

**Міністерство освіти і науки України
Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка**

А.І. Ткачук

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

КУРС ЛЕКЦІЙ

**навчальний посібник для студентів
вищих педагогічних навчальних закладів
напряму підготовки 6.010103 «Технологічна освіта»
за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр»**

Кіровоград - 2015

ББК 22.21я73

Т-48

УДК 531/534(075.8)

Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів:

Курс лекцій. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів напряму підготовки 6.010103 «Технологічна освіта» за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» / А. І. Ткачук. – Кіровоград: ПП "Центр оперативної поліграфії "Авангард". – 2015. – 260 с.

Навчальний посібник призначений для студентів вищих педагогічних навчальних закладів напряму підготовки 6.010103 «Технологічна освіта» за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр». Він містить 16 лекцій, запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач по темам, що виносяться на практичні заняття з «Технічної механіки», охоплюючи тим самим весь курс, передбачений діючими навчальними планами та програмами для підготовки названої категорії студентів. Посібник придатний для самостійної роботи студентів всіх нині відомих форм навчання, в тому числі і дистанційної форми.

Рецензенти: Царенко О.М. — кандидат технічних наук,

професор кафедри фізики та методики її викладання фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Садовий М.І. — доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри теорії і методики технологічної підготовки, охорони праці та безпеки життєдіяльності фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Рекомендовано методичною радою Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (протокол № 1 від 25 вересня 2014 року).

Вступ

Технічна механіка в системі фахової підготовки вчителів технологічної освіти відіграє важливу роль як основна при опануванні в подальшому знань з циклу загальнотехнічних та професійно спрямованих дисциплін. Необхідність у вивченні такого матеріалу визначається вимогами професійно-кваліфікаційної характеристики вчителя даного профілю.

Курс «Технічної механіки», на вивчення якого відводиться 180 годин, традиційно komponується як інтеграція автономних курсів, чільне місце серед яких посідають «Статика абсолютно твердого тіла» та «Опір матеріалів».

Курс «Технічної механіки» знайомить майбутніх вчителів технологічної освіти з: методами перетворення одних систем сил і пар сил в інші, які еквівалентні даним, та умовами і положеннями рівноваги довільних просторових (плоских) систем сил і пар сил; основними законами деформації твердого тіла та методами інженерного розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

Вивчення «Технічної механіки» базується на знаннях, що отримані студентами під час вивчення курсів «Загальна фізика», «Вища математика», «Нарисна геометрія та креслення», «Технологія конструкційних матеріалів».

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні гіпотези та припущення, що використовуються в курсі; види в'язей, що діють на невідне тверде тіло, та напрям їх реакцій; властивості пар сил та правила дій над ними;

вміти: визначати моменти сил, що діють на невідне тверде тіло, відносно точок і осей; аналізувати умови рівноваги довільної просторової (плоскої) системи сил; аналізувати деформації, які розглядаються у курсі (розтягання, стискання, зсув, згинання, поперечне й поздовжнє кручення); визначати геометричні характеристики плоских перерізів брусів; виконувати розрахунки елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість при статичних та динамічних навантаженнях; використовувати набуті знання при розв'язуванні конструкторсько-технологічних завдань, пов'язаних з обладнанням майстерень, організації навчального процесу та у гуртковій роботі.

Дана книга написана як навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів напряму підготовки 6.010103 «Технологічна освіта» у повній відповідності до діючої програми курсу технічної механіки. Виклад теоретичної частини курсу ведеться переважно векторним способом, який є найбільш коротким та найбільш повно відповідає суті понять механіки. Окрім загальних методичних вказівок, для розв'язання різних груп задач в ньому подається докладний розв'язок понад дев'яносто типових задач.

Механіка — це наука про найпростіші форми руху матерії, що зводяться до простих переміщень або переходів фізичних тіл з одного положення чи стану у просторі й часі в інше внаслідок взаємодії між матеріальними тілами. Вона охоплює цілий комплекс дисциплін що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл. Наприклад, *прикладна механіка*, яку ще називають *теорією механізмів і машин*, вивчає загальні питання руху та роботи машин і механізмів; *гідромеханіка* вивчає рух і взаємодію рідин і тіл; *теорія автоматичного керування* — рух системи тіл, в яких формується взаємодія через від'ємний зворотний зв'язок й інтелектуальні штучні закони керування; *аеромеханіка* — рух газів, рух твердих тіл у газовому середовищі; *небесна механіка* — рух небесних тіл; *електродинаміка* — рух і взаємодію тіл в електромагнітних полях; *біомеханіка* — рух і взаємодію біологічних об'єктів. До механіки також відносять *будівельну механіку* тощо.

Технічна механіка — це частина механіки, в якій вивчаються закономірності, що використовуються при побудові машин, механізмів і технічних споруд. В основі технічної механіки лежить класична механіка.

Технічна механіка вивчає: 1) механічний рух матеріальних тіл (матеріальних точок, абсолютно твердих тіл) — *«Теоретична механіка»*; 2) розрахунок на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів і споруд — *«Опір матеріалів»*; 3) аналіз і синтез механізмів — *«Теорія машин і механізмів»*; 4) теоретичні основи розрахунку та конструювання деталей і складних одиниць (вузлів) машин — *«Деталі машин»*.

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху, спокою та взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. **Статика** — розділ теоретичної механіки, в якому вивчають методи перетворення одних систем сил на інші, що еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на абсолютно тверде тіло. До **основних понять теоретичної механіки** належать: 1) **матеріальна точка** — геометрична точка, яка має певну масу; 2) **система матеріальних точок** — сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопов'язані між собою; 3) **абсолютно тверде тіло** — тіло, що складається з системи матеріальних точок, які неперервно заповнюють певну частину простору так, що відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною; 4) **суцільне середовище** — система матеріальних точок, що неперервно заповнюють певну частину простору, під час руху яких відстані між матеріальними точками змінюються. Данні поняття є ідеальними моделями матеріальних тіл з тим чи іншим ступенем абстракції реальних фізичних властивостей.

Механіка є однією з давніх наук, її виникнення і розвиток зумовлені потребами практики. Однак, відомості з механіки, накопичені людством протягом багатьох століть, являли собою, як правило, ряд окремих розрізнених робіт, не зібраних в єдину наукову систему. В створенні такої системи велику роль відіграли праці Галілео Галілея (1564-1642 р.), який вперше сформулював найважливіші поняття механіки: ідеї про інерцію речовини, поняття прискорення, закони складання рухів і швидкостей, закони падіння тіл тощо. З моменту виходу у світ в 1687 р. знаменитої наукової праці Ісаака Ньютона (1643-1727 р.) «Математичні початки натуральної філософії» можна вважати, що механіка дійсно стала наукою. В цій праці Ньютон узагальнив як досвід своїх попередників, так і результати своєї багатогранної наукової діяльності і систематично виклав основні закони класичної механіки. Подальший розвиток механіки, що спирається на диференціальне й інтегральне числення, пов'язаний з розробкою аналітичних методів, основи яких були закладені в працях Л. Ейлера (1707-1783 рр.), Ж. Даламбера (1717-1783 рр.), Ж. Лагранжа (1736-1813 рр.).

Наукові основи статички і гідростатички закладені давньогрецьким ученим Архімедом (287-212 рр. до н. е.). Він виклав теорію рівноваги важеля, що перебуває під дією паралельних сил, створив учення про центр ваги тіл, а також дослідив рівновагу тіл, що плавають у рідині. У геометричну статистику значний внесок зробили французькі вчені П. Варіньон (1654-1722 рр.) і Л. Пуансо (1777-1859 рр.). Основоположником аналітичної статички є видатний французький математик Ж. Лагранж. Подальший розвиток аналітичної статички пов'язаний з ім'ям видатного російського математика і механіка М.В. Остроградського (1801-1861 рр.). В обґрунтуванні аксіоматички статички значну роль відіграли Л. Ейлер, М.Є. Жуковський (1847-1921 рр.), С.О. Чаплигін (1869-1942 рр.), В.Г. Імшенецький (1832-1892 рр.), О.І. Сомов (1815-1876 рр.).

Значний внесок у розвиток графостатички зробив В.Л. Кирпичов (1845-1913 рр.) — перший ректор НТУУ «КПІ».

Лекція № 1

Тема: «Основні поняття та аксіоми статички абсолютно твердого тіла»

ПЛАН

- 1.1. Поняття сили, системи сил.
- 1.2. Рівновага абсолютно твердого тіла.
- 1.3. Аксіоми статички та їх наслідки.
- 1.4. Теорема про три непаралельні сили.
- 1.5. Розкладання сили на дві складові, прикладені у тій самій точці.

1.1. Поняття сили, системи сил

Одним з основних понять статички є поняття сили. **Сила** — це міра механічної взаємодії матеріальних тіл, в результаті якої тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення, або деформуватися. Така взаємодія є досить різною за своєю фізичною природою. Для розв'язування задач механіки якісна сторона цих різноманітних явищ несуттєва, достатньо охарактеризувати їх з кількісної сторони, користуючись поняттям сили, як деякої універсальної абстракції, в рівній мірі придатної для кількісної оцінки різних механічних взаємодій.

Сила є векторною величиною, яка характеризується:

- 1) **напрямом**, або **лінією дії** (під напрямом сили розуміють напрям руху, який дістало б вільне тіло, що перебуває у спокої, якби на нього подіяла ця сила);
- 2) **числовим значенням** (модулем);
- 3) **точкою прикладання** — матеріальною частиною тіла, на яку діє сила.

Лінія дії сили — пряма, вздовж якої направлена сила (пряма LM на рис. 1.1). Точка A називається **початком вектора** \overline{AB} , а точка B — його кінцем. Довжина відрізка AB , що відображає силу, в певному масштабі дорівнює модулю сили. Сила позначається латинською літерою зі стрілкою над нею \vec{F} ($\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{T}, \vec{N}, \vec{F}_1, \vec{P}_A, \vec{F}'_B$). Модуль

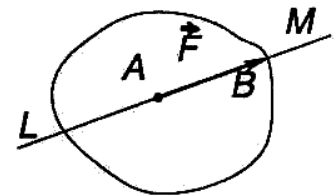


Рис. 1.1.

сили позначається латинською літерою без стрілки F або $|\vec{F}|$. В системі SI числове значення сили вимірюється в таких одиницях, як **ньютон (Н)**. В системі $МКГСС$ — в **кілограм-силах (кгс або кГ)**, $1 \text{ кГ} = 9,81 \text{ Н}$. За одиницю величини сили в 1 Н приймають таку силу, яка масі в 1 кг надає прискорення

$1 \frac{M}{c^2}$ — $[F] = 1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \frac{M}{c^2}$. Це впливає з другого

закону Ньютона — $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Силу часто задають безпосереднім описом, проте **можна задати силу (як вектор) через її проєкції на осі прямокутної системи координат і точку прикладання сили** (рис. 1.2):

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}, \quad (1.1)$$

де F_x, F_y, F_z — проєкції сили на осі координат, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори.

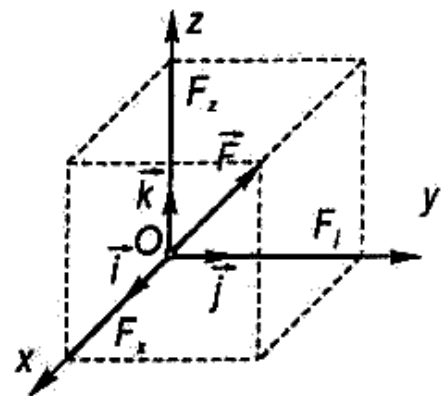


Рис. 1.2.

Сукупність сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, прикладених до тіла, точки або системи точок чи тіл, називається **системою сил**.

Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині, називається **плоскою**. **Система сил**, лінії дії яких лежать у різних площинах, називається **довільно розміщеною** або **просторовою**. **Система сил**, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається **збіжною**. **Система паралельних сил** може розміщуватися як у просторі, так і в площині.

Якщо, не порушуючи стану тіла, одну систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ можна замінити іншою системою сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$ і навпаки, то такі **системи сил** називаються **еквівалентними**. Символічно це позначається наступним чином:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m). \quad (1.2)$$

В тому випадку, коли система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ еквівалентна одній силі \vec{R} , тобто

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}, \quad (1.3)$$

останню називають **рівнодійною даної системи сил**. В подальшому буде показано, що **не всяка система сил має рівнодійну**.

1.2. Рівновага абсолютно твердого тіла

Другим важливим поняттям статyki є поняття абсолютно твердого тіла.

Абсолютно твердим тілом називається тіло, в якому відстань між двома його будь-якими точками зберігається постійною, незалежно від дії інших тіл, тобто воно зберігає свою геометричну форму незмінною. В природі не існує абсолютно твердих тіл, тому це поняття є ідеалізацією дійсності. Оскільки, реальні тверді тіла зазвичай мало змінюють свою форму під дією прикладених до них сил, тому для розв'язання багатьох задач механіки можна нехтувати малими деформаціями і користуватись уявленням про абсолютно тверде тіло.

Якщо абсолютно тверде тіло залишається у стані спокою при дії на нього системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, то останню називають **зрівноваженою системою сил, еквівалентною нулю**:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0. \quad (1.4)$$

В такому випадку говорять, що **тіло перебуває у рівновазі**.

1.3. Аксиоми статyki та їх наслідки

Аксиомами статyki називають ті загальні закони, яким підлягають сили, діючі на одне і те ж тіло, або ж сили, прикладені до взаємодіючих тіл. Ці закони встановлені багатьма безпосередніми спостереженнями, а також дослідною перевіркою наслідків, які логічно випливають з цих аксіом.

Аксиома I: дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно зрівноважуються (еквівалентні нулеві) тоді і лише тоді, коли вони рівні за величиною і діють вздовж однієї прямої у протилежних напрямках (рис. 1.3).

Аксиома II: прикладання і відкидання взаємно зрівноважених сил не порушує механічного стану твердого тіла (зокрема, стану рівноваги, рис. 1.4). З цієї аксиоми випливає **наслідок** — точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії її дії в яку завгодно точку тіла без порушення його рівноваги.

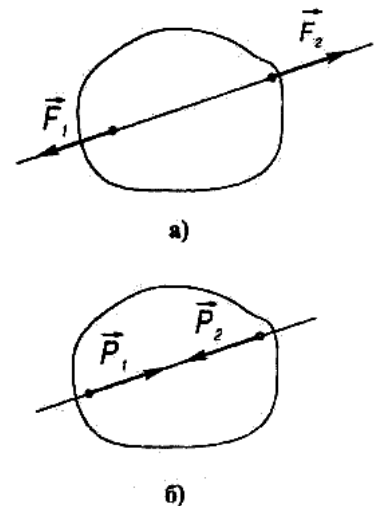


Рис. 1.3.

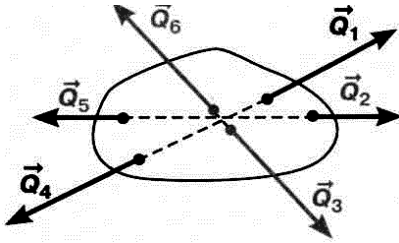


Рис. 1.4.

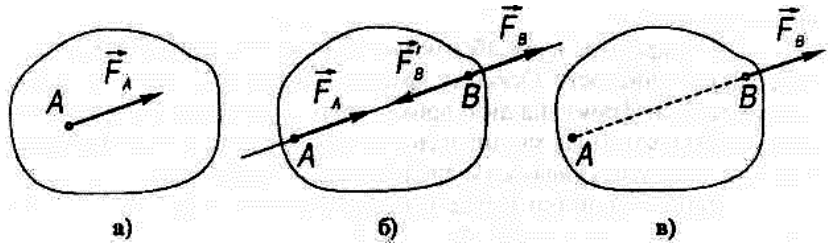


Рис. 1.5.

Дійсно, нехай сила \vec{F}_A , прикладена в т. A (рис. 1.5, а). Прикладемо в т. B на лінії дії \vec{F}_A дві зрівноважені сили \vec{F}_B і \vec{F}'_B , маючи на увазі, що $\vec{F}_B = \vec{F}_A$ (рис. 1.5, б). Тоді, згідно з **Аксиомою II** будемо мати $\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B)$. Оскільки сили \vec{F}_A і \vec{F}'_B складають зрівноважену систему сил (**Аксиома I**), то згідно **Аксиоми II** їх можна відкинути (рис. 1.5, в). Таким чином $\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B) \sim \vec{F}_B$ або $\vec{F}_A \sim \vec{F}_B$. Цей наслідок показує, що сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, являє собою **ковзний вектор**.

Аксиома III (про паралелограм сил): рівнодійна двох сил, що прикладені до однієї матеріальної точки під деяким кутом одна до одної, за величиною та напрямом визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображають дані сили (рис. 1.6).

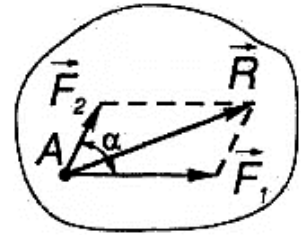


Рис. 1.6.

Якщо позначити через \vec{R} рівнодійну двох даних сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , то на підставі цієї аксіоми: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. (1.5)

Ця операція називається **геометричним додаванням за правилом паралелограма**. **Модуль рівнодійної** визначається за наступною формулою:

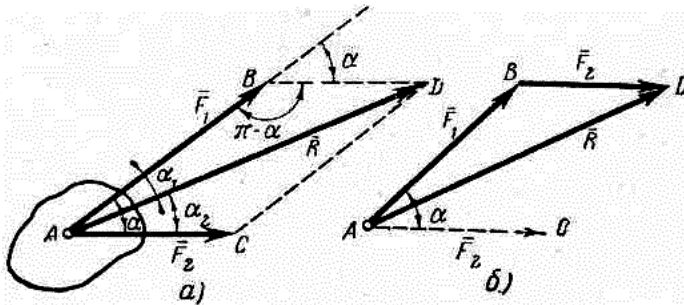


Рис. 1.7.

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} \quad (1.6)$$

Формула (1.6) одержується з трикутника ABD згідно **теорему косинусів** — квадрат сторони будь-якого трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку їх на косинус кута між ними

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\pi - \alpha)},$$

оскільки $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ (рис. 1.7).

З **теорему синусів** (в будь-якому трикутнику сторони пропорційні синусам

протилежних кутів) маємо $\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}$, а так як $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$,

то одержимо $\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin \alpha}$ (1.7). Ця формула дозволяє знайти синуси

кутів між рівнодіючою і складовими силами, й, відповідно, і самі ці кути — напрям рівнодіючої.

Окремими випадками визначення рівнодійної двох сил залежно від значень кута α можуть бути:

1) $\alpha = 0^\circ$, $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$. Підставивши значення у формулу (1.6), одержимо:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2}, \quad R = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2$$

— **рівнодійна двох сил, напрямлених уздовж однієї прямої та в один бік, діє в той самий бік, а її модуль дорівнює сумі модулів цих сил;**

2) $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, тоді $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$. Підставивши значення у формулу (1.6), одержимо: $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$;

3) $\alpha = \pi = 180^\circ$, тоді $\cos \alpha = \cos \pi = \cos 180^\circ = -1$. Підставивши значення у (1.6), маємо: $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = F_1 - F_2$ — *рівнодійна двох сил, напрямлених уздовж однієї прямої але в протилежні боки, діє в бік більшої сили, а її модуль дорівнює різниці модулів складових сил*;

4) $F_1 = F_2 = F$, $\Rightarrow R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2 \cdot F \cdot F \cdot \cos \alpha} = \sqrt{2 \cdot F^2 + 2 \cdot F^2 \cdot \cos \alpha}$,
 $R = F \cdot \sqrt{2 + 2 \cdot \cos \alpha} = F \cdot \sqrt{2 \cdot (1 + \cos \alpha)} = 2 \cdot F \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = 2 \cdot F \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ —

при складанні однакових за модулем сил, прикладених до точки під кутом одна до одної, отримуємо ромб, діагоналю якого буде рівнодійна.

Геометричну різницю векторів \vec{F}_1 і \vec{F}_2 також можна знайти за правилом паралелограма, враховуючи що $\vec{R}' = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2)$, (1.8)

при цьому: $R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}$. (1.9)

З аксіоми паралелограма сил випливає правило векторного додавання сил, прикладених в одній точці твердого тіла (рис. 1.8), що дозволяє будь-яку кількість таких сил додавати геометрично. Для цього достатньо побудувати векторний багатокутник, приєднуючи послідовно до першої сили \vec{F}_1 вектор, геометрично рівний вектору другої сили \vec{F}_2 і т.д. (рис. 1.8). Вектор, проведений з точки прикладання першої сили в останню вершину побудованого багатокутника, є рівнодійною \vec{R} , рівною

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.10)$$

Одержаний таким чином багатокутник називається силовим багатокутником.

Якщо остання вершина багатокутника сил збігається з першою, то багатокутник називається замкнутим (рис 1.9). В цьому випадку рівнодійна дорівнює нулю: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, (1.11)

а система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ є зрівноваженою.

Замкнутість силового багатокутника виражає умову рівноваги сил, прикладених в одній точці твердого тіла, в графічній формі.

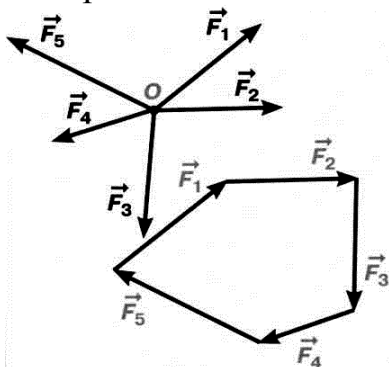


Рис. 1.9.

Правило паралелепіпеда сил: рівнодійна просторової системи трьох сил, які збігаються в одній точці, прикладена в тій самій точці і за модулем та напрямком дорівнює діагоналі паралелепіпеда, ребра якого відповідно паралельні заданим силам та рівні їм (рис 1.10):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \quad (1.12)$$

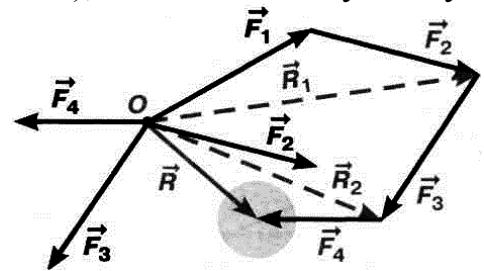


Рис.1.8.

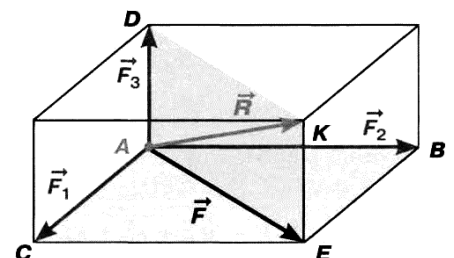


Рис. 1.10.

Аксиома IV (про дію і протидію): сили, з якими два тіла взаємодіють між собою, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом (рис. 1.11):

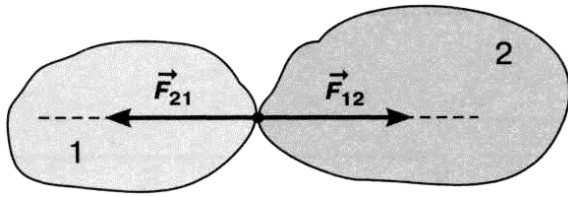


Рис. 1.11.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.13)$$

Дана аксіома є **третьім законом Ньютона** — законом рівності дії і протидії. Важливо пам'ятати, що **дія і протидія являють собою дві сили, прикладені завжди до різних тіл, тому ці сили не утворюють систему взаємно зрівноважених сил.**

Аксиома V (принцип отвердіння): якщо тіло, що деформується, знаходиться в рівновазі, то рівновага цього тіла не порушиться, коли, не змінюючи форми, розмірів, положення в просторі, воно перетвориться в абсолютно тверде тіло.

З **принципу отвердіння** слідує, що умови рівноваги, які є необхідними і достатніми для абсолютно твердого тіла, є необхідними, але не достатніми для відповідного тіла, що деформується (достатні умови рівноваги тіл, які деформуються, встановлюють в курсах опору матеріалів та теорії пружності). Наприклад, твердий брусок (рис 1.12) знаходиться в рівновазі під дією двох сил, рівних за модулем і направлених вздовж осі бруска одна до одної або одна від одної, в той час як нитка, що відповідає даному бруску, знаходиться в рівновазі тільки під дією двох сил, рівних за модулем і направлених вздовж нитки одна від одної. Зрозуміло, що під дією сил, напрямлених одна до одної, нитка зімнеться.

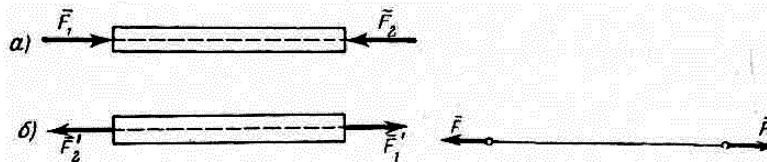


Рис. 1.12.

Принцип отвердіння широко використовується в інженерних розрахунках. Він встановлює зв'язок між статикою абсолютно твердого тіла і статикою тіла, що деформується. Цей принцип дозволяє результати, що викладені в статиці абсолютно твердого тіла, перенести потім не тільки на дослідження рівноваги тіл, що деформуються (опір матеріалів), та цілих інженерних споруд (механіка будівництва), а й і на рівновагу рідини (гідростатика).

1.4. Теорема про три непаралельні сили

Опираючись на аксіоми, доведемо **теорему 1.1 про три непаралельні сили**, яка корисна при визначенні напрямів дії невідомих сил: **якщо під дією трьох сил тіло перебуває в рівновазі і лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній площині і їх лінії дії перетинаються в одній точці.**

Нехай задане тіло перебуває у рівновазі під дією трьох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, прикладених в точках A, B, C (рис. 1.13, а), причому лінії дії сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 перетинаються в точці O . Згідно наслідку **Аксиоми II** сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 можна перенести в точ-

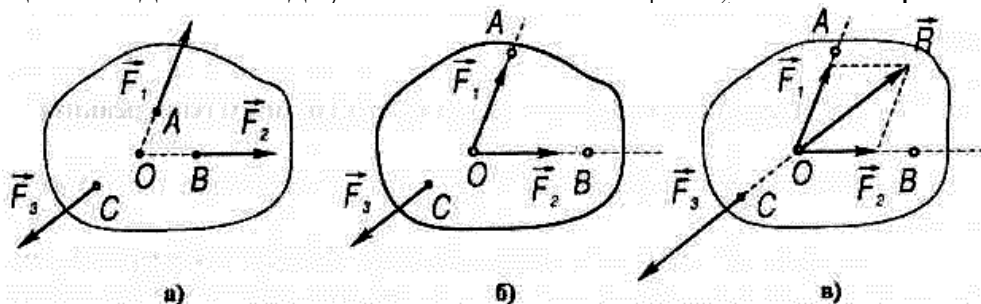
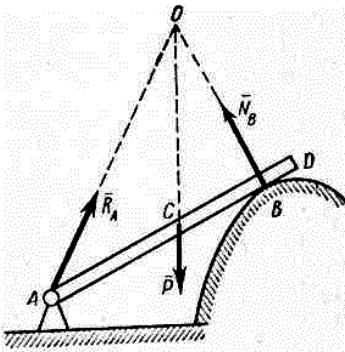


Рис. 1.13.

ку O (рис. 1.13, б), а за **Аксиомою III** їх можна замінити однією рівнодійною силою \vec{R} (рис. 1.13, в), причому $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Таким чином, дана система сил приведена до двох сил \vec{R} і \vec{F}_3 (рис. 1.13, в). За умовами теореми тіло перебуває у рівновазі, отже згідно **Аксиоми I** сили \vec{R} і \vec{F}_3 мають бути рівні за модулем, протилежно направлені і діяти вздовж однієї прямої. Це означає, що лінія дії сили \vec{F}_3 повинна проходити через точку O , що і потрібно було довести.



Дана теорема дозволяє знаходити напрям невідомої сили, якщо відомі напрями двох інших сил, під дією яких тіло перебуває в рівновазі. Так, наприклад, на рис. 1.14 зображена балка AD вагою \vec{P} , що закріплена на нерухомому циліндричному шарнірі A та спирається в точці B на нерухому опору. Реакція \vec{N}_B нерухомої опори направлена перпендикулярно до балки AD . Реакцію нерухомого циліндричного шарніру A позначимо через \vec{R}_A . Так як три

Рис. 1.14. сили \vec{P} , \vec{N}_B і \vec{R}_A взаємно зрівноважуються, то лінії дії цих сил повинні перетинатись в одній точці, тому лінія дії реакції \vec{R}_A нерухомого циліндричного шарніру A проходить через точку перетину O ліній дії сил \vec{P} і \vec{N}_B .

А значить, дана реакція \vec{R}_A направлена по прямій OA , що з'єднує точку O з нерухомою т. A (з нерухомим болтом шарніру, що розглядається як точка).

1.5. Розкладання сили на дві складові, прикладені у тій самій точці.

Заміну однієї сили системою сил, яка створює на тіло ту ж дію, що і дана сила, називають **розкладанням сил**. При **розкладанні даної сили на дві збіжні складові сили** необхідно знайти таку систему двох збіжних сил, для якої дана сила є рівнодійною.

Наприклад, необхідно розкласти силу \vec{F} на дві збіжні сили (рис. 1.15). Візьмемо два довільних напрямки OM і ON та побудуємо вектор \vec{OA} , що зображає в певному масштабі дану силу \vec{F} . З точки A проведемо прямі AB та AC , що паралельні відповідно OM і ON . Одержимо паралелограм $OBAC$, для якого сила \vec{F} є діагоналлю. Вектори \vec{OB} і \vec{OC} дають в цьому ж масштабі складові сили, рівнодійною яких дорівнює \vec{F} . Взнявши два інших довільних напрямки ON_1 і OM_1 та аналогічним чином побудувавши

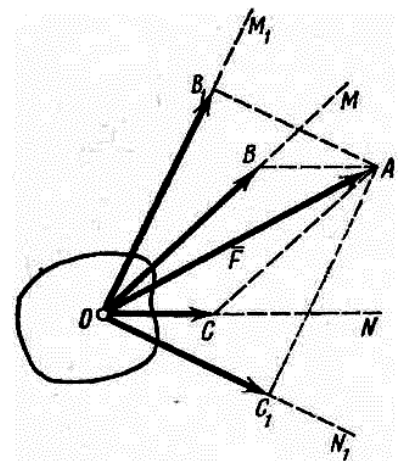


Рис. 1.15.

новий паралелограм OB_1AC_1 , ми отримаємо інші складові сили \vec{OB}_1 і \vec{OC}_1 , які в сумі дають ту ж саму рівнодійну. Таким чином, за даною силою \vec{F} , очевидно, можна побудувати нескінчену кількість паралелограмів сил, а значить задача про розкладання даної сили \vec{F} на дві збіжні складові сили є в такій постановці невизначеною й **має однозначне рішення лише при заданні наступних варіантів умов**:

1. Силу \vec{R} можна розкласти на дві складові \vec{F} та \vec{Q} , напрям яких задано кутами α і β (рис. 1.16). Із точок A і B — початку і кінця сили \vec{R} — за заданим напрямом проводимо складові, які перетинаються в точці C . Відрізок AC дає значення однієї складової сили, а відрізок CB — другої.

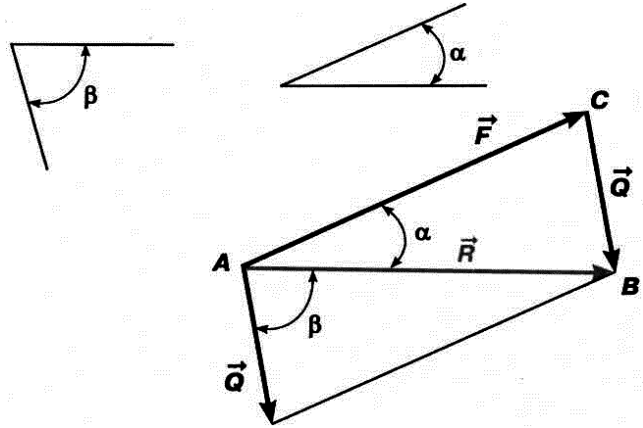
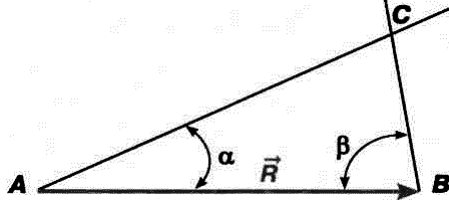


Рис. 1.16.

2. Силу \vec{R} можна розкласти на дві складові \vec{F} та \vec{Q} , якщо задано їхні значення (рис. 1.17). Із т. A , як із центра, проводимо дугу радіусом, що дорівнює F , а з т. B — дугу радіусом Q . Отримуємо трикутник сил ACB , сторони якого AC і CB становлять за значенням і напрямом складові сили \vec{F} і \vec{Q} .

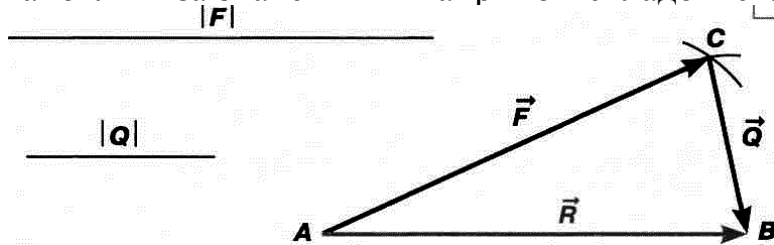


Рис. 1.17.

3. Силу \vec{R} можна розкласти на дві складові \vec{F} та \vec{Q} , якщо задано значення і напрям однієї зі складових, наприклад сили \vec{F} (рис. 1.18). Через точку A проводимо силу \vec{R} , а під заданим кутом α — силу \vec{F} . З'єднуючи точки C і B прямою, знаходимо другу складову \vec{Q} .

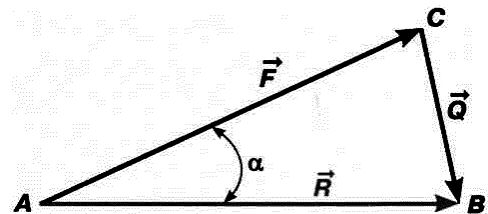
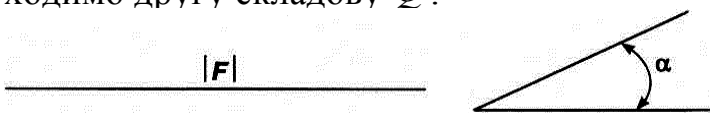


Рис. 1.18.

4. Силу \vec{R} можна розкласти на дві складові \vec{F} та \vec{Q} , якщо одна із них відома тільки за модулем, а друга — тільки за напрямом (рис. 1.19). Нехай задано силу \vec{Q} і напрям сили \vec{F} , який утворює з напрямом сили \vec{R} кут α . Із точки A відкладаємо силу \vec{R} і з цієї самої точки проводимо напрям сили \vec{F} під кутом α до напрямку \vec{R} . Із точки B , як з кінця сили \vec{R} , розхилом циркуля, що дорівнює значенню сили \vec{Q} , засікаємо на напрямі сили \vec{F} у точці C . Відсічений на напрямі сили \vec{F} відрізок AC визначає значення даної сили. Згідно з побудовою, відрізок CB визначає значення і напрям сили \vec{Q} .

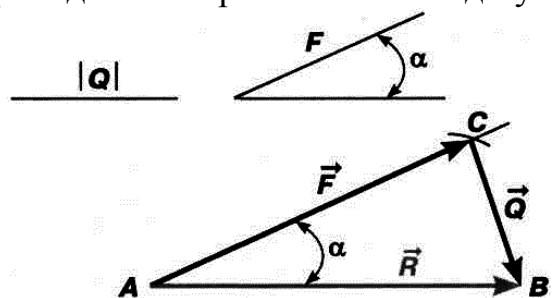


Рис. 1.19.

Виходячи з правила паралелепіпеда сил, можна розв'язати задачу про

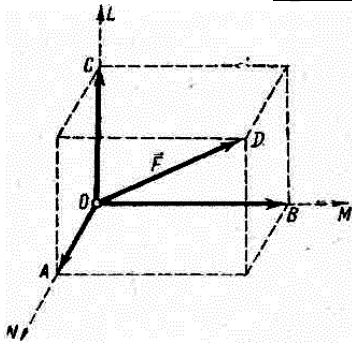


Рис. 1.20.

розкладання даної сили \vec{F} на три збіжні сили по трьом заданим напрямкам ON , OM і OL , які не лежать в одній площині (рис. 1.20). Для цього достатньо побудувати паралелепіпед, ребра якого OA , OB і OC мали б задані напрямки, а діагоналю OD була б задана сила \vec{F} . При цьому, ребра даного паралелепіпеда OA , OB і OC дадуть нам модулі шуканих складових даної сили \vec{F} в тому ж масштабі, в якому відкладена сила \vec{F} .

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняттю сила.
2. Поясніть, чим характеризується така фізична величина, як сила?
3. Що називають системою сил?
4. Чим відрізняється плоска система сил від просторової?
5. Яка система сил називається збіжною?
6. Які системи сил називаються еквівалентними?
7. Яка сила називається рівнодійною даної системи сил?
8. Що розуміють під абсолютно твердим тілом?
9. Яку систему сил називають зрівноваженою або еквівалентною нулю?
10. Сформулюйте першу аксіому статички — умову рівноваги двох сил.
11. Сформулюйте другу аксіому статички — принцип прикладання і відкидання взаємно зрівноважених сил.
12. Поясніть, чому сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, являє собою ковзний вектор.
13. Сформулюйте третю аксіому статички — про паралелограм сил.
14. За якою формулою визначається модуль рівнодійної?
15. Як визначається рівнодійна двох сил, напрямлених уздовж однієї прямої та в один бік?
16. Як визначається рівнодійна двох сил, напрямлених уздовж однієї прямої але в протилежні боки?
17. Як визначається рівнодійна при складанні однакових за модулем сил, прикладених до точки під кутом одна до одної?
18. Як визначається геометрична різниця двох векторів?
19. В чому полягає правило векторного додавання системи сил, прикладених в одній точці твердого тіла?
20. Що таке силовий багатокутник?
21. Поясніть, що виражає замкнутість силового багатокутника?
22. В чому полягає правило паралелепіпеда сил?
23. Сформулюйте четверту аксіому статички — законом рівності дії і протидії.
24. Сформулюйте п'яту аксіому статички — принцип отвердіння.
25. Проаналізуйте теорему 1.1. — про три непаралельні сили.
26. Що розуміють під розкладанням сили на дві збіжні складові сили?
27. Поясніть, як можна розкласти силу на дві складові, напрям яких задано відповідними кутами?
28. Поясніть, як можна розкласти силу на дві складові, якщо задано їхні значення?
29. Поясніть, як можна розкласти силу на дві складові, якщо задано значення і напрям однієї зі складових?
30. Поясніть, як можна розкласти силу на дві складові, якщо одна із них відома тільки за модулем, а друга — тільки за напрямом?

Лекція № 2

Тема: «В'язі та їх реакції»

ПЛАН

- 2.1. Невільне тверде тіло.
- 2.2. Види в'язей та напрям їх реакцій.
- 2.3. Балкові системи та їх навантаження.

2.1. Невільне тверде тіло

При розгляданні різних систем сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, увагу необхідно приділити таким двом питанням (основним задачам статички):

1. Як дану систему сил замінити найбільш простою, їй еквівалентною (перша основна задача статички)?
2. Які умови рівноваги тіла, на яке діє задана система сил (друга основна задача статички)?

При розв'язанні *першої задачі статички* припустимо, що всі сили, які діють на тіло, відомі. При розв'язуванні *другої задачі статички* частина сил може бути невідома. Невідомими силами, в більшості випадків, є сили взаємодії інших тіл, які дотикаються до даного тіла. Такі сили називають *реакціями*.

Тіло, переміщення якого в просторі ні чим не обмежено, і яке може рухатися в будь-якому напрямку, називається вільним.

Вільне тіло в просторі має можливість здійснювати три лінійних переміщення (в напрямку трьох взаємно перпендикулярних осей ортогональної системи координат) та три кутові переміщення (повороти відносно осей системи координат). Вільне тіло знаходиться в стані спокою тоді, коли шість можливих переміщень дорівнюють нулю.

Тіло, переміщення якого в просторі в будь-якому напрямку обмежене іншими тілами, називається невільним.

Тіло, яке, торкаючись до даного тіла, обмежує його рух в будь-якому із напрямків, називається в'яззю (зв'язком). Невільне тіло в просторі буде мати можливість здійснювати стільки переміщень, скільки дозволено в'язями, тобто шість мінус кількість обмежених в'язями переміщень.

Всі сили, що діють на *невільне тверде тіло*, поряд із розподілом на *зовнішні* та *внутрішні*, можна також поділити на *задані* або *активні сили* і *реакції в'язей*.

Внутрішні сили — це сили взаємодії між тілами, які входять в одну матеріальну систему.

Зовнішні сили — це сили взаємодії тіл даної матеріальної системи з тілами, які не входять в дану систему. Фактично, можна казати, що це сили взаємодії між розглядуваним елементом конструкції та пов'язаними з ним тілами.

Задані сили виражають дію на тверде тіло інших тіл, які викликають або спроможні викликати зміну його кінематичного стану.

Реакцією в'язі називається сила або система сил, яка виражає механічну дію в'язі на тіло. Реакції в'язей за своєю суттю пасивні, оскільки виникають лише під дією активних сил, і є силами зовнішніми.

Числове значення пасивних сил залежить від прикладених активних сил.

Аксиома VI (принцип звільнення твердих тіл від в'язей): невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, на яке, крім заданих сил, діють реакції в'язей, а не самі в'язі.

2.2. Види в'язей та напрям їх реакцій

Статика розглядає переважно невідільні тіла, тобто тіла, які певним чином закріплені. Правильне визначення напрямку реакції цього закріплення (в'язі) має дуже велике значення при розв'язуванні задач статички. Будь-яка в'язь обмежує одне або декілька переміщень однієї або групи точок тіла, що розглядається. Реакції за своєю суттю повинні забезпечити обмеження відповідних переміщень, тобто повинні мати в якості ліній дії напрямки обмежуваних переміщень. Отже, **реакція в'язі завжди направлена в сторону, протилежну неможливому руху**. Таким чином, якщо відомо, переміщення яких точок тіла обмежені і в якому напрямку, то відомі і точки прикладання та напрямки реактивних сил.

Розглянемо, як направлені реакції деяких основних видів в'язей (табл. 2.1).

1. **Вільне обпирання тіла о гладку опорну поверхню**. Реакція \vec{R} (\vec{N}) такої в'язі направлена вздовж нормалі до опорної поверхні в цій точці (перпендикулярно дотичній). Додаткові приклади наведені на рис. 2.1, де в'язі заштриховані і в кожному випадку показані їх реакції.

2. **Опора на гладке ребро тіла або тіло опирається на гладку поверхню, коли одна з поверхонь, що дотикаються, є точкою** — реакція в'язі завжди направлена по нормалі до дотичної опорної поверхні в точці стикання з певним тілом (рис. 2.1).

3. **Нерухомий плоский циліндричний шарнір (шарнірно-нерухома опора)** дозволяє поворот навколо осі шарніра, але не здійснює лінійні переміщення. Реакція в'язі \vec{R}_A лежить в площині малюнку (перпендикулярній до осі обертання), але напрямок її невідомий. При розв'язуванні задач цю в'язь замінюють двома невідомими взаємно перпендикулярними складовими реакції \vec{R}_{Ax} і \vec{R}_{Ay} .

4. **Рухомий плоский циліндричний шарнір (шарнірно-рухома або каткова опора)** дозволяє поворот навколо осі шарніра та лінійне переміщення на незначну відстань вздовж опорної поверхні. Лінія дії реакція в'язі \vec{R}_A проходить через центр шарніра перпендикулярно до опорної поверхні.

5. **Гнучка в'язь** (нитка, мотузка, дрiт, шнур, трос, ланцюг, канат). Реакція цієї в'язі прикладена в точці кріплення і направлена вздовж в'язі до точки підвішування. **Гнучка невагома нерозтяжна нитка** перешкоджає руху тільки в натягнутому стані (рис. 2.2). Реакція нитки може позначатись через \vec{R} або \vec{T} .

6. **Жорсткий стрижень (стрижнева опора)**, вагою якого нехтують, а кінці кріпляться з обох боків шарнірно (**ідеальний стрижень**). Якщо на стрижень не діє ніяка сила, крім в'язей в шарнірах, то реакція в'язі направлена вздовж прямої, яка проходить через центри шарнірів (рис. 2.3). Якщо, стрижень розтягнутий, то його реакція напрямлена в бік від тіла до стрижня: \vec{R}_A , \vec{R}_B , \vec{R}_E (рис. 2.4, 2.5). Якщо, стрижень стиснений, то його реакція напрямлена в бік від стрижня до тіла: \vec{R}_C , \vec{R}_D (рис. 2.5).

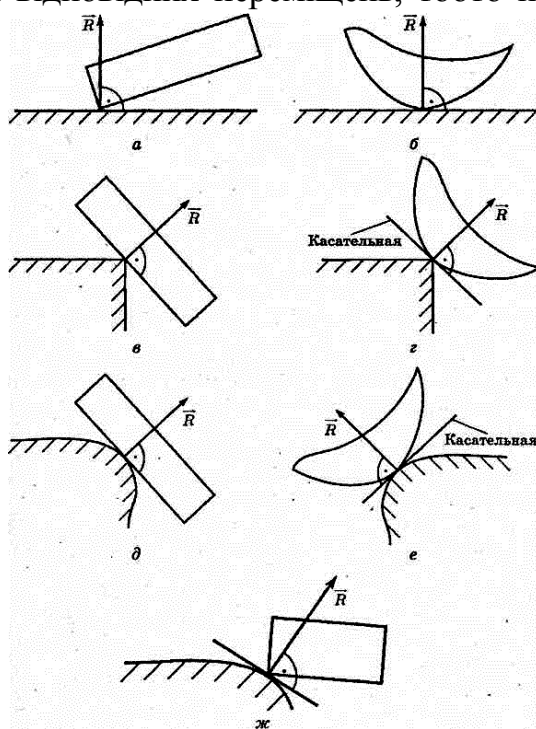


Рис. 2.1.

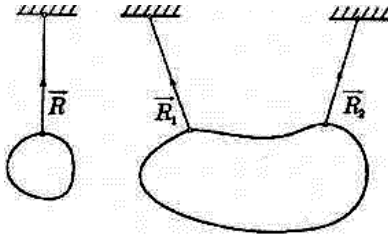


Рис. 2.2.

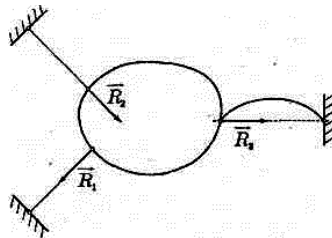


Рис. 2.3.

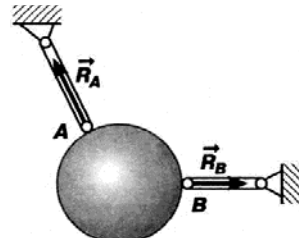


Рис. 2.4.

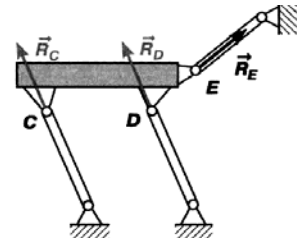


Рис. 2.5.

7. При спробі переміщення тіла по шорсткій поверхні виникає в'язь з невідомим напрямком, тому її розкладають на дві складові: нормальну \vec{N} і дотичну $\vec{F}_{тер}$ (сила тертя), тобто $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тер}$. Модулі \vec{N} і $\vec{F}_{тер}$ визначають із відповідних умов рівноваги тіла. **В'язі** без тертя називають *ідеальними*, а з тертям — *реальними*. Слід зауважити, що ідеально гладких поверхонь, на яких не виникають сили тертя, що перешкоджають ковзанню іншого тіла по поверхні, не існує — це абстракція, яка використовується в тих випадках, коли сили тертя настільки малі, що ними можна нехтувати, або ж тоді, коли для безпеки роботи конструкції чи деталі не можна розраховувати на тертя.

8. Сферичний шарнір, упорний підшипник, підп'ятник. Напрями реакцій таких в'язей заздалегідь визначити не можна. Про ці види в'язей відомо лише, що реакція проходить через центр в'язі. Так, для сферичного шарніра (або підп'ятника) лінія дії реакції повинна проходити через центр сфери, напрям може бути довільним (рис. 2.6; рис. 2.7, б). Розглядаючи рівновагу тіла, реакцію замінюють трьома невідомими складовими \vec{R}_{Ax} , \vec{R}_{Ay} і \vec{R}_{Az} за напрямом трьох взаємно перпендикулярних осей O_x , O_y , O_z . Модулі та їх напрями визначають з умов рівноваги відповідних систем сил. Так, у разі циліндричного шарніра (підшипника) (рис. 2.7, а) реакція його розміщена в площині, перпендикулярній до його осі O_z . Невідомий вектор реакції в'язі в площині визначається двома складовими \vec{R}_x і \vec{R}_y по осях O_x і O_y , величини яких знаходять з умов рівноваги. В окремому випадку, коли можна знехтувати розмірами шарнірів і силами тертя, що виникають у них, шарніри називають *ідеально точковими*.

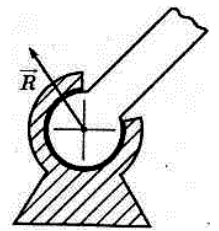


Рис. 2.6.

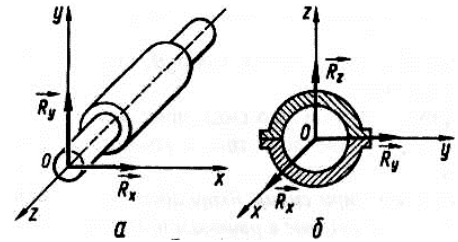


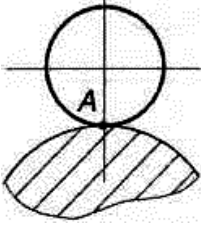
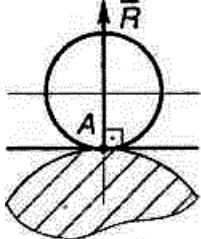
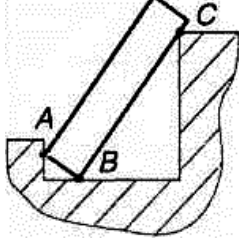
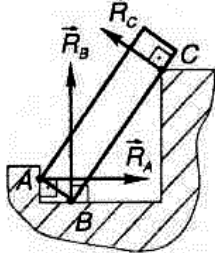
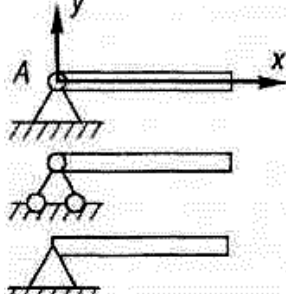
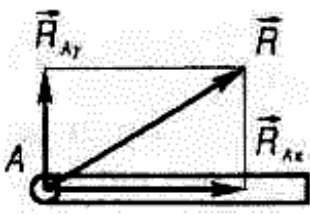
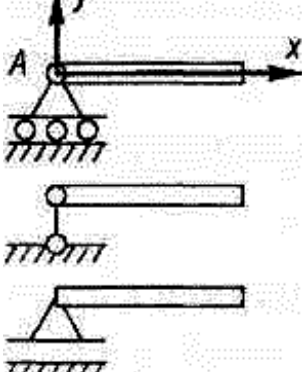
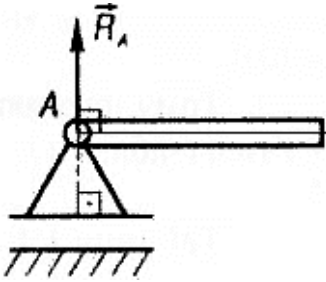
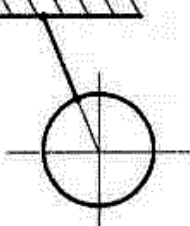
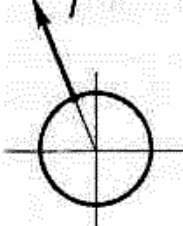
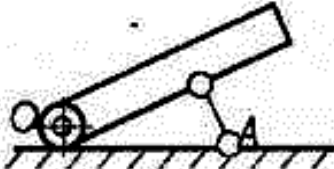
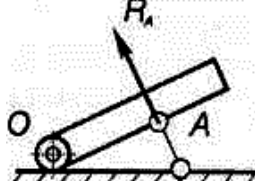
Рис. 2.7.

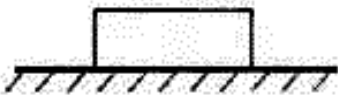
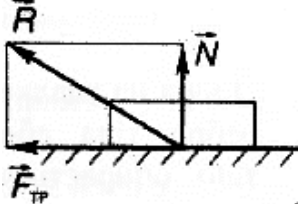
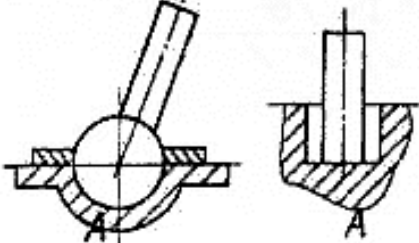
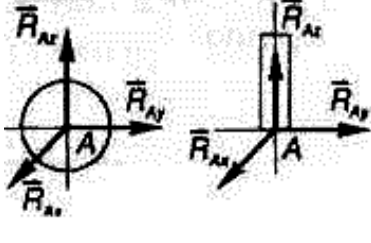
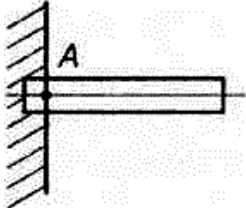
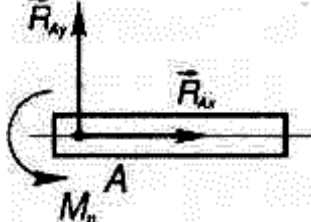
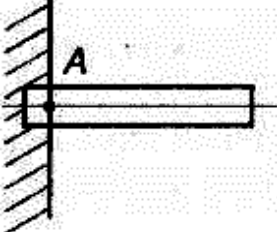
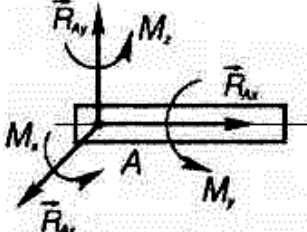
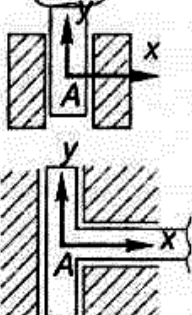
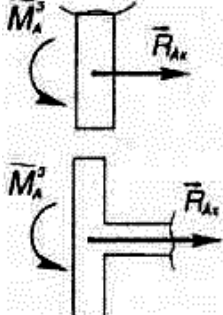
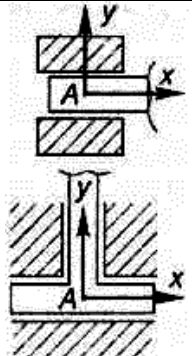
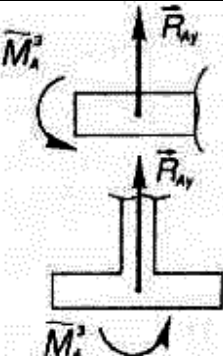
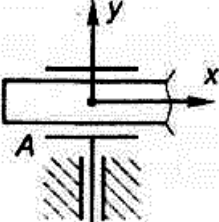
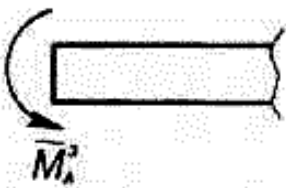
9,10. Защемлення (жорстке закладання) — це спосіб закріплення балок в стінах будинків. Невідомими залишаються напрям і величина реакції. При розв'язуванні задач таку в'язь замінюють двома невідомими складовими реакції \vec{R}_{Ax} і \vec{R}_{Ay} та реактивною парою сил з моментом \vec{M}_p , якщо відомо, що на досліджуване тіло діє *плоска система сил*, або трьома невідомими складовими реакції \vec{R}_{Ax} , \vec{R}_{Ay} , \vec{R}_{Az} і трьома невідомими складовими реактивного моменту M_x , M_y , M_z , якщо на тіло діє *просторова система сил*.

11,12,13. Напівзащемлені опори і часткове защемлення. Реакції направлені в бік, протилежний переміщенню, яке викликає опора. Слід зазначити, що *сили, з якими розглядувані тіла діють на в'язі, не зрівноважуються реакціями в'язей, оскільки сили і реакції в'язей прикладені до різних тіл*, хоча за третім законом Ньютона вони однакові за величиною і протилежні за напрямом. Дію прикладено до тіл, що утворюють в'язі; протидію (реакції в'язей) прикладено до тіл, рівновага яких вивчається.

Аксиома VII (принцип накладання нових в'язей): рівновага абсолютно твердого тіла не порушиться при накладенні на нього нових в'язей. Наприклад, якщо стіл, який стоїть на підлозі, перебуває в рівновазі, то ця рівновага не порушиться, якщо ніжки стола прикріпити до підлоги болтами.

Таблиця 2.1. Основні типи в'язей і напрямки їх реакцій.

Тип в'язі	Схема в'язі та її позначення	Напрямок реакції в'язі
1. Гладка опорна поверхня		
2. Опора на гладке ребро тіла або тіло опирається на гладку поверхню		
3. Шарнірно-нерухома опора (циліндричний шарнір)		
4. Шарнірно-рухома (каткова) опора		
5. Гнучка в'язь		
6. Жорсткий стрижень		

Тип в'язі	Схема в'язі та її позначення	Напрямок реакції в'язі
7. Шорстка площина		
8. Сферичний шарнір і підп'ятник		
9. Защемлення жорстке в площині		
10. Защемлення жорстке в просторі		
11. Напівзащемлена опора		
12. Напівзащемлена опора		
13. Часткове защемлення		

2.3. Балкові системи та їх навантаження

Балкою називається деталь, яка зроблена з прямого бруса з опорами у двох (чи більше) точках і яка несе прямоосьове навантаження. Балкові системи застосовують у машинах і спорудах. **Види кріплення балок та напрямки реакцій в'язей:** 1) балка має дві опори — шарнірно-нерухому і шарнірно-рухому (рис. 2.8); 2) балка має три непаралельні шарнірно прикріплені стрижні (рис. 2.9); 3) балка спирається на три гладенькі поверхні, одна з яких має упор (рис. 2.10); 4) балка в трьох точках спирається на гладенькі поверхні (рис. 2.11); 5) балка жорстко закріплюється в стіні або затискується спеціальним пристроєм (рис. 2.12).

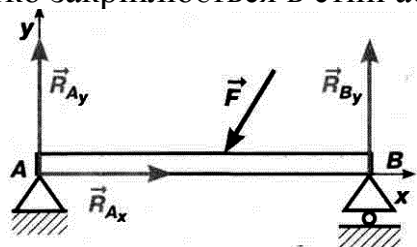


Рис. 2.8.

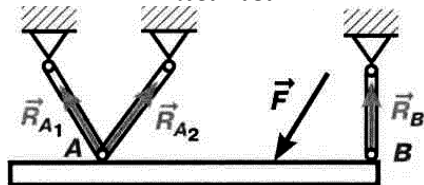


Рис. 2.9.

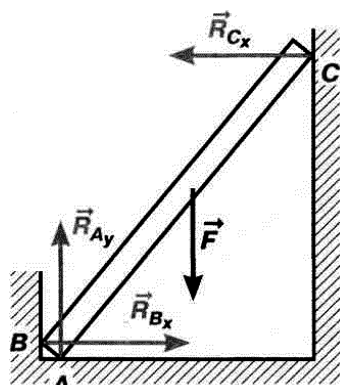


Рис. 2.11.

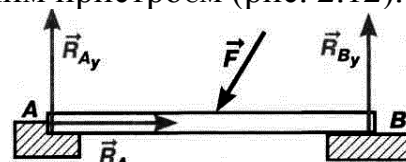


Рис. 2.10.

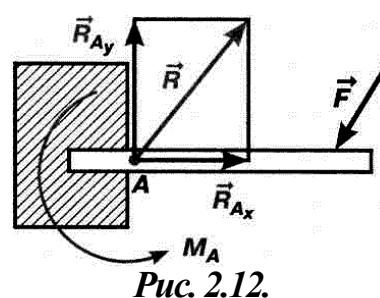


Рис. 2.12.

Навантаженнями називають зовнішні сили, які діють на елементи конструкцій чи деталі машин і споруд під час їх експлуатації.

За часом дії навантаження бувають:

- 1) **постійні**, які діють завжди, наприклад, сила тяжіння, що діє на споруду;
- 2) **тимчасові**, що діють протягом обмеженого періоду часу, наприклад, поїзд, що їде через міст.

Змінне навантаження — навантаження, яке змінюється з часом в деяких межах.

Залежно від характеру прикладання сил у часі розрізняють:

- 1) **статичні навантаження**, які відносно повільно й плавно (хоча б протягом кількох секунд) зростають від нуля до свого граничного значення, а далі залишаються незмінними (або незначно змінними). При передачі статичних навантажень на конструкцію всі її частини знаходяться в рівновазі. Прискорення елементів конструкції відсутні або настільки малі, що ними можна знехтувати, а отже, й силами інерції. Прикладом можуть слугувати навантаження, які діють на гідротехнічні споруди;
- 2) **динамічні навантаження** — навантаження, яке змінює свою величину за малий час. Воно супроводжується значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що взаємодіють з ним. При цьому виникають сили інерції, якими не можна нехтувати. Динамічні навантаження поділяють на:
 - а) **миттєво прикладені**, які зростають від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу (частки секунди). Таким є навантаження при займанні пального в циліндрі двигуна внутрішнього згорання або при зрушуванні з місця поїзда;
 - б) **ударні навантаження**, для яких характерне те, що в мить їх прикладання тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію. Таке навантаження утворюється, наприклад, при забиванні паль за допомогою копра, в деталях механічного ковальського молота, в гідросистемах під час гідравлічного удару;

в) **повторно-змінні навантаження**, які безперервно й періодично змінюються в часі. Вони, як правило, пов'язані з рухами деталей, що циклічно змінюються. Це зворотно-поступальні рухи штока поршня, коливання елементів конструкцій тощо. Дії таких навантажень зазнають шатуни у двигунах внутрішнього згорання, вали, осі залізничних вагонів тощо.

За характером прикладання навантаження поділяють на:

- 1) **зосереджені** (рис. 2.13) — такі зовнішні сили, що передаються на елемент конструкції через нескінченно малі площадки (фактично, прикладені до тіла в певній точці), наприклад, дія ваги електровоза на рельси;
- 2) **розподілені** (рис. 2.14) — такі зовнішні сили, що діють на одиницю об'єму, площі або довжини конструкції, наприклад, сила тяжіння, що діє на всю балку, дія снігового або вітрового навантаження на споруду. Розподілені за об'ємом, площею чи довжиною навантаження характеризуються **інтенсивністю** — силою, що припадає на одиницю об'єму ($\vec{\gamma}$), площі поверхні (\vec{p}) чи довжини лінії (\vec{q}) відповідно.

Зосереджена сила є абстракцією, так як будь яке реальне навантаження прикладене до певної ділянки лінії, площі чи об'єму тіла. Наприклад, навіть сила, що передається по нитці, розподілена по площі поперечного перерізу нитки. В основному зустрічаються **паралельні** і **збіжні розподілені навантаження**. До паралельних сил, які розподілені за об'ємом тіла, відносять силу тяжіння, що діє на частини цього тіла. Сила тиску води на греблю відноситься до розподілених паралельних сил по поверхні греблі. Сила тяжіння частинок тонкої дротинки характеризує розподіл сил по довжині лінії.

За характером розподілу навантаження можуть бути:

- 1) **рівномірно розподілені** (рис. 2.14);
- 1) **нерівномірно розподілені** (рис. 2.15).

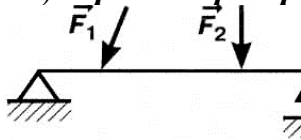


Рис. 2.13.

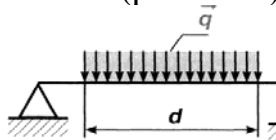


Рис. 2.14.

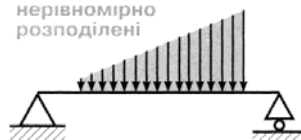


Рис. 2.15.

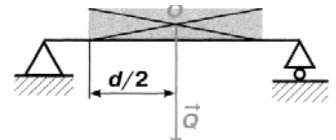


Рис. 2.16.

