))}{\mathsf{P}(\xi_n = x_n)} = \frac{\mathsf{P}((\xi_n = x_n) \cap A)\,\mathsf{P}(B \mid A \cap (\xi_n = x_n))}{\mathsf{P}(\xi_n = x_n)} =$$

$$= \mathsf{P}(A \mid \xi_n = x_n)\,\mathsf{P}(B \mid \xi_n = x_n).$$

9.8. Воспользуйтесь результатами задачи 9.6.

9.9. $$\mathsf{P}(\xi_{\tau+n+1} = i_{n+1} \mid \xi_{\tau+n} = i_n, \ldots, \xi_\tau = i_0) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = j)\,\mathsf{P}(\xi_{j+n+1} = i_{n+1}, \ldots, \xi_j = i_0)}{\mathsf{P}(\xi_{\tau+n} = i_n, \ldots, \xi_\tau = i_0)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = j)\,\mathsf{P}(\xi_{j+n+1} = i_{n+1} \mid \xi_{j+n} = i_n)\,\mathsf{P}(\xi_{j+n} = i_n, \ldots, \xi_j = i_0)}{\mathsf{P}(\xi_{\tau+n} = i_n, \ldots, \xi_\tau = i_0)} =$$

$$= \mathsf{P}(\xi_1 = i_{n+1} \mid \xi_0 = i_n).$$

Аналогично $\mathsf{P}(\xi_{\tau+n+1} = i_{n+1} \mid \xi_{\tau+n} = i_n) = \mathsf{P}(\xi_1 = i_{n+1} \mid \xi_0 = i_n)$. Для неоднородных цепей Маркова равенства, вообще говоря, неверны. Рассмотрите пример: $\mathsf{P}(\tau = 0) = P(\tau = 1) = 1/2$, $\mathsf{P}(\xi_0 = 1) = 2/5$, $\mathsf{P}(\xi_0 = 2) = 3/5$, $(\mathsf{P}(\xi_1 = j \mid \xi_0 = i)) = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$, $(\mathsf{P}(\xi_2 = j \mid \xi_1 = i)) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $(\mathsf{P}(\xi_3 = j \mid \xi_2 = i)) = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Покажите, что $\mathsf{P}(\xi_{\tau+2} = 1 \mid \xi_{\tau+1} = 1, \xi_\tau = 1) \neq \mathsf{P}(\xi_{\tau+2} = 1 \mid \xi_{\tau+1} = 1)$.

9.10. $$\mathsf{P}\left(\xi_{\tau_n+\ldots+\tau_1} = i_n \mid \xi_{\tau_{n-1}+\ldots+\tau_1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{\tau_1} = i_1\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j_1} \ldots \sum\limits_{j_n} \mathsf{P}\left(\xi_{j_n+\ldots+j_1} = i_n, \ldots, \xi_{j_1} = i_1\right)\mathsf{P}(\tau_1 = j_1) \ldots P(\tau_n = j_n)}{\mathsf{P}\left(\xi_{\tau_{n-1}+\ldots+\tau_1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{\tau_1} = i_1\right)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j_n} \mathsf{P}\left(\xi_{j_n} = i_n \mid \xi_0 = i_{n-1}\right)\mathsf{P}(\tau_n = j_n)\,\mathsf{P}\left(\xi_{\tau_{n-1}+\ldots+\tau_1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{\tau_1} = i_1\right)}{\mathsf{P}\left(\xi_{\tau_{n-1}+\ldots+\tau_1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{\tau_1} = i_1\right)} =$$

$$= \mathsf{P}\left(\xi_{\tau_n} = i_n \mid \xi_0 = i_{n-1}\right).$$

Аналогично $\mathsf{P}\left(\xi_{\tau_n+\ldots+\tau_1} = i_n \mid \xi_{\tau_{n-1}+\ldots+\tau_1} = i_{n-1}\right) = \mathsf{P}\left(\xi_{\tau_n} = i_n \mid \xi_0 = i_{n-1}\right)$.

9.11. Если $a + b = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)} = P^{(n)} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$, если $a + b = 0$ (т. е. $a = b = 0$), то $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)} = P^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Если $a + b \neq 1$, $a + b \neq 0$, то

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} b/(a+b) + (1-a-b)^n a/(a+b) & a/(a+b) - (1-a-b)^n a/(a+b) \\ b/(a+b) - (1-a-b)^n a/(a+b) & a/(a+b) + (1-a-b)^n a/(a+b) \end{pmatrix},$$

причем при $a + b < 2$ $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} b/(a+b) & a/(a+b) \\ b/(a+b) & a/(a+b) \end{pmatrix}$, а при $a + b = 2$, т. е. $a = b = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ не существует. Указание: запишите уравнение Колмогорова — Чепмена $P^{(n)} = P^{(n-1)} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ и воспользуйтесь методом производящих функций. 9.12. Покажите, что из условия задачи следует, что матрицы P и $P^{(n)}$ имеют вид

$$P = \begin{Vmatrix} a & \frac{1-a}{2} & \frac{1-a}{2} \\ \frac{1-a}{2} & a & \frac{1-a}{2} \\ \frac{1-a}{2} & \frac{1-a}{2} & a \end{Vmatrix}, \quad P^{(n)} = \begin{Vmatrix} a^{(n)} & \frac{1-a^{(n)}}{2} & \frac{1-a^{(n)}}{2} \\ \frac{1-a^{(n)}}{2} & a^{(n)} & \frac{1-a^{(n)}}{2} \\ \frac{1-a^{(n)}}{2} & \frac{1-a^{(n)}}{2} & a^{(n)} \end{Vmatrix}.$$

Используя уравнение Колмогорова — Чепмена, покажите, что $a^{(n)} = \frac{3a-1}{2} a^{(n-1)} + \frac{1-a}{2}$. Отсюда $a^{(n)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{3a-1}{2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = \begin{cases} 1/3, & a \neq 1, \\ 1, & a = 1. \end{cases}$ 9.13. Покажите, что матрица P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1n} \\ P_{1n}P_{11} & \ldots & P_{1n-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_{12} & \ldots & P_{1n}P_{11} \end{pmatrix}.$$

9.14. Из уравнения Колмогорова — Чепмена $P_{ij}^{(n)} = \sum\limits_k P_{ik} P_{kj}^{(n-1)} \geqslant \sum\limits_k P_{ik} \min\limits_l P_{lj}^{(n-1)} = \alpha_j(n-1)$, и, значит, $\alpha_j(n) = \min\limits_i P_{ij}^{(n)} \geqslant \alpha_j(n-1)$. Аналогично $P_{ij}^{(n)} \leqslant \sum\limits_k P_{ik} \max\limits_l P_{lj}^{(n-1)} = \beta_j(n-1)$, т. е. $\beta_j(n) \leqslant \beta_j(n-1)$. Кроме того, очевидно, $\alpha_j(n) \leqslant \beta_j(n)$. 9.15. Воспользуйтесь результатом задачи 9.8. 9.16. Так как $\xi_0, \xi_1 \ldots$ — независимы, то

$\mathsf{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0) = \mathsf{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1}) = \mathsf{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n)$

Кроме того, $P_{ij}^{(n)} = \mathsf{P}(\xi_n = j \mid \xi_0 = i) = \mathsf{P}(\xi_n = j) = \mathsf{P}(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i) = P_{ij}$ 9.17. Если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ независимы, то, как следует из предыдущей задачи, строки матрицы вероятностей перехода за один шаг (и за любое число шагов) одинаковы. Пусть в матрице вероятностей перехода за один шаг строки одинаковы, т. е. $P_{ij} = \alpha_j$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда $\mathsf{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) = \mathsf{P}(\xi_0 = i_0)\mathsf{P}(\xi_1 = i_1 \mid \xi_0 = i_0) \ldots \mathsf{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}) = \mathsf{P}(\xi_0 = i_0)\alpha_{i_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_n}$. С другой стороны,

$$\mathsf{P}(\xi_1 = i_1) = \sum_{i_0} \mathsf{P}(\xi_0 = i_0)\mathsf{P}(\xi_1 = i_1 \mid \xi_0 = i_0) = \sum_{i_0} \mathsf{P}(\xi_0 = i_0)\alpha_{i_1} = \alpha_{i_1},$$

$$\mathsf{P}(\xi_2 = i_2) = \sum_{i_1} \mathsf{P}(\xi_1 = i_1)\mathsf{P}(\xi_2 = i_2 \mid \xi_1 = i_1) = \sum_{i_1} \mathsf{P}(\xi_1 = i_1)\alpha_{i_2} = \alpha_{i_2},$$

. . . .

$$\mathsf{P}(\xi_n = i_n) = \alpha_{i_n}.$$

Таким образом, $\mathbf{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_n = i_n) = \mathbf{P}(\xi_0 = i_0) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(\xi_n = i_n)$, т. е. $\xi_0, \xi_1, \ldots$ независимы. 9.18. Нет. Это легко показать с помощью следующего примера. Пусть ξ_0, ξ_1, ξ_2 — случайные величины, такие, что $\mathbf{P}(\xi_i = 0) = \mathbf{P}(\xi_i = 1) = 1/2$, $\mathbf{P}(\xi_i = l_1, \xi_j = l_2) = 1/4$, $l_1 = 0,1$; $l_2 = 0,1$; $\mathbf{P}(\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0) = \mathbf{P}(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \mathbf{P}(\xi_0 = 1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = \mathbf{P}(\xi_0 = 1, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = 1/6$, $\mathbf{P}(\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = \mathbf{P}(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = \mathbf{P}(\xi_0 = 1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0) = \mathbf{P}(\xi_0 = 1, \xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = 1/12$. Очевидно, случайные величины ξ_0, ξ_1, ξ_2 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности (проверьте, что указанные распределения согласованы). Для введенных случайных величин $\mathbf{P}(\xi_2 = 0 | \xi_1 = 0, \xi_0 = 0) = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = \mathbf{P}(\xi_2 = 0 | \xi_1 = 0)$. 9.19. а) является; б) не является; в) не является. 9.20. а) будет; б) будет; в) не будет. 9.21. а) будет; б) не будет; в) не будет. 9.22. а) образует; б) образует; в) нет; г) образует; д) образует.

9.23.
$$\mathbf{P}(\eta_k = i_k | \eta_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \eta_0 = i_0) = \frac{\mathbf{P}(\eta_k = i_k, \ldots, \eta_0 = i_0)}{\mathbf{P}(\eta_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \eta_0 = i_0)} =$$
$$= \frac{\mathbf{P}(\xi_n = i_0, \ldots, \xi_{n-k} = i_k)}{\mathbf{P}(\xi_n = i_0, \ldots, \xi_{n-k+1} = i_{k-1})} =$$
$$= \frac{\mathbf{P}(\xi_n = i_0 | \xi_{n-1} = i_1)\, \mathbf{P}(\xi_{n-1} = i_1, \ldots, \xi_{n-k} = i_k)}{\mathbf{P}(\xi_n = i_0 | \xi_{n-1} = i_1)\, \mathbf{P}(\xi_{n-1} = i_1, \ldots, \xi_{n-k+1} = i_{k-1})} =$$
$$= \ldots = \frac{\mathbf{P}(\xi_{n-k+1} = i_{k-1}, \xi_{n-k} = i_k)}{\mathbf{P}(\xi_{n-k+1} = i_{k-1})} = \mathbf{P}(\xi_{n-k} = i_k | \xi_{n-k+1} = i_{k-1}) =$$
$$= \mathbf{P}(\eta_k = i_k | \eta_{k-1} = i_{k-1}).$$

Произвольная перестановка цепь Маркова, вообще говоря, не образует. Пусть, например, $\zeta_0 = \xi_1$, $\zeta_1 = \xi_0$, $\zeta_2 = \xi_2$. Тогда $\mathbf{P}(\zeta_2 = 1 | \zeta_1 = 1, \zeta_0 = 1) = \mathbf{P}(\xi_2 = 1 | \xi_0 = 1, \xi_1 = 1) = P_{11}$, $\mathbf{P}(\zeta_2 = 1 | \zeta_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_2 = 1 | \xi_0 = 1) = P_{11}^{(2)}$, и если $P_{11} \neq P_{11}^{(2)}$, то $\mathbf{P}(\zeta_2 = 1 | \zeta_1 = 1, \zeta_0 = 1)) \neq \mathbf{P}(\zeta_2 = 1 | \zeta_1 = 1)$. 9.24. Нет. Пусть, например, $\xi_0, \xi_1, \ldots$ независимы, $\xi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1 - p, \quad p \neq 1/2. \end{cases}$ Тогда
$$\mathbf{P}(\xi_2 + \xi_3 = 1 | \xi_1 + \xi_2 = 1, \xi_0 + \xi_1 = 0) = \frac{\mathbf{P}(\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0)}{\mathbf{P}(\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1)} =$$
$$= q, \text{ а } \mathbf{P}(\xi_2 + \xi_3 = 1 | \xi_1 + \xi_2 = 1) =$$
$$= \frac{\mathbf{P}(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0) + \mathbf{P}(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1)}{\mathbf{P}(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) + \mathbf{P}(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0)} = 1/2.$$

9.25. Нет. Возьмем, например, цепь Маркова с двумя состояниями $\{1, 2\}$, матрицей вероятностей перехода за один шаг $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ и начальным распределением $(1/3, 2/3)$. При таком начальном распределении распределение на n-м шаге также будет $(1/3, 2/3)$. Легко проверить, что $\mathbf{P}(\xi_4 + \xi_5 = 3 | \xi_2 + \xi_3 = 3, \xi_0 + \xi_1 = 3) \neq \mathbf{P}(\xi_4 + \xi_5 = 3 | \xi_2 + \xi_3 = 3)$. 9.26. Нет. Рассмотрим цепь Маркова $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с тремя состояниями $\{1, 2, 3\}$, матрицей вероятностей перехода $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ и начальным распределением $\left(\frac{6}{17}, \frac{5}{17}, \frac{6}{17}\right)$. Распределение на n-м шаге также будет $(6/17, 5/17, 6/17)$. Легко подсчитать, что $\mathbf{P}(\eta_2 = 1 | \eta_1 = 0, \eta_0 = 1) = \frac{7}{20}$, $\mathbf{P}(\eta_2 = 1 | \eta_1 = 0) = \frac{4}{11}$. 9.27. а) Да — при $p = q = 1/2$, нет — при $p \neq q$. Действительно, $\mathbf{P}(\eta_n = i_n, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0) =$

$= \mathbf{P}(\xi_0 = 1)\mathbf{P}(\xi_1 = i_1) \ \ldots \ \mathbf{P}(\xi_{n+1} = i_n/i_{n-1}) + \mathbf{P}(\xi_0 = -1)\mathbf{P}(\xi_1 = -i_1) \times \ldots$ $\ldots \times \mathbf{P}(\xi_{n+1} = -i_n/i_{n-1})$, $\mathbf{P}(\eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0) = \mathbf{P}(\xi_0 = 1)\mathbf{P}(\xi_1 = i_1) \times \ldots$ $\ldots \times \mathbf{P}(\xi_n = i_{n-1}/i_{n-2}) + \mathbf{P}(\xi_0 = -1)\mathbf{P}(\xi_1 = -i_1) \ \ldots \ \mathbf{P}(\xi_n = -i_{n-1}/i_{n-2})$. Таким образом, при $p = q = 1/2$ имеем $\mathbf{P}(\eta_n = i_n \mid \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(\eta_n = i_n | \eta_{n-1} = i_{n-1})$. При $p \neq q$ достаточно взять какую-нибудь конкретную комбинацию $i_0, \ldots, i_n$, например $i_j = 1$, $j = \overline{0, n}$. Тогда $\mathbf{P}(\eta_n = 1 | \eta_{n-1} = 1, \ldots, \eta_0 = 1) = \dfrac{q^{n+2} + p^{n+2}}{q^{n+1} + p^{n+1}}$, а $\mathbf{P}(\eta_n = 1 | \eta_{n-1} = 1) = \dfrac{q^3 + p^3}{q^2 + p^2}$.

б) Да. в) Да. 9.28. $\mathbf{P}(\eta_n = i_n | \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0) =$

$$= \frac{\mathbf{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1 - i_0, \ldots, \xi_n = i_n - i_{n-1})}{\mathbf{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1 - i_0, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2})} = \mathbf{P}(\xi_n = i_n - i_{n-1}) = P_{i_n - i_{n-1}}.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(\eta_n = i_n | \eta_{n-1} = i_{n-1}) = \frac{\mathbf{P}(\xi_0 + \ldots + \xi_n = i_n, \ \xi_0 + \ldots + \xi_{n-1} = i_{n-1})}{\mathbf{P}(\xi_0 + \ldots + \xi_{n-1} = i_{n-1})} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(\xi_n = i_n - i_{n-1}, \ \xi_0 + \ldots + \xi_{n-1} = i_{n-1})}{\mathbf{P}(\xi_0 + \ldots + \xi_{n-1} = i_{n-1})} = \mathbf{P}(\xi_n = i_n - i_{n-1}) = P_{i_n - i_{n-1}}$$

Таким образом, $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг P, где $P_{ij} = P_{j-i}$. 9.29. Нет. Возьмем, например, две независимые между собой цепи Маркова $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$, такие, что ξ_i и η_i принимают значения 0 и 1, начальные распределения $\mathbf{P}(\xi_0 = 0) = \mathbf{P}(\xi_0 = 1) = \mathbf{P}(\eta_0 = 0) = \mathbf{P}(\eta_0 = 1) = 1/2$ и матрицы вероятностей перехода за один шаг для $\{\xi_i\}$: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; для $\{\eta_i\}$: $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ Тогда $\mathbf{P}(\xi_2 + \eta_2 = 0 | \xi_1 + \eta_1 = 1, \xi_0 + \eta_0 = 0) = 5/18$, а $\mathbf{P}(\xi_2 + \eta_2 = 0 | \xi_1 + \eta_1 = 1) = 1/2$.