Рівномірно розподілене за довжиною (\vec{q}), площею (\vec{p}) або об'ємом ($\vec{\gamma}$) паралельне навантаження, що прикладене під прямим кутом до елемента споруди або деталі машини, може бути перетворене на зосереджене:

$$\text{а) за довжиною } d \text{ — } Q = q \cdot d, \quad \left([q] = \frac{H}{m}, [d] = m \right); \quad (2.1)$$

$$\text{б) за площею } S \text{ — } P = p \cdot S, \quad \left([p] = \frac{H}{m^2}, [S] = m^2 \right); \quad (2.2)$$

$$\text{в) за об'ємом } V \text{ — } G = \gamma \cdot V, \quad \left([\gamma] = \frac{H}{m^3}, [V] = m^3 \right). \quad (2.3)$$

Якщо зовнішні сили є наслідком безпосередньої контактної взаємодії даного тіла з іншими тілами, то вони прикладені тільки до точок поверхні тіла в місці контакту і називаються **поверхневими силами**. Поверхневі сили можуть бути неперервно розподілені по всій поверхні тіла або її частині, наприклад тиск пари в котлі, вітрове та снігове навантаження, тиск газу в циліндрі двигуна. **Інтенсивністю поверхневого навантаження** p називається навантаження, що припадає на одиницю площі $S=l \cdot b$ (рис. 2.17, а). Її виражають у **паскалях (Па)** або кратних одиницях ($\kappa\text{Па}=10^3 \text{ Па}$, $\text{МПа}=10^6 \text{ Па}$, $\text{ГПа}=10^9 \text{ Па}$).

Розподілене по поверхні навантаження (рис. 2.17, а), зводять до головної площини (рис. 2.17, б), унаслідок чого створюється **навантаження, розподілене по лінії**, або **лінійне навантаження**. Інтенсивністю такого навантаження $q=r \cdot b$, називають **навантаження, що припадає на одиницю довжини лінії**.

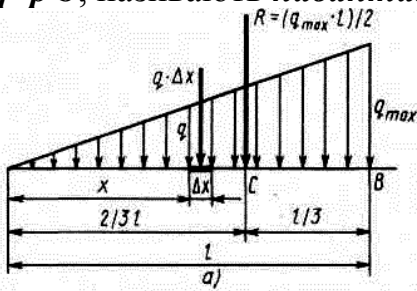


Рис. 2.19.

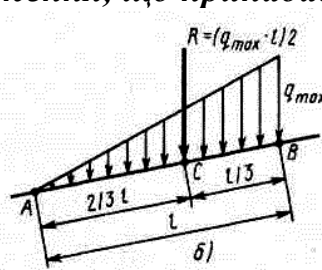


Рис. 2.17.

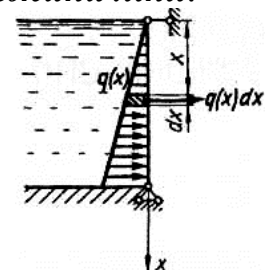
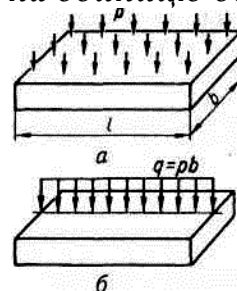


Рис. 2.18.

Характер зміни лінійно розподіленого навантаження зображують у вигляді **епюри (графіка) q**. У разі рівномірно розподіленого навантаження (рис. 2.17, а) епюра q прямокутна (рис. 2.17, б). При дії гідростатичного тиску епюра навантаження q трикутна (рис. 2.18). Бувають епюри q і більш складних видів: трапецієподібна, синусоїдна та ін. **Рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі його епюри і прикладена в центрі її тяжіння.**

Перетворення **нерівномірно розподіленого навантаження** на зосереджене має більш складний алгоритм. Розглянемо паралельні сили, які розподілені перпендикулярно по відрізку AB прямої довжиною l з інтенсивністю q , що змінюється за лінійним законом — **розподілені за трикутником** (рис. 2.19, а). Найбільша інтенсивність сили становить q_{max} . Замінімо ці розподілені сили зосередженими. Для цього відрізок AB розіб'ємо на елементарні відрізки довжиною Δx . На кожен такий відрізок діє сила $q_i \cdot \Delta x_i$, яку при достатньо малих розмірах відрізка Δx_i можна вважати зосередженою силою. Для того, що б замінити одержану таким чином систему зосереджених паралельних сил $q_i \cdot \Delta x_i$ однією рівнодіючою силою \vec{R} , необхідно провести їх додавання. Найпростіше це можна

$$\text{зробити шляхом інтегрування: } R = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n q_i \cdot \Delta x_i = \int_0^l q \cdot dx \quad (2.4)$$

Якщо x відряховувати від точки A , то з подібності трикутників маємо:

$$\frac{q}{x} = \frac{q_{max}}{l} \quad \text{або} \quad q = \frac{q_{max}}{l} \cdot x.$$

Підставляючи замість q під інтеграл його значення,

$$\text{одержимо: } R = \int_0^l \frac{q_{max}}{l} \cdot x \cdot dx = \frac{q_{max}}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{q_{max}}{l} \cdot \frac{l^2}{2} - 0 = \frac{q_{max} \cdot l}{2} \quad (2.5)$$

Точка C прикладання рівнодіючої сили \vec{R} зміщується в бік, де інтенсивність сили більша, й співпадає з центром тяжіння площі трикутника, що знаходиться в точці перетину медіан, яка розташована від основи трикутника на відстані $1/3$ і $2/3$ від його вершини A , тобто: $AC = l \cdot 2/3$. (2.6)

Точку прикладання рівнодіючої можна також визначити обрахувавши момент елементарних зосереджених сил $q_i \cdot \Delta x_i$, наприклад, відносно точки A , та застосувавши потім теорему Варіньона про момент рівнодіючої сили:

$$R \cdot AC = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n x_i \cdot q_i \cdot \Delta x_i = \int_0^l q \cdot x \cdot dx = \int_0^l \frac{q_{max}}{l} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{q_{max}}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{q_{max} \cdot l^2}{3}.$$

Отже:

$$AC = \frac{q_{\max} \cdot l^2}{3} \cdot \frac{1}{R} = \frac{q_{\max} \cdot l^2}{3} \cdot \frac{2}{q_{\max} \cdot l} = \frac{2}{3} \cdot l. \quad (2.7)$$

Якщо паралельні сили з інтенсивністю, яка змінюється по лінійному закону, розподілені по відрізку прямої, що нахилено до напрямку сил (рис. 2.19, б), то їх рівнодіюча ділить відрізок **AB** згідно (2.6) і дорівнює (2.5), проте вона не дорівнює площі трикутника, що утворено відрізком **AB** і розподіленими силами.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте першу основну задачу статички.
2. Сформулюйте другу основну задачу статички.
3. Яке тіло називається вільним?
4. Які переміщення має можливість здійснювати вільне тіло в просторі?
5. Яке тіло називається невольним?
6. Що називають в'яззю?
7. Поясніть, чим внутрішні сили відрізняються від зовнішніх сил.
8. Які сили відносять до заданих (активних)?
9. Що називається реакцією в'язі?
10. Сформулюйте шосту аксіому статички — принцип звільнення твердих тіл від в'язей.
11. Куди направлена реакція такої в'язі, як гладка опорна поверхня?
12. Куди направлена реакція опори на гладке ребро тіла або коли тіло спирається на гладку поверхню і одна з поверхонь, що дотикаються, є точкою?
13. Як направлена реакція нерухомого плоского циліндричного шарніру (шарнірно-нерухомої опори)?
14. Як направлена реакція рухомого плоского циліндричного шарніру (шарнірно-рухомої або каткової опори)?
15. Куди направлена реакція гнучкої в'язі?
16. Що таке ідеальний стрижень, та куди направлена його реакція?
17. Яка в'язь виникає при спробі переміщення тіла по шорсткій поверхні?
18. Куди направлена реакція таких в'язей, як сферичний шарнір, упорний підшипник, підп'ятник?
19. Які шарніри називають ідеально точковими?
20. Куди направлена реакція такої в'язі, як защемлення (жорстке закладання)?
21. Куди направлені реакції напівзащемлених опор і часткового защемлення?
22. Чому сили, з якими розглядувані тіла діють на в'язі, не зрівноважуються реакціями в'язей?
23. Сформулюйте сьому аксіому статички — принцип накладання нових в'язей.
24. Що називається балкою?
25. Які види кріплень балок вам відомі?
26. Які сили називаються навантаженнями?
27. На які види поділяються навантаження за характером дії?
28. На які види поділяються навантаження за часом дії?
29. Поясніть, чим розподілені навантаження відрізняються від зосереджених?
30. На які види поділяються розподілені навантаження?
31. Як рівномірно розподілене паралельне навантаження, що прикладене під прямим кутом, може бути перетворене на зосереджене за довжиною?
32. Як рівномірно розподілене паралельне навантаження, прикладене під прямим кутом, може бути перетворене на зосереджене за площею та об'ємом?
33. Чому дорівнює і де прикладена рівнодіюча паралельних сил, розподілених по відрізку прямої з інтенсивністю, що змінюється за лінійним законом?

Лекція № 3

Тема: «Система збіжних сил»

ПЛАН

- 3.1. Проекція сили на вісь і площину.
- 3.2. Аналітичний спосіб задавання сили.
- 3.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної.
- 3.4. Умови рівноваги системи збіжних сил.
- 3.5. Загальні умови розв'язування задач статки на рівновагу збіжної системи сил.

3.1 Проекція сили на вісь і площину

Аналітичний метод розв'язання задач статки побудований на понятті про проекцію сили на вісь.

Проекція сили на вісь — це алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямком сили і додатним напрямком осі. Якщо цей кут *гострий* — *проекція додатна*, якщо *тупий* — *від'ємна*, а якщо *сила перпендикулярна осі* — її *проекція дорівнює нулю* (див. рис. 3.1):

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = ab, \quad Q_x = Q \cdot \cos \alpha_1 = -Q \cdot \cos \varphi = de, \quad P_x = 0. \quad (3.1)$$

Проекцією сили \vec{F} на площину Oxy називається вектор $\vec{F}_{xy} = \overline{OB_1}$, що знаходиться між проекціями початку і кінця сили \vec{F} на цю площину (рис. 3.2). Таким чином, проекція сили на площину — величина векторна, оскільки вона характеризується не тільки своїм числовим значенням, але й напрямленням в площині Oxy . За модулем

$$F_{xy} = F \cdot \cos \theta, \quad (3.2)$$

де θ — кут між напрямком сили \vec{F} і її проекції \vec{F}_{xy} . В деяких випадках, для знаходження проекції сили на вісь, зручніше спочатку знайти її проекцію на площину, в якій ця вісь лежить, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на дану вісь. Наприклад, у випадку, показаному на рис. 3.2, отримаємо:

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi, \quad F_y = F_{xy} \cdot \sin \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi. \quad (3.3)$$

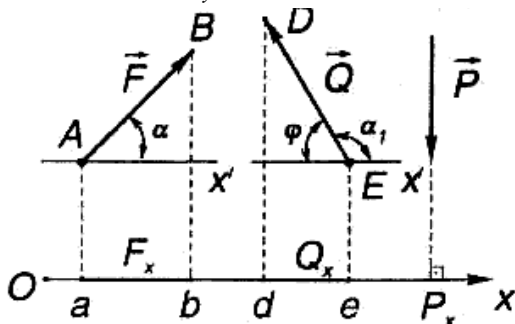


Рис. 3.1.

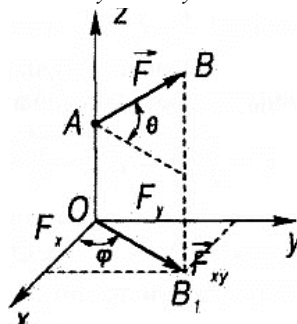


Рис. 3.2.

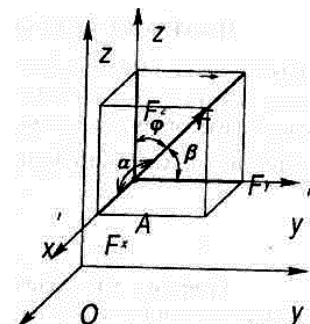


Рис. 3.3.

3.2. Аналітичний спосіб задавання сили

Для аналітичного задавання сили необхідно вибрати систему координатних осей $Oxyz$, за відношенням до якої буде визначатись напрям сили у просторі. В механіці користуються *правою системою координат*, тобто такою системою, в якій найкоротше суміщення осі Ox з віссю Oy проходить, якщо дивитись з додатного кінця осі Oz , проти ходу стрілки годинника (рис. 3.3).

Вектор, який зображає силу \vec{F} , можна побудувати, якщо відомі модуль F цієї сили і кути α, β, γ , які сила складає з координатними осями. Таким чином,

величини F, α, β, γ задають силу \vec{F} . Точка A прикладення сили повинна бути задана окремо її координатами (x, y, z) .

Для розв'язування задач зручніше задавати силу її проекціями F_x, F_y, F_z на координатні осі. Знаючи ці проекції, можна визначити модуль сили і косинуси кутів, які вона складає з координатними осями, за формулами:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \quad (3.4)$$

Якщо сила розміщена в одній площині, то її можна задати проекціями на дві осі Ox і Oy . Тоді формули, що визначають силу за її проекціями, приймуть

вигляд:
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}. \quad (3.5)$$

3.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної

Система прикладених до абсолютно твердого тіла сил називається збіжною, якщо лінії дії усіх сил перетинаються в одній точці. Точка перетину сил називається центром сил.

Нехай задана довільна система збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що прикладена до абсолютно твердого тіла. Перенесемо ці сили як ковзні вектори в точку перетину їх ліній дії. Користуючись аксіомою паралелограма сил, знайдемо рівнодійну цих сил. З рівняння (1.10) рівнодійна \vec{R} системи збіжних сил дорівнює

векторній сумі цих сил:
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.6)$$

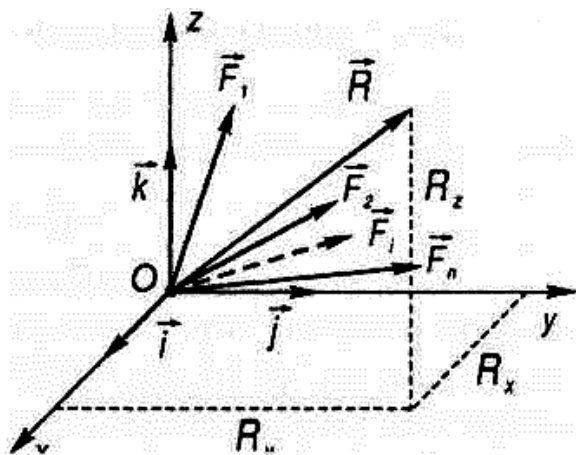


Рис. 3.4.

Графічно рівнодійна сила \vec{R} визначається як сторона, що замикає силовий багатокутник (рис. 1.8).

Визначимо аналітично рівнодійну \vec{R} . Для цього введемо прямокутну систему координат $Oxyz$ з початком в точці O перетину ліній дії заданих сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (рис. 3.4). На основі виразу (3.6) та користуючись теоремою, згідно якої проекція векторної суми на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на ту ж саму вісь складових векторів, одержимо вирази для

проекцій R_x, R_y, R_z рівнодійної \vec{R} у вигляді:
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix};$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (3.7)$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} — проекції сили \vec{F}_i на осі координат. Звідси модуль рівнодійної визначається виразом:
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (3.8)$$

або
$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}, \quad (3.9)$$

а напрямом рівнодійної — наступними напрямами косинусами рівнодійної (косинуси кутів між напрямом вектора \vec{R} і додатними напрямками відповідних осей координат):

$$\cos\left(\overset{\wedge}{\vec{R}}, i\right) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\left(\overset{\wedge}{\vec{R}}, j\right) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos\left(\overset{\wedge}{\vec{R}}, k\right) = \frac{R_z}{R}. \quad (3.10)$$

Формули (3.7)-(3.10) дають повне аналітичне визначення рівнодійної системи збіжних сил. Таким чином, система збіжних сил може бути замінена однією силою — рівнодійною, яка прикладена в точці перетину сил і дорівнює геометричній сумі сил, що діють на тіло.

3.4. Умови рівноваги системи збіжних сил

Доведемо теорему 3.1: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулеві, тобто:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (3.11)$$

Необхідність умови (3.11) випливає з того, що система збіжних сил, прикладених до твердого тіла, еквівалентна одній силі — рівнодійній \vec{R} . Вочевидь, що під дією однієї сили тіло буде перебувати в рівновазі тільки тоді, коли ця сила дорівнює нулеві. Для доведення достатності покажемо, що коли рівнодійна сила дорівнює нулю, то система збіжних сил знаходиться у рівновазі. Задана система сил еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює нулю. Отже, дана система сил є врівноваженою (еквівалентною нулю) і вона залишає те тіло, на яке вона діє, в рівновазі. Теорема доведена.

Враховуючи умову $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, приходимо до висновку, що багатокутник сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ є замкнутим. Останнє виражає умову рівноваги системи збіжних сил в графічній формі.

На основі виразу (3.11), враховуючи (3.7), одержуємо:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (3.12)$$

Ці умови називаються аналітичними умовами рівноваги системи збіжних сил і формулюються наступним чином: для рівноваги просторової збіжної системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.

У випадку рівноваги системи збіжних сил, розміщених в одній площині, наприклад Oxy , маємо:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (3.13)$$

Отже, для рівноваги системи збіжних сил, які лежать в площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій цих сил на дві взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.

Умови рівноваги (3.12) і (3.13) називаються також рівняннями рівноваги.

Одержані вирази дають змогу відповісти на питання, чи буде тіло знаходитись в рівновазі під дією даної системи збіжних сил.

3.5. Загальні умови розв'язування задач статички на рівновагу збіжної системи сил

Аналітичні умови рівноваги (3.12) дають змогу відповісти на питання, чи буде тіло знаходитись в рівновазі під дією даної системи збіжних сил.

З практичної точки зору більш важливою є інша задача про рівновагу тіла. В більшості випадків наперед відомо, що тіло знаходиться в рівновазі під дією заданої системи активних сил і в'язей, а реакції в'язей є невідомими.

В даному випадку за допомогою рівнянь рівноваги можуть бути визначені реакції в'язей. При цьому необхідно враховувати, що **для системи збіжних сил може бути записано в самому загальному випадку три скалярних рівняння рівноваги**, тобто **число невідомих параметрів реакцій в'язей повинно бути не більше трьох** (в плоскій системі збіжних сил — не більше двох). Якщо число рівнянь рівноваги дорівнює числу невідомих реакцій в'язей, то така задача про рівновагу тіла називається **статично визначеною**.

Якщо число параметрів, що визначають реакції в'язей, більше числа рівнянь рівноваги, то такі задачі називаються **статично невизначеними**. Для розв'язку статично невизначених задач методи статички абсолютно твердого тіла виявляються не достатніми, і тому для визначення всіх невідомих реакцій в'язей треба враховувати пружні властивості тіла, тобто його деформацію. Статично невизначені задачі розв'язуються в курсах опору матеріалів та статички споруд.

При розв'язанні задач слід дотримуватися наступної послідовності:

- 1) прочитавши умову задачі та виписавши вихідні дані, слід визначити об'єкт дослідження, тобто те тіло (точку), рівновагу якого слід розглянути в даній задачі;
- 2) зобразити (розставити) у вигляді векторів усі діючі на дане тіло (і тільки на дане тіло) активні сили і реакції в'язей. При визначенні напрямку реакцій в'язей і зображенні цих сил на малюнку слід дотримуватись вимог, що наведені в п. 2.2 лекції № 2;
- 3) звільнити від в'язей вибране тіло і замінити їх дію реакціями в'язей. Звільнене від в'язей тіло з прикладеною до нього системою активних сил і реакцій слід зображати окремо (коли буде набутий достатній навичок, можна вибране тіло виділяти з конструкції подумки і зображати всі діючі на нього активні сили і реакції в'язей на загальному рисунку);
- 4) розглянути рівновагу даного твердого тіла як вільного з урахуванням активних сил і реакцій в'язей;
- 5) вибрати координатні осі та скласти рівняння, які б виражали умови рівноваги тіла. Визначити невідомі величини.

Рівняння рівноваги складаються при **аналітичному методі розв'язку** задач на рівновагу системи збіжних сил. Проте, **якщо число збіжних сил, рівновага яких розглядається, дорівнює трьом, то зручно застосувати геометричний метод розв'язку** цих задач. Розв'язок в даному випадку зводиться до того, що замість рівнянь рівноваги всіх діючих сил (активних і реакцій в'язей) будується **силовий трикутник**, який на основі геометричної умови рівноваги повинен бути замкнутий. Починати побудову силового трикутника слід із відомої сили, а далі, за відомими елементами, знайти невідомі величини. Розв'язок силового трикутника дає шукані величини. Якщо силовий трикутник косокутний, то при розв'язуванні корисно використати **теорему синусів**, але інколи доцільним є використання **умови пропорційності сторін двох подібних трикутників** (силового трикутника і трикутника за основним рисунком).

Коли кількість сил, що утворюють збіжну систему, перевищує три, умову рівноваги доцільніше застосовувати в аналітичній формі. Для складання рівнянь рівноваги необхідно спочатку вибрати осі координат. При засто-

суванні аналітичних умов рівноваги велике значення має саме вдалий вибір системи координат. Цей вибір можна проводити довільно, проте отримані рівняння рівноваги будуть розв'язуватись простіше, якщо одну з осей направити перпендикулярно до лінії дії будь-якої невідомої сили реакції. Розв'язок отриманих рівнянь рівноваги слід, як правило, проводити до кінця в загальному вигляді (алгебраїчно). Тоді для шуканих величин будуть одержуватись формули, що дозволяють проаналізувати отримані результати; числові значення знайдених величин підставляються тільки в кінцеві формули.

При розв'язуванні задач на рівновагу збіжної плоскої системи сил аналітичним методом за початок координат звичайно вибирають точку, в якій збігається система сил. Якщо дві сили розглядуваної системи взаємно перпендикулярні, то **осі координат зручно напрямити вздовж цих сил**. Якщо ж взаємно перпендикулярних сил немає, то осі координат напрямляють довільно, наприклад вісь x -ів — горизонтально, вісь y -ів — вертикально.

При розв'язуванні задач на рівновагу збіжної просторової системи сил аналітичним методом початок координат зручно вибирати в точці прикладання сил. Якщо дві невідомі сили нормальні одна до одної, то дві координатні осі рекомендується направити по цих силах. Взагалі, слід вибирати систему координат так, щоб сили, які діють на тіло, були розміщені по можливості в координатних площинах. При такому виборі осей координат значно полегшується проектування сил на ці осі, а тим самим і складання рівнянь рівноваги.

Якщо задано кут між силою і координатною віссю, то проекція сили на вісь обчислюється безпосередньо множенням модуля сили на косинус кута між напрямками сили і осі. Часто, проте, зустрічається складніший випадок, коли відомий кут, що його утворює сила з координатною площиною, а не з координатною віссю, яка лежить у цій площині. Тоді насамперед проектують силу на координатну площину, а потім одержану складову сили на площині проектують на певну вісь. Проекцію сили на вісь у цьому випадку можна визначити, якщо помножити величину сили на косинус кута між силою і координатною площиною, а одержаний добуток у свою чергу помножити на косинус кута між проекцією сили на площину і координатною віссю, що лежить у цій площині.

У випадку симетричного розміщення невідомих сил відносно координатної осі іноді можна зробити висновок про рівність цих сил, виходячи безпосередньо з міркувань симетрії. Проте слід пам'ятати, що цей самий результат можна дістати також з рівнянь рівноваги, отже, умови симетрії можуть замінити іноді деякі з рівнянь рівноваги.

На початку, до вироблення навичок в складанні рівнянь рівноваги, корисно значення проекцій сил на координатні вісі заносити в таблицю. Це полегшує перевірку розв'язку та пошуку можливої помилки.

Приклад 3.1

Куля підвішена на нитці в точці A та утримується у відхиленому на кут α від вертикалі положенні горизонтальною ниткою, яка прив'язана в точці B (рис. 3.5, а). На шар діє сила тяжіння \vec{P} . Знайти натяги ниток \vec{N}_1 і \vec{N}_2 .

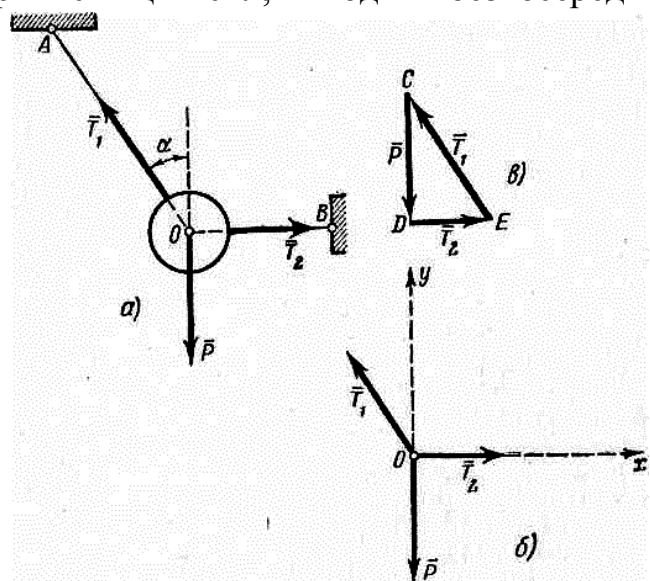


Рис. 3.5.

Дано:

\vec{P} ,

α

$\vec{N}_1, \vec{N}_2 - ?$

Розв'язання:

Вибираємо тіло, рівновагу якого будемо розглядати. Таким тілом буде куля. Сила тяжіння \vec{P} , що діє на неї, відома. Будемо розглядати кулю як матеріальну точку O . Ця точка невільна. Накладені на неї в'язі здійснюються нитками OA і OB .

Відкидаємо в'язі (переріжемо подумки нитки) і замінимо їх дію на точку O реакціями. Тоді точку O можна буде розглядати як вільну, що знаходиться в рівновазі під дією плоскої системи трьох збіжних сил: активної \vec{P} та реакцій гнучких в'язей \vec{T}_1 і \vec{T}_2 (рис. 3.5, б), які направлені вздовж ниток. Реакції \vec{T}_1 і \vec{T}_2 за модулем рівні шуканим натягам ниток \vec{N}_1 і \vec{N}_2 . А значить, визначення натягів ниток можна замінити визначенням їх реакцій \vec{T}_1 і \vec{T}_2 .

Розглянемо три методи розв'язку даної задачі.

Графічний метод розв'язку:

Так як три сили \vec{P} , \vec{T}_1 і \vec{T}_2 знаходяться в рівновазі, то силовий трикутник, складений з цих сил, повинен бути замкнутий. Будуємо цей силовий трикутник: для цього в певному масштабі будуємо силу \vec{P} , яка нам відома за модулем і напрямком, потім через початок і кінець вектора \vec{P} проводимо прямі, що паралельні напрямкам сил \vec{T}_1 і \vec{T}_2 . Сторони DE і EC отриманого таким чином замкнутого силового трикутника CDE (рис. 3.5, в) дають модулі і напрямки шуканих реакцій ниток. Щоб знайти їх модулі й, відповідно, натяги ниток, залишається виміряти в прийнятому масштабі сторони DE і EC .

Геометричний метод розв'язку:

Шукані сторони DE і EC силового трикутника CDE можна знайти не тільки шляхом безпосереднього вимірювання, але й обрахунком, застосовуючи правила геометрії та тригонометричні формули. Зі способу побудови силового трикутника CDE зрозуміло, що $\angle CDE=90^\circ$, $\angle DCE=\alpha$ і $\angle DEC=90^\circ-\alpha$ (рис. 3.5,

а, б). Із силового трикутника CDE видно, що: $T_1 = \frac{P}{\cos \alpha}$, $T_2 = P \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Аналітичний метод розв'язку:

Для складання рівняння рівноваги необхідно вибрати осі координат. Вибираємо систему координат так, щоб проектування сил у вибраній системі координат було найбільш зручним а вирази проєкцій були якомога простіші. В даній задачі за початок координат візьмемо точку O , рівновагу якої ми розглядаємо. Напрямок осі Ox горизонтально вправо, а вісь Oy — вертикально вгору (рис. 3.5, б). Спроектуємо на ці осі дані сили. З порівняння рис. 4.1, а і 4.1, б видно, що $\angle(\vec{T}_1, \vec{j}) = \alpha$, $\angle(\vec{T}_2, \vec{j}) = 90^\circ$. Складемо таблицю, в яку занесемо проєкції всіх сил на осі координат:

	\vec{P}	\vec{T}_1	\vec{T}_2
X:	$P_x = 0$	$T_{1x} = -T_1 \cdot \sin \alpha$	$T_{2x} = T_2$
Y:	$P_y = -P$	$T_{1y} = T_1 \cdot \cos \alpha$	$T_{2y} = 0$

Додаючи елементи кожного рядка даної таблиці (алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на відповідну координатну вісь) та прирівнюючи суму відповідного рядка до нуля, одержимо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил $(\vec{P}, \vec{T}_1, \vec{T}_2)$:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0: R_x = P_x + T_{1x} + T_{2x} = 0 - T_1 \cdot \sin \alpha + T_2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_y = P_y + T_{1y} + T_{2y} = -P + T_1 \cdot \cos \alpha + 0 = 0.$$

Розв'язуючи друге рівняння рівноваги, знаходимо: $T_1 \cdot \cos \alpha = P$, $T_1 = \frac{P}{\cos \alpha}$.

Розв'язуючи перше рівняння рівноваги, знаходимо:

$$T_2 = T_1 \cdot \sin \alpha = \frac{P}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = P \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = P \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким чином, $|\vec{N}_1| = T_1 = \frac{P}{\cos \alpha}$, $|\vec{N}_2| = T_2 = P \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Як бачимо, дану задачу можна розв'язати різними методами. Вибір того чи іншого методу розв'язку задачі залежить від характеру цієї задачі і від вимог, що пред'являються до точності розв'язку.

Приклад 3.2

Балка AB підтримується в горизонтальному положенні вертикальним стрижнем CD (рис. 3.6). На кінець B балки діє сила $F=20$ кН під кутом 45° до горизонту. Узявши розміри з рисунка, визначити зусилля S в стрижні CD і тиск Q балки на стіну, якщо кріплення у вузлах A , C і D шарнірні. Вагою балки і стрижня нехтуємо.

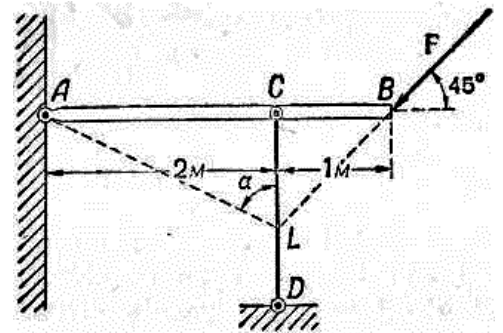


Рис. 3.6.

Дано:

$$F = 20000 \text{ Н},$$

$$\angle CBL = 45^\circ,$$

$$AC = 2 \text{ м},$$

$$CB = 1 \text{ м}$$

$\vec{S}, \vec{Q} - ?$

Розв'язання:

На балку діють задана сила \vec{F} і реакції \vec{R}_A і \vec{R}_C шарнірів A і C відповідно. Реакція \vec{R}_C шарніра C напрямлена по стрижню CD . Напрямок реакції \vec{R}_A шарніра A невідомий. Отже, до балки прикладено три непаралельні сили, що лежать в одній площині і зрівноважуються.

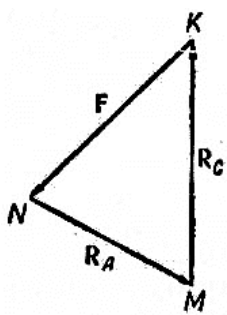


Рис. 3.7.

Згідно з *теоремою 1.1* про умови рівноваги трьох непаралельних сил лінії дії їх перетинаються в одній точці. Знайшовши точку L перетину ліній дії сил \vec{F} і \vec{R}_C , сполучаємо її з точкою A . Вздовж прямої AL напрямлена реакція \vec{R}_A шарніра A . Щоб знайти величини реакцій, побудуємо трикутник сил, діючих на балку. Відклавши вектор \vec{KN} , що у певному масштабі дорівнює силі \vec{F} , проводимо через його кінець N і початок K прямі, відповідно паралельні прямим AL і CL . Нехай точка перетину цих прямих є M (рис. 3.7). Вектори \vec{NM} і \vec{MK} визначають шукані реакції \vec{R}_A і \vec{R}_C . Залишається розв'язати трикутник сил.

Оскільки в трикутнику BCL (рис. 3.6) кути при вершинах B і L однакові (кожний дорівнює 45°), то цей трикутник рівнобедрений, і, отже, $CL=BC=1$ м. Кут α визначимо з трикутника ACL :

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AL} = \frac{AC}{\sqrt{AC^2 + CL^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{CL}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, у трикутнику сил відомо одну сторону і кути, тому можна застосувати теорему синусів: $\frac{F}{\sin \alpha} = \frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{R_C}{\sin(180^\circ - 45^\circ - \alpha)}$, звідки визначаємо \vec{R}_A і \vec{R}_C , а отже, і тиск балки на стіну й зусилля в стержні CD .

$$R_A = \frac{F \cdot \sin 45^\circ}{\sin \alpha} = \frac{20000 \cdot 0,707}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \approx 10000 \cdot 0,707 \cdot \sqrt{5} \approx 15809 (H),$$

$$\begin{aligned} R_C &= \frac{F \cdot \sin(135^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{F \cdot (\sin 135^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 135^\circ \cdot \sin \alpha)}{\sin \alpha} = \\ &= F \cdot (\sin 135^\circ \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \cos 135^\circ) = F \cdot (\sin(90^\circ + 45^\circ) \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \cos(90^\circ + 45^\circ)) = \\ &= F \cdot ((\sin 90^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 90^\circ \cdot \sin 45^\circ) \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \cos 90^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 90^\circ \cdot \sin 45^\circ) = \\ &= F \cdot (\cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \sin 45^\circ) \approx 20000 \cdot (0,707 \cdot 0,5 + 0,707) \approx 21210 (H). \end{aligned}$$

Зусилля \vec{S} в стержні CD буде дорівнювати взятій з протилежним знаком реакції \vec{R}_C шарніра C : $\vec{S} = -\vec{R}_C$; $S = R_C = 21210 H$. Тиск \vec{Q} балки на стіну буде дорівнювати взятій з протилежним знаком реакції \vec{R}_A шарніра A : $\vec{Q} = -\vec{R}_A$; $Q = R_A = 15809 H$.

Приклад 3.3.

До балки AB у точці C прикладено силу $F=1200 H$; опорами балки є шарнір A і коток B (рис. 3.8). Довжина балки $AB=10$ м, $AC=4$ м. Визначити напрям реакції шарніра A (\vec{R}_A) і величини реакцій \vec{R}_A і \vec{R}_B .

Дано:

$$\begin{array}{l} F = 1200 H, \\ AB = 10 \text{ м}, \\ AC = 4 \text{ м}, \\ \angle OCB = 45^\circ \\ \hline \vec{R}_A, \vec{R}_B - ? \end{array}$$

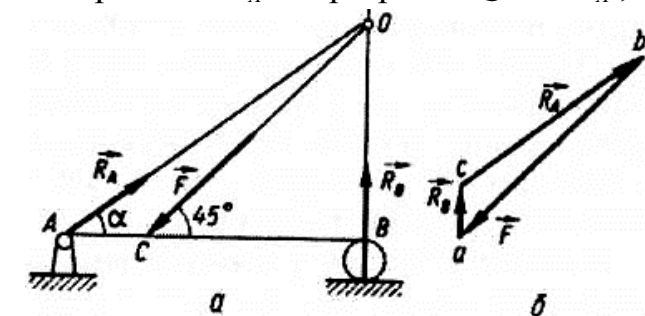


Рис. 3.8.

Розв'язання:

За тіло, рівновагу якого розглядатимемо, візьмемо балку AB . Замінімо в'язі (шарнір A і коток B) їхніми реакціями. Реакція котка B напрямлена перпендикулярно до його опорної площини. Напрямок реакції шарніра заздалегідь невідомий. Проте балка перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, лінії дії яких за теоремою про три сили перетинаються в точці O (рис. 3.8, а). Отже, реакція шарніра A напрямлена по прямій OA . Побудувавши замкнений силовий трикутник, знайдемо напрям реакції шарніра \vec{R}_A (рис. 3.8, б). Побудову починаємо з відомого вектора, що дорівнює силі \vec{F} . Потім з кінця вектора \vec{F} проводимо пряму ac , паралельну \vec{R}_B , а з початку вектора \vec{F} проводимо пряму bc , паралельну OA . Отже, визначимо напрям реакції шарніра \vec{R}_A . Нарешті, з трикутника abc знайдемо його сторони, тобто величини \vec{R}_A і \vec{R}_B . Довжина балки $CB = AB - AC = 10 - 4 = 6$ (м). Трикутник COB — прямокутний і рівнобедрений, тому $OB = CB = 6$ м. З прямокутного трикутника AOB маємо:

$$AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} \approx 11,7 \text{ (м)}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6,$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AO} = \frac{10}{11,7} \approx 0,85, \quad \alpha = \arctg 0,6 \approx 31^\circ.$$

З трикутника abc маємо: $F \cdot \sin 45^\circ = R_B + R_A \cdot \sin \alpha$, $F \cdot \cos 45^\circ = R_A \cdot \cos \alpha$.

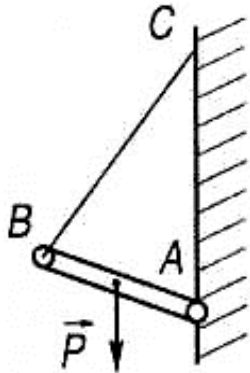


Рис. 3.9

$$\text{Звідки } R_A = \frac{F \cdot \cos 45^\circ}{\cos \alpha} = \frac{1200 \cdot 0,707}{0,85} \approx 998 \text{ (H)};$$

$$\begin{aligned} R_B &= F \cdot \sin 45^\circ - R_A \cdot \sin \alpha = F \cdot \sin 45^\circ - \frac{F \cdot \cos 45^\circ}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = \\ &= F \cdot \sin 45^\circ - F \cdot \cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha = F \cdot \cos 45^\circ \cdot (\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \alpha) = \\ &\approx 1200 \cdot 0,707 \cdot (1 - 0,6) \approx 339 \text{ (H)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $R_A = 998 \text{ H}$, $R_B = 339 \text{ H}$, $\alpha = 31^\circ$.

Приклад 3.4.

Однорідна балка вагою \vec{P} утримується в рівновазі ниткою BC і шарніром A (рис. 3.9). Знайти натяг нитки і реакції шарніра A , якщо $\angle BCA = 30^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$.

Дано:

\vec{P} ,

$\angle BCA = 30^\circ$,

$\angle ABC = 90^\circ$

$\vec{R}, \vec{T} - ?$

Розв'язання:

Розглянемо рівновагу балки з ниткою. Звільнимо систему від в'язей в точках A і C та прикладемо в цих точках реакції (рис. 3.10). Система трьох сил — сили ваги \vec{P} (прикладена в середині балки), сили натягу \vec{T} і реакція шарніра \vec{R} повинні

бути еквівалентними нулеві. За теоремою про три непаралельні сили реакція \vec{R} повинна проходити через точку D (середину сторони BC).

Будуємо силовий трикутник. З подібності силового трикутника і трикутника ADC

(рис. 3.10) випливає: $\frac{P}{AC} = \frac{T}{CD} = \frac{R}{AD}$.

Нехай $AC = 2 \cdot l$, тоді:

$$CD = BD = \frac{1}{2} \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \cos \angle BCA =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2};$$

$$AB = AC \cdot \cos \angle BAC = AC \cdot \cos(\angle ABC - \angle BCA) =$$

$$= AC \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = AC \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} = l;$$

$$AD = \sqrt{BD^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2 + l^2} = \sqrt{\frac{l^2 \cdot 3}{4} + l^2} = \frac{l \cdot \sqrt{7}}{2}.$$

Звідси отримуємо:

$$T = \frac{P \cdot CD}{AC} = \frac{P \cdot \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}}{2 \cdot l} = \frac{P \cdot \sqrt{3}}{4}, \quad R = \frac{P \cdot AD}{AC} = \frac{P \cdot \frac{l \cdot \sqrt{7}}{2}}{2 \cdot l} = \frac{P \cdot \sqrt{7}}{4}.$$

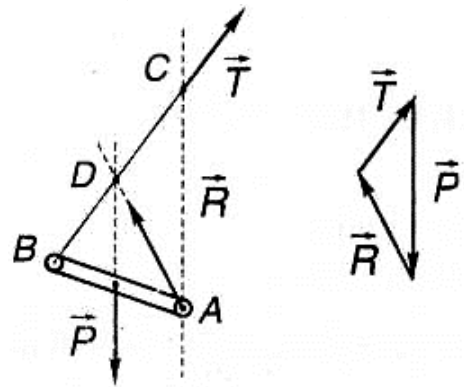


Рис. 3.10.

Приклад 3.5.

Однорідний циліндр, на який діє сила тяжіння \vec{P} , розміщений між двома гладкими похилими площинами, які утворюють з горизонтом кути α і β (рис. 3.11). Знайти тиск циліндра на обидві площини.

Дано:

\vec{P} ,

α ,

β

\vec{Q}_1 ,

\vec{Q}_2 — ?

Розв'язання:

1. Розглянемо рівновагу циліндра.
2. Покажемо активну силу \vec{P} — силу тяжіння, що діє на циліндр.
3. Звільнимо циліндр від в'язей. В'язями в даному випадку є дві похилі гладкі площини, тому реакції \vec{R}_1 і \vec{R}_2 направлені в точках дотику перпендикулярно до площин, тобто до осі циліндра (рис. 3.11).
4. Вибираємо систему координат, як показано на рис. 3.11.

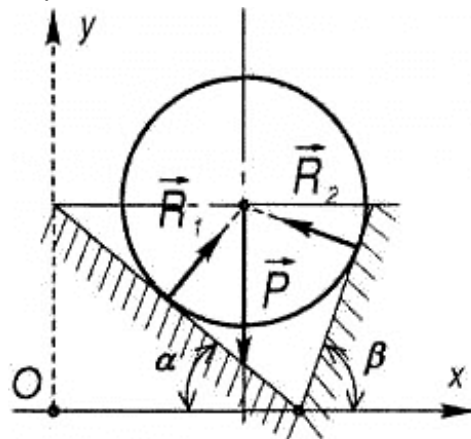


Рис. 3.11.

5. На циліндр діє плоска система збіжних сил $(\vec{P}, \vec{R}_1, \vec{R}_2)$. Складемо таблицю, в яку занесемо проекції всіх сил на осі координат:

	\vec{P}	\vec{R}_1	\vec{R}_2
X	$P_x = 0$	$R_{1x} = R_1 \cdot \sin \alpha$	$R_{2x} = -R_2 \cdot \sin \beta$
Y	$P_y = -P$	$R_{1y} = R_1 \cdot \cos \alpha$	$R_{2y} = R_2 \cdot \cos \beta$

Додаючи елементи кожного рядка даної таблиці (алгебраїчна сума проекцій всіх сил на відповідну координатну вісь) та порівнюючи суму відповідного рядка до нуля, одержимо два рівняння рівноваги для даної системи сил:

$$1. \text{ Вісь } X : P_x + R_{1x} + R_{2x} = 0 + R_1 \cdot \sin \alpha - R_2 \cdot \sin \beta = 0;$$

$$2. \text{ Вісь } Y : P_y + R_{1y} + R_{2y} = -P + R_1 \cdot \cos \alpha + R_2 \cdot \cos \beta = 0.$$

6. Розв'язуючи одержану систему рівнянь, з першого рівняння знаходимо:

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}. \text{ Тоді, в другому рівнянні } \frac{R_2 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha + R_2 \cdot \cos \beta = P; \Rightarrow$$

$$\frac{R_2 \cdot (\sin \beta \cdot \cos \alpha + \cos \beta \cdot \sin \alpha)}{\sin \alpha} = P; \Rightarrow \frac{R_2 \cdot \sin(\beta + \alpha)}{\sin \alpha} = P; \Rightarrow R_2 = \frac{P \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Звідки } R_1 = \frac{P \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{P \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Шукані тиски будуть рівні (згідно

$$\text{Аксиоми IV) за величиною і протилежні за напрямом реакцій } \vec{R}_1 \text{ і } \vec{R}_2, \text{ тобто}$$

$$\vec{Q}_1 = -\vec{R}_1, \quad \vec{Q}_2 = -\vec{R}_2: \quad Q_1 = \frac{P \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad Q_2 = \frac{P \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Приклад 3.6.

Вантаж, на який діє сила тяжіння \vec{P} , прикріплений за допомогою тросу до шарніру D , що кріпиться до вертикальної стіни трьома стержнями, два з яких розташовані в горизонтальній площині, а третій — у вертикальній, за допомогою шарнірів. Сила опору вантажу від вітру \vec{R} горизонтальна і паралельна стіні. Визначити силу натягу тросу \vec{S} та зусилля в стержнях $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$, вважаючи стержні невагомими (рис. 3.12, а). Кути α і β — задані.

Дано:

$\vec{P}, \vec{R},$
 α, β

$\vec{S}, \vec{S}_1 - ?$

$\vec{S}_2, \vec{S}_3 - ?$

Розв'язання:

1. На вантаж E , що знаходиться в рівновазі, діє система трьох збіжних сил, які розташовані у вертикальній площині паралельно стіні (рис. 3.12, б). Це сила тяжіння \vec{P} , сила опору вантажу від вітру \vec{R} і сила натягу тросу \vec{S} , що направлена по ньому. Сила \vec{S} повинна зрівноважити рівнодіючу сил \vec{P} і \vec{R} .

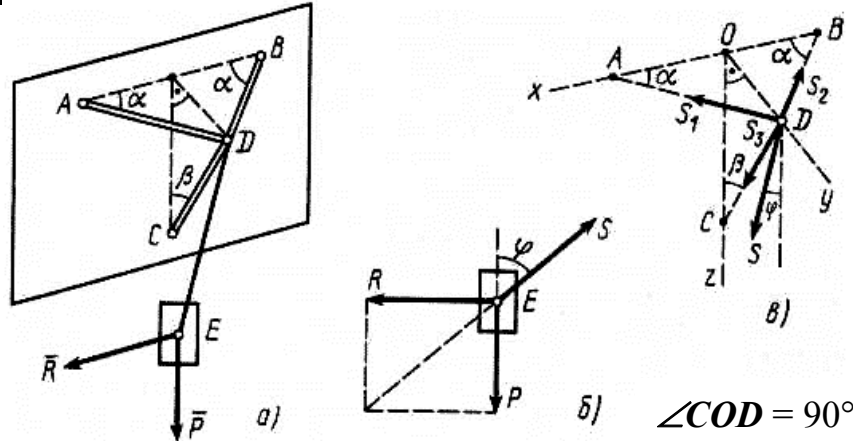


Рис. 3.12.

Відповідно, $S = \sqrt{P^2 + R^2}$, так як сили \vec{P} і \vec{R} перпендикулярні. Сила \vec{S} утворює з вертикаллю кут φ , для якого $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{P}$, $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{P}{R}$.

2. Розглянемо рівновагу шарніру D . Ця тіло невільне — в'язями слугують стрижні AD , BD та CD . Згідно принципу звільнення твердих тіл від в'язей, дію стрижнів на вузол D замінюємо реакціями $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$, лінії дії яких направлені вздовж стрижнів AD , BD та CD . Крім цих трьох сил, до шарніру D прикладена ще сила натягу тросу \vec{S} . Таким чином в точці D , сходяться чотири сили, що утворюють просторову систему збіжних сил $(\vec{S}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3)$ (рис. 3.12, в).

3. Виберемо вісі координат, як показано на рис. 3.12, в, сумістивши площину yOz з площиною, в якій діє сила \vec{S}_3 . При цьому сили \vec{S}_1 і \vec{S}_2 будуть лежати в координатній площині xOy .

4. Складемо таблицю, в яку занесемо проєкції всіх сил на осі координат:

	\vec{S}	\vec{S}_1	\vec{S}_2	\vec{S}_3
X	$S_x = S \cdot \sin \varphi$	$S_{1x} = S_1 \cdot \cos \alpha$	$S_{2x} = -S_2 \cdot \cos \alpha$	$S_{3x} = 0$
Y	$S_y = 0$	$S_{1y} = -S_1 \cdot \sin \alpha$	$S_{2y} = -S_2 \cdot \sin \alpha$	$S_{3y} = -S_3 \cdot \sin \beta$
Z	$S_z = S \cdot \cos \varphi$	$S_{1z} = 0$	$S_{1z} = 0$	$S_{3z} = S_3 \cdot \cos \beta$

5. Додаючи елементи кожного рядка даної таблиці (алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на відповідну координатну вісь) та прирівнюючи суму відповідного рядка до нуля, одержимо три рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил $(\vec{S}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3)$:

$$1). \sum_{i=1}^n S_{ix} = S_x + S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} = S \cdot \sin \varphi + S_1 \cdot \cos \alpha - S_2 \cdot \cos \alpha + 0 = 0;$$

$$2). \sum_{i=1}^n S_{iy} = S_y + S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} = 0 - S_1 \cdot \sin \alpha - S_2 \cdot \sin \alpha - S_3 \cdot \sin \beta = 0;$$

$$3). \sum_{i=1}^n S_{iz} = S_z + S_{1z} + S_{2z} + S_{3z} = S \cdot \cos \varphi + 0 + 0 + S_3 \cdot \cos \beta = 0.$$

6. Так як $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, $1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ і $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, то

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{P}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{P^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P^2 + R^2}{P^2}}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}}.$$

Так як $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, $\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$ і $\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$, то

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{P^2}{R^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P^2 + R^2}{R^2}}} = \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}}.$$

7. Враховуючи це при розв'язанні системи рівнянь рівноваги, з третього

$$\text{рівняння одержимо: } S_3 = -\frac{S \cdot \cos \varphi}{\cos \beta} = -\frac{\sqrt{P^2 + R^2} \cdot \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}}}{\cos \beta} = -\frac{P}{\cos \beta};$$

8. З першого рівняння рівноваги маємо:

$$S_1 - S_2 = -\frac{S \cdot \sin \varphi}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{P^2 + R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}}}{\cos \alpha} = -\frac{R}{\cos \alpha};$$

9. З другого рівняння рівноваги одержимо:

$$S_1 + S_2 = -\frac{S_3 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = -\frac{-\frac{P}{\cos \beta} \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}.$$

Звідки маємо $(S_1 - S_2) + (S_1 + S_2) = -\frac{R}{\cos \alpha} + \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}$, \Rightarrow

$$\Rightarrow 2 \cdot S_1 = -\frac{R}{\cos \alpha} + \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}, \Rightarrow S_1 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cdot \sin \alpha} - \frac{R}{2 \cdot \cos \alpha}.$$

$$S_2 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} - S_1 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} - \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cdot \sin \alpha} + \frac{R}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cdot \sin \alpha} + \frac{R}{2 \cdot \cos \alpha}.$$

10. Реакцію \vec{S}_2 стрижня **BD** отримано зі знаком „плюс”, а це значить, що зроблене припущення про її напрямок правильне — вона направлена від точки **D** до точки **B** — стержень **BD** працює на розтяг. Реакцію \vec{S}_3 стрижня **CD** отримано зі знаком „мінус”, а це значить, що зроблене припущення про її напрямок неправильне — вона в даних умовах рівноваги шарніру **D** направлена в протилежну сторону (від точки **C** до точки **D**) — стержень **CD** працює на стиск. Реальний напрям реакції \vec{S}_1 стрижня **AD** в даному випадку залишається невідомим, оскільки ми не знаємо додатна вона чи від'ємна, бо нам невідомі конкретні числові значення вихідних параметрів. Таким чином, якщо одразу не очевидно, який із стрижнів стиснутий, а який розтягнутий, то можна попередньо вважати всі стрижні стиснутими. Тоді отримане в результаті розв'язку рівнянь рів-

новаги від'ємне значення реакцій того чи іншого стержня покаже, що дійсний напрямок цієї реакції протилежний прийнятому.

$$\text{Відповідь: } S_1 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cdot \sin \alpha} - \frac{R}{2 \cdot \cos \alpha}; \quad S_2 = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cdot \sin \alpha} + \frac{R}{2 \cdot \cos \alpha};$$

$$S_3 = -\frac{P}{\cos \beta}; \quad S = \sqrt{P^2 + R^2}.$$

Приклад 3.7.

Вантаж вагою \vec{P} піднімається краном BAC за допомогою ланцюга DAB , вільно перекинутого через нерухомий блок A . Нехтуючи тертям ланцюга об блок, визначить зусилля в стрижнях AC і AB в залежності від кута α (рис. 3.13, а), а потім визначить кут α так, щоб зусилля стрижня AB дорівнювало нулю.

Розв'язання:

Вибираємо тіло, рівновагу якого будемо розглядати. Таким тілом буде вузол (або точка) A осі нерухомого блоку. Замінімо накладені на неї в'язі відповідними реакціями. Так як стрижні AC і AB навантажені у вузлі A , а з'єднання стрижнів — шарнірні, то стрижні можуть бути тільки або розтягнуті, або стиснуті, й, відповідно, реакції стрижнів будуть направлені вздовж їх осей. Стрижень AB буде, очевидно, розтягнутий, і його реакція \vec{Q}_1 буде направлена від A до B . Стрижень AC — стиснутий, і його реакція \vec{Q}_2 буде направлена від C до A . Так як тертям ланцюга DAB об блок A можна нехтувати, то натяг ланцюга DAB , вільно перекинутого через блок, при рівновазі буде всюди однаковим; а значить сили реакцій \vec{T}_1 і \vec{T}_2 лівої і правої частини даного ланцюга по модулю рівні вазі \vec{P} вантажу B , тобто $T_1 = T_2 = P$.

Звільнив таким чином точку A від в'язей та замінив їх дії на точку реакціями, можна розглядати цю точку як вільну, що знаходиться в рівновазі під дією плоскої системи із чотирьох збіжних сил: \vec{T}_1 , \vec{T}_2 , \vec{Q}_1 і \vec{Q}_2 , причому модулі двох останніх сил невідомі і їх треба розрахувати. За початок координат беремо точку A , за напрям осі Ox лінію дії сили \vec{Q}_2 , вісь Oy проводимо перпендикулярно до неї (по лінії дії сили \vec{Q}_1), як показано на рис. 3.13, б.

Складемо тепер рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил. Для цього алгебраїчно додамо проєкції всіх сил на кожен координатну вісь і прирівняємо до нуля одержані алгебраїчні суми:

$$1. \text{ Вісь } X: Q_{1x} + Q_{2x} + T_{1x} + T_{2x} = 0 + Q_2 - T_1 \cdot \cos \alpha - T_2 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$2. \text{ Вісь } Y: Q_{1y} + Q_{2y} + T_{1y} + T_{2y} = Q_1 + 0 + T_1 \cdot \sin \alpha - T_2 \cdot \cos 60^\circ = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь рівноваги, і враховуючи, що $T_1 = T_2 = P$, знаходимо: $Q_2 = T_2 \cdot \cos 30^\circ + T_1 \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos 30^\circ + P \cdot \cos \alpha = P \cdot (\cos 30^\circ + \cos \alpha)$,

$$Q_2 = P \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \alpha \right);$$

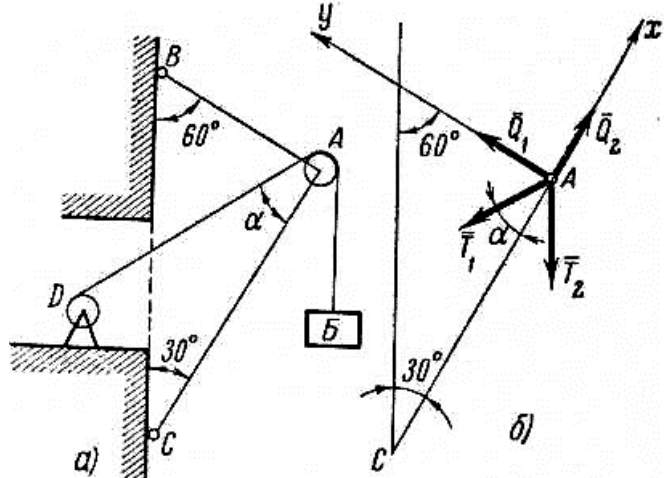


Рис. 3.13.

$$Q_1 = T_2 \cdot \cos 60^\circ - T_1 \cdot \sin \alpha = P \cdot \cos 60^\circ - P \cdot \sin \alpha = P \cdot (\cos 60^\circ - \sin \alpha),$$

$$Q_1 = P \cdot \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right).$$

Зусилля \vec{Q}_1 в стержні AB буде дорівнювати нулю в тому випадку, коли $\frac{1}{2} - \sin \alpha = 0$, тобто при $\alpha = 30^\circ$, при цьому $Q_2 = P \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = P \cdot \sqrt{3}$.

Відповідь: а) $Q_1 = P \cdot \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right)$, $Q_2 = P \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \alpha \right)$;

б) при $Q_1 = 0$ маємо $\alpha = 30^\circ$, $Q_2 = P \cdot \sqrt{3}$.

Приклад 3.8.

Через вбитий в стіну цвях A перекинута трос, один кінець якого закріплений в точці B , а до іншого підвішений вантаж вагою \vec{P} . Трос AB утворює з горизонтом кут α (рис. 3.14.). Тертям тросу об цвях знехтувати. Визначити силу, що діє на цвях.

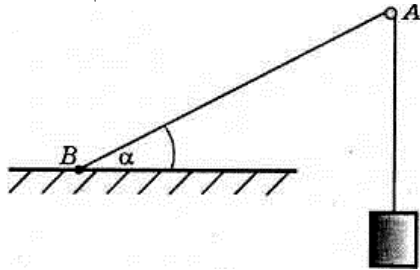


Рис. 3.14.



Рис. 3.15.

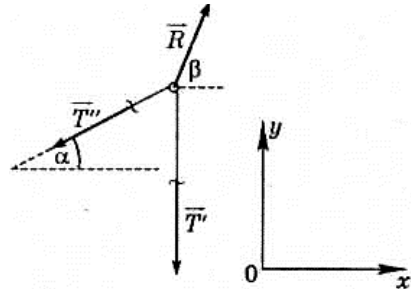


Рис. 3.16.

Розв'язання:

На першому етапі розв'язку задачі розглянемо рівновагу вантажу. Він знаходиться під дією активної сили \vec{P} та реакції тросу \vec{T} (рис. 3.15). Використовуючи аксіому про рівновагу тіла під дією двох сил одержимо: $T = P$.

На другому етапі розглянемо рівновагу цвяху (рис. 3.16). На нього діє дві сили натягу тросу \vec{T}' , \vec{T}'' , напрямки і модулі яких відомі ($T = T' = T'' = P$), та сила реакції стіни \vec{R} , напрямок і модуль якої невідомі. Цвях знаходиться в рівновазі під дією трьох сил, які лежать в одній площині. На основі теореми про три не паралельні сили, ці сили перетинаються в одній точці, тобто утворюють плоску систему збіжних сил. Рівняння рівноваги в векторній формі має вигляд $\vec{R} + \vec{T}' + \vec{T}'' = 0$. Два невідомих параметри (кут β і модуль \vec{R}) можуть бути знайдені із скалярних рівнянь рівноваги:

1. Вісь X : $R_x + T'_x + T''_x = R \cdot \cos \beta + 0 - T \cdot \cos \alpha = 0$;
2. Вісь Y : $R_y + T'_y + T''_y = R \cdot \sin \beta - T - T \cdot \sin \alpha = 0$.

При розв'язуванні даної системи рівнянь маємо $R = \frac{T \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}$;

$$-T - T \cdot \sin \alpha + \frac{T \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \sin \beta = 0; \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{T + T \cdot \sin \alpha}{T \cdot \cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Оскільки $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ і $1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$, то

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2 + 2 \cdot \sin \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2 \cdot (1 + \sin \alpha)}}.$$

Звідси маємо

$$R = \frac{T \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = P \cdot \sqrt{2 \cdot (1 + \sin \alpha)}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Відповідь: $R = P \cdot \sqrt{2 \cdot (1 + \sin \alpha)}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$

Приклад 3.9

Щогла AB підтримується у вертикальному положенні чотирма симетрично розміщеними відтяжками (рис. 3.17). Кут між кожними двома суміжними відтяжками дорівнює 60° . Визначити тиск N щогли на землю, якщо натяг кожної з відтяжок дорівнює $T = 100$ Н, а вага щогли $P = 200$ Н.

Розв'язання:

Розглянемо рівновагу точки B , положення якої обмежують в'язі — відтяжки BC , BD , BE і BF і щогла BA , реакції яких напрямлені по відповідних відтяжках і щоглі. Позначимо через \vec{R} реакцію землі, на яку спирається щогла.

Таким чином, маємо збіжну систему сил, що знаходиться в рівновазі. Застосуємо аналітичну умову рівноваги збіжної системи сил в просторі. Початок координат виберемо у точці B , вісь Bz направимо вертикально вгору. Легко помітити, що два рівняння рівноваги відносно осей x і y перетворюються у тотожності. Третє рівняння рівноваги має вигляд:

$$\text{Вісь } Z: R_z + P_z + T_{1z} + T_{2z} + T_{3z} + T_{4z} = R - P - 4 \cdot T \cdot \cos \alpha = 0.$$

звідки $R = N = 4 \cdot T \cdot \cos \alpha + P.$

Оскільки $BC=BD=BE=BF$ і $\angle FBE = \angle EBD = \angle DBC = \angle CBF = 60^\circ$, то $FE=ED=DC=CF$ і $DF=CE$. Тому чотирикутник $FEDC$ — квадрат, в якому

$$CA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{CD^2 + DE^2} = CD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Звідки $\sin \alpha = \frac{CA}{CB} = \frac{CD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, отже $\alpha = 45^\circ$.

Таким чином $N = 4 \cdot T \cdot \cos 45^\circ + P = 4 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 200 \approx 483$ (Н).

Відповідь: $N = 483$ Н.

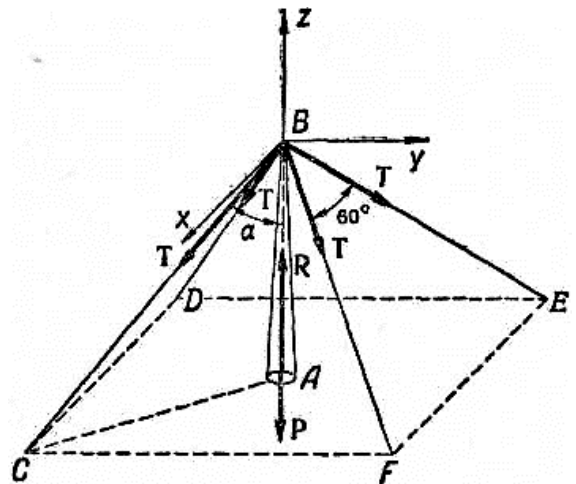


Рис. 3.17.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається проекцією сили на вісь?
2. За яких умов проекцією сили на вісь додатна, від'ємна або дорівнює нулю?
3. Що називається проекцією сили на площину?
4. Чому проекція сили на площину є векторною величиною?
5. Що називається правою системою координат?
6. За якими відомими величинами можна побудувати вектор, який зображає силу \vec{F} ?
7. Запишіть формулу для визначення модуля сили \vec{F} за її проекціями F_x , F_y , F_z на координатні осі.
8. Запишіть формули для визначення напрямних косинусів кутів, які сила \vec{F} складає з координатними осями.
9. Що називається центром системи збіжних сил?
10. Чому дорівнює проекція векторної суми на вісь?
11. Запишіть вирази для проекцій на осі координат рівнодійної \vec{R} системи збіжних сил.
12. Запишіть вирази для модуля рівнодійної \vec{R} системи збіжних сил при її аналітичному визначенні.
13. Запишіть вирази для визначення величини напрямних косинусів, які задають напрям рівнодійної \vec{R} системи збіжних сил.
14. Які вирази дають повне аналітичне визначення рівнодійної системи збіжних сил.
15. Чим може бути замінена система збіжних сил?
16. Сформулюйте та доведіть теорему 3.1.
17. Що виражає умову рівноваги системи збіжних сил в графічній формі.
18. Сформулюйте аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил.
19. Запишіть рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил.
20. Сформулюйте аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил та запишіть відповідні рівняння рівноваги.
21. Які задачі називаються статично визначеними?
22. Які задачі називаються статично невизначеними?
23. Поясніть, в чому полягає графічний метод розв'язку статично визначених задач?
24. Поясніть, в чому полягає геометричний метод розв'язку статично визначених задач?
25. Поясніть, в чому полягає аналітичний метод розв'язку статично визначених задач?

Лекція № 4

Тема: «Момент сили відносно точки і осі»

ПЛАН

- 4.1 Момент сили відносно точки.
- 4.2. Теорема про момент рівнодійної системи збіжних сил (теорема Варіньона).
- 4.3. Момент сили відносно осі.
- 4.4. Залежність між моментами сили відносно точки та відносно осі, яка проходить через цю точку.

4.1. Момент сили відносно точки

Моментом сили \vec{F} відносно точки O (центра) називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора \vec{r} , проведеного з центра O в точку A прикладення сили, на вектор сили \vec{F} (рис. 4.1): $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ (4.1).

Модуль моменту сили визначається за формулою:

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = r \cdot F \cdot \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin \alpha, \quad [M_O(\vec{F})] = [r] \cdot [F] = 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ Н} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (4.2)$$

Опустимо перпендикуляр з точки O на лінію дії сили \vec{F} . Довжину цього перпендикуляра h назвемо плечем сили \vec{F} відносно центра O . Тоді вираз (4.2) записується у вигляді: $|\vec{M}_O(\vec{F})| = F \cdot h$, де $h = r \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = r \cdot \sin \alpha$. (4.3)

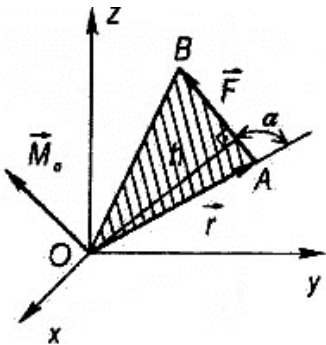


Рис. 4.1.

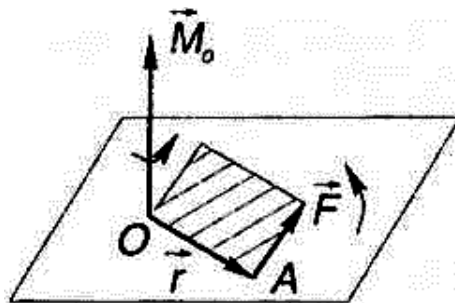


Рис. 4.2, а.

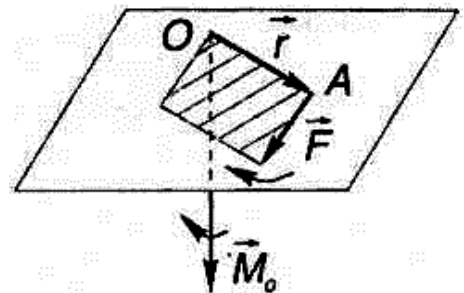


Рис. 4.2, б.

Отже, модуль моменту сили \vec{F} відносно центра O чисельно дорівнює добутку сили на плече та направлений перпендикулярно площині, що проходить через точку O і лінію дії сили, в той бік, звідки „обертання” тіла під дією сили відносно точки O (або найкоротший поворот вектора \vec{r} до суміщення з кінцем вектора \vec{F}) було б видно проти руху стрілки годинника (рис. 4.2).

З рівняння (4.1) можна знайти проекції вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на осі декартової прямокутної системи координат, початок якої збігається з центром моменту O . З векторної алгебри відомо, що векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F}$ можна представити виразником:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{M}_O(\vec{F}), \quad (4.4)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти (одичні вектори) вибраної системи координат;

x, y, z — проекції вектора \vec{r} на координатні осі (координати точки A);

F_x, F_y, F_z — проекції вектора сили \vec{F} на осі координат.

Розкриваючи цей визначник за елементами першого рядка та, розкладаючи вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ на складові $\vec{M}_{Ox}(\vec{F}), \vec{M}_{Oy}(\vec{F}), \vec{M}_{Oz}(\vec{F})$, одержимо:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) &= M_{Ox}(\vec{F}) \cdot \vec{i} + M_{Oy}(\vec{F}) \cdot \vec{j} + M_{Oz}(\vec{F}) \cdot \vec{k} = \\ &= \vec{i} \cdot y \cdot F_z + x \cdot F_y \cdot \vec{k} + \vec{j} \cdot z \cdot F_x - F_x \cdot y \cdot \vec{k} - F_y \cdot z \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j} \cdot F_z = \\ &= \vec{i} \cdot (y \cdot F_z - z \cdot F_y) + \vec{j} \cdot (z \cdot F_x - x \cdot F_z) + \vec{k} \cdot (x \cdot F_y - y \cdot F_x). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Порівнюючи ліву та праву частини цієї рівності, знаходимо проекції моменту $\vec{M}_O(\vec{F})$ на осі координат:

$$M_{Ox}(\vec{F}) = y \cdot F_z - z \cdot F_y; \quad M_{Oy}(\vec{F}) = z \cdot F_x - x \cdot F_z; \quad M_{Oz}(\vec{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x. \quad (4.6)$$

Проекції $M_{Ox}(\vec{F}), M_{Oy}(\vec{F}), M_{Oz}(\vec{F})$ моменту сили $\vec{M}_O(\vec{F})$ на осі координат називаються також **моментами сили відносно координатних осей**.

Формули (4.6) є **аналітичними виразами проекцій на координатні осі моменту сили \vec{F} відносно центра O** .

Знаючи вирази (4.6), **модуль і напрям (напрямні косинуси) моменту сили відносно центра** визначаємо наступним чином:

$$M_O(\vec{F}) = \sqrt{M_{Ox}^2(\vec{F}) + M_{Oy}^2(\vec{F}) + M_{Oz}^2(\vec{F})}; \quad (4.7)$$

$$\cos \angle(\vec{M}_O, \vec{i}) = \frac{M_{Ox}(\vec{F})}{M_O(\vec{F})}; \quad \cos \angle(\vec{M}_O, \vec{j}) = \frac{M_{Oy}(\vec{F})}{M_O(\vec{F})}; \quad \cos \angle(\vec{M}_O, \vec{k}) = \frac{M_{Oz}(\vec{F})}{M_O(\vec{F})}$$

З визначення моменту сили відносно точки випливає:

- 1) якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили, то момент сили відносно точки не зміниться;
- 2) **момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку, оскільки плече сили дорівнює нулю ($h = 0$);**
- 3) момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвійній площі трикутника OAB (рис. 4.1), тобто $M_O(\vec{F}) = 2 \cdot S_{\Delta OAB}$;
- 4) **момент сили відносно точки є зв'язаним вектором**, оскільки $\vec{M}_O(\vec{F})$ не дорівнює $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$ (площа трикутника OAB не дорівнює площі трикутника O_1AB) (рис. 4.3).

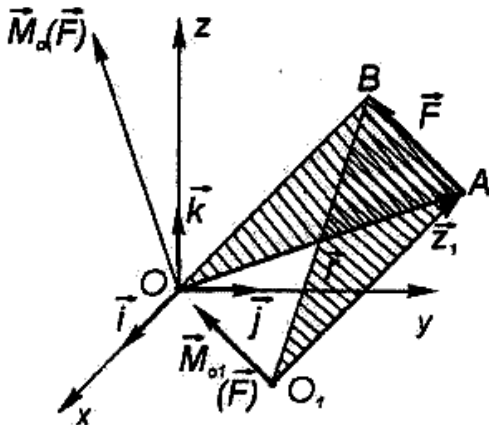


Рис. 4.3.

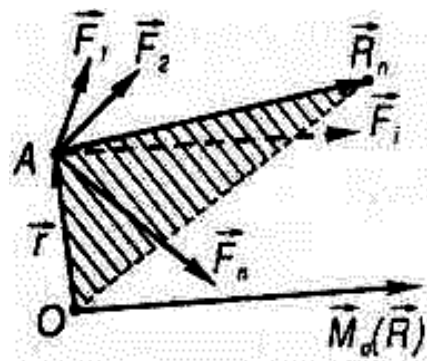


Рис. 4.4.

4.2. Теорема про момент рівнодійної системи збіжних сил (теорема Варіньона)

Доведемо теорему 4.1 (теорему Варіньона): *момент рівнодійної збіжної системи сил відносно довільного центра дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів складових сил відносно того ж самого центра:*

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (4.8)$$

Доведення:

Нехай в точці A перетинаються лінії дії системи збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (рис. 4.4). Позначимо через \vec{r} — радіус-вектор точки A відносно довільного центра O . Рівнодійна заданої системи сил дорівнює $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$.

Тоді з визначення моменту сили відносно точки O маємо:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{R}) &= \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \\ &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i), \end{aligned} \quad (4.9)$$

що й потрібно було довести. Слід зазначити, що ця теорема узагальнюється на випадок будь-якої системи, що зводиться до рівнодійної.

Якщо сили і точка O розміщені в одній площині, то їх моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій. Тому момент рівнодійної такої системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї точки:

$$M_O(\vec{R}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + \dots + M_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i). \quad (4.10)$$

4.3. Момент сили відносно осі

Поряд з поняттям моменту сили відносно точки важливим є поняття моменту сили відносно осі. Він характеризує обертальну дію сили навколо заданої осі.

Моментом сили відносно осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки, яка знаходиться на осі (рис. 4.5):

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cdot \cos \gamma. \quad (4.11)$$

Момент сили \vec{F} відносно осі z фактично слугує аналогом сили в еквіваленті другого закону Ньютона для обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі $\vec{M}_z(\vec{F}) = J_z \cdot \vec{\varepsilon}$, де $J_z = m \cdot r^2$ — момент інерції, $\vec{\varepsilon}$ — кутове прискорення.

З визначення випливає, що момент сили відносно координатних осей визначається за формулами (4.6). З цих формул можна зробити висновок, що **момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі.**

При розв'язуванні конкретних задач моменти сил відносно осей зручно визначати в такій послідовності:

- 1) провести (подумки або на рисунку) через будь-яку точку O на осі z площину xy , перпендикулярну до осі z (рис. 4.6);
- 2) спроектувати силу \vec{F} на площину — вектор \vec{F}_{xy} , початок і кінець якого співпадає з проекціями початку і кінця вектора сили \vec{F} ($\vec{OA} = \vec{r}$, $\vec{OA}_1 = \vec{r}_1$);
- 3) визначити момент проекції \vec{F}_{xy} сили \vec{F} на цю площину відносно точки O :

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h_1, \quad M_z(\vec{F}) = 2 \cdot S_{\Delta OA_1 B_1}. \quad (4.12)$$

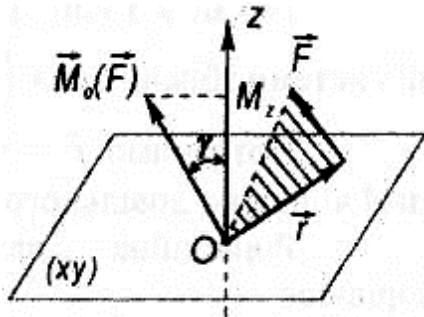


Рис. 4.5.

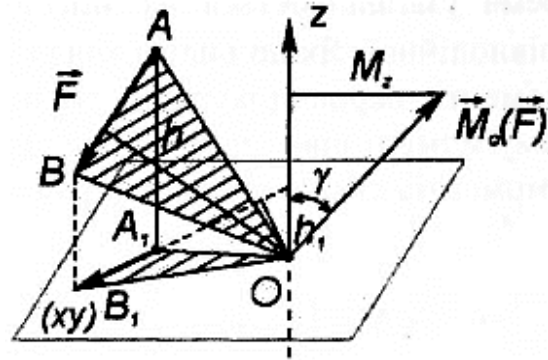


Рис. 4.6.

При цьому будуть виконані умови

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}; & \vec{r} &= x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; \\ \vec{F}_{xy} &= F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}; & \vec{r}' &= x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Використовуючи (4.4)-(4.6), запишемо момент сили \vec{F} відносно осі z:

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}_{xy}) = \vec{r}' \times \vec{F}_{xy} = (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \vec{k}. \quad (4.14)$$

Такий самий результат одержимо, якщо візьмемо будь-яку іншу площину, перпендикулярну осі z.

Подібним чином можна одержати і моменти сили відносно осей x та y:

$$\begin{aligned} \vec{M}_x(\vec{F}) &= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \vec{i}; \\ \vec{M}_y(\vec{F}) &= (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \vec{j}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Як видно з рис. 4.6, знак моменту визначається за наступним правилом:

Момент сили відносно осі вважається додатним, якщо при погляді з додатного кінця осі сила намагається обертати тіло відносно осі проти руху стрілки годинника, в іншому випадку момент вважається від'ємним.

Якщо момент додатний, то він зображається відрізком, направленим вгору по осі z від точки O, а якщо він від'ємний — то вниз по осі.

З (4.12) видно, що момент сили відносно осі дорівнює нулю (сила не може обертати тіло навколо осі) в двох випадках:

- 1) лінія дії сили паралельна осі або співпадає з нею, тобто проекція сили на площину, яка перпендикулярна осі, дорівнює нулю ($F_{xy} = 0$);
- 2) лінія дії сили перетинає вісь, тобто плече проекції сили на площину, яка перпендикулярна осі, дорівнює нулю ($h_1 = 0$).

В обох випадках вісь і сила лежать в одній площині. Об'єднуючи їх, можна сказати, що момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.

Оскільки, момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі, то надалі замість позначення $M_{Oz}(\vec{F})$ будемо позначати $M_z(\vec{F})$ або M_z (аналогічно для моменту сили відносно осей x і y).

Якщо сила \vec{F} і центр моментів O лежать в координатній площині, наприклад Oxy, то $M_x(\vec{F}) = M_y(\vec{F}) = 0$ і момент сили \vec{F} відносно центра O буде колінеарний осі z, тоді момент $M_O(\vec{F})$ повністю визначається своєю проекцією $M_z(\vec{F})$ на вісь z. Тому, при дослідженні системи сил на площині, момент сили відносно точки розглядають як скалярну величину з відповідним знаком, шляхом заміни величини $M_O(\vec{F})$ його проекцією $M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F})$

на вісь z , перпендикулярну площині, в якій лежить сила \vec{F} і центр моментів O , вважаючи момент сили відносно точки додатним, якщо сила „обертає” площину, в якій знаходиться, проти ходу стрілки годинника і від’ємним — якщо за годинниковою стрілкою.

Отже:
$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (4.16)$$

Порівнявши одержані вирази (4.14) і (4.15) з виразом для моменту сили \vec{P} відносно точки O , можна записати:

$$\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{P}) \cdot \vec{i} &= \vec{M}_x(\vec{P}); \\ M_{Oy}(\vec{P}) \cdot \vec{j} &= \vec{M}_y(\vec{P}); \\ M_{Oz}(\vec{P}) \cdot \vec{k} &= \vec{M}_z(\vec{P}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

тобто *момент сили відносно точки є сумою моментів цієї сили відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, проведених через цю точку* (рис. 4.7).

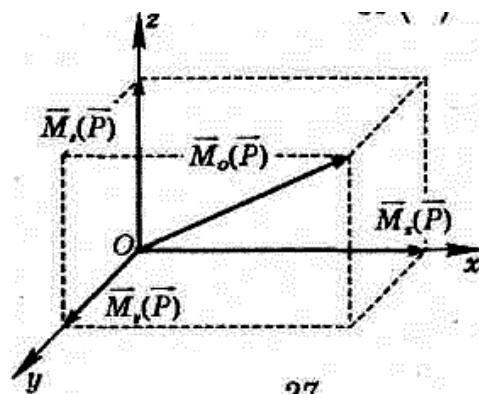


рис. 4.7.

4.4. Залежність між моментами сили відносно точки та відносно осі, яка проходить через цю точку

Нехай, задані сила \vec{F} , вісь z і точка O , яка лежить на осі z (рис. 4.8). Встановимо залежність між моментом сили \vec{F} відносно точки O і моментом сили відносно осі z . Відомо, що:
$$|\vec{M}_z(\vec{F})| = 2 \cdot S_{\Delta O_1 A_1 B_1}. \quad (4.18)$$

Векторний момент сили \vec{F} відносно точки O , що взята на перетині осі Oz з перпендикулярною площиною Π , виражається у вигляді:

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = 2 \cdot S_{\Delta OAB}. \quad (4.19)$$

Векторний момент $\vec{M}_O(\vec{F})$ направлений перпендикулярно площині трикутника OAB . Аналогічно для іншої точки O_1 осі Oz :
$$|\vec{M}_{O_1}(\vec{F})| = 2 \cdot S_{\Delta O_1 A_1 B_1}, \quad (4.20)$$

причому векторний момент $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$ направлений перпендикулярно площині трикутника $O_1 A_1 B_1$. Трикутник $O A_1 B_1$ є проекцією трикутника OAB і $O_1 A_1 B_1$ на площину Π .

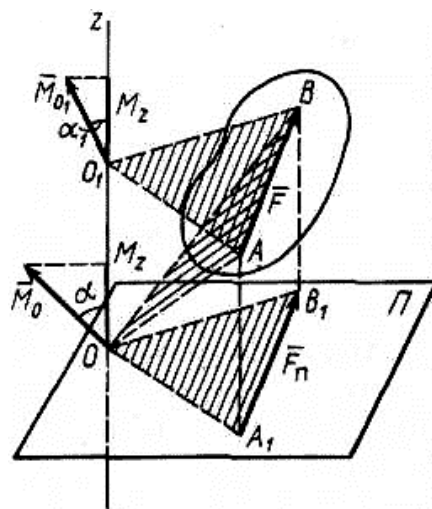


Рис. 4.8.

З геометрії відомо, що площа проекції плоскої фігури дорівнює площі проектованої фігури, помноженій на косинус кута між площинами, в яких розташовані ці фігури. Кут між площинами вимірюється кутом між перпендикулярами до цих площин. Перпендикуляром до площини трикутника $O A_1 B_1$ є вісь Oz , а перпендикулярами до площин трикутників OAB і $O_1 A_1 B_1$ — відповідні векторні моменти $\vec{M}_O(\vec{F})$ і $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$. Таким чином:
$$S_{\Delta O_1 A_1 B_1} = S_{\Delta OAB} \cdot \cos \alpha, \quad (4.21)$$

де α — кут між вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$ і віссю Oz .

Звідси, за формулами (4.18)-(4.21), маємо:

$$M_z(\vec{F}) = |\vec{M}_O(\vec{F})| \cdot \cos \alpha = M_{Oz}(\vec{F}), \quad (4.22)$$

причому знак $M_z(\vec{F})$ повністю визначається знаком $\cos \alpha$.

$$\text{Аналогічно, } S_{\Delta O A_1 B_1} = S_{\Delta O_1 A B} \cdot \cos \alpha_1, \quad (4.23)$$

де α_1 — кут між вектором $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$ і віссю Oz .

$$\text{Звідси маємо: } M_z(\vec{F}) = |\vec{M}_{O_1}(\vec{F})| \cdot \cos \alpha_1 = M_{O_1 z}(\vec{F}), \quad (4.24)$$

де O_1 — будь-яка точка на вісі Oz .

Формули (4.22) і (4.24) відображають шуканий зв'язок між моментом сили відносно осі і векторними моментами сили відносно точок, що лежать на цій осі: **момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь векторного моменту сили відносно будь-якої точки на цій осі**. Отже, **момент сили відносно осі є скалярною величиною**, як і будь-яка проекція вектора на вісь. Якщо сила розташована в площині, перпендикулярній до осі, то її проекція на цю площину дорівнює самій силі, а модуль моменту сили відносно точки O — перетину осі з площиною, дорівнює добутку сили на плече: $\cos \alpha = \pm 1$ і $M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F})$. (4.25)

Ще раз слід наголосити, що **момент сили \vec{F} відносно даної осі z не зміниться при переміщенні точки A прикладання даної сили вздовж лінії її дії, оскільки при цьому не зміниться ні проекція \vec{F}_{xy} сили \vec{F} на площину xy , ні її плече h** (рис. 4.6).

Приклад 4.1.

На прямокутний паралелепіпед діють сили P і Q (рис. 4.9). Визначте моменти цих сил відносно координатних осей, якщо $OA=3$ см, $OC=4$ см, $OL=5$ см, а модулі сил рівні 3 Н.

Дано:

$$P = Q = 3 \text{ Н},$$

$$OA = 0,03 \text{ м},$$

$$OC = 0,04 \text{ м},$$

$$OL = 0,05 \text{ м}$$

$$M_x, M_y, M_z - ?$$

Розв'язання:

Знайдемо момент сили P відносно осі Ox скориставшись визначенням моменту. Для цього спроектуємо силу P на площину $ABED$, перпендикулярну осі Ox . Одержана проекція P_1 буде направлена по BE і рівна $P_1 = P \cdot \cos \alpha$,

$$\text{де } \cos \alpha = \frac{BE}{BK} = \frac{BE}{\sqrt{BE^2 + EK^2}} = \frac{0,05}{\sqrt{0,0025 + 0,0009}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

$$P_1 = 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}} \text{ (Н)}. \text{ Звідси}$$

$$M_x(\vec{P}) = M_A(\vec{P}_1) = AB \cdot P_1 = 0,04 \cdot \frac{15}{\sqrt{34}} \approx 0,1 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

$$\begin{aligned} M_y(\vec{P}) &= M_C(\vec{P}) = -P \cdot h = -P \cdot \frac{KC \cdot BC}{KB} \\ &= -3 \cdot \frac{0,03 \cdot 0,05}{\sqrt{0,0034}} \approx -0,08 \text{ (Н} \cdot \text{м)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z(\vec{P}) &= M_O(\vec{P}_2) = P \cdot \sin \alpha \cdot OC = P \cdot \frac{BC}{KB} \cdot OC = \\ &= 3 \cdot \frac{0,03}{\sqrt{0,0034}} \cdot 0,04 \approx 0,06 \text{ (Н} \cdot \text{м)}. \end{aligned}$$

Аналогічним чином знаходимо моменти сили Q відносно осей x, y, z :

$$M_x(\vec{Q}) = M_O(\vec{Q}') = -Q \cdot h_1 = -Q \cdot \frac{LC}{LB} \cdot \frac{OL \cdot OC}{LC} = -3 \cdot \frac{0,05 \cdot 0,04}{\sqrt{0,005}} \approx -0,08 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$$

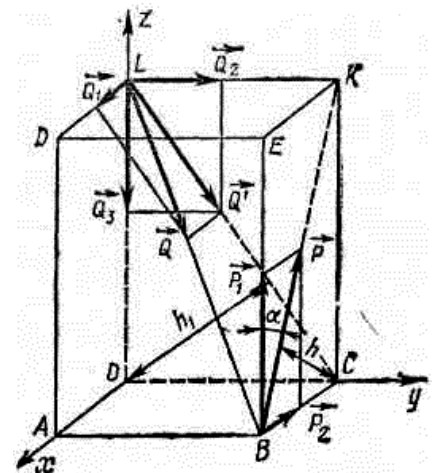


Рис. 4.9.

$$M_y(\vec{Q}) = M_O(\vec{Q}'') = Q'' \cdot h_2 = Q \cdot \frac{LA}{LB} \cdot \frac{OL \cdot OA}{LA} = 3 \cdot \frac{0,05 \cdot 0,03}{\sqrt{0,005}} \approx 0,06 \text{ (H} \cdot \text{м)}.$$

Момент сили \vec{Q} відносно осі z дорівнює нулю, так як лінія дії сили \vec{Q} перетинає вісь Oz : $M_z(\vec{Q}) = 0$.

Відповідь: $M_x(\vec{P}) = 0,1 \text{ H} \cdot \text{м}$, $M_y(\vec{P}) = -0,08 \text{ H} \cdot \text{м}$, $M_z(\vec{P}) = 0,06 \text{ H} \cdot \text{м}$;
 $M_x(\vec{Q}) = -0,08 \text{ H} \cdot \text{м}$, $M_y(\vec{Q}) = 0,06 \text{ H} \cdot \text{м}$, $M_z(\vec{Q}) = 0$.

Приклад 4.2.

Мотузкою, що має довжину l , намагаються повалити дерево. В якій точці M треба прив'язати мотузку, щоб повалити дерево з найменшою силою (рис. 4.10).

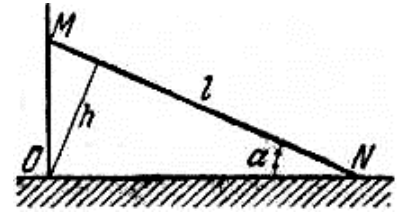


Рис. 4.10.

Розв'язання:

Плече $h = ON \cdot \sin \alpha = l \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ сили натягу мотузки повинно мати найбільшу величину при

$$\frac{dh}{d\alpha} = h' = l \cdot (-\sin \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha) = 0 \text{ або } \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha, \text{ що відповідає куту } \alpha = 45^\circ.$$

При цьому відстань $OM = ON = l \cdot \sin \alpha = l \cdot \sin 45^\circ = \frac{l}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot l$.

Відповідь: $OM = l \cdot \sin 45^\circ = 0,707 \cdot l$.

Приклад 4.3.

Шнурок $ACDB$, закріплений в точках A і B , підтримує два вантажі вагою P і Q , прив'язаних в точках C і D (рис. 4.11). Продовжимо BD до перетину з лінією дії сили P в точці c , і AC до перетину з лінією дії сили Q в точці d . Доведіть співвідношення $\frac{P}{Q} = \frac{Dd}{Cc}$.

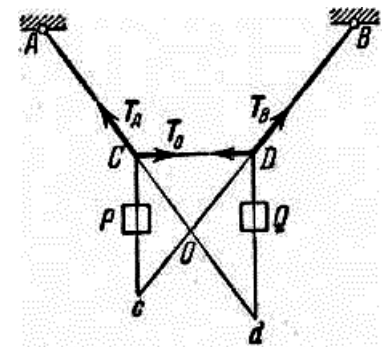


Рис. 4.11.

Розв'язання:

Сила P в точці C врівноважується реакціями T_0 і T_A мотузок CD і AC , а сила Q в точці D – реакціями T_0 і T_B мотузок CD і BD .

Розглянемо умову рівноваги мотузки CD під дією чотирьох сил: T_A , T_B , P і Q , та складемо рівняння моментів відносно точки O перетину ліній дії сил T_A і T_B . Якщо через h_P і h_Q ми позначимо довжини перпендикулярів, які опущені з

точки O на лінії дії сил P і Q , то $P \cdot h_P = Q \cdot h_Q$ або $\frac{h_P}{h_Q} = \frac{Q}{P}$.

З подібності трикутників $\triangle OCc$ і $\triangle ODDd$ маємо:

$$\frac{h_P}{h_Q} = \frac{Cc}{Dd}, \text{ звідки } \frac{h_P}{h_Q} = \frac{Q}{P} = \frac{Cc}{Dd} \text{ або } \frac{P}{Q} = \frac{Dd}{Cc}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається моментом сили \vec{F} відносно точки O (центра)?
2. Запишіть формулу для визначення модуля моменту сили відносно точки та поясніть його розмірність.
3. Що називається плечем сили відносно центра?
4. Чому чисельно дорівнює момент сили відносно точки та куди він направлений?
5. Як векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F}$ можна представити визначником?
6. Поясніть, як вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ розкладається на складові проекції $\vec{M}_{Ox}(\vec{F})$, $\vec{M}_{Oy}(\vec{F})$, $\vec{M}_{Oz}(\vec{F})$?
7. Запишіть аналітичні вирази проекцій на координатні осі моменту сили \vec{F} відносно центра O .
8. Запишіть формулу для визначення модуля моменту сили \vec{F} відносно центра O через значення його проекцій на координатні осі.
9. Запишіть формули для знаходження напрямних косинусів моменту сили \vec{F} відносно центра O через значення його проекцій на координатні осі.
10. Поясніть, чому якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили, то момент сили відносно центру не зміниться?
11. За яких умов момент сили відносно точки дорівнює нулю?
12. Поясніть, чому момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвійній площі трикутника, який утворює вектор сили та її радіус-вектор.
13. Поясніть, чому момент сили відносно точки є зв'язаним вектором.
14. Сформулюйте та доведіть теорему 4.1 — теорему Варіньона.
15. За яких умов момент рівнодійної системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно центру?
16. Що називається моментом сили відносно осі?
17. Поясніть, чому момент сили відносно даної осі не зміниться при переміщенні точки прикладання даної сили вздовж лінії її дії.
18. Наведіть послідовність визначення моментів сил відносно осей при розв'язуванні конкретних задач.
19. За яким правилом визначається знак (додатний або від'ємний) моменту сили відносно осі?
20. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю (сила не може обертати тіло навколо осі)?
21. Чому момент сили відносно точки є сумою моментів цієї сили відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, проведених через цю точку?
22. Яка залежність існує між моментами сили відносно точки та відносно осі, що проходить через цю точку?

Лекція № 5

Тема: «Пара сил»

ПЛАН

- 5.1. Додавання двох паралельних сил.
- 5.2. Поняття пари сил.
- 5.3. Теорема про пари сил.
- 5.4. Лема про паралельне перенесення сили.

5.1. Додавання двох паралельних сил

Нехай до тіла прикладені дві паралельні і однаково спрямовані сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 (рис. 5.1). Знайдемо їх рівнодіючу. Прикладемо в точках A і B вздовж лінії AB рівні за модулем і протилежні за напрямком сили \vec{Q}_1 і \vec{Q}_2 , тобто систему сил, яка еквівалентна нулю. В результаті

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2). \quad (5.1)$$

Знайдемо суму сил:

$$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 = \vec{R}_1, \quad \vec{P}_2 + \vec{Q}_2 = \vec{R}_2 \quad \text{тобто} \quad \vec{R}_1 \sim (\vec{P}_1, \vec{Q}_1), \quad \vec{R}_2 \sim (\vec{P}_2, \vec{Q}_2). \quad (5.2)$$

Тепер можна записати: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim (\vec{R}_1, \vec{R}_2).$ (5.3)

Перенесемо сили \vec{R}_1 і \vec{R}_2 в точку перетину їх ліній дії O і розкладемо за правилом паралелограма на складові: $\vec{R}_1 = \vec{Q}'_1 + \vec{P}'_1$, $\vec{R}_2 = \vec{Q}'_2 + \vec{P}'_2$. (5.4)

При цьому $\vec{Q}'_1 = \vec{Q}_1$, $\vec{Q}'_2 = \vec{Q}_2$, $\vec{P}'_1 = \vec{P}_1$, $\vec{P}'_2 = \vec{P}_2$, а оскільки \vec{Q}'_1 і \vec{Q}'_2 направлені в протилежні сторони вздовж однієї лінії і рівні за модулем, то отримаємо:

$$(\vec{R}_1, \vec{R}_2) \sim (\vec{P}'_1, \vec{P}'_2), \quad \text{тобто} \quad (\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim (\vec{P}'_1, \vec{P}'_2) \sim \vec{R}. \quad (5.5)$$

Початкова система сил виявилася еквівалентною системі, що утворена тими ж силами, але прикладеними в точці O , сума яких дає рівнодіючу:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2. \quad (5.6)$$

Лінія дії рівнодіючої паралельна лініям дії сил, що додаються, тому модуль рівнодіючої дорівнює сумі модулів сил: $R = P_1 + P_2.$ (5.7)

З подібності трикутників aOm і AOC , а також bOn і BOC одержимо:

$$\frac{Q_1}{AC} = \frac{P_1}{OC}, \quad \frac{Q_2}{BC} = \frac{P_2}{OC}; \Rightarrow Q_1 \cdot OC = P_1 \cdot AC, \quad Q_2 \cdot OC = P_2 \cdot BC; \Rightarrow \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow Q_1 \cdot OC = Q_2 \cdot OC; \Rightarrow P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC.$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{P_1}{P_2}. \quad (5.9)$$

Це співвідношення визначає положення лінії дії рівнодіючої \vec{R} . Таким чином, система двох паралельних сил, направлених в один бік, має рівнодіючу, паралельну цим силам і направлену в той же самий бік. Модуль її дорівнює сумі модулів сил, що додаються. Лінія дії рівнодіючої ділить відстань між точками прикладання сил внутрішнім чином на частини, обернено пропорційні модулям цих сил.

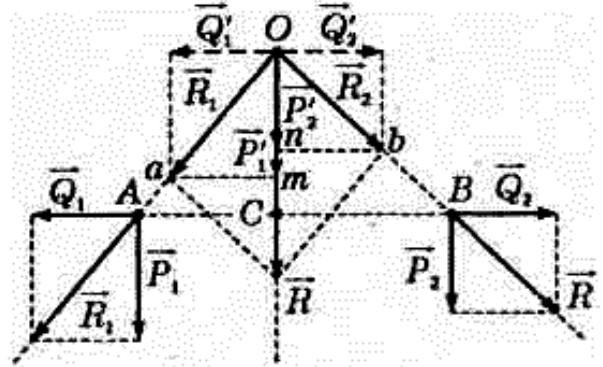


Рис. 5.1.

Розглянемо випадок, коли до тіла прикладені дві паралельні сили, нерівні за модулем і направлені в протилежні сторони (рис. 5.2).

Прикладемо в точках A і B вздовж лінії AB рівні за модулем і протилежні за напрямком сили \vec{Q}_1 і \vec{Q}_2 , тобто систему сил, яка еквівалентна нулю. В результаті $(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$. Знайдемо суму сил:

$$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 = \vec{R}_1, \quad \vec{P}_2 + \vec{Q}_2 = \vec{R}_2,$$

тобто $\vec{R}_1 \sim (\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$, $\vec{R}_2 \sim (\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$.

Тепер можна записати $(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim (\vec{R}_1, \vec{R}_2)$.

Перенесемо сили \vec{R}_1 і \vec{R}_2 в точку перетину їх ліній дії O і розкладемо за правилом паралелограма на складові: $\vec{R}_1 = \vec{Q}'_1 + \vec{P}'_1$, $\vec{R}_2 = \vec{Q}'_2 + \vec{P}'_2$.

При цьому $\vec{Q}'_1 = \vec{Q}_1$, $\vec{Q}'_2 = \vec{Q}_2$, $\vec{P}'_1 = \vec{P}_1$, $\vec{P}'_2 = \vec{P}_2$,

а оскільки \vec{Q}'_1 і \vec{Q}'_2 направлені в протилежні сторони вздовж однієї лінії і рівні за модулем, то отримаємо $(\vec{R}_1, \vec{R}_2) \sim (\vec{P}'_1, \vec{P}'_2)$, тобто $(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim (\vec{P}'_1, \vec{P}'_2) \sim \vec{R}$.

Початкова система сил виявилася еквівалентною системі, що утворена тими ж силами, але прикладеними в точці O , сума яких дає рівнодіючу:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2, \quad R = P_2 - P_1, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{P_1}{P_2} \quad (5.10)$$

Отже, дві нерівні за модулем і протилежно направлені паралельні сили мають рівнодіючу, яка паралельна цим силам і направлена в бік більшої сили, причому її модуль дорівнює різниці модулів сил, що додаються; лінія дії рівнодіючої ділить відстань між точками прикладання сил зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні модулям сил, що додаються.

Розглянемо випадок двох паралельних сил, рівних за модулем, але протилежно направлених. Формальне застосування раніше одержаних співвідношень (5.10) призводить до висновку, що модуль рівнодіючої дорівнює нулю, а лінія її дії віддалена на нескінченність. Рівність нулю рівнодіючої може створити ілюзію, що ці дві сили утворюють зрівноважену систему сил. Ілюзорність полягає в тому, що дві сили можуть бути зрівноважені тільки в тому випадку, якщо вони діють вздовж однієї лінії в протилежні сторони і рівні за модулем. Таким чином, поняття рівнодіючої в даному випадку позбавлене змісту. Такі дві сили являють собою невідновжену систему, яка не може бути замінена однією силою. Дану систему двох паралельних сил, що рівні за модулем і протилежно направлені, прийнято називати парою сил або просто парою.

Пара сил є самостійним елементом статички.

5.2. Поняття пари сил

Парою сил, прикладеною до твердого тіла, називається система двох рівних за величиною паралельних між собою сил $|\vec{F}'| = |\vec{F}|$, які направлені в протилежні боки уздовж незбіжних ліній дії (рис. 5.3).

Площина (N) , в якій розміщені сили пари, називається площиною дії пари або площиною пари.

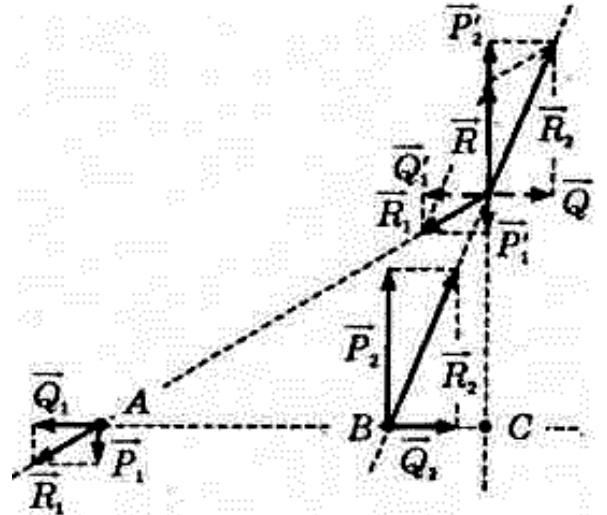


Рис. 5.2.

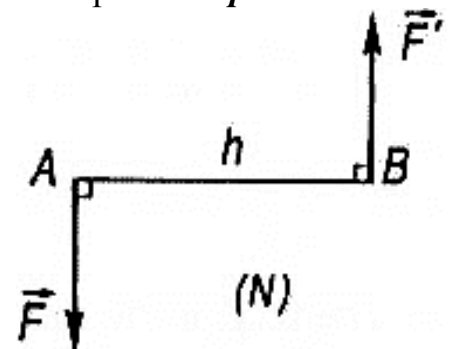


Рис. 5.3.

Плечем пари h називається найкоротша відстань між лініями дії сил пари.

З Аксиоми I випливає, що **система сил пари не знаходиться в рівновазі. Пара сил не має рівнодійної.** Дійсно, припустимо протилежне, що пара сил має рівнодійну \vec{R} , тоді система $(\vec{F}, \vec{F}', -\vec{R})$ має бути еквівалентна нулю. Але це неможливо, оскільки лінії дії цих сил не проходять через одну точку, тобто не виконується відповідна умова рівноваги згідно теореми про три сили.

Дослідним шляхом встановлено, що **пара сил, які діють на тверде тіло, намагається надати йому деяке обертання.** Для того, щоб визначити, якою фізичною величиною можна охарактеризувати „обертальний ефект” пари сил, який діє на тверде тіло, з'ясуємо, чому дорівнює **сума моментів сил, що складають пару, відносно будь-якої точки простору.**

Нехай точка O — довільна точка простору (рис. 5.4); \vec{F} , \vec{F}' — сили, які складають пару, що прикладені відповідно в точках A і B ; \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , $\vec{\rho}$ — радіус-вектори.

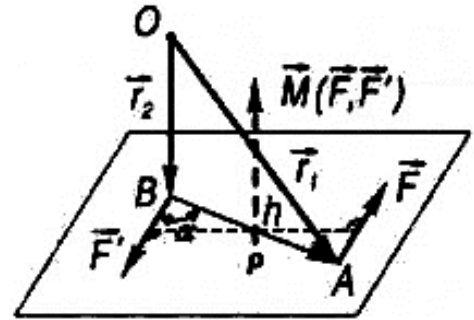


Рис. 5.4.

З векторного трикутника OAB видно, що $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{\rho}$ і $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Використовуючи визначення моменту сили відносно точки, знаходимо шукану суму:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \vec{F}' = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{\rho} \times \vec{F}. \quad (5.11)$$

Одержана сума не залежить від положення точки O , відносно якої обчислюються моменти сил пари, тобто є „**вільним вектором**”. Позначимо його через $\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}')$ — **момент пари сил** (\vec{F}, \vec{F}') . Тоді

$$\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{\rho} \times \vec{F}. \quad (5.12)$$

Оскільки $h = \rho \cdot \sin \alpha$, то **модуль моменту пари** дорівнює:

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot \rho \cdot \sin \alpha = F \cdot h. \quad (5.13)$$

Отже, **моментом пари сил** (\vec{F}, \vec{F}') називається вектор $\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}')$, перпендикулярний площині пари і рівний за модулем добутку модуля однієї з сил пари на плече пари. Момент пари, направлений перпендикулярно до площини пари в той бік, звідки „обертання” видно таким, що відбувається проти руху стрілки годинника. За одиницю виміру модуля моменту пари сил, як і моменту сили відносно центра, прийнятий **ньютон на метр (Н·м)**.

5.3. Теореми про пари сил

Доведемо теореми про пари сил, які дозволяють стверджувати, що: **момент пари є повною характеристикою механічної дії пари сил на абсолютно тверде тіло, а дії над парами сил можна замінити еквівалентними векторними операціями над їх моментами.**

Теорема 5.1 (про дії над парами сил): не змінюючи дії пари на абсолютно тверде тіло, її можна переносити і довільно повертати в площині дії, змінюючи величину сили, яка входить в цю пару і довжину плеча так, щоб момент пари залишався незмінним.

Нехай задана пара (\vec{F}, \vec{F}') з плечем $ab = h$ (рис. 5.5). В площині дії цієї пари виберемо довільний відрізок $cd = ab$. В точках c і d цього відрізка на лініях йому перпендикулярних, прикладемо дві системи сил $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1)$ і $(\vec{F}'_1, -\vec{F}'_1)$, кожна з яких еквівалентна нулеві. Причому $|\vec{F}_1| = |\vec{F}'_1| = |\vec{F}|$.

Продовжимо лінії дії сил \vec{F}_1 і \vec{F}'_1 до перетину з лініями дії сил (\vec{F}, \vec{F}') в точках e, l, f, k . Перенесемо тепер сили \vec{F}, \vec{F}' і $-\vec{F}_1, -\vec{F}'_1$ як ковзні вектори у точки e та f . Хай \vec{R} — рівнодійна збіжних сил \vec{F} і $-\vec{F}_1$, прикладених у точці e , а \vec{R}' — рівнодійна збіжних сил \vec{F}' та $-\vec{F}'_1$, прикладених у точці f . Система сил (\vec{R}, \vec{R}') еквівалентна нулевій (за побудовою сили \vec{R} і \vec{R}' рівні за величиною, напрямлені у протилежні боки і прикладені до кінців діагоналі паралелограма $elfk$). Згідно **Аксиому II** її можна відкинути, не порушуючи стану тіла.

Таким чином, пара (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) еквівалентна заданій парі (\vec{F}, \vec{F}') . Залишилось показати, що при вказаному переміщенні пари сил можна змінювати величину плеча і сили, яка входить в пару, що оговорено теоремою. Для цього розглянемо вихідну пару (\vec{F}, \vec{F}') (рис. 5.6). Прикладемо в точках a і b систему сил (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) , еквівалентну нулевій. Нехай \vec{F}_2 та \vec{F}'_2 — рівнодійні збіжних сил відповідно в точках a і b . Тоді система сил буде: $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}_1, \vec{F}'_1) \sim (\vec{F}, \vec{F}')$.

Момент пари сил (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) дорівнює $M(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = F_2 \cdot h_1 = F_2 \cdot h \cdot \cos \alpha$. Момент пари сил (\vec{F}, \vec{F}') дорівнює $M(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot h = F_2 \cdot h \cdot \cos \alpha$, оскільки $F = F_2 \cdot \cos \alpha$.

Отже, **алгебраїчні значення цих моментів однакові**, крім цього, з рис. 5.6 видно, що напрямки „обертання” пар однакові. Звідси випливає, що моменти пар сил (\vec{F}, \vec{F}') і (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) рівні між собою. Теорема доведена.

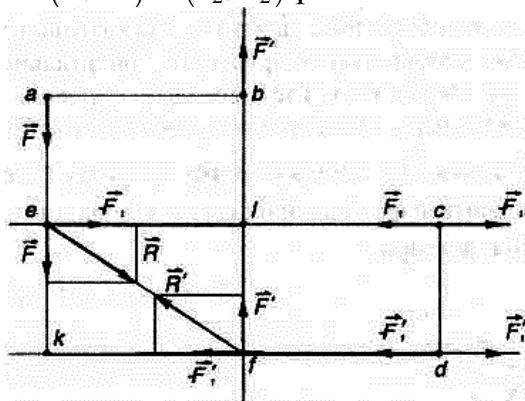


Рис. 5.5.

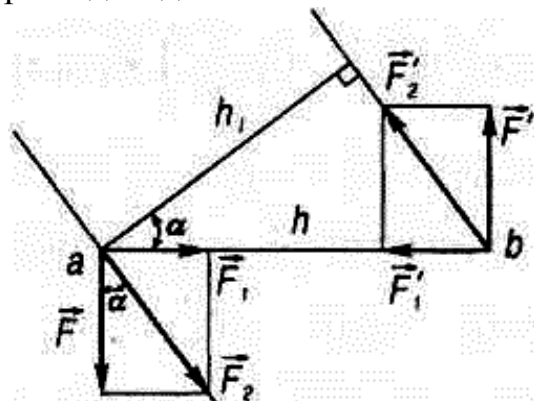


Рис. 5.6.

Теорема 5.2 (про статично еквівалентні пари): *дві пари сил, що мають геометрично рівні моменти, статично еквівалентні.*

Хай на тіло в площині I діє пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) з моментом \vec{M}_1 (рис. 5.7). Покажемо, що цю пару можна замінити іншою парою (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) , розміщеною в площині II , за умови, що її момент $\vec{M}_2 = \vec{M}_1$, це й буде означати, що пари (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) і (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) еквівалентні. Зауважимо, що площини I і II мають бути паралельними, оскільки вони перпендикулярні геометрично рівним векторам \vec{M}_1 і \vec{M}_2 (рис. 5.7). Введемо нову пару (\vec{F}_3, \vec{F}'_3) і прикладемо її разом з парою (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) до тіла в площині II . Для цього, згідно **Аксиому II**, необхідно підібрати пару (\vec{F}_3, \vec{F}'_3) з моментом \vec{M}_3 так, щоб прикладена система сил $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2, \vec{F}_3, \vec{F}'_3)$ була врівноважена.

Виконаємо наступне — прикладемо $\vec{F}_3 = -\vec{F}'_1$ і $\vec{F}'_3 = -\vec{F}_1$ та сумістимо точки прикладання цих сил з проєкціями A_I і B_I точок A і B на площину II . Згідно по-

будови будемо мати: $\vec{M}_3 = -\vec{M}_1$ або, враховуючи, що $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$, $\vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0$, а отже $(\vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{F}_3, \vec{F}_3') \sim 0$.

Таким чином, пари (\vec{F}_2, \vec{F}_2') і (\vec{F}_3, \vec{F}_3') взаємно зрівноважені і приєднання їх до тіла не порушить його стану (**аксіома II**), звідси

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1') \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{F}_3, \vec{F}_3'). \quad (*)$$

З іншого боку, сили \vec{F}_1 і \vec{F}_3 , а також \vec{F}_1' , \vec{F}_3' можна додати за правилом складання паралельних сил, направлених в один бік. За модулем всі ці сили рівні, тому їх рівнодійні \vec{R} та \vec{R}' мають бути прикладені в точці перетину діагоналей паралелограма ABB_1A_1 , крім цього вони рівні за модулем і направлені в протилежні сторони, а це означає, що вони складають систему, еквівалентну нулеві. Отже, $(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_3, \vec{F}_3') \sim (\vec{R}, \vec{R}') \sim 0$. Тоді запишемо:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{F}_3, \vec{F}_3') \sim (\vec{F}_2, \vec{F}_2'). \quad (**)$$

Порівнюючи (*) та (**), одержимо: $(\vec{F}_1, \vec{F}_1') \sim (\vec{F}_2, \vec{F}_2')$, що й потрібно було довести.

З доведених теорем випливає, що **момент пари сил**, математично визначений у виразі (5.12), **є повною характеристикою статичної дії пари сил на абсолютно тверде тіло**. Тому, **дії над парами сил можна замінити еквівалентними векторними операціями над їх моментами**. При цьому, оскільки оберտальна дія пари сил залежить тільки від її моменту, то для задання пари іноді достатньо вказувати лише числове значення її моменту.

Доведені теореми про пари дозволяють встановити **правило складання пар, які лежать як в паралельних площинах, так і в тих, що перетинаються**. Дане правило випливає з наступної теореми.

Теорема 5.3 (правило складання пар): *дві пари сил, які лежать в площинах, що перетинаються, еквівалентні одній парі, момент якої дорівнює векторній сумі моментів обох пар.*

Нехай пари (\vec{F}_1, \vec{F}_1') і (\vec{F}_2, \vec{F}_2') розміщені в площинах *I* та *II*, які перетинаються між собою (рис. 5.8). Користуючись **теоремою 5.1**, приведемо обидві пари до плеча AB , розміщеного на лінії перетину площин *I* та *II*.

Позначимо трансформовані пари через (\vec{Q}_1, \vec{Q}_1') і (\vec{Q}_2, \vec{Q}_2') , при цьому повинні виконуватись рівності:

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= \vec{M}(\vec{Q}_1, \vec{Q}_1') = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), \\ \vec{M}_2 &= \vec{M}(\vec{Q}_2, \vec{Q}_2') = \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2'). \end{aligned}$$

Додамо за **аксіомою III** сили, що прикладені в точках A і B , та отримаємо $\vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$, $\vec{R}' = \vec{Q}_1' + \vec{Q}_2'$.

Враховуючи, що $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_1'$ і $\vec{Q}_2 = -\vec{Q}_2'$, одержимо $\vec{R} = -\vec{R}'$. Таким чином ми довели, що система двох пар еквівалентна одній парі (\vec{R}, \vec{R}') . На основі виразу (5.12) знайдемо момент цієї пари: $\vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{BA} \times \vec{R}$, але $\vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$. Отже:

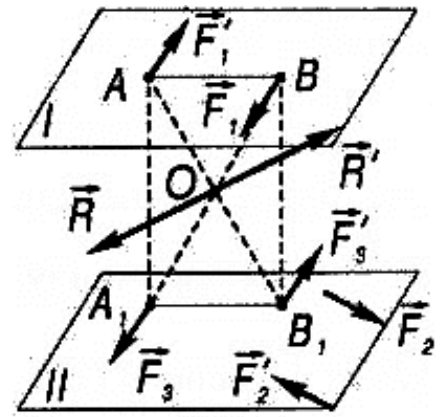


Рис. 5.7.

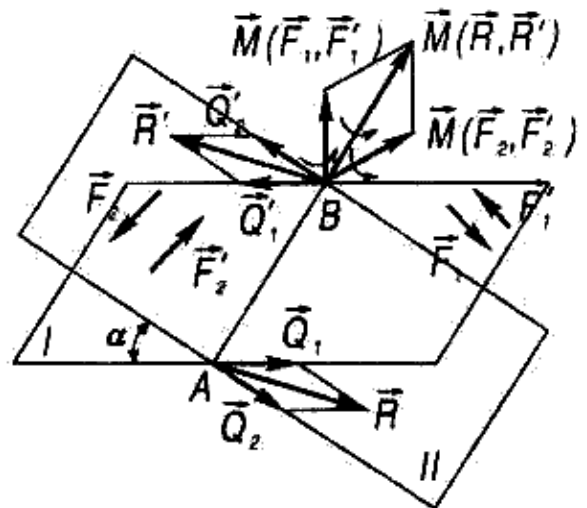


Рис. 5.8.

$$\vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{BA} \times (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{BA} \times \vec{Q}_1 + \vec{BA} \times \vec{Q}_2 = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2'),$$

що й необхідно було довести.

Якщо припустити, що кут α між площинами I і II дорівнює нулю і при цьому врахувати твердження **теорема 5.2**, то висновок **теорема 5.3** розповсюджується і на випадок складання двох пар сил, що лежать як в одній, так і в паралельних між собою площинах. **Теорема 5.3** легко узагальнюється на **випадок складання будь-якої кількості пар**:

Якщо задана система пар сил $\{(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n')\}$ (або $\{(\vec{F}_i, \vec{F}_i')\}$ де $(i = 1, 2, \dots, n)$), то вона може бути замінена однією парою, еквівалентною заданій системі пар сил, що називається результуючою парою (\vec{R}, \vec{R}') . Момент результуючої пари (\vec{R}, \vec{R}') буде дорівнювати векторній сумі моментів

$$\text{складових пар: } \vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = \sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i') \quad (5.14)$$

Якщо система пар сил розміщена в одній площині, то модуль результуючої пари буде дорівнювати алгебраїчній сумі модулів моментів пар сил, що утворюють дану систему:

$$M(\vec{R}, \vec{R}') = M(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + M(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + M(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = \sum_{i=1}^n M(\vec{F}_i, \vec{F}_i'). \quad (5.15)$$

Тепер легко розв'язати другу задачу статyki — виявити умови рівноваги тіла, на яке діє система пар сил.

Для того, щоб система пар була еквівалентна нулю, необхідно і достатньо, щоб результуюча пара (\vec{R}, \vec{R}') була виродженою, або, що теж саме, **щоб момент результуючої пари був рівним нулю (аксіома 1)**. Тоді з (5.14) одержимо **умову рівноваги системи пар сил у векторній формі**:

$$\vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = \sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i') = 0. \quad (5.16)$$

В проєкціях на осі координат вираз (5.16) дає три скалярні рівняння — **рівняннями рівноваги** або **аналітичними умовами рівноваги просторової системи пар сил**, що формулюються наступним чином: **для рівноваги просторової системи пар сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій моментів пар сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю**:

$$M_x(\vec{R}, \vec{R}') = M_x(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + M_x(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + M_x(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i, \vec{F}_i') = 0;$$

$$M_y(\vec{R}, \vec{R}') = M_y(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + M_y(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + M_y(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i, \vec{F}_i') = 0; \quad (5.17)$$

$$M_z(\vec{R}, \vec{R}') = M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + M_z(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + M_z(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i, \vec{F}_i') = 0.$$

Якщо всі пари лежать в одній площині, то всі моменти пар перпендикулярні цій площині, тому рівняння (5.16) достатньо спроектувати тільки на одну вісь — вісь, перпендикулярну площині пар. Нехай це буде вісь z (рис. 5.9), тоді з рівнянь (5.17) одержимо: $M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + M_z(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + M_z(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = 0$, (5.18) при цьому зрозуміло, що $M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_1') = M(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, коли „обертання” пари видно з додатного напрямку осі проти стрілки годинника, і $M_z(\vec{F}_2, \vec{F}_2') = -M(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ у випадку протилежного напрямку „обертання”.

Таким чином, для рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині (або в паралельних площинах), необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій моментів цих пар сил на вісь, яка перпендикулярна даній площині (площинам), дорівнювали нулю.

Отже, пара сил, яка діє на тверде тіло, утворює новий самостійний елемент статки, який поряд з поняттям сили, складає важливе поняття механіки. Основні властивості цього елемента статки і основні правила перетворень, яким підкоряється цей новий елемент, повністю встановлюються доведеними вище теоремами про пари. Ці властивості і правила перетворень називаються властивостями пар сил:

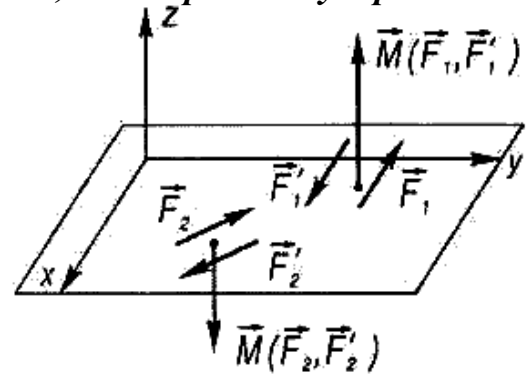


Рис. 5.9.

- 1) пару сил можна переносити в площині її дії, включаючи поворот на будь-який кут;
- 2) пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії цієї пари;
- 3) не змінюючи моменту пари, можна змінювати плече пари та сили, що її складають;
- 4) довільно розміщену в просторі систему пар сил можна замінити однією результуючою парою, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар.

Зауважимо, що механічна дія (вплив) у статиці абсолютно твердого тіла характеризується трьома типами векторів:

- 1) силою — ковзним вектором;
- 2) моментом сили відносно точки — прикладеним або зв'язаним вектором;
- 3) моментом пари сил — вільним вектором.

5.4. Лема про паралельне перенесення сили

Доведемо лему 5.1 (про паралельне перенесення сили): не змінюючи статичного стану твердого тіла, прикладену до цього тіла силу можна перенести у будь-яку його точку, паралельно самій собі, прикладаючи при цьому пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно нової точки прикладення.

Нехай в точці A прикладена сила \vec{F} (рис. 5.10). Прикладемо тепер в точці B тіла систему двох сил \vec{F}' і \vec{F}'' , еквівалентну нулю, причому $\vec{F}' = \vec{F}$ (отже $\vec{F}'' = -\vec{F}'$). Тоді сила $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$, оскільки $(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$. Але з іншого боку система сил $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ еквівалентна силі \vec{F}' і парі сил (\vec{F}, \vec{F}'') ; отже, сила \vec{F} еквівалентна силі \vec{F}' , прикладеній в точці B , і парі сил (\vec{F}, \vec{F}'') з моментом, що дорівнює моменту даної сили відносно точки B . Одержану таким чином пару сил (\vec{F}, \vec{F}'') називають приєднаною парою сил. Лема доведена.

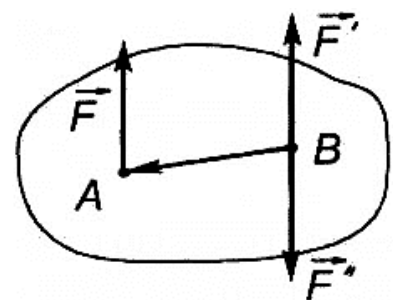


Рис. 5.10.

Запитання для самоконтролю

1. Поясніть, яку рівнодіючу має система двох паралельних сил, що направлені в один бік, чому дорівнює її модуль та як проходить лінія дії?
2. Поясніть, яку рівнодіючу мають дві нерівні за модулем і протилежно направлені паралельні сили, чому дорівнює її модуль та як проходить лінія дії?
3. Що називається парою сил, прикладеною до твердого тіла?
4. Що називається площиною дії пари сил?
5. Що називається плечем пари сил?
6. Поясніть, чому система сил пари не знаходиться в рівновазі?
7. Поясніть, що намагається зробити з абсолютно твердим тілом прикладена до нього пара сил?
8. Що називається моментом пари сил (\vec{F}, \vec{F}') ?
9. Запишіть формулу для визначення моменту пари сил як вектора.
10. Запишіть формулу для визначення модуля моменту пари сил.
11. В яких одиницях вимірюється модуль моменту пари сил?
12. Поясніть, чому момент пари сил є вільним вектором?
13. Поясніть, чому момент пари сил є повною характеристикою механічної дії пари на тверде тіло?
14. Сформулюйте та доведіть теорему 5.1 (про дії над парами сил).
15. Сформулюйте та доведіть теорему 5.2 (про статично еквівалентні пари).
16. Поясніть, чому дії над парами сил можна замінити еквівалентними операціями над їх моментами?
17. Сформулюйте та доведіть теорему 5.3 (правило складання пар).
18. Чим може бути замінена система пар сил $\{(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)\}$?
19. Чому дорівнює момент результуючою пари (\vec{R}, \vec{R}') системи пар сил?
20. Як визначається модуль результуючої пари системи пар сил, що розміщені в одній площині або в паралельних площинах?
21. Поясніть, в яких випадках результуюча пара (\vec{R}, \vec{R}') є виродженою?
22. Сформулюйте аналітичні умови рівноваги системи пар сил.
23. Запишіть рівняннями рівноваги системи пар сил.
24. Поясніть, що необхідно для рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині або в паралельних площинах?
25. Сформулюйте та поясніть основні властивості пар сил.
26. Якими типами векторів характеризується механічна дія (вплив) у статиці абсолютно твердого тіла?
27. Сформулюйте та доведіть лему 5.1 (про паралельне перенесення сили)?
28. Що називається приєднаною парою сил?

Лекція № 6

Тема: «Довільна просторова система сил»

ПЛАН

- 6.1. Головний вектор і головний момент довільної системи сил.
- 6.2. Основна теорема статички абсолютно твердого тіла.
- 6.3. Зміни головного вектора і головного моменту при зміні центра зведення.
- 6.4. Статичні інваріанти.
- 6.5. Зведення просторової системи сил до простішого вигляду.
- 6.6. Зведення плоскої системи сил до простішого вигляду.
- 6.7. Теорема Варіньона (в загальному вигляді).
- 6.8. Зведення системи сил до двох сил.

6.1. Головний вектор і головний момент довільної системи сил

Першою (основною) задачею статички твердого тіла є встановлення умов приведення заданої (довільної) системи сил, що не збігаються, до простішого вигляду.

Розглянемо метод Пуансо зведення незбіжної системи сил до однієї сили і однієї пари сил.

Нехай задана довільна система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що діють на тверде тіло.

Головним вектором \vec{F}_0 системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ називається векторна сума всіх сил заданої системи:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (6.1)$$

Головним моментом \vec{M}_0 системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ відносно центра зведення (точки O) називається векторна сума моментів всіх сил, що входять в систему, відносно того ж центра:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n, \end{aligned} \quad (6.2)$$

де \vec{r}_i — радіус-вектор, проведений з центра O в точку прикладення сили \vec{F}_i .

Проектуючи ліві і праві частини виразів (6.1) і (6.2) на осі декартової прямокутної системи координат $Oxuz$, одержимо аналітичні вирази для головного вектора і головного моменту довільної просторової системи сил:

$$\begin{aligned} F_{0x} &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ F_{0y} &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \\ F_{0z} &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}; \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
M_{0x} &= M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + \dots + M_x(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) = \\
&= (y_1 \cdot F_{1z} - z_1 \cdot F_{1y}) + (y_2 \cdot F_{2z} - z_2 \cdot F_{2y}) + \dots + (y_n \cdot F_{nz} - z_n \cdot F_{ny}); \\
M_{0y} &= M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + \dots + M_y(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) = \\
&= (z_1 \cdot F_{1x} - x_1 \cdot F_{1z}) + (z_2 \cdot F_{2x} - x_2 \cdot F_{2z}) + \dots + (z_n \cdot F_{nx} - x_n \cdot F_{nz}); \\
M_{0z} &= M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + \dots + M_z(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) = \\
&= (x_1 \cdot F_{1y} - y_1 \cdot F_{1x}) + (x_2 \cdot F_{2y} - y_2 \cdot F_{2x}) + \dots + (x_n \cdot F_{ny} - y_n \cdot F_{nx});
\end{aligned} \tag{6.4}$$

де F_{0x} , F_{0y} , F_{0z} і M_{0x} , M_{0y} , M_{0z} — проєкції відповідно головного вектора \vec{F}_0 і головного моменту \vec{M}_0 на осі координат; F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} — проєкції сили \vec{F}_i на осі координат; x_i , y_i , z_i — проєкції радіус-вектора \vec{r}_i на координатні осі (координати точки A_i прикладання сили \vec{F}_i — рис. 6.1).

Тоді **модуль і напрямні косинуси головного вектора \vec{F}_0 довільної просторової системи сил** задаються виразами:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2}; \\
\cos \angle(\vec{F}_0, \vec{i}) &= \frac{F_{0x}}{F_0}; \quad \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{j}) = \frac{F_{0y}}{F_0}; \quad \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{k}) = \frac{F_{0z}}{F_0}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Модуль і напрямні косинуси головного моменту \vec{M}_0 довільної просторової системи сил задаються виразами:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}; \\
\cos \angle(\vec{M}_0, \vec{i}) &= \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos \angle(\vec{M}_0, \vec{j}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos \angle(\vec{M}_0, \vec{k}) = \frac{M_{0z}}{M_0}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти вибраної прямокутної системи координат.

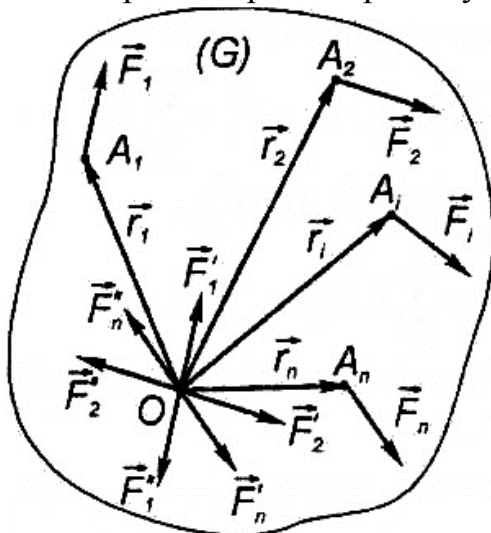


Рис. 6.1.

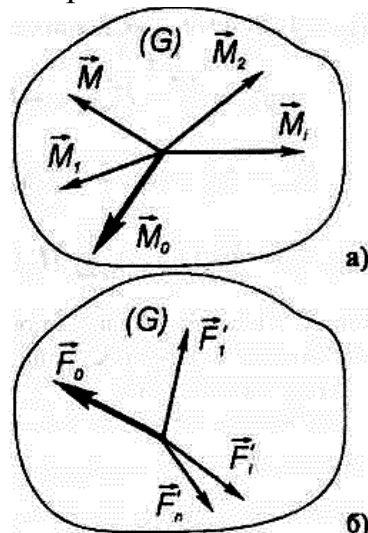


Рис. 6.2.

6.2. Основна теорема статички абсолютно твердого тіла

Використовуючи лему 5.1 про паралельне перенесення сили, доведемо основну теорему статички — теорему Пуансо.

Теорема 6.1 (Теорема Пуансо): довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, прикладеної в довільно вибраній точці тіла (центрі зведення) і рівної головному вектору даної системи сил, та однієї пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно вибраного центра зведення.