9.30. $$\mathbf{P}(\eta_n = i_n | \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0) = \frac{\mathbf{P}(\eta_n = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0)}{\mathbf{P}(\eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \xi_{i_0}^{(1)} = i_1, \ldots, \xi_{i_{n-1}}^{(n)} = i_n\right)}{\mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{i_{n-2}}^{(n-1)} = i_{n-1}\right)} = \mathbf{P}\left(\xi_{i_{n-1}}^{(n)} = i_n\right),$$

$$\mathbf{P}(\eta_n = i_n | \eta_{n-1} = i_{n-1}) = \frac{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{n-2}} \mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{i_{n-2}}^{(n-1)} = i_{n-1}, \xi_{i_{n-1}}^{(n)} = i_n\right)}{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{n-2}} \mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{i_{n-2}}^{(n-1)} = i_{n-1}\right)} =$$

$$= \mathbf{P}\left(\xi_{i_{n-1}} = i_n\right) \frac{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{n-2}} \mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{i_{n-2}}^{(n-1)} = i_{n-1}\right)}{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{n-2}} \mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{i_{n-2}}^{(n-1)} = i_{n-1}\right)} = \mathbf{P}\left(\xi_{i_{n-1}}^{(n)} = i_n\right).$$

9.31. Множество состояний — $\{1, 2, \ldots, n\}$. Начальное распределение — $\mathbf{P}(\eta_0 = j) = \mathbf{P}_{0j}$, $j = \overline{1, n}$. Матрица вероятностей перехода за один шаг — $\mathbf{P}(\eta_n = j | \eta_{n-1} = i) = \mathbf{P}\left(\xi_i^{(1)} = j\right) = P_{ij}$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$. 9.32. Воспользуйтесь результатом задачи 9.31.

9.33. $\mathbf{P}\left(\eta_{k+1} \in A_{k+1} | \eta_k = x_{i_k}, \ldots, \eta_0 = x_{i_0}\right) =$

$$= \frac{\mathbf{P}\left(f_k(\eta_k, \xi_{k+1}) \in A_{k+1}, \ \eta_k = x_{i_k}, \ldots, \eta_0 = x_{i_0}\right)}{\mathbf{P}\left(\eta_k = x_{i_k}, \ldots, \eta_0 = x_{i_0}\right)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\left(f_k\left(x_{i_k}, \xi_{k+1}\right) \in A_{k+1}\right) \mathbf{P}\left(\eta_k = x_{i_k}, \ldots, \eta_0 = x_{i_0}\right)}{\mathbf{P}\left(\eta_k = x_{i_k}, \ldots, \eta_0 = x_{i_0}\right)} = \mathbf{P}\left(f_k\left(x_{i_k}, \xi_{k+1}\right) \in A_{k+1}\right) =$$

$= \mathbf{P}\left(\eta_{k+1} \in A_{k+1} \mid \eta_k = x_{i_k}\right)$. **9.34.** Нет. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — цепь Маркова с тремя состояниями 1, 0, -1, матрицей вероятностей перехода $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ и начальным распределением $\left(\frac{6}{17}, \frac{5}{17}, \frac{6}{17}\right)$. В качестве функции f возьмем $f(x) = x^2$. Тогда $\mathbf{P}\left(\xi_2^2 = 0 \mid \xi_1^2 = 1, \ \xi_0^2 = 0\right) = 2/9$; $\mathbf{P}\left(\xi_2^2 = 0 \mid \xi_1^2 = 1\right) = 1/4$. **9.35.** Пусть P и Q соответственно матрицы вероятностей перехода за один шаг для $\xi_0, \xi_1, \ldots$ и $\eta_0, \eta_1 \ldots$ Тогда $Q_{ij} = P_{ij} +$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l_1=N+1}^{\infty} \cdots \sum_{l_{n-1}=N+1}^{\infty} P_{il_1} P_{l_1 l_2} \cdots P_{l_{n-1} j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Указание: воспользуйтесь тем, что $\mathbf{P}\left(\eta_0 = i_0, \ldots, \eta_k = i_k\right) =$

$$= \sum_{j_0=0}^{\infty} \sum_{j_1=j_0+1}^{\infty} \cdots \sum_{j_k=j_{k-1}+1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\xi_0 > N, \ldots, \xi_{j_0-1} > N, \ \xi_{j_0} = i_0, \ldots, \xi_{j_{k-1}+1} > N, \ldots, \xi_{j_k-1} > N, \ \xi_{j_k} = i_k\right).$$

9.36. Нет. **9.37.**

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & j < i, \\ i/10, & j = i, \\ 1 - i/10, & j = i + 1, \\ 0, & j > i + 1. \end{cases}$$

Все состояния, кроме 10, несущественны. Указание: пусть η_n показания счетчика в момент n. Найти $\mathbf{P}(\eta_n = i_n, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1)$.

9.38. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. Состояния 0 и n — существенные, все остальные — несущественные. **9.39.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Все состояния — существенные. **9.40.** Состояния 1, 2, 3 — несущественные, 4, 5 — существенные. **9.41.** Нет. **9.42.** Да. Например, для цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. **9.43.** 1 и 4; 2 и 3. **9.44.** а) Так как j-е состояние достижимо из i-го, существуют n и цепочка состояний $i_1, \ldots, i_{n-1}$, такие, что $P_{ii_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{n-1} j} > 0$. Предположим, что $n \geqslant r$, тогда: 1) либо среди состояний $i_1, \ldots, i_{n-1}$ есть совпадающие; 2) либо одно из состояний $i_1, \ldots, i_{n-1}$ совпадает с i или j. Пусть в первом случае $i_l = i_k$, $l < k$. Тогда $P_{ii_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{l-1} i_l} P_{i_l i_{k+1}} \ldots P_{i_{n-1} j} > 0$, т. е. состояние j достижимо из i за $n - (k - l)$ шагов. Пусть во втором случае, например, $i = i_l$. Тогда $P_{ii_{l+1}} \ldots P_{i_{n-1} j} > 0$, т. е. состояние j достижимо из i за $n - l$ шагов.

Отсюда следует, что если состояние j достижимо из i, то можно выбрать цепочку из различных, отличных от i и j, состояний $i_1, \ldots, i_m$, таких, что $P_{ii_1} \ldots P_{i_m j} > 0$. Но так как всего состояний r, то $m \leqslant r-2$ и, следовательно, j достижимо из i не более чем за $r-1$ шаг. Доказательство б) аналогично. 9.45. а) да, $d=4$; б) да, $d=2$; в) нет. 9.46. а) Возьмем любое состояние i. Так как цепь неразложима, существуют n и m, такие, что $P_{ij}^{(n)} > 0$, $P_{ji}^{(m)} > 0$. Следовательно, $P_{ii}^{(n+m)} > 0$, и так как $P_{jj} > 0$, то и $P_{ii}^{(n+m+1)} \geqslant P_{ij}^{(n)} P_{jj} P_{ji}^{(m)} > 0$. Так как $n+m$ и $n+m+1$ взаимно просты, отсюда следует непериодичность цепи. б) Да. Например, цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. 9.47. Для решения задачи воспользуйтесь следующими двумя свойствами: 1) для непериодического состояния i существует конечный набор натуральных чисел $n_1, \ldots, n_k$, таких, что $P_{ii}^{(n_j)} > 0$ и Н. О. Д. $(n_1, \ldots, n_k) = 1$; 2) если Н. О. Д. $(n_1, \ldots, n_k) = 1$, то существует N_0 такое, что любое $N > N_0$ может быть представлено в виде $N = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i$, где α_i — целые неотрицательные числа. 9.48. Состояние 6 возвратно, состояния 1—5 невозвратны. 9.49. Используйте критерий возвратности: состояние i возвратно тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$. 9.50. Используйте критерий возвратности и следующее соотношение. Пусть $f_{ij}^{(k)}$ — вероятность того, что состояние j будет впервые достигнуто из i за k шагов. Тогда $P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$. 9.51. Так как $\sum_j P_{ij}^{(n)} = 1$, то существует j, такое, что $P_{ij}^{(n)} \not\to 0$ при $n \to \infty$. В силу предыдущей задачи состояние j возвратно. 9.52. Да. 9.53. Пусть состояние i несущественно. Тогда существует n и состояние j, такие, что $P_{ij}^{(n)} > 0$, но $P_{ji}^{(k)} = 0$ для любого k. Обозначим f_{ii} — вероятность возвращения в состояние i. Тогда $f_{ii} \leqslant \mathbf{P}$ (не будет ни одного попадания в состояние j из состояния i) $\leqslant 1 - P_{ij}^{(n)} < 1$. Пусть теперь состояние i существенно. Возможны два случая: 1) i не сообщается ни с одним состоянием. Тогда $P_{ii}^{(n)} = 1$ для каждого n и, следовательно, i — возвратно; 2) i сообщается только с состояниями $i_1, \ldots, i_m$. В силу предыдущей задачи одно из состояний $i, i_1, \ldots, i_m$ возвратно и, следовательно, возвратны все остальные. Относительно цепей со счетным числом состояний см., например, следующую задачу. 9.54. Так как рассматриваемая цепь неразложима, то все ее состояния одновременно возвратны или невозвратны. Пусть $f_{00}^{(j)}$ — вероятность первого возвращения в состояние 0 за j шагов. Покажите, что $f_{00}^{(1)} = p_0$, $f_{00}^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-2} (1-p_i) p_{n-1}$, $n \geqslant 2$, $\sum_{n=1}^{m+1} f_{00}^{(n)} = 1 - \prod_{i=0}^{m} (1-p_i)$, и воспользуйтесь критерием сходимости бесконечного произведения. 9.55. Найдите матрицы вероятностей перехода за n шагов и воспользуйтесь критерием возвратности. 9.56. Пусть f_{ii} — вероятность возвращения в состояние i, а $Q_{ii}^{(n)}$ — вероятность возвращения по крайней мере n раз. Покажите, что $Q_{ii}^{(n)} = [f_{ii}]^n$. 9.57. Воспользуйтесь результатами задачи 9.44. 9.58. Рассмотрите цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$, где P_{ij} — вероятности перехода в исходной цепи. Для доказательства необходимости найдите вероятности поглощения в состоянии 0 исходя из состояний 0, 1, 2, ... и покажите, что они образуют искомое решение. Для доказательства достаточности покажите сначала, что можно выбрать решение $u_0 = 1$. $0 \leqslant u_i \leqslant 2$. Далее, покажите, что вероятность поглощения в нуле исходя из состояния i меньше или равна u_i. Рассмотрите два случая: 1) существует $u_k < 1$; 2) существует $u_k > 1$. 9.59. Рассмотрите цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода Q (см. указание к задаче 9.58). Покажите, что можно считать все $u_i > 0$. Далее, используя неравенства в условии задачи и то, что $u_i \to \infty$, докажите существование константы C, такой, что для любого $\varepsilon > 0$ вероятность поглощения в состоянии 0 больше или равна $1 - \varepsilon C$. 9.60. Покажите, что $u_0, u_1, \dots$ удовлетворяют соотношениям $u_j = \sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i P_{ij}^{(n)}$ для любого натурального n. Используя эти уравнения и неравенство $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |u_i| < \infty$ из условия задачи, покажите, что по крайней мере для одной пары i, j $P_{ij}^{(n)} \not\to 0$ при $n \to \infty$. 9.61. Покажите, что $u_0 = 0$, $u_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \rho_i$ является решением системы $\sum\limits_{j=0}^{\infty} P_{ij} u_j = u_i$, $i \neq 0$. Воспользуйтесь результатом задачи 9.58. 9.62. $P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$. Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, тогда $f'(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k$ и если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k > 1$, то уравнение $f(z) = z$ имеет решение z_0, такое, что $0 < z_0 < 1$. В случае $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k > 1$ воспользуйтесь результатом задачи 9.58, взяв $u_i = z_0^i$. В случае $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k \leqslant 1$ воспользуйтесь результатом задачи 9.59, взяв $u_j = j$. 9.63. Пусть j — несущественное состояние. Тогда существует i такое, что $P_{ij}^{(n)} = 0$ для любого n и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$. 9.64. Рассмотрите, например, цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 9.65. Покажите, что если P — стохастическая матрица, то система уравнений $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P_{ij}$, $j = 1, \dots, n$, имеет неотрицательное решение, отличное от нулевого. 9.66. а) (6/17, 7/17, 2/17, 2/17); б) (1/12, 1/4, 5/12, 1/12, 1/6). 9.67. а) нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет; е) да; ж) нет. 9.68. Пусть i и j — несообщающиеся состояния. Тогда либо $P_{ij}^{(n)} = 0$, либо $P_{ji}^{(n)} = 0$ для любого n. 9.69. Воспользуйтесь результатами задачи 9.11.

9.70. $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ (p/(1-p))a & 1-(p/(1-p))a \end{pmatrix}$, где $0 < a < 1$. 9.71. Пусть S_0 и S_1 соответственно множества несущественных и существенных состояний рассматриваемой цепи. В силу задачи 9.47 существует $s > 0$, такое, что $P_{ij}^{(s)} > 0$ для любых $j \in S_1$. Покажите, что если j — несущественное состояние, то $\max\limits_i P_{ij}^{(n)} \leqslant h^{\left[\frac{n}{s}\right]}$, где $h = \max\limits_{i \in S_0} \sum\limits_{k \in S_0} P_{ik}^{(s)} < 1$. Существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$ при $i, j \in S_1$ следует из критерия эргодичности неразложимых цепей Маркова с конечным числом состояний. Используя уравнения Колмогорова — Чепмена, покажите, что если $i \in S_0$, $j \in S_1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$. 9.72. Так как $P_{ij} > 0$ для всех i и j, то рассматриваемая цепь эргодична. Следовательно, существуют $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$ для всех i, j и π_j, $j = 1, \ldots, m$, является единственным стационарным распределением. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi_n = x_j) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbf{P}(\xi_0 = x_i) P_{ij}^{(n)} = \pi_j$. Утверждение задачи вытекает теперь из того, что $\pi_j = 1/m$, $j = 1, \ldots, m$ является решением системы уравнений $\pi_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \pi_i P_{ij}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \pi_i = 1$. 9.73. Пусть $A_1 (A)_2$ множество состояний, для которых $p_i^{(n)} \geqslant q_i^{(n)}$ $\left(p_i^{(n)} < q_i^{(n)}\right)$. Тогда $\left|p_j^{(n+1)} - q_j^{(n+1)}\right| = \left|\sum\limits_{i \in A_1} \left(p_i^{(n)} - q_i^{(n)}\right) P_{ij} + \sum\limits_{i \in A_2} \left(p_i^{(n)} - q_i^{(n)}\right) P_{ij}\right| \leqslant$ $\leqslant \sum\limits_{i \in A_1} \left(p_i^{(n)} - q_i^{(n)}\right)\left(P_{ij} - \min\limits_i P_{ij}\right)$. Отсюда $\sum\limits_{j=1}^{m} \left|p_j^{(n+1)} - q_j^{(n+1)}\right| \leqslant$ $\leqslant \left(1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \min\limits_i P_{ij}\right) \sum\limits_{i=1}^{m} \left|p_i^{(n)} - q_i^{(n)}\right|$. 9.74. Пусть $\alpha_j^{(n)} = \max\limits_i P_{ij}^{(n)}$, $\beta_j^{(n)} = \min\limits_i P_{ij}^{(n)}$. Докажите, что существует $0 < h < 1$, такое, что $\alpha_j^{(n)} - \beta_j^{(n)} < h^n$. 9.75. Воспользуйтесь следующим представлением матрицы вероятностей перехода за n шагов $P_{ij}^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k^n \sum\limits_{l=0}^{s_k - 1} C_{ij}^{(k,l)} n^l$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — собственные значения матрицы вероятностей перехода за один шаг, S_j — кратность λ_j. 9.76. В условиях задачи цепь $\xi_0, \xi_1, \ldots$ неразложима и непериодична. Воспользуйтесь достаточным условием эргодичности цепей со счетным числом состояний, взяв

$u_j = j$, $I_0 = \{0\}$, $n = 1$, $\varepsilon = 1 - \sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k$. Пусть $\pi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \pi_k$, $p(z) =$ $= \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k p_k$. Тогда $\pi(z) = \dfrac{(z-1)\, p(z)\left(1 - \sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k\right)}{z - p(z)}$.

9.77. $$\pi_k = \prod_{j=1}^{k-1} (1 - p_j) \left[\sum_{l=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{l-1} (1 - p_i)\right]^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

9.78. Воспользуйтесь критерием эргодичности неразложимых цепей со счетным числом состояний, взяв $\varepsilon > 0$ — любое, $I_0 = \{1\}$, $n = 1$, $u_j = j\varepsilon$,

$j=1, 2, \ldots$ $\quad \pi(z)=\sum\limits_{j=1}^{\infty} z^j \pi_j = \dfrac{(1-p(z))\ z}{(1-z)\sum\limits_{k=0}^{\infty} kp_k}$, где $p(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k p_k$. 9.79.

$1-\sqrt{(1-4p(1-p)z^2)}$. 9.80. $\dfrac{k}{1-2p}-\dfrac{N}{1-2p}\,\dfrac{1-(p^{-1}-1)^k}{1-(p^{-1}-1)^N}$, если $p\neq 1/2$, $k(N-k)$, если $p=1/2$.

9.81. $\left(\sum\limits_{i=k}^{N-1}\rho_i\right)\Big/\left(\sum\limits_{i=0}^{N-1}\rho_i\right)$, где $\rho_0=1$, $\rho_i=\prod\limits_{j=1}^{i}(b_j/a_j)$. 9.82. $\mathsf{E}\tau_N=N^2$.

9.83. $P_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{2N-1}\cos^n\dfrac{k\pi}{N}\cos\dfrac{ik\pi}{N}\cos\dfrac{jk\pi}{N}$. Покажите, что $\cos^n\dfrac{k\pi}{N}\cos\dfrac{ik\pi}{N}=$ $=\sum\limits_{j=0}^{N}P_{ij}^{(n)}\cos\dfrac{jk\pi}{N}$. 9.84. Пусть $x_n(j)=\mathsf{P}(N_n(i)=j)$. Используйте соотношения $x_n(j)=\sum\limits_{l=1}^{n-j+1} f_{ii}^{(l)}x_{n-l}(j-1)$, $j\geqslant 1$; $x_n(0)=\sum\limits_{l=n+1}^{\infty} f_{ii}^{(l)}$. 9.85. Покажите, что вероятность возвращения в 0 конечное число раз равна нулю.