Для доведення теореми розглянемо довільну систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (рис 6.1). Довільну точку O тіла G виберемо за центр зведення. Згідно лемі 5.1, перенесемо всі сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ в центр зведення O . Внаслідок цього, система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ стала еквівалентною системі сил $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$, прикладених в точці O (рис. 6.2), і приєднаних пар сил $\{(\vec{F}_1, \vec{F}_1''), (\vec{F}_2, \vec{F}_2''), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n'')\}$ (вони на рис. 6.2 не показані), моменти яких $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ мають вигляд:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1'') = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1);$$

$$\vec{M}_2 = \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2'') = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\vec{M}_n = \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}_n'') = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n);$$

де \vec{r}_i — радіуси-вектори, проведені з центра зведення в точки A_i прикладання сил \vec{F}_i . Визначаючи тепер рівнодійну \vec{F}_0 одержаної збіжної системи сил в точці O (рис 6.2), а також результуючу пару з моментом \vec{M}_0 для системи приєднаних пар, одержимо:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i;$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

які згідно (6.1) і (6.2) являють собою, відповідно, головний вектор і головний момент заданої системи сил. Теорема доведена.

З основної теореми статички випливає, що **дві системи сил, для яких величини \vec{F}_0 і \vec{M}_0 співпадають (геометрично рівні), статично еквівалентні.**

Для задання системи сил, що діють на тверде тіло, достатньо задати її головний вектор і головний момент відносно даного центра зведення.

6.3. Зміни головного вектора і головного моменту при зміні центра зведення

З'ясуємо, як будуть змінюватись головний вектор і головний момент довільної просторової системи сил при зміні центра зведення.

Нехай, задана довільна просторова система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, яка прикладена до абсолютно твердого тіла (рис. 6.3). При зведенні заданої системи сил до центра O , одержимо еквівалентну систему, яка характеризується головним вектором і головним моментом:

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \quad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Зведемо тепер задану систему до нового центра O_1 . Головний вектор при цьому не зміниться, оскільки векторна сума сил довільної системи не залежить від центра зведення. Головний момент зміниться, оскільки відносно нового центра зведення момент кожної з сил буде іншим. Знайдемо його зміну.

Нехай \vec{r}_{1i} — радіус-вектор точки прикладення сили \vec{F}_i , що проведений з точки O_1 . Тоді:

$$\vec{M}_{01} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{1i} \times \vec{F}_i. \quad (6.7)$$

$$\text{З рис. 6.3 видно, що: } \vec{r}_{1i} = \vec{\rho} + \vec{r}_i, \quad (6.8)$$

де $\vec{\rho} = \vec{O_1O}$ — радіус-вектор центра зведення O

відносно нового центра зведення O_1 . Підставляючи значення \vec{r}_{1i} в (6.7), одержимо:

$$\vec{M}_{01} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{1i} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{\rho} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{\rho} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (6.9)$$

$$\text{або} \quad \vec{M}_{01} = \vec{M}_0 + \vec{\rho} \times \vec{F}_0. \quad (6.10)$$

Таким чином, при зміні центра зведення головний момент змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора відносно нового центра зведення.

Звідси випливає, що при перенесенні центра зведення вздовж лінії дії головного вектора, головний момент змінюватись не буде, оскільки векторний добуток радіус-вектора $\vec{\rho}$ на головний вектор \vec{F}_0 буде рівний нульовому вектору:

$$\left| \vec{\rho} \times \vec{F}_0 \right| = \rho \cdot F_0 \cdot \sin \angle(\vec{\rho}, \vec{F}_0) = \rho \cdot F_0 \cdot \sin 0^\circ = 0$$

Вираз (6.10) дозволяє зробити ще один висновок, важливий для подальшого викладення, а саме: якщо в будь-якому центрі зведення головний вектор і головний момент рівні нулю, то вони будуть рівні нулю в будь-якому іншому центрі зведення.

6.4. Статичні інваріанти

Статичним інваріантом називають величину (векторну або скалярну), що має одне і те ж значення в будь-якому центрі зведення.

Першим статичним інваріантом I_1 є незмінність головного вектора просторової системи сил при зміні центра зведення. Таким чином:

$$I_1 = \vec{F}_0. \quad (6.11)$$

Покажемо, що другим статичним інваріантом є скалярний добуток головного вектора на головний момент. Дійсно, помноживши скалярно ліву і праву частину виразу (6.10) на головний вектор \vec{F}_0 , одержимо:

$$\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_{01} = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 + \vec{F}_0 \cdot (\vec{\rho} \times \vec{F}_0), \quad (6.12)$$

але другий член правої частини цієї рівності дорівнює нулю, оскільки вектор $(\vec{\rho} \times \vec{F}_0)$ перпендикулярний вектору \vec{F}_0 . Отже, $\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_{01} = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = const$.

Позначаючи другий статичний інваріант через I_2 , маємо:

$$I_2 = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}. \quad (6.13)$$

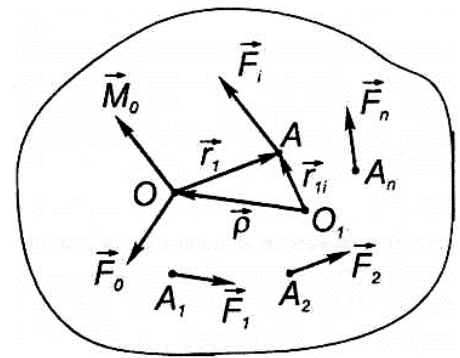


Рис. 6.3.

Якщо врахувати, що $\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = F_0 \cdot M_0 \cdot \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0)$, а \vec{F}_0 являється інваріантом, то співвідношенню (6.13) можна надати наступний вигляд:

$$I'_2 = M_0 \cdot \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0), \quad (6.14)$$

причому
$$\cos \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0) = \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_0 \cdot M_0}. \quad (6.15)$$

Таким чином, **скалярний добуток головного вектора \vec{F}_0 на головний момент \vec{M}_0** (тобто, величина, що визначається (6.13)) або **проекція головного моменту \vec{M}_0 на напрям головного вектора \vec{F}_0** (тобто величина, що визначається виразом (6.14)) **постійні для даної системи сил і не залежать від вибору центра зведення**, а тому є **другим статичним інваріантом системи**.

6.5. Зведення просторової системи сил до простішого вигляду

Як показано в п. 6.1, будь-яка система сил зводиться в загальному випадку до сили, рівної головному вектору \vec{F}_0 і прикладеної в довільному центрі O , та до пари сил з моментом, рівним головному моменту \vec{M}_0 . Знайдемо, до якого простішого вигляду може зводитись просторова система сил, що не знаходиться в рівновазі. Результат залежить від значень, які в цій системі мають величини \vec{F}_0 і \vec{M}_0 .

1. Якщо для даної системи сил $\vec{F}_0 = 0$ і $\vec{M}_0 \neq 0$, то вона зводиться до пари сил, момент якої рівний \vec{M}_0 і може бути обчислений за формулами (6.4).

В цьому випадку перший статичний інваріант $I_1 = \vec{F}_0 = 0$, другий статичний інваріант $I_2 = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = 0$, а значення \vec{M}_0 не залежить від вибору центра зведення O , тому що інакше сталося б, що одна і та ж сама система сил замінюється різними, не еквівалентними одна одній парами, що неможливо.

2. Якщо для даної системи сил $\vec{F}_0 \neq 0$ і $\vec{M}_0 = 0$, то вона зводиться до рівнодійної $\vec{R} = \vec{F}_0$, лінія дії якої проходить через центр зведення O . Тоді

$I_1 = \vec{F}_0 \neq 0$, $I_2 = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = 0$, а значення \vec{R} можна знайти за формулами (6.3).

3. Якщо для даної системи сил $\vec{F}_0 \neq 0$ і $\vec{M}_0 \neq 0$ при $\vec{F}_0 \perp \vec{M}_0$, то ця система також зводиться до рівнодійної, яка рівна \vec{F}_0 , але не проходить через центр O (рис. 6.4). Тоді, вибравши сили пари \vec{R}' і \vec{R}'' , рівні за модулем \vec{F}_0 , і розміщуючи їх так, як показано на рис. 6.4, одержимо, що сили \vec{R}'' і \vec{F}_0 взаємно зрівноважуються і система заміниться однією рівнодійною $\vec{R} = \vec{R}'$, лінія дії якої проходить через точку O' . Відстань OO' ($OO' \perp \vec{F}_0$) знаходиться при цьому за

формулою:
$$OO' = h = \frac{M_0}{F_0}, \quad (6.16)$$

оскільки $F_0 \cdot h = |\vec{M}_0|$. Інваріанти системи $I_1 = \vec{F}_0 \neq 0$, $I_2 = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = 0$.

4. Якщо для даної системи сил $\vec{F}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ і при цьому вектор \vec{M}_0 паралельний \vec{F}_0 (рис. 6.5, а), то система сил зводиться до сукупності сили \vec{F}_0 і пари (\vec{P}, \vec{P}') , що лежить в площині, перпендикулярній силі \vec{F}_0 (рис. 6.5, б). Така сукупність сили і пари називається динамічним (силовим) гвинтом або динамою, а пряма, вздовж якої направлений головний вектор, віссю динамічного гвинта. Подальше спрощення цієї системи неможливе.

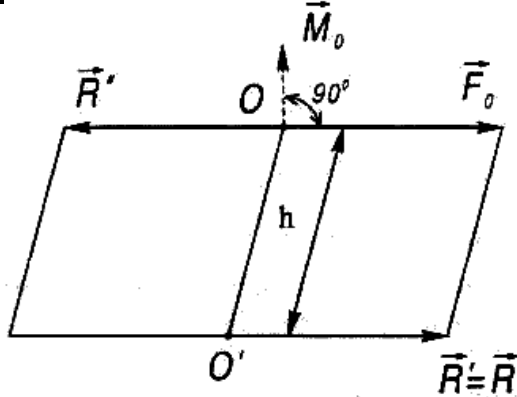


Рис. 6.4.

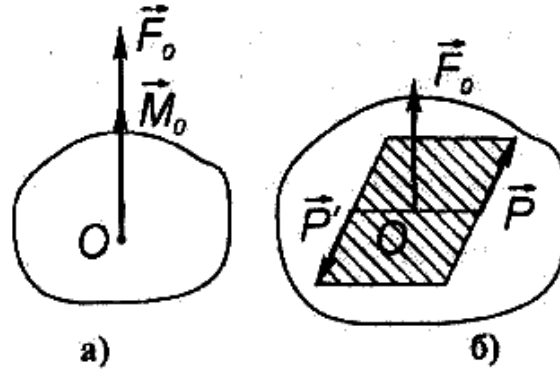


Рис. 6.5.

5. Якщо для даної системи сил $\vec{F}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ ($I_1 \neq 0, I_2 \neq 0$) і при цьому вектор \vec{M}_0 не паралельний і не перпендикулярний \vec{F}_0 , то система сил також зводиться до динамічного гвинта, проте його вісь не співпадає з лінією дії головного вектора. Розглянемо останній випадок більш детально. Для даної системи сил головний вектор \vec{F}_0 і головний момент \vec{M}_0 , що прикладені в центрі зведення O , утворюють між собою кут, косинус якого рівний

$$\cos \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0) = \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0}{F_0 \cdot M_0} = \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_0 \cdot M_0}.$$

Розкладемо головний момент на дві взаємно перпендикулярні складові \vec{M}_{01} і \vec{M}_{02} , одна з яких (\vec{M}_{01}) співнаправлена з головним вектором \vec{F}_0 :

$$M_{01} = M_0 \cdot \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0) = \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{\sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2}}, \quad (6.17)$$

$$M_{02} = M_0 \cdot \sin \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0).$$

Векторний момент пари сил \vec{M}_{02} перпендикулярний головному вектору. Така система сили \vec{F}_0 і пари з моментом \vec{M}_{02} зводиться до однієї сили $\vec{F}_{01} = \vec{F}_0$, лінія дії якої знаходиться в точці O_1 на відстані від центра зведення O :

$$d = \frac{M_{02}}{F_0} = \frac{M_0 \cdot \sin \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0)}{F_0}. \quad (6.18)$$

Таким чином, розглядувана система сил (\vec{F}_0, \vec{M}_0) замінилась еквівалентною системою сил, що складається з сили \vec{F}_{01} і пари сил з векторним моментом \vec{M}_{01} . Оскільки \vec{M}_{01} є вільним вектором, то його можна перенести з центру зве-

дення O в новий центр O_1 , і ми отримаємо динаму, елементами якої є складові системи сил $(\vec{F}_{01}, \vec{M}_{01})$. Лінія, вздовж якої направлена сила динами \vec{F}_{01} , є центральною гвинтовою віссю динами, що знаходиться на відстані d (вираз 6.18) від центру зведення O .

Знайдемо рівняння центральної гвинтової осі динами $(\vec{F}_{01}, \vec{M}_{01})$ (осі динамічного гвинта). Для розглянутої системи сил вектори \vec{F}_{01} і \vec{M}_{01} паралельні між собою, тому відрізняються тільки скалярним множником:

$$\vec{M}_{01} = p \cdot \vec{F}_{01} = p \cdot \vec{F}_0, \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{\vec{M}_{01}}{\vec{F}_0} = \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_{01}}{\vec{F}_0 \cdot \vec{F}_0} = \frac{\vec{F}_0 \cdot (\vec{M}_0 + \vec{O}_1\vec{O} \times \vec{F}_0)}{F_0^2} = \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 + \vec{F}_0 \cdot (\vec{O}_1\vec{O} \times \vec{F}_0)}{F_0^2} = \\ &= \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0}{F_0^2} = \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

де p — стала лінійна величина, яка називається параметром динамічного

гвинта (динами). Умова $p = \frac{\vec{M}_{01}}{\vec{F}_0} = const$ в проєкціях на осі координат буде:

$$\frac{M_{01x}}{F_{0x}} = \frac{M_{01y}}{F_{0y}} = \frac{M_{01z}}{F_{0z}}. \quad (6.21)$$

Головні моменти \vec{M}_{01} і \vec{M}_0 , згідно (6.10), співвідносяться як:

$$\vec{M}_{01} = \vec{M}_0 + \vec{O}_1\vec{O} \times \vec{F}_0 = \vec{M}_0 - \vec{OO}_1 \times \vec{F}_0 = \vec{M}_0 - \vec{M}_O(\vec{F}_{01}), \quad (6.22)$$

Проєкції моменту сили \vec{F}_{01} ($\vec{F}_{01} = \vec{F}_0$) відносно центру зведення O рівні:

$$\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{F}_{01}) &= y \cdot F_{01z} - z \cdot F_{01y} = y \cdot F_{0z} - z \cdot F_{0y}; \\ M_{Oy}(\vec{F}_{01}) &= z \cdot F_{01x} - x \cdot F_{01z} = z \cdot F_{0x} - x \cdot F_{0z}; \\ M_{Oz}(\vec{F}_{01}) &= x \cdot F_{01y} - y \cdot F_{01x} = x \cdot F_{0y} - y \cdot F_{0x}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

де F_{0x} , F_{0y} , F_{0z} і F_{01x} , F_{01y} , F_{01z} — проєкції відповідно головних векторів \vec{F}_0 і \vec{F}_{01} на осі координат; x , y , z — проєкції радіус-вектора \vec{OO}_1 на координатні осі (координати точки O_1 відносно центра координат O).

Тоді рівність (6.22) в проєкціях можна записати:

$$\begin{aligned} M_{01x} &= M_{0x} - (y \cdot F_{0z} - z \cdot F_{0y}); \\ M_{01y} &= M_{0y} - (z \cdot F_{0x} - x \cdot F_{0z}); \\ M_{01z} &= M_{0z} - (x \cdot F_{0y} - y \cdot F_{0x}). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Таким чином, замість рівності (6.21) ми одержимо

$$\frac{M_{0x} - (y \cdot F_{0z} - z \cdot F_{0y})}{F_{0x}} = \frac{M_{0y} - (z \cdot F_{0x} - x \cdot F_{0z})}{F_{0y}} = \frac{M_{0z} - (x \cdot F_{0y} - y \cdot F_{0x})}{F_{0z}} = p \quad (6.25)$$

Лінійні рівняння (6.25) для координат x , y , z є рівняннями прямої лінії — рівнянням осі динамічного гвинта (центральної гвинтової осі динами).

6.6. Зведення плоскої системи сил до простішого вигляду

Розглянемо систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, розміщених в одній площині. До цього випадку зводиться значна кількість практичних задач техніки. Сумістимо з площиною розміщення сил систему координат Oxy і, вибравши її початок за центр зведення, згідно **основної теореми статички**, зводимо цю систему сил до

однієї сили $\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, що дорівнює головному вектору, і до пари сил, момент

якої рівний головному моменту $\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

Оскільки сили розміщені в одній площині, то головний вектор також лежить в цій площині. Момент пари \vec{M}_0 направлений перпендикулярно цій площині, тому що пара знаходиться в площині дії сил, які розглядаються. Таким чином, **для плоскої системи сил головний вектор і головний момент перпендикулярні між собою**.

При розгляді плоскої системи сил ми маємо справу з парами, розміщеними в площині дії сил. Тому в плоских системах немає необхідності надавати векторний зміст моменту пари. **Момент повністю характеризується алгебраїчною величиною M_z , рівною добутку плеча пари на величину однієї з сил, що складають пару, взятий зі знаком „плюс” або „мінус”**. Іншими словами, **за момент пари в плоских системах приймається проекція вектора моменту пари на вісь, перпендикулярну площині дії сил**.

Аналогічно, **моментом сили відносно точки** будемо називати **алгебраїчну величину, що дорівнює проекції вектора моменту сили відносно цієї точки на вісь, перпендикулярну площині**, тобто **добутку сили на плече, взятому з відповідним знаком**.

Виходячи з цих визначень, для знаходження головного моменту, замість формул (6.2) і (6.4), будемо користуватись формулою:

$$M_{0z} = M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + \dots + M_z(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}), \quad (6.26)$$

де x_i, y_i — координати точки прикладення сили \vec{F}_i .

Формули (6.9)-(6.10), що визначають зміну головного моменту при зміні центра зведення, приймуть вигляд:

$$M_{01z} = M_{0z} + \rho \cdot F_0 \cdot \sin \angle(\vec{\rho}, \vec{F}_0), \quad \text{або} \quad M_{01z} = M_{0z} + M_{O_1z}(\vec{F}_0). \quad (6.27)$$

Індекс z в (6.26) і (6.27) збережений для того, щоб вказати на алгебраїчний характер моментів. Для **аналітичного визначення головного вектора плоскої системи сил** використовуються формули:

$$F_{0x} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}; \quad F_{0y} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny};$$

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2}; \quad \cos \angle(\vec{F}_0, i) = \frac{F_{0x}}{F_0}; \quad \cos \angle(\vec{F}_0, j) = \frac{F_{0y}}{F_0}. \quad (6.28)$$

Теорема 6.2:

Якщо головний вектор і головний момент плоскої системи сил не дорівнюють нулю, то дана система еквівалентна одній силі, тобто зводиться до рівнодійної.

Нехай, для вибраного центра зведення, головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю, тобто $\vec{F}_0 \neq 0$ і $M_{0z} \neq 0$ (рис. 6.6, а). Дуговою стрілкою на рис. 6.6, а символічно зображують пару з моментом M_{0z} . Пару сил, момент якої дорівнює головному моменту, представимо у вигляді двох сил \vec{F}_1 і \vec{F}'_1 , рівних за модулем головному вектору \vec{F}_0 , тобто $F_1 = F'_1 = F_0$. Очевидно, що відстань h (плече пари) можна знайти з умови $M_{0z} = F_0 \cdot h$, тобто $h = \frac{M_{0z}}{F_0}$. При цьому одну із сил пари \vec{F}'_1 прикладемо в центрі зведення O і направимо в сторону протилежну \vec{F}_0 (рис. 6.6, б). Тоді система сил (\vec{F}_0, \vec{F}'_1) еквівалентна нулю і може бути відкинута. Отже, задана система сил еквівалентна одній силі \vec{F}_1 , прикладеній в точці O_1 . Ця сила і є рівнодійною, яку позначимо \vec{R} (рис. 6.6, в).

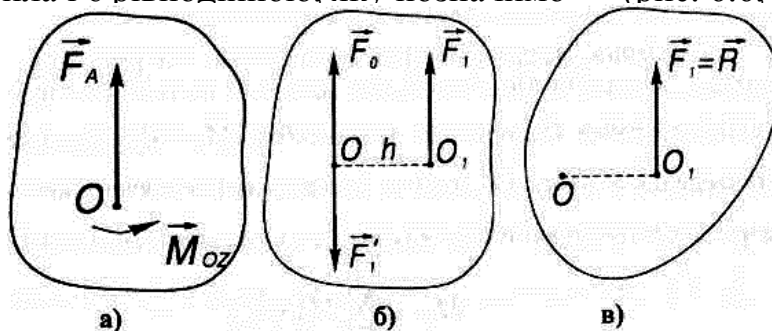


Рис. 6.6.

Внаслідок зведення плоскої системи сил до даного центра можливі такі випадки:

1. $\vec{F}_0 \neq 0$, $M_{0z} \neq 0$. В цьому випадку система сил може бути зведена до однієї сили (рівнодійної) як це показано на рис. 6.6, в.
2. $\vec{F}_0 \neq 0$, $M_{0z} = 0$. При цьому система сил зводиться до однієї сили (рівнодійної), що проходить через даний центр зведення.
3. $\vec{F}_0 = 0$, $M_{0z} \neq 0$. В цьому випадку система еквівалентна одній парі сил.
4. $\vec{F}_0 = 0$, $M_{0z} = 0$. В цьому випадку розглядувана система сил еквівалентна нулю, тобто сили системи взаємно врівноважені.

6.7. Теорема Варіньона (в загальному вигляді)

Узагальнимо теорему Варіньона, наведену в п. 4.2 для системи збіжних сил, на випадок просторової системи сил.

Теорема 6.3 (теорема Варіньона в загальному вигляді): якщо просторова система сил зводиться до рівнодійної, то момент рівнодійної відносно довільної точки дорівнює геометричній сумі моментів сил відносно тієї самої точки.

Доведення. Нехай просторова система сил має рівнодійну \vec{R} прикладену в точці O . Це значить, що головний момент цієї системи сил відносно точки O дорівнює нулю, тобто $\vec{M}_0 = 0$. Перенесемо центр зведення в точку O_1 , тоді за визначенням головного моменту він дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил відносно точки O_1 :

$\vec{M}_{01} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{01}(\vec{F}_i)$. Крім того, скориставшись (6.10), має-

мо: $\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_0 + M_{O_1}(\vec{F}_0)$. Оскільки, $\vec{M}_0 = 0$; $\vec{F}_0 = \vec{R}$, то з наведених виразів випливає: $\vec{M}_{O_1}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_i)$. Теорема доведена.

6.8. Зведення системи сил до двох сил

Теорема 6.4 (теорема О.І. Сомова): довільна система сил, для якої другий статичний інваріант не дорівнює нулю, в загальному випадку може бути зведена до двох мимобіжних сил, одна з яких прикладена в центрі зведення.

Як ми вже знаємо, з основної теореми статички випливає, що систему сил, які розміщені в просторі у будь-якому напрямку, можна в даному центрі зведення O звести до головного вектора \vec{F}_0 і головного моменту \vec{M}_0 , причому, кут між їх напрямками може бути будь-яким. Ми знаємо, що головний момент являє собою момент пари сил. Нехай сили, що складають цю пару, будуть \vec{P} і \vec{P}_1 ($\vec{P} = -\vec{P}_1$). Прикладемо одну із сил, що складають пару (наприклад, \vec{P}_1) в центрі зведення O (рис. 6.7). Зазначимо, що сили \vec{P} і \vec{P}_1 розміщені в площині N , перпендикулярній вектору головного моменту \vec{M}_0 . Складаючи потім головний вектор \vec{F}_0 з силою \vec{P}_1 , одержимо силу $\vec{Q} = \vec{F}_0 + \vec{P}_1$, яка вже не лежить в площині дії пари (\vec{P}, \vec{P}_1) . Отже, в загальному випадку сили \vec{Q} і \vec{P} є перехресні. Теорема доведена.

Таким чином, довільна система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що діє на тверде тіло, може бути еквівалентно перетворена до двох мимобіжних сил \vec{Q} і \vec{P} , одна з яких (\vec{Q}) прикладена в центрі зведення, а друга (\vec{P}) — в точці A , положення якої встановлюється вибором плеча h згідно рівності:

$$M_0 = P \cdot h. \quad (6.30)$$

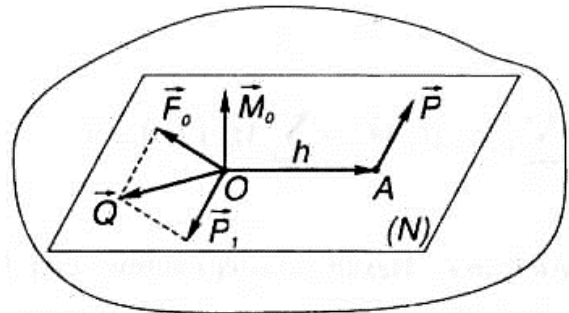


Рис. 6.7.

Приклад 6.1.

Вздовж сторін квадрату $ABCD$ (рис. 6.8) діють рівні за модулем сили $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 100 \text{ Н}$. Сторона квадрата $a = 20 \text{ см}$. Звести цю систему до точки A .

Дано:

$$P_1 = P_2 = 100 \text{ Н},$$

$$P_3 = P_4 = 100 \text{ Н},$$

$$AB = BC = a = 0,2 \text{ м}$$

$$CD = DA = a = 0,2 \text{ м}$$

$$F_0, M_0 \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Проведемо координатні осі так, як показано на рис. 6.8.

Спроекуємо на ці осі дані сили і визначимо їх моменти відносно центру зведення A .

Знайдені величини заносимо в таблицю:

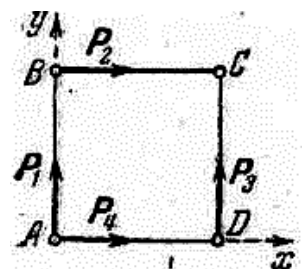


Рис. 6.8.

Сила	Проекції на осі		Момент сили відносно точки A
	x	y	
P_1	$P_{1x} = 0$	$P_{1y} = 100 \text{ H}$	$M_A(\vec{P}_1) = 0$
P_2	$P_{2x} = 100 \text{ H}$	$P_{2y} = 0$	$M_A(\vec{P}_2) = -P_2 \cdot a = -100 \text{ H} \cdot 0,2 \text{ м} = -20 \text{ H} \cdot \text{м}$
P_3	$P_{3x} = 0$	$P_{3y} = 100 \text{ H}$	$M_A(\vec{P}_3) = P_3 \cdot a = 100 \text{ H} \cdot 0,2 \text{ м} = 20 \text{ H} \cdot \text{м}$
P_4	$P_{4x} = 100 \text{ H}$	$P_{4y} = 0$	$M_A(\vec{P}_4) = 0$

Проекції головного вектора системи:

$$F_{0x} = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} = 0 + 100 + 0 + 100 = 200 \text{ (H)};$$

$$F_{0y} = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y} = 100 + 0 + 100 + 0 = 200 \text{ (H)}.$$

Модуль головного вектора:

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2} = \sqrt{200^2 + 200^2} = 200\sqrt{2} \approx 283 \text{ (H)}.$$

Напрямок головного вектора знайдемо, визначивши напрямний косинус, по

формулі: $\cos \angle(\vec{F}_0, \vec{i}) = \frac{F_{0x}}{F_0} = \frac{200}{200\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, звідки $\angle(\vec{F}_0, \vec{i}) = 45^\circ$.

Так як всі сили, що входять в систему, лежать в одній площині, то модуль головного моменту даної системи сил буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів цих сил відносно центру зведення A :

$$M_0 = M_A(\vec{P}_1) + M_A(\vec{P}_2) + M_A(\vec{P}_3) + M_A(\vec{P}_4) = 0 - 20 + 20 + 0 = 0 \text{ (H} \cdot \text{м)}.$$

Оскільки головний вектор донної системи сил не рівний нулю ($F_0 \neq 0$), а головний момент — рівний ($M_0 = 0$), то дана система зводиться до однієї рівнодіючої $R = F_0 = 283 \text{ H}$ (п. 6.5-6.6 лекції), яка

направлена вздовж діагоналі AC квадрату $ABCD$.

Відповідь: $F_0 = R = 283 \text{ H}$,

$$\angle(\vec{F}_0, \vec{i}) = 45^\circ, M_0 = 0.$$

Приклад 6.2.

На куб зі стороною $a = 1 \text{ м}$ діє система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5)$, модулі яких однакові і рівні $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F = 100 \text{ H}$ (Рис. 6.9).

Звести цю систему до простішого вигляду.

Розв'язання:

Розглянемо систему координат $Axyz$, в якій вершина куба A взята за початок координат і центр зведення даної системи сил.

Визначимо координати точок прикладання сил:

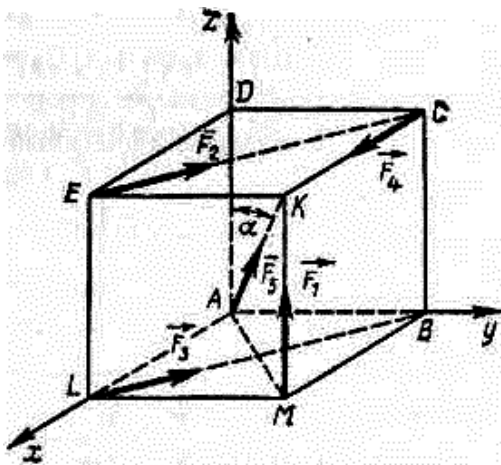


Рис. 6.9.

Дано:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F = 100 \text{ H},$$

$$F_4 = F_5 = F = 100 \text{ H},$$

$$a = 1 \text{ м}$$

$$F_0, M_0 \text{ — ?}$$

Точка прикладання сили	X	Y	Z
точка M прикладання сили \vec{F}_1	$x_1 = a$	$y_1 = a$	$z_1 = 0$
точка E прикладання сили \vec{F}_2	$x_2 = a$	$y_2 = 0$	$z_2 = a$
точка L прикладання сили \vec{F}_3	$x_3 = a$	$y_3 = 0$	$z_3 = 0$
точка C прикладання сили \vec{F}_4	$x_4 = 0$	$y_4 = a$	$z_4 = a$
точка A прикладання сили \vec{F}_5	$x_5 = 0$	$y_5 = 0$	$z_5 = 0$

Знайдемо проєкції сил системи на осі координат:

Сили	X	Y	Z
\vec{F}_1	$F_{1x} = 0$	$F_{1y} = 0$	$F_{1z} = F$
\vec{F}_2	$F_{2x} = -F \cdot \cos 45^\circ = -F \frac{\sqrt{2}}{2}$	$F_{2y} = F \cdot \sin 45^\circ = F \frac{\sqrt{2}}{2}$	$F_{2z} = 0$
\vec{F}_3	$F_{3x} = -F \cdot \cos 45^\circ = -F \frac{\sqrt{2}}{2}$	$F_{3y} = F \cdot \sin 45^\circ = F \frac{\sqrt{2}}{2}$	$F_{3z} = 0$
\vec{F}_4	$F_{4x} = F$	$F_{4y} = 0$	$F_{4z} = 0$
\vec{F}_5	$F_{5x} = F \cdot \sin \alpha \cdot \cos 45^\circ =$ $= F \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = F \frac{1}{\sqrt{3}}$	$F_{5y} = F \cdot \sin \alpha \cdot \sin 45^\circ =$ $= F \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = F \frac{1}{\sqrt{3}}$	$F_{5z} = F \cdot \cos \alpha =$ $= F \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{Тут } \sin \alpha = \frac{DK}{AK} = \frac{\sqrt{ED^2 + DC^2}}{\sqrt{AD^2 + DK^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AK} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Знайдемо проєкції головного вектора системи на координатні осі (вираз (6.3)):

$$F_{0x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} = 0 - F \frac{\sqrt{2}}{2} - F \frac{\sqrt{2}}{2} + F + F \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= F \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2} \right) \approx 100 \cdot (1 + 0,577 - 1,414) \approx 16 \text{ (H)}.$$

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} = 0 + F \frac{\sqrt{2}}{2} + F \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + F \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= F \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 100 \cdot (1,414 + 0,577) \approx 199 \text{ (H)}.$$

$$F_{0z} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} + F_{5z} = F + 0 + 0 + 0 + F \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= F \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 100 \cdot (1 + 0,577) \approx 158 \text{ (H)}.$$

Модуль головного вектора:

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2} = \sqrt{16^2 + 199^2 + 158^2} = \sqrt{64821} \approx 256 (H).$$

Напряг головного вектора знайдемо, визначивши напрямні косинуси (6.5):

$$\cos \angle \left(\vec{F}_0, \vec{i} \right) = \frac{F_{0x}}{F_0} = \frac{16}{256} \approx 0,063, \text{ звідки } \angle \left(\vec{F}_0, \vec{i} \right) = \arccos 0,063 \approx 86^\circ.$$

$$\cos \angle \left(\vec{F}_0, \vec{j} \right) = \frac{F_{0y}}{F_0} = \frac{199}{256} \approx 0,777, \text{ звідки } \angle \left(\vec{F}_0, \vec{j} \right) = \arccos 0,777 \approx 39^\circ.$$

$$\cos \angle \left(\vec{F}_0, \vec{k} \right) = \frac{F_{0z}}{F_0} = \frac{158}{256} \approx 0,617, \text{ звідки } \angle \left(\vec{F}_0, \vec{k} \right) = \arccos 0,617 \approx 52^\circ.$$

Знайдемо проекції головного моменту сил даної системи на осі координат:

$$\begin{aligned} M_{0x} &= M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + M_x(\vec{F}_3) + M_x(\vec{F}_4) + M_x(\vec{F}_5) = \\ &= (y_1 \cdot F_{1z} - z_1 \cdot F_{1y}) + (y_2 \cdot F_{2z} - z_2 \cdot F_{2y}) + (y_3 \cdot F_{3z} - z_3 \cdot F_{3y}) + (y_4 \cdot F_{4z} - z_4 \cdot F_{4y}) + \\ &+ (y_5 \cdot F_{5z} - z_5 \cdot F_{5y}) = (a \cdot F - 0 \cdot 0) + \left(0 \cdot 0 - a \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(0 \cdot 0 - 0 \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (a \cdot 0 - a \cdot 0) + \\ &+ \left(0 \cdot F \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 \cdot F \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = a \cdot F - a \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot 100 \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \approx 29 (H \cdot m). \\ M_{0y} &= M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + M_y(\vec{F}_3) + M_y(\vec{F}_4) + M_y(\vec{F}_5) = \\ &= (z_1 \cdot F_{1x} - x_1 \cdot F_{1z}) + (z_2 \cdot F_{2x} - x_2 \cdot F_{2z}) + (z_3 \cdot F_{3x} - x_3 \cdot F_{3z}) + (z_4 \cdot F_{4x} - x_4 \cdot F_{4z}) + \\ &+ (z_5 \cdot F_{5x} - x_5 \cdot F_{5z}) = (0 \cdot 0 - a \cdot F) + \left(a \cdot \left(-F \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - a \cdot 0 \right) + \left(0 \cdot \left(-F \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - a \cdot 0 \right) + \\ &+ (a \cdot F - 0 \cdot 0) + \left(0 \cdot F \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 \cdot F \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -a \cdot F - a \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} + a \cdot F = -1 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -71 (H \cdot m). \\ M_{0z} &= M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + M_z(\vec{F}_3) + M_z(\vec{F}_4) + M_z(\vec{F}_5) = \\ &= (x_1 \cdot F_{1y} - y_1 \cdot F_{1x}) + (x_2 \cdot F_{2y} - y_2 \cdot F_{2x}) + (x_3 \cdot F_{3y} - y_3 \cdot F_{3x}) + (x_4 \cdot F_{4y} - y_4 \cdot F_{4x}) + \\ &+ (x_5 \cdot F_{5y} - y_5 \cdot F_{5x}) = (a \cdot 0 - a \cdot 0) + \left(a \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \left(-F \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) + \\ &+ \left(a \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \left(-F \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) + (0 \cdot 0 - a \cdot F) + \left(0 \cdot F \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 \cdot F \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \\ &= a \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} + a \cdot F \frac{\sqrt{2}}{2} - a \cdot F = 1 \cdot 100 \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 41 (H \cdot m). \end{aligned}$$

Модуль головного моменту:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = \sqrt{29^2 + (-71)^2 + 41^2} = \sqrt{7563} \approx 87 (H \cdot m)$$

Напряг головного моменту знайдемо, визначивши напрямні косинуси (6.6):

$$\cos \angle(\vec{M}_0, \vec{i}) = \frac{M_{0x}}{M_0} = \frac{29}{87} \approx 0,33(3) \text{ звідки } \angle(\vec{M}_0, \vec{i}) = \arccos 0,33(3) \approx 71^\circ;$$

$$\cos \angle(\vec{M}_0, \vec{j}) = \frac{M_{0y}}{M_0} = \frac{-71}{87} \approx -0,816, \quad \angle(\vec{M}_0, \vec{j}) = 180^\circ - \arccos 0,816 \approx 145^\circ;$$

$$\cos \angle(\vec{M}_0, \vec{k}) = \frac{M_{0z}}{M_0} = \frac{41}{87} \approx 0,471 \text{ звідки } \angle(\vec{M}_0, \vec{k}) = \arccos 0,471 \approx 62^\circ.$$

Таким чином, головний вектор і головний момент даної системи виявились відмінними від нуля ($F_0 \neq 0, M_0 \neq 0$). Знайдемо скалярний добуток головного вектора і головного моменту даної системи (другий статичний інваріант — вираз (6.13)):

$$I_2 = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z} = 16 \cdot 29 + 199 \cdot (-71) + 158 \cdot 41 = -7187 (H^2 \cdot m).$$

Звідси видно, що головний вектор і головний момент даної системи не перпендикулярні один до одного, а значить систему сил можна звести до динамічного гвинта. Рівняння осі динамічного гвинта:

$$\frac{M_{0x} - (y \cdot F_{0z} - z \cdot F_{0y})}{F_{0x}} = \frac{M_{0y} - (z \cdot F_{0x} - x \cdot F_{0z})}{F_{0y}} = \frac{M_{0z} - (x \cdot F_{0y} - y \cdot F_{0x})}{F_{0z}} = p,$$

де $p = \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0}{F_0^2} = \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2}$ — параметр динамічного гвинта.

Отже для даної системи сил рівняння осі динамічного гвинта:

$$\frac{29 - 158 \cdot y + 199 \cdot z}{16} = \frac{-71 - 16 \cdot z + 158 \cdot x}{199} = \frac{41 - 199 \cdot x + 16 \cdot y}{158} = p,$$

при параметрі динамічного гвинта

$$p = \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0}{F_0^2} = \frac{-7187}{256^2} = -\frac{7187}{65536} \approx -0,1 (m).$$

Приклад 6.3.

На мостову ферму (рис. 6.10) діють вертикальні сили $P_1 = 200 \text{ кН}$ і $P_2 = 400 \text{ кН}$ відповідно на відстані $a = 10 \text{ м}$ і $b = 40 \text{ м}$ від лівого кінця A ферми, та горизонтальна сила $P_3 = 300 \text{ кН}$ на рівні верхнього поясу CD . Висота ферми $AC = 6 \text{ м}$, а її довжина $AB = 50 \text{ м}$. Визначте рівнодіючу плоскої системи сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)$.

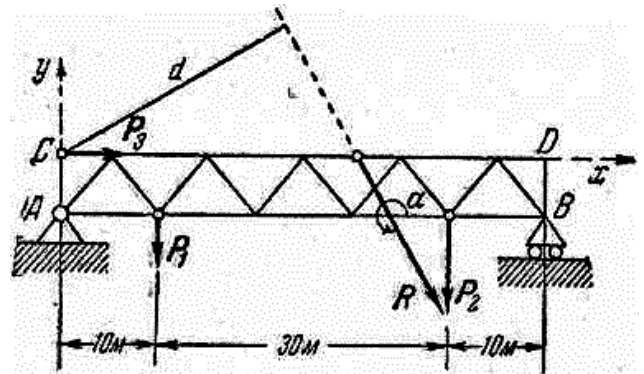


Рис. 6.10.

Дано:

$$P_1 = 200 \text{ кН}, \quad P_2 = 400 \text{ кН},$$

$$P_3 = 300 \text{ кН},$$

$$a = 10 \text{ м}, \quad b = 40 \text{ м},$$

$$AC = 6 \text{ м}, \quad AB = 50 \text{ м}$$

$$F_0, M_0 \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Прийнявши точку C за центр зведення, зведемо до неї дану систему сил. Для обрахунку головного вектора і головного моменту проведемо координатні осі x і y (так, як це показано на рис. 6.10.), та спроектуємо всі сили на ці осі й визначимо моменти сил відносно прийнятого центру зведення C :

Сила	Проекції на осі		Момент сили відносно точки С
	x	y	
P_1	$P_{1x} = 0$	$P_{1y} = -P_1$	$M_C(\vec{P}_1) = -P_1 \cdot a$
P_2	$P_{2x} = 0$	$P_{2y} = -P_2$	$M_C(\vec{P}_2) = -P_2 \cdot b$
P_3	$P_{3x} = P_3$	$P_{3y} = 0$	$M_C(\vec{P}_3) = -P_3 \cdot 0 = 0$

Проекції головного вектора системи:

$$F_{0x} = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} = 0 + 0 + P_3 = 300 \text{ (кН)};$$

$$F_{0y} = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} = -P_1 - P_2 + 0 = -600 \text{ (кН)}.$$

Модуль головного вектора:

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2} = \sqrt{300^2 + (-600)^2} = 300\sqrt{5} \approx 671 \text{ (кН)}.$$

Напрямок головного вектора знайдемо, визначивши напрямні косинуси, по формулі:

$$\text{а) } \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{i}) = \frac{F_{0x}}{F_0} = \frac{300}{300\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447, \text{ звідки}$$

$$\angle(\vec{F}_0, \vec{i}) = 360^\circ - \arccos 0,447 \approx 360^\circ - 64^\circ = 296^\circ.$$

$$\text{б) } \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{j}) = \frac{F_{0y}}{F_0} = \frac{-600}{300\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \approx -0,894, \text{ звідки}$$

$$\angle(\vec{F}_0, \vec{j}) = 180^\circ + \arccos 0,894 \approx 206^\circ.$$

Оскільки всі сили, що входять в систему, лежать в одній площині (плоска система сил), то модуль головного моменту даної системи сил буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів цих сил відносно центру зведення С:

$$M_0 = M_C(\vec{P}_1) + M_C(\vec{P}_2) + M_C(\vec{P}_3) = -P_1 \cdot a - P_2 \cdot b + 0 = -200 \cdot 10 - 400 \cdot 40 = -18000 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Так як головний вектор і головний момент не рівні нулю ($F_0 \neq 0, M_0 \neq 0$), то дана плоска система сил зводиться до рівнодіючої (**теорема 6.2**), яка рівна за модулем і напрямком головному вектору $\vec{R} = \vec{F}_0$, при цьому

$$\angle(\vec{R}, \vec{i}) = \angle(\vec{F}_0, \vec{i}) = \alpha, \quad \cos \alpha = \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{i}) = 0,447, \quad \sin \alpha = \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{j}) = -0,894.$$

Оскільки $\cos \alpha$ додатний, а $\sin \alpha$ від'ємний, то кут α належить четвертій чверті і дорівнює 296° .

Лінія дії рівнодіючої проходить від центру зведення на відстані $d = \frac{|M_0|}{R} = \frac{18000}{671} \approx 27 \text{ (м)}$. Знак „-“ головного моменту показує, що ця відстань d (довжина перпендикуляра, опущеного із центра зведення на лінію дії рівнодіючої) повинна бути відкладена вправо від центру зведення (як показано на рис. 6.10). Знаючи відстань d і кут $\alpha = \angle(\vec{F}_0, \vec{i})$, неважко знайти і точки перетину лінії дії рівнодіючої з верхніми і нижніми поясами ферми:

$$CC_1 = \frac{d}{\sin(360^\circ - 296^\circ)} = \frac{d}{\sin 64^\circ} = \frac{27}{0,899} \approx 30 \text{ (м)},$$

$$AA_1 = CC_1 + \frac{AC}{\text{tg}(360^\circ - 296^\circ)} = CC_1 + \frac{AC}{\text{tg} 64^\circ} = 30 + \frac{6}{2,05} \approx 33 \text{ (м)}.$$

Знайдемо лінію дії рівнодіючої. Момент рівнодіючої відносно початку координат A визначиться по формулі $M_C(\vec{R}) = x \cdot R_y - y \cdot R_x$, де x і y – координати точки, що лежить на лінії дії рівнодіючої. Так як $R_x = F_{0x} = 300 \text{ кН}$ і $R_y = F_{0y} = -600 \text{ кН}$, то $M_C(\vec{R}) = -600 \cdot x - 300 \cdot y$.

З іншого боку, по теоремі Варіньона в загальному вигляді (*теорема 6.3*), момент рівнодіючої даної системи сил відносно центру зведення C буде рівний алгебраїчній сумі моментів сил відносно тієї самої точки, а значить рівний головному моменту системи: $M_C(\vec{R}) = M_0 = -18000 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Отже,
 $-600 \cdot x - 300 \cdot y = -18000 \text{ кН} \cdot \text{м}$, або $2 \cdot x + y = 60$.

Це і є рівняння лінії дії рівнодіючої.

Відповідь: $\vec{R} = \vec{F}_0$, $R = F_0 = 671 \text{ кН}$, $\angle(\vec{R}, \vec{i}) = \angle(\vec{F}_0, \vec{i}) = \alpha = 206^\circ$, $d = \frac{|M_0|}{R} = 27 \text{ м}$.

Приклад 6.4.

По трьох ребрах прямокутного паралелепіпеда діють три однакові за модулем сили $F_1 = F_2 = F_3 = F$ (рис. 6.11). Довжина ребер a , b , c . Яке співвідношення має бути між довжинами ребер для того, щоб система сил зводилась до рівнодійної?

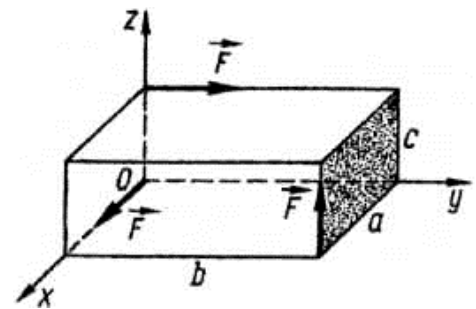


Рис. 6.11.

Розв'язання:

Розглянемо систему координат $Oxyz$, в якій вершина прямокутного паралелепіпеда O взята за початок координат і центр зведення даної системи сил.

Складемо таблицю, в яку занесемо проекції всіх сил на осі координат та моменти цих сил відносно осей координат:

	\vec{F}_1	\vec{F}_2	\vec{F}_3
X	$F_{1x} = F$	$F_{2x} = 0$	$F_{3x} = 0$
Y	$F_{1y} = 0$	$F_{2y} = F$	$F_{3y} = 0$
Z	$F_{1z} = 0$	$F_{2z} = 0$	$F_{3z} = F$
M_x	$M_x(\vec{F}_1) = 0$	$M_x(\vec{F}_2) = -F \cdot c$	$M_x(\vec{F}_3) = F \cdot b$
M_y	$M_y(\vec{F}_1) = 0$	$M_y(\vec{F}_2) = 0$	$M_y(\vec{F}_3) = -F \cdot a$
M_z	$M_z(\vec{F}_1) = 0$	$M_z(\vec{F}_2) = 0$	$M_z(\vec{F}_3) = 0$

Знайдемо проекції головного вектора системи на координатні осі:

$$F_{0x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F + 0 + 0 = F,$$

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 + F + 0 = F,$$

$$F_{0z} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0 + 0 + F = F.$$

Модуль головного вектора:

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2} = \sqrt{F^2 + F^2 + F^2} = F\sqrt{3}.$$

Знайдемо проекції головного моменту сил даної системи на осі координат:

$$M_{0x} = M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + M_x(\vec{F}_3) = 0 - F \cdot c + F \cdot b = -F \cdot c + F \cdot b,$$

$$M_{0y} = M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + M_y(\vec{F}_3) = 0 + 0 - F \cdot a = -F \cdot a,$$

$$M_{0z} = M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + M_z(\vec{F}_3) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Модуль головного моменту:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = \sqrt{(-F \cdot c + F \cdot b)^2 + (-F \cdot a)^2 + 0^2} = F \cdot \sqrt{(b-c)^2 + a^2}.$$

Для того, щоб дана система сил зводилась до рівнодійної, необхідно виконання однієї з таких умов (п. 6.5 лекції):

1) $\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = 0$ при $F_0 \neq 0, M_0 \neq 0, F_0 \perp M_0$;

2) $\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = 0$ при $F_0 \neq 0$ і $M_0 = 0$.

У першому випадку головний момент \vec{M}_0 перпендикулярний до головного вектора \vec{F}_0 і, отже, кут між ними $\angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0) = 0$. В той же час, другий статичний інваріант даної системи сил визначається як:

$$I_2 = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0 = F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z} = F_0 \cdot M_0 \cdot \cos \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0).$$

Отже,

$$\cos \angle(\vec{F}_0, \vec{M}_0) = \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_0 \cdot M_0} = \frac{F \cdot (-F \cdot c + F \cdot b) + F \cdot (-F \cdot a) + F \cdot 0}{F \cdot \sqrt{3} \cdot F \cdot \sqrt{(b-c)^2 + a^2}} =$$

$$= \frac{F^2 \cdot (b-c) - F^2 \cdot a}{F^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{(b-c)^2 + a^2}} = \frac{b-c-a}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(b-c)^2 + a^2}} = 0,$$

або $\frac{b-c-a}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(b-c)^2 + a^2}} = 0$. Цей вираз рівний нулю лише тоді, коли $b-c-a=0$,

звідки дістаємо шукану умову $a = b - c$.

У другому випадку: $M_0 = F \cdot \sqrt{(b-c)^2 + a^2} = 0, \Rightarrow (b-c)^2 + a^2 = 0$, тоді $a=0, b=c$ або $a=b=c=0$, що відповідає виродженню паралелепіпеда у квадрат або точку. **Відповідь:** 1). $a = b - c$; 2). $a = 0, b = c$ або $a = b = c = 0$.

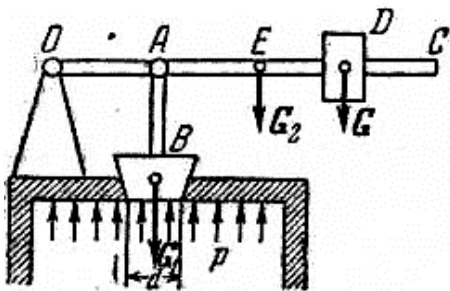


Рис. 6.12.

Приклад 6.5.

Запобіжний клапан парового котла (рис. 6.12) діаметром $d = 65$ мм і вагою $G_1 = 80$ Н з'єднаний стрижнем AB з важелем OC довжиною $OC = 60$ см і вагою $G_2 = 24$ Н, що обертається на шарнірі O , причому $OA = 8$ см. В якій точці D важеля OC повинен бути підвішений вантаж вагою $G = 250$ Н для того, щоб клапан відкривався при

тиску в котлі $p = 5$ атмосфер = $0,5$ МПа.

Розв'язання:

До важеля OC прикладені паралельні сили: в точці A тиск пара P і вага клапана G_1 , що направлені по одній прямій в протилежні боки; в точці E (в середині важеля) вага важеля G_2 і в деякій точці D вага вантажу G . При цьому сила тиску

$$\text{пари на клапан } P = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot p = \frac{3,14 \cdot 0,065^2}{4} \cdot 500000 \approx 1658 \text{ (Н)}.$$

Умова рівноваги важеля **OC**:

$$\sum_{i=1}^4 M_O(\vec{P}_i) = M_O(\vec{P}) + M_O(\vec{G}_1) + M_O(\vec{G}_2) + M_O(\vec{G}) = P \cdot OA - G_1 \cdot OA - G_2 \cdot OE - G \cdot OD = 0$$

Звідси маємо

$$OD = \frac{P \cdot OA - G_1 \cdot OA - G_2 \cdot OE}{G} = \frac{1658 \cdot 0,08 - 80 \cdot 0,08 - 24 \cdot 0,3}{250} \approx 0,48 \text{ (м)}$$

Відповідь: $OD = 0,48 \text{ м}$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається головним вектором \vec{F}_0 системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$?
2. Що називається головним моментом \vec{M}_0 системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ відносно центра зведення O ?
3. Запишіть та поясніть аналітичні вирази для проекцій головного вектора довільної просторової системи сил.
4. Запишіть та поясніть аналітичні вирази для проекцій головного моменту довільної просторової системи сил.
5. Якими виразами задаються модуль і напрямні косинуси головного вектора довільної просторової системи сил?
6. Якими виразами задаються модуль і напрямні косинуси головного моменту довільної просторової системи сил?
7. Сформулюйте та доведіть теорему 6.1 (основну теорему статички Пуансо).
8. Поясніть, які системи сил є статично еквівалентними?
9. Як змінюються головний вектор і момент при зміні центра зведення?
10. Поясніть, чому при перенесенні центра зведення вздовж лінії дії головного вектора, головний момент змінюватись не буде?
11. Що називається першим статичним інваріантом I_1 ?
12. Що називається другим статичним інваріантом I_2 ?
13. До чого зводиться просторова система сил, якщо її $\vec{F}_0 = 0$ а $\vec{M}_0 \neq 0$?
14. До чого зводиться просторова система сил, якщо її $\vec{F}_0 \neq 0$ а $\vec{M}_0 = 0$?
15. До чого зводиться довільна система сил, якщо $\vec{F}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, $\vec{F}_0 \perp \vec{M}_0$?
16. До чого зводиться довільна система сил, якщо $\vec{F}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, $\vec{F}_0 \parallel \vec{M}_0$?
17. Запишіть рівняння осі динамічного гвинта.
18. Що називається параметром динамічного гвинта (динами)?
19. Поясніть, до чого зводиться плоска система сил?
20. Запишіть формули для аналітичного визначення головного вектора плоскої системи сил?
21. Доведіть теорему 6.2 (про рівнодійну плоскої системи сил).
22. До чого зводиться плоска система сил, якщо $\vec{F}_0 \neq 0$, $M_{0z} \neq 0$?
23. До чого зводиться плоска система сил, якщо $\vec{F}_0 \neq 0$, $M_{0z} = 0$?
24. До чого зводиться плоска система сил, якщо $\vec{F}_0 = 0$, $M_{0z} \neq 0$?
25. До чого зводиться плоска система сил, якщо $\vec{F}_0 = 0$, $M_{0z} = 0$?
26. Сформулюйте та доведіть теорему 6.3 (теорему Варіньона в загальному вигляді).
27. Сформулюйте та доведіть теорему 6.4 (теорему О.І. Сомова).

Лекція № 7

Тема: «Рівновага довільної просторової системи сил»

ПЛАН

- 7.1. Умови рівноваги довільної просторової системи сил.
- 7.2. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил.
- 7.3. Умови рівноваги довільної системи сил на площині.
- 7.4. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил.
- 7.5. Умови рівноваги системи пар сил.
- 7.6. Загальні умови розв'язування задач статки на рівновагу довільної просторової системи сил.

7.1. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Нехай задана довільна просторова система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, прикладених до твердого тіла. Доведемо теорему.

Теорема 7.1: *для того, щоб довільна просторова система сил перебувала у рівновазі (була еквівалентна нулю), необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно довільного центра зведення дорівнювали нулю:*

$$\begin{aligned}\vec{F}_0 &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \\ \vec{M}_0 &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Доведення:

Необхідність. Нехай, задана системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ перебуває у рівновазі. Доведемо, що тоді виконується умова (7.1). Дійсно, на основі **теорему 6.4** задану систему сил перетворимо в еквівалентну їй систему, що складається з двох сил (\vec{Q}, \vec{P}_1) . Оскільки, вихідна система сил перебуває у рівновазі, то повинна перебувати в рівновазі і система сил (\vec{Q}, \vec{P}_1) . На основі аксіоми про рівновагу двох сил це можливо в тому випадку, коли сили \vec{Q} і \vec{P}_1 рівні за модулем, протилежно направлені і мають спільну лінію дії. Але, для такої системи сил, головний вектор і головний момент відносно будь-якого центра зведення дорівнюють нулю.

Достатність. Нехай, виконується умова (7.1) заданої системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Доведемо, що при цьому система сил еквівалентна нулю. Перетворимо систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ на основі **теорему 6.4** в систему, що складається з двох сил \vec{Q} і \vec{P} . Для таких сил умови (7.1) мають вигляд $\vec{F}_0 = \vec{Q} + \vec{P} = 0$; $\vec{M}_0 = \vec{M}_O(\vec{Q}) + \vec{M}_O(\vec{P}) = 0$. \vec{Q} і \vec{P} рівні за модулем і протилежні за напрямом. Виконання другої умови вказує на те, що ці сили мають спільну лінію дії (момент пари сил (\vec{Q}, \vec{P}) дорівнює нулю). Тоді, з **Аксіоми I** випливає, що задана система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ еквівалентна нулю. Теорема доведена.

Умови (7.1) називаються **умовами рівноваги довільної системи сил у векторній формі**. В проекціях на координатній осі умови (7.1) приймають вигляд наступних скалярних співвідношень:

$$F_{0x} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$F_{0z} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0;$$

$$M_{0x} = M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + \dots + M_x(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad (7.2)$$

$$M_{0y} = M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + \dots + M_y(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0;$$

$$M_{0z} = M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + \dots + M_z(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0.$$

де F_{0x} , F_{0y} , F_{0z} і M_{0x} , M_{0y} , M_{0z} — проекції головного вектора \vec{F}_0 і головного моменту \vec{M}_0 на осі координат; F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} — проекції сили \vec{F}_i на осі координат; $M_x(\vec{F}_i) = y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}$, $M_y(\vec{F}_i) = z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}$, $M_z(\vec{F}_i) = x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}$ — моменти сили \vec{F}_i відносно координатних осей; x_i , y_i , z_i — проекції радіус-вектора \vec{r}_i на координатні осі (координати точки A_i прикладання сили \vec{F}_i).

Рівняння (7.2) називаються умовами рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі. Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на координатні осі і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно координатних осей дорівнювали нулю.

7.2. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Нехай всі сили системи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що діє на тверде тіло, паралельні між собою (рис. 7.1) Направимо вісь z паралельно лініям дії цих сил. Тоді проекції сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ на координатні осі Ox і Oy будуть дорівнювати нулю ($F_{ix} = 0$; $F_{iy} = 0$). Отже, перші дві умови рівноваги рівнянь (7.2) являють собою тотожність:

$$F_{0x} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0;$$

$$F_{0y} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Крім того, тотожністю є і останнє рівняння рівноваги

у (7.2), так як всі сили паралельні осі Oz : $M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$.

Внаслідок цього з шести рівнянь (7.2) залишаються тільки наступні три:

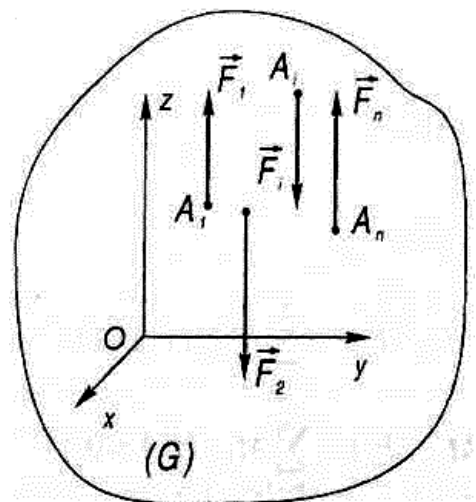


Рис. 7.1.

$$F_{0z} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0;$$

$$M_{0x} = M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + \dots + M_x(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0;$$

$$M_{0y} = M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + \dots + M_y(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0.$$

Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на вісь, паралельну лініям дії заданих сил дорівнювала нулю і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

7.3. Умови рівноваги довільної системи сил на площині

Нехай система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що діє на тверде тіло, розміщена в одній площині Oxy (рис. 7.2). Покажемо, що для такої системи сил умови рівноваги можна виразити в трьох випадках.

I. Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на координатні осі, що лежать в площині дії цих сил, дорівнювали нулю та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювала нулю.

В цьому випадку з шести рівнянь (7.2) залишаються тільки наступні три:

$$F_{0x} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$M_{0z} = M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + \dots + M_z(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0.$$

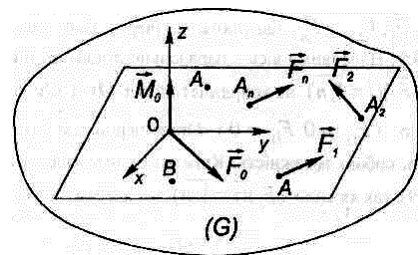


Рис. 7.2.

Інші рівняння являють собою тотожність:

$$F_{0z} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0;$$

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0;$$

$$M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

II. Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю.

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + \dots + M_B(\vec{F}_n) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) + \dots + M_C(\vec{F}_n) = 0.$$

де A, B, C — довільні точки, що не лежать на одній прямій і приймаються за центри моментів. **Необхідність** цих умов очевидна, оскільки при рівновазі сума моментів сил системи відносно будь-якого центра зведення дорівнює нулю. Доведемо **достатність** умов (7.5). Дійсно, якби при одночасному виконанні цих умов, дана система сил не перебувала в рівновазі, то вона повинна зводитись до рівнодійної, що одночасно проходить через точки A, B, C . Однак це неможливо, оскільки вказані точки не лежать на одній прямій. Таким чином, при виконанні умов (7.5), має місце рівновага.

III. Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно двох будь-яких точок, що лежать в цій площині, а також алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на вісь U , що не перпендикулярна до прямої, яка проходить через ці дві вибрані точки:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) &= M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) &= M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + \dots + M_B(\vec{F}_n) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iU} &= F_{1U} + F_{2U} + \dots + F_{nU} = 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Необхідність цих умов випливає з того, що при рівновазі плоскої системи сил, алгебраїчна сума моментів всіх сил, відносно будь-якого центра зведення і алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на будь-який напрямок дорівнюють нулю.

Доведемо **достатність** умов (7.6). Міркуючи, як і в попередньому випадку, приходимо до висновку, що коли виконується тільки дві перші умови, то система повинна або перебувати в рівновазі, або зводитись до рівнодійної, що проходить одночасно через точки A і B , тобто направленої вздовж прямої AB .

Але за третьою умовою $\sum_{i=1}^n F_{iU} = 0$, де вісь Ou не перпендикулярна до прямої AB , і ця умова може бути виконана тільки тоді, коли рівнодійна дорівнює нулю, тобто коли має місце рівновага.

7.4. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на вісь, що лежить в площині дії цих сил і паралельна їм, дорівнювала нулю та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювала нулю.

Нехай вісь Oy паралельна силам системи (рис. 7.3). Тоді з умов (7.4) маємо:

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad (7.7)$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0.$$

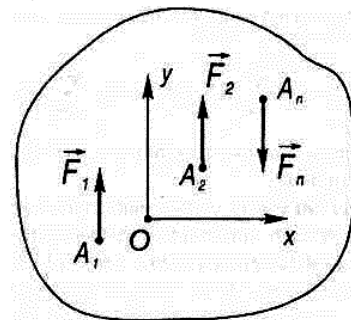


Рис. 7.3.

Крім того, у відповідності з (7.6), можна стверджувати, що **для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно двох будь-яких точок, які лежать в цій площині** (при умові, що пряма AB не паралельна осі Oy):

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + \dots + M_B(\vec{F}_n) = 0 \quad (7.8)$$

7.5. Умови рівноваги системи пар сил

Для рівноваги системи пар сил $\{(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)\}$ (або $\{(\vec{F}_i, \vec{F}'_i)\}$ де $(i = 1, 2, \dots, n)$), яка діє на абсолютно тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб векторна сума моментів складових пар дорівнювала нулю, або, що еквівалентно, щоб результуюча пара (\vec{R}, \vec{R}') була виродженою:

$$\vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}'_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}'_i) = 0. \quad (7.9)$$

В проєкціях на осі координат вираз (7.9) дає аналітичними умовами рівноваги системи пар сил, що формулюються наступним чином: для рівноваги просторової системи пар сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій моментів пар сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю:

$$M_x(\vec{R}, \vec{R}') = M_x(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + M_x(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) + \dots + M_x(\vec{F}_n, \vec{F}'_n) = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i, \vec{F}'_i) = 0;$$

$$M_y(\vec{R}, \vec{R}') = M_y(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + M_y(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) + \dots + M_y(\vec{F}_n, \vec{F}'_n) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i, \vec{F}'_i) = 0; \quad (7.10)$$

$$M_z(\vec{R}, \vec{R}') = M_z(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + M_z(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) + \dots + M_z(\vec{F}_n, \vec{F}'_n) = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i, \vec{F}'_i) = 0.$$

Якщо всі пари лежать в одній площині, то всі моменти пар перпендикулярні цій площині, тому рівняння (7.10) достатньо спроектувати тільки на одну вісь — вісь, перпендикулярну площині пар. Нехай це буде вісь z , тоді з рівнянь

$$(7.10) \text{ одержимо: } \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i, \vec{F}'_i) = M_z(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + M_z(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) + \dots + M_z(\vec{F}_n, \vec{F}'_n) = 0, \quad (7.11)$$

Отже, для рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині (або в паралельних площинах), необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій моментів цих пар сил на вісь, яка перпендикулярна даній площині (площинам), дорівнювали нулю.

7.6. Загальні умови розв'язування задач статки на рівновагу довільної просторової системи сил

Серед величезного різноманіття практичних задач на рівновагу абсолютно твердого тіла, виділяють два основних їх типи:

- 1) задачі на рівновагу тіла, що завдяки в'язям, які обмежують всі шість можливих переміщень, знаходиться в стані спокою, незалежно від впливу системи активних сил. В цьому випадку, використовуючи рівняння рівноваги, визначають реакції в'язей;
- 2) задачі пов'язані з обрахунком умов рівноваги системи сил, що прикладені до вільного тіла або невольного тіла, яке все ж таки має можливість переміщуватись. В цих задачах виявляють умови, які повинні бути накладені на активну систему сил, та знаходять реакції в'язей, якщо вони є.

В загальному випадку число невідомих (реакцій і параметрів активної системи сил) повинно бути не більше шести, тому що взагалі можна скласти лише шість незалежних рівнянь рівноваги. При розгляді умов рівноваги різних систем сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, ми одержували ту чи іншу кількість рівнянь рівноваги. Так, наприклад, для плоскої системи збіжних сил ми маємо два рівняння рівноваги, для просторової системи збіжних сил — три рівняння рівноваги. Просторова система довільно розміщених сил має шість рівнянь рівноваги. Коли ми розглядаємо невідільне тіло, то на основі принципу звільнення твердих тіл від в'язей замінюємо дію в'язей силами реакцій в'язей. Якщо кількість невідомих реакцій буде більша, ніж рівнянь рівноваги, то це означає, що методами статички ми задачу розв'язати не можемо. Задача, в якій кількість невідомих реакцій в'язей не перевищує відповідних рівнянь рівноваги, називається задачею статично визначеною (рис. 7.4, а). Статично невизначеною задачею будемо називати задачу, в якій кількість невідомих реакцій більша кількості рівнянь рівноваги (рис. 7.4, б).

Розглянемо тепер питання рівноваги системи тіл.

При розв'язуванні задач рівноваги систем тіл, кількість невідомих може виявитись більшою ніж рівнянь рівноваги, як, наприклад, у випадку, показано-му на рис 7.5. Тут два тіла M і N мають опори у вигляді нерухомих шарнірів A і B , а між собою з'єднані шарніром C . Якщо розглядати цю систему тіл як одне тверде тіло, то при наявності трьох рівнянь рівноваги ми будемо мати чотири невідомі ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$). Але в дійсності ця задача статично визначена. Ми маємо справу з рівновагою двох тіл M і N , з'єднаних між собою шарніром C , тому слід розглянути рівновагу кожного тіла окремо. Таким чином, рівнянь рівноваги буде шість, по три рівняння для кожного тіла. Дія тіла N на тіло M , що передається через ідеальний шарнір, також може бути замінена протилежною силою (*Аксиома IV*). Розглянемо рівновагу кожного тіла окремо.

На рис. 7.6 вказані сили, прикладені до тіл M і N , причому сили \vec{X}_C і \vec{Y}_C являють собою складові сили, що замінюють дію тіла N на M , а \vec{X}'_C і \vec{Y}'_C — складові сили, що замінюють дію тіла M на тіло N . Для кожного тіла ми можемо скласти по три рівняння рівноваги, тобто всього шість рівнянь. Невідомих буде також шість, оскільки згідно *аксіоми IV*, $\vec{X}_C = -\vec{X}'_C$; $\vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C$.

Такий шлях розв'язання задачі не єдиний. Можна скласти три рівняння рівноваги для тіла M і три для системи тіл M і N , приймаючи їх за одне тверде тіло, або скласти рівняння для тіла N і системи тіл M і N . Якщо тіл буде не два, а більше, наприклад n , то очевидно рівнянь рівноваги в цьому випадку буде $3n$.

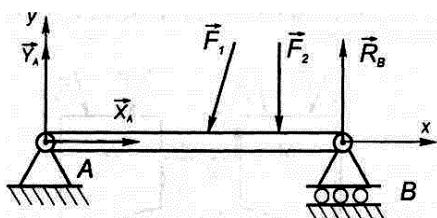


Рис. 7.4. а.

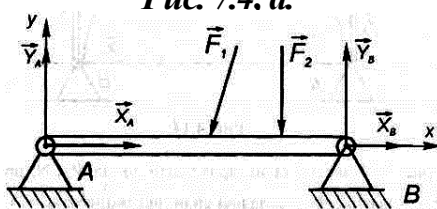


Рис. 7.4. б.

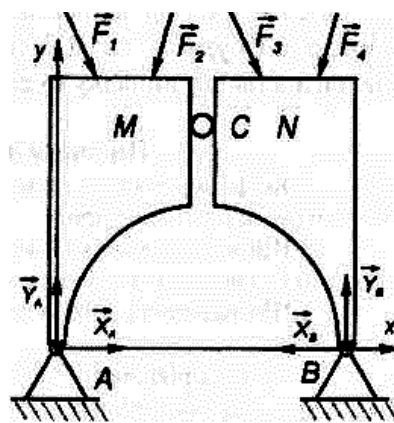


Рис. 7.5.

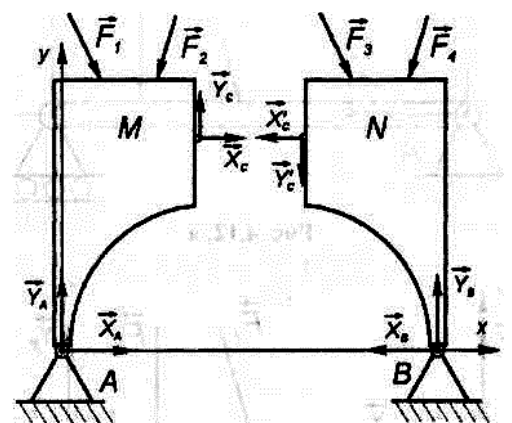


Рис. 7.6.

При розв'язанні задач на рівновагу довільної просторової системи сил слід дотримуватися наступної послідовності дій:

- 1) прочитавши умову задачі та виписавши вихідні дані, слід визначити об'єкт дослідження, тобто те тіло (точку), рівновагу якого слід розглянути в даній задачі;
- 2) зобразити (розставити) у вигляді векторів усі діючі на дане тіло (і тільки на дане тіло) активні сили і реакції в'язей. При визначенні напрямку реакцій в'язей і зображенні цих сил на малюнку слід дотримуватись вимог, що наведені в п. 2.2 лекції № 2. Розподілені навантаження слід замінити зосередженими силами (див. п. 2.3 лекції № 2);
- 3) звільнити від в'язей вибране тіло і замінити їх дію реакціями в'язей. Звільнене від в'язей тіло з прикладеною до нього системою активних сил і реакцій слід зображати окремо;
- 4) розглянути рівновагу даного твердого тіла як вільного з урахуванням активних сил і реакцій в'язей;
- 5) визначити тип системи сил, що діють на отримане вільне тіло;
- 6) вибрати систему осей декартових координат. При виборі системи координат, слід одну з координатних осей направляти перпендикулярно до лінії дії однієї або, якщо можливо, двох невідомих сил, оскільки, в такому випадку, їх проекції на дану вісь будуть рівні нулю;
- 7) скласти таблицю, в яку занести проекції всіх сил системи на осі координат та моменти цих сил відносно осей координат;
- 8) додати елементи кожного рядка даної таблиці та прирівнявши суму відповідного рядка до нуля, одержати рівняння рівноваги системи сил;
- 9) розв'язати складені рівняння рівноваги тіла відносно невідомих величин. Розв'язок рівнянь рівноваги слід, як правило, проводити до кінця в загальному вигляді. Тоді для шуканих величин будуть одержуватись формули, що дозволяють проаналізувати отримані результати. Числові значення знайдених величин підставляються тільки в кінцеві формули;
- 10) перевірити визначені невідомі реакції в'язей шляхом підстановки в рівняння рівноваги.

При складанні рівнянь рівноваги, в які входять моменти сил відносно точок, слід вибирати ці точки так, щоб через них проходили лінії дії однієї або декількох невідомих сил. При складанні рівнянь рівноваги, в які входять моменти сил відносно осей, слід вибирати ці осі так, щоб лінії дії однієї або декількох невідомих сил були паралельні цим осям або їх перетинали.

Для прикладу розглянемо наступні задачі.

Приклад 7.1

На горизонтальний вал (рис. 7.7), що лежить у підшипниках A і B , діє вантаж вагою $Q=25$ Н, прив'язаний тросом до шківів C радіусом $r=0,2$ м. Вантаж вагою $P=100$ Н, насаджений на стрижень ED , незмінно зв'язаний з валом AB . Дано розміри: $AC=0,2$ м, $CD=0,7$ м, $BD=0,1$ м. У стані рівноваги стрижень ED відхилений від вертикалі на кут $\alpha=30^\circ$. Визначити відстань l центра тяжіння вантажу вагою P від осі вала AB , а також реакції підшипників A і B .

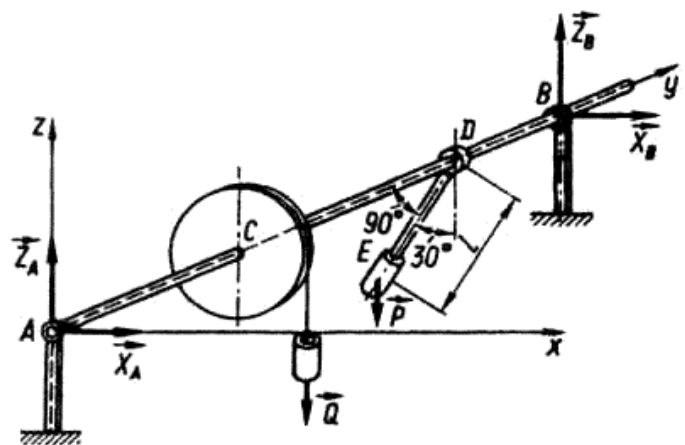


Рис. 7.7.

Дано:

$$Q = 25 \text{ Н}, P = 100 \text{ Н},$$

$$r = 0,2 \text{ м}, AC = 0,2 \text{ м},$$

$$CD = 0,7 \text{ м}, BD = 0,1 \text{ м},$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$l, \vec{R}_A, \vec{R}_B \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Розглянемо рівновагу вала, на який діють активні сили \vec{P} і \vec{Q} . В'язями для нього є підшипники A і B . Згідно з **Аксиомою VI**, звільняємо вал від в'язей та замінюємо їх реакціями \vec{R}_A і \vec{R}_B , що лежать у площинах, перпендикулярних до осі підшипників A і B .

Візьмемо систему координат, як показано на рис. 7.7. Невідомі реакції \vec{R}_A і \vec{R}_B подамо складовими \vec{X}_A і \vec{Z}_A та \vec{X}_B і \vec{Z}_B , які треба визначити.

Складемо таблицю, в яку занесемо проекції всіх сил на осі координат та моменти цих сил відносно осей координат:

	\vec{P}	\vec{Q}	\vec{R}_A	\vec{R}_B
X	$P_x = 0$	$Q_x = 0$	$R_{Ax} = X_A$	$R_{Bx} = X_B$
Y	$P_y = 0$	$Q_y = 0$	$R_{Ay} = 0$	$R_{By} = 0$
Z	$P_z = -P$	$Q_z = -Q$	$R_{Az} = Z_A$	$R_{Bz} = Z_B$
M_x	$M_x(\vec{P}) =$ $= -P \cdot (AC + CD)$	$M_x(\vec{Q}) = -Q \cdot AC$	$M_x(\vec{R}_A) = 0$	$M_x(\vec{R}_B) = Z_B \cdot AB$
M_y	$M_y(\vec{P}) =$ $= -P \cdot l \cdot \sin \alpha$	$M_y(\vec{Q}) = Q \cdot r$	$M_y(\vec{R}_A) = 0$	$M_y(\vec{R}_B) = 0$
M_z	$M_z(\vec{P}) = 0$	$M_z(\vec{Q}) = 0$	$M_z(\vec{R}_A) = 0$	$M_z(\vec{R}_B) = -X_B \cdot AB$

Додаючи елементи кожного рядка даної таблиці та прирівнюючи суму відповідного рядка до нуля, одержимо умови рівноваги просторової системи сил $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}_A, \vec{R}_B)$ в аналітичній формі (вираз (7.2)):

- $\sum_{i=1}^4 F_{ix} = P_x + Q_x + R_{Ax} + R_{Bx} = 0 + 0 + X_A + X_B = 0 \Rightarrow X_A + X_B = 0;$
- $\sum_{i=1}^4 F_{iy} = P_y + Q_y + R_{Ay} + R_{By} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0;$
- $\sum_{i=1}^4 F_{iz} = P_z + Q_z + R_{Az} + R_{Bz} = -P - Q + Z_A + Z_B = 0 \Rightarrow Z_A + Z_B - P - Q = 0;$
- $\sum_{i=1}^4 M_x(\vec{F}_i) = M_x(\vec{P}) + M_x(\vec{Q}) + M_x(\vec{R}_A) + M_x(\vec{R}_B) =$
 $= -P \cdot (AC + CD) - Q \cdot AC + 0 + Z_B \cdot AB = 0, \Rightarrow$
 $\Rightarrow -Q \cdot AC - P \cdot (AC + CD) + Z_B \cdot AB = 0;$
- $\sum_{i=1}^4 M_y(\vec{F}_i) = M_y(\vec{P}) + M_y(\vec{Q}) + M_y(\vec{R}_A) + M_y(\vec{R}_B) =$
 $= -P \cdot l \cdot \sin \alpha + Q \cdot r + 0 + 0 = 0, \Rightarrow -P \cdot l \cdot \sin \alpha + Q \cdot r + 0 + 0 = 0;$

$$6. \sum_{i=1}^4 M_z(\vec{F}_i) = M_z(\vec{P}) + M_z(\vec{Q}) + M_z(\vec{R}_A) + M_z(\vec{R}_B) = 0 + 0 + 0 - X_B \cdot AB = 0,$$

$$\Rightarrow -X_B \cdot AB = 0.$$

В даному випадку друга умова рівноваги є тотожністю, оскільки проекції всіх сил, у тому числі й реакцій в'язей, на вісь Ay дорівнюють нулю. З п'яти умов рівноваги, що залишилися, слід визначити п'ять невідомих величин: \vec{X}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B , \vec{Z}_B та l — задача статично визначена.

Розв'язуючи рівняння рівноваги, одержимо:

а) з шостого і першого рівняння $X_B = X_A = 0$;

б) з п'ятого рівняння $l = \frac{Q \cdot r}{P \cdot \sin \alpha} = \frac{Q \cdot r}{P \cdot \sin 30^\circ} = \frac{25 \cdot 0,2}{100 \cdot 0,5} = 0,1 \text{ (м)}$;

в) з четвертого рівняння

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{Q \cdot AC + P \cdot (AC + CD)}{AB} = \frac{Q \cdot AC + P \cdot (AC + CD)}{AC + CD + DB} = \\ &= \frac{25 \cdot 0,2 + 100 \cdot (0,2 + 0,7)}{0,2 + 0,7 + 0,1} = \frac{5 + 90}{1} = 95 \text{ (Н)}; \end{aligned}$$

г) з третього рівняння $Z_A = P + Q - Z_B = 100 + 25 - 95 = 30 \text{ (Н)}$.

Відповідь: $X_B = X_A = 0$, $Z_B = \frac{Q \cdot AC + P \cdot (AC + CD)}{AC + CD + DB} = 95 \text{ Н}$,

$$Z_A = P + Q - Z_B = 30 \text{ Н},$$

$$l = \frac{Q \cdot r}{P \cdot \sin \alpha} = 0,1 \text{ м}.$$

Приклад 7.2

Знайти зусилля в шести опорних стрижнях, що підтримують квадратну плиту $ABCD$, при дії горизонтальної сили P вздовж сторони AD . Розміри вказані на рис. 7.8. Вагою плити і стрижнів нехтувати. Опорні стрижні прикріплені до плити і нерухомих пристроїв сферичними шарнірами.

Дано:

$$\begin{aligned} P, \\ AB = CD = a, \\ AD = BC = a \end{aligned}$$

$$\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6 \text{ — ?}$$

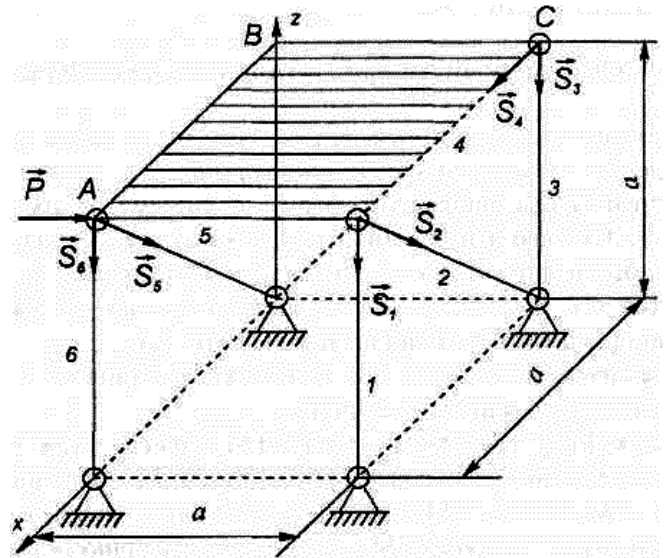


Рис. 7.8.

Розв'язання:

Внаслідок шарнірного закріплення опорних стрижнів їх реакції на плиту направлені вздовж стрижнів. Позначимо ці реакції у відповідності з номерами стрижнів, тобто $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$. Вибираємо систему координат як вказано на рис. 7.8. Складемо таблицю, в яку занесемо проекції всіх сил на осі координат та моменти цих сил відносно осей координат:

	\vec{S}_1	\vec{S}_2	\vec{S}_3	\vec{S}_4
X	$S_{1x} = 0$	$S_{2x} = -S_2 \cos 45^\circ$	$S_{3x} = 0$	$S_{4x} = 0$
Y	$S_{1y} = 0$	$S_{2y} = 0$	$S_{3y} = 0$	$S_{4y} = -S_4 \cos 45^\circ$
Z	$S_{1z} = -S_1$	$S_{2z} = -S_2 \cos 45^\circ$	$S_{3z} = -S_3$	$S_{4z} = -S_4 \cos 45^\circ$
M_x	$M_x(\vec{S}_1) =$ $= -S_1 \cdot a$	$M_x(\vec{S}_2) =$ $= -S_2 \cdot a \cdot \cos 45^\circ$	$M_x(\vec{S}_3) = -S_3 \cdot a$	$M_x(\vec{S}_4) = 0$
M_y	$M_y(\vec{S}_1) =$ $= S_1 \cdot a$	$M_y(\vec{S}_2) = 0$	$M_y(\vec{S}_3) = 0$	$M_y(\vec{S}_4) = 0$
M_z	$M_z(\vec{S}_1) = 0$	$M_z(\vec{S}_2) =$ $= S_2 \cdot a \cdot \cos 45^\circ$	$M_z(\vec{S}_3) = 0$	$M_z(\vec{S}_4) = 0$

	\vec{S}_5	\vec{S}_6	\vec{P}
X	$S_{5x} = -S_5 \cdot \cos 45^\circ$	$S_{6x} = 0$	$P_x = 0$
Y	$S_{5y} = 0$	$S_{6y} = 0$	$P_y = P$
Z	$S_{5z} = -S_5 \cdot \cos 45^\circ$	$S_{6z} = -S_6$	$P_z = 0$
M_x	$M_x(\vec{S}_5) = 0$	$M_x(\vec{S}_6) = 0$	$M_x(\vec{P}) = -P \cdot a$
M_y	$M_y(\vec{S}_5) = 0$	$M_y(\vec{S}_6) = S_6 \cdot a$	$M_y(\vec{P}) = 0$
M_z	$M_z(\vec{S}_5) = 0$	$M_z(\vec{S}_6) = 0$	$M_z(\vec{P}) = P \cdot a$

Додаючи елементи кожного рядка даної таблиці та прирівнюючи суму відповідного рядка до нуля, одержимо умови рівноваги просторової системи довільно розміщених сил $(\vec{P}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6)$, що діють на плиту $ABCD$, в аналітичній формі (вираз (7.2)):

$$1. \sum_{i=1}^n S_{ix} = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} + S_{4x} + S_{5x} + S_{6x} + P_x = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - S_2 \cdot \cos 45^\circ + 0 + 0 - S_5 \cdot \cos 45^\circ + 0 + 0 = 0;$$

$$2. \sum_{i=1}^n S_{iy} = S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} + S_{4y} + S_{5y} + S_{6y} + P_y = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + 0 - S_4 \cdot \cos 45^\circ + 0 + 0 + P = 0;$$

$$3. \sum_{i=1}^n S_{iz} = S_{1z} + S_{2z} + S_{3z} + S_{4z} + S_{5z} + S_{6z} + P_z = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -S_1 - S_2 \cdot \cos 45^\circ - S_3 - S_4 \cdot \cos 45^\circ - S_5 \cdot \cos 45^\circ - S_6 + 0 = 0;$$

$$4. M_x(\vec{S}_1) + M_x(\vec{S}_2) + M_x(\vec{S}_3) + M_x(\vec{S}_4) + M_x(\vec{S}_5) + M_x(\vec{S}_6) + M_x(\vec{P}) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -S_1 \cdot a - S_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot a - S_3 \cdot a + 0 + 0 + 0 - P \cdot a = 0;$$

$$5. M_y(\vec{S}_1) + M_y(\vec{S}_2) + M_y(\vec{S}_3) + M_y(\vec{S}_4) + M_y(\vec{S}_5) + M_y(\vec{S}_6) + M_y(\vec{P}) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 \cdot a + 0 + 0 + 0 + 0 + S_6 \cdot a + 0 = 0;$$

$$6. M_z(\vec{S}_1) + M_z(\vec{S}_2) + M_z(\vec{S}_3) + M_z(\vec{S}_4) + M_z(\vec{S}_5) + M_z(\vec{S}_6) + M_z(\vec{P}) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + S_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot a + 0 + 0 + 0 + 0 + P \cdot a = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, одержимо:

а) з шостого рівняння $S_2 = -\frac{P \cdot a}{a \cdot \cos 45^\circ} = -\frac{P}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2} \cdot P;$

б) з другого рівняння $S_4 = \frac{P}{\cos 45^\circ} = \frac{P}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot P;$

в) з першого рівняння $S_5 = -S_2 = \sqrt{2} \cdot P;$

г) поділивши четверте рівняння на a та віднявши від третього рівняння четверте

$$-S_1 - S_2 \cdot \cos 45^\circ - S_3 - S_4 \cdot \cos 45^\circ - S_5 \cdot \cos 45^\circ - S_6 = 0$$

$$-S_1 - S_2 \cdot \cos 45^\circ - S_3 - P = 0$$

одержимо $P - S_4 \cdot \cos 45^\circ - S_5 \cdot \cos 45^\circ - S_6 = 0$, або

$$S_6 = P - S_4 \cdot \cos 45^\circ - S_5 \cdot \cos 45^\circ = P - \sqrt{2} \cdot P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -P$$

д) з п'ятого рівняння $S_1 = -S_6 = P;$

е) з четвертого рівняння $S_3 = -S_1 - S_2 \cdot \cos 45^\circ - P = -P - (-\sqrt{2} \cdot P) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - P = -P.$

Відповідь: $S_1 = P, S_2 = -\sqrt{2} \cdot P, S_3 = S_6 = -P, S_4 = S_5 = \sqrt{2} \cdot P.$

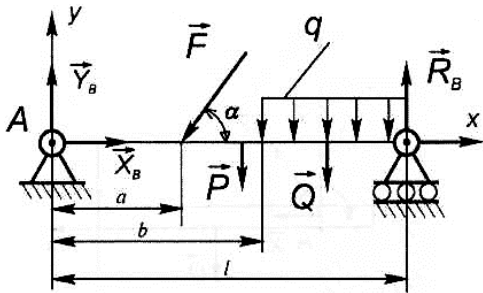


Рис. 7.9.

Приклад 7.3

До балки AB , зображеної на рис. 7.9, прикладена сила $F=1600$ Н і рівномірно розподілене навантаження інтенсивності $q=120$ Н/м. Кут $\alpha=30^\circ$, $a=3$ м, $b=7$ м, $l=12$ м. Вага балки $P=500$ Н. Визначити реакції опор.

Розв'язання:

Розподілене навантаження замінюємо його рівнодійною $Q = q \cdot (l - b)$. Сила \vec{P} , буде прикладена на середині відрізка AB . Дії опор замінюємо в точці A реакціями \vec{X}_A і \vec{Y}_A ; в точці B — реакцією \vec{R}_B , перпендикулярною до опорної поверхні котків. На балку діє плоска система довільно розміщених сил. Складемо таблицю, в яку занесемо проекції всіх сил на осі координат та моменти цих сил відносно точки A :

	\vec{P}	\vec{Q}	\vec{R}_B
X	$P_x = 0$	$Q_x = 0$	$R_{Bx} = 0$
Y	$P_y = -P$	$Q_y = -Q$	$R_{By} = R_B$
M_A	$M_A(\vec{P}) = -P \cdot \frac{1}{2} \cdot l$	$M_A(\vec{Q}) = -Q \cdot \left(b + \frac{l-b}{2}\right)$	$M_A(\vec{R}_B) = R_B \cdot l$

	\vec{X}_A	\vec{Y}_A	\vec{F}
X	$X_{Ax} = X_A$	$Y_{Ax} = 0$	$F_x = -F \cdot \cos \alpha$
Y	$X_{Ay} = 0$	$Y_{Ay} = Y_A$	$F_y = -F \cdot \sin \alpha$
M_A	$M_A(\vec{X}_A) = 0$	$M_A(\vec{Y}_A) = 0$	$M_A(\vec{F}) = -F \cdot a \cdot \sin \alpha$

Складаємо рівняння рівноваги:

1. Вісь X: $P_x + Q_x + F_x + R_{Bx} + X_{Ax} + Y_{Ax} = 0 + 0 - F \cdot \cos \alpha + 0 + X_A + 0 = 0$;
2. Вісь Y: $P_y + Q_y + F_y + R_{By} + X_{Ay} + Y_{Ay} = -P - Q - F \cdot \sin \alpha + R_B + 0 + Y_A = 0$;
3. $M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{Q}) + M_A(\vec{F}) + M_A(\vec{R}_B) + M_A(\vec{X}_A) + M_A(\vec{Y}_A) =$

$$= -P \cdot \frac{1}{2} \cdot l - Q \cdot \left(b + \frac{l-b}{2} \right) - F \cdot a \cdot \sin \alpha + R_B \cdot l + 0 + 0 = 0.$$

З першого рівняння одержимо:

$$X_A = F \cdot \cos \alpha = 1600 \cdot \cos 30^\circ = 1600 \cdot 0,866 \approx 1386 (H).$$

З третього рівняння матимемо:

$$R_B = \frac{F \cdot a \cdot \sin \alpha + P \cdot \frac{1}{2} \cdot l + Q \cdot \frac{1}{2} \cdot (l+b)}{l} = \frac{2 \cdot F \cdot a \cdot \sin \alpha + P \cdot l + Q \cdot (l+b)}{2 \cdot l} =$$

$$= \frac{2 \cdot F \cdot a \cdot \sin \alpha + P \cdot l + Q \cdot (l^2 - b^2)}{2 \cdot l} = \frac{2 \cdot 1600 \cdot 3 \cdot 0,5 + 500 \cdot 12 + 120 \cdot (12^2 - 7^2)}{2 \cdot 12} = 925 (H).$$

Тоді, підставивши в друге рівняння одержане значення R_B , отримаємо:

$$Y_A = F \cdot \sin \alpha + Q + P - R_B = 1600 \cdot 0,5 + 600 + 500 - 925 = 975 (H).$$

Відповідь: $X_A = 1386 H$, $Y_A = 975 H$, $R_B = 925 H$.

Приклад 7.4

Однорідна прямокутна кришка (рис. 7.10) вагою $P=400$ Н нахилена під кутом $\alpha = 60^\circ$ до вертикальної площини й утримується в такому положенні за допомогою сферичного шарніра O , циліндричного шарніра A і троса CD , який знаходиться в горизонтальній площині. Знайти реакції шарнірів і троса, якщо $OA=BC=a$, $OC=AB=0,6a$.

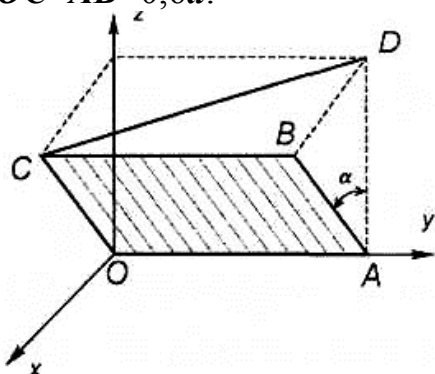


Рис. 7.10.

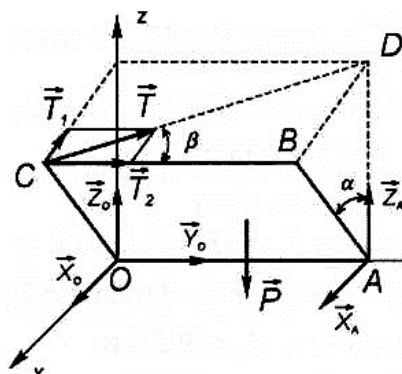


Рис. 7.11.

Розв'язання:

1. Розглянемо рівновагу кришки $OABC$ (рис. 7.11).
2. Показуємо активну силу \vec{P} — вагу кришки.
3. Звільняємо кришку від в'язей, замінюючи дію в'язей реакціями. В'язями

є сферичний шарнір O , циліндричний шарнір A і трос CD . Реакцію \vec{R}_O сферичного шарніра O розкладаємо на три складові: \vec{X}_O , \vec{Y}_O і \vec{Z}_O . Реакцію \vec{R}_A циліндричного шарніра A розкладаємо на дві складові: \vec{X}_A і \vec{Z}_A .

4. Вибираємо систему координат, як показано на рисунках.

5. Складемо таблицю, в яку занесемо проєкції всіх сил на осі координат та моменти цих сил відносно осей координат:

	\vec{R}_O	\vec{R}_A	\vec{T}	\vec{P}
X	$R_{Ox} = X_O$	$R_{Ax} = X_A$	$T_x = -T_1$	$P_x = 0$
Y	$R_{Oy} = Y_O$	$R_{Ay} = 0$	$T_y = T_2$	$P_y = 0$
Z	$R_{Oz} = Z_O$	$R_{Az} = Z_A$	$T_z = 0$	$P_z = -P$
M_x	$M_x(\vec{R}_O) = 0$	$M_x(\vec{R}_A) =$ $= Z_A \cdot a$	$M_x(\vec{T}) =$ $= -T_2 \cdot 0,6 \cdot a \cdot \cos \alpha$	$M_x(\vec{P}) =$ $= -P \cdot 0,5 \cdot a$
M_y	$M_y(\vec{R}_O) = 0$	$M_y(\vec{R}_A) = 0$	$M_y(\vec{T}) =$ $= -T_1 \cdot 0,6 \cdot a \cdot \cos \alpha$	$M_y(\vec{P}) =$ $= P \cdot 0,3 \cdot a \cdot \sin \alpha$
M_z	$M_z(\vec{R}_O) = 0$	$M_z(\vec{R}_A) =$ $= -X_A \cdot a$	$M_z(\vec{T}) =$ $= T_2 \cdot 0,6 \cdot a \cdot \sin \alpha$	$M_z(\vec{P}) = 0$

Додаючи елементи кожного рядка даної таблиці та прирівнюючи суму відповідного рядка до нуля, одержимо умови рівноваги просторової системи довільно розміщених сил $(\vec{P}, \vec{T}, \vec{R}_A, \vec{R}_O)$, що діють на кришку, в аналітичній формі (рівняння рівноваги):

- $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_O + X_A - T_1 = 0;$
- $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_O + T_2 = 0;$
- $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad Z_O + Z_A - P = 0;$
- $\sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad Z_A \cdot a - P \cdot 0,5 \cdot a - T_2 \cdot 0,6 \cdot a \cdot \cos \alpha = 0;$
- $\sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad P \cdot 0,3 \cdot a \cdot \sin \alpha - T_1 \cdot 0,6 \cdot a \cdot \cos \alpha = 0;$
- $\sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad -X_A \cdot a + T_2 \cdot 0,6 \cdot a \cdot \sin \alpha = 0;$

де $T_1 = T \cdot \sin \beta; \quad T_2 = T \cdot \cos \beta; \quad \sin \beta = \frac{BD}{CD}; \quad \cos \beta = \frac{BC}{CD};$

$$AD = AB \cdot \cos \alpha = 0,6 \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 0,6 \cdot a \cdot 0,5 = 0,3 \cdot a,$$

$$BD = AB \cdot \sin \alpha = 0,6 \cdot a \cdot \sin 60^\circ = 0,6 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{10} \cdot a \approx 0,5 \cdot a,$$

$$CD = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{10} \cdot a\right)^2} = a \cdot \sqrt{1 + \frac{27}{100}} = a \cdot \sqrt{\frac{127}{100}} = a \cdot \frac{\sqrt{127}}{10} \approx 1,1 \cdot a,$$

$$\sin \beta = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{10} \cdot a}{\frac{\sqrt{127}}{10} \cdot a} = \sqrt{\frac{27}{127}} \approx 0,461, \quad \cos \beta = \frac{BC}{CD} = \frac{a}{\frac{\sqrt{127}}{10} \cdot a} = \sqrt{\frac{100}{127}} \approx 0,887,$$

$\beta \approx 27,5^\circ$. З цих рівнянь знаходимо:

а) з п'ятого рівняння визначається $T_1 = \frac{P \cdot 0,3 \cdot a \cdot \sin \alpha}{0,6 \cdot a \cdot \cos \alpha} = P \cdot 0,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha,$

а потім і $T = \frac{T_1}{\sin \beta} = \frac{P \cdot 0,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta} = \frac{400 \cdot 0,5 \cdot 1,732}{0,461} \approx 751 (H);$

б) з другого рівняння $Y_O = -T_2 = -T \cdot \cos \beta = -751 \cdot 0,887 \approx -666 (H);$

в) з шостого рівняння $X_A = T_2 \cdot 0,6 \cdot \sin \alpha = 666 \cdot 0,6 \cdot 0,866 \approx 346 (H);$

г) з четвертого рівняння

$$Z_A = P \cdot 0,5 + T_2 \cdot 0,6 \cdot \cos \alpha = 400 \cdot 0,5 + 666 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \approx 400 (H);$$

д) з третього рівняння $Z_O = P - Z_A = 400 - 400 \approx 0 (H);$

е) з першого рівняння

$$X_O = T_1 - X_A = P \cdot 0,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha - X_A = 400 \cdot 0,5 \cdot 1,732 - 346 \approx 0 (H).$$

Відповідь: $T = 751 H, Y_O = -666 H, Z_O = 0, X_O = 0, X_A = 346 H, Z_A = 400 H.$

Приклад 7.5

Два однорідні бруски однакової довжини з'єднані шарнірно в точці C , а в точках A і B шарнірно прикріплені до опор (рис. 7.12). Вага, кожного бруска дорівнює P . В точці C підвішений вантаж вагою Q . Відстань $AB = d$. Відстань від точки C до горизонтальної прямої AB рівна b . Визначити реакції шарнірів A і B .

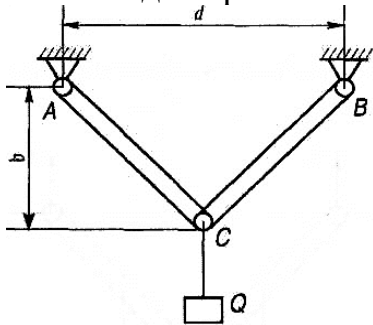


Рис. 7.12.

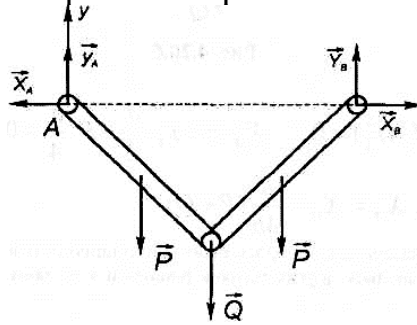


Рис. 7.13.

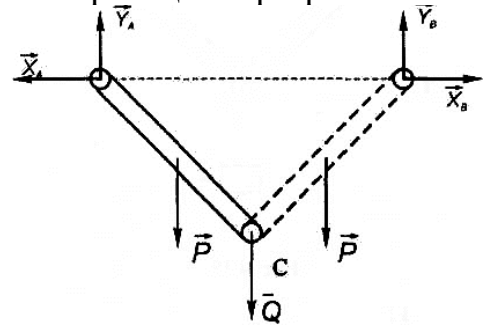


Рис. 7.14.

Розв'язання:

Замінюючи дію опор реакціями, спочатку розглянемо рівновагу системи брусів в цілому (рис. 7.13):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -X_A + X_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_B - Q - 2 \cdot P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -P \cdot \frac{1}{4} \cdot d - Q \cdot \frac{1}{2} \cdot d - P \cdot \frac{3}{4} \cdot d + Y_B \cdot d = 0.$$

З цих рівнянь знаходимо:

$$\text{а) } X_A = X_B; \quad \text{б) } Y_B = P \cdot \frac{1}{4} + Q \cdot \frac{1}{2} + P \cdot \frac{3}{4} = P + \frac{Q}{2};$$

$$\text{в) } Y_A = Q + 2 \cdot P - Y_B = Q + 2 \cdot P - P - \frac{Q}{2} = P + \frac{Q}{2}.$$

Для знаходження X_A розглянемо рівновагу лівого бруса (рис. 7.14) і складемо рівняння: $\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0$; $X_A \cdot b - Y_A \cdot \frac{1}{2} \cdot d + P \cdot \frac{1}{4} \cdot d = 0$. Звідки

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{1}{b} \cdot \left(Y_A \cdot \frac{1}{2} \cdot d - P \cdot \frac{1}{4} \cdot d \right) = \frac{1}{b} \cdot \left(\left(P + \frac{Q}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot d - P \cdot \frac{1}{4} \cdot d \right) = \\ &= \frac{1}{b} \cdot \left(P \cdot \frac{1}{2} \cdot d + Q \cdot \frac{1}{4} \cdot d - P \cdot \frac{1}{4} \cdot d \right) = \frac{(P+Q) \cdot d}{4 \cdot b}. \end{aligned}$$

В цій задачі не вимагалось знайти внутрішню силу в шарнірі C , тому, ми і не склали двох других рівнянь рівноваги і не показали цю силу на рис. 7.14.

Запитання для самоконтролю

1. Запишіть умови рівновагу довільної просторової системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ у векторній формі.
2. Сформулюйте та доведіть теорему 7.1 (про рівновагу довільної просторової системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$).
3. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
4. Сформулюйте умови та запишіть рівняння рівноваги просторової системи паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.
5. Сформулюйте умови та запишіть рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ через алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на координатні осі, що лежать в площині дії цих сил, та алгебраїчну суму моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини.
6. Сформулюйте умови та запишіть рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил через алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, що не лежать на одній прямій.
7. Сформулюйте умови та запишіть рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ через алгебраїчну суму проєкцій всіх сил на вісь, що лежить в площині дії цих сил і паралельна їм, та алгебраїчну суму моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини.
8. Сформулюйте умови та запишіть рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил через алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно двох будь-яких точок, які лежать в цій площині.
9. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи пар сил $\left\{ (\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n) \right\}$ у векторній формі.
10. Сформулюйте та запишіть аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи пар сил.
11. Сформулюйте умову та запишіть рівняння рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині або в паралельних площинах.
12. Наведіть послідовність дій, якої слід дотримуватись при розв'язуванні задач на рівновагу довільної просторової системи сил.

Лекція № 8

Тема: «Центр тяжіння абсолютно твердого тіла»

ПЛАН

- 8.1. Послідовне складання паралельних сил. Центр паралельних сил.
- 8.2. Формули радіуса-вектора і координат центра паралельних сил.
- 8.3. Центр тяжіння абсолютно твердого тіла.
- 8.4. Центр мас системи матеріальних точок.
- 8.5. Центр тяжіння плоскої фігури.
- 8.6. Спосіб від'ємних площ та об'ємів.
- 8.7. Центр тяжіння лінії.
- 8.8. Теорема Паппа-Гульдіна.
- 8.9. Центри тяжіння деяких фігур і ліній.
- 8.10. Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла.
- 8.11. Приклади розв'язування задач на знаходження центру тяжіння.

8.1. Послідовне складання паралельних сил.

Центр паралельних сил

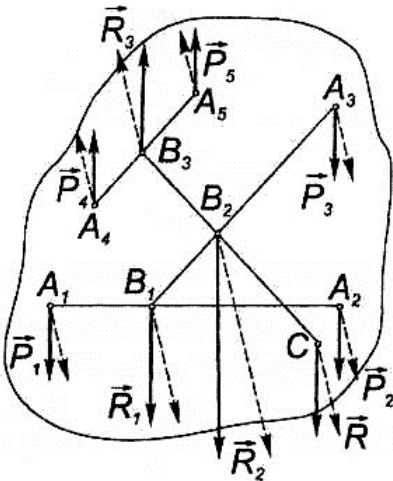


Рис. 8.1.

Припустимо, що до абсолютно твердого тіла в точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 прикладена система сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5)$, з яких $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ направлені в один бік, а \vec{P}_4, \vec{P}_5 — в інший (рис. 8.1).

Додамо сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , за правилом додавання двох паралельних сил, направлених в один бік:

$$R_1 = P_1 + P_2; \quad \frac{A_1B_1}{A_2B_1} = \frac{P_2}{P_1}. \quad (8.1)$$

Визначивши модуль рівнодійної \vec{R}_1 та її точку прикладення B_1 , додамо \vec{R}_1 і силу \vec{P}_3 :

$$R_2 = R_1 + P_3; \quad \frac{A_3B_2}{B_1B_2} = \frac{R_1}{P_3}. \quad (8.2)$$

Аналогічно визначимо рівнодійну сил \vec{P}_4 і \vec{P}_5 : $R_3 = P_4 + P_5; \quad \frac{A_4B_3}{A_5B_3} = \frac{P_5}{P_4}. \quad (8.3)$

Внаслідок послідовного складання заданих паралельних сил одержимо дві протилежно направлені паралельні сили \vec{R}_2 і \vec{R}_3 , які прикладені в точках B_2 і B_3 . В залежності від значення модулів і взаємного розташування точок прикладення цих сил можливі наступні випадки:

I. Сили \vec{R}_2 і \vec{R}_3 не рівні за модулем. Приймемо, що $R_2 > R_3$, тоді рівнодійна \vec{R} заданих сил має модуль: $R = R_2 - R_3$ (8.4)

і направлена в бік \vec{R}_2 (рис. 8.1). Точка C прикладення рівнодійної лежить на продовженні відрізка B_2B_3 за точкою прикладення більшої сили \vec{R}_2 , причому

$$\frac{B_2C}{B_3C} = \frac{R_3}{R_2}. \quad (8.5)$$

Точка C називається **центром паралельних сил**. Через цю точку обов'язково проходить лінія дії рівнодійної заданої системи паралельних сил, якщо, не змінюючи модуля сил, повертати лінії їхньої дії навколо точок прикладення сил на один і той самий кут, в один і той самий бік (рис. 8.1). Положення центра паралельних сил не залежить від напрямку сил, а залежить тільки від їхніх модулів і точок їх прикладання. Таким чином, **центром паралельних сил називається точка C на лінії дії рівнодійної системи паралельних сил, яка не змінює свого положення при повороті всіх сил системи навколо точок їх прикладання на один і той самий кут в одному напрямі.**

II. Сили \vec{R}_2 і \vec{R}_3 рівні за модулем, але їх лінії дії не збігаються. В цьому випадку система зводиться до пари сил.

III. Сили \vec{R}_2 і \vec{R}_3 рівні за модулем і їх лінії дії збігаються. Задані сили в цьому випадку взаємно зрівноважуються.

Система паралельних сил, направлених в один і той же бік не може врівноважуватись або приводитись до пари сил. Ця система завжди має рівнодійну.

8.2 Формули радіуса-вектора і координат центра паралельних сил

Розглянемо систему паралельних сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$, які прикладені до абсолютно твердого тіла в точках A_1, A_2, \dots, A_n , зведену до рівнодійної \vec{R} , що прикладена в центрі паралельних сил — точці C (рис. 8.2).

Положення центра паралельних сил C визначається радіус-вектором \vec{r}_C відносно початку координат O або координатами (x_C, y_C, z_C) .

Положення точки A_i прикладення кожної сили \vec{P}_i визначається радіус-вектором \vec{r}_i , або координатами (x_i, y_i, z_i) , де $i = 1, 2, \dots, n$.

Згідно **теорему 6.3** (теорему Варіньона в загальному вигляді), момент рівнодійної \vec{R} відносно центру O буде рівний геометричній сумі моментів складових сил системи $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ відносно цього ж центра:

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{P}_1) + \vec{M}_O(\vec{P}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{P}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{P}_i), \quad (8.6)$$

або,
$$\vec{r}_C \times \vec{R} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i. \quad (8.7)$$

Введемо одиничний вектор \vec{u} , що паралельний лініям дії сил системи. Тоді

$$\vec{P}_i = \vec{u} \cdot P_i, \quad (8.8)$$

де P_i — алгебраїчне значення модуля сили. Рівнодійну можна представити як

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \vec{u} \cdot P_1 + \vec{u} \cdot P_2 + \dots + \vec{u} \cdot P_n = \vec{u} \cdot (P_1 + P_2 + \dots + P_n) = \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^n P_i. \quad (8.9)$$

Підставивши значення \vec{P}_i і \vec{R} у вирази моментів (8.7), будемо мати:

$$\vec{r}_C \times \left(\vec{u} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (\vec{u} \cdot P_i). \quad (8.10)$$

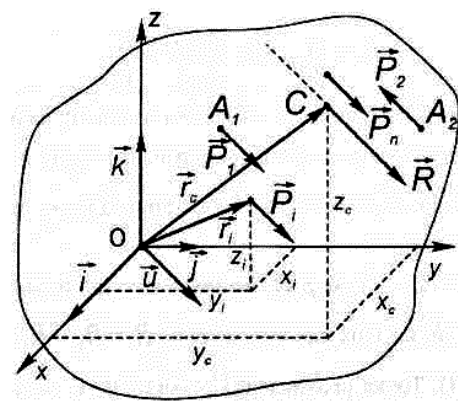


Рис. 8.2.

Перемістимо скалярні співмножники у векторних добутках:

$$\left(\vec{r}_C \cdot \sum_{i=1}^n P_i\right) \times \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot P_i\right) \times \vec{u}. \quad (8.11)$$

Оскільки одиничний вектор \vec{u} може мати будь-який напрямок у просторі (лінії дії сил \vec{P}_i можна одночасно повертати на довільний однаковий кут відносно точок їх прикладання), то на даний вектор можна поділити обидві частини

$$\text{рівняння (8.11), яке після цього набуде вигляду: } \vec{r}_C \cdot \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot P_i. \quad (8.12)$$

Таким чином, **формула для знаходження радіус-вектора \vec{r}_C рівнодійної \vec{R} системи паралельних сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$** матиме вигляд:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} = \frac{\vec{r}_1 \cdot P_1 + \vec{r}_2 \cdot P_2 + \dots + \vec{r}_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}. \quad (8.13)$$

Спроектувавши ліву і праву частини виразу (8.13) на осі координат, одержимо **формули координат центра паралельних сил**:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} = \frac{x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \dots + x_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}; \\ y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} = \frac{y_1 \cdot P_1 + y_2 \cdot P_2 + \dots + y_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}; \\ z_C &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} = \frac{z_1 \cdot P_1 + z_2 \cdot P_2 + \dots + z_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

В формулах (8.14) чисельником і знаменником кожного дробу є алгебраїчні суми. Вибір напрямку, вздовж якого паралельні сили вважаються додатними — довільний, і на результати обчислень не впливає.

Величини $\sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i$, $\sum_{i=1}^n y_i \cdot P_i$, $\sum_{i=1}^n z_i \cdot P_i$ називають **статичними моментами системи паралельних сил відносно координатних площин Oxy , Oxz , Oyz** відповідно. Якщо початок координат — точку O — сумістити з центром паралельних сил точкою C , то ці величини дорівнюватимуть нулю.

8.3 Центр тяжіння абсолютно твердого тіла

Якщо тверде тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, знаходиться в полі тяжіння нашої планети, наприклад поблизу земної поверхні, то з великим ступенем точності можна вважати, що сили тяжіння, які діють на окремі частини тіла, утворюють систему паралельних сил.

Ця гіпотеза про паралельність сил тяжіння є виправданою в багатьох задачах техніки. Наприклад, якщо уявити собі потяг завдовжки 1870 м (1 морська миля), то напрями сил тяжіння, що діють на перший і останній вагони, будуть відхилитись від паралельності лише на 1 дугову хвилину, оскільки радіус Землі в середньому дорівнює 6371 км. Дана гіпотеза еквівалентна гіпотезі про те, що поверхня Землі є плоскою і Земля не обертається. Зрозуміло, що в задачах небесної механіки, в задачах про рух штучних супутників Землі, в задачах про рух кораблів, літаків, ракет тощо сили тяжіння розглядаються як центральні сили. У цьому випадку робочою гіпотезою, але теж наближеною, є гіпотеза про те, що поверхня Землі сферична і Земля рівномірно обертається навколо своєї осі.

Розглянемо абсолютно тверде тіло, що складається з окремих частин 1, 2, ..., n, на які діють сили тяжіння $\Delta\vec{G}_1, \Delta\vec{G}_2, \dots, \Delta\vec{G}_n$ прикладені в точках M_1, M_2, \dots, M_n відповідно (рис. 8.3).

Сили тяжіння, що діють на окремі частини тіла, направлені приблизно до центру Землі. Якщо розміри даного тіла значно менші порівняно з радіусом Землі, то ці сили можна вважати паралельними між собою. Рівнодіюча \vec{G} даної системи паралельних сил тяжіння ($\Delta\vec{G}_1, \Delta\vec{G}_2, \dots, \Delta\vec{G}_n$) дорівнює їх сумі $G = \Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n$ і є **силою тяжіння, що діє на все абсолютно тверде тіло**, а центр цієї системи паралельних сил, в якому прикладена сила \vec{G} , називається **центром тяжіння тіла** C з координатами (x_c, y_c, z_c) . В твердому тілі центр тяжіння займає певне визначене положення, що не залежить від розміщення тіла в просторі.

Якщо позначити через M_i з координатами (x_i, y_i, z_i) будь-яку частину абсолютно твердого тіла, на яку діє сила тяжіння $\Delta\vec{G}_i$ (рис. 8.3), то **формули для координат центра тяжіння абсолютно твердого тіла**, як центра паралельних сил, згідно (8.14), приймуть вигляд:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta G_i}{G} = \frac{x_1 \cdot \Delta G_1 + x_2 \cdot \Delta G_2 + \dots + x_n \cdot \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n},$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta G_i}{G} = \frac{y_1 \cdot \Delta G_1 + y_2 \cdot \Delta G_2 + \dots + y_n \cdot \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n}; \quad (8.15)$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta G_i}{G} = \frac{z_1 \cdot \Delta G_1 + z_2 \cdot \Delta G_2 + \dots + z_n \cdot \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n};$$

де суми розповсюджені на всі частини твердого тіла. В цих формулах алгебраїчними величинами є тільки координати точок, а значення $\Delta\vec{G}_i$ всі додатні, оскільки всі сили спрямовані в один бік.

Тепер, розглянемо **однорідне абсолютно тверде тіло** об'ємом V і масою m , що має постійну питому густину $\rho = const$.

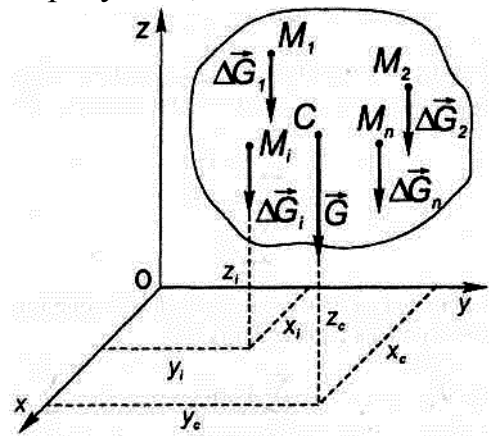


Рис. 8.3.

Визначимо положення **центра тяжіння однорідного тіла**. Сила тяжіння, що діє на все однорідне тіло визначається формулою:

$$G = g \cdot m = g \cdot \rho \cdot V = \gamma \cdot V, \quad (8.16)$$

де g — прискорення вільного падіння на поверхні Землі; $\gamma = g \cdot \rho$ — сила тяжіння, яка діє на одиницю об'єму однорідного тіла (**питома сила тяжіння**).

Сила тяжіння, що діє на окрему частину однорідного тіла масою $m_i = \rho \cdot V_i$ з координатами її центра $C_i(x_i, y_i, z_i)$, визначається за формулою:

$$G_i = g \cdot m_i = g \cdot \rho \cdot V_i = \gamma \cdot V_i, \quad (8.17)$$

де V_i — об'єм даної частини однорідного тіла. Тоді з (10.15) одержимо:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \gamma \cdot V_i}{\gamma \cdot V} = \frac{\gamma \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot V_i}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot V_i}{V}; \\ y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \gamma \cdot V_i}{\gamma \cdot V} = \frac{\gamma \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot V_i}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot V_i}{V}; \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \gamma \cdot V_i}{\gamma \cdot V} = \frac{\gamma \cdot \sum_{i=1}^n z_i \cdot V_i}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot V_i}{V},$$

$$x_C = \frac{x_1 \cdot V_1 + x_2 \cdot V_2 + \dots + x_n \cdot V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n};$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot V_2 + \dots + y_n \cdot V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n}; \quad (8.19)$$

або

$$z_C = \frac{z_1 \cdot V_1 + z_2 \cdot V_2 + \dots + z_n \cdot V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n}.$$

Центр тяжіння однорідного тіла, що заповнює деякий об'єм, називається **центром тяжіння однорідного об'єму**.

Величини $\sum_{i=1}^n x_i \cdot V_i$, $\sum_{i=1}^n y_i \cdot V_i$, $\sum_{i=1}^n z_i \cdot V_i$ називають **статичними моментами об'єму однорідного тіла відносно координатних площин Oz , Oxz , Oxy** відповідно. Якщо початок координат — точку O — сумістити з центром тяжіння твердого тіла C , то ці величини дорівнюватимуть нулю.

Тепер, розглянемо тіло, яке складається з n окремих частин, на які діють сили тяжіння $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots, \vec{G}_n$, що прикладені у відповідних центрах тяжіння C_1, C_2, \dots, C_n з координатами $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$. Кожна i -та частина тіла масою m_i і об'ємом V_i є однорідною з питомою густиною

$\rho_i = \frac{m_i}{V_i} \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$ та питомою силою тяжіння $\gamma_i = g \cdot \rho_i \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right)$, причому, для різних частин тіла питома сила тяжіння різна — $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \dots \neq \gamma_i \neq \dots \neq \gamma_n$.

Тоді сила тяжіння, що діє на i -ту частину тіла, буде рівна:

$$G_i = g \cdot m_i = g \cdot \rho_i \cdot V_i = \gamma_i \cdot V_i. \quad (8.20)$$

Тоді з (8.18) і (8.19) одержимо **формули для координат центра тяжіння**

тіла, що складається зі скінченного числа окремих однорідних частин, які мають різні питомі сили тяжіння (питомі густини):

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \gamma_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot V_i} = \frac{x_1 \cdot \gamma_1 \cdot V_1 + x_2 \cdot \gamma_2 \cdot V_2 + \dots + x_n \cdot \gamma_n \cdot V_n}{\gamma_1 \cdot V_1 + \gamma_2 \cdot V_2 + \dots + \gamma_n \cdot V_n}; \\
 y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \gamma_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot V_i} = \frac{y_1 \cdot \gamma_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot \gamma_2 \cdot V_2 + \dots + y_n \cdot \gamma_n \cdot V_n}{\gamma_1 \cdot V_1 + \gamma_2 \cdot V_2 + \dots + \gamma_n \cdot V_n}; \\
 z_C &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \gamma_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot V_i} = \frac{z_1 \cdot \gamma_1 \cdot V_1 + z_2 \cdot \gamma_2 \cdot V_2 + \dots + z_n \cdot \gamma_n \cdot V_n}{\gamma_1 \cdot V_1 + \gamma_2 \cdot V_2 + \dots + \gamma_n \cdot V_n}.
 \end{aligned} \tag{8.21}$$

Якщо необхідно знайти **координати центра тяжіння неоднорідного абсолютно твердого тіла**, то його слід подумки „розбити” на елементарні паралелепіеди, для яких у виразах (8.21) одержати інтегральні суми.

Розглянемо i -тий елементарний паралелепіед об’ємом ΔV_i і масою Δm_i з центром у точці $C_i(x_i, y_i, z_i)$. Середньою густиною даного елемента тіла будемо називати відношення $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$. Стягуючи i -тий елементарний паралелепіед у його центр C_i , дістанемо густину $\rho_i(x_i, y_i, z_i)$ в цій точці тіла як границю середньої густини:

$$\rho_i(x_i, y_i, z_i) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}. \tag{8.22}$$

Сила тяжіння $\vec{\Delta G}_i$, що прикладена в центрі $C_i(x_i, y_i, z_i)$ i -того елементарного паралелепіеда, по модулю рівна: $\Delta G_i = g \cdot \rho_i \cdot \Delta V_i$.

Тоді, **формули для координати центра тяжіння неоднорідного абсолютно твердого тіла** ми одержимо, переходячи у виразах (8.21) до границі при $n \rightarrow \infty$ і припускаючи, що розміри всіх елементарних паралелепіедів прямують до нуля ($\Delta V_i \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta G_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta G_i} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot g \cdot \rho_i \cdot \Delta V_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g \cdot \rho_i \cdot \Delta V_i} = \frac{\int_{(V)} x \cdot \rho(x, y, z) \cdot dV}{\int_{(V)} \rho(x, y, z) \cdot dV}; \\
 y_C &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta G_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta G_i} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \cdot g \cdot \rho_i \cdot \Delta V_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g \cdot \rho_i \cdot \Delta V_i} = \frac{\int_{(V)} y \cdot \rho(x, y, z) \cdot dV}{\int_{(V)} \rho(x, y, z) \cdot dV}; \\
 z_C &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta G_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta G_i} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n z_i \cdot g \cdot \rho_i \cdot \Delta V_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g \cdot \rho_i \cdot \Delta V_i} = \frac{\int_{(V)} z \cdot \rho(x, y, z) \cdot dV}{\int_{(V)} \rho(x, y, z) \cdot dV};
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

де $\int_{(V)} \rho(x, y, z) \cdot dV = m$ — маса всього неоднорідного твердого тіла;

$\int_{(V)} x \cdot \rho(x, y, z) \cdot dV, \int_{(V)} y \cdot \rho(x, y, z) \cdot dV, \int_{(V)} z \cdot \rho(x, y, z) \cdot dV$ — статичні моменти маси

неоднорідного твердого тіла відносно координатних площин Ozy, Oxz, Oxy відповідно. Крім того, оскільки ми розглядали неоднорідне абсолютно тверде тіло з розмірами, що значно менші порівняно з розмірами Землі, і яке знаходиться поблизу земної поверхні, то з великим ступенем точності можна вважати, що прискорення вільного падіння \vec{g} в усіх точках тіла є величина стала, і на неї у виразах (10.24) можна скоротити чисельник і знаменник.

8.4. Центр мас системи матеріальних точок

Масою системи, що складається з n матеріальних точок, називається

сума мас точок системи: $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i$. (8.25)

Припустимо, що всі точки системи (A_1, A_2, \dots, A_n) рухаються з однаковими прискореннями \vec{a} , які за другим законом Ньютона можна вважати спричиненими дією системи паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, причому для будь-якої матеріальної точки A_i з масою m_i справедливо співвідношення: $\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}$. (8.26)

Центром мас, або центром інерції системи матеріальних точок

$(m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n)$ називається центр паралельних сил $\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}$, що надають рух точкам системи з однаковим прискоренням або поступальний рух незмінній системі. Таким чином, згідно (8.13), *формула для радіус-вектор центра мас системи матеріальних точок* матиме вигляд:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot m_i \cdot a}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\vec{r}_1 \cdot m_1 + \vec{r}_2 \cdot m_2 + \dots + \vec{r}_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (8.27)$$

де \vec{r}_i — радіус-вектором матеріальної точки A_i з координатами (x_i, y_i, z_i) .

Спроектувавши ліву і праву частини виразу (8.27) на осі координат, одержимо *формули для координат центра мас системи матеріальних точок*:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i \cdot a}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \\ y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot m_i \cdot a}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot a} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + \dots + y_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \\ z_C &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot m_i \cdot a}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot a} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2 + \dots + z_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Поняття центра мас більш широке, ніж поняття центра тяжіння системи. Геометрично центр тяжіння тіла збігається з його центром мас, проте ототожнювати центр тяжіння і центр мас не можна, бо між ними є глибокі фізичні відмінності. Поняття про центр тяжіння пов'язане з припущенням про однорідність гравітаційного поля в незначних областях поблизу поверхні Землі. Насправді ж, сили тяжіння непаралельні, тому поняття центра тяжіння вводиться наближено на основі гіпотези про паралельність між собою сил тяжіння, які діють на окремі частини твердого тіла. Поняття центра мас не залежить від такого роду припущень. Введення поняття центра мас дає змогу у ряді випадків звести задачу про рух системи матеріальних точок до задачі про рух однієї точки — центра мас. Як видно з формул (8.28), **координати центра мас залежать тільки від розподілу мас в абсолютно твердому тілі чи незмінній системі матеріальних точок**, причому **положення центра мас є незмінним і не залежить від вибору системи координат і законів руху**.

Якщо маси системи матеріальних точок розміщені симетрично відносно деякої площини, то центр мас системи лежить у цій площині. Якщо маси точок системи розподілені симетрично відносно двох площин, то центр мас розміщений на лінії їх перетину. При симетричному розподілі мас відносно трьох площин центр мас знаходиться у точці перетину цих площин.

Слід зауважити, що вирази (8.27) і (8.28) можна також подати у матричній

формі:
$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \cdot [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n] \cdot [m_1, m_2, \dots, m_n]^T, \quad (8.29)$$

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \\ z_1, z_2, \dots, z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix}. \quad (8.30)$$

8.5 Центр тяжіння плоскої фігури

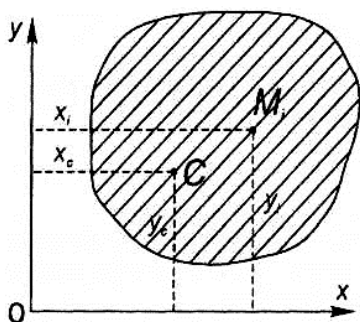


Рис. 8.4.

Однорідне тіло, що має форму тонкої пластинки, можна розглядати як матеріальну плоску фігуру. Положення центра тяжіння C плоскої фігури визначається двома координатами (x_C, y_C) (рис. 8.4).

Силу тяжіння, що діє на однорідну пластинку виразимо формулою: $G = \omega \cdot S$, де S — площа плоскої фігури; ω — сила тяжіння, що діє на одиницю площі однорідної пластинки.

Розіб'ємо пластинку на скінчене число окремих фігур M_i з площею S_i та координатами центра тяжіння (x_i, y_i) . Сила тяжіння, що діє на будь-яку i -ту окрему фігуру визначається формулою: $G_i = \omega \cdot S_i$.

Тоді **координати центра тяжіння плоскої однорідної фігури**:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \omega \cdot S_i}{\omega \cdot S} = \frac{\omega \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot S_i}{\omega \cdot S} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot S_i}{S} = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2 + \dots + x_n \cdot S_n}{S_1 + S_2 + \dots + S_n},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \omega \cdot S_i}{\omega \cdot S} = \frac{\omega \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot S_i}{\omega \cdot S} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot S_i}{S} = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2 + \dots + y_n \cdot S_n}{S_1 + S_2 + \dots + S_n}, \quad (8.33)$$

де підсумовування розповсюджені на всі елементи площини. Ці формули показують, що координати x_C і y_C центра тяжіння однорідної пластини не залежать від постійної ω , яка характеризує матеріал пластини.

Центр тяжіння однорідної пластини називають центром тяжіння площі однорідної пластини.

Сума добутків елементарних площ, що входять до складу площі фігури, на алгебраїчні значення відстаней елементарних площ до деякої осі називається статичним моментом площі плоскої однорідної фігури відносно цієї осі.

Позначивши через M_X і M_Y статичні моменти площі плоскої однорідної фігури відносно осей X і Y , на основі (8.33) маємо:

$$\begin{aligned} M_X &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot S_i = y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2 + \dots + y_n \cdot S_n = y_C \cdot S; \\ M_Y &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot S_i = x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2 + \dots + x_n \cdot S_n = x_C \cdot S. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Таким чином, статичний момент площі плоскої однорідної фігури відносно осі дорівнює добутку площі фігури на алгебраїчне значення відстані від центру тяжіння до цієї осі. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі виражається в см^3 . Якщо відомі статичні моменти відносно координатних осей, то координати центра тяжіння плоскої фігури можна визначити за

$$\text{формулами:} \quad x_C = \frac{M_Y}{S}, \quad y_C = \frac{M_X}{S}. \quad (8.35)$$

Очевидно, що статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, яка проходить через центр тяжіння фігури, дорівнює нулю.