Глава 10

10.1. а) t, $2t$;

б) $$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1, & \text{если } \min\left\{\dfrac{x_1}{t_1},\ldots,\dfrac{x_n}{t_n}\right\}>2,\\ 1/2, & \text{если } 1<\min\left\{\dfrac{x_1}{t_1},\ldots,\dfrac{x_n}{t_n}\right\}\leqslant 2,\\ 0, & \text{если } \min\left\{\dfrac{x_1}{t_1},\ldots,\dfrac{x_n}{t_n}\right\}\leqslant 1.\end{cases}$$

10.2. а) каждая реализация равна 1 при $t\leqslant t_\alpha$ и 0 при $t>t_\alpha$, где $0\leqslant t_\alpha\leqslant 1$;

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}1 & \text{при } \min\{x_1,x_2\}>1,\\ t_1 & \text{при } 0<x_1\leqslant 1,\ x_2>1,\\ t_2 & \text{при } x_1>1,\ 0<x_2\leqslant 1,\\ \min\{t_1,t_2\} & \text{при } 0<x_1,\ x_2\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } \min\{x_1,x_2\}\leqslant 0.\end{cases}$$

10.3. $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)=F(\min\{x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n\})$.

10.4. $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)=\Phi(\min\{t_1x_1,\ldots,t_nx_n\})$, где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения. $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)=$ $=\mathsf{P}\left(\dfrac{\eta+\zeta}{t_1}<x_1,\ldots,\dfrac{\eta+\zeta}{t_n}<x_n\right)=\mathsf{P}(\eta+\zeta<\min\{t_1x_1,\ldots,t_nx_n\})$.

10.5. 1/2. Рассмотрим события $\{\zeta_u>\zeta_v\}$, $u>v\geqslant 0$; $\{\eta\geqslant 0\}$. Покажем, что $\{\eta\geqslant 0\}=\bigcup\limits_{u>v\geqslant 0}\{\zeta_u>\zeta_v\}$. Действительно, $\{\zeta_u>\zeta_v\}=\{\xi+u(\eta+u)>\xi+$ $+v(\eta+v)\}=\{(u-v)\eta+(u-v)(u+v)>0\}=\{\eta\geqslant-(u+v)\}$, откуда следует доказываемое равенство. Далее, в силу симметричности η и условия $\mathsf{P}(\eta=0)=0$ имеем $\mathsf{P}(\eta\geqslant 0)=1/2$. **10.6.** $a\leqslant -1/2$ и $a\geqslant 1$. **10.7.** Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра, порожденная всеми одноточечными подмножествами Ω, $\mathbf{P}$ — мера Лебега. В качестве ξ_t можно взять случайный процесс

$$\xi_t = \begin{cases} 1 & \text{при } t = \omega, \quad t \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{при всех остальных } \omega \text{ и } t. \end{cases}$$

10.8. Предположите противное. **10.9.** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. **10.10.** Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если (t_0 фиксировано) $|t - t_0| \leqslant \delta$, то $\mathbf{P}\left(\left|g(\xi_t) - g\left(\xi_{t_0}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon$. Выберем σ такое, что если $|x - x_0| \leqslant \sigma$, то $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Выберем теперь δ так, чтобы $\mathbf{P}\left(\left|\xi_t - \xi_{t_0}\right| \geqslant \sigma\right) \leqslant \varepsilon$, если $|t - t_0| \leqslant \delta$ (это можно сделать в силу стохастической непрерывности процесса ξ_t). Теперь имеем при $|t - t_0| \leqslant \delta$ $\mathbf{P}\left(\left|g(\xi_t) - g\left(\xi_{t_0}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\left|\xi_t - \xi_{t_0}\right| \geqslant \sigma\right) \leqslant \varepsilon$.

10.11. Рассмотрите случайный процесс

$$\xi_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t = \omega, \\ 0, & \text{если } t \neq \omega, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств и $\mathbf{P}$ — мера Лебега. **10.12.** Воспользуйтесь тем, что при всех t_1 и t_2 случайные величины $\xi_{t_1} - \xi_{t_2}$ имеют одно и то же невырожденное распределение. **10.13.** Предположим противное: существует $\varepsilon > 0$ и две последовательности $\{t_n'\}$ и $\{t_n''\}$, такие, что $\left|t_n' - t_n''\right| \to 0$ при $n \to \infty$, но $\mathbf{E}\left|\xi_{t_n'} - \xi_{t_n''}\right|^p \geqslant \varepsilon$. В силу компактности множества A из $\{t_n'\}$ можно выделить подпоследовательность $\{t_{n_k}'\}$, сходящуюся к некоторой точке $t_0 \in A$. Очевидно, t_{n_k}'' также сходится к t_0. Если $p \leqslant 1$, то

$$\mathbf{E}\left|\xi_{t_{n_k}'} - \xi_{t_0}\right|^p + \mathbf{E}\left|\xi_{t_{n_k}''} - \xi_{t_0}\right|^p \geqslant \mathbf{E}\left|\xi_{t_{n_k}'} - \xi_{t_{n_k}''}\right|^p \geqslant \varepsilon \not\to 0.$$

Если $p > 1$, то $\mathbf{E}\left|\xi_{t_{n_k}'} - \xi_{t_0}\right|^p + \mathbf{E}\left|\xi_{t_{n_k}''} - \xi_{t_0}\right|^p \geqslant 2^{p-1}\mathbf{E}\left|\xi_{t_{n_k}'} - \xi_{t_{n_k}''}\right|^p \geqslant 2^{p-1}\varepsilon \not\to 0$,

т. е. в обоих случаях приходим к противоречию со стохастической непрерывностью ξ_t в точке t_0. **10.14.** Предположим противное: существует последовательность $\{t_n\}$ такая, что $\mathbf{E}\left|\xi_{t_n}\right|^p \to \infty$ при $n \to \infty$. В силу компактности A из $\{t_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{t_n'\}$, $t_n' \to t_0$. При $p \geqslant 1$ имеем $\mathbf{E}\left|\xi_{t_n'}\right|^p \leqslant 2^{p-1}\left(\mathbf{E}\left|\xi_{t_n'} - \xi_{t_0}\right|^p + \mathbf{E}\left|\xi_{t_0}\right|^p\right)$. Первый член в скобках стремится к нулю, второй — ограничен, левая часть стремится к бесконечности. Противоречие. Случай $p < 1$ рассматривается аналогично. **10.15.** Для доказательства необходимости воспользуйтесь тем, что из сходимости по вероятности следует слабая сходимость. Для доказательства достаточности покажите, что предельное распределение вектора (ξ_t, ξ_s) при $t, s \to t_0$ сосредоточено на биссектрисе первого и третьего координатных углов. Далее, пусть $f_\varepsilon(x)$ — непрерывная функция, равная 0 в нуле и 1 вне ε-окрестности нуля. Тогда $\mathbf{P}\{|\xi_t - \xi_s| \leqslant \varepsilon\} \leqslant \mathbf{E}f_\varepsilon(\xi_t - \xi_s)$. Покажите, что математическое ожидание в правой части неравенства стремится к нулю при $t, s \to t_0$. **10.16.** Пусть $f(t)$ непрерывна в точке t_0. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию $\mathbf{P}\left(\left|\xi_t - \xi_{t_0}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0$ при $t \to t_0$. Выберем δ такое, что при $|t - t_0| \leqslant \delta$ $|f(t) - f(t_0)| \leqslant \varepsilon$. Имеем $\mathbf{P}\left(\left|\xi_t + f(t) - \xi_{t_0} - f(t_0)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant$

$\leqslant \mathbf{P}\left(|\xi_t - \xi_{t_0}| + |f(t) - f(t_0)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(|\xi_t - \xi_{t_0}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0$. Пусть теперь $f(t)$ разрывна в точке t_0. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_n\}$, такие, что $t_n \to t$, $|f(t_n) - f(t_0)| \geqslant \varepsilon$. Отсюда вытекает существование подпоследовательности $\{t_{n_k}\}$ такой, что либо $f(t_{n_k}) - f(t_0) \geqslant \varepsilon$, либо $f(t_{n_k}) - f(t_0) \leqslant -\varepsilon$. Пусть, например, первое. Из стохастической непрерывности процесса ξ_t следует, что при $t \to t_0$ $\mathbf{P}\left(\xi_t - \xi_{t_0} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0$. Окончательно имеем $\mathbf{P}\left(\xi_{t_{n_k}} + f(t_{n_k}) - \xi_{t_0} - f(t_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathbf{P}\left(\xi_{t_{n_k}} - \xi_{t_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} - \left(f(t_{n_k}) - f(t_0)\right)\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\xi_{t_{n_k}} - \xi_{t_0} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0$, т. е. $\mathbf{P}\left(\xi_{t_{n_k}} + f(t_{n_k}) - \xi_{t_0} - f(t_0) > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 1$ и, следовательно, $\xi_t + f(t)$ не является стохастически непрерывным в точке t_0. **10.17.** Воспользуйтесь тем, что суперпозиция измеримых отображений является измеримым отображением. **10.18.** а) да, б) да, в) нет. **10.19.** Воспользуйтесь тем, что из сходимости по вероятности следует слабая сходимость распределений. **10.20.** Рассмотрите случайный процесс из задачи 10.12. **10.21.** Пусть $A = \{|\xi_t - \xi_{t_0}| < \delta\}$, I_A — индикатор события A. Используйте представление $g(\xi_t) - g(\xi_{t_0}) = [g(\xi_t) - g(\xi_{t_0})] I_A + [g(\xi_t) - g(\xi_{t_0})] I_{\bar{A}}$. **10.22.** Пусть ξ_t и ξ'_t — стохастически эквивалентные процессы. Тогда $\mathbf{P}(\xi_{t_1} < x_1, \ldots, \xi_{t_n} < x_n) = \mathbf{P}(\{\xi_{t_1} < x_1, \ldots, \xi_{t_n} < x_n\} \cap \{\xi_{t_1} = \xi'_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n} = \xi'_{t_n}\}) = \mathbf{P}(\xi'_{t_1} < x_1, \ldots, \xi'_{t_n} < x_n)$. **10.23.** Пусть ξ_t — стохастически непрерывный процесс, ξ^*_t стохастически эквивалентен ξ_t. Имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(|\xi^*_t - \xi^*_{t_0}| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(|\xi^*_t - \xi_t + \xi_t - \xi_{t_0} + \xi_{t_0} - \xi^*_{t_0}| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left(|\xi^*_t - \xi_t| + |\xi_t - \xi_{t_0}| + |\xi_{t_0} - \xi^*_{t_0}| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(|\xi^*_t - \xi_t| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(|\xi_t - \xi_{t_0}| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right) + \mathbf{P}\left(|\xi_{t_0} - \xi^*_{t_0}| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right) = \mathbf{P}\left(|\xi_t - \xi_{t_0}| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right) \to 0$$

при $t \to t_0$. **10.24.** Стохастическая непрерывность следует из того, что при любом t $\mathbf{P}(\xi_t(\omega) \neq 0) = 0$. Разрывность всех траекторий в каждой точке очевидна. **10.25.** Перенумеруем элементарные события: $\omega_1, \omega_2, \ldots$ Тогда $\mathbf{P}\left(|\xi_t - \xi_{t_0}| \geqslant \varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|\xi_t(\omega_k) - \xi_{t_0}(\omega_k)| \geqslant \varepsilon\right)$. Пусть все траектории непрерывны, тогда ряд справа сходится и каждый его член стремится к нулю при $t \to t_0$, поэтому сумма ряда также стремится к нулю. Обратно, если стремится к нулю левая часть, то, очевидно, стремится к нулю каждый член ряда в правой части, т. е. все траектории непрерывны. **10.26.** Перенумеруем значения параметра t: $t_1, t_2, \ldots$ Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ и для любого борелевского множества B на прямой множество $\{\omega\colon \xi_{t_i} \in B\}$ является событием, но тогда событием является и множество $\{\omega\colon \xi_t \in B\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega\colon \xi_{t_i} \in B\}$. **10.27.** Пусть A — счетное всюду плотное подмножество множества значений параметра. Для любых $a \leqslant b$ и любого n $\{\omega\colon a \leqslant \xi_t \leqslant b\} \subset \left\{\omega\colon a - \frac{1}{n} \leqslant \xi_t \leqslant b + \frac{1}{n},\ t \in A\right\}$, и, значит, $\{\omega\colon a \leqslant \xi_t \leqslant b\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega\colon a - \frac{1}{n} \leqslant \xi_t \leqslant b + \frac{1}{n},\ t \in A\right\} = \{\omega\colon a \leqslant \xi_t \leqslant b,\ t \in A\}$. Обратное включение $\{\omega\colon a \leqslant \xi_t \leqslant b,\ t \in A\} \subset \{\omega\colon$

$a \leqslant \xi_t \leqslant b\}$ очевидно. Следовательно, $\{\omega\colon a \leqslant \xi_t \leqslant b\} = \{\omega\colon a \leqslant \xi_t \leqslant b,\ t \in A\}$. Но последнее множество измеримо. **10.28.** Для любого борелевского множества B на прямой имеем $\{(\omega, t)\colon \xi_t(\omega) \in B,\ \omega = \omega_0\} = \{(\omega, t)\colon \xi_t(\omega) \in B\} \cap \cap \{(\omega, t)\colon \omega = \omega_0\}$. Оба множества, стоящие в правой части измеримы, следовательно, измеримо их пересечение, т. е. множество, стоящее в левой части. Обратное неверно. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра борелевских множеств, $\mathbf{P}$ — мера Лебега, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть A — любое неизмеримое множество на отрезке $\omega = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Рассмотрите случайный процесс

$$\xi_t = \begin{cases} 1 & \text{при } (\omega, t) \in A \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

10.29. См. решение задачи 10.27. **10.30.** Пусть V — класс всех открытых интервалов из $[a, b]$ с рациональными радиусами и центрами в произвольном фиксированном счетном всюду плотном множестве. Пусть, далее, $S_k^{(n)}$, $k=1, \ldots, m_n$, конечное покрытие отрезка $[a, b]$ диаметром $\leqslant 1/n$, $S_k^{(n)} \in V$. Возьмем произвольные точки $t_k^{(n)} \in S_k^{(n)}$. Положим $\xi_t^{(n)} = \xi_{t_k^{(n)}}$ при $t \in S_k^{(n)} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} S_j^{(n)}$.

Очевидно, случайные процессы $\xi_t^{(n)}$ измеримы. Покажите, что из последовательности $\xi_t^{(n)}$ можно выбрать подпоследовательность сходящуюся почти всюду к измеримому случайному процессу $\bar{\xi}_t$. Пусть M_1 — множество точек (ω, t) меры нуль, на котором эта сходимость не имеет места, K_1 — множество t таких, что t — сечения множества M_1 имеют меру отличную от нуля. Покажите, что случайный процесс

$$\xi_t^* = \begin{cases} \xi_t & \text{при } t \in K_1 \\ \bar{\xi}_t & \text{при } t \notin K_1 \end{cases}$$

является искомым. **10.31.** Рассмотрите случайный процесс

$$\xi_t^* = \begin{cases} \xi_t & \text{при } t \in K_1 \cup K_2 \\ \bar{\xi}_t & \text{при } t \notin K_1 \cup K_2, \end{cases}$$

где K_2 — множество точек в которых ξ_t не является стохастически непрерывным, а K_1 и $\bar{\xi}_t$ определены в указании к задаче 10.30. **10.32.** Положим $\xi_t^{(1)} = \lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{|t-t_n|\leqslant\delta} \xi_{t_n}$, $\xi_t^{(2)} = \lim\limits_{\delta\to 0} \inf\limits_{|t-t_n|\leqslant\delta} \xi_{t_n}$, $A_t = \{\xi_t^{(1)} \geqslant \xi(t) \geqslant \xi_t^{(2)}\}$. Покажите, что $\mathbf{P}(A_t) = 1$ и случайный процесс $\xi_t' = \xi_t I_{A_t} + \xi_t^{(1)} I_{\bar{A}_t}$ является искомым. **10.33.** Докажите, что события $A = \{\xi_t$ — целые для всех двоично-рациональных t, т. е. $t = k/2^n\}$, $B = \{\xi_{t_1} \leqslant \xi_{t_2}$ для всех двоично-рациональных $t_1 \leqslant t_2\}$, $C_N = \{$для всех целых i от 0 до ξ_N существует двоично-рациональное $t \in [0, N]$, такое, что $\xi_t = i\}$ имеют вероятность 1. **10.34.** Используйте равенство $\mathbf{E}|\xi_t - \xi_s|^2 = \mathbf{E}|\xi_t|^2 - \mathbf{E}\xi_t\bar{\xi}_s - \mathbf{E}\xi_s\bar{\xi}_t + \mathbf{E}|\xi_s|^2$. **10.35.** Используйте равенство $\mathbf{E}|(\xi_{t+h} - \xi_t)/h|^2 = (L(t+h,\ t+h) - L(t+h,\ t) - L(t,\ t+h) + L(t,\ t))/h^2$. **10.36.** Покажите, что $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} = 0$ по вероятности, но $\mathbf{E}|(\xi_{t+h} - \xi_t)/h|^p \sim a|h|^{1-p} \not\to 0$. **10.37.** $K(t, s) = d_1 f_1(t)\bar{f}_1(s) + \ldots + d_n f_n(t)\bar{f}_n(s)$.
10.38.

$$\sum_{j,k} c_j\bar{c}_k K(t_j, t_k) = \sum_{j,k} c_j\bar{c}_k \operatorname{cov}(\xi_{t_j}, \xi_{t_k}) = \operatorname{cov}\Big(\sum_j c_j\xi_{t_j}, \sum_k c_k\xi_{t_k}\Big) \geqslant 0.$$

10.39. $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i(t, s)$. **10.41.** Воспользуйтесь следующими двумя утверждениями: а) если $K(t, s)$ — корреляционная функция случайного процесса ξ_t и $a > 0$, то $aK(t, s)$ — корреляционная функция процесса $\sqrt{a}\,\xi_t$; б) если случайные процессы $\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$ независимы и имеют корреляционные функции $K_1(t, s)$ и $K_2(t, s)$ соответственно, то случайный процесс $\left[\xi_t^{(1)} - \mathsf{E}\xi_t^{(1)}\right]\left[\xi_t^{(2)} - \mathsf{E}\xi_t^{(2)}\right]$ имеет корреляционную функцию $K_1(t, s)$, $K_2(t, s)$. **10.42.** $c\alpha/[\pi(x^2+\alpha^2)]$. **10.43.** Докажите, что из бесконечной дифференцируемости корреляционной функции по обоим переменным следует бесконечная дифференцируемость процесса в среднем квадратическом. **10.44.** $\sigma^2 ts$. **10.45.** $\mathsf{E}\xi_t = 0$, $K(t) = \int\limits_0^\infty \cos yt\mu(dy)$, где μ — конечная мера на $[0, \infty)$, определяемая равенством $\mu(B) = \mathsf{E}A^2 I_B(\eta)$, $I_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$ **10.46.** Покажите, что если $c \geqslant 0$ и $\varphi(t)$ — произвольная вещественная функция, то функция $c\varphi(t_1)\varphi(t_2)$ положительно определена. **10.47.** $\left[K_1(t, s) + \mathsf{E}\xi_t^{(1)}\mathsf{E}\bar{\xi}_s^{(1)}\right]\left[K_2(t, s) + \mathsf{E}\xi_t^{(2)}\mathsf{E}\bar{\xi}_s^{(2)}\right]$. **10.48.** а) $p^n z + 1 - p^n$; б) $\dfrac{(1-p)\,\alpha_{n-1}(z)}{\alpha_n(z)}$, где $\alpha_n(z) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1/2 - pz}{\sqrt{1-4p(1-p)}}\right)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4p(1-p)}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1/2-pz}{\sqrt{1-4p(1-p)}}\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4p(1-p)}\right)^n$ при $p \neq 1/2$, $\alpha_n(z) = (1/2)^n[n + 1 - nz]$ при $p = 1/2$; в) $1-(1-z)^{\alpha^n} p^{1+\alpha+\ldots+\alpha^{n-1}}$. **10.49.** а) 1 при $p \leqslant 1/2$, $(1-p)/p$ при $1/2 < p < 1$; б) $1 - p^{1/(1-\alpha)}$; в) $\sqrt{2} - 1$. **10.50.** а) $p^n(1-p)$; б) $p^{1+\alpha+\ldots+\alpha^{n-1}}\left(1-p^{\alpha^n}\right)$. **10.52.** $p^n z^{n+1} + (1-p)\,z\,\dfrac{1-p^n z^n}{1-pz}$. **10.53.** $(1-\alpha)\alpha^{k-1}$, где $\alpha = \dfrac{c(1-c)}{1-b-c}$. **10.54.** $1 - \exp\{-c(1-c)x\}$. **10.55.** Воспользуйтесь следующими соотношениями: $\mathsf{E}(X_{n+1} \mid X_n) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{j=1}^{X_n} \xi_j \mid X_n\right) = X_n \mathsf{E}\xi_j = mX_n$, где ξ_i — число потомков i-й частицы n-го поколения в $(n+1)$-м поколении; $\mathsf{E}(X_{n+k+1}|X_n) = \mathsf{E}(\mathsf{E}[X_{n+k+1}|X_{n+k}]|X_n)$. **10.56.** Воспользуйтесь равенством $\mathsf{P}(Y_n = k \mid Y_0 = X_0 = 1) = \dfrac{\sum\limits_{j=k}^{\infty} \mathsf{P}(Y_n = k,\ X_n = j \mid X_0 = 1)}{\mathsf{P}(Y_0 = 1 \mid X_0 = 1)}$.

10.57. а) $1 - \dfrac{1-z}{\dfrac{bt}{2}(1-z)+1}$ при $a = 0$, $1 - \dfrac{e^{at}(1-z)}{\dfrac{b}{2a}\left(e^{at}-1\right)(1-z)+1}$ при $a \neq 0$, $a = 2a_2 + a_1$, $b = 2a_2$; б) $z\left[e^{(k-1)t} - (e^{(k-1)t} - 1)z^{k-1}\right]^{-1/(k-1)}$; в) $1 - [1 - e^{-t/2} + e^{-t/2}\sqrt{1-z}]^2$; г) $1 - \exp\{e^{-\lambda t} - 1 + e^{-\lambda t}\ln(1-z)\}$. **10.58.** а) $-1 - a_1/a_2$, если $a_1/a_2 > -2$; 1 в противном случае; б) 0; в) 0; г) $1 - e^{-1}$. **10.59.** Воспользуйтесь результатами задачи 10.57. **10.60.** Обозначим $Q(t) = \mathsf{P}(X_t > 0)$. Покажите, что $Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dfrac{dQ(t)}{dt} = Q^2(t)(Q(t) - 4)$, $Q(0) = 1$. Отсюда $Q(t) = 1 \Big/ \left(1 + 4t - \int\limits_0^t Q(u)\,du\right)$. **10.61.** Положим $\xi_t = X_t e^{-t}$. Тогда $\mathsf{E}(\xi_{t+\tau} - \xi_t)^2 = e^{-t}(1 - e^{-\tau}) \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, существует случайная величина ξ, такая, что ξ_t сходится при $t \to \infty$ к ξ в среднем квадратическом. Отсюда следует сходимость характеристических функций. Положим, далее, $(Ft, z) = \mathsf{E}z^{X_t}$, $\varphi_t(\lambda) = \mathsf{E}e^{i\lambda\xi_t}$. Тогда, подставляя в уравнение $F(t+\tau, z) = F(\tau, F(t, z))$ значение $z = \exp\{i\lambda e^{-(t+\tau)}\}$, имеем $\varphi_{t+\tau}(\lambda) = F(\tau, \varphi_t(\lambda e^{-\tau}))$

Отсюда при $t \to \infty$ $\varphi(\lambda) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(\lambda) = F(\tau; \varphi(\lambda e^{-\tau}))$. Устремляя τ к нулю, имеем $\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{f(\varphi(\lambda))}{\lambda}$, $\varphi(0) = 1$. Из последнего уравнения находим $\varphi(\lambda) = 1/(1 - i\lambda)$. **10.62.** Покажите, что

$$\int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} d_x \mathsf{P}\left(\frac{X_t}{\mathsf{E}(X_t \mid X_t > 0)} < x \mid X_t > 0\right) =$$

$$= \mathsf{E}\{\exp\{i\lambda X_t \mathsf{P}(X_t > 0)\} \mid X_t > 0\} = \frac{F(t, \exp\{i\lambda \mathsf{P}(X_t > 0)\}) - F(t, 0)}{\mathsf{P}(X_t > 0)},$$

где $F(t, z) = 1 - \frac{1 - z}{t(1-z) + 1}$ (см. задачу 10.57 а)) и $\mathsf{P}(X_t > 0) = (1 + t)^{-1}$. **10.63.** Пусть выполняется а), тогда для доказательства б) нужно показать, что для любого $B \in \mathcal{F}_{\geqslant t}$ и любого $A \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$ $\mathsf{P}(AB) = \int\limits_A \mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t})\, d\mathsf{P}$. Но $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{E}\mathsf{P}(AB \mid \mathcal{F}_{=t}) = \mathsf{E}[\mathsf{P}(A \mid \mathcal{F}_{=t})\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t})]$. Далее, $\int\limits_A \mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t})\, d\mathsf{P} = \mathsf{E}[\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t}) I_A] = \mathsf{E}\mathsf{E}[\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t}) I_A \mid \mathcal{F}_{=t}] = \mathsf{E}[\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t})\mathsf{E}(I_A \mid \mathcal{F}_{=t})] = \mathsf{E}[\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t})\mathsf{P}(A \mid \mathcal{F}_{=t})]$. Пусть теперь выполняется б). Тогда для доказательства а) нужно показать, что для любого $C \in \mathcal{F}_{=t}$ $\mathsf{P}(ABC) = \int\limits_C \mathsf{P}(A \mid \mathcal{F}_{=t})\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t})\, d\mathsf{P}$, где $A \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$, $B \in \mathcal{F}_{\geqslant t}$. Имеем $\mathsf{P}(ABC) = \mathsf{E}\mathsf{E}[I_A I_B I_C \mid \mathcal{F}_{\leqslant t}] = \mathsf{E} I_A I_C \mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{\leqslant t}) = \mathsf{E}\mathsf{E}[I_A I_C \mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t}) \mid \mathcal{F}_{=t}] = \mathsf{E}[I_C \mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t})\mathsf{E}(I_A \mid \mathcal{F}_{=t})] = \mathsf{E}[\mathsf{P}(A \mid \mathcal{F}_{=t})\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t}) I_C] = \int\limits_C \mathsf{P}(A \mid \mathcal{F}_{=t})\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_{=t})\, d\mathsf{P}$. Доказательство эквивалентности определения в) аналогично. **10.64.** Воспользуйтесь тем, что σ-алгебра $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ $(\mathcal{F}_{\geqslant t})$ порождается полукольцом событий вида $(\xi_{s_1} \in A_1, \ldots, \xi_{s_m} \in A_m)$, $s_1, \ldots, s_m \leqslant t$, $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{B}$ $((\xi_{t_1} \in B_1, \ldots, \xi_{t_n} \in B_n)$, $t_1, \ldots, t_n \geqslant t$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B})$. **10.65.** Воспользуйтесь результатом задачи 10.64. **10.66.** См. задачу 10.64. **10.67.** Нет. **10.68.** а) да, $P(x, A) = \int\limits_A p(u)\, du$; б) да, $P(x, A) = \int\limits_A p(u - x)\, du$; в) да, $P(x, A) = \int\limits_{\max(x,u)\in A} p(u)\, du$. **10.69.** Нет. **10.70.** Используйте уравнение Колмогорова — Чепмена $P_{ij}(t + \tau) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(\tau)$. **10.71.** Используйте уравнение Колмогорова — Чепмена. **10.73.** Пусть $i = j$. Положим $\alpha = \sup\limits_{h>0}(1 - P_{ii}(h))/h$. Если $\beta < \alpha$ и $(1 - P_{ii}(t_0))/t_0 > \beta$, то при $t_0/(n+1) \leqslant \tau < t_0/n$

$$\beta < \frac{1}{t_0}[1 - P_{ii}(\tau)]^n P_{ii}(t_0 - n\tau) < \frac{1 - [P_{ii}(\tau)]^n}{n\tau} + \frac{1 - P_{ii}(t_0 - n\tau)}{t_0}.$$

Поэтому $\beta < \frac{1 - P_{ii}(\tau)}{\tau} + \frac{1 - P_{ii}(t_0 - n\tau)}{t_0}$ и так как $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - P_{ii}(t_0 - n\tau)) = 0$, то для любого $\beta < \alpha$ существует δ такое, что при $\tau < \delta$ $\beta < \frac{1 - P_{ii}(\tau)}{\tau} \leqslant \alpha$, откуда вытекает, что $\alpha = \lim\limits_{\tau\to 0} (1 - P_{ii}(\tau))/\tau$. Пусть теперь $i \neq j$. Выберем δ так, чтобы при $0 < s \leqslant nh < \delta$ $P_{ii}(s) > c$ и $P_{jj}(s) > c$. Рассматривая цепь Маркова с вероятностями перехода за один шаг $P_{ij} = P_{ij}(h)$ можно показать, что $P_{ij}(nh) \geqslant c(2c-1)nP_{ij}(h)$. Отсюда $\frac{P_{ij}(t)}{t} \geqslant c(2c-1) P_{ij}\left(\frac{t}{n}\right)\frac{n}{t}$ при $t < \delta$. Пусть $[x]$ — целая часть x, тогда $\frac{P_{ij}(\tau)}{\tau} \leqslant \frac{1}{c(2c-1)} \frac{P_{ij}([t/\tau]\,\tau)}{[t/\tau]\,\tau}$. Переходя к пределу при $\tau\to 0$, имеем $\varlimsup\limits_{\tau\to 0} \frac{P_{ij}(\tau)}{\tau} \leqslant \frac{1}{c(2c-1)} \varliminf\limits_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} < \infty$, но так как $P_{ii}(t)\to 1$ и $P_{jj}(t)\to 1$, то c можно выбрать как угодно близким к 1. Отсюда вытекает существование конечного предела $\lim\limits_{t\to 0} P_{ij}(t)/t$. Существование конечных a_{ii} и равенство $\sum\limits_{j\neq i} a_{ij} = -a_{ii}$ следуют теперь из соотношения $1 - P_{ii}(h) = \sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} P_{ij}(h)$.

10.74. В качестве множества состояний процесса возьмем множество A всех рациональных точек прямой. Пусть η_a — показательно распределенная с параметром $1/\gamma_a$ случайная величина, причем $\{\eta_a\}$ независимы, $\sum\limits_{a<n} \gamma_a < \infty$ для любого n, $\sum\limits_{a\in A} \gamma_a = \infty$. Положим $P_{aa}(t) = P(\eta_a > t)$, $P_{ab}(t) = 0$, $b < a$, $P_{ab}(t) = \mathsf{P}\left(\sum\limits_{a\leqslant\alpha<b} \eta_\alpha < t < \sum\limits_{a\leqslant\alpha\leqslant b} \eta_\alpha\right)$, $b > a$. Тогда

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - P_{aa}(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathsf{P}(\eta_a \leqslant t) = \gamma_a^{-1},\quad \lim_{t\to 0} \frac{P_{ab}(t)}{t} \leqslant \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathsf{P}\left(\sum_{a\leqslant\alpha<b} \eta_\alpha \leqslant t\right) = 0.$$

10.75. Прогрессивная измеримость ξ_t очевидна. Далее,

$$\mathsf{P}_x(A \cap \{\xi_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}_x(A \cap \{\tau = m\} \cap \{\eta = n\} \cap \{\xi_{m+n} \in \Gamma\}) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{A\cap\{\tau=m,\,\eta=n\}} P(n, \xi_m, \Gamma)\,\mathsf{P}_x(d\omega).$$

Отсюда вытекает утверждение задачи. 10.76. Пусть $(w_t,\ t \geqslant 0;\ P_x)$ — семейство винеровских процессов, выходящих из каждой точки прямой. Положим

$$\xi_t = \begin{cases} w_t, & w_0 \neq 0,\\ 0, & w_0 = 0.\end{cases}$$

Покажите, что семейство (ξ_t, P_x) является марковским, но не строго марковским. 10.77. $1 - e^{-\lambda_i t}$, где $\lambda_i = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t}$. 10.78. $\mu\{1\} = 2c$, $\mu\{2\} = c$, $c \geqslant 0$. 10.79. Любая конечная цепь Маркова более чем с одним классом существенных состояний.

$$\text{10.81.}\quad \mathsf{P}(\xi < u + \eta \mid \xi \geqslant \eta) = \frac{\mathsf{P}(\eta \leqslant \xi < u + \eta)}{\mathsf{P}(\xi \geqslant \eta)} = \frac{\int_0^\infty \mathsf{P}(x \leqslant \xi < u + x)\,dG(x)}{\int_0^\infty \mathsf{P}(\xi \geqslant x)\,dG(x)} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^\infty [e^{-ax} - e^{-a(x+u)}]\, dG(x)}{\int\limits_0^\infty e^{-ax} dG(x)} = 1 - e^{-au}.$$ В частности, полагая $G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant t, \\ 1, & x > t, \end{cases}$ имеем $\mathsf{P}(\xi < u + t \mid \xi \geqslant t) = 1 - e^{-au}$. **10.82.** Воспользуйтесь результатом задачи 10.81. **10.83.** В силу определения операции наложения потоков $\nu_t = \nu_t^{(1)} + \ldots + \nu_t^{(k)}$. Свойства отсутствия последействия и стационарности ν_t вытекают из свойств отсутствия последействия и стационарности $\nu_t^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$, и их независимости. Свойство ординарности следует из того, что сумма k независимых случайных величин, имеющих пуассоновские распределения с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ и равенства $\mathsf{P}(\nu_{t+h} - \nu_t \geqslant 2 \mid \nu_{t+h} - \nu_t \geqslant 1) = \frac{\mathsf{P}(\nu_h \geqslant 2)}{\mathsf{P}(\nu_h \geqslant 1)} = \frac{\mathsf{P}\left(\nu_h^{(1)} + \ldots + \nu_h^{(k)} \geqslant 2\right)}{\mathsf{P}\left(\nu_h^{(1)} + \ldots + \nu_h^{(k)} \geqslant 1\right)}$. **10.84.** В силу задачи 10.82 исходный поток — рекуррентный с функцией распределения интервалов между поступлением $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$. Докажите, что интервалы времени между поступлениями требований i-го подпотока независимы в совокупности и имеют показательное распределение с параметром λp_i. Затем воспользуйтесь результатом задачи 10.82 **10.85.** Пусть $z_1, z_2, \ldots$ — интервалы времени между поступлениями требований исходного пуассоновского потока, $u_1, u_2, \ldots$ — интервалы времени между поступлениями требований просеянного потока. Из определения операции просеивания следует, что

$$u_1 = z_1 + \ldots + z_{k+1},$$
$$u_2 = z_{k+2} + \ldots + z_{2(k+1)},$$
$$u_n = z_{(n-1)(k+1)+1} + \ldots + z_{n(k+1)}.$$

Отсюда следует, что $u_1, u_2, \ldots$ независимы в совокупности и одинаково распределены. Найдем функцию распределения u_1. Для этого надо найти функцию распределения суммы $(k+1)$-й независимых случайных величин, имеющих показательное распределение. Докажем, что $\mathsf{P}(z_1 + \ldots + z_{k+1} < t) = \int\limits_0^{\lambda t} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx$. Воспользуемся методом математической индукции. При $k = 0$ $\mathsf{P}(z_1 < t) = 1 - e^{-\lambda t} = \int\limits_0^{\lambda t} e^{-x} dx$. Предположим, что $\mathsf{P}(z_1 + \ldots + z_n < t) = \int\limits_0^{\lambda t} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx$. Тогда $\mathsf{P}(z_1 + \ldots + z_{n+1} < t) = \mathsf{P}((z_1 + \ldots + z_n) + z_{n+1} < t) = \int\limits_0^t [1 - e^{-\lambda(t-u)}] \frac{\lambda(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} du = \int\limits_0^{\lambda t} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \int\limits_0^{\lambda t} \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$. **10.86.** $\mathsf{P}(\nu_t = k \mid \nu_T = n) = \frac{\mathsf{P}(\nu_T = n,\ \nu_t = k)}{\mathsf{P}(\nu_T = n)} =$

$$= \frac{\mathbf{P}(\nu_T - \nu_t = n-k,\ \nu_t = k)}{\mathbf{P}(\nu_T = n)} = \frac{\mathbf{P}(\nu_T - \nu_t = n-k)\ \mathbf{P}(\nu_t = k)}{\mathbf{P}(\nu_T = n)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(\nu_{T-t} = n-k)\ \mathbf{P}(\nu_t = k)}{\mathbf{P}(\nu_T = n)} = \frac{e^{-\lambda(T-t)} \frac{[\lambda(T-t)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}}{e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!}} =$$