У разі, якщо неоднорідне тіло має форму тонкої пластинки, то його також можна розглядати як матеріальну плоску фігуру, положення центра тяжіння C якої визначається двома координатами (x_C, y_C) , проте формули для цих координат, згідно (8.24) і (8.33), матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta G_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta G_i} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot g \cdot \sigma_i \cdot \Delta S_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g \cdot \sigma_i \cdot \Delta S_i} = \frac{\int_{(S)} x \cdot \sigma(x, y) \cdot dS}{\int_{(S)} \sigma(x, y) \cdot dS}; \\ y_C &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta G_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta G_i} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \cdot g \cdot \sigma_i \cdot \Delta S_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g \cdot \sigma_i \cdot \Delta S_i} = \frac{\int_{(S)} y \cdot \sigma(x, y) \cdot dS}{\int_{(S)} \sigma(x, y) \cdot dS}; \end{aligned} \quad (8.36)$$

де $\Delta G_i = g \cdot \sigma_i \cdot \Delta S_i$ — сила тяжіння, що діє на i -ту елементарну площинку ΔS_i

масою Δm_i з центром у точці $C_i(x_i, y_i)$; $\sigma_i(x_i, y_i) = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta S_i}$ — поверхнева густина в цій точці як границя середньої поверхневої густини.

8.6. Спосіб від'ємних площ та об'ємів

Нехай, необхідно визначити положення центра тяжіння деякої плоскої фігури, яка складається з трьох частин, положення центрів тяжіння яких відомі (рис. 8.5). Прийнемо, що площі частин фігури відповідно рівні S_1, S_2, S_3 , а координати їх центрів тяжіння C_1, C_2, C_3 будуть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей координат дорівнюють сумі статичних моментів площин окремих її частин:

$$M_Y = M_{Y_1} + M_{Y_2} + M_{Y_3} = x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2 + x_3 \cdot S_3 ;$$

$$M_X = M_{X_1} + M_{X_2} + M_{X_3} = y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2 + y_3 \cdot S_3 .$$
(8.37)

Визначивши статичні моменти відносно осей координат, можна знайти **координати центра тяжіння площі плоскої фігури**, підставивши значення статичних моментів її складових частин у формули (8.35):

$$x_C = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2 + x_3 \cdot S_3}{S_1 + S_2 + S_3} , \quad y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2 + y_3 \cdot S_3}{S_1 + S_2 + S_3} .$$
(8.38)

Цей спосіб зручно застосувати при визначенні центра тяжіння плоскої фігури, з якої вирізана деяка частина (рис. 8.6). Знаючи площу S_1 всієї фігури і координати (x_1, y_1) її центра тяжіння C_1 , а також площу S_2 і координати (x_2, y_2) центру тяжіння C_2 вирізаної з неї частини, можна визначити координати центра тяжіння частини фігури, що залишилася, за формулами, аналогічними (8.38). При цьому площа цієї частини повинна бути рівною різниці площ S_1 і S_2 , а її статичні моменти — різниці їх статичних моментів. Тоді:

$$x_C = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2} , \quad y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2} .$$
(8.39)

Цей спосіб визначення центра тяжіння плоскої фігури, з якої вирізана деяка частина, називається **способом від'ємних площ**.

Аналогічний прийом, що називається **способом від'ємних об'ємів**, застосовується при визначенні координат центра тяжіння однорідного тіла, одержаного вирізом з тіла об'ємом V_1 і центром тяжіння $C_1(x_1, y_1, z_1)$ частини об'ємом V_2 з центром тяжіння $C_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді:

$$x_C = \frac{x_1 \cdot V_1 - x_2 \cdot V_2}{V_1 - V_2} , \quad y_C = \frac{y_1 \cdot V_1 - y_2 \cdot V_2}{V_1 - V_2} , \quad z_C = \frac{z_1 \cdot V_1 - z_2 \cdot V_2}{V_1 - V_2} .$$
(8.40)

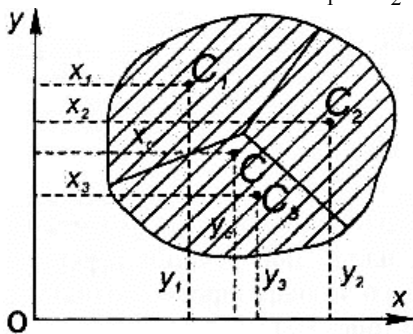


Рис. 8.5.

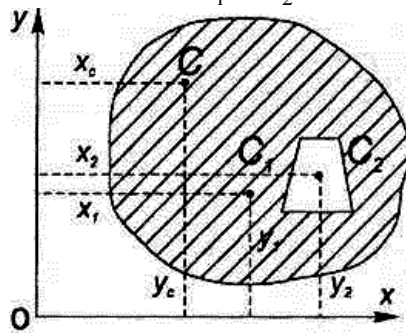


Рис. 8.6.

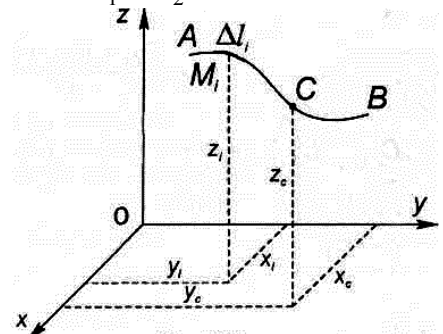


Рис. 8.7.

8.7. Центр тяжіння лінії

Визначимо положення центрів тяжіння однорідних тіл, що мають велику довжину, при порівняно малій площі поперечного перерізу. Розглянемо, наприклад, кусок однорідного тонкого дроту постійного перерізу, вісь якого являє собою дугу AB (рис. 8.7). Силу тяжіння, що діє на дріт виразимо формулою:

$$G = \rho \cdot L ,$$
(8.41)

де L — довжина лінії AB ; ρ — сила тяжіння, що діє на одиницю довжини дроту. Розіб'ємо лінію AB на елементарні ділянки M_i довжиною Δl_i . Сила тяжіння, що діє на кожну елементарну ділянку визначається за формулою:

$$\Delta G_i = \rho \cdot \Delta l_i .$$
(8.42)

Координати центра тяжіння кожної елементарної ділянки позначимо (x_i, y_i, z_i) . Тоді координати центра тяжіння C куска однорідного тонкого дроту постійного перерізу, вісь якого являє собою дугу AB визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \rho \cdot \Delta l_i}{\rho \cdot L} = \frac{\rho \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta l_i}{\rho \cdot L} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta l_i}{L}; \\ y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \rho \cdot \Delta l_i}{\rho \cdot L} = \frac{\rho \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta l_i}{\rho \cdot L} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta l_i}{L}; \\ z_C &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \rho \cdot \Delta l_i}{\rho \cdot L} = \frac{\rho \cdot \sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta l_i}{\rho \cdot L} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta l_i}{L}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Переходячи до границі, при $n \rightarrow \infty$ будемо мати:

$$x_C = \frac{1}{L} \cdot \int_L x \cdot dl, \quad y_C = \frac{1}{L} \cdot \int_L y \cdot dl, \quad z_C = \frac{1}{L} \cdot \int_L z \cdot dl, \quad (8.44)$$

де підсумовування розповсюджені на всі елементи дроту.

Криволінійні інтеграли $\int_L x \cdot dl$, $\int_L y \cdot dl$, $\int_L z \cdot dl$ називаються **статичними моментами лінії AB відносно координатних площин**.

Центр тяжіння однорідного тонкого дроту постійного перерізу, вісь якого співпадає з деякою лінією, називається **центром тяжіння** цієї **лінії**.

8.8. Теорема Паппа-Гульдіна

З питаннями про визначення положення центрів тяжіння ліній і площ пов'язані дві елементарні теореми, які називаються **теоремами Паппа-Гульдіна**. Ці теореми були знайдені в різні часи геометром Паппа (III ст. н. е.) і Гульдіним (1577-1643 рр.).

Теорема 8.1: *площа поверхні тіла, утвореного обертанням плоскої кривої навколо осі, що лежить в її площині та її не перетинає, дорівнює добуткові довжини цієї кривої на довжину дуги кола, описаного її центром тяжіння.*

Нехай $AB = L$ (рис. 8.8) — дуга плоскої кривої, яка, обертаючись навколо осі Oz , утворює бічну поверхню тіла обертання. Виділимо на кривій AB елемент $ab = dl$. Площа елемента бічної поверхні, що утворена обертанням елемента dl , може бути обчислена з точністю до величини другого порядку мализни, як площа бічної поверхні зрізаного конуса. Отже,

$$dS = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl, \quad (8.45)$$

де x — наближена координата центра тяжіння елемента dl .

$$\text{Із формули (8.45) випливає, що: } S = 2 \cdot \pi \cdot \int_A^B x \cdot dl = 2 \cdot \pi \cdot \int_L x \cdot dl. \quad (8.46)$$

$$\text{На підставі (8.44), маємо } x_C \cdot L = \int_L x \cdot dl, \text{ тоді: } S = 2 \cdot \pi \cdot x_C \cdot L. \quad (8.47)$$

Теорема доведена.

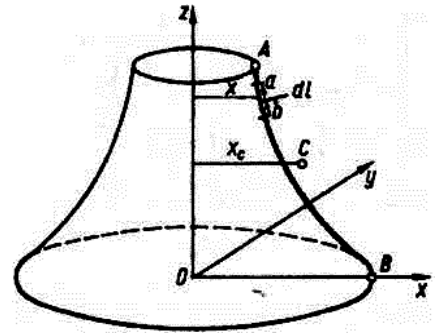


Рис. 8.8.

Теорема 8.2: *об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, що лежить в її площині і не перетинається з її контуром, дорівнює добуткові площі цієї фігури на довжину кола, описаного її центром тяжіння.*

Нехай плоска фігура Q обертається навколо осі Oz (рис. 8.9). Виділимо елемент площі dS та розглянемо елемент об'єму dV тіла обертання, який опише цей елемент площі. З точністю до нескінченно малих другого порядку мализни цей елемент об'єму визначається за формулою:

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dS, \quad (8.48)$$

де x — приближена координата центра тяжіння елемента dS

Про інтегрувавши вираз (10.48), одержимо:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_S x \cdot dS. \quad (8.49)$$

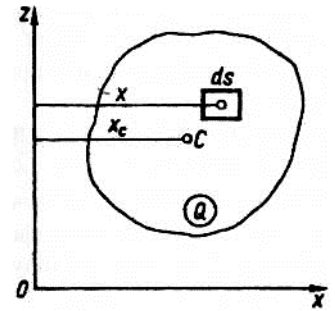


Рис. 8.9.

На підставі (8.36) у випадку однорідної плоскої фігури Q , маємо $x_c \cdot S = \int_S x \cdot dS$, тоді: $V = 2 \cdot \pi \cdot x_c \cdot S.$ (8.50)

Теорема доведена. Зазначимо, що ці теореми мають місце, коли тіло повертати на будь-який кут $\varphi \leq 2 \cdot \pi$.

8.9. Центри тяжіння деяких фігур і ліній

При визначенні центра тяжіння $C(x_c, y_c, z_c)$ однорідного абсолютно твердого тіла зручно використовувати метод симетрії:

- 1) для однорідного тіла, що має площину симетрії, центр тяжіння знаходиться в цій площині симетрії, тобто якщо, наприклад, для однорідного тіла Q_1 площиною симетрії є координатна площина Oxy , то його центр тяжіння $C(x_c, y_c, z_c)$ знаходиться в цій площині Oxy , а координата $z_c = 0$;
- 2) для однорідного тіла, що має вісь симетрії, центр тяжіння знаходиться на цій осі симетрії, тобто якщо, наприклад, для однорідного тіла Q_2 віссю симетрії є координатна вісь Oz , то його центр тяжіння $C(x_c, y_c, z_c)$ знаходиться на цій осі Oz , при цьому $x_c = 0$ і $y_c = 0$;
- 3) для однорідного тіла, що має центр симетрії, центр тяжіння знаходиться в цьому центрі симетрії, тобто якщо, наприклад, для однорідного тіла Q_3 центром симетрії є початок координат $O(0, 0, 0)$, то його центр тяжіння $C(x_c, y_c, z_c)$ знаходиться в точці O , при цьому $x_c = 0$, $y_c = 0$ і $z_c = 0$.

Користуючись методом симетрії можна без розрахунків визначити положення центрів тяжіння наступних геометричних фігур:

1. **центр тяжіння площі паралелограма, прямокутника і квадрата** збігається з точкою перетину їх діагоналей;
2. **центр тяжіння площі круга** збігається з його геометричним центром;
3. **центр тяжіння площі сфери** збігається з її геометричним центром;
4. **центр тяжіння об'єму паралелепіпеда** збігається з точкою перетину його діагоналей;
5. **центр тяжіння об'єму призми і циліндра** лежить на середині відрізка, який з'єднує центри тяжіння їх основ;
6. **центр тяжіння об'єму кулі** збігається з її геометричним центром.

Центр тяжіння площі трикутника

Скористаємось способом розбиття і розділимо трикутник ABO (рис. 8.10) на елементарні смужки, провівши лінії, паралельні стороні AO . Кожну таку

смужку можна прийняти за прямокутник. Центри тяжіння цих прямокутників знаходяться на їх серединах, тобто на медіані BD трикутника ABO .

Розбиваючи потім трикутник ABO на елементарні смужки лініями, які паралельні стороні AB , приходимо до висновку, що центри тяжіння цих прямокутників також знаходяться на їх серединах, тобто на медіані OE трикутника ABO . З цього випливає, що **центр тяжіння S площі трикутника лежить на цій медіані**, і, отже, на інших медіанах, тобто **в точці перетину його медіан, яка знаходиться на рівні $\frac{1}{3}$ висоти від**

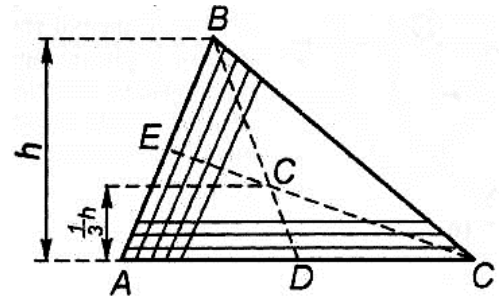


Рис. 8.10.

кожної основи трикутника. При цьому, точка S ділить кожен із медіан на відрізки у відношенні $\frac{1}{2}$, тобто $\frac{DC}{CB} = \frac{1}{2}$, $\frac{EC}{CO} = \frac{1}{2}$ або $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{3}$, $\frac{EC}{EO} = \frac{1}{3}$.

Якщо відомі координати вершин трикутника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $O(x_3, y_3)$, то

$$x_C = \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3), \quad y_C = \frac{1}{3} \cdot (y_1 + y_2 + y_3). \quad (8.51)$$

Центр тяжіння площі трапеції

Аналогічно попередньому випадку, розіб'ємо трапецію $ABDK$ (рис. 8.11) на елементарні смужки, паралельні основам BD і AK . Центри тяжіння цих смужок розташовуються на відріжку EL , що з'єднує середини основ трапеції. Отже і центр тяжіння площі трапеції лежить на цьому відріжку, тобто, для даної системи координат т. S знаходиться по осі X на відстані половини нижньої основи від т. A :

$$x_C = \frac{1}{2} \cdot a. \quad (8.52)$$

Для того, щоб знайти координату y_C як відстань від нижньої основи, розіб'ємо трапецію $ABDK$ на два трикутники ABD і ADK . Для кожного з них відповідно маємо: $y_1 = \frac{2}{3} \cdot h$, $S_1 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$, $y_2 = \frac{1}{3} \cdot h$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

Скориставшись формулою (8.38), отримаємо:

$$y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot h + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h} = \frac{\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot (2 \cdot b + a)}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot (b + a)} = \frac{h \cdot (2 \cdot b + a)}{3 \cdot (b + a)} = \frac{h}{3} \cdot \left(1 + \frac{b}{b + a}\right). \quad (8.53)$$

Центр тяжіння об'єму конуса і піраміди

Нехай маємо конус, висота якого h а радіус основи r_0 (рис. 8.12). Необхідно знайти його координати центра тяжіння S . На висоті z виділимо елементарний об'єм, що дорівнює добуткові площі S перерізу радіуса r на dz , тобто $dV = S \cdot dz = \pi \cdot r^2 \cdot dz$. Далі, скориставшись формулою (8.24), для однорідного

конуса отримаємо:
$$z_C = \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} z \cdot dV = \frac{1}{V} \cdot \int_0^h z \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dz.$$

Очевидно, що для конуса (рис. 8.12) має місце співвідношення $\frac{r}{z} = \frac{r_0}{h}$,

оскільки конус з висотою h і конус з висотою z — подібні, тому $r = \frac{r_0}{h} \cdot z$.

Якщо врахувати, що об'єм конуса дорівнює $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot h$, то, підставивши в інтеграл замість r і V одержані співвідношення, матимемо:

$$z_C = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot h} \cdot \int_0^h z \cdot \pi \cdot \left(\frac{r_0}{h} \cdot z\right)^2 \cdot dz = \frac{3}{h^3} \cdot \int_0^h z^3 \cdot dz = \frac{3}{h^3} \cdot \frac{1}{4} \cdot h^4 = \frac{3}{4} \cdot h. \quad (8.54)$$

Центр тяжіння об'єму конуса лежить на відрізку AO , що з'єднує вершину конуса із центром тяжіння основи і ділить його у відношенні $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{4}$.

Очевидно, що таке саме співвідношення матиме місце і для піраміди.

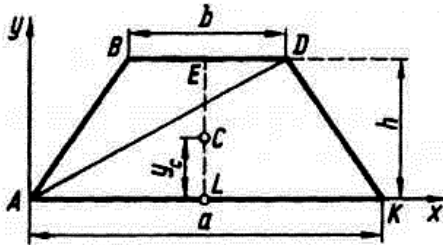


Рис. 8.11.

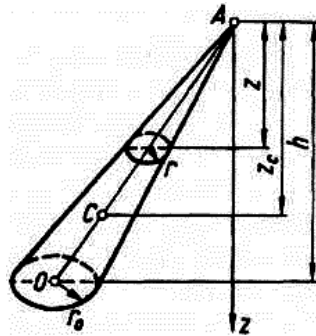


Рис. 8.12.

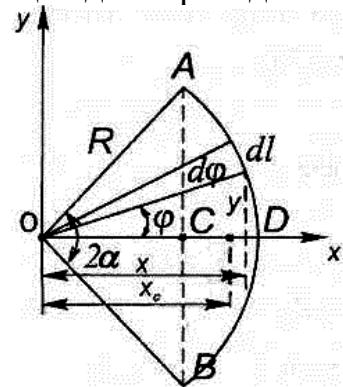


Рис. 8.13.

Центр тяжіння дуги кола

Розглянемо дугу AB кола радіуса R з центральним кутом $2 \cdot \alpha$ (рис. 8.13). Виберемо початок координат у центрі кола O і направимо вісь Ox перпендикулярно хорді AB . Внаслідок симетрії фігури відносно осі Ox , центр тяжіння дуги кола AB буде лежати на осі Ox , тобто $y_C = 0$, тому залишається знайти координату x_C . Скористаємося формулою (8.44) для центра тяжіння лінії, згідно якої

$$x_C = \frac{1}{L} \cdot \int_L x \cdot dl = \frac{1}{L} \cdot \int_A^B x \cdot dl.$$

Враховуючи, що $x = R \cdot \cos \varphi$, $dl = R \cdot d\varphi$ і $L = R \cdot 2 \cdot \alpha$, маємо:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{L} \cdot \int_A^B x \cdot dl = \frac{1}{R \cdot 2 \cdot \alpha} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cdot \cos \varphi \cdot R \cdot d\varphi = \frac{R}{2 \cdot \alpha} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \\ &= \frac{R}{2 \cdot \alpha} \cdot (\sin \alpha - \sin(-\alpha)) = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\alpha}, \end{aligned} \quad (8.55)$$

де α — половина центрального кута в радіанах.

Наприклад, для **центра тяжіння дуги півкола** $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, будемо мати:

$$x_C = \frac{2 \cdot R}{\pi}. \quad (8.56)$$

Зауважимо, що останню формулу (8.56) для координати центра тяжіння дуги півкола легко отримати також за допомогою першої теореми Паппа-Гульдїна. Нехай відстань центра тяжіння дуги півкола від діаметра буде x_C . Якщо обертати дугу півкола навколо діаметра, на який вона спирається, то одержимосферу. Тоді, на підставі формули (8.47) — $S = 2 \cdot \pi \cdot x_C \cdot L$, матимемо:

$$4 \cdot \pi \cdot R^2 = 2 \cdot \pi \cdot x_C \cdot \pi \cdot R, \text{ або } x_C = \frac{2 \cdot R}{\pi}. \text{ Ми знову одержали вираз (8.55).}$$

Центр тяжіння кругового сектора

Нехай задано круговий сектор з центральним кутом $2 \cdot \alpha$ і радіусом R (рис. 8.14). Виділимо в ньому елементарний сектор (заштрихований на рис. 8.14), який можна прийняти за рівнобедрений трикутник, в якому висота R і медіана збігаються. Отже, центр тяжіння кожного елементарного трикутника буде лежати на відстані $\frac{2}{3} \cdot R$ від початку координат. Відповідно, геометричним місцем центрів тяжіння всіх елементарних трикутників буде дуга

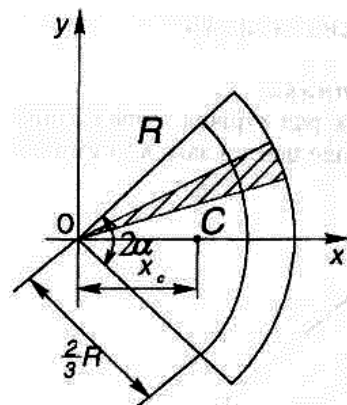


Рис. 8.14.

кола радіуса $\frac{2}{3} \cdot R$. Таким чином, центр тяжіння площі кру-

гового сектора можна знайти як центр тяжіння матеріальної лінії (дуги кола радіуса $\frac{2}{3} \cdot R$), по якій неперервно і рівномірно розподілена маса цього сектора.

Тому, застосовуючи (8.56), одержимо координату центра тяжіння площі

кругового сектора:

$$x_C = \frac{2 \cdot R \cdot \sin \alpha}{3 \cdot \alpha}, \quad (8.57)$$

де α — половина центрального кута в радіанах.

Для центра тяжіння сектора півкола ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), будемо мати:

$$x_C = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}. \quad (8.58)$$

Слід відзначити, що формулу (8.58) також можна було отримати застосовавши другу теорему Паппа-Гульдїна. Обертаючи півколо навколо діаметра, на який воно спирається, одержимо кулю. На підставі формули (8.50) —

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_C \cdot S, \text{ матимемо: } \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 2 \cdot \pi \cdot x_C \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R, \text{ або } x_C = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}, \text{ тобто ми знову прийшли до виразу (8.58).}$$

Центр тяжіння кругового сегмента

Нехай задано круговий сегмент ADB , обмежений дугою AB і хордою AB , що її стягує (рис. 8.13). Відповідний йому круговий сектор $OADB$ має центральний кут $2 \cdot \alpha$ і радіус R . Оскільки круговий сегмент ADB має вісь симетрії, яка співпадає з координатною віссю Ox , то його центр тяжіння буде лежати на осі Ox , тобто $y_C = 0$, тому залишається знайти координату x_C .

Скористаємося методом від'ємних площ. Круговий сегмент ADB одержується із кругового сектора $OADB$ при вирізанні з нього рівнобедреного трикутника OAB . Знаючи площу $S_{сек} = 2 \cdot \alpha \cdot R \cdot \frac{R}{2} = \alpha \cdot R^2$ кругового сектора $OADB$ і

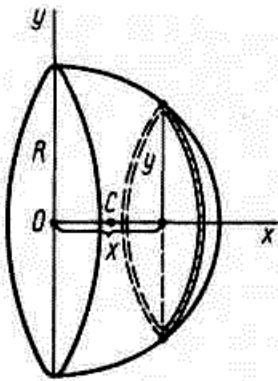
координату центра тяжіння його площі $x_{сек} = \frac{2 \cdot R \cdot \sin \alpha}{3 \cdot \alpha}$, а також площу $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \alpha = R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ рівнобедреного трикутника

OAB і координату центра тяжіння його площі $x_{\Delta OAB} = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos \alpha$, то **координату** x_C **центру тяжіння** C **площі кругового сегменту** ADB можна визначити за формулою (10.39):

$$x_C = \frac{x_{сек} \cdot S_{сек} - x_{\Delta OAB} \cdot S_{\Delta OAB}}{S_{сек} - S_{\Delta OAB}} = \frac{\frac{2 \cdot R \cdot \sin \alpha}{3 \cdot \alpha} \cdot \alpha \cdot R^2 - \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\alpha \cdot R^2 - R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \cdot R^3 \cdot \sin \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{R^2 \cdot (\alpha - \cos \alpha \cdot \sin \alpha)} = \frac{2 \cdot R \cdot \sin^3 \alpha}{3 \cdot (\alpha - \cos \alpha \cdot \sin \alpha)}. \quad (8.59)$$

Центр тяжіння об'єму півкулі



Знайдемо центр тяжіння C об'єму однорідної півкулі радіуса R (рис. 8.15). Півкуля має вісь симетрії, яку приймемо за координатну вісь Ox . Тоді центр тяжіння буде лежати на осі Ox , тобто $y_C = 0$ і $z_C = 0$, тому залишається знайти тільки координату x_C .

Розіб'ємо об'єм півкулі на елементарні диски товщиною dx і радіусом y , який є координатою точки кола, що одержується від перетину півкулі з координатною площиною Oxy . Рівняння цього кола $x^2 + y^2 = R^2$, де R — радіус півкулі

Рис. 8.15. Для координати x_C центра тяжіння об'єму півкулі маємо

$$x_C = \frac{\int x \cdot dV}{V}, \text{ де } x \text{ — координата центра тяжіння елементарного диску. Об'єм}$$

півкулі дорівнює половині об'єму кулі $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$. Об'єм елементарного диску $dV = \pi \cdot r^2 \cdot dx = \pi \cdot y^2 \cdot dx = \pi \cdot (R^2 - x^2) \cdot dx$, оскільки $r = y$, а $y^2 = R^2 - x^2$. Виконуючи інтегрування в межах від $x = 0$ до $x = R$, одержимо:

$$x_C = \frac{\int x \cdot dV}{V} = \frac{\int_0^R x \cdot \pi \cdot (R^2 - x^2) \cdot dx}{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{3}{2 \cdot R^3} \cdot \int_0^R (R^2 - x^2) \cdot x \cdot dx =$$

$$= \frac{3}{2 \cdot R^3} \cdot \left[\int_0^R R^2 \cdot x \cdot dx - \int_0^R x^3 \cdot dx \right] = \frac{3}{2 \cdot R} \cdot \int_0^R x \cdot dx - \frac{3}{2 \cdot R^3} \cdot \int_0^R x^3 \cdot dx = \quad (8.60)$$

$$= \frac{3}{2 \cdot R} \cdot \frac{1}{2} \cdot (R^2 - 0) - \frac{3}{2 \cdot R^3} \cdot \frac{1}{4} \cdot (R^4 - 0) = \frac{3}{4} \cdot R - \frac{3}{8} \cdot R = \frac{3}{8} \cdot R.$$

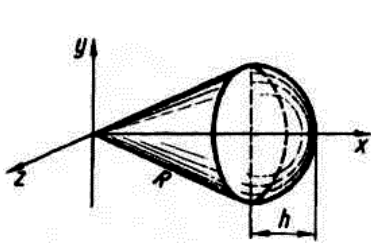


Рис. 8.16.

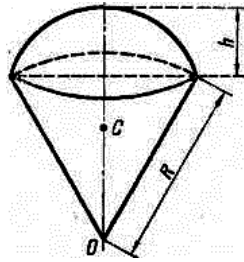


Рис. 8.17.

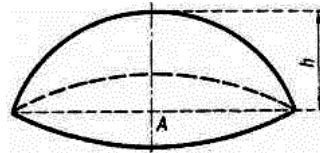


Рис. 8.18.

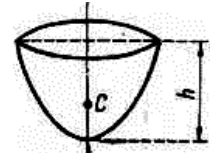


Рис. 8.19.

Наведемо без виведення формули для координати центра тяжіння деяких тіл, що мають вісь симетрії:

1) координата центра тяжіння поверхні сегмента кулі заввишки h і радіусом

$$R \text{ (рис. 8.16) — } x_C = R - \frac{h}{2}; \quad (8.61)$$

2) центр тяжіння об'єму сектора кулі (рис. 8.17) заввишки h і радіусом R

$$x_C = \frac{3}{4} \cdot \left(R - \frac{h}{2} \right); \quad (8.62)$$

3) центр тяжіння об'єму сегмента кулі (рис. 8.18) заввишки h і радіусом R лежить на осі симетрії на відстані від основи сегмента

$$AC = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2 \cdot R - h)^2}{(3 \cdot R - h)}; \quad (8.63)$$

4) центр тяжіння об'єму параболоїда обертання (рис. 8.19) висотою h лежить на його осі симетрії на відстані від вершини параболоїда

$$OC = \frac{2}{3} \cdot h; \quad (8.64)$$

5) центр тяжіння периметру трикутника $A_1A_2A_3$ (рис. 8.20) знаходиться в центрі кола C , що вписано в трикутник $B_1B_2B_3$, де B_1, B_2, B_3 — середини сторін трикутника $A_1A_2A_3$, a_1, a_2, a_3 — сторони трикутника $A_1A_2A_3$, H_2 — висота, яка відповідає стороні a_2 :

$$h_2 = \frac{H_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3}; \quad (8.65)$$

6) центр тяжіння площі параболічного сегменту (рис. 8.21) висотою h лежить на його осі симетрії на відстані від точки O середини основи

$$OC = \frac{2}{5} \cdot h. \quad (8.66)$$

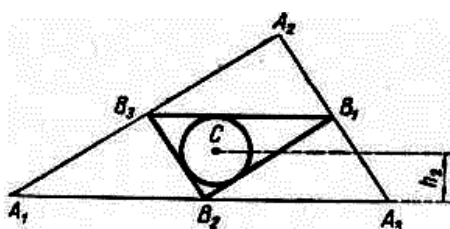


Рис. 8.20.

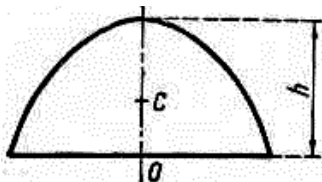


Рис. 8.21.

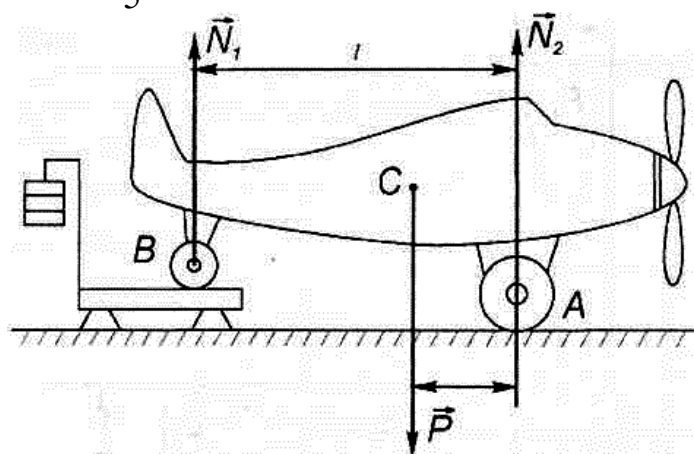


Рис. 8.22.

Експериментальний спосіб визначення центру тяжіння

Покажемо, як можна експериментально визначити одну з координат, — центра тяжіння літака (відстань a), якщо відстань $AB = l$ (рис. 8.22) відома. Поставивши колесо B на платформу ваги, зважуванням знайдемо силу тиску колеса на платформу; так само буде знайдена чисельно рівна цій силі реакція \vec{N}_1 . Також зважуванням знаходимо реакцію \vec{N}_2 . Прирівнюючи до нуля суму моментів всіх сил відносно центра тяжіння літака, одержуємо:

$$N_2 \cdot a - N_1 \cdot (l - a) = 0, \quad (8.67)$$

звідки знаходимо:

$$a = \frac{N_1 \cdot l}{(N_1 + N_2)}. \quad (8.68)$$

Очевидно, що $N_1 + N_2 = P$, де P — сила тяжіння, що діє на весь літак. Якщо значення величини P наперед відомо, то для визначення a можна обійтись одним зважуванням.

8.10. Статична стійкість положення рівноваги абсолютно твердого тіла.

Будь яке тверде тіло може перебувати під дією зовнішніх сил у стані:

- 1) **стійкої рівноваги** (рис. 8.23), коли, після незначного відхилення від положення рівноваги, прикладені до тіла сили повертають його в попереднє положення. Ознакою стійкої рівноваги є таке положення тіла, за якого його центр тяжіння займає найнижче положення порівняно з іншими найближчими можливими положеннями;
- 2) **нестійкої рівноваги** (рис. 8.24), коли, після незначного відхилення від положення рівноваги, тіло вже не повертається в попереднє положення. Ознакою нестійкої рівноваги є таке положення тіла, за якого його центр тяжіння займає найвище положення порівняно з іншими найближчими можливими положеннями;
- 3) **байдужої рівноваги** (рис. 8.25), коли, після незначного відхилення від положення рівноваги, тіло фактично зберігає своє попереднє положення. Ознакою байдужої рівноваги є таке положення тіла, за якого його центр тяжіння займає однакове положення порівняно з іншими найближчими можливими положеннями, тому всі найближчі положення тіла є рівноправними положеннями рівноваги.

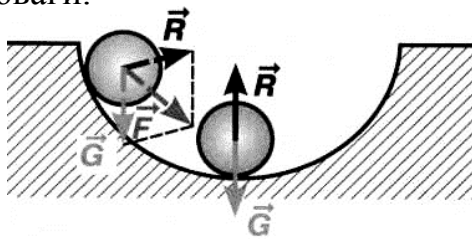


Рис. 8.23.

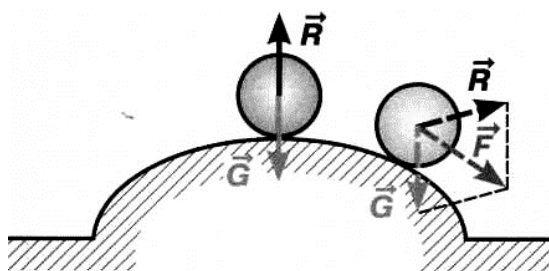
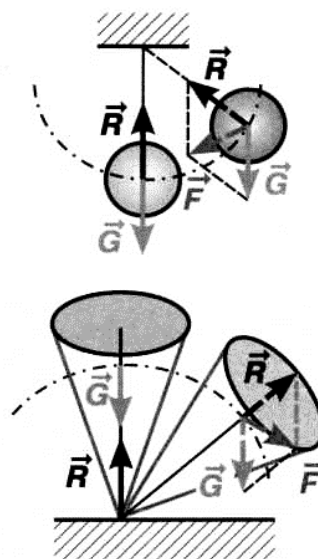


Рис. 8.24.



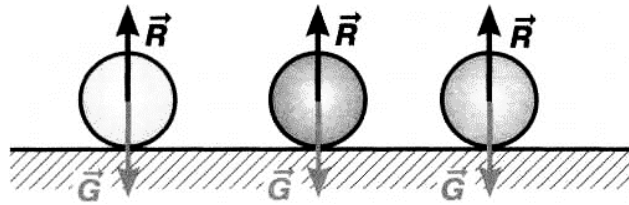


Рис. 8.25.

В загальному випадку, *положення статичної рівноваги абсолютно твердого тіла називається статично стійким*, якщо при невеликих відхиленнях тіла від цього положення момент, що повертає тіло в положення рівноваги, буде більшим за збурюючий момент, що відхиляє тіло від цього положення.

Поняття стійкості статичної рівноваги тіла — це лише необхідна умова стійкості положення рівноваги, коли відсутній рух тіла, тобто без урахування його динаміки і збурення початкових умов.

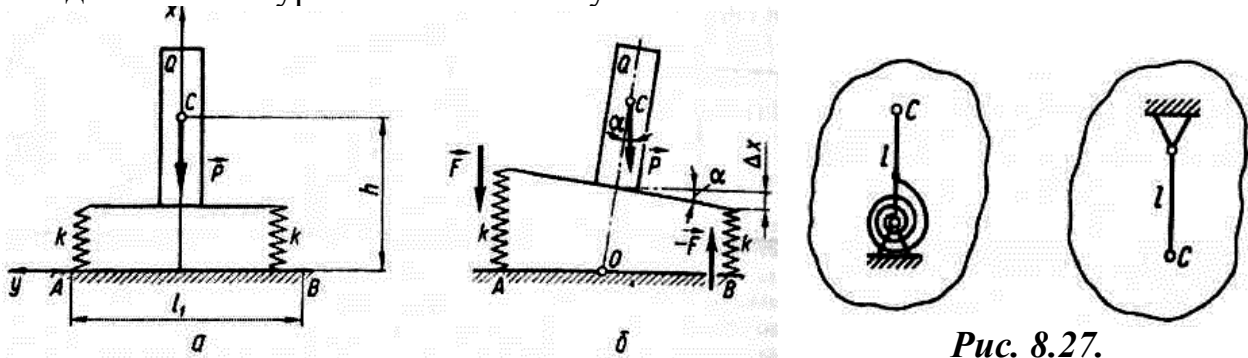


Рис. 8.26.

Рис. 8.27.

Незважаючи на вузькість самого поняття статичної стійкості, воно може бути корисним при розв'язуванні багатьох прикладних задач статички, що зводяться до схеми одноланкового механізму. Більшість одноланкових механізмів або тіл зводяться до схеми фізичного маятника з верхньою чи нижньою маятниковістю (рис. 8.26). Прикладами *системи з верхньою маятниковістю* є, зокрема, підймальні крани на рухомій основі (на шасі автомобіля чи іншого рухомого об'єкту) (рис. 8.27), або й самі об'єкти, що рухаються по поверхні Землі, у воді чи повітрі.

Якщо жорсткість пружинних опор (коліс чи упорів) позначити k , то при повороті на невеликий кут α (рис. 8.27, б) в опорах A і B виникнуть сили $(\vec{F}, -\vec{F})$, що створять пару сил з моментом $M(\vec{F}, -\vec{F}) = l_1 \cdot F$, який протилежно направлений моменту сили тяжіння P тіла Q відносно точки O — $M_o(\vec{P})$.

Очевидно, що тіло Q утримається у вертикальному положенні, якщо момент пари пружних опор буде більшим за момент сили тяжіння P , яка намагається перекинути (збурити) тіло. Знайдемо співвідношення між ними.

При повороті тіла на кут α , згідно з законом Гука, в пружних опорах виникнуть сили:

$$F = k \cdot \Delta x = k \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \alpha, \quad (8.69)$$

де $\Delta x = \frac{l_1}{2} \cdot \alpha$; k — коефіцієнт лінійної жорсткості опор.

Момент пари сил пружних опор дорівнюватиме:

$$M(\vec{F}, -\vec{F}) = l_1 \cdot F = l_1 \cdot k \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot k \cdot l_1^2 \cdot \alpha. \quad (8.70)$$

Момент сили тяжіння P , що намагається перекинути тіло:

$$M_o(\vec{P}) = h \cdot \alpha \cdot P. \quad (8.71)$$

Для стійкості системи необхідно, щоб момент пари сил пружних опор був більший за момент повертаючої сили тяжіння, тобто:

$$M(\vec{F}, -\vec{F}) > M_O(\vec{P}). \quad (8.72)$$

З урахуванням співвідношень (8.70) і (8.71), нерівність (8.72), скоротивши на α , перепишемо у вигляді: $\frac{1}{2} \cdot k \cdot l_1^2 > h \cdot P$, або $k > \frac{2 \cdot h \cdot P}{l_1^2}$. (8.73)

Як видно з умови (8.73), стійкість системи забезпечити тим легше, чим більша жорсткість опор k і більша відстань l_1 між опорами.

Цей факт використовується на практиці. Наприклад, крани на автомобільних шасі ставлять на додаткові жорсткі металеві опори, які виносять за межі габаритів автомобіля, щоб збільшити l_1 .

При русі автомобіля по кривій до збурюючих сил слід додати ще збурюючий момент від відцентрових сил.

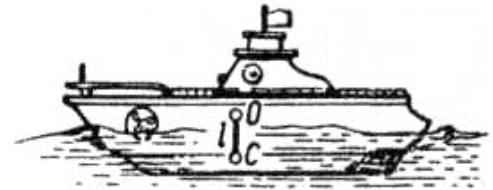


Рис. 8.28.

Системи з нижньою маятниковістю реалізують, наприклад, у рухомих об'єктах, що переміщуються по воді або у воді (кораблі, підводні човни). Геометрію цих об'єктів і розташування мас у них вибирають так, щоб центр прикладання гідростатичних сил Архімеда (точка O) був завжди вище центра тяжіння цієї конструкції (точка C) (рис. 8.28), тобто реалізують схему фізичного маятника. До схеми з верхньою маятниковістю зводяться також будівельні конструкції, що прикріплені до основи.

Якщо тверде тіло не прикріплене до основи, то умова його статичної рівноваги така, що сила тяжіння не повинна виходити за межі основи (рис. 8.29) і створювати момент сили тяжіння, який перекидає тіло. У положенні a і b на рис. 8.29 конструкція є стійкою, а в положенні $в$ — нестійкою.

Кут повернення тіла із стійкого положення рівноваги в нестійке називається кутом стійкості α (рис. 8.30). Здатність тіла чинити опір порушенню його рівноваги називається статичною стійкістю тіла.

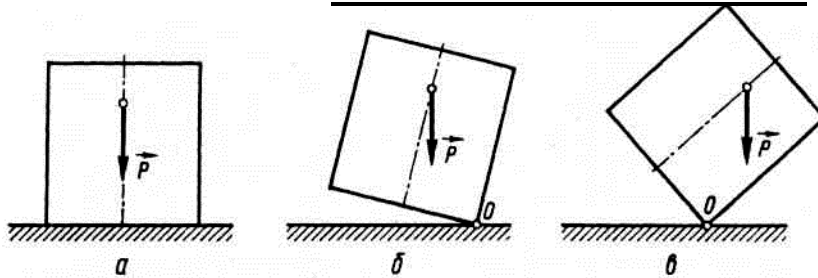


Рис. 8.29.

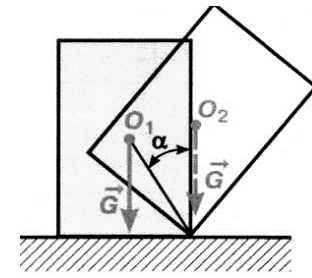


Рис. 8.30.

Таким чином, умови статичної стійкості незакріпленого абсолютно твердого тіла, яке спирається на площину, забезпечують співвідношення між значеннями діючих сил і геометричними розмірами тіла.

Розглянемо це більш детально. Нехай на незакріплене тверде тіло $ABCD$ (рис. 8.31) діють сила тяжіння \vec{G} і зсувна сила \vec{F} , яка направлена під кутом α до горизонту. Добуток сили тяжіння на її плече відносно точки D можливого обертання тіла називається моментом стійкості тіла: $M_{cm} = b \cdot G$. (8.74)

Добуток модуля перекидної сили на її плече відносно точки D можливого обертання тіла називається перекидним моментом тіла: $M_{nep} = a \cdot F$. (8.75)

Для статичної стійкості тіла потрібно, щоб момент стійкості тіла був більшим за перекидний момент: $M_{cm} > M_{nep}$. (8.76)

Відношення моменту стійкості до перекидного моменту називається **кое-**

фіцієнтом стійкості:
$$K = \frac{M_{cm}}{M_{пер}} \quad (8.77)$$

За можливих відхилень у значеннях діючих сил коефіцієнт стійкості беруть $K \geq 1,3 \div 1,5$. Таким чином, **при $K > 1$** (рис. 8.32) **незакріплене абсолютно тверде тіло, яке спирається на площину, перебуває в стані стійкої рівноваги.** **При $K = 1$** (рис. 8.33) **тіло перебуває в стані байдужої рівноваги.** **При $K < 1$** (рис. 8.34) **тіло перебуває в стані нестійкої рівноваги** (воно перекидається).

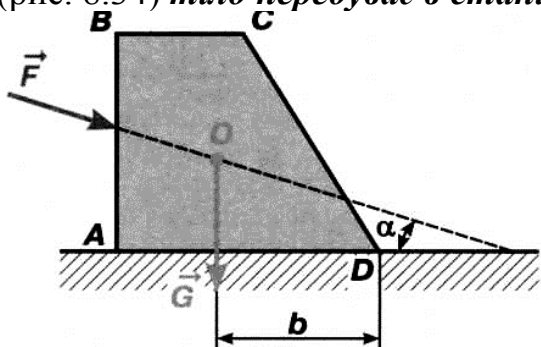


Рис. 8.31.

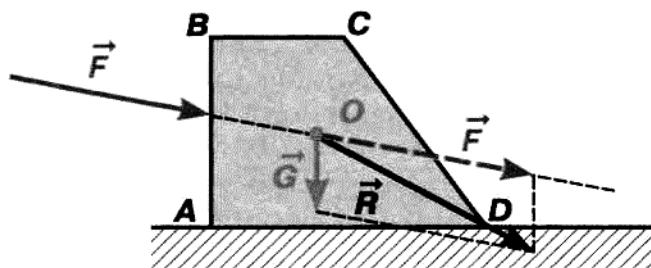


Рис. 8.33.

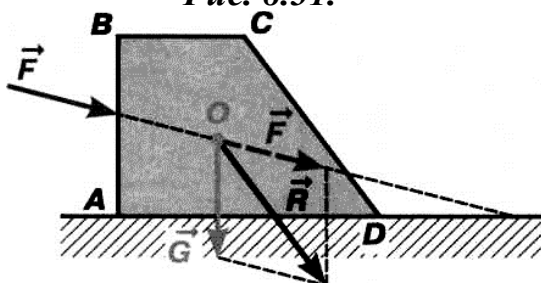


Рис. 8.32.

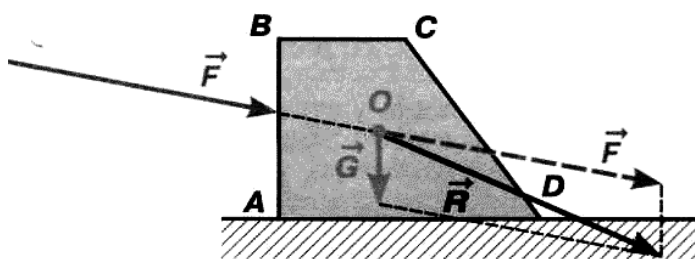


Рис. 8.34.

8.11. Приклади розв'язування задач статички на знаходження центру тяжіння

Приклад 8.1

Знайти координати центра тяжіння площі поперечного перерізу нерівнобокого кутника, розміри якого вказані на рис. 8.35.

Розв'язання:

Розіб'ємо кутник на два прямокутники, площі яких $S_1 = l \cdot d$ і $S_2 = (a - d) \cdot d$. На основі (8.38), формули для координат центра тяжіння кутника будуть:

$$x_C = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}, \quad y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2},$$

де (x_1, y_1) – координати центра першого прямокутника, а (x_2, y_2) – другого.

$$x_1 = \frac{d}{2}, \quad y_1 = \frac{l}{2}, \quad S_1 = l \cdot d, \quad x_2 = d + \frac{(a - d)}{2}, \quad y_2 = \frac{d}{2}, \quad S_2 = (a - d) \cdot d.$$

Таким чином, маємо:

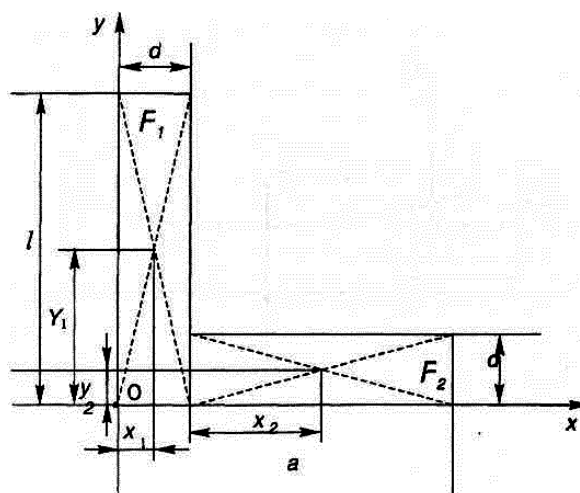


Рис. 8.35.

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{\frac{d}{2} \cdot l \cdot d + \left[d + \frac{(a-d)}{2} \right] \cdot (a-d) \cdot d}{l \cdot d + (a-d) \cdot d} = \frac{\frac{1}{2} \cdot l \cdot d^2 + (a-d) \cdot d^2 + \frac{1}{2} \cdot (a-d)^2 \cdot d}{(l+a-d) \cdot d} = \\
&= \frac{l \cdot d + 2 \cdot (a-d) \cdot d + (a-d)^2}{2 \cdot (l+a-d)} = \frac{l \cdot d + 2 \cdot a \cdot d - 2 \cdot d^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot d + d^2}{2 \cdot (l+a-d)} = \\
&= \frac{l \cdot d - d^2 + a^2}{2 \cdot (l+a-d)} = \frac{a^2 + (l-d) \cdot d}{2 \cdot (l+a-d)}; \\
y_C &= \frac{\frac{l}{2} \cdot l \cdot d + \frac{d}{2} \cdot (a-d) \cdot d}{l \cdot d + (a-d) \cdot d} = \frac{\frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot d + \frac{1}{2} \cdot (a-d) \cdot d^2}{(l+a-d) \cdot d} = \frac{l^2 + (a-d) \cdot d}{2 \cdot (l+a-d)}.
\end{aligned}$$

Приклад 8.2

Знайти центр тяжіння пластинки радіуса R в якій вирізаний отвір у вигляді прямокутника із сторонами a і b (рис. 8.36).

Дано:

R, a, b

$x_C, y_C - ?$

Розв'язання:

Пластинка симетрична відносно осі X , отже, $y_C = 0$. Залиша-

ється знайти лише координату x_C . Згідно (8.39), будемо мати

$$x_C = \frac{x \cdot S - x_1 \cdot S_1}{S - S_1}, \text{ де } S = \pi \cdot R^2, S_1 = a \cdot b, x = 0, x_1 = \frac{a}{2}.$$

Таким чином:

$$x_C = \frac{x \cdot S - x_1 \cdot S_1}{S - S_1} = \frac{0 \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{a}{2} \cdot a \cdot b}{\pi \cdot R^2 - a \cdot b} = \frac{-a \cdot b \cdot \frac{a}{2}}{\pi \cdot R^2 - a \cdot b} = -\frac{a^2 \cdot b}{2 \cdot (\pi \cdot R^2 - a \cdot b)}.$$

Відповідь: $x_C = -\frac{a^2 \cdot b}{2 \cdot (\pi \cdot R^2 - a \cdot b)}, y_C = 0.$

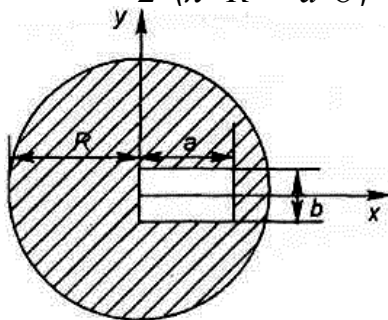


Рис. 8.36.

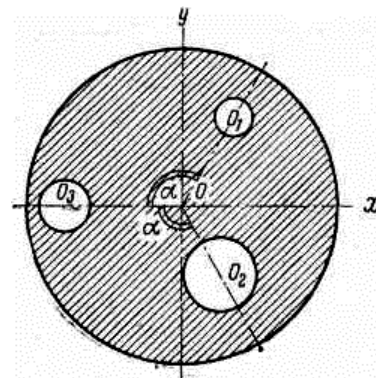


Рис. 8.37.

Приклад 8.3

Визначити положення центру тяжіння фігури, що являє собою коло радіусом R з центром в точці O , з якого вирізані три кола з центрами в точках O_1, O_2, O_3 (рис. 8.37), якщо відстані між центрами цих кіл та їх радіуси відповідно

рівні: $OO_1 = l_1 = \frac{2}{3} \cdot R, OO_2 = l_2 = \frac{1}{2} \cdot R, OO_3 = l_3 = \frac{3}{4} \cdot R, r_1 = \frac{1}{8} \cdot R, r_2 = \frac{1}{4} \cdot R,$

$r_3 = \frac{1}{6} \cdot R, \alpha = 120^\circ.$

Дано:

$$R, \alpha = 120^\circ, OO_1 = l_1 = \frac{2}{3} \cdot R,$$

$$OO_2 = l_2 = \frac{1}{2} \cdot R, OO_3 = l_3 = \frac{3}{4} \cdot R,$$

$$r_1 = \frac{1}{8} \cdot R, r_2 = \frac{1}{4} \cdot R, r_3 = \frac{1}{6} \cdot R$$

$$x_C, y_C \text{ — ?}$$

тяжіння C_1, C_2, C_3, C_4 як $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$.

Так як центр тяжіння кожного кола співпадає з центром цього кола, то:

$$x_1 = l_1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot R, \quad y_1 = l_1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R,$$

$$S_1 = \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot R\right)^2 = \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot R^2;$$

$$x_2 = l_2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot R, \quad y_2 = -l_2 \cdot \sin 60^\circ = -\frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R,$$

$$S_2 = \pi \cdot r_2^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot R\right)^2 = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot R^2;$$

$$x_3 = -l_3 = -\frac{3}{4} \cdot R, \quad y_3 = 0, \quad S_3 = \pi \cdot r_3^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot R\right)^2 = \frac{1}{36} \cdot \pi \cdot R^2;$$

$$x_4 = 0, \quad y_4 = 0, \quad S_4 = \pi \cdot R^2.$$

Для знаходження координат центру тяжіння $C(x_C, y_C)$, скористаємося способом від'ємних площ. Згідно (8.39), будемо мати:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{x_4 \cdot S_4 - x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2 - x_3 \cdot S_3}{S_4 - S_1 - S_2 - S_3} = \\ &= \frac{0 \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{1}{3} \cdot R \cdot \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{1}{4} \cdot R \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot R^2 - \left(-\frac{3}{4} \cdot R\right) \cdot \frac{1}{36} \cdot \pi \cdot R^2}{\pi \cdot R^2 - \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{1}{36} \cdot \pi \cdot R^2} = \\ &= \frac{\pi \cdot R^3 \cdot \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{192} - \frac{1}{64}\right)}{\pi \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36}\right)} = \frac{R \cdot \left(\frac{4}{192} - \frac{1}{192} - \frac{3}{192}\right)}{\frac{576}{576} - \frac{9}{576} - \frac{36}{576} - \frac{16}{576}} = \frac{R \cdot 0}{515} = 0; \end{aligned}$$

$$y_C = \frac{y_4 \cdot S_4 - y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2 - y_3 \cdot S_3}{S_4 - S_1 - S_2 - S_3} =$$

Розв'язання:

Початок координат виберемо в центрі O великого кола, а вісь x направимо по прямій, що з'єднує точки O і O_3 . Будемо розглядати дану фігуру як таку, що складається з кіл радіусів r_1, r_2, r_3 і повного кола радіусом R (без вирізів). Позначимо площі цих кіл S_1, S_2, S_3, S_4 а координати їх центрів

$$\begin{aligned}
& 0 \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R \cdot \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot R^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R \right) \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot R^2 - 0 \cdot \frac{1}{36} \cdot \pi \cdot R^2 \\
&= \frac{\pi \cdot R^2 - \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{1}{36} \cdot \pi \cdot R^2}{\pi \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} \right)} = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{192} \right)}{\pi \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} \right)} = \frac{\sqrt{3} \cdot R \cdot \left(\frac{3}{192} - \frac{1}{192} \right)}{\frac{576}{576} - \frac{9}{576} - \frac{36}{576} - \frac{16}{576}} = \frac{\sqrt{3} \cdot R \cdot \frac{2}{192}}{\frac{515}{576}} = \\
&= \sqrt{3} \cdot R \cdot \frac{1}{96} \cdot \frac{576}{515} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{515} \cdot R \approx 0,02 \cdot R.
\end{aligned}$$

Відповідь: $x_C = 0$, $y_C = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{515} \cdot R$.

Приклад 8.4

Визначити відстань центра тяжіння зрізаного кругового конуса $ADEB$ від його нижньої основи, якщо відомі радіуси R і r нижньої і верхньої основ конуса та його висота h (рис. 8.38).

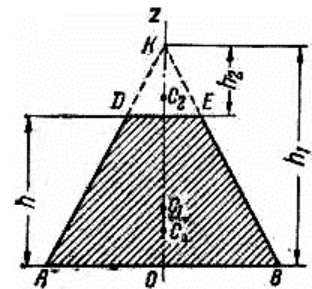


Рис. 8.38.

Дано:

R, r, h

x_C, y_C, z_C — ?

Розв'язання:

Початок координат виберемо в центрі O нижньої основи зрізаного конуса, а вісь z направимо по його висоті. Так як вісь z є віссю симетрії зрізаного конуса, то шуканий центр

тяжіння лежить на цій осі в деякій точці C з координатою z_C , яку і потрібно визначити. Застосовуючи метод доповнення (спосіб від'ємних об'ємів), доповнимо даний зрізаний конус до конуса ABK .

Позначимо C_1 і C_2 — центри тяжіння конусів ABK і DKE , V_1 і V_2 — їх об'єми. Тоді $OC_1 = z_1$, $OC_2 = z_2$ і $V_1 = V_2 + V$ де V — об'єм даного зрізаного конуса. Розглянемо конус ABK , як такий, що складається з двох частин $ADEB$ і DKE та застосувавши вираз (8.40), маємо:

$$z_C = \frac{z_1 \cdot V_1 - z_2 \cdot V_2}{V} \quad \text{або} \quad z_C = \frac{z_1 \cdot V_1 - z_2 \cdot V_2}{V_1 - V_2}.$$

Так як об'єми двох подібних конусів ABK і DKE пропорційні кубам радіусів їх

основ, тобто $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^3}{r^3}$, то $z_C = \frac{z_1 \cdot V_1 - z_2 \cdot V_2}{V_1 - V_2} = \frac{z_1 \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot V_2 - z_2 \cdot V_2}{\frac{R^3}{r^3} \cdot V_2 - V_2} = \frac{z_1 \cdot R^3 - z_2 \cdot r^3}{R^3 - r^3}$.

Крім того, відстань від центра тяжіння конуса до його основи рівне $\frac{1}{4}$

висоти цього конуса, а тому: $z_1 = \frac{h_1}{4}$, $z_2 = h + \frac{h_2}{4} = h + \frac{h_1 - h}{4} = \frac{h_1 + 3 \cdot h}{4}$,

$$z_1 \cdot R^3 - z_2 \cdot r^3 = \frac{h_1 \cdot R^3 - (h_1 + 3 \cdot h) \cdot r^3}{4} = \frac{h_1 \cdot (R^3 - r^3) - 3 \cdot h \cdot r^3}{4}.$$

Враховуючи, що $\frac{h_1}{h} = \frac{R}{R-r}$ оскільки $\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1}{h_1-h} = \frac{R}{r}$, тобто $h_1 = \frac{R \cdot h}{R-r}$, то

$$\begin{aligned} z_1 \cdot R^3 - z_2 \cdot r^3 &= \frac{\frac{R \cdot h}{R-r} \cdot (R^3 - r^3) - 3 \cdot h \cdot r^3}{4} = \\ &= \frac{\frac{R \cdot h}{R-r} \cdot (R-r) \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) - 3 \cdot h \cdot r^3}{4} = \frac{R \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) - 3 \cdot h \cdot r^3}{4} = \\ &= \frac{h}{4} \cdot [R^3 + R^2 \cdot r + R \cdot r^2 - 3 \cdot r^3] = \frac{h}{4} \cdot [R^3 - r^3 + R^2 \cdot r - r^3 + R \cdot r^2 - r^3] = \\ &= \frac{h}{4} \cdot [(R-r) \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) + r \cdot (R^2 - r^2) + r^2 \cdot (R-r)] = \\ &= \frac{h \cdot (R-r)}{4} \cdot [R^2 + R \cdot r + r^2 + r \cdot (R+r) + r^2] = \frac{h \cdot (R-r)}{4} \cdot (R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2). \end{aligned}$$

Таким чином $x_C = 0$, $y_C = 0$,

$$z_C = \frac{z_1 \cdot R^3 - z_2 \cdot r^3}{R^3 - r^3} = \frac{\frac{h \cdot (R-r) \cdot (R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2)}{4}}{(R-r) \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)} = \frac{h \cdot (R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2)}{4 \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)}.$$

Відповідь: $z_C = \frac{h \cdot (R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2)}{4 \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)}$.

Приклад 8.5

Із зрізаного кругового конуса, радіуси нижньої і верхньої основ якого рівні R і r а висота h , вирізано круглий циліндр радіусом r_1 , що має з конусом спільну вісь і висоту, яка дорівнює $h_1 = 0,5 \cdot h$ (рис. 8.39).

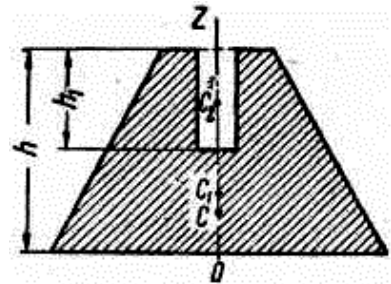


Рис. 8.39.

Визначити для частини, що залишилась, відстань центра тяжіння від нижньої основи.

Дано:

$$R, r, h, r_1, h_1 = 0,5 \cdot h$$

$$x_C, y_C, z_C \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Візьмемо початок координат в центрі O нижньої основи конуса, а вісь z направимо по його осі симетрії. Шуканий центр тяжіння лежить на цій

осі в деякій точці C з координатою z_C , яку і потрібно визначити. На осі симетрії z лежать також центр тяжіння C_1 суцільного зрізаного конуса (без вирізу) та центр тяжіння C_2 вирізаного циліндра, причому

$$OC_1 = z_1 = \frac{h \cdot (R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2)}{4 \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)}$$

(це знайдено в попередній задачі 8.4), $OC_2 = z_2 = h - \frac{h_1}{2} = h - \frac{h}{4} = \frac{3}{4} \cdot h$.

Об'єм суцільного зрізаного конуса та вирізаного циліндра будуть відповідно рівні: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$, $V_2 = \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h$.

Застосувавши спосіб від'ємних об'ємів, згідно (8.40), одержимо:

$$z_C = \frac{z_1 \cdot V_1 - z_2 \cdot V_2}{V_1 - V_2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot h \cdot \frac{R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2}{R^2 + R \cdot r + r^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) - \frac{3}{4} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h} =$$

$$= \frac{\frac{h}{12} \cdot (R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2) - \frac{3}{8} \cdot h \cdot r_1^2}{\frac{1}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) - \frac{1}{2} \cdot r_1^2} = \frac{h}{4} \cdot \frac{2 \cdot (R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2) - 9 \cdot r_1^2}{2 \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) - 3 \cdot r_1^2}.$$

Відповідь: $x_C = 0, y_C = 0, z_C = \frac{h}{4} \cdot \frac{2 \cdot (R^2 + 2 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2) - 9 \cdot r_1^2}{2 \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) - 3 \cdot r_1^2}.$

Приклад 8.6

На рис. 8.40 показано розріз тіла, яке складається з циліндра радіуса r і висотою h , та двох півкуль з радіусами R_1 і R_2 , центри яких співпадають з центрами відповідно нижньої і верхньої основ циліндру. Знайти положення центра тяжіння всього тіла, якщо питома густина циліндру ρ_3 , питома густина півкулі радіуса R_1 дорівнює $\rho_1 = 8 \cdot \rho_3$, питома густина півкулі радіуса R_2 дорівнює $\rho_2 = 2 \cdot \rho_3$,

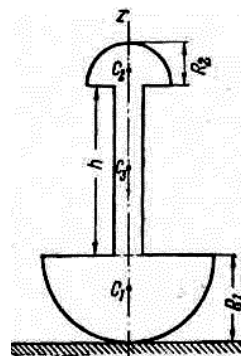


Рис. 8.40.

$$R_1 = 2 \cdot R_2, h = 4 \cdot R_2, r = \frac{1}{3} \cdot R_2.$$

Дано:

$$r = \frac{1}{3} \cdot R_2, h = 4 \cdot R_2,$$

$$R_1 = 2 \cdot R_2, \rho_3,$$

$$\rho_1 = 8 \cdot \rho_3, \rho_2 = 2 \cdot \rho_3$$

$$x_C, y_C, z_C \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Візьмемо початок координат в точці O дотику нижньої півкулі до горизонтальної поверхні.