$= C_n^k \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k}$. **10.87.** Пусть ν_t — пуассоновский поток с интенсивностью λ, ν'_t — поток Бернулли на $[0, T]$, определяемый параметром N. Покажите, что для любых непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \subset [0, T]$ и целых $k_1, \ldots, k_n$, $\sum_{i=1}^{n} k_i = N$, $\mathbf{P}\left(\nu'_{\Delta_1} = k_1, \ldots, \nu'_{\Delta_n} = k_n\right) = \mathbf{P}\left(\nu_{\Delta_1} = k_1, \ldots, \nu_{\Delta_n} = k_n \middle| \nu_T = n\right)$, где ν'_{Δ_i} и ν_{Δ_i} — число требований, поступивших в интервале Δ_i соответственно потока Бернулли и пуассоновского потока. **10.88.** Пусть $z_1, z_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots$ — интервалы времени между поступлениями требований соответственно исходного потока и потока оставленных требований, $\nu_1\ \nu_2 \ldots$ — последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных по геометрическому закону и независящих от $z_1, z_2, \ldots$ случайных величин, $\mathbf{P}(\nu_1 = k) = (1-p)p^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Покажите, что

$$u_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_{\nu_1},$$
$$u_2 = z_{\nu_1+1} + \ldots + z_{\nu_1+\nu_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_k = z_{\nu_1+\ldots+\nu_{k-1}+1} + \ldots + z_{\nu_1+\ldots+\nu_k}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Исходя из свойств геометрического распределения докажите, что $u_1, u_2, \ldots$ независимы в совокупности и одинаково распределены, т. е. поток оставленных требований — рекуррентный Далее, $\mathbf{P}(u_1 < t) = \mathbf{P}\left(z_1 + \ldots + z_{\nu_1} < t\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)\,p^{k-1}\mathbf{P}(z_1 + \ldots + z_k < t)$. Отсюда $\int_0^{\infty} e^{-st} d\mathbf{P}(u_1 < t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)\,p^{k-1}[\alpha(s)]^k = \alpha(s) - p\alpha(s)\frac{1-\alpha(s)}{1-p\alpha(s)}$. Обращая последнее равенство, получите утверждение задачи. **10.89.** Докажите следующее утверждение: если $f(x)$ — неотрицательная и неубывающая на отрезке $0 \leqslant x \leqslant a$ функция и $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in (0, a)$, $x + y \in (0, a)$, то $f(x)/x$ при $x \to 0$ либо неограниченно возрастает, либо стремится к пределу, причем этот предел равен нулю, только в случае $f(a) = 0$. Докажите, что функция $f(x) = 1 - P_0(x)$ удовлетворяет указанным выше условиям. **10.90.** Покажем, что из б) следует а). Положим $P_k(t) = \mathbf{P}(\nu_t = k)$. Тогда $\mathbf{P}(\nu_t \geqslant 2) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = \lambda t - \mathbf{P}(\nu_t \geqslant 1)$, откуда $0 \leqslant \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{1}{t}\mathbf{P}(\nu_t \geqslant 2) \leqslant \lambda - \underline{\lim_{t\to 0}} \frac{1}{t}\mathbf{P}(\nu_t \geqslant 1) = \lambda - \mu = 0$. Покажем теперь, что из а) следует б). Положим $V_m(t) = \sum_{k=0}^{m} P_k(t)$. Тогда $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(1) = \sum_{k=0}^{\infty}[1 - V_k(1)]$. Покажите, что для стационарного ординарного потока с конечным параметром μ $V'_m(t) = -\mu\varphi_m(t), 1 - V_m(t) = \mu\int\limits_0^t \varphi_m(u)\,du$, где $\varphi_k(t) = \lim\limits_{\tau\to 0}\frac{h_k(\tau, t)}{1 - P_0(\tau)}$, $h_k(\tau, t)$ — вероятность того, что в промежутке $[0, \tau)$ поступило хотя бы одно требование, а в промежутке $[\tau, t+\tau)$ ровно k требований. Отсюда $\lambda = \mu\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^1 \varphi_k(u)\,du$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k(u) \leqslant 1$, $0 < u \leqslant 1$. Следовательно, $\lambda \leqslant \mu$. Но $\lambda t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kP_k(t) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(t) = 1 - P_0(t)$. Отсюда $\lambda \geqslant (1 - P_0(t))/t$ и $\lambda \geqslant \lim\limits_{t\to 0}(1 - P_0(t))/t = \mu$. Таким образом, $\lambda = \mu$. 10.91. Пусть $t_1^{(k)}$ и $t_2^{(k)}$ — моменты поступления 1-го и 2-го требований k-го потока. Положим $B_k(t) = \mathbf{P}\left(t_2^{(k)} < t\right)$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{1k}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[a_k t - a_k\int\limits_0^t A_k(u)\,du\right] \to at$, так как $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\int\limits_0^t A_k(u)du \leqslant t\sum\limits_{k=1}^{n} a_k A_k(t) \leqslant at\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{A_k(t)\}$. Далее, $\sum\limits_{k=1}^{n} B_k(t) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} A_{1k}(t)\,A_k(t) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} A_{1k}(t)\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{A_k(t)\} \leqslant at\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{A_k(t)\}$, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{A_{1k}(t)\} \leqslant t\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$.

Покажите, что при выполнении этих условий справедливо утверждение задачи. 10.92. Случайный процесс w_t является регенерирующим, моментами регенерации служат моменты прихода автобусов: ξ_1, $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, ... Используя предельную теорему для регенерирующих процессов, имеем

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(w_t < y) = \mu\int\limits_0^\infty \mathbf{P}(w_x < y,\ \xi_1 \geqslant x)\,dx = \mu\int\limits_0^\infty \mathbf{P}(x \leqslant \xi_1 < x + y)\,dx = \mu\int\limits_0^\infty [G(x+y) - G(x)]\,dx.$$

10.93. $\mu\int\limits_0^y [1 - G(x)]\,dx$.

10.94. $\mu\int\limits_0^v [G(x+u) - G(x)]\,dx$. 10.95. $\mu\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}[1 - G(x)]\,dx$.

10.96. а) $P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$; б) $P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$.

10.97. $q_n = \frac{(n\rho)^n}{n!}[1-\rho]^{-1}\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$, где $\rho = \lambda/(n\mu)$.

10.98. $P_0 = \left\{1 + \alpha + \alpha\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(1 + m\beta)}\right\}^{-1}$, где $\alpha = \lambda/\mu$, $\beta = \nu/\mu$.

10.99. $\bar{n} = \alpha P_0\left[1 + \sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{(s+1)\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(1 + m\beta)}\right]$. 10.100. $P_n = \frac{\alpha^n}{n!}P_0$, $P_{n+m} =$

$= \dfrac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} P_0$, где $P_0 = \left\{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s\right\}^{-1}$, $\alpha = \lambda/\mu$, λ — интенсивность входящего потока, μ^{-1} среднее время обслуживания. **10.101.** $\bar{N} = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha^k}{(k-1)!} + \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!} \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s\right] P_0$. **10.102.** $\bar{q} = \dfrac{\alpha^n}{n!} P_0 \sum\limits_{s=1}^{m} s\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s$, $\bar{n} = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha^k}{(k-1)!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{m} (n+s)\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s\right] P_0$. **10.103.** Воспользуйтесь формулой Поллачека — Хинчина, которая в случае

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \alpha, \\ 1, & x > \alpha, \end{cases}$$

принимает вид $p(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j \pi_j = \dfrac{(1-\lambda\alpha)(z-1)\exp\{-\alpha(\lambda-\lambda z)\}}{z - \exp\{-\alpha(\lambda-\lambda z)\}} =$
$= (1-\lambda\alpha)(1-z) \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j \exp\{\alpha(\lambda-\lambda z)\, j\}$. Разложите последнее выражение по степеням z. **10.104.** Пусть $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z^j f_j$, $\beta(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-sx} dB(x)$. Докажите, что $f(z)$ удовлетворяет уравнению $f(z) = z\beta(\lambda - \lambda f(z))$; далее, при

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \alpha, \\ 1, & x > \alpha, \end{cases}$$

имеем $\beta(s) = e^{-s\alpha}$ и, следовательно, $f(z) = z\exp\{-\alpha(\lambda - \lambda f(z))\}$. Положим $x = ze^{-\lambda\alpha}\lambda\alpha$, $y = \lambda\alpha f(z)$. Тогда $ye^{-y} = x$. Это уравнение (относительно y) имеет единственное решение $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (j^{j-1}/j!)\, x^j$. Отсюда $f(z) =$
$= \sum\limits_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda\alpha j} \dfrac{(\lambda\alpha j)^{j-1}}{j!} z^j$. **10.105.** В силу формулы Поллачека — Хинчина $\omega(s) =$
$= \dfrac{(1-\lambda\beta_1)s}{s - \lambda + \lambda\beta(s)} = \dfrac{1-\lambda\beta_1}{1 - \lambda\beta_1 [1-\beta(s)]/\beta_1 s}$, где $\beta(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-sx} dB(x)$, $\beta_1 =$
$= \int\limits_0^{\infty} x dB(x)$, $\omega(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-sx} dW(x)$, причем для того, чтобы существовал стационарный режим, необходимо, чтобы $\lambda\beta_1 < 1$. Пусть $\omega^*(t)$ — характеристическая функция функции распределения $W(x)$, а $\beta^*(t)$ — функции распределения $B(x)$: $\omega^*(t) = \int\limits_0^{\infty} e^{itx} dW(x)$, $\beta^*(t) = \int\limits_0^{\infty} e^{itx} dB(x)$. Тогда из формулы Поллачека — Хинчина следует: $\omega^*(t) = \dfrac{1-\lambda\beta_1}{1-\lambda\beta_1[\beta^*(t)-1]/it\beta_1}$. Покажите, что $(\beta^*(t) - 1)/(it\beta_1)$ является характеристической функцией. Используя это утверждение и формулу для $\omega^*(t)$, докажите утверждение задачи. **10.106.** $F(x) = \lambda\beta_1 B(x) + (1 - \lambda\beta_1) \int\limits_0^{x} [1 -$

$-e^{-\lambda(x-u)}]\,dB(u)$. **10.107.** Функция $\pi(s)$ является единственным решением уравнения $\pi(s)=\beta(s+\lambda-\lambda\pi(s))[p+(1-p)\pi(s)]$, таким, что $|\pi(s)|<1$ при $\operatorname{Re} s>0$. **10.108.** Пусть n_t — число требований в системе в момент t, $P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(n_t=n)$. Тогда $P(z)=\lim_{t\to\infty} P(z,t)=(p-\lambda\beta_1)\times$ $\times\dfrac{\beta(\lambda-\lambda z)(z-1)}{z-[(1-p)z+p]\,\beta(\lambda-\lambda z)}$. Стационарным распределением длины очереди иногда называют также $\pi_k^*=\lim_{N\to\infty} P(n_N^*=k)$; где $n_N^*=n_{t_N+0}$, t_N — момент N-го окончания обслуживания. Положим $P^*(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k\pi_k^*$. Если $0<p<1$, то $P(z)$ и $P^*(z)$ не совпадают:

$$P^*(z)=\frac{(p-\lambda\beta_1)(z-1)\,\beta(\lambda-\lambda z)\,[(1-p)z+p]}{z-[(1-p)z+p]\,\beta(\lambda-\lambda z)}.$$

10.109. $F(x)=(1-p+\lambda\beta_1)B(x)+(p-\lambda\beta_1)\int\limits_0^x [1-e^{-\lambda(x-u)}]\,dB(x)$.

10.110. $p_0(s)=[s+\lambda-\lambda\beta(s)]^{-1}$, где λ — интенсивность входящего потока, $\beta(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dB(x)$, $B(x)$ — функция распределения времени обслуживания.

10.111. $\pi(s)=\beta(s+\lambda)\left[1-\dfrac{\lambda}{s+\lambda}\beta(s+\lambda)\right]^{-1}$.

10.112. $f(z)=z\beta(\lambda)[1-z(1-\beta(\lambda))]^{-1}$. **10.113.** $\mathbf{E}z_1^{n_{t_1}}z_2^{n_{t_2}}=$ $=\exp\{(z_1-1)\rho(t_1)+(z_2-1)z_1\rho(t_2)-(1-z_1)(1-z_2)\rho(t_2-t_1)\}$, где $\rho(t)=\lambda\int\limits_0^t [1-B(u)]\,du$. **10.114.** $Ez_1^{\mu_{t_1}}z_2^{\mu_{t_2}}=\exp\{(z_2-1)(\lambda t_2-\rho(t_2))+$ $+z_2(z_1-1)(\lambda t_1-\rho(t_1))\}$. **10.115.** $\mathbf{P}(n_t=n,\ \mu_t=m)=e^{-\lambda t}\dfrac{[\rho(t)]^n}{n!}\dfrac{[\lambda t-\rho(t)]^m}{m!}$.

10.116. $\pi(s)=\beta_1(s+\lambda-\lambda\pi_1(s))$, где $\pi_1(s)$ — решение уравнения $\pi_1(s)=\beta(s+\lambda-\lambda\pi_1(s))$, $\beta(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dB(x)$, $\beta_1(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dB_1(x)$.

10.117. $f(z)=z\beta_1(\lambda-\lambda f_1(z))$, где $f_1(z)$ — решение уравнения $f_1(z)=$ $=z\beta(\lambda-\lambda f_1(z))$. **10.118.** Функция $\pi(s)$ является решением уравнения $\pi(s)=$ $=h(s+\lambda-\lambda\pi(s))$, где $h(s)=\beta(s+\nu)+[1-\beta(s+\nu)]\dfrac{\nu}{s+\nu}g(s)$, $\beta(s)=$ $=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dB(x)$, $g(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dG(x)$. **10.119.** Пусть $\omega(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dW(x)$, тогда $\omega(s)=\dfrac{\{1-\lambda[\nu^{-1}+g_1](1-\beta(\nu))\}\,s}{s-a+ah(s)}$, $g_1=\int\limits_0^\infty x\,dG(x)$. **10.120.** $P(z)=$ $=\dfrac{\{1-\lambda[\nu^{-1}+g_1](1-\beta(\nu))\}(z-1)\,h(\lambda-\lambda z)}{z-h(\lambda-\lambda z)}$. **10.121.** $K(t,s)=\min(t,s)$.

10.122. $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)(1-t)}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{s}+\dfrac{(y-x)^2}{t-s}+\dfrac{y^2}{1-t}\right]\right\}$.

10.123. $s(1-t)$. 10.124. $K(u, v) = \min[u, v] - uv$. 10.125. Очевидно, $\overline{w}_t$ — гауссовский процесс. Найдем ковариационную функцию $\overline{w}_t$. Так как $\overline{w}_t\overline{w}_s = (1+t)\, w^{(0)}_{t/(1+t)}\, (1+s)\, w^{(0)}_{s/(1+s)} = [(1+t)\, w_{t/(1+t)} - tw_1] \times$ $\times [(1+s)\, w_{s/(1+s)} - sw_1] = (1+t)(1+s)\, w_{t/(1+t)}w_{s/(1+s)} - t(1+s)\, w_{s/(1+s)}w_1 -$ $- s(1+t)\, w_{t/(1+t)}w_1 + stw_1^2$, то $\mathsf{E}\overline{w}_t\overline{w}_s = (1+t)(1+s)\min\left[\frac{t}{1+t}, \frac{s}{1+s}\right] -$ $- st = \min(t, s)$. 10.126. Покажите, что процессы $w_t^{(1)}$ и $w_t^{(2)}$ гауссовские, найдите их ковариационные функции. 10.127. Независимость приращений $\left(w_t^{(1)} + w_t^{(2)}\right)/\sqrt{2}$ следует из независимости приращений $w_t^{(1)}$ и $w_t^{(2)}$ и их независимости. Найдите распределение $\left(w_t^{(1)} - w_s^{(1)} + w_t^{(2)} - w_s^{(2)}\right)/\sqrt{2}$.

10.128. См. указание к задаче 10.126. 10.129. Положим $s_{mn}(t) = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\sin kt}{k}\xi_k$,

$$t_{mn} = \max_{0\leqslant t\leqslant\pi} |s_{mn}(t)|; \quad \text{тогда } t_{mn}^2 \leqslant \max_{t\leqslant\pi}\left|\sum_{k=m}^{n-1}\frac{e^{ikt}}{k}\xi_k\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=m}^{n-1}\frac{\xi_k^2}{k^2} + 2\sum_{l=1}^{n-m-1}\left|\sum_{j=m}^{n-l-1}\frac{\xi_j\xi_{j+l}}{j(j+l)}\right|; \quad (\mathsf{E}t_{mn})^2 \leqslant \mathsf{E}t_{mn}^2 \leqslant \sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k^2} +$$

$$+ 2\sum_{l=1}^{n-m-1}\left(\mathsf{E}\left(\left|\sum_{j=m}^{n-l-1}\frac{\xi_j\xi_{j+l}}{j(j+l)}\right|^2\right)\right)^{1/2} \leqslant \sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k^2} + 2\sum_{l=1}^{n-m-1}\left(\sum_{j=m}^{n-l-1}\frac{1}{j^2(j+l)^2}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n-m}{m^2} + 2(n-m)\left(\frac{n-m}{m^4}\right)^{1/2}; \quad \mathsf{E}(t_{m,2m}) \leqslant \sqrt{3}\, m^{-1/4}; \quad \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} t_{2^{n-1},2^n}\right] \leqslant$$

$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}\left(t_{2^{n-1},2^n}\right) < \infty$; $\mathsf{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_{2^{n-1},2^n} < \infty\right) = 1$, и поэтому ряд в правой части сходится равномерно с вероятностью 1. Теперь достаточно показать, что $\mathsf{E}[w_tw_s] = \frac{ts}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt \sin ks}{k^2} = \min(t, s)$. 10.130. Предположим, что $\eta_h = (w_{t+h} - w_t)/h$ сходится по вероятности к некоторой случайной величине η. Отсюда следует слабая сходимость распределений η_h к распределению η. Но η_h имеет нормальное распределение $N(0, h^{-1})$ и, следовательно, $\lim_{h\to 0}\mathsf{P}(\eta_h < x) = 0$. 10.131. Воспользуйтесь тем, что $w_t - w_s$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $t-s$.

10.132. $\mathsf{P}(w_t < v \mid w_s = u) = \mathsf{P}(w_t - w_s < v - u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{v-u}\exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\}dx$.

10.133. Совместная плотность распределения равна

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_n-t_{n-1})}}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2t_1} - \frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)} - \ldots - \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}\right\}.$$

10.134. Если траектория винеровского процесса дифференцируема в некоторой точке s (без ограничения общности $0 \leqslant s \leqslant 1$), то $|w_t - w_s| < l(t-s)$ при $s < t < s + 5/n$, $n \geqslant m$ для некоторого $l \geqslant 1$ и некоторого $m \geqslant 1$. Но это событие содержится в событии

$$\bigcup_{l\geqslant 1}\bigcup_{m\geqslant 1}\bigcap_{n\geqslant m}\bigcup_{0<i\leqslant n+2}\bigcap_{i<k\leqslant i+3}\left\{\omega : |w_{k/n} - w_{(k-1)/n}| < \frac{7l}{n}\right\},$$

а

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{0<i\leqslant n+2}\ \bigcap_{i<k\leqslant i+3}\left\{\omega: |w_{k/n}-w_{(k-1)/n}|<\frac{7l}{n}\right\}\right)\leqslant (n+2)\left[\mathbf{P}\left(|w_{1/n}|<\frac{7l}{n}\right)\right]^3=$$

$$=(n+2)\left(\int\limits_{|x|<7l/\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx\right)^3<\frac{C}{\sqrt{n}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

10.135. $\sqrt{\dfrac{t_2-t_1}{2\pi(t_2-t)(t-t_1)}}\exp\left\{-\dfrac{(t_2-t_1)}{2(t_2-t)(t-t_1)}\left[x-A-\dfrac{B-A}{t_2-t_1}(t-t_1)\right]^2\right\}.$

10.136. Используя строгую марковость винеровского процесса, покажите, что $\mathbf{P}\left(\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} w_s\geqslant z,\ w_t>z\right)=\mathbf{P}\left(\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} w_s\geqslant z,\ w_t<z\right)$. Отсюда $\mathbf{P}\left(\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} w_s\geqslant z\right)=$ $=2\mathbf{P}\left(\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} w_s\geqslant z,\ w_t>z\right)=2\mathbf{P}(w_t>z)=2\mathbf{P}(w_t\geqslant z)$. **10.137.** $p_{\tau(z)}(x)=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{z}{x^{3/2}}\exp\left\{-\dfrac{z^2}{2x}\right\},\quad x>0.$ Покажите, что $\mathbf{P}(\tau(z)<x)=2\mathbf{P}(w_x\geqslant z)$. **10.138.** Воспользуйтесь результатами задачи 10.137. **10.139.** Так как $\mathbf{P}(z^2\tau(1)<$ $<x)=\mathbf{P}(\tau(1)<x/z^2)$, то плотность распределения $z^2\tau(1)$ равна $p_{z^2\tau(1)}(x)=$ $=p_{\tau(1)}(xz^{-2})\,z^{-2}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{(xz^{-2})^{3/2}}z^{-2}e^{-z^2/(2x)}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{z}{x^{3/2}}e^{-z^2/(2x)}=p_{\tau(z)}(x).$

10.140. $\exp\left\{-\left(1+i\dfrac{t}{|t|}\right)\sqrt{|t|}\right\}.$ **10.141.** $(2/\pi)\arcsin\sqrt{t_0/t_1}$. **10.142.**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(2z-v)^2}{2t}}\,dv,\quad z>x,\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(2z-v)^2}{2t}}\,dv+\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_{z}^{x} e^{-\frac{v^2}{2t}}dv,\quad z\leqslant x.$$

10.143. $F(x)=1-e^{-2x^2}$, $p(x)=4xe^{-2x^2}$. **10.144.** e^{-2a^2}. **10.145.** Для доказательства а) воспользуйтесь утверждением а) задачи 10.126. Для доказательства б) используйте строгую марковость винеровского процесса. **10.146.** Из утверждения б) задачи 10.145 и того, что для любых a, b $P(a,b)\leqslant$ $\leqslant 1$ следует, что $P(a,b)=e^{-\alpha b}$, где $\alpha\geqslant 0$. В силу утверждения а) задачи 10.145 отсюда следует, что $P(a,b)=e^{-\gamma ab}$, $\gamma\geqslant 0$. **10.147.** $\gamma=2$. **10.148.** Воспользуйтесь тем, что $\mathbf{P}\left(\xi_{t_n}<x_n,\ \xi_{t_{n-1}}<x_{n-1},\ \ldots,\ \xi_0<x_0\right)=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x_0} d\mathbf{P}(\xi_0<u_0)\times$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{x_1-u_0} d\mathbf{P}\left(\xi_{t_1}-\xi_0<u_1\right)\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_n-(u_0+\ldots+u_{n-1})} d\mathbf{P}\left(\xi_{t_n}-\xi_{t_{n-1}}<u_n\right).$$

10.149. Воспользуйтесь тем, что если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ и $\eta_1,\ldots,\eta_n$ — две независимые последовательности независимых случайных величин, то случайные величины $\xi_1+\eta_1,\ldots,\xi_n+\eta_n$ независимы. **10.150.** Если сумма независимых случайных величин имеет вырожденное распределение, то каждое слагаемое также имеет вырожденное распределение. **10.151.** Для любого t, любого $\Delta t>0$ и любого натурального n имеем $\xi_{t+\Delta t}-\xi_t=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\xi_{t+k\Delta t/n}-\xi_{t+(k-1)\Delta t/n}\right)$. В правой части стоит сумма независимых (процесс с независимыми приращениями), одинаково распределенных (процесс однородный) случайных величин. Следовательно, распределение $\xi_{t+\Delta t}-\xi_t$ безгранично делимо. **10.152.** Докажем непрерывность справа (непрерывность слева доказывается аналогично). В силу стохастической непрерывности $\xi_{t+\Delta t}-\xi_t\xrightarrow{\mathbf{P}}0$ при $\Delta t\to 0$. Пусть $f(z)=f(t,\Delta t,z)$ — характеристическая функция случайной величины $\xi_{t+\Delta t}-\xi_t$. Тогда $f(z)\to 1$ при $\Delta t\to 0$, Но $\varphi(t+\Delta t, z) = \varphi(t, z) f(z)$, следовательно, $\varphi(t+\Delta t, z) \to \varphi(t, z)$ при $\Delta t \to 0$. **10.153.** Воспользуйтесь следующим фактом: пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $f_1(t), f_2(t), \ldots$ — соответствующая последовательность характеристических функций. Если равномерно в некоторой окрестности нуля $f_n(t) \to 1$ при $n \to \infty$, то $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. **10.154.** Воспользуйтесь равенством $\xi_{s_m} - \xi_{s_{m-1}} = \sum\limits_{k: s_{m-1} < t_k < s_m} \xi_k$ и независимостью $\xi_1, \ldots, \xi_n$. **10.155.** Пусть $t_1 < t_2$. Обозначим через $f(z)$ характеристическую функцию $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$. Тогда $\varphi(t_2, z) = \varphi(t_1, z) f(z)$ и, поскольку $|f(z)| \leqslant 1$, $|\varphi(t_2, z)| \leqslant |\varphi(t_1, z)|$. **10.156.** $\xi_{t+s} = \xi_{t+s} - \xi_s + \xi_s$. Случайные величины $\xi_{t+s}, \xi_{t+s} - \xi_s, \xi_s$ имеют характеристические функции $\varphi(t+s, z)$, $\varphi(t, z)$ и $\varphi(s, z)$ соответственно. Кроме того, $\xi_{t+s} - \xi_s$ и ξ_s независимы. Таким образом, $\varphi(t+s, z) = \varphi(t, z)\varphi(s, z)$. **10.157.** Воспользуйтесь тем, что сумма независимых случайных величин, одна из которых имеет абсолютно непрерывное распределение, имеет абсолютно непрерывное распределение. **10.158.** Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых. **10.159.** Воспользуйтесь следующим фактом: пусть ξ — случайная величина, причем для каждого n существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ такие, что $\xi = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$. Тогда $\xi_i^{(n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \to \infty$. **10.160.** Установите сначала справедливость требуемого утверждения, когда λ — рациональное число. Затем воспользуйтесь результатом задачи 10.159. **10.161.** Вообще говоря, нет. Рассмотрите случайный процесс ξ_t: $\xi_b = \eta$, $\xi_t = 0$ при $a \leqslant t < b$, причем η имеет невырожденное распределение. **10.162.** Воспользуйтесь результатом задачи 3.190. **10.163.** $\xi_{t_0} = \xi_{t_0} - \xi_t + \xi_t - \xi_0 + \xi_0$. Случайные величины $\xi_{t_0} - \xi_t$, $\xi_t - \xi_0$ и ξ_0 независимы и, так как ξ_{t_0} почти наверное равна постоянной, каждая из них также почти наверное постоянная. Отсюда следует, что ξ_t — почти наверное постоянная. **10.166.** Воспользуйтесь результатом задачи 10.155. **10.167.** Воспользуйтесь равенством $\mathbf{D}\xi_t = \mathbf{D}\xi_{t-1} + \mathbf{D}\xi_1$. **10.169.** Воспользуйтесь неравенством Чебышёва и соотношением $\mathbf{E}\left(\xi_t - \xi_{t_0}\right)^2 = \mathbf{D}\xi_t - \mathbf{D}\xi_{t_0} + \left(\mathbf{E}\xi_t - \mathbf{E}\xi_{t_0}\right)^2$, справедливым при $t \geqslant t_0$. **10.170.** Докажите методом от противного. **10.171.** Если ξ_t — процесс с независимыми приращениями, то $\xi_{t_0} = \xi_{t_0} - \xi_0 + \xi_0$ и $\xi_{t_0} - \xi_0$ и ξ_0 независимы. Покажите, что это невозможно, если ξ_{t_0} имеет показательное распределение, а ξ_0 — равномерное на отрезке $[0, 1]$. **10.172.** Найдите характеристическую функцию совместного распределения приращений. **10.175.** Пусть F — совместное распределение A и η: $F(B, C) = \mathbf{P}(A \in B, \eta \in C)$ для любых борелевских множеств B и C. Тогда для любых борелевских множеств $A_1, \ldots, A_n$

$$\mathbf{P}\left(A\cos\left[\eta\left(t_1+h\right)+\varphi\right] \in A_1, \ldots, A\cos\left[\eta\left(t_n+h\right)+\varphi\right] \in A_n\right) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\left(x\cos\left[y\left(t_1+h\right)+\varphi\right] \in A_1, \ldots, x\cos\left[y\left(t_n+h\right)+\varphi\right] \in A_n\right) F(dx, dy) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\left(\varphi \in \Gamma_h\right) F(dx, dy),$$

где $\Gamma_h = \{z\colon x\cos\left[y(t_1+h)+z\right] \in A_1, \ldots, x\cos\left[y(t_n+h)+z\right] \in A_n\} \cap [0, 2\pi]$. Так как множество Γ_h получается из Γ_0 сдвигом на yh и приведением по модулю 2π, а распределение φ — равномерное на $[0, 2\pi]$, последний интеграл равен

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\left(\varphi \in \Gamma_0\right) F(dx, dy) = \mathbf{P}\left(A\cos\left(\eta t_1+\varphi\right) \in A_1, \ldots, A\cos\left(\eta t_n+\varphi\right) \in A_n\right).$$

10.176. $\mathsf{E}\eta_t = 0$, $\mathsf{E}\eta_t\eta_s = \mathsf{E}[(\xi_1 \cos\lambda t + \xi_2 \sin\lambda t)(\xi_1\cos\lambda s + \xi_2 \sin\lambda s)] = \cos\lambda t\cos\lambda s + \sin\lambda t \sin\lambda s = \cos[\lambda(t-s)]$, т. е. η_t — случайный процесс, стационарный в широком смысле. Но, например, $\mathsf{P}(\eta_0 = 1) = \mathsf{P}(\xi_1 = 1) = 1/2$, $\mathsf{P}\left(\eta_{\frac{\pi}{4\lambda}} = 1\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}} = 1\right) = 0$. **10.177.** $[K(s)]^2 + K(s+t)K(s-t)$. **10.178.** $\mathsf{E}\xi_t = \mathsf{E}\pi_{t+1} - \mathsf{E}\pi_t = \lambda(t+1) - \lambda t = \lambda$; $\mathsf{E}\xi_t\xi_s = \mathsf{E}[(\pi_{t+1}-\pi_t)(\pi_{s+1}-\pi_s)]$. Рассмотрим три случая. 1. $s \leqslant t-1$. Тогда $\mathsf{E}[(\pi_{t+1}-\pi_t)(\pi_{s+1}-\pi_s)] = \mathsf{E}(\pi_{t+1}-\pi_t)\mathsf{E}(\pi_{s+1}-\pi_s) = \lambda^2$. 2. $s = t$. $\mathsf{E}(\pi_{t+1}-\pi_t)^2 = \lambda^2+\lambda$. 3. $t-1 < s < t$. Так как $(\pi_{t+1}-\pi_t)(\pi_{s+1}-\pi_s) = [\pi_{t+1}-\pi_{s+1}+\pi_{s+1}-\pi_t] \times [\pi_{s+1}-\pi_t+\pi_t-\pi_s] = (\pi_{t+1}-\pi_{s+1})(\pi_{s+1}-\pi_t) + (\pi_{s+1}-\pi_t)^2 + (\pi_{t+1}-\pi_{s+1})(\pi_t-\pi_s) + (\pi_{s+1}-\pi_t)(\pi_t-\pi_s)$, то $\mathsf{E}\xi_t\xi_s = \lambda^2+\lambda-\lambda(t-s)$.

10.179. Пусть $\xi_t \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, $t\to\infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ $\mathsf{P}(|\xi_t - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0$ при $t\to\infty$. Возьмем любые $t_1 < t_2$. Тогда для любого T $\mathsf{P}\left(|\xi_{t_1} - \xi| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathsf{P}\left(|\xi_{t_1} - \xi_T| \geqslant \varepsilon/2\right) + \mathsf{P}(|\xi_T - \xi| \geqslant \varepsilon/2)$, $\mathsf{P}\left(|\xi_{t_2} - \xi| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathsf{P}\left(|\xi_{t_2} - \xi_{T+t_2-t_1}| \geqslant \varepsilon/2\right) + \mathsf{P}\left(|\xi_{T+t_2-t_1} - \xi| \geqslant \varepsilon/2\right)$. Но так как ξ_t — стационарный процесс, $\mathsf{P}\left(|\xi_{t_1} - \xi_T| \geqslant \varepsilon/2\right) = \mathsf{P}\left(|\xi_{t_2} - \xi_{T+t_2-t_1}| \geqslant \varepsilon/2\right)$. Отсюда $\left|\mathsf{P}\left(|\xi_{t_1}-\xi| \geqslant \varepsilon\right) - \mathsf{P}\left(|\xi_{t_2}-\xi| \geqslant \varepsilon\right)\right| \leqslant \mathsf{P}(|\xi_T - \xi| \geqslant \varepsilon/2) + \mathsf{P}\left(|\xi_{T+t_2-t_1} - \xi| \geqslant \varepsilon/2\right)$. И, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и любых $t_1 < t_2$ $\mathsf{P}\left(|\xi_{t_1} - \xi| \geqslant \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(|\xi_{t_2} - \xi| \geqslant \varepsilon\right)$. Отсюда, в силу $\mathsf{P}(|\xi_t - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0$ при $t\to\infty$, для любого $\varepsilon > 0$ $\mathsf{P}\left(|\xi_{t_1} - \xi| \geqslant \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(|\xi_{t_2} - \xi| \geqslant \varepsilon\right) = 0$. Значит, и $\mathsf{P}\left(|\xi_{t_1} - \xi_{t_2}| \geqslant \varepsilon\right) = 0$ для любых t_1, t_2 и $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает утверждение задачи. **10.180.** Пусть $\eta(\omega) = \xi(T\omega)$. Тогда $\mathsf{E}\eta = \int\limits_\Omega \eta(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$. Сделайте замену переменных $T\omega = u$ и воспользуйтесь тем, что T — сохраняющее меру преобразование. **10.181.** Для любого $A \in \mathscr{A}$ A и $T^{-1}A$ содержат одинаковое число элементарных событий. **10.182.** Покажите, что мера Лебега множеств $[\alpha, \beta)$ и $T^{-1}([\alpha, \beta))$, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ одинакова. Получите отсюда утверждение задачи. **10.183.** Рассмотрим преобразование $Tx = \lambda x$, $0 < \lambda < 1$. Пусть $F(x)$ — функция распределения меры P, $F(0) = 0$. Тогда для любого $a > 0$ $[0, a) = T^{-1}([0, \lambda a))$ и, если T — сохраняющее меру преобразование, то $\mathsf{P}([0, a)) = F(a) = F(\lambda a) = \mathsf{P}([0, \lambda a))$. Отсюда $F(a) = 1$, но $F(0) = 0$, что противоречит непрерывности F. Аналогично рассматривается преобразование $Tx = x^2$. **10.184.** Обозначим $\mathbb{C}$ — класс множеств инвариантных относительно T. Тогда, очевидно, $\Omega \in \mathbb{C}$. Пусть $A \in \mathbb{C}$. Тогда, так как $\bar{A}\triangle T^{-1}\bar{A} = A\triangle T^{-1}A$, $\mathsf{P}(\bar{A}\triangle T^{-1}\bar{A}) = \mathsf{P}(A\triangle T^{-1}A) = 0$ и, следовательно, $\bar{A} \in \mathbb{C}$. Аналогично проверяются все остальные условия в определении σ-алгебры. **10.185.** Пусть $\xi(\omega)$ — случайная величина с $\mathsf{E}\xi^2 < \infty$. Тогда ряд Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\omega}\xi(\omega)$ сходится в среднеквадратическом, $\sum |c_n|^2 < \infty$ и $\xi(\omega) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\omega}$ почти наверное. Отсюда $\xi(T\omega) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\omega} e^{2\pi i n\lambda}$, и если ξ инвариантна, то $c_n(1 - e^{2\pi i n\lambda}) = 0$. По предположению λ иррационально и, значит, для всех $n \neq 1$ $e^{2\pi i n\lambda} \neq 1$. Поэтому $c_n = 0$, $n \neq 1$, $\xi(\omega) = c_0$. Отсюда следует, что преобразование T эргодично.