Дане тіло має вісь симетрії, яка проходить через центри симетрії трьох його частин. Направимо вісь z по осі симетрії тіла перпендикулярно до горизонтальної площини. Шуканий центр тяжіння лежить на цій осі в деякій точці C з координатою z_C , яку і

потрібно визначити, оскільки в обраній системі координат $x_C = 0, y_C = 0$.

Так як на осі симетрії z лежать також центр тяжіння C_1 півкулі радіуса R_1 з координатою z_1 , центр тяжіння C_2 півкулі радіуса R_2 з координатою z_2 та центр тяжіння C_3 циліндру з координатою z_3 , то для даного тіла, що фактично складається з трьох окремих однорідних частин, які мають різні питомі сили тяжіння (питомі густини), згідно (8.21), матимемо:

$$z_C = \frac{z_1 \cdot \gamma_1 \cdot V_1 + z_2 \cdot \gamma_2 \cdot V_2 + z_3 \cdot \gamma_3 \cdot V_3}{\gamma_1 \cdot V_1 + \gamma_2 \cdot V_2 + \gamma_3 \cdot V_3} = \frac{z_1 \cdot g \cdot \rho_1 \cdot V_1 + z_2 \cdot g \cdot \rho_2 \cdot V_2 + z_3 \cdot g \cdot \rho_3 \cdot V_3}{g \cdot \rho_1 \cdot V_1 + g \cdot \rho_2 \cdot V_2 + g \cdot \rho_3 \cdot V_3} =$$

$$= \frac{z_1 \cdot \rho_1 \cdot V_1 + z_2 \cdot \rho_2 \cdot V_2 + z_3 \cdot \rho_3 \cdot V_3}{\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2 + \rho_3 \cdot V_3}.$$

де g — прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

Таким чином, для розрахунку координати z_C центра тяжіння всього тіла, необхідно спочатку визначити координати центрів тяжіння та об'єми трьох складових його частин:

$$z_1 = R_1 - \frac{3}{8} \cdot R_1 = \left(\frac{8}{8} - \frac{3}{8}\right) \cdot R_1 = \frac{5}{8} \cdot R_1 = \frac{5}{8} \cdot 2 \cdot R_2 = \frac{5}{4} \cdot R_2,$$

$$z_2 = R_1 + h + \frac{3}{8} \cdot R_2 = 2 \cdot R_2 + 4 \cdot R_2 + \frac{3}{8} \cdot R_2 = \left(\frac{16}{8} + \frac{32}{8} + \frac{3}{8}\right) \cdot R_2 = \frac{51}{8} \cdot R_2,$$

$$z_3 = R_1 + \frac{1}{2} \cdot h = 2 \cdot R_2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot R_2 = 4 \cdot R_2,$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_1^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (2 \cdot R_2)^3 = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot R_2^3, \quad V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_2^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R_2^3,$$

$$V_3 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot R_2\right)^2 \cdot 4 \cdot R_2 = \frac{4}{9} \cdot \pi \cdot R_2^3. \quad \text{Тоді}$$

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{z_1 \cdot \rho_1 \cdot V_1 + z_2 \cdot \rho_2 \cdot V_2 + z_3 \cdot \rho_3 \cdot V_3}{\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2 + \rho_3 \cdot V_3} = \\ &= \frac{\frac{5}{4} \cdot R_2 \cdot 8 \cdot \rho_3 \cdot \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot R_2^3 + \frac{51}{8} \cdot R_2 \cdot 2 \cdot \rho_3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R_2^3 + 4 \cdot R_2 \cdot \rho_3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \pi \cdot R_2^3}{8 \cdot \rho_3 \cdot \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot R_2^3 + 2 \cdot \rho_3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R_2^3 + \rho_3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \pi \cdot R_2^3} = \\ &= \frac{\frac{5}{4} \cdot R_2 \cdot 8 \cdot \frac{16}{3} + \frac{51}{8} \cdot R_2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot R_2 \cdot \frac{4}{9}}{8 \cdot \frac{16}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9}} = \frac{R_2 \cdot \left(\frac{160}{3} + \frac{17}{2} + \frac{16}{9}\right)}{\frac{384}{9} + \frac{12}{9} + \frac{4}{9}} = \\ &= R_2 \cdot \frac{\frac{960}{18} + \frac{153}{18} + \frac{32}{18}}{\frac{400}{9}} = R_2 \cdot \frac{1145}{18} \cdot \frac{9}{400} = \frac{229}{160} \cdot R_2 = 1 \frac{69}{160} \cdot R_2 = 1,43125 \cdot R_2. \end{aligned}$$

$$\text{або } z_C = \frac{229}{160} \cdot R_2 = \frac{229}{160} \cdot \frac{1}{2} \cdot R_1 = \frac{229}{320} \cdot R_1 = 0,715625 \cdot R_1.$$

$$\text{Відповідь: } x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{229}{160} \cdot R_2 = 1,43125 \cdot R_2.$$

Приклад 8.7

Абсолютно тверда прямокутна плита $ABDE$ підтримується шістьма брусками постійного перерізу, які розташовані вздовж ребер і діагоналей граней прямокутного паралелепіпеда (рис. 8.41). На саму плиту діє сила тяжіння $G_7 = 4 \text{ кН}$, на кожен брусок окремо діє сила тяжіння $G_1 = G_5 = 0,5 \text{ кН}$, $G_3 = 0,3 \text{ кН}$, $G_2 = G_6 = 0,4 \text{ кН}$, $G_4 = 0,6 \text{ кН}$ (рис. 8.42). Відстані рівні $a = 6 \text{ м}$, $b = 4 \text{ м}$, $c = 3 \text{ м}$. Визначити положення центра тяжіння всієї конструкції.

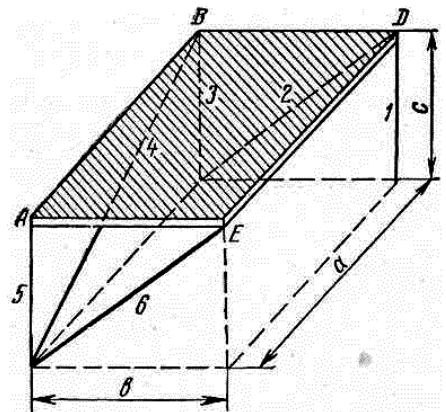


Рис. 8.41.

Дано:

$$G_1 = G_5 = 0,5 \text{ кН}, \quad G_2 = G_6 = 0,4 \text{ кН}, \\ G_3 = 0,3 \text{ кН}, \quad G_4 = 0,6 \text{ кН}, \quad G_7 = 4 \text{ кН}, \\ a = 6 \text{ м}, \quad b = 4 \text{ м}, \quad c = 3 \text{ м}$$

$$x_C, y_C, z_C = ?$$

Розв'язання:

Виберемо систему координат, як показано на рис. 8.42. На всю конструкцію діє система сил тяжіння $(\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4, \vec{G}_5, \vec{G}_6, \vec{G}_7)$. Кожна із сил тяжіння прикладена до окремої

частини конструкції в центрі тяжіння цієї конструкції з координатами $C_1(x_1, y_1, z_1)$, $C_2(x_2, y_2, z_2)$, $C_3(x_3, y_3, z_3)$, $C_4(x_4, y_4, z_4)$, $C_5(x_5, y_5, z_5)$, $C_6(x_6, y_6, z_6)$ і $C_7(x_7, y_7, z_7)$ відповідно.

Так центри тяжіння брусків постійного перерізу $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$ знаходяться по середині цих брусків, а центр тяжіння абсолютно твердої плити C_7 знаходиться в точці перетину діагоналей прямокутника $ABDE$:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = b = 4 \text{ м}, \quad z_1 = 0,5 \cdot c = 0,5 \cdot 3 \text{ м} = 1,5 \text{ м};$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0,5 \cdot b = 0,5 \cdot 4 \text{ м} = 2 \text{ м}, \quad z_2 = 0,5 \cdot c = 0,5 \cdot 3 \text{ м} = 1,5 \text{ м};$$

$$x_3 = 0, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = 0,5 \cdot c = 0,5 \cdot 3 \text{ м} = 1,5 \text{ м};$$

$$x_4 = 0,5 \cdot a = 0,5 \cdot 6 \text{ м} = 3 \text{ м}, \quad y_4 = 0, \quad z_4 = 0,5 \cdot c = 0,5 \cdot 3 \text{ м} = 1,5 \text{ м};$$

$$x_5 = a = 6 \text{ м}, \quad y_5 = 0, \quad z_5 = 0,5 \cdot c = 0,5 \cdot 3 \text{ м} = 1,5 \text{ м};$$

$$x_6 = a = 6 \text{ м}, \quad y_6 = 0,5 \cdot b = 0,5 \cdot 4 \text{ м} = 2 \text{ м}, \quad z_6 = 0,5 \cdot c = 0,5 \cdot 3 \text{ м} = 1,5 \text{ м};$$

$$x_7 = 0,5 \cdot a = 0,5 \cdot 6 \text{ м} = 3 \text{ м}; \quad y_7 = 0,5 \cdot b = 0,5 \cdot 4 \text{ м} = 2 \text{ м}, \quad z_7 = c = 3 \text{ м}.$$

Тоді координати центра тяжіння всієї конструкції, згідно (8.15), будуть:

$$x_C = \frac{x_1 \cdot G_1 + x_2 \cdot G_2 + x_3 \cdot G_3 + x_4 \cdot G_4 + x_5 \cdot G_5 + x_6 \cdot G_6 + x_7 \cdot G_7}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + G_7} = \\ = \frac{0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,4 + 3 \cdot 4}{0,5 + 0,4 + 0,3 + 0,6 + 0,5 + 0,4 + 4} = \frac{19,2}{6,7} \approx 2,87 \text{ (м)}.$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot G_1 + y_2 \cdot G_2 + y_3 \cdot G_3 + y_4 \cdot G_4 + y_5 \cdot G_5 + y_6 \cdot G_6 + y_7 \cdot G_7}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + G_7} = \\ = \frac{4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,4 + 2 \cdot 4}{0,5 + 0,4 + 0,3 + 0,6 + 0,5 + 0,4 + 4} = \frac{11,6}{6,7} \approx 1,73 \text{ (м)}.$$

$$z_C = \frac{z_1 \cdot G_1 + z_2 \cdot G_2 + z_3 \cdot G_3 + z_4 \cdot G_4 + z_5 \cdot G_5 + z_6 \cdot G_6 + z_7 \cdot G_7}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + G_7} = \\ = \frac{1,5 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 0,4 + 1,5 \cdot 0,3 + 1,5 \cdot 0,6 + 1,5 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 0,4 + 3 \cdot 4}{0,5 + 0,4 + 0,3 + 0,6 + 0,5 + 0,4 + 4} = \frac{16,05}{6,7} \approx 2,4 \text{ (м)}.$$

Відповідь: $x_C = 2,87 \text{ м}, \quad y_C = 1,73 \text{ м}, \quad z_C = 2,40 \text{ м}.$

Приклад 8.8

У відомій іграшці Іван-покиван (російською Ванька-встанька) в основі конструкції є те, що нижня частина виконана, як правило, у формі півкулі (рис. 8.43), а верхня може мати будь-яку форму, наприклад конуса. Розрахуйте співвідношення між габаритами цієї конструкції для умови її статичної стійкості, якщо конус і півкуля мають однакову густину і однаковий радіус R , висота конуса h ,

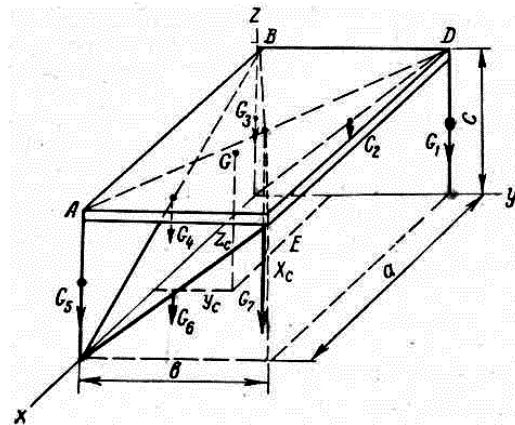


Рис. 8.42.

а півкуля спирається своєю поверхнею на гладеньку горизонтальну площину.

Дано:

R, h

$\frac{h}{R} — ?$

Розв'язання:

Візьмемо за початок координат точку B . Оскільки дане однорідне тіло має вісь симетрії — вісь Bu , то центр тяжіння його об'єму буде знаходитись на цій осі. Якщо центр тяжіння об'єму однорідного тіла лежить нижче точки A (точка C_1) то тіло буде перебувати в стані стійкої рівноваги (рис. 8.43). При розташуванні центра тяжіння нижче точки A (точка C_2) тіло буде перебувати в стані нестійкої рівноваги. Присвоїмо конусу індекс 1, а півкулі — 2. Оскільки для даного тіла $x_C = 0$ і $z_C = 0$, то нам необхідно лише знайти співвідношення для координати y_C .

Для однорідного тіла, що фактично складається з двох частин (конуса і півкулі), згідно (8.19), матимемо

$y_C = \frac{y_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$. Оскільки, згідно п. 8.9, для

конуса $y_1 = R + \frac{1}{4} \cdot h$, $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$, а для півкулі

$y_2 = R - \frac{3}{8} \cdot R = \frac{5}{8} \cdot R$, $V_2 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, то

$$y_C = \frac{y_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\left(R + \frac{1}{4} \cdot h\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h + \frac{5}{8} \cdot R \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot h + \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h^2 + \frac{5}{12} \cdot \pi \cdot R^4}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (h + 2 \cdot R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(R \cdot h + \frac{1}{4} \cdot h^2 + \frac{5}{4} \cdot R^2\right)}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (h + 2 \cdot R)} =$$

$$= \frac{R \cdot h + \frac{1}{4} \cdot h^2 + \frac{5}{4} \cdot R^2}{h + 2 \cdot R}.$$

Для стійкої рівноваги центр тяжіння однорідного об'єму даного тіла повинен знаходитись на відріжку $AB = R$ нижче точки A — $y_C < R$. Тоді:

$$\frac{R \cdot h + \frac{1}{4} \cdot h^2 + \frac{5}{4} \cdot R^2}{h + 2 \cdot R} < R; \Rightarrow R \cdot h + \frac{1}{4} \cdot h^2 + \frac{5}{4} \cdot R^2 < R \cdot (h + 2 \cdot R); \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot R \cdot h + h^2 + 5 \cdot R^2 < 4 \cdot R \cdot h + 8 \cdot R^2; \Rightarrow h^2 < 3 \cdot R^2; \Rightarrow \frac{h^2}{R^2} < 3.$$

Таким чином, при $\frac{h}{R} < \sqrt{3}$ або $h < \sqrt{3} \cdot R$ ($\sqrt{3} \approx 1,732$) дане однорідне тіло буде знаходитись в стані стійкої рівноваги.

При $h > \sqrt{3} \cdot R$ тіло буде перебувати в стані нестійкої рівноваги.

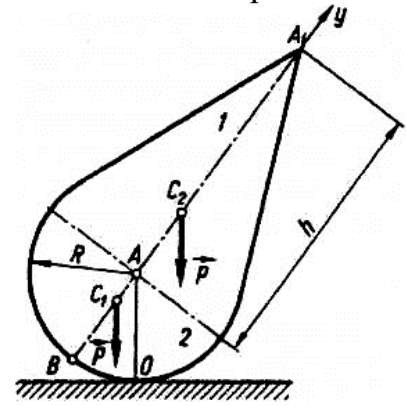


Рис. 8.43.

Приклад 8.9

Визначити силу тяжіння G_1 , що діє на противагу, яка забезпечує коефіцієнт стійкості навантаженого крану при перекиданні, рівний 1,5. Сила тяжіння, що діє на сам кран $G_2 = 50 \text{ кН}$. Сила тяжіння, що діє на вантаж $G_3 = 40 \text{ кН}$. Розміри вказані на рис. 8.44.

Дано:

$$G_2 = 50 \text{ кН}, G_3 = 40 \text{ кН}, K = 1,5$$

$$G_1 = ?$$

Можливе перекидання крану під дією ваги вантажу \vec{G}_3 є обертанням навколо осі O , яка співпадає з правим рельсом. Силами, які перешкоджають перекиданню, є сила тяжіння \vec{G}_2 , що діє на сам кран, та сила тяжіння \vec{G}_1 , що діє на противагу.

Визначимо перекидний момент, як абсолютну величину моменту сили \vec{G}_3 відносно осі O :

$$M_{\text{пер}} = G_3 \cdot 1,25 \text{ м} = 40 \text{ кН} \cdot 1,25 \text{ м} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначимо момент стійкості тіла (утримуючий момент) як суму абсолютних величин моментів сил \vec{G}_1 і \vec{G}_2 відносно осі O :

$$M_{\text{см}} = G_1 \cdot 2 + G_2 \cdot 0,75 = G_1 \cdot 2 + 50 \cdot 0,75 = 2 \cdot G_1 + 37,5 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Скористаємося формулою (8.77) для коефіцієнтом стійкості:

$$K = \frac{M_{\text{см}}}{M_{\text{пер}}} \quad \text{або} \quad M_{\text{см}} = K \cdot M_{\text{пер}}.$$

$$\text{Таким чином } 2 \cdot G_1 + 37,5 = 1,5 \cdot 50, \quad G_1 = \frac{1,5 \cdot 50 - 37,5}{2} = 18,75 \text{ (кН)}.$$

Відповідь: $G_1 = 18,75 \text{ кН}$.

Приклад 8.10

Визначити мінімальну ширину a бетонної греблі прямокутного перерізу за умови стійкості при перекиданні, якщо висота греблі $h = 3,5 \text{ м}$, питома сила тяжіння, що діє на одиницю об'єму бетону

$\gamma = 22,5 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$, горизонтальний тиск води на 1 м довжини греблі з боку верхнього б'єфу $P_1 = 45 \text{ кН}$, а з боку

нижнього б'єфу $P_2 = 11,25 \text{ кН}$. Відстань від точок прикладання сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 до основи $h_1 = 1 \text{ м}$ і $h_2 = 0,5 \text{ м}$ відповідно (рис. 8.45).

Внаслідок того, що $P_1 > P_2$ і $h_1 > h_2$, то можливим перекиданням греблі буде її обертання навколо ребра O .

Дано:

$$h = 3,5 \text{ м}, \quad \gamma = 22500 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3},$$

$$P_1 = 45000 \text{ Н на } 1 \text{ м довжини},$$

$$P_2 = 11250 \text{ Н на } 1 \text{ м довжини}$$

$$h_1 = 1 \text{ м}, \quad h_2 = 0,5 \text{ м}, \quad l = 1 \text{ м}$$

$$a = ?$$

Розв'язання:

Можливе перекидання крану під дією ваги вантажу \vec{G}_3 є обертанням навколо

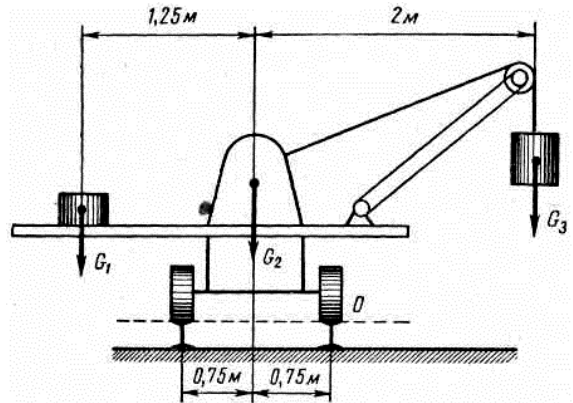


Рис. 8.44.

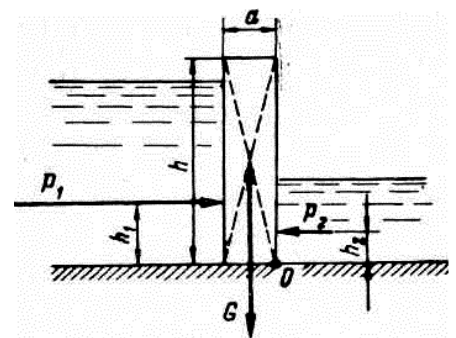


Рис. 8.45.

Розв'язання:

Розглянемо бетонний масив у формі прямокутного паралелепіпеда, висота якого h , ширина a і довжина $l = 1 \text{ м}$ в напрямку довжини греблі.

Внаслідок того, що $P_1 > P_2$ і $h_1 > h_2$, то можливим перекиданням греблі буде її обертання навколо ребра O .

Силою, яка викликає перекидання, є сила \vec{P}_1 горизонтального тиску води на 1 м довжини греблі з боку верхнього б'єфу, що направлена відносно точки O в бік обертання годинникової стрілки. Силами, що перешкоджають перекиданню, є сила \vec{P}_2 горизонтального тиску води на 1 м довжини греблі з боку нижнього б'єфу та сила тяжіння \vec{G} , що діє на бетонний масив у формі прямокутного паралелепіпеда висотою h , шириною a і довжиною l . Вони направлені відносно точки O в бік протилежний руху годинникової стрілки.

Тоді перекидний момент за абсолютною величиною буде $M_{\text{неп}} = h_1 \cdot P_1$, а момент стійкості (утримуючий момент) дорівнюватиме сумі моментів сил \vec{G} і \vec{P}_2 відносно осі O : $M_{\text{см}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot G + h_2 \cdot P_2$. Сила тяжіння, що діє на бетонний масив у формі прямокутного паралелепіпеда висотою h , шириною a і довжиною l , дорівнюватиме $G = \gamma \cdot V = \gamma \cdot h \cdot a \cdot l$. Отже $M_{\text{см}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \gamma \cdot h \cdot a \cdot l + h_2 \cdot P_2$.

Мінімальна ширина греблі відповідає коефіцієнту стійкості $K = \frac{M_{\text{см}}}{M_{\text{неп}}} = 1$

або $M_{\text{см}} = M_{\text{неп}}$. Таким чином $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \gamma \cdot h \cdot a \cdot l + h_2 \cdot P_2 = h_1 \cdot P_1$,

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot (h_1 \cdot P_1 - h_2 \cdot P_2)}{\gamma \cdot h \cdot l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1 \cdot 45000 - 0,5 \cdot 11250)}{22500 \cdot 3,5 \cdot 1}} = 1 \text{ (м)}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Запишіть та поясніть формули для координат центра паралельних сил.
2. Що називається центром тяжіння твердого тіла?
3. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння твердого тіла.
4. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння однорідного об'єму.
5. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння тіла, що складається зі скінченного числа окремих однорідних частин, які мають різні питомі сили тяжіння (питомі густини).
6. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння неоднорідного абсолютно твердого тіла.
7. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння площі однорідної пластини, яка розбита на скінчене число окремих фігур.
8. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння площі неоднорідної пластини.
9. В чому полягає такий спосіб визначення координат центра тяжіння плоскої фігури, з якої вирізана деяка частина, як спосіб від'ємних площ?
10. В чому полягає такий спосіб визначення координат центра тяжіння однорідного тіла, з якого вирізана деяка частина, як спосіб від'ємних об'ємів?
11. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння куска однорідного тонкого дроту постійного перерізу.
12. Сформулюйте та доведіть першу теорему Паппа-Гульдіна.
13. Сформулюйте та доведіть другу теорему Паппа-Гульдіна.
14. Поясніть, в чому полягає метод симетрії при визначенні координат центра тяжіння однорідного абсолютно твердого тіла.

Лекція № 9

Тема: «Геометричні характеристики поперечних перерізів стрижнів»

ПЛАН

- 9.1. Статичні моменти та центр тяжіння площі поперечного перерізу.
- 9.2. Моменти інерції площі поперечного перерізу стрижня.
- 9.3. Моменти інерції площі найпростіших геометричних фігур.
- 9.4. Моменти опору поперечного перерізу.
- 9.5. Моменти інерції площі складних перерізів.
- 9.6. Моменти інерції площі перерізу відносно паралельних осей.
- 9.7. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей.
- 9.8. Напрямок головних центральних осей інерції. Головні моменти інерції.
- 9.9. Радіус та еліпс інерції.
- 9.10. Загальні умови розв'язування задач на знаходження геометричних характеристик плоских перерізів.

9.1. Статичні моменти та центр тяжіння площі поперечного перерізу

Опір стрижня різним видам деформації (розтягу, стиску, зсуву, згину, крученню) залежить не тільки від його розмірів та механічних характеристик матеріалу, а й від обрису осі стрижня, розміщення, форми та площі поперечних перерізів. До основних геометричних характеристик поперечних перерізів стрижнів, які визначають їх опір різним видам деформацій, належать площі поперечних перерізів, статичні моменти та моменти інерції.

Площа поперечного перерізу — це геометрична характеристика перерізу, яка визначається інтегралом (сумою) від елементів перерізу:

$$F = \int_F dF. \quad (9.1)$$

Площа поперечного перерізу виражається в одиницях довжини в другому степені (m^2, cm^2, mm^2).

Розглянемо поперечний переріз стрижня, пов'язаний з координатними осями Oz та Oy (рис. 9.1). Виділимо елемент площі dF з координатами (z, y) .

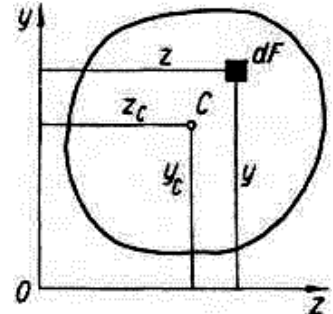


Рис. 9.1.

Статичним моментом елемента площі dF поперечного перерізу відносно осі Oz називається добуток величини елемента площі dF на відстань y від осі Oz :

$$dS_z = y \cdot dF. \quad (9.2)$$

Статичним моментом елемента площі dF поперечного перерізу відносно осі Oy називається добуток величини елемента площі dF на відстань z від осі Oy :

$$dS_y = z \cdot dF. \quad (9.3)$$

Статичним моментом площі F перерізу відносно осі Oz називають геометричну характеристику перерізу, яка визначається інтегралом (сумою) від добутку площ dF елементів перерізу на їх відстані y від осі Oz :

$$S_z = \int_F y \cdot dF. \quad (9.4)$$

Статичним моментом площі F перерізу відносно осі Oy називають геометричну характеристику перерізу, яка визначається інтегралом (сумою) від добутку площ dF елементів перерізу на їх відстані z від осі Oy :

$$S_y = \int_F z \cdot dF. \quad (9.5)$$

Статичний момент виражається в одиницях довжини в третьому степені (m^3, cm^3, mm^3).

Центром тяжіння $C(z_C, y_C)$ **площі** F **поперечного перерізу стрижня** називається точка C в площині поперечного перерізу, координати z_C, y_C якої визначаються за формулами:

$$z_C = \frac{\int_F z \cdot dF}{\int_F dF} = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{\int_F y \cdot dF}{\int_F dF} = \frac{S_z}{F}. \quad (9.6)$$

Статичні моменти площі F **поперечного перерізу стрижня відносно осей** Oz та Oy виражаються через **координати** z_C, y_C **центра тяжіння площі поперечного перерізу стрижня** наступним чином:

$$S_z = F \cdot y_C, \quad S_y = F \cdot z_C. \quad (9.7)$$

Центральними осями перерізу називаються дві взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр тяжіння площі поперечного перерізу стрижня.

Статичні моменти площі поперечного перерізу стрижня відносно центральних осей дорівнюють нулю, оскільки в даній системі координат $z_C = y_C = 0$.

Для визначення **статичних моментів площі складного перерізу** (рис. 9.2) його розбивають на прості частини, для кожної з яких відомі площа F_i та положення центра ваги $C_i(z_i, y_i)$.

Статичний момент площі всього складного поперечного перерізу відносно даної осі визначається як сума статичних моментів кожної частини:

$$S_z = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i; \quad (9.8)$$

$$S_y = F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + \dots + F_n \cdot z_n = \sum_{i=1}^n F_i \cdot z_i.$$

Тоді **координати центра тяжіння площі складної фігури:**

$$y_C = \frac{S_z}{F} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \quad z_C = \frac{S_y}{F} = \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + \dots + F_n \cdot z_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}. \quad (9.9)$$

Приклад 9.1

Визначити **статичний момент площі трикутника** (рис. 9.3.) **відносно осі, яка проходить через основу.**

Розв'язання:

На відстані y від неї виділимо елементарну площадку y вигляді смужки, паралельної осі Oz . Площа смужки $dF = b(y) \cdot dy$. Оскільки трикутник з основою $b(y)$ і висотою $h - y$ подібний до великого трикутника з основою b і висотою h ,

то $\frac{b(y)}{b} = \frac{h-y}{h}$, звідки $b(y) = \frac{b}{h} \cdot (h-y)$ і $dF = \frac{b}{h} \cdot (h-y) \cdot dy$:

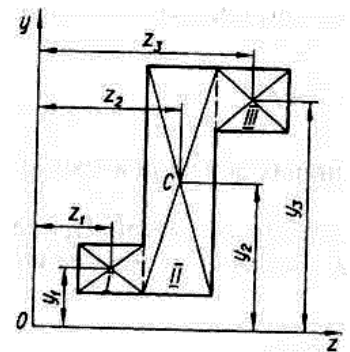


Рис. 9.2.

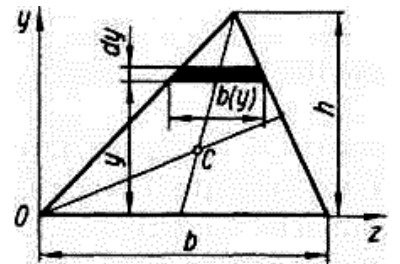


Рис. 9.3.

$$S_z = \int_F y \cdot dF = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y \cdot (h - y) \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y \cdot h \cdot dy - \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy =$$

$$= \frac{b}{h} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot h \cdot y^2 - \frac{1}{3} \cdot y^3 \right\} \Big|_0^h = \frac{b}{h} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot h^3 - \frac{1}{3} \cdot h^3 \right) = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2.$$

Простіше можна розв'язати цей приклад, використавши формули (9.7). Площа трикутника дорівнює добутку половини основи на висоту, а центр ваги знаходиться на відстані третини висоти від основи, тому одержимо:

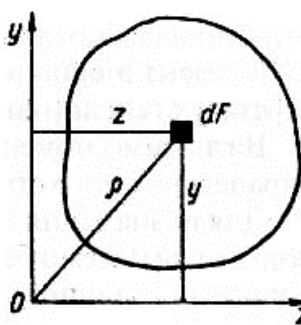
$$F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h, \quad y_C = \frac{1}{3} \cdot h, \quad S_z = F \cdot y_C = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot \frac{1}{3} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2.$$

9.2. Моменти інерції площі поперечного перерізу стрижня

Для визначення деформацій і напруг в будь-якому перерізі стрижня застосовують моменти інерції плоских фігур. Для повної геометричної характеристики плоского перерізу необхідно знати **три типи моментів інерції площі плоскої фігури: осьовий, полярний та відцентровий**.

Осьовим (екваторіальним) моментом інерції площі поперечного перерізу (плоскої фігури) називають геометричну характеристику перерізу, яка визначається інтегралом (сумою) від добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від розглядуваної осі, що лежить у площині перерізу.

Згідно визначення, **осьові моменти інерції площі поперечного перерізу стрижня відносно осей Oz та Oy** (рис. 9.4) відповідно рівні:



$$J_z = \int_F y^2 \cdot dF, \quad J_y = \int_F z^2 \cdot dF. \quad (9.10)$$

Полярним моментом інерції площі поперечного перерізу стрижня (плоскої фігури) відносно полюса O (початку координат) називають геометричну характеристику перерізу, яка визначається інтегралом (сумою) від добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від

полюса (рис. 9.4):
$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF. \quad (9.11)$$

Рис. 9.4.

Полярний момент інерції площі поперечного перерізу стрижня дорівнює сумі відповідних для даного перерізу осьових моментів інерції:

$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF = \int_F (y^2 + z^2) \cdot dF = \int_F y^2 \cdot dF + \int_F z^2 \cdot dF = J_z + J_y, \quad (9.12)$$

оскільки, для прямокутної системи координат zOy (рис. 9.4) між полярною відстанню ρ елемента площі dF та його осьовими відстанями існує співвідношення $\rho^2 = y^2 + z^2$. **Осьові та полярні моменти інерції можуть набирати лише додатних значень.**

Відцентровим моментом інерції площі поперечного перерізу стрижня (плоскої фігури) називають геометричну характеристику перерізу, що визначається інтегралом (сумою) від добутків площ dF елементів перерізу на їх відстані від двох взаємно перпендикулярних осей Oz та Oy :

$$J_{zy} = \int_F z \cdot y \cdot dF. \quad (9.13)$$

Моменти інерції площі поперечного перерізу стрижня (плоскої фігури) виражаються в одиницях довжини в четвертому степені (m^4, cm^4, mm^4). Полярний момент інерції застосовується при розрахунках на кручення; осьові моменти інерції при розрахунках на згин, стійкість, позацентровий розтяг-стиск.

Залежно від положення осей, відцентровий момент інерції може бути додатним чи від'ємним або дорівнювати нулю. Так, відцентровий момент інерції площі фігури (рис. 9.5, а) відносно осей Oz та Oy додатний, оскільки координати (z, y) всіх елементів площі додатні. При повороті осей навколо початку координат на 90° (рис. 9.5, б) знак відцентрового моменту інерції фігури змінюється на протилежний, оскільки в цьому положенні координати z всіх елементів додатні, а координати y від'ємні. Очевидно, при поступовому повороті осей можна знайти таке положення їх, при якому відцентровий момент інерції дорівнюватиме нулю.

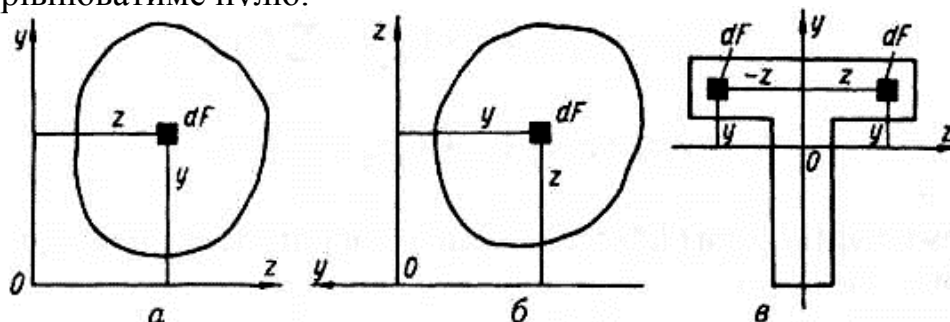


Рис. 9.5.

Головними осями інерції перерізу називаються координатні осі, відносно яких відцентровий момент інерції перерізу дорівнює нулю, а осьові моменти інерції перерізу досягають екстремумів. *Дві взаємно перпендикулярні осі, з яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, завжди будуть її головними осями інерції*, оскільки в цьому разі кожній додатній величині $z \cdot y \cdot dF$ відповідає така сама від'ємна по іншій бік від осі симетрії (рис. 9.5, в) і сума їх по всій площі фігури дорівнює нулю. Головний момент інерції перерізу — момент інерції відносно однієї з головних осей інерції перерізу.

Головні центральні осі інерції перерізу u та v — головні осі інерції (симетрії), що проходять через центр ваги перерізу і відносно яких і статичні і відцентрові моменти площі перерізу дорівнюють нулю, а осьові моменти інерції досягають екстремуму, тобто відносно однієї осі максимум, а другої — мінімум. Головний центральний момент інерції перерізу (J_u, J_v) — момент інерції відносно однієї з головних центральних осей інерції перерізу (u, v).

Головною площиною стрижня називають площину, яка проведена через вісь стрижня x та одну з головних центральних осей інерції (u або v) його поперечного перерізу.

Полярним коефіцієнтом раціональності поперечного перерізу по жорсткості називається відношення полярного моменту інерції площі поперечного

перерізу до площі цього перерізу:
$$K_{п.р.ж.} = \frac{J_p}{F}. \quad (9.14)$$

Осьовим коефіцієнтом раціональності поперечного перерізу по жорсткості називається відношення осьового моменту інерції площі поперечного

перерізу до площі цього перерізу:
$$K_{о.р.ж.} = \frac{J_{z(y)}}{F}. \quad (9.15)$$

Розмірність коефіцієнтів раціональності поперечного перерізу по жорсткості виражається в одиницях довжини в другому степені (m^2, cm^2, mm^2).

Вони застосовуються в розрахунках на кручення (полярний) та згинання (осьові).

9.3. Моменти інерції площі найпростіших геометричних фігур

Приклад 9.2

Визначити *моменти інерції площі прямокутника, паралелограма та квадрата відносно центральних осей Oz і Oy , паралельних його сторонам.*

Розв'язання:

1. Для визначення моменту інерції площі прямокутника відносно центральної осі Oz (рис. 9.6) елементарною площадкою вважатимемо безмежно вузький прямокутник, паралельний осі Oz , заввишки dy , завширшки b і площею $dF = b \cdot dy$. Тоді, згідно (9.10), маємо:

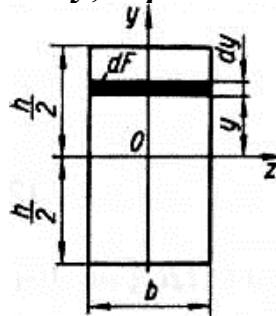


Рис. 9.6.

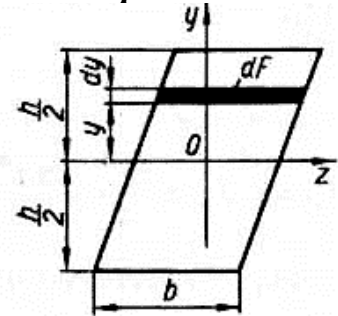


Рис. 9.7.

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dF = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = 2 \cdot b \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = 2 \cdot b \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot y^3 \right) \Big|_0^{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (9.16)$$

Для визначення моменту інерції площі прямокутника відносно центральної осі Oy елементарною площадкою вважатимемо безмежно вузький прямокутник, паралельний осі Oy , заввишки dz , завширшки h і площею $dF = h \cdot dz$. Тоді, згідно (9.10), маємо:

$$J_y = \int_F z^2 \cdot dF = h \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 \cdot dz = 2 \cdot h \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} z^2 \cdot dz = 2 \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot z^3 \right) \Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (9.17)$$

2. Якщо всі смужки $dF = b \cdot dy$ перемістити паралельно осі Oz (рис. 9.7), відносно якої визначається момент інерції, то інтеграл J_z не зміниться. Тому, момент інерції площі паралелограма висотою h відносно центральної осі Oz , паралельної основі довжиною b , також буде рівний:

$$J_z = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3. \quad (9.18)$$

3. Момент інерції площі квадрата зі стороною a відносно центральних осей Oz і Oy , згідно (9.16) і (9.17), буде рівний: $J_z = J_y = \frac{a^4}{12}$. (9.19)

Приклад 9.3

Визначити *момент інерції площі довільного трикутника $A_1B_1C_1$ відносно осі B_1z_1 , яка проходить через основу B_1C_1* (рис. 9.8, а).

Розв'язання:

Виділимо на відстані y_1 від осі B_1z_1 паралельну їй елементарну смужку довжиною z і висотою dy_1 , яка має площу $dF = z \cdot dy_1$. Оскільки трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику A_1DE , то

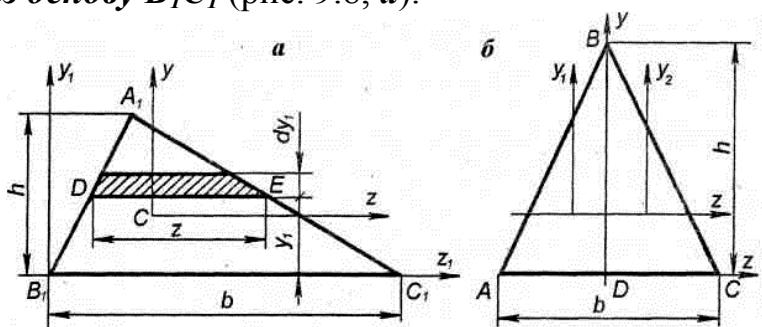


Рис. 9.8.

$\frac{z}{b} = \frac{h-y_1}{h}$, звідки $z = b \cdot \frac{h-y_1}{h}$ і $dF = \frac{b}{h} \cdot (h-y_1) \cdot dy_1$. Таким чином, момент інерції площі трикутника висотою h відносно основи довжиною b , буде:

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y_1^2 \cdot (h-y_1) \cdot dy_1 = \frac{b}{h} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot h \cdot y_1^3 - \frac{1}{4} \cdot y_1^4 \right\} \Big|_0^h = \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (9.20)$$

Використовуючи формули переходу (9.35), можна одержати момент інерції площі трикутника відносно головної центральної осі Cz , паралельної основи:

$$J_z = J_{z_1} - a^2 \cdot F = \frac{b \cdot h^3}{12} - \left(\frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot b = \frac{b \cdot h^3}{36}. \quad (9.21)$$

Осьовий момент інерції рівнобедреного трикутника ABC (рис. 9.8, б) відносно вертикальної осі Dy можна знайти як суму двох моментів інерції малих трикутників ABD і CBD , для яких вісь Dy є паралельною центральною:

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} = \frac{h \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^3}{12} + \frac{h \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^3}{12} = \frac{h \cdot b^3}{96} + \frac{h \cdot b^3}{96} = \frac{h \cdot b^3}{48}. \quad (9.22)$$

Приклад 9.4

Визначити полярний момент інерції площі круга діаметром D (радіусом r) відносно його центра, момент інерції площі круга відносно центральної осі а також полярний і осьові коефіцієнти раціональності кругового поперечного перерізу по жорсткості.

Розв'язання:

При визначенні полярного моменту інерції площі круга виділимо елементарну площадку у вигляді безмежно тонкого кільця радіусом ρ завтовшки $d\rho$ (рис. 9.9). Площа такого елемента $dF = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho$. Отже, полярний момент інерції площі круга діаметром D (радіусом r) відносно його центра:

$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \rho^4 \right) \Big|_0^r = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}. \quad (9.23)$$

Моменти інерції площі круга відносно центральних осей легко знайти, використавши формулу (9.12) — $J_p = J_z + J_y$. У наслідок симетрії $J_z = J_y$,

маємо,
$$J_z = J_y = \frac{1}{2} \cdot J_p = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4 = \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot D^4. \quad (9.24)$$

Полярний коефіцієнт раціональності даного кругового поперечного перерізу по жорсткості, згідно виразу (9.14), буде:

$$K_{n.p.ж.} = \frac{J_p}{F} = \frac{\pi \cdot r^4}{2 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{1}{2} \cdot r^2 = \frac{1}{8} \cdot D^2. \quad (9.25)$$

Осьові коефіцієнти раціональності даного кругового поперечного перерізу по жорсткості, згідно виразу (9.15), будуть:

$$K_{o.p.ж.} = \frac{J_{z(y)}}{F} = \frac{\pi \cdot r^4}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{1}{4} \cdot r^2 = \frac{1}{16} \cdot D^2. \quad (9.26)$$

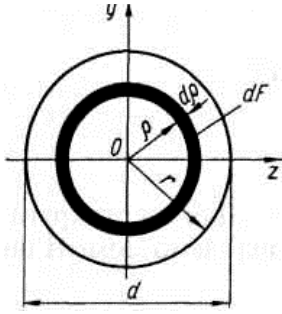


Рис. 9.9.

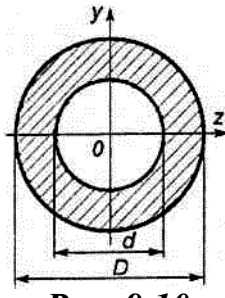


Рис. 9.10.

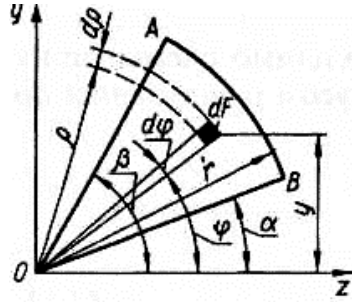


Рис. 9.11.

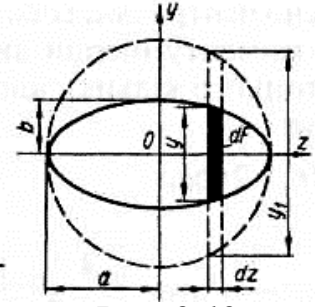


Рис. 9.12.

Приклад 9.5

Визначити полярний та осьовий моменти інерції площі кругового кільця (кільцевого перерізу) із зовнішнім діаметром D та внутрішнім діаметром d , а також полярний і осьові коефіцієнти раціональності кільцевого поперечного перерізу по жорсткості.

Розв'язання:

Полярний момент інерції площі кругового кільця (кільцевого перерізу) (рис. 9.10) із зовнішнім діаметром D та внутрішнім діаметром d знайдемо як різницю полярних моментів інерції площ великого і малого кругів:

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}. \quad (9.27)$$

Оскільки $J_p = J_z + J_y$, і в наслідок симетрії для кільцевого перерізу $J_z = J_y$, то моменти інерції площі кругового кільця відносно центральних осей Oz і Oy будуть:

$$J_z = J_y = \frac{1}{2} \cdot J_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}. \quad (9.28)$$

Полярний коефіцієнт раціональності даного кільцевого перерізу по жорсткості, згідно виразу (9.14), буде:

$$K_{н.р.ж.} = \frac{J_p}{F} = \frac{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}}{\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D^2 - d^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(D^2 - d^2) \cdot (D^2 + d^2)}{D^2 - d^2},$$

$$K_{н.р.ж.} = \frac{1}{8} \cdot (D^2 + d^2). \quad (9.29)$$

Осьові коефіцієнти раціональності даного кільцевого перерізу по жорсткості, згідно виразу (9.15), будуть:

$$K_{о.р.ж.} = \frac{J_{z(y)}}{F} = \frac{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}}{\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D^2 - d^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{(D^2 - d^2) \cdot (D^2 + d^2)}{D^2 - d^2},$$

$$K_{о.р.ж.} = \frac{1}{16} \cdot (D^2 + d^2). \quad (9.30)$$

Приклад 9.6

Визначити осьовий момент інерції площі кругового сектора, чверті круга та момент інерції площі півкруга відносно діаметра.

Розв'язання:

1. Знайдемо осьовий момент інерції кругового сектора OAB (рис. 9.11) відносно осі Oz . Використавши полярні координати (ρ, φ) , виділимо елемен-

тарну площадку $dF = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$. Оскільки $y = \rho \cdot \sin \varphi$, то

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dF = \int_{\alpha=0}^{\beta} \int_0^r \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho = \int_{\alpha=0}^{\beta} \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi,$$

$$J_z = \frac{1}{8} \cdot r^4 \cdot \left[(\beta - \alpha) - \frac{1}{2} \cdot (\sin 2\beta - \sin 2\alpha) \right]. \quad (9.31)$$

2. **Осьовий момент інерції площі чверті круга** ($\alpha = 0, \beta = \pi/2$) буде

$$J_z = \frac{1}{8} \cdot r^4 \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \sin(2 \cdot 0) \right) \right] = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot r^4. \quad (9.32)$$

3. **Момент інерції площі півкруга відносно діаметра** ($\alpha = 0, \beta = \pi$), згідно

виразу (9.31) буде: $J_z = \frac{1}{8} \cdot r^4 \cdot \left[(\pi - 0) - \frac{1}{2} \cdot (\sin(2 \cdot \pi) - \sin(2 \cdot 0)) \right] = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^4. \quad (9.33)$

Приклад 9.7

Визначити **момент інерції площі еліпса з півосями a, b** (рис. 9.12) **відносно центральної осі Oz** .

Розв'язання:

Задачу можна розв'язати дуже просто, якщо розглядати еліпс як проекцію нахиленого круга. При цьому, $\frac{y}{y_1} = \frac{b}{a}$ або $y = \frac{b}{a} \cdot y_1$. Покажемо момент інерції еліпса як суму моментів інерції елементарних прямокутників заввишки y та завширшки dz — $dF = y \cdot dz$:

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dF = \int_F y^3 \cdot dz = \int_F \left(\frac{b}{a} \cdot y_1 \right)^3 \cdot dz = \frac{b^3}{a^3} \cdot \int_F y_1^3 \cdot dz.$$

Останній інтеграл у правій частині є моментом інерції площі круга радіусом a відносно осі Oz . Згідно (9.24), він дорівнює $\int_F y_1^3 \cdot dz = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^4$.

Отже, **момент інерції площі еліпса з півосями a, b відносно центральної осі Oz** буде:

$$J_z = \frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^4 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a \cdot b^3. \quad (9.34)$$

Очевидно, що **момент інерції площі еліпса з півосями a, b відносно центральної осі Oy** буде:

$$J_y = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot b \cdot a^3. \quad (9.35)$$

9.4. Моменти опору поперечного перерізу

Осьовим моментом опору поперечного перерізу називають геометричну характеристику перерізу, що дорівнює відношенню головного моменту інерції відносно даної осі до відстані від осі до найбільш віддаленої точки поперечного перерізу:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{J_y}{z_{\max}}. \quad (9.36)$$

Полярним моментом опору поперечного перерізу називають геометричну характеристику перерізу, яка дорівнює відношенню полярного моменту інерції J_p до відстані ρ_{\max} найбільш віддаленої точки поперечного перерізу від полюсу:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}. \quad (9.37)$$

Розмірність моментів опору виражається в одиницях довжини в третьому степені (m^3, cm^3, mm^3). Вони застосовуються в розрахунках на міцність при згині.

Полярним коефіцієнтом раціональності поперечного перерізу по міцності називається відношення полярного моменту опору поперечного перерізу до

площі цього перерізу:
$$K_{п.р.м.} = \frac{W_p}{F}. \quad (9.38)$$

Осьовим коефіцієнтом раціональності поперечного перерізу по міцності називається відношення осьового моменту опору поперечного перерізу до

площі цього перерізу:
$$K_{о.р.м.} = \frac{W_{z(y)}}{F}. \quad (9.39)$$

Розмірність коефіцієнтів раціональності поперечного перерізу по міцності виражається в одиницях довжини в першому степені (m, cm, mm). Вони застосовуються в розрахунках на кручення (полярний) та згинання (осьові).

Приклад 9.8

Розрахувати **моменти опору відносно центральних осей Oz і Oy** та **осьові коефіцієнти раціональності перерізу по міцності** для **суцільного прямокутного поперечного перерізу** (рис. 9.6).

Розв'язання:

Для суцільного прямокутного поперечного перерізу (рис. 9.6) момент інерції площі відносно центральної осі z , згідно (9.16), рівний $J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$, а відстань від центральної осі z до найбільш віддаленої точки даного перерізу дорівнює $y_{\max} = \frac{h}{2}$, тому **момент опору суцільного прямокутного поперечного перерізу**

відносно центральної осі z , згідно (9.36), буде:
$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6}. \quad (9.40)$$

Для суцільного прямокутного поперечного перерізу момент інерції площі відносно центральної осі y , згідно (9.17), рівний $J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$, а відстань від центральної осі y до найбільш віддаленої точки даного перерізу дорівнює $z_{\max} = \frac{b}{2}$, тому **момент опору суцільного прямокутного поперечного перерізу**

відносно центральної осі y , згідно (9.36), буде:
$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{h \cdot b^2}{6}. \quad (9.41)$$

Відповідно до (9.39), **коефіцієнт раціональності по міцності суцільного прямокутного поперечного перерізу відносно центральної осі z** буде:

$$K_{о.р.м.} = \frac{W_z}{F} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{6}}{b \cdot h} = \frac{1}{6} \cdot h, \quad (9.42)$$

а **коефіцієнт раціональності по міцності суцільного прямокутного поперечного перерізу відносно центральної осі y** буде:

$$K_{o.p.m.} = \frac{W_y}{F} = \frac{h \cdot b^2}{6 \cdot b \cdot h} = \frac{1}{6} \cdot b. \quad (9.43)$$

Приклад 9.9

Визначити *полярний* та *осьові моменти опору*, а також *полярний* та *осьові коефіцієнти раціональності перерізу по міцності* для *кругового поперечного перерізу діаметром D (радіусом r)* (рис. 9.9).

Розв'язання:

Для кругового поперечного перерізу діаметром D (радіусом r) (рис. 9.9) полярний момент інерції площі, згідно (9.23), рівний $J_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$, а відстань найбільш віддаленої точки даного перерізу від полюсу $\rho_{\max} = r$, тому **полярний момент опору кругового поперечного перерізу діаметром D (радіусом r)**, згідно (9.37), буде:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{\pi \cdot r^4}{2}}{r} = \frac{\pi \cdot r^3}{2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}. \quad (9.44)$$

Відповідно до (9.38), **полярний коефіцієнт раціональності по міцності кругового поперечного перерізу діаметром D (радіусом r)** буде:

$$K_{n.p.m.} = \frac{W_p}{F} = \frac{\frac{\pi \cdot r^3}{2}}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{2} \cdot r = \frac{1}{4} \cdot D, \quad (9.45)$$

Для кругового поперечного перерізу діаметром D (радіусом r) моменти інерції площі відносно центральних осей z і y , згідно (9.24), рівний $J_z = J_y = \frac{1}{2} \cdot J_p = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4 = \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot D^4$, а відстань від центральних осей z і y до найбільш віддаленої точки даного перерізу дорівнює $z_{\max} = y_{\max} = r$, тому **момент опору кругового поперечного перерізу діаметром D (радіусом r) відносно центральних осей z і y** , згідно (9.36), буде:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{\pi \cdot r^4}{4}}{r} = \frac{\pi \cdot r^3}{4} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{1}{2} \cdot W_p, \quad (9.46)$$

а **коефіцієнт раціональності по міцності кругового поперечного перерізу діаметром D (радіусом r) відносно центральних осей z і y** , згідно (9.39), буде:

$$K_{o.p.m.} = \frac{W_{z(y)}}{F} = \frac{\frac{\pi \cdot r^3}{4}}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4} \cdot r = \frac{1}{8} \cdot D. \quad (9.47)$$

Приклад 9.10

Визначити *полярний* та *осьові моменти опору*, а також *полярний* та *осьові коефіцієнти раціональності перерізу по міцності відносно центральних осей Oz і Oy* для *кільцевого поперечного перерізу із зовнішнім діаметром D та внутрішнім діаметром d* (рис. 9.10).

Розв'язання:

Для кільцевого поперечного перерізу із зовнішнім діаметром D та внутрішнім діаметром d (рис. 9.10) полярний та осьові моменти інерції площі відносно центральних осей Oz і Oy , згідно (9.27) і (9.28), будуть відповідно рівні

$J_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$ і $J_z = J_y = \frac{1}{2} \cdot J_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$, а відстані найбільш віддаленої точки даного перерізу від полюсу та центральних осей Oz і Oy становлять $\rho_{\max} = z_{\max} = y_{\max} = 0,5 \cdot D$, тому **полярний момент опору кільцевого поперечного перерізу із зовнішнім діаметром D та внутрішнім діаметром d** буде:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}}{0,5 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^4 - d^4}{16 \cdot D}, \quad (9.48)$$

а **моменти опору відносно центральних осей Oz і Oy** :

$$W_z = W_y = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}}{0,5 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^4 - d^4}{32 \cdot D} = \frac{1}{2} \cdot W_p. \quad (9.49)$$

Полярний та осеві коефіцієнти раціональності перерізу по міцності для даного **кільцевого перерізу** будуть знаходитись у співвідношенні:

$$K_{o.p.m.} = \frac{1}{2} \cdot K_{n.p.m.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{W_p}{F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\pi \cdot D^4 - d^4}{16 \cdot D}}{\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}} = \frac{1}{8} \cdot (D^2 + d^2). \quad (9.50)$$

9.5. Моменти інерції площі складних перерізів

При розв'язанні різних практичних задач часто виникає потреба визначити моменти інерції складних перерізів відносно тих чи інших осей, що лежать у площині фігури. Для **стандартних поперечних перерізів стрижнів** — **кутових рівнобоких** (рис. 9.13, а) та **нерівнобоких** (рис. 9.13, б), **двотаврових** (рис. 9.13, в), **швелерних** (рис. 9.13, з) та інших — моменти інерції відносно різних осей наведено в таблицях **сортаментів** ГОСТ 8509–93, ГОСТ 8510–86, ГОСТ 8239–89, ДСТУ 3436–96 (ГОСТ 8240–97) поряд із розмірами, площами перерізів, положеннями центрів ваги та іншими характеристиками. У сортаменті головні центральні осі перерізів позначені літерами x, y (рис. 9.13).

При визначенні моментів інерції складних перерізів останні можна розбити на прості частини, моменти інерції яких відомі.

Момент інерції площі складного поперечного перерізу дорівнює сумі моментів інерції його складових частин: $J = J^I + J^{II} + \dots + J^N$. (9.51)

Це випливає з основної властивості інтеграла суми. **Якщо в поперечному перерізі є отвір, його зручно вважати частиною фігури з від'ємною площею**, й, відповідно, з **від'ємним моментом інерції**.

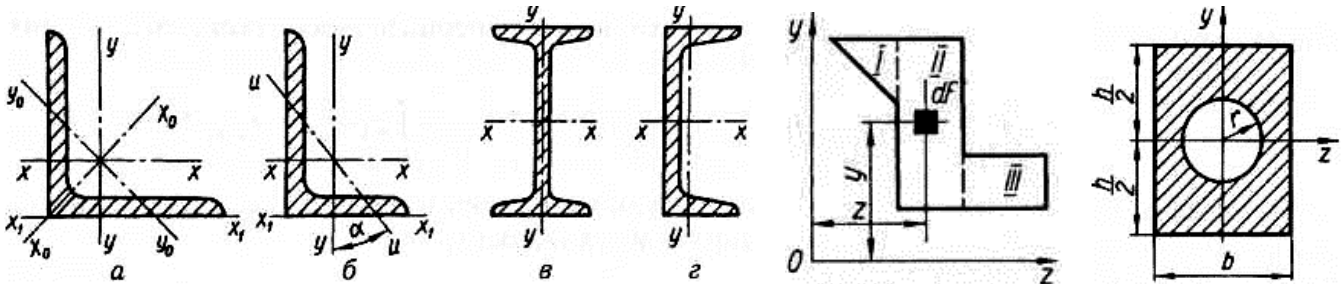


Рис. 9.13.

Рис. 9.14.

Рис. 9.15.

Приклад 9.11

Визначити момент інерції складних фігур відносно осі Oz (рис. 9.14, 9.15):
1. Момент інерції площі складного перерізу відносно осі Oz (рис. 9.14), в

загальному випадку, визначається як $J_z = \int_F y^2 \cdot dF$. Розіб'ємо фігуру на прості частини *I*, *II*, *III*, та проінтегруємо вираз послідовно по площах F_1 , F_2 , F_3 цих простих фігур: $J_z = \int_{F_1} y^2 \cdot dF + \int_{F_2} y^2 \cdot dF + \int_{F_3} y^2 \cdot dF$. Кожний із цих інтегралів є моментом інерції площі відповідної простої фігури. Отже, $J_z = J_z^I + J_z^{II} + J_z^{III}$.

2. Переріз, наведений на рис. 9.15, можна розбити на прямокутник з площею $b \cdot h$ та круглий отвір радіусом r з від'ємною площею $-\pi \cdot r^2$. Тоді:

$$J_z = J_z^I - J_z^{II} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4$$

9.6. Моменти інерції площі перерізу відносно паралельних осей

Припустимо, що відомі моменти інерції площі поперечного перерізу стрижня відносно центральних осей Oz та Oy :

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dF ; J_y = \int_F z^2 \cdot dF ; J_{zy} = \int_F z \cdot y \cdot dF . \quad (9.52)$$

Треба визначити моменти інерції площі цього ж поперечного перерізу стрижня відносно осей O_1z_1 та O_1y_1 , паралельних центральним (рис. 9.16):

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF ; J_{y_1} = \int_F z_1^2 \cdot dF ; J_{z_1y_1} = \int_F z_1 \cdot y_1 \cdot dF . \quad (9.53)$$

Координати будь-якої точки в новій системі $z_1O_1y_1$ можна виразити через координати в старих осях: $z_1 = z + b$, $y_1 = y + a$. (9.54)

Підставивши ці величини у формули (9.53) та проінтегрувавши почленно

$$J_{z_1} = J_z + a^2 \cdot F ;$$

одержимо:

$$J_{y_1} = J_y + b^2 \cdot F ; \quad (9.55)$$

$$J_{z_1y_1} = J_{zy} + a \cdot b \cdot F .$$

Таким чином, момент інерції площі поперечного перерізу відносно довільної осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, паралельної даній, плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між цими осями.

Відцентровий момент інерції площі поперечного перерізу відносно довільної системи взаємно перпендикулярних осей дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі перерізу на координати його центра ваги в нових осях.

Формули (9.55) показують, що моменти інерції площі перерізу відносно центральних осей завжди будуть меншими порівняно з моментами інерції відносно паралельних осей. Координати a і b у формулі (9.55) треба підставляти, враховуючи їхній знак.

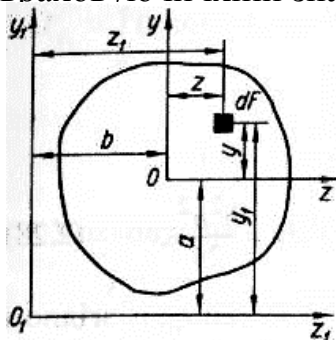


Рис. 9.16.

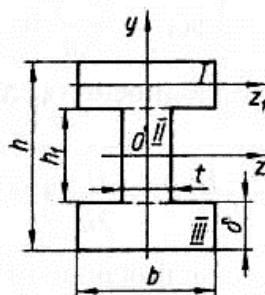


Рис. 9.17.

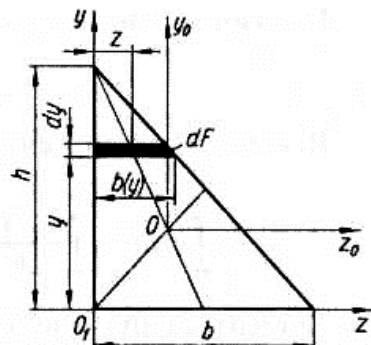


Рис. 9.18.

Приклад 9.12

Визначити *момент інерції двотаврового перерізу відносно центральної осі Oz* (рис. 9.17).

Розв'язання:

Переріз, що складається з двох однакових полиць площею $F^I = F^{III} = b \cdot \delta$ та стінки площею $F^{II} = h_1 \cdot t$, розбиваємо на ці три прості частини. Тоді $J_z = J_z^I + J_z^{II} + J_z^{III}$. Момент інерції площі полиць (прямокутників) відносно осі Oz згідно з формулами (9.16) і (9.55), буде рівний:

$$J_z^I = J_z^{III} = J_{z_1}^I - \left(\frac{h_1 + \delta}{2} \right)^2 \cdot F = \frac{1}{12} \cdot b \cdot \delta^3 - \frac{1}{4} \cdot (h_1 + \delta)^2 \cdot b \cdot \delta.$$

Момент інерції стінки $J_z^{II} = \frac{1}{12} \cdot t \cdot h_1^3$. Отже, момент інерції двотавра

$$J_z = 2 \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot b \cdot \delta^3 - \frac{1}{4} \cdot (h_1 + \delta)^2 \cdot b \cdot \delta \right] + \frac{1}{12} \cdot t \cdot h_1^3 = \frac{1}{12} \cdot t \cdot h_1^3 - \frac{1}{6} \cdot b \cdot \delta \cdot (2 \cdot \delta^2 + 6 \cdot h_1 \cdot \delta + 3 \cdot h_1^2)$$

Приклад 9.13

Визначити *відцентровий момент інерції площі прямокутного трикутника відносно осей z, y* (рис. 9.18), *що збігаються з катетами*, а також *відносно головних центральних осей z_0, y_0, паралельних їм*.

Розв'язання:

Елементарну площадку беремо у вигляді смужки завширшки $b(y)$ та заввишки dy . Її площа $dF = b(y) \cdot dy$. Оскільки $\frac{b(y)}{b} = \frac{h-y}{h}$ — впливає з подібності малого (з основою $b(y)$ і висотою $h-y$) та великого (з основою b і висотою h) трикутників, то $b(y) = \frac{h-y}{h} \cdot b$, $dF = b(y) \cdot dy = \frac{h-y}{h} \cdot b \cdot dy$. Горизонтальна координата центра ваги смужки $z = \frac{1}{2} \cdot b(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h-y}{h} \cdot b$.