Пусть теперь λ рационально, т. е. $\lambda = k/m$, где k и m — целые. Рассмотрим множество $A = \{\omega\colon 0 \leqslant \omega < 1/m,\ 2/m \leqslant \omega < 3/m,\ \ldots,\ \frac{2m-2}{m} \leqslant \omega <$

$< \frac{2m-1}{m}\Big\}$. Это множество является инвариантным, но $\mathsf{P}(A) = 1/2$. Следовательно, T не эргодично.

10.186. Необходимость. Пусть A — любое множество из $\mathfrak{C}$. Положим $B = (\omega\colon \xi(\omega) \in A)$. Тогда $T^{-1}B = \{\omega\colon T\omega \in B\} = \{\omega\colon \xi(T\omega) \in A\} = B \cup N$, где $\mathsf{P}(N) = 0$. Следовательно, $\mathsf{P}(B \triangle T^{-1}B) = 0$. Отсюда $B \in \mathfrak{C}$. Достаточность. Пусть $A \in \mathfrak{C}$. Тогда $B = (\omega\colon \xi(\omega) \in A) \in \mathfrak{C}$. Так как $T^{-1}B = (\omega\colon \xi(T\omega) \in A)$, то $\mathsf{P}((\xi(\omega) \in A) \triangle (\xi(T\omega) \in A)) = 0$. Следовательно, $\mathsf{P}(\xi(\omega) \in A, \xi(T\omega) \notin A) = \mathsf{P}(\xi(\omega) \notin A, \xi(T\omega) \in A) = 0$. Получите отсюда утверждение задачи. 10.187. Пусть $\mathsf{P}(A \triangle T^{-1}A) = 0$. Так как $A \triangle T^{-1}A = (A \setminus T^{-1}A) \cup (T^{-1}A \setminus A)$, то $\mathsf{P}(A \setminus T^{-1}A) = \mathsf{P}(T^{-1}A \setminus A) = 0$. Пусть теперь $\mathsf{P}(A \setminus T^{-1}A) = 0$. Тогда, так как $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(T^{-1}A)$, $\mathsf{P}(T^{-1}A \setminus A) = \mathsf{P}(T^{-1}A) - \mathsf{P}(A \cap T^{-1}A) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap T^{-1}A) = \mathsf{P}(A \setminus T^{-1}A) = 0$. Значит $\mathsf{P}(A \triangle T^{-1}A) = 0$. 10.188. Нет. 10.189. Для доказательства достаточности возьмите в качестве η и ξ индикаторы событий A и B. Необходимость. Докажите сначала справедливость утверждения для ступенчатых случайных величин. 10.190. Вообще говоря, нет. Пусть, например, ξ_0, ξ_1, ξ_2 — попарно независимые одинаково распределенные случайные величины, зависимые в совокупности (постройте пример таких случайных величин!), ξ_3, ξ_4, … — независимые в совокупности, одинаково распределенные с ξ_0 случайные величины, не зависящие от ξ_0, ξ_1, ξ_2. Тогда последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots$ удовлетворяет условию задачи, но не является стационарной, так как трехмерные распределения (ξ_0, ξ_1, ξ_2) и (ξ_3, ξ_4, ξ_5), очевидно, не совпадают. 10.191. Вообще говоря, нет. 10.192. Пусть $f(x_0, \ldots, x_m)$ и $g(x_0, \ldots, x_m)$ — ограниченные функции, имеющие абсолютно интегрируемые преобразования Фурье. Покажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} R(n) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}f(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m})\, g(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m) = \mathsf{E}f(\xi_0, \ldots, \xi_m)\, \mathsf{E}g(\xi_0, \ldots, \xi_m)$. 10.193. Воспользуйтесь законом 0 или 1 Колмогорова. 10.195. Однородная цепь Маркова $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с фазовым пространством $(X, \mathfrak{B})$ будет стационарной последовательностью, если распределение случайной величины ξ_0: $\mathsf{P}_0(A) = \mathsf{P}(\xi_0 \in A)$, $A \in \mathfrak{B}$, связано с переходной функцией $P(t, x, \Gamma)$ соотношением $\mathsf{P}_0(\Gamma) = \int\limits_X P(t, x, \Gamma)\, \mathsf{P}_0(dx)$ для любых t и $\Gamma \in \mathfrak{B}$.

10.196. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — любые борелевские множества. Тогда

$$\mathsf{P}(\eta_{k+1} \in A_1, \ldots, \eta_{k+1} \in A_n) = \mathsf{P}(f(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{m+k+1}) \in A_1, \ldots$$
$$\ldots, f(\xi_{k+n}, \ldots, \xi_{m+k+n}) \in A_n) = \mathsf{P}((\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{m+k+n}) \in B),$$

где $B = \{z_1, \ldots, z_{m+n}\colon f(z_1, \ldots, z_{m+1}) \in A_1, \ldots, f(z_n \ldots, z_{m+n}) \in A_n\}$. Так как последовательность $\{\xi_n\}$ — стационарная, то

$\mathsf{P}((\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{m+k+n}) \in \mathsf{P}((\xi_1, \ldots, \xi_{m+n}) \in B) = \mathsf{P}(\eta_1 \in A_1, \ldots, \eta_n \in A_n)$.

10.197. Достаточность. Пусть

$$I_{A_1,\ldots,A_{m+1}}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \begin{cases} 1, & x_1 \in A_1, \ldots, x_{m+1} \in A_{m+1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\mathsf{P}(\xi_n \in A_1, \ldots, \xi_{n+m} \in A_{m+1}) = \mathsf{E}I_{A_1,\ldots,A_{m+1}}(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}) =$$
$$= \mathsf{E}I_{A_1,\ldots,A_{m+1}}(\xi_0, \ldots, \xi_m) = \mathsf{P}(\xi_0 \in A_1, \ldots, \xi_m \in A_{m+1}).$$

Необходимость. Пусть $F(A_1, \ldots, A_{m+1})$ — распределение $\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}$. В силу стационарности последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ оно не зависит от n. Но тогда и

$$\mathsf{E}f(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}) = \int \ldots \int f(x_1, \ldots, x_{m+1})\, F(dx_1, \ldots, dx_{m+1})$$

не зависит от n. 10.198. Пусть A — произвольное инвариантное множество относительно последовательности $\eta_0, \eta_1, \ldots$ Тогда существует $B \in \mathfrak{B}(R^\infty)$, такое, что $A=\{\omega\colon (\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots)\in B)\}$ для любого n. Отсюда

$$A=\{\omega\colon (f(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}), f(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m+1}), \ldots)\in B\}=$$
$$=\{\omega\colon (\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)\in C\},$$

где $C=\{z_0, z_1, \ldots. (f(z_0, \ldots, z_m), f(z_1, \ldots, z_{m+1}), \ldots)\in B\}$, и, так как $B\in\mathscr{B}(R^\infty)$, а функция $f(x_0, \ldots, x_m)$ измерима, то $C\in\mathscr{B}(R^\infty)$. Таким образом, A — инвариантное множество относительно последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ и в силу эргодичности последней $\mathsf{P}(A)=0$ или 1. Отсюда следует эргодичность последовательности $\eta_0, \eta_1, \ldots$ **10.199.** Стационарность $\{\eta_k\}$ следует из того, что совместное распределение $(f_n(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{n+k+1}), \ldots, f_n(\xi_{k+m}, \ldots, \xi_{n+k+m}))$ не зависит от k.

Для доказательства эргодичности воспользуйтесь предыдущей задачей. **10.200.** Воспользуйтесь результатом задачи 10.194. **10.202.** Напишите конечномерные распределения и покажите, что в условиях задачи они не зависят от сдвига времени. **10.203.** Воспользуйтесь тем, что для однородного процесса с независимыми приращениями

$$\mathsf{E}e^{i\lambda(\xi_{t+h}-\xi_t)}=e^{h\psi(\lambda)},$$

где $\psi(\lambda)$ не зависит от h. **10.204.** Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — произвольные борелевские множества. Тогда для любых $t_1, \ldots, t_n, t$

$$\mathsf{P}\left(\xi_{t_1+t}\in A_1, \ldots, \xi_{t_n+t}\in A_n\right)=\mathsf{P}\left(\varphi(t_1+t+\xi)\in A_1, \ldots, \varphi(t_n+t+\xi)\in A_n\right)=$$
$$=\mathsf{P}\left(\xi\in B_t\right),$$

где $B_t=\{x\colon \varphi(t_1+t+x)\in A_1, \ldots, \varphi(t_n+t+x)\in A_n\}\cap[0, T]$. Так как функция $\varphi(u)$ — периодическая с периодом T, то множество B_t получается из B_0 сдвигом на t и приведением по модулю T. Но ξ имеет равномерное распределение на $[0, T]$, следовательно, $\mathsf{P}(\xi\in B_t)=\mathsf{P}(\xi\in B_0)=$ $=\mathsf{P}\left(\xi_{t_1}\in A_1, \ldots, \xi_{t_n}\in A_n\right)$. **10.205.** Пусть $\zeta_t=\xi_t+\eta_t$, где ξ_t и η_t — независимые стационарные процессы. Выразите конечномерные распределения ζ_t через конечномерные распределения ξ_t и η_t.

10.206. $\mathsf{P}\left(\xi_{t_1+t}\in A_1, \ldots, \xi_{t_m+t}\in A_m\right)=$

$$=\mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cos[k(\theta_k+t_1+t)]\in A_1, \ldots, \sum_{k=1}^{n}\xi_k\cos[k(\theta_k+t_m+t)]\in A_m\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\cos[k(\theta_k+t_1+t)]\in A_1, \ldots, \sum_{k=1}^{n}x_k\cos[k(\theta_k+t_m+t)]\in\right.$$
$$\left.\in A_m\right)d\mathsf{P}(\xi_1<x_1, \ldots, \xi_n<x_n)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\mathsf{P}((\theta_1, \ldots, \theta_n)\in B_t)\,d\mathsf{P}(\xi_1<x_1, \ldots, \xi_n<x_n),$$

где $$B_t=\left\{z_1, \ldots, z_n\colon \sum_{k=1}^{n}x_k\cos[k(z_k+t_1+t)]\in A_1, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \sum_{k=1}^{n}x_k\cos[k(z_k+t_m+t)]\in A_m\right\}\cap[0, 2\pi]^n,\quad [0, 2\pi]^n=[0,2\pi]\times\ldots\times[0,2\pi].$$

Но множество B_t получается из B_0 сдвигом на $(t, 2t, \ldots, nt)$ и приведением по модулю 2π по каждой координате. Так как $\theta_1, \ldots, \theta_n$ независимы и имеют

равномерное распределение на $[0, 2\pi]$, $\mathbf{P}((\theta_1, \ldots, \theta_n) \in B_t) = \mathbf{P}((\theta_1, \ldots \theta_n) \in B_0)$. Следовательно, $\mathbf{P}\left(\xi_{t_1+t} \in A_1, \ldots, \xi_{t_m+t} \in A_m\right) = \mathbf{P}\left(\xi_{t_1} \in A_1, \ldots, \xi_{t_m} \in A_m\right)$.
10.207. См. указание к задаче 10.202. **10.208.** Пусть $K(u)$ — корреляционная функция процесса ξ_t. Тогда $\mathbf{E}\left|\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\xi_t dt - m\right|^2 =$

$$= 2\left(t_2-t_1\right)^{-2} \operatorname{Re} \int_0^{t_2-t_1} \left[\left(t_2-t_1\right)-u\right] K(u)\, du \to 0$$ при $t_2 - t_1 \to \infty$, если $K(t) \to 0$ при $t \to \infty$. **10.209.** Воспользуйтесь тем, что если существует производная стационарного процесса, то она имеет нулевое математическое ожидание. **10.210.** Вообще говоря, нет. Пусть, например $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — независимые невырожденные одинаково распределенные случайные величины и $\eta = -\xi_0$. Тогда последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — стационарная, а $\{\xi_0 + \eta, \xi_1 + \eta, \ldots\} = \{0, \xi_1 - \xi_0, \ldots\}$ не является стационарной. **10.211.** Процесс $Z(\lambda)$ постоянен на интервалах $(-\infty, -\eta)$, $(-\eta, \eta)$ и (η, ∞), а в точках $-\eta$ и η (при $\eta > 0$) делает скачки, равные $\frac{A}{2}e^{-i\varphi}$ и $\frac{A}{2}e^{i\varphi}$. При $\eta = 0$ процесс делает один скачок $A\cos\varphi$. **10.212.** Пусть $\xi_t = \int e^{it\lambda} dZ_1(\lambda)$. Тогда $\eta_t = \int e^{it\lambda} dZ(\lambda)$, где $Z(\lambda) = \frac{e^{i\varphi}Z_1(\lambda-\Lambda) + e^{-i\varphi}Z_1(\lambda+\Lambda)}{2}$. **10.213.** При $m \leqslant n$ $\mathbf{E}(S_n | \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_m)) =$
$= \mathbf{E}(S_m + \xi_{m+1} + \ldots + \xi_n | \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_m)) =$
$= S_m + \mathbf{E}(\xi_{m+1} + \ldots + \xi_n | \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_m)) = S_m + \mathbf{E}(\xi_{m+1} + \ldots + \xi_n) = S_m$.
10.214. $\mathbf{E}(X_n | \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_m)) = \mathbf{E}(X_m \xi_{m+1} \ldots \xi_n | \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_m)) =$
$= X_m \mathbf{E}(\xi_{m+1} \ldots \xi_n | \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_m)) = X_m \prod_{j=m+1}^{n} \mathbf{E}\xi_j = X_m$. **10.215.** $\mathbf{E}(\xi_n | \mathcal{F}_m) =$
$= \mathbf{E}[\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_m] = \mathbf{E}[\xi | \mathcal{F}_m] = \xi_m$. **10.216.** $\mathbf{E}(\zeta_n | \sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)) =$

$$= \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k \xi_k \,|\, \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_m)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \eta_k \xi_k + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{E}(\eta_k \xi_k \,|\, \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_m)) =$$

$$= \zeta_m + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{E}\{\eta_k [\mathbf{E}(\xi_k \,|\, \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_k, \xi_1, \ldots, \xi_m))] \,|\, \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots$$

$$\ldots, \xi_m)\} = \zeta_m + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{E}\xi_k \mathbf{E}(\eta_k \,|\, \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_m)) = \zeta_m.$$

10.217. $\mathbf{E}\left(\xi_n^2 \,|\, \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_s)\right) \geqslant [\mathbf{E}(\xi_n \,|\, \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_s))]^2 = \xi_s^2$.
10.218. $\mathbf{E}(S_n | \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_m)) = S_m + \mathbf{E}(\xi_{m+1} + \ldots + \xi_n | \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_m)) \geqslant S_m$. **10.219.** В силу неравенства Иенсена $\mathbf{E}(g(X_n) | \mathcal{F}_m) \geqslant g(\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_m)) = g(X_m)$. **10.220.** Пусть $\mathcal{F}_k = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Используя то, что $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ — плотность распределения $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ — плотность распределения, покажите, что для любого $B \in \mathcal{F}_k$, $n \geqslant k$

$$\int_B \frac{g_n(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))}{f_n(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))} P(d\omega) = \int_B \frac{g_k(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_k(\omega))}{f_k(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_k(\omega))} \mathbf{P}(d\omega).$$

10.221. См. решение задачи 10.219. **10.222.** $\{\tau_B \leqslant n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_n$.
10.223. Пусть $\{\mathcal{F}_t\}$ — неубывающее семейство σ-алгебр, относительно которого

τ и σ являются марковскими моментами. Тогда $\{\tau+1\leqslant t\}=\{\tau\leqslant t-1\}\in\mathscr{F}_{t-1}\subset\mathscr{F}_t$, $\{\min(\tau,\ \sigma)\leqslant t\}=\{\tau\leqslant t\}\cup\{\sigma\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$, $\{\max(\tau,\ \sigma)\leqslant t\}=\{\tau\leqslant t\}\cap\{\sigma\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$. **10.224.** Вообще говоря, нет. **10.225.** Покажите, что τ_n — марковский момент. Далее, так как $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_n\leqslant\ldots$, то при $m\leqslant n$ и $A\in\mathscr{F}_{\tau_m}$

$$\int_A X_{\tau_n}\mathsf{P}(d\omega)=\sum_{l_1=1}^{m}\sum_{l_2=l_1}^{n}\int_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n=l_2)}X_{l_2}\mathsf{P}(d\omega)=\sum_{l_1=1}^{m}\Bigg[\int_{A\cap(\tau_m=l_1)}X_{l_1}\mathsf{P}(d\omega)-$$

$$-\int_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n>l_1)}X_{l_1}\mathsf{P}(d\omega)+\int_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n>l_1)}X_{l_1+1}\mathsf{P}(d\omega)-$$

$$-\int_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n>l_1+1)}X_{l_1+1}\mathsf{P}(d\omega)+\ldots+\int_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n>n-2)}X_{n-1}\mathsf{P}(d\omega)-$$

$$-\int_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n>n-1)}X_{n-1}\mathsf{P}(d\omega)+\int_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n>n-1)}X_n\mathsf{P}(d\omega)\Bigg].$$

Далее, так как $\{\tau_n>l_1+j\}\in\mathscr{F}_{l_1+j}$, то $\int\limits_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n>l_1+j)}X_{l_1+j+1}\mathsf{P}(d\omega)=$ ($\geqslant$ для субмартингалов) $\int\limits_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n>l_1+j)}X_{l_1+j}\mathsf{P}(d\omega)$. Следовательно, $\sum\limits_{l_2=l_1}^{n}\int\limits_{A\cap(\tau_m=l_1,\tau_n=l_2)}X_{l_2}\mathsf{P}(d\omega)=$ ($\geqslant$ для субмартингалов) $\int\limits_{A\cap(\tau_m=l_1)}X_{l_1}\mathsf{P}(d\omega)$. Отсюда $\int\limits_A X_{\tau_n}\mathsf{P}(d\omega)=$ ($\geqslant$ для субмартингалов) $\sum\limits_{l_1=1}^{m}\int\limits_{A\cap(\tau_m=l_1)}X_{l_1}\mathsf{P}(d\omega)=\int\limits_A X_{\tau_m}\mathsf{P}(d\omega)$, т. е. $\{X_{\tau_n}\}$—мартингал (субмартингал).

10.227. Пусть $\mathscr{F}_s=\sigma(\xi_u,\ u\leqslant s)$. Имеем $\mathsf{E}(\zeta_t|\mathscr{F}_s)=\mathsf{E}(\exp\{\xi_s-as-\xi_t-\xi_s-a(t-s)\}|\mathscr{F}_s)=\exp\{\xi_s-as\}\mathsf{E}\exp(\xi_t-\xi_s-a(t-s))$. Но

$$\mathsf{E}\exp(\xi_t-\xi_s-a(t-s))\begin{array}{ll}\leqslant 1 & \text{при}\quad a\geqslant\lambda(e-1),\\ \geqslant 1 & \text{при}\quad a\leqslant\lambda(e-1).\end{array}$$

Отсюда следует утверждение задачи. **10.228.** Покажите сначала, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$ почти наверное существует. Пусть

$$\eta=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n), & \text{если предел существует и конечен,}\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

Тогда η измерима относительно $\mathscr{F}$ и интегрируема. Достаточно показать, что для любого $A\in\mathscr{F}$ $\int\limits_A\xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)=\int\limits_A\eta(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$, а для этого достаточно доказать выполнение указанного равенства для $A\in\bigcup\mathscr{F}_n$. Пусть $A\in\mathscr{F}_n$. Тогда $\int\limits_A\eta(\omega)\mathsf{P}(d\omega)=\int\limits_A\lim\limits_{k\to\infty}\mathsf{E}(\xi(\omega)|\mathscr{F}_k)\mathsf{P}(d\omega)=\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_A\mathsf{E}(\xi(\omega)|\mathscr{F}_k)\mathsf{P}(d\omega)=$ $=\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_A\xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)=\int\limits_A\xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$. **10.229.** Так как $\{\xi_n\}$ — мартингал, то $\mathsf{E}(\xi_{n+m}|\mathscr{F}_n)=\xi_n$ для любого $m\geqslant 0$. Покажите, что если $\{\xi_n\}$ — равномерно интегрируемый мартингал, то $\lim\limits_{m\to\infty} \mathsf{E}(\xi_{n+m}|\mathscr{F}_n) = \mathsf{E}\left(\lim\limits_{m\to\infty} \xi_{n+m}|\mathscr{F}_n\right)$.

10.230. Так как $\{X_n\}$ — мартингал, то $\mathsf{E}(X_n|X_0) = X_0$ для любого $n \geqslant 0$. Но $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X_n|X_0)) = \mathsf{E}X_n$. **10.231.** Пусть $\mathscr{F}_s = \sigma\{w_u,\ u \leqslant s\}$. Тогда $\mathsf{E}(w_t|\mathscr{F}_s) = \mathsf{E}(w_s + w_t - w_s|\mathscr{F}_s) = w_s + \mathsf{E}((w_t - w_s)|\mathscr{F}_s) = w_s + \mathsf{E}(w_t - w_s) = w_s$. **10.232.** См. решение предыдущей задачи. **10.233.** Пусть $t \geqslant u \geqslant s$. Тогда $\mathsf{E}[(\xi_t - \xi_u)(\xi_u - \xi_s)] = \mathsf{E}[\mathsf{E}((\xi_u - \xi_s)(\xi_t - \xi_u)|\mathscr{F}_u)] = \mathsf{E}(\xi_u - \xi_s) \times \mathsf{E}[(\xi_t - \xi_u)|\mathscr{F}_u] = \mathsf{E}(\xi_u - \xi_s)(\xi_u - \xi_u) = 0$. **10.234.** $\mathsf{E}\left(\xi_t^2 - F(t)\,|\,\mathscr{F}_s\right) = \mathsf{E}\left[\xi_s^2 + 2\xi_s(\xi_t - \xi_s) + (\xi_t - \xi_s)^2 - F(t)\,|\,\mathscr{F}_s\right] = \xi_s^2 + E(\xi_t - \xi_s)^2 - F(t) = \xi_s^2 - F(s)$. **10.235.** Пусть $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

$$\tau^{(n)} = \begin{cases} \min\{k \leqslant n : |\xi_k| \geqslant a\}, & \text{если такое } k \text{ существует,} \\ n & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда $\tau^{(n)}$ — марковский момент относительно семейства $\{\mathscr{F}_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Имеем $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k| \geqslant a\right) = \mathsf{P}\left(|\xi_{\tau(n)}| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{\mathsf{E}\left(\xi_{\tau(n)}\right)^2}{a^2}$. Но $\mathsf{E}\left(\xi_{\tau(n)}\right)^2 = \mathsf{E}\xi_n^2$ (для субмартингалов $\mathsf{E}\left(\xi_{\tau(n)}\right)^2 \leqslant \mathsf{E}\xi_n^2$). **10.236.** Пусть $\{\xi_n, \mathscr{F}_n\}$ — субмартингал, $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\Delta\xi_n = \xi_n - \xi_{n-1}$, $n \geqslant 2$, $\eta_1 = \xi_1$, $\eta_n = \eta_{n-1} + (\Delta\xi_n - \mathsf{E}(\Delta\xi_n|\mathscr{F}_{n-1}))$, $n \geqslant 2$. Обозначим $\zeta_1 = 0$, $\zeta_n = \zeta_{n-1} + \mathsf{E}(\Delta\xi_n|\mathscr{F}_{n-1})$. Тогда $\xi_k = \eta_k + \zeta_k$, $k \geqslant 1$. Так как $\{\xi_n\}$ — субмартингал, то $\mathsf{E}(\Delta\xi_n|\mathscr{F}_{n-1}) \geqslant 0$ и, следовательно, $\mathsf{P}(0 \leqslant \zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \ldots) = 1$. Далее, очевидно, ζ_n измерима относительно $\mathscr{F}_{n-1}$. Покажем, что $\{\eta_n\}$ — мартингал. Для этого достаточно показать, что $\mathsf{E}(\eta_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \eta_{n-1}$. Имеем $\mathsf{E}(\eta_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}[(\eta_{n-1} + \Delta\xi_n - \mathsf{E}(\Delta\xi_n|\mathscr{F}_{n-1})|\mathscr{F}_{n-1}] = \eta_{n-1} + \mathsf{E}((\Delta\xi_n - \Delta\xi_n)|\mathscr{F}_{n-1}) = \eta_{n-1}$. **10.237.** Пусть

$$\tau^{(n)} = \begin{cases} \min\{k \leqslant n : \xi_k \geqslant a\}, & \text{если такое } k \text{ существует,} \\ n & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k \geqslant a\right) = \mathsf{P}\left(\xi_{\tau(n)} \geqslant a\right) = \dfrac{\mathsf{E}\max\left(0, \xi_{\tau(n)}\right)}{a}$. Но так как $\{\xi_n\}$ — субмартингал, а $y = \max(0, x)$ — выпуклая функция, то $\mathsf{E}\max(0, \xi_{\tau^{(n)}}) \leqslant \mathsf{E}\max(0, \xi_n)$. **10.238.** Пусть

$$\tau^{(n)} = \begin{cases} \min\{k \leqslant n : \xi_k \geqslant a\}, & \text{если такое } k \text{ существует} \\ n & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

Тогда $\mathsf{E}\xi_1 \geqslant \mathsf{E}\xi_{\tau(n)} \geqslant a\mathsf{P}\left(\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k \geqslant a\right) + \displaystyle\int\limits_{\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < a} \xi_n \mathsf{P}(d\omega) \geqslant$

$\geqslant a\mathsf{P}\left(\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k \geqslant a\right) - \mathsf{E}\max(0, -\xi_n)$. Отсюда $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{\mathsf{E}\max(0, -\xi_n) + \mathsf{E}\xi_1}{a} = \dfrac{\mathsf{E}\max(0, \xi_n) - \mathsf{E}\xi_n + \mathsf{E}\xi_1}{a}$. **10.239.** См. решения задач 10.235, 10.237. **10.240.** Последовательность $\{\xi_n\}$ ограничена с вероятностью 1 снизу (нулем) и сверху (в силу задачи 10.237). Пусть, далее, $\nu(a, b]$ — число пересечений сверху вниз промежутка $(a, b]$ последовательностью $\{\xi_n\}$. Тогда, если $\{\xi_n\}$ — субмартингал (в частности, мартингал), то $\mathsf{E}\nu(a, b] \leqslant \dfrac{\sup\limits_{1\leqslant n<\infty} \mathsf{E}\max(0, \xi_n - b)}{b - a}$ (докажите!). Следовательно, $\mathsf{E}\nu(a, b] < \infty$ для любых a, b. Отсюда следует, что $\mathsf{P}(\Lambda) = 0$, $\Lambda = \bigcup\{\omega\colon \nu(a, b] = \infty\}$, где объединение берется по всем рациональным a, b, $a < b$. Так как при $\omega \notin \Lambda \lim \xi_n$ существует, а $\mathbf{P}(\Lambda) = 0$, утверждение задачи доказано. **10.241.** Докажите ограниченность снизу последовательности $\{\xi_n\}$. Далее доказательство повторяет решение задачи 10.240. **10.242.** Докажите ограниченность последовательности $\{\xi_n\}$ сверху. Далее см. решение задачи 10.240. 10.243. $P_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$, $j \geq i$.

10.244. $P(s, x, t, \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(t-s)/s}} \int\limits_{\Gamma} \exp\left\{-\frac{(u-(t/s)\,x)^2}{2t(t-s)/s}\right\} du, \quad s < t < 0,$

$$P(s, x, 0, \Gamma) = \begin{cases} 1, & 0 \in \Gamma, \\ 0, & 0 \notin \Gamma, \quad s < 0. \end{cases}$$

10.245. $P(s, x, t, \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int\limits_{\Gamma} \left[e^{-(y-x)^2/[2(t-s)]} + e^{-(y+x)^2/[2(t-s)]}\right] dy$

10.246. $\mathbf{E}\left([\pi_t - \pi_s]^n\right) = \sum\limits_{r=1}^{n} [\lambda(t-s)]^r \varphi_{n,r}$,

$$\varphi_{n,r} = \sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_n=r \\ j_1+2j_2+\ldots+nj_n=n}} \frac{n!}{j_1!\ldots j_n!} (1!)^{-j_1} (2!)^{-j_2} \ldots (n!)^{-j_n}.$$

10.247. $\mathbf{E}\exp\left\{i\mu \frac{\pi_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}\right\} = \exp\left(\lambda t\left(e^{i\frac{\mu}{\sqrt{\lambda t}}} - 1\right) - i\mu\sqrt{\lambda t}\right) =$

$$= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2} + o(1)\right) \to e^{-\frac{\mu^2}{2}} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

10.248. Пусть ξ_t — стационарный гауссовский марковский процесс. Рассмотрим случай, когда $\mathbf{E}\xi_t = 0$. Покажите сначала, что для гауссовского марковского процесса переходная функция $P(s, x, t, \Gamma)$ имеет вид $P(s, x, t, \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{st}^2}} \int\limits_{\Gamma} \exp\left\{-\frac{(u - m_{st}x)^2}{2\sigma_{st}^2}\right\} du$, где m_{st} и σ_{st}^2 удовлетворяют соотношениям $m_{su} = m_{tu} m_{st}$, $\sigma_{su}^2 = m_{tu}^2 \sigma_{st}^2 + \sigma_{tu}^2$, $0 \leq s \leq t \leq u$. Если процесс дополнительно является стационарным, то $m_{su} = m_{s-u}$, $\sigma_{su}^2 = \sigma_{s-u}^2$, причем $m_{t+s} = m_t m_s$, $\sigma_{t+s}^2 = m_t^2 \sigma_s^2 + \sigma_t^2$. Кроме того, в силу стационарности ξ_t существует σ^2 такое, что $\sigma^2 = m_t^2 \sigma^2 + \sigma_t^2$. Из полученных условий находим, что $m_t = e^{-\alpha t}$, $\alpha \geq 0$, $\sigma_t^2 = \sigma^2(1 - e^{-2\alpha t})$. Отсюда $R(t) = \sigma^2 e^{-2\alpha|t|}$. Случай, когда $\mathbf{E}\xi_t \neq 0$, рассматривается аналогично. **10.249.** Ковариационная функция $e^{-|t|}$, спектральная плотность $[\pi(1 + x^2)]^{-1}$. **10.250.** При $x < a$

$$P(s, x, t, (-\infty, y)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(u-x)^2}{2(t-s)}} du, & y \leq a, \\ 1, & y > a. \end{cases}$$

$$P(s, a, t, (-\infty, y)) = \begin{cases} 0, & y \leq a, \\ 1, & y > a. \end{cases}$$

10.251. $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\int\limits_a^b e^{-\frac{u^2}{2t}} du - \int\limits_a^b \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{(u-2kz)^2}{2t}} du\right].$

10.252. $\mathbf{P}\left(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|w_t|<a \mid w_1=0\right)=\begin{cases} 0, & a\leqslant 0,\\ 1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2a^2}, & a>0. \end{cases}$

10.253. Ковариационная функция равна $(|h|-|s|)/h^2$ при $|s|\leqslant |h|$, 0 при $|s|>|h|$. Спектральная плотность $[1-\cos(|h|x)]/(\pi h^2x^2)$.

10.254. $R(n)=\begin{cases}(m+1-n)\,\sigma^2, & 0\leqslant n\leqslant m,\\ 0, & n>m.\end{cases}$

10.255. $R(n)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{m-n} c_i c_{i+n}\sigma^2, & 0\leqslant n\leqslant m,\\ 0, & n>m.\end{cases}$

10.256. Спектральная плотность равна $\dfrac{\sigma^2\alpha}{2\pi}\left[\dfrac{1}{\alpha^2+(x-\beta)^2}+\dfrac{1}{\alpha^2+(x+\beta)^2}\right]$.

10.257. Воспользуйтесь результатом задачи 10.55.

СПИСОК УЧЕБНЫХ ИЗДАНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Помещаемый ниже список литературы содержит практически все известные учебники и сборники задач по теории вероятностей, изданные в нашей стране за последние пятьдесят лет. Кроме того, в список включены некоторые переводные издания, полезные при изучении теории вероятностей в целом или ее специальных разделов. Перечисленные в пункте III учебные пособия не используются в университетах, но они содержат материал, представляющий интерес для приложений.

I. УЧЕБНИКИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Бернштейн С. Н. Теория вероятностей.— 4-е изд.,— М.: Гостехиздат, 1948.
Боровков А. А. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1976.
Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов.— М.: Наука, 1976.
Гливенко В. И. Курс теории вероятностей.— М.: ГОНТИ, 1939.
Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— 5-е изд.,— М.: Наука, 1974.
Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1977.
Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика.— Киев: Вища школа, 1979.
Карлин С. Основы теории случайных процессов: Пер. с англ.— М.: Мир, 1971.
Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Высшая школа, 1973.
Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей.— 2-е изд.— М.: Наука, 1974.
Ламперти Дж. Вероятность: Пер. с англ.— М.: Наука, 1973.
Лоэв М. Теория вероятностей: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1962.
Круглов В. М. Дополнительные главы теории вероятностей.— М.: Высшая школа, 1984.
Невё Ж. Математические основы теории вероятностей: Пер. с фр.— М.: Мир, 1969.
Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры.— М.: Мир, 1983.
Розанов Ю. А. Случайные процессы.— 2-е изд.— М.: Наука, 1979.
Розанов Ю. А. Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1982.
Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика.— М.: Наука, 1985.
Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики.— М.: Наука, 1982.
Скороход А. В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов.— Киев: Вища школа, 1980.
Тутубалин В. Н. Теория вероятностей.— М.: Изд-во МГУ, 1972.
Уиттл П. Вероятность: Пер. с англ.— М.: Наука, 1982.
Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ.— 3-е изд.— М.: Мир, 1984, т. 1, 2.

Хеннекен П. А., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения: Пер. с англ.— М.: Наука, 1974.

Чистяков В. П. Курс теории вероятностей.— 2-е изд.— М.: Наука, 1982.

Ширяев А. Н. Случайные процессы.— М.: Изд-во МГУ, 1972.

Ширяев А. Н. Вероятность, статистика, случайные процессы.— М.: Изд-во МГУ, 1973, 1974, т. 1, 2.

Ширяев А. Н. Вероятность.— М.: Наука, 1980.

II. СБОРНИКИ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Гиленко Н. Д. Задачник по теории вероятностей.— М.: Учпедгиз, 1943.

Дороговцев А. Я., Сильвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей. Сборник задач.— Киев: Вища школа, 1980.

Израйлевич В. Л., Смирнов А. К., Черкасов И. Д., Чернявский И. Я. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике.— Саратов: Изд-во СГУ, 1982.

Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей.— М.: Изд-во МГУ, 1963.

Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей.— М.: Наука, 1980.

III. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ

Арлей Н., Бух К. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1951.

Вентцель Е. С. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1964.

Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей.— М.: Советское радио, 1982.

Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения.— М.: Наука, 1969.

Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/Под ред. А. А. Свешникова.— М.: Наука, 1965.

Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1983.

Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей.— М.: Наука, 1968.

Смирнов Н. В., Дунин-Барковский Н. В. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений).— М.: Наука 969.

Александр Владимирович Прохоров
Владимир Георгиевич Ушаков
Николай Георгиевич Ушаков

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы

ИБ № 12515

Редактор *С. Я. Шоргин*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Л. Н. Назарова, О. М. Березина*

Сдано в набор 13.05.85. Подписано к печати 18.02.86. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 3. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 20,5. Усл. кр.-отт. 20,5. Уч.-изд. л. 25,28. Тираж 23 000 экз. Заказ № 729. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25