Відцентровий момент інерції площі прямокутного трикутника відносно осей z, y, згідно (9.13), буде рівний:

$$\begin{aligned} J_{zy} &= \int_F z \cdot y \cdot dF = \int_0^h \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{h-y}{h} \cdot b \right) \cdot y \cdot \left(\frac{h-y}{h} \cdot b \cdot dy \right) = \int_0^h \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \left(\frac{h-y}{h} \right)^2 \cdot y \cdot dy = \\ &= \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot \int_0^h y \cdot (h-y)^2 \cdot dy = \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot \int_0^h y \cdot (h^2 - 2 \cdot h \cdot y + y^2) \cdot dy = \\ &= \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot \int_0^h (y^3 - 2 \cdot h \cdot y^2 + h^2 \cdot y) \cdot dy = \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy - \frac{b^2}{h} \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy + \frac{b^2}{2} \cdot \int_0^h y \cdot dy = \\ &= \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot y^4 \right) \Big|_0^h - \frac{b^2}{h} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot y^3 \right) \Big|_0^h + \frac{b^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot y^2 \right) \Big|_0^h = \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot \frac{h^4}{4} - \frac{b^2}{h} \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{b^2}{2} \cdot \frac{h^2}{2} = \\ &= \frac{b^2 \cdot h^2}{8} - \frac{b^2 \cdot h^2}{3} + \frac{b^2 \cdot h^2}{4} = b^2 \cdot h^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = b^2 \cdot h^2 \cdot \left(\frac{3}{24} - \frac{8}{24} + \frac{6}{24} \right), \end{aligned}$$

$$J_{zy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}. \quad (9.56)$$

Відцентровий момент інерції площі прямокутного трикутника відносно центральних осей z_0, y_0 , згідно (9.55), рівний:

$$J_{z_0 y_0} = J_{zy} - a_0 \cdot b_0 \cdot F, \quad (9.57)$$

де $a_0 = \frac{1}{3} \cdot h$, $b_0 = \frac{1}{3} \cdot b$ — координати центра тяжіння даного прямокутного трикутника в системі координат zOy . Тоді:

$$J_{z_0 y_0} = J_{zy} - a_0 \cdot b_0 \cdot F = \frac{1}{24} \cdot b^2 \cdot h^2 - \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} - \frac{b^2 \cdot h^2}{18},$$

$$J_{z_0 y_0} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}. \quad (9.58)$$

9.7. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Припустимо, що відомі моменти інерції довільного перерізу (рис. 9.19) відносно координатних осей z, y :

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dF; J_y = \int_F z^2 \cdot dF; J_{zy} = \int_F z \cdot y \cdot dF. \quad (9.59)$$

Повернемо осі z, y на кут α проти годинникової стрілки, вважаючи кут повороту осей у цьому напрямі додатним. Знайдемо тепер **моменти інерції перерізу відносно повернутих осей** z_1, y_1 :

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF; J_{y_1} = \int_F z_1^2 \cdot dF; J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 \cdot y_1 \cdot dF. \quad (9.60)$$

Координати довільної елементарної площадки в нових осях z_1, y_1 можна виразити через її координати z, y в початковій системі за формулами:

$$z_1 = OC = OE + EC = OE + AD = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha;$$

$$y_1 = BC = BD - CD = BD - EA = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha. \quad (9.61)$$

Підставивши ці значення у формули (9.60), та враховуючи формули (9.59),

$$J_{z_1} = \cos^2 \alpha \cdot J_z + \sin^2 \alpha \cdot J_y - \sin 2\alpha \cdot J_{zy};$$

остаточно знайдемо: $J_{y_1} = \sin^2 \alpha \cdot J_z + \cos^2 \alpha \cdot J_y + \sin 2\alpha \cdot J_{zy}; \quad (9.62)$

$$J_{z_1 y_1} = \cos 2\alpha \cdot J_{zy} + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (J_z - J_y).$$

Ці формули здобуті при повороті довільної системи прямокутних осей, тому вони справедливі й для центральних осей.

Додаючи почленно перші два вирази (9.62), знаходимо:

$$J_{z_1} + J_{y_1} = \cos^2 \alpha \cdot J_z + \sin^2 \alpha \cdot J_y - \sin 2\alpha \cdot J_{zy} + \sin^2 \alpha \cdot J_z + \cos^2 \alpha \cdot J_y + \sin 2\alpha \cdot J_{zy} = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot J_z + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot J_y,$$

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y = J_p. \quad (9.63)$$

При повороті прямокутних осей сума осьових моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

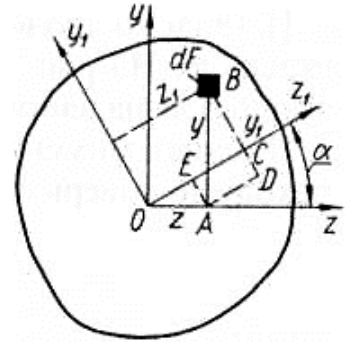


Рис. 9.19.

При повороті системи осей на кут $\alpha = \frac{\pi}{2}$, отримаємо:

$$J_{z_1} = J_y ; J_{y_1} = J_z ; J_{z_1 y_1} = -J_{zy} . \quad (9.64)$$

9.8. Напрями головних центральних осей інерції перерізу.

Головні центральні моменти інерції

Найбільше практичне значення мають головні центральні осі інерції поперечного перерізу стрижня, відцентровий момент інерції відносно яких дорівнює нулю. Позначимо такі осі літерами u, v . Отже,

$$J_{uv} = 0 . \quad (9.65)$$

Для визначення положення головних центральних осей несиметричної фігури повернемо довільну початкову систему центральних осей z, y (рис. 9.20) на деякий кут α_0 , при якому відцентровий момент інерції дорівнюватиме нулю:

$$J_{z_1 y_1} = J_{uv} = 0 . \quad (9.66)$$

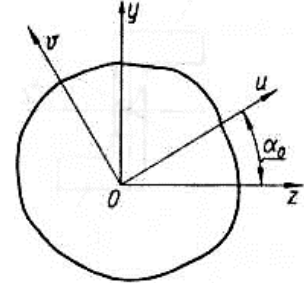


Рис. 9.20.

Тоді, з формули (9.62): $J_{z_1 y_1} = \cos 2\alpha_0 \cdot J_{zy} + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 \cdot (J_z - J_y) = 0$, (9.67)

звідки
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{zy}}{J_y - J_z} . \quad (9.68)$$

Добуті з формули (9.68) **два значення кута α_0** різняться між собою на 90° і дають **положення головних осей**. **Менший із цих кутів за модулем не перевищує $\frac{\pi}{4}$** . Будемо далі користуватися тільки **меншим кутом**. Проведену під цим кутом (додатним чи від'ємним) головну вісь будемо позначати літерою u .

Головні центральні моменти інерції площі перерізу можна знайти із загальних формул (9.62) переходу до повернутих осей, взявши $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned} J_u &= \cos^2 \alpha_0 \cdot J_z + \sin^2 \alpha_0 \cdot J_y - \sin 2\alpha_0 \cdot J_{zy} ; \\ J_v &= \sin^2 \alpha_0 \cdot J_z + \cos^2 \alpha_0 \cdot J_y + \sin 2\alpha_0 \cdot J_{zy} . \end{aligned} \quad (9.69)$$

Перетворивши формули (9.69) для головних центральних моментів інерції, шляхом складання виразів для їхніх суми та різниці, одержимо:

$$J_u = \frac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y + \frac{J_z - J_y}{\cos 2\alpha_0} \right), \quad J_v = \frac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y - \frac{J_z - J_y}{\cos 2\alpha_0} \right) . \quad (9.70)$$

Очевидно, що **при $J_z > J_y$ момент інерції $J_u > J_v$** .

Використовуючи формулу (9.68), можна виключити з виразів (9.70) величину $\cos 2\alpha_0$. Тоді матимемо:

$$J_u = \frac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y \pm \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4 \cdot J_{zy}^2} \right); \quad J_v = \frac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y \mp \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4 \cdot J_{zy}^2} \right), \quad (9.71)$$

причому верхні знаки беремо при $J_z > J_y$, а нижні — при $J_z < J_y$.

Отже, формули (9.68) і (9.71) дають змогу визначити положення головних центральних осей інерції та головні центральні моменти інерції.

Якщо тепер замість довільної початкової системи центральних осей zOy взяти головні центральні осі (рис. 9.21), то формули (9.62) переходу до повернутих осей спростяться:

$$\begin{aligned}
 J_{z_1} &= \cos^2 \alpha \cdot J_u + \sin^2 \alpha \cdot J_v ; \\
 J_{y_1} &= \sin^2 \alpha \cdot J_u + \cos^2 \alpha \cdot J_v ; \\
 J_{z_1 y_1} &= \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (J_u - J_v) .
 \end{aligned}
 \quad (9.72)$$

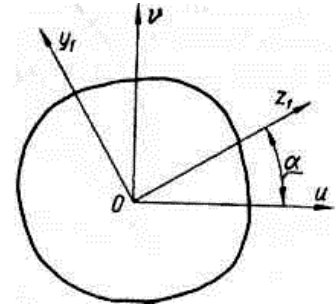


Рис. 9.21.

Важливо зазначити, що головні центральні моменти інерції мають властивість екстремальності.

Ураховуючи, що сума моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей — величина стала, можна дійти висновку, що відносно однієї з головних центральних осей момент інерції має максимальне значення, а відносно іншої — мінімальне.

Часткові випадки визначення положення головних центральних осей:

1) *переріз має одну вісь симетрії* — одна з головних центральних осей є віссю симетрії, друга проходить через центр ваги перпендикулярно до першої; 2) *переріз має дві осі симетрії* — головними центральними осями є осі симетрії; 3) *переріз має дві осі симетрії і моменти інерції відносно них рівні* — всі центральні осі є головними і моменти інерції відносно них рівні; 4) *переріз має більше двох осей симетрії* (круг, кругове кільце, правильні багатокутники) — довільна центральна вісь є головною. Всі головні центральні моменти інерції площі такого перерізу рівні між собою.

9.9. Радіус та еліпс інерції

Для того, щоб мати уявлення про жорсткість поперечного перерізу при вивченні його геометричних властивостей, будують еліпс інерції. Для його побудови необхідно вміти визначати радіус інерції.

Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна подати у вигляді добутку площі фігури на квадрат деякої величини, що називають радіусом інерції:

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dF = F \cdot i_z^2, \quad (9.73)$$

де i_z — радіус інерції площі поперечного перерізу відносно осі z . Радіус інерції завжди більше відповідної координати центра ваги $i_z > y_c$.

Отже, радіус інерції i_z площі поперечного перерізу відносно осі z — це геометрична характеристика перерізу, що дорівнює квадратному кореню від осьового моменту інерції перерізу J_z відносно осі z , поділеному на площу поперечного перерізу F :

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}. \quad (9.74)$$

Радіус інерції i_y площі поперечного перерізу відносно осі y — це геометрична характеристика перерізу, що дорівнює квадратному кореню від осьового моменту інерції перерізу J_y відносно осі y , поділеному на площу поперечного перерізу F :

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (9.75)$$

Радіуси інерції площі поперечного перерізу стрижня (плоскої фігури) виражаються в одиницях довжини в першому степені (м, см, мм). Застосовуються в розрахунках на стійкість та на позацентровий розтяг-стиск.

Головні центральні радіуси інерції площі поперечного перерізу i_u та i_v відповідають головним центральним осям інерції поперечного перерізу u та v :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}, \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}}. \quad (9.76)$$

Приклад 9.14

Для прямокутника шириною b та висотою h , зображеного на рис. 9.6, визначити головні радіуси інерції площі поперечного.

Розв'язання:

Для прямокутника, зображеного на рис. 9.6, головні осьові моменти інерції рівні $J_u = \frac{b \cdot h^3}{12}$, $J_v = \frac{h \cdot b^3}{12}$, тому головні радіуси інерції площі поперечного суцільного прямокутного перерізу будуть:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h}} = \frac{h}{2 \cdot \sqrt{3}}, \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{b \cdot h}} = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{3}}. \quad (9.77)$$

Еліпсом інерції називається еліпс, який побудовано на головних центральних осях інерції перерізу, з півосями, що дорівнюють головним радіусам інерції, причому вздовж осі u відкладаємо відрізки i_v , а вздовж осі v — відрізки i_u (рис. 9.22). Він описується рівнянням:

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1. \quad (9.78)$$

Для еліпса інерції характерна наступна властивість: радіус інерції відносно довільної осі z визначається перпендикуляром OA , поставленим із центра еліпса на дотичну до еліпса, паралельну цій осі.

Для визначення точки дотику досить провести паралельно даній осі z будь-яку хорду. Точка перетину еліпса з прямою, що сполучає центр O із серединою хорди, і є точкою дотику. Вимірявши потім відрізок $OA = i_z$, знаходимо момент інерції $J_z = F \cdot i_z^2$.

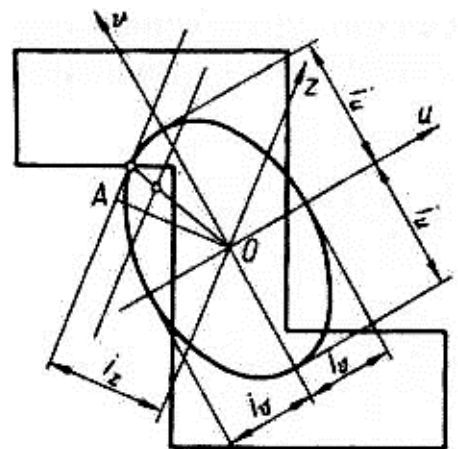


Рис. 9.22.

9.10. Загальні умови розв'язування задач на знаходження геометричних характеристик плоских перерізів

Алгоритм визначення положення головних центральних осей інерції та значень головних центральних моментів інерції площі складного поперечного перерізу, що складається з простих частин, характеристики яких можна легко дістати:

1. Вибираємо для перерізу довільну систему прямокутних координат. Розбиваємо фігуру на прості частини та визначаємо за формулами (9.9) положення її центра тяжіння.
2. Проводимо початкову систему центральних осей z та y так, щоб можна було найпростіше визначити моменти інерції частин фігури відносно цих осей. Для цього знаходимо моменти інерції частин фігури відносно їхніх власних центральних осей, проведених паралельно осям z, y , та користуємося формулами переходу до паралельних осей (9.55). У такий спосіб знаходимо значення J_z, J_y, J_{zy} .

3. Визначаємо із формули (9.68) кут нахилу головних центральних осей,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot J_{zy}}{J_y - J_z} \right), \quad -\frac{\pi}{4} \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4}, \quad (9.79)$$

причому вісь, проведена під кутом α_0 (додатним чи від'ємним), позначаємо літерою u , а перпендикулярну до неї — літерою v .

4. За формулами (9.71) визначаємо головні моменти інерції J_u і J_v .

Приклад 9.15

Для перерізу, зображеного на рис. 9.23, а, визначити положення головних центральних осей інерції u , v , головні центральні моменти інерції J_u , J_v та головні центральні радіуси інерції i_u , i_v . Розміри фігури вказані на рисунку.

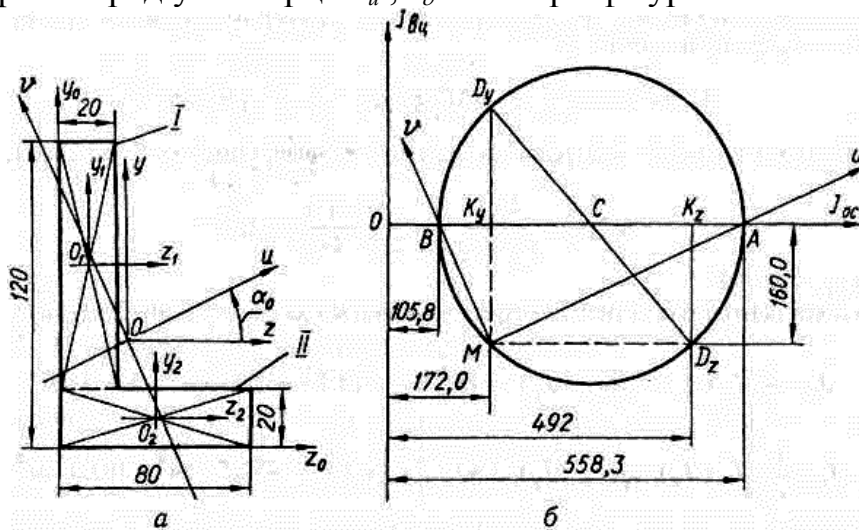


Рис. 9.23.

Дано:

$$h = 120 \text{ мм},$$

$$l = 80 \text{ мм},$$

$$d = 20 \text{ мм}$$

$$u, v - ?$$

$$J_u, J_v - ?$$

$$i_u, i_v - ?$$

Розв'язання:

1. Проводимо систему прямокутних координатних осей $z_0 y_0$ вздовж сторін l і h відповідно. Розбиваємо складний поперечний переріз на дві прості частини — прямокутники **I** і **II**, та визначаємо для кожної з частин координати центра ваги та площу. Так, для першої частини (**I**) з центром ваги $O_1(z_1, y_1)$

матимемо: $z_1 = \frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ (мм)},$

$$y_1 = d + \frac{1}{2} \cdot (h - d) = 20 + \frac{1}{2} \cdot (120 - 20) = 70 \text{ (мм)},$$

$$F_1 = d \cdot (h - d) = 20 \cdot (120 - 20) = 2000 \text{ (мм}^2\text{)}.$$

Для другої частини (**II**) з центром ваги $O_2(z_2, y_2)$ матимемо:

$$z_2 = \frac{l}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ (мм)}, \quad y_2 = \frac{d}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (мм)}, \quad F_2 = l \cdot d = 80 \cdot 20 = 1600 \text{ (мм}^2\text{)}.$$

Тоді, за формулами (9.9), положення центра ваги складного перерізу буде

$$z_c = \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2}{F_1 + F_2} = \frac{2000 \cdot 10 + 1600 \cdot 40}{2000 + 1600} = \frac{84000}{3600} \approx 23,3 \text{ (мм)};$$

$$y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2} = \frac{2000 \cdot 70 + 1600 \cdot 10}{2000 + 1600} = \frac{156000}{3600} \approx 43,3 \text{ (мм)}.$$

Результати обчислень зводимо в таблицю 9.1.

Таблиця 9.1.

Номер частини фігури	Площа частини $F_i, \text{мм}^2$	Координати центра ваги частини в системі $z_0, y_0, \text{мм}$		$F_i \cdot z_i$	$F_i \cdot y_i$	$z_C, y_C, \text{мм}$
		z_i	y_i			
I	2000	10	70	20000	140000	—
II	1600	40	10	64000	16000	—
Для всієї фігури	3600	—	—	84000	156000	$z_C = \frac{84000}{3600} \approx 23,3$ $y_C = \frac{156000}{3600} \approx 43,3$

2. Через точку $O(z_C, y_C)$ проводимо початкову систему центральних осей z, y паралельно сторонам кутника.

Для визначення моментів інерції відносно цих осей знову розбиваємо фігуру на прості частини — прямокутники **I** і **II** — та проводимо через їхні центри тяжіння власні центральні осі z_1, y_1 та z_2, y_2 , паралельно сторонам.

Моменти інерції кожного прямокутника відносно власних центральних осей легко визначити за формулами (9.16) і (9.17):

$$J_{z_1}^I = \frac{d \cdot (h-d)^3}{12} = \frac{20 \cdot (120-20)^3}{12} = \frac{20000000}{12} \approx 1666667 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$J_{y_1}^I = \frac{(h-d) \cdot d^3}{12} = \frac{(120-20) \cdot 20^3}{12} = \frac{800000}{12} \approx 66667 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$J_{z_2}^{II} = \frac{l \cdot d^3}{12} = \frac{80 \cdot 20^3}{12} = \frac{640000}{12} \approx 53333 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$J_{y_2}^{II} = \frac{d \cdot l^3}{12} = \frac{20 \cdot 80^3}{12} = \frac{10240000}{12} = \frac{256}{3} \approx 85333 \text{ (мм}^4\text{)}.$$

Координати центра тяжіння **O** всього кутника відносно власних центральних осей z_1, y_1 першого прямокутника будуть:

$$b_1 = z_1 - z_C = 10 - 23,3 = -13,3 \text{ (мм)}; \quad a_1 = y_1 - y_C = 70 - 43,3 = 26,7 \text{ (мм)}.$$

Координати центра тяжіння **O** всього кутника відносно власних центральних осей z_2, y_2 другого прямокутника будуть:

$$b_2 = z_2 - z_C = 40 - 23,3 = 16,7 \text{ (мм)}; \quad a_2 = y_2 - y_C = 10 - 43,3 = -33,3 \text{ (мм)}.$$

Моменти інерції кожної простої фігури відносно центральних осей z, y знаходимо за формулами (9.55) переходу до паралельних осей:

$$J_z^I = J_{z_1}^I + a_1^2 \cdot F_1 = 1666667 + 26,7^2 \cdot 2000 \approx 3092447 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$J_y^I = J_{y_1}^I + b_1^2 \cdot F_1 = 66667 + (-13,3)^2 \cdot 2000 \approx 420447 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$J_{zy}^I = J_{z_1 y_1}^I + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1 = 0 + 26,7 \cdot (-13,3) \cdot 2000 \approx -710220 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$J_z^{II} = J_{z_2}^{II} + a_2^2 \cdot F_2 = 53333 + (-33,3)^2 \cdot 1600 \approx 1827557 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$J_y^{II} = J_{y_2}^{II} + b_2^2 \cdot F_2 = 853333 + 16,7^2 \cdot 1600 \approx 1299557 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$J_{zy}^{II} = J_{z_2 y_2}^{II} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2 = 0 + (-33,3) \cdot 16,7 \cdot 1600 \approx -889776 \text{ (мм}^4\text{)}.$$

Результати обчислень зводимо в табл. 9.2 і табл. 9.3.

Таблиця 9.2.

№	$F_i,$ $мм^2$	$a_i,$ $мм$	$b_i,$ $мм$	$a_i^2 \cdot F_i,$ $мм^4$	$b_i^2 \cdot F_i,$ $мм^4$	$a_i \cdot b_i \cdot F_i,$ $мм^4$
I	2000	26,7	-13,3	1425780	353780	-710220
II	1600	-33,3	16,7	1774224	446224	-889776

Таблиця 9.3.

№	Моменти інерції частини відносно					
	власних центральних осей,			центральных осей фігури		
	$J_{z_i}^i, мм^4$	$J_{y_i}^i, мм^4$	$J_{z_i y_i}^i, мм^4$	$J_z^i, мм^4$	$J_y^i, мм^4$	$J_{zy}^i, мм^4$
I	1666667	66667	0	3092447	420447	-710220
II	53333	853333	0	1827557	1299557	-889776

Підсумовуючи останні три колонки таблиці, знаходимо моменти інерції фігури відносно центральних осей z, y :

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} = 3092447 + 1827557 = 4920004 \text{ (мм}^4\text{)} \approx 492 \text{ (см}^4\text{)};$$

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = 420447 + 1299557 = 1720004 \text{ (мм}^4\text{)} \approx 172 \text{ (см}^4\text{)};$$

$$J_{zy} = J_{zy}^I + J_{zy}^{II} = -710220 - 889776 = -1599996 \text{ (мм}^4\text{)} \approx 160 \text{ (см}^4\text{)}.$$

3. Кут нахилу головних центральних осей u, v до осі z визначимо за формулою (9.79):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} \cdot \arctg\left(\frac{2 \cdot J_{zy}}{J_y - J_z}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctg\left(\frac{2 \cdot (-1599996)}{1720004 - 4920004}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \arctg\left(\frac{-3199992}{-3200000}\right) \approx \frac{1}{2} \cdot \arctg(1) = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ. \end{aligned}$$

4. Головні центральні моменти інерції J_u і J_v площі перерізу визначаємо за формулами (9.71):

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y + \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4 \cdot J_{zy}^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(4920004 + 1720004 + \sqrt{(1720004 - 4920004)^2 + 4 \cdot (-1599996)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(6640008 + \sqrt{10240000000000 + 10239948800064} \right) \approx \\ &\approx 5582743 \text{ (мм}^4\text{)} \approx 558,3 \text{ (см}^4\text{)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_v &= \frac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y - \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4 \cdot J_{zy}^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(4920004 + 1720004 - \sqrt{(1720004 - 4920004)^2 + 4 \cdot (-1599996)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(6640008 - \sqrt{10240000000000 + 10239948800064} \right) \approx \\ &\approx 1057265 \text{ (мм}^4\text{)} \approx 105,7 \text{ (см}^4\text{)}. \end{aligned}$$

Головні центральні радіуси інерції, згідно (9.76), будуть:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{5582743}{3600}} \approx 39,4 \text{ (мм)}, \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{1058265}{3600}} \approx 17,1 \text{ (мм)}.$$

5. Графічне розв'язання даної задачі наведено на рис. 9.23, б.

Нам треба визначити положення головних центральних осей u , v , та значення головних центральних моментів інерції J_u , J_v за відомими моментами інерції J_z , J_y , J_{zy} площі поперечного перерізу стрижня відносно будь-якої системи прямокутних центральних осей z , y . Для **графічної побудови** введемо в розгляд геометричну площину та віднесемо її до прямокутної системи координат. По осі абсцис відкладемо осьові моменти інерції $J_{oc}(J_z, J_y)$, а по осі ординат — відцентровий момент інерції $J_{oc}(J_{zy})$.

У геометричній площині (рис. 9.23, б) будуємо точки D_z та D_y , які відповідають моментам інерції J_z , J_y відносно осей z та y . Абсцисами цих точок є осьові моменти інерції $OK_z = J_z = 492 \text{ см}^4$, $OK_y = J_y = 172 \text{ см}^4$, ординатами цих точок є відцентровий момент інерції J_{zy} , причому $K_z D_z = J_{zy} = 160 \text{ см}^4$, $K_y D_y = -J_{zy} = -160 \text{ см}^4$. Оскільки обидві точки D_z і D_y належать одному діаметру, то, сполучивши їх, матимемо центр C круга інерції. Із центра C опишемо коло радіусом

$$\begin{aligned} CD_z = CD_y &= \sqrt{(CK_z)^2 + (K_z D_z)^2} = \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{492 - 172}{2}\right)^2 + (-160)^2} = \sqrt{51200} \approx 226,3 \text{ (см}^4\text{)}, \end{aligned}$$

яке перетинає вісь абсцис у точках A та B , причому $CA = CB = 226,3 \text{ см}^4$.

Абсциси точок A і B — відрізки AO та OB — і є шуканими в графічному розв'язку головними центральними моментами інерції J_u , J_v :

$$OA = OK_y + K_y C + CA = 172 + \frac{492 - 172}{2} + 226,3 = 558,3 \text{ (см}^4\text{)};$$

$$OB = OK_y + K_y C - CB = 172 + \frac{492 - 172}{2} - 226,3 = 105,7 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Для визначення напрямку головних центральних осей, будуємо фокус круга інерції. Для цього з точки D_z (D_y) проведемо лінію, паралельну осі z (y), до перетину з кругом у фокусі M . Сполучивши фокус M з точками A і B круга, дістанемо **напрямок головних центральних осей** u та v (рис. 9.23, б).

Приклад 9.16

Для заданого перерізу (рис. 9.24, а) визначити положення головних центральних осей інерції u і v , головні центральні моменти інерції J_u і J_v , головні центральні радіуси інерції i_u і i_v та побудувати еліпс інерції.

Розв'язання:

Складний переріз складається із швелера № 40, прямокутника 25×400 і двотавра № 30. Проведемо через центр тяжіння кожного перерізу центральні осі z_1, y_1 , z_2, y_2 та z_3, y_3 . Для швелера з ДСТУ 3436–96 (ГОСТ 8240–97) та для

двотавра з ГОСТ 8239–89 вибираємо необхідні для розрахунку дані:
 а) для швелера № 40: $F_1 = 61,5 \text{ см}^2$, $J_{z_1} = 642 \text{ см}^4$, $J_{y_1} = 15220 \text{ см}^4$;
 б) для прямокутника: $F_2 = 100 \text{ см}^2$, $J_{z_2} = 52 \text{ см}^4$, $J_{y_2} = 13333 \text{ см}^4$;
 в) для двотавра № 30: $F_3 = 46,5 \text{ см}^2$, $J_{z_3} = 7080 \text{ см}^4$, $J_{y_3} = 337 \text{ см}^4$.

Необхідні розміри вказані на рис. 9.24.

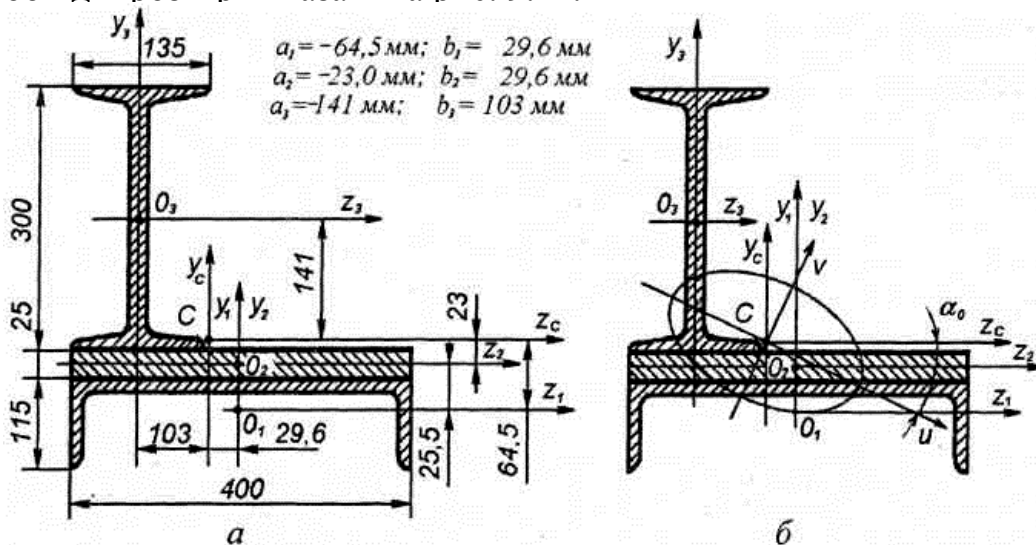


Рис. 9.24.

1. Визначаємо центр тяжіння всього перерізу за формулами (9.9), приймаючи за початкові осі z_1, y_1 швелера:

$$z_C = \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + F_3 \cdot z_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{61,5 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 46,5 \cdot (-13,26)}{61,5 + 100 + 46,5} \approx -\frac{616,59}{208} \approx -2,96 \text{ (см)};$$

$$y_C = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{61,5 \cdot 0 + 100 \cdot 4 + 46,5 \cdot 20,25}{61,5 + 100 + 46,5} \approx \frac{1341,63}{208} \approx 6,45 \text{ (см)}.$$

Всі обрахунки зводимо в таблицю 9.4.

Таблиця 9.4.

Номер частини фігури	Площа частини $F_i, \text{см}^2$	Координати центра ваги частини в системі, z_1, y_1 см		$F_i \cdot z_i$	$F_i \cdot y_i$	$z_C, y_C, \text{см}$
		z_i	y_i			
1	61,50	0	0	0	140	$z_C = \frac{-616}{208} \approx -2,96$ $y_C = \frac{1341,63}{208} \approx 6,45$
2	100	0	4	0	16	
3	46,5	-13,26	20,25	-616	941,63	
Для всієї фігури	208,0	—	—	-616	1341,63	

За одержаними значеннями $z_C = -2,96 \text{ см}$ і $y_C = 6,45 \text{ см}$ знаходимо центр тяжіння всього перерізу і проводимо головні центральні осі z_C, y_C .

2. Визначаємо головні центральні моменти всього перерізу відносно осей z_C, y_C , використовуючи формули переходу при паралельному переносі осей:

$$\begin{aligned} J_{z_C} &= J_{z_1} + a_1^2 \cdot F_1 + J_{z_2} + a_2^2 \cdot F_2 + J_{z_3} + a_3^2 \cdot F_3; \\ J_{y_C} &= J_{y_1} + b_1^2 \cdot F_1 + J_{y_2} + b_2^2 \cdot F_2 + J_{y_3} + b_3^2 \cdot F_3; \\ J_{z_C y_C} &= J_{z_1 y_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1 + J_{z_2 y_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2 + J_{z_3 y_3} + a_3 \cdot b_3 \cdot F_3. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Всі обрахунки зводимо в таблиці 9.5 9.6.

Таблиця 9.5.

№	$F_i, \text{см}^2$	$a_i, \text{см}$	$b_i, \text{см}$	$a_i^2 F_i, \text{см}^4$	$b_i^2 F_i, \text{см}^4$	$a_i b_i F_i, \text{см}^4$
1	61,5	-6,45	2,96	2558,6	538,8	-1174,2
2	100	-2,3	2,96	529	876,2	-680,8
3	46,5	-14,1	-10,3	9244,7	4933,2	-6753,2

Таблиця 9.6.

№	Моменти інерції частини відносно					
	власних центральних осей, см^4			центральных осей фігури, см^4		
	J_{z_i}	J_{y_i}	$J_{z_i y_i}$	$J_{z_i}^C$	$J_{y_i}^C$	$J_{z_i y_i}^C$
1	642	15220	0	3200,6	15738,8	-1174,2
2	52	13333	0	581,0	14176,2	-680,8
3	7080	337	0	16324,7	5270,2	-6753,2
Для всієї фігури	—	—	—	20106,3	35185,5	-8608,2

Сумуючи три останні стовпчика таблиці 9.6, знаходимо J_{z_c} , J_{y_c} і $J_{z_c y_c}$, тобто виконуємо ті підрахунки, які передбачені формулами (9.80):

$$J_{z_c} = 3200,6 + 581,0 + 16324,7 = 20106,3 (\text{см}^4);$$

$$J_{y_c} = 15758,8 + 14176,2 + 5270,2 = 35185,2 (\text{см}^4);$$

$$J_{z_c y_c} = -1174,2 - 680,8 - 6753,2 = -8608,2 (\text{см}^4).$$

3. Знаходимо кут нахилу головних центральних осей інерції u , v до осі

$$z: \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = \frac{2 \cdot (-8608,2)}{35185,2 - 20106,3} \approx -1,14, \text{ звідки } \alpha_0 = -24^\circ 23'.$$

Відкладаємо $\alpha_0 = 24^\circ 23'$ за годинниковою стрілкою та проводимо головні центральні осі інерції u і v (рис. 9.24, б)

4. Визначаємо величину головних центральних моментів інерції за формулами (9.71):

$$J_u = \frac{1}{2} \cdot \left(J_{z_c} + J_{y_c} + \sqrt{(J_{y_c} - J_{z_c})^2 + 4 \cdot J_{z_c y_c}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(20106,3 + 35185,2 + \sqrt{(35185,2 - 20106,3)^2 + 4 \cdot (-8608,2)^2} \right) \approx 18713,54 (\text{см}^4);$$

$$J_v = \frac{1}{2} \cdot \left(J_{z_c} + J_{y_c} - \sqrt{(J_{y_c} - J_{z_c})^2 + 4 \cdot J_{z_c y_c}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(20106,3 + 35185,2 - \sqrt{(35185,2 - 20106,3)^2 + 4 \cdot (-8608,2)^2} \right) \approx 36577,96 (\text{см}^4).$$

Знаки перед квадратним коренем беруться по правилу: якщо $J_{z_c} > J_{y_c}$, то для J_u беремо плюс; якщо $J_{z_c} < J_{y_c}$, то для J_u беремо мінус.

Проводимо перевірку правильності розрахунків J_u і J_v :

$$J_u + J_v = J_{z_c} + J_{y_c}; \Rightarrow 18713,54 + 36577,96 = 20106,3 + 35185,2; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 55291,5 = 55291,5 (\text{см}^4)$$

5. Знаходимо значення головних центральних радіуси інерції перерізу

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{18713,54}{208}} \approx 9,49 \text{ (см)}, \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{36577,96}{208}} \approx 13,26 \text{ (см)},$$

та будуємо по ним еліпс інерції, з півосями, що дорівнюють даним головним радіусам інерції (рис. 9.24, б). Для цього вздовж осі u по обидві боки відкладаємо відрізки i_v , а вздовж осі v — відрізки i_u . Одержаний еліпс інерції описується рівнянням:

$$\frac{u^2}{13,26^2} + \frac{v^2}{9,49^2} = 1.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається статичним моментом площі F перерізу відносно осі Oz або Oy , та в яких одиницях він вимірюється?
2. Які осі називаються центральними осями перерізу, та чому дорівнюють статичні моменти площі поперечного перерізу стрижня відносно них?
3. Виведіть формули для координат центра тяжіння поперечного перерізу стрижня, що являє собою складну фігуру, яка утворена скінченим числом простих плоских фігур з відомими площами та координатами центрів тяжіння.
4. Що називається осьовим і відцентровим моментом інерції площі поперечного перерізу стрижня, та в яких одиницях він вимірюється?
5. Що називається полярним моментом інерції площі поперечного перерізу стрижня відносно полюса O , та в яких одиницях він вимірюється?
6. Поясніть, як співвідносяться між собою полярний та осьові моменти інерції?
7. Які осі називаються головними центральними осями інерції перерізу?
8. Що розуміють під головним центральним моментом інерції перерізу?
9. Що розуміють під полярним та осьовим коефіцієнтом раціональності поперечного перерізу по жорсткості, та в яких одиницях він вимірюється?
10. Що називається осьовим і полярним моментом опору поперечного перерізу стрижня, та в яких одиницях він вимірюється?
11. Що називається осьовим і полярним коефіцієнтом раціональності поперечного перерізу по міцності, та в яких одиницях він вимірюється?
12. Поясніть, чому дорівнює момент інерції площі складного поперечного перерізу, якщо відомі моменти інерції його складових частин?
13. Охарактеризуйте застосування способу від'ємних площ для знаходження моменту інерції складного перерізу, в якому є отвори.
14. Поясніть, як визначається момент інерції площі поперечного перерізу відносно довільної осі, якщо відомі момент інерції відносно центральної осі, паралельної даній, та відстань між цими осями.
15. З'ясуйте, чому дорівнює відцентровий момент інерції площі поперечного перерізу відносно довільної системи взаємно перпендикулярних осей, якщо відомі відцентровий момент інерції відносно центральних осей, паралельних даним, та координати його центра ваги в нових осях.
16. Виведіть формули для визначення напрямів (положення) головних центральних осей інерції перерізу.
17. Виведіть формули для визначення головних центральних моментів інерції площі перерізу через відомі центральні моменти інерції.
18. Запишіть формули переходу до повернутих осей, якщо замість довільної початкової системи центральних осей взяти головні центральні осі.
19. Що називається радіусом інерції площі поперечного перерізу відносно осі, та в яких одиницях він виражається.
20. Що називається еліпсом інерції, як він будується, та яка властивість йому характерна?

Лекція № 10

Тема: «Наука про опір матеріалів. Деформації та напруження»

ПЛАН

- 10.1. Об'єкти вивчення опору матеріалів.
- 10.2. Основні гіпотези науки про опір матеріалів.
- 10.3. Поняття деформації та напруження.
- 10.4. Метод перерізів.
- 10.5. Напруження в перерізі.
- 10.6. Види деформацій стрижня.

10.1. Об'єкти вивчення опору матеріалів

Опір матеріалів — це наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів споруд та деталей машин.

У процесі експлуатації машин та споруд їхні елементи (стрижні, балки, пластини, болти, заклепки) беруть участь у роботі конструкції й зазнають дії різних сил — **навантажень**. Для забезпечення нормальної роботи конструкція має задовольняти необхідним умовам міцності, жорсткості та стійкості.

Опір втомі матеріалу — здатність елементів конструкцій чинити опір руйнуванню при дії циклічних навантажень.

Міцність — це здатність елементів конструкції або деталей машин витримувати певне (експлуатаційне) навантаження не руйнуючись.

Жорсткість — це здатність елементів конструкції або деталей машин протистояти деформуванню (зміні форми і розмірів) під дією зовнішніх навантажень. При заданих експлуатаційних навантаженнях деформації не повинні перевищувати певного значення, встановленого відповідно до конструктивних вимог, без порушення функціональної придатності виробу.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів витримувати експлуатаційне навантаження, зберігаючи певну початкову форму пружної рівноваги.

Основними **об'єктами розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість** є **стрижні, оболонки, пластинки й масивні тіла**.

Стрижнем або **брусом** називається тіло, в якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри.

Віссю стрижня називається геометричне місце центрів тяжіння його поперечних перерізів. **Поперечний переріз стрижня** — переріз, що одержується площиною, яка перпендикулярна осі стрижня.

Основні класифікації стрижнів:

- 1) **за формою осі** — **прямолінійні** (рис. 10.1, а) і **криволінійні** (рис. 10.1, б). Прикладами прямолінійних стрижнів є вали, осі, балки, елементи ферм, криволінійних — вантажопідйомні гаки, кільця ланцюгів тощо;
- 2) **за формою поперечного перерізу** — **круглі** (рис. 10.1, б), **прямокутні, квадратні** (рис. 10.1, а) та інші;
- 3) **за розмірами поперечного перерізу** — **постійного поперечного перерізу** (рис. 10.1, а (**призматичні**), б) і **змінного поперечного перерізу** (рис. 10.1, в).

Тонкостінними стрижнями називають стрижні, товщина стінки яких значно менша від габаритних розмірів поперечного перерізу (рис. 10.1, г). Вони широко застосовуються в будівельних конструкціях, судно- і особливо авіабудуванні.

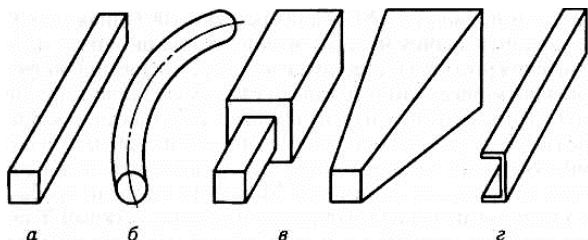


Рис. 10.1.

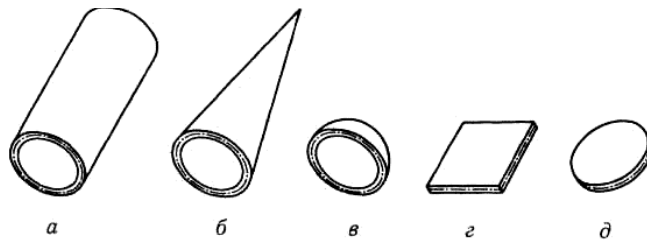


Рис. 10.2.

Балками називаються прямолінійні стрижні, що працюють на згинання. Балкою є не тільки будівельна балка, а також і вал, болт, вісь залізничного вагона, зуб шестерні тощо. Балка, яка спирається на дві опори, називається **простою**, або **однопроговою**, чи **двохопornoю**, а відстань між опорами балки — **прогоном**.

Оболонка — це тіло, яке обмежене криволінійними поверхнями, що розташовані на близькій відстані одна від одної. В оболонці один розмір (товщина) суттєво менший за два інших. До оболонок належать неплоскі стінки тонкостінних резервуарів, котлів, куполи будинків, обшивки фюзеляжу, крила та інші частини літальних апаратів, корпуси підводних човнів тощо.

Серединною поверхнею називається поверхня, яка рівновіддалена від зовнішніх твердих поверхонь оболонки. Якщо **серединна поверхня є площиною**, то розрахунковий об'єкт називають **пластинкою** (рис. 10.2, г). **Пластинки** бувають **круглі** (рис. 10.2, д), **прямокутні** (рис. 10.2, з) й інших обрисів. Пластинками можна вважати плоскі днища й кришки резервуарів, перекриття інженерних споруд, диски турбомашин.

Основні класифікації оболонок:

- 1) **за формою серединної поверхні** — **циліндричні** (рис. 10.2, а), **конічні** (рис. 10.2, б), **сферичні** (рис. 10.2, в), **плоскі** (рис. 10.2, г);
- 2) **за величиною товщини** — **оболонки постійної товщини** і **оболонки змінної товщини**;
- 3) **за формою в плані** — **прямокутні** (коли частина довільної оболонки виділена прямокутним циліндром), **круглі** (коли частина оболонки виділена круговим циліндром) та ін.

Масивними тілами називають тіла, в яких усі три розміри одного порядку (співрозмірні). До них належать фундаменти споруд, підпирні стінки тощо. Масивні тіла можуть класифікуватись за формою, наприклад, паралелепіпед, циліндр та ін.

10.2. Основні гіпотези науки про опір матеріалів

Для побудови теорії опору матеріалів вводять такі гіпотези щодо структури й властивостей матеріалів та характеру деформацій.

1. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Припускається, що матеріал суцільно заповнює форму тіла. Атомістична теорія дискретної будови речовини до уваги не береться.

2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Матеріал вважається однорідним та ізотропним, тобто в будь-якому об'ємі та в будь-якому напрямі властивості матеріалу вважаються однаковими. Хоч кристали, з яких складаються метали, анізотропні, проте їх хаотичне розташування дає змогу вважати макрооб'єми металів ізотропними. Інколи припущення про ізотропію неприйнятне. Наприклад, до анізотропних матеріалів належать деревина, властивості якої вздовж та впоперек волокон істотно різняться, армовані матеріали тощо.

3. Гіпотеза про малість деформацій. Припускається, що деформації малі порівняно з розмірами тіла. Це дає змогу здебільшого нехтувати змінами в розташуванні зовнішніх сил відносно окремих частин тіла й складати рівняння

статисти для недеформованого тіла. Малі деформації розглядають як нескінченно малі величини в математичному аналізі. Якщо в будь-якому рівнянні є доданки з добутками деформацій і доданки з деформаціями у другій і більше степенях, то їх відкидають як величини вищого порядку малості.

4. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу. Припускається, що всі тіла абсолютно пружні, тобто зміни розмірів і форм тіл, які викликані дією зовнішніх сил, зникають після зняття цих навантажень. Відхилення від ідеальної пружності, які завжди спостерігаються при навантажуванні реальних тіл, неістотні, й ними нехтують до певних меж деформування. Гудзик

5. Гіпотеза про лінійну залежність між деформаціями і навантаженнями. Більшість задач опору матеріалів розв'язують у припущенні лінійно деформованого тіла, тобто такого, при якому справедливий **закон Гюка**, що відображає пряму пропорційність між деформаціями та навантаженнями.

При розтягу або стиску стрижня закон Гюка записується у вигляді:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (10.1)$$

а при **деформації зсуву**:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (10.2)$$

де σ — **нормальне напруження, Па**; E — коефіцієнт лінійної пропорційності, що називається **модулем поздовжньої пружності матеріалу, модулем пружності першого роду** або **модулем Юнга, Па**; ε — **відносна поздовжня деформація (відносне подовження)**; τ — **дотичне напруження, Па**; G — коефіцієнт лінійної пропорційності, що називається **модулем поперечної пружності матеріалу при зсуві** або **модулем пружності другого роду, Па**; γ — **відносна поперечна деформація (відносний зсув або кут зсуву)**. Приймавши гіпотези про малість деформацій та про лінійну залежність між деформаціями і навантаженнями, можна при розв'язуванні більшості задач опору матеріалів застосовувати **принцип суперпозиції (принцип незалежності й додавання дії сил)**. Наприклад, **зусилля в будь-якому елементі конструкції, спричинені різними факторами** (кількома силами, температурними впливами), **дорівнюють сумі зусиль, що спричинені кожним із цих факторів, і не залежать від порядку прикладання їх**. Це справедливо також відносно деформацій.

6. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Поперечні перерізи стрижня, які були плоскими до деформації, залишаються плоскими і після деформації, поступово переміщуючись вздовж осі стрижня.

10.3. Поняття деформації та напруження

Деформація — це постійна або тимчасова зміна розмірів і форми тіла, що виникає внаслідок впливу на нього зовнішніх навантажень або зміни його температури. При деформуванні тіла його точки, а також подумки проведені лінії або перерізи переміщуються в площині або в просторі відносно свого вихідного положення.

Пружність — це властивість твердого тіла повертатись до своєї початкової форми і розмірів після зняття навантаження.

Внутрішні сили пружності — це сили взаємодії між частинками твердого тіла, що виникають при його навантаженні. Вони протидіють зовнішнім силам і намагаються повернути частинки тіла в положення, яке вони займали до деформації. Фактично, ці сили протидіють спробам зовнішніх сил зруйнувати дане тіло, змінити його форму, відокремити одну частину від іншої.

Для того, щоб чисельно охарактеризувати ступінь впливу зовнішніх сил на деформований елемент, вводять поняття напруження. **Напруження** являє собою **інтенсивність дії внутрішніх сил пружності**, що припадає на одиницю площі, яка виділена в будь-якій точці досліджуваного перерізу тіла.

Повне напруження \vec{p} або **інтенсивність внутрішніх сил пружності** —

це внутрішня сила пружності $\vec{\Delta Q}$, що приходиться на одиницю площі перерізу ΔF і визначається в будь-якій точці перерізу границею відношення сили до

площі перерізу, коли ця площа стягується в точку:
$$\vec{p} = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta Q}}{\Delta F}. \quad (10.3)$$

Напруження є наслідком взаємодії частинок тіла при його навантажуванні. Зовнішні сили намагаються змінити взаємне розташування частинок, а напруження, що виникають при цьому, перешкоджають зміщенню частинок, обмежуючи його здебільшого деякою малою величиною.

У зв'язку з тим, що в природі існує **два види руйнувань твердого тіла** — **шляхом розриву частинок тіла** та **шляхом їх зсуву**, **повне напруження** p розкладають на дві складові частини (проекції) — **нормальне напруження** σ (перпендикулярне до площини перерізу) та **дотичне напруження** τ (лежить у площині перерізу):

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (10.4)$$

Дія зовнішнього навантаження може бути такою, що деформуються лише деякі ділянки твердого тіла, а всі інші, що з ними пов'язані, переміщуються. Загалом, переміщення частини твердого тіла може як включати в себе деформації, так і не включати. Деформації частин твердого тіла можуть бути як пов'язані з напруженнями, так і не пов'язані, тобто, **ділянки тіла, які переміщуються але не деформуються, вільні від усяких напружень**.

Пружна деформація — це деформація, яка зникає після зняття навантаження або причин, що її викликали.

Залишкова або **пластична деформація** — це деформація, яка не зникає після зняття навантаження або причин, що її викликали.

Абсолютна деформація — це приріст (зменшення) довжини, площі або об'єму всього твердого тіла чи його окремого елемента.

Відносна деформація — це відношення приросту (зменшення) довжини, площі або об'єму всього твердого тіла чи його окремого елемента до початкової довжини, площі або об'єму відповідно.

Температурна деформація — це деформація твердого тіла, що виникає внаслідок зміни його температури (внутрішньої енергії).

Об'ємна деформація — це деформація, при якій змінюється тільки об'єм твердого тіла без зміни його форми. При такій деформації дотичні напруження дорівнюють нулю, а діють тільки нормальні.

Деформація зсуву, або **чистий зсув** — це деформація, при якій має місце зміна тільки форми тіла, без зміни його об'єму.

Під дією деформацій точки тіла переміщуються в нові положення, а нескінченно малі відрізки ще й повертаються, тобто має місце **лінійне** та **кутове переміщення**. **Повне переміщення точки тіла** — це вектор з початком в точці недеформованого тіла і кінцем в точці деформованого.

10.4. Метод перерізів

Внутрішні сили (зусилля) — це сили взаємодії між сусідніми частинками тіла (кристалами, молекулами, атомами), які в усіх випадках намагаються зберегти тіло як єдине ціле, протидіючи будь-якій спробі змінити взаємне розміщення частинок. Для виявлення, а потім і визначення внутрішніх сил в опорі матеріалів широко застосовують **метод перерізів**.

Розглянемо довільне тіло, навантажене самозрівноваженою системою сил. У місці, яке нас цікавить, подумки розсічемо його деякою площиною на дві час-

тини — A і B (рис. 10.3, a). При цьому переріз тепер матиме два боки: один, що належить частині A тіла (лівий), і другий, що належить частині B (правий). У кожній точці обох боків перерізу діятимуть сили взаємодії (рис. 10.3, b). Виходячи із уведеної гіпотези про суцільність матеріалу, доводиться зважати на те, що внутрішні сили діють в усіх точках проведеного перерізу і, отже, є розподіленим навантаженням. Залежно від форми тіла і характеру зовнішніх навантажень інтенсивність внутрішніх сил у різних точках може бути різною.

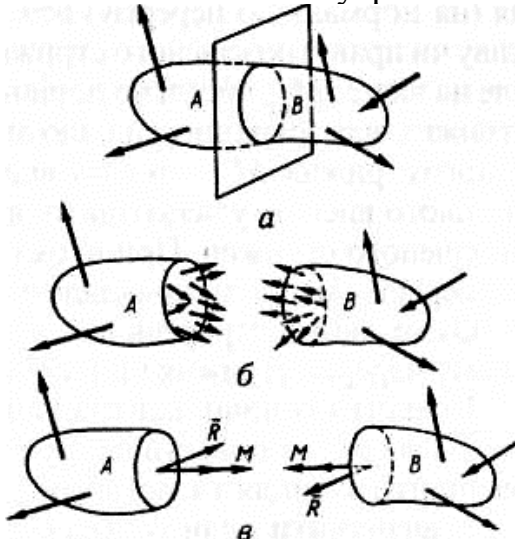


Рис. 10.3.

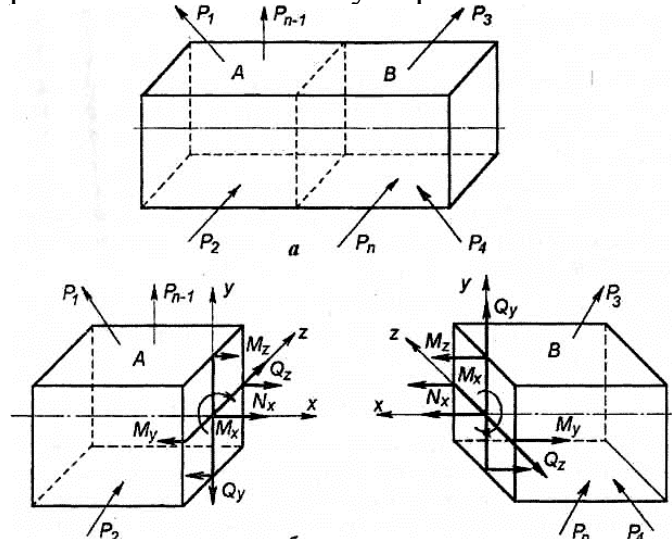


Рис. 10.4.

Внутрішні сили, які діють по перерізу, що належить частині A тіла, відповідно до третього закону Ньютона, дорівнюють за модулем та протилежні за напрямом внутрішнім силам, які діють по перерізу, що належить частині B тіла (рис. 10.3, b). Тобто, внутрішні сили, що діють на різні частини тіла, взаємні. Як усяку систему сил, їх можна звести до однієї точки (як правило, до центра ваги перерізу), внаслідок чого на кожному боці перерізу матимемо **головний вектор \vec{R} та головний момент \vec{M} внутрішніх сил у перерізі** (рис. 10.3, $в$).

Розглянемо перпендикулярний до осі поперечний переріз стрижня, на який діє система зовнішніх сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ (рис. 10.4, a). Якщо головний вектор та головний момент внутрішніх сил спроектувати на вісь стрижня X та **головні центральні осі перерізу Y і Z** , то на кожному боці перерізу матимемо шість внутрішніх силових факторів: три сили (N, Q_y, Q_z) і три моменти (M_x, M_y, M_z) (рис. 10.4, b). Ці величини називають **внутрішніми зусиллями в перерізі стрижня**. Для внутрішніх зусиль та моментів у перерізі можна дати такі означення:

- 1) **поздовжня або осьова сила пружності N** — це сума проєкцій усіх внутрішніх сил, що діють у перерізі, на нормаль до перерізу (або на вісь стрижня). Зусилля N спричинює **поздовжню деформацію стрижня (розтягання або стискання)** і напрямлене вздовж осі стрижня;
- 2) **поперечні (перерізувальні) сили Q_y та Q_z** — це суми проєкцій усіх внутрішніх сил у перерізі на головні центральні осі перерізу Y та Z відповідно. Вони спричинюють **зсув боків перерізу** відповідно в напрямках осей Y та Z ;
- 3) **крутний момент M_x (або $M_{кр}$)** — це сума моментів усіх внутрішніх сил у перерізі відносно осі стрижня X . Він викликає **кручення стрижня**;
- 4) **згинальні моменти M_y, M_z** — це суми моментів усіх внутрішніх сил у перерізі відносно головних центральних осей перерізу Y та Z відповідно. Вони спричинюють **згинання стрижня в головних площинах zx та yz** .

Кожне з цих зусиль або моментів є наслідком взаємодії частинок розсіченого тіла, а тому має подаватись у вигляді двох протилежно напрямлених, проте однакових за модулем векторів або моментів (рис. 10.4, б).

Сукупність величин N , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z , прикладених до правого боку перерізу, замінює дію вилученої лівої частини стрижня на праву частину; сукупність зусиль та моментів, що прикладені до лівого боку перерізу, визначають дію правої частини стрижня на ліву.

Якщо розглянути рівновагу кожної з частин розсіченого стрижня під дією просторової системи зовнішніх сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$, то **при обчисленні внутрішніх зусиль та моментів у перерізі** матимемо наступні **способи обрахунку**:

1. N чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вісь стрижня (на нормаль до перерізу) всіх зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи

$$\text{праву) розсіченого стрижня — } N = P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum_{i=1}^n P_{ix}; \quad (10.5)$$

2. Q_y чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вісь Y всіх зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи праву) розсіченого стрижня —

$$Q_y = P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum_{i=1}^n P_{iy}; \quad (10.6)$$

3. Q_z чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вісь Z всіх зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи праву) розсіченого стрижня —

$$Q_z = P_{1z} + P_{2z} + \dots + P_{nz} = \sum_{i=1}^n P_{iz}; \quad (10.7)$$

4. M_x чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно осі стрижня всіх зовнішніх сил, що діють на одну із частин (ліву чи праву) розсіченого

$$\text{стрижня — } M_x = M_{xp} = M_x(\vec{P}_1) + M_x(\vec{P}_2) + \dots + M_x(\vec{P}_n) = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{P}_i); \quad (10.8)$$

5. M_y чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно осі Y всіх зовнішніх сил, що діють на одну із частин (ліву чи праву) розсіченого стрижня

$$\text{— } M_y = M_y(\vec{P}_1) + M_y(\vec{P}_2) + \dots + M_y(\vec{P}_n) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{P}_i); \quad (10.9)$$

6. M_z чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно осі Z всіх зовнішніх сил, що діють на одну із частин (ліву чи праву) розсіченого стрижня

$$\text{— } M_z = M_z(\vec{P}_1) + M_z(\vec{P}_2) + \dots + M_z(\vec{P}_n) = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{P}_i). \quad (10.10)$$

Метод перерізів дає змогу знайти всі зусилля та моменти в будь-якому перерізі стрижня при дії будь-якого навантаження. Для цього треба:

- 1) знайти головні центральні осі поперечних перерізів стрижня;
- 2) подумки провести поперечний переріз стрижня в тому місці, де треба знайти зусилля та моменти;
- 3) визначити сили N , Q_y , Q_z , та моменти M_x , M_y , M_z як алгебраїчні суми проекцій та моментів зовнішніх сил, що діють на одну із частин (ліву чи праву відносно перерізу) розсіченого стрижня (як правило, на ту, де проекції та моменти знаходяться простіше).

Приклад 10.1

Знайти зусилля та моменти в перерізі, що розміщений посередині стрижня (рис. 10.5), використовуючи метод перерізів.

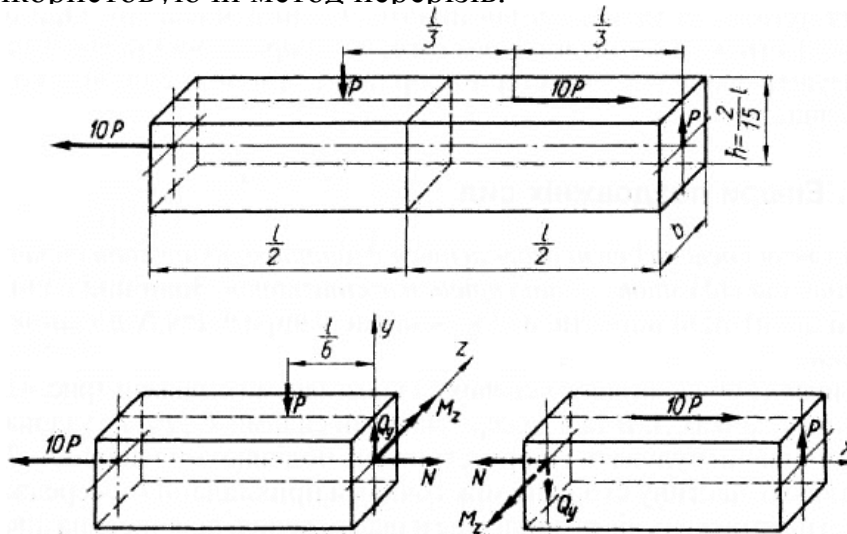


Рис. 10.5.

Дано:

$$P_1 = 10 \cdot P, P_2 = P,$$

$$P_3 = 10 \cdot P, P_4 = P$$

$$N, Q_y, Q_z — ?$$

$$M_x, M_y, M_z — ?$$

Розв'язання:

Оскільки переріз стрижня — це прямокутник, то головними центральними осями перерізу мають бути осі симетрії прямокутника. Зусилля та моменти в перерізі знаходимо, згідно виразів (10.5) – (10.10), як суми проєкцій та моментів сил, що діють на праву частину розсіченого стрижня:

$$1. N = P_{3x} + P_{4x} = 10 \cdot P + 0 = 10 \cdot P$$

$$2. Q_y = P_{3y} + P_{4y} = 0 + P = P;$$

$$3. Q_z = P_{3z} + P_{4z} = 0 + 0 = 0;$$

$$4. M_x = M_{кр} = M_x(\vec{P}_3) + M_x(\vec{P}_4) = 0 + 0 = 0;$$

$$5. M_y = M_y(\vec{P}_3) + M_y(\vec{P}_4) = 0 + 0 = 0;$$

$$6. M_z = M_z(\vec{P}_3) + M_z(\vec{P}_4) = P_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot h - P_4 \cdot \frac{1}{2} \cdot l = 10 \cdot P \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} \cdot l - P \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \\ = \frac{2}{3} \cdot P \cdot l - P \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{1}{6} \cdot P \cdot l.$$

Відповідь: $N = 10 \cdot P, Q_y = P, Q_z = 0, M_{кр} = 0, M_y = 0, M_z = \frac{1}{6} \cdot P \cdot l.$

Зусилля та моменти в різних перерізах одного й того самого стрижня різні.

Графіки (діаграми), що показують, як змінюється внутрішнє зусилля при переході від перерізу до перерізу, називають **епюрами**. Зазначимо деякі **правила, що застосовують при побудові епюр**:

1. **Базу** (вісь), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна або просто збігалася з віссю стрижня.
2. Ординати епюри відкладають від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихують епюри лініями, які перпендикулярні до бази.
4. Для зусиль та моментів вибирають певний масштаб. Ординати відкладають строго в масштабі. Крім того, на епюрах проставляють числа, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри в кружку ставлять знак зусилля.

10.5. Напруження в перерізі

В перерізі навантаженого стрижня діють неперервно розподілені по перерізу внутрішні зусилля. Зводячи їх до центра ваги перерізу, одержимо головний вектор \vec{R} та головний момент \vec{M} , проєкції яких на головні центральні осі Y, Z перерізу та вісь X стрижня дають зусилля та моменти в перерізі $N, Q_y, Q_z, M_x = M_{кр}, M_y, M_z$. На рис. 10.6, *a* зображено розподілені по лівому перерізу зусилля, які є наслідком дії правої частини стрижня (зображено штриховими лініями) на ліву, їхні головний вектор \vec{R} та головний момент \vec{M} . Вектор \vec{R} є сумою зусиль, розподілених по всій площі перерізу.

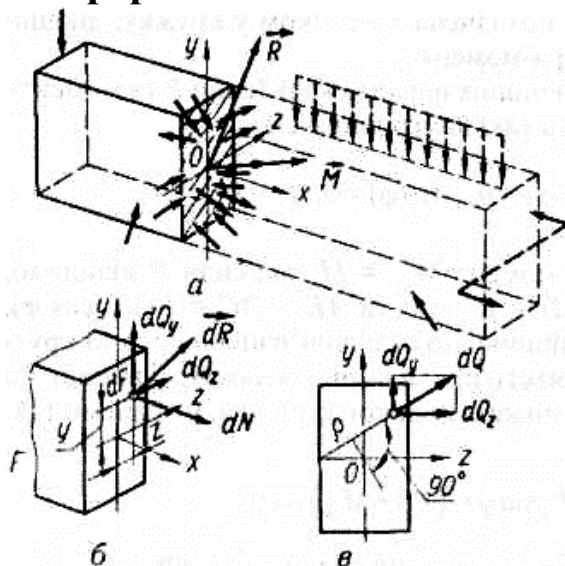


Рис. 10.6.

Розглянемо нескінченно малий елемент площі dF (рис. 10.6, *б*). Унаслідок малості елемента можна вважати, що внутрішні зусилля, які діють в його різних точках, однакові за модулем та напрямом. Тоді їхня рівнодійна \vec{dR} проходить через центр ваги елемента dF , координати якого z та y . Отже, зводячи ці зусилля до центра ваги елемента dF , матимемо головний вектор \vec{dR} та головний момент \vec{dM} , що дорівнюють нулю. Проекціями \vec{dR} на осі X, Y, Z будуть елементарна поздовжня сила dN та елементарні поперечні сили dQ_y і dQ_z . Оскільки зусилля на елементі dF можна вважати розподіленими рівномірно, то, поділивши dN, dQ_y та dQ_z на площу dF , дістанемо значення поздовжніх та поперечних сил, які припадають на одиницю площі:

$$\sigma = \frac{dN}{dF}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dF}. \quad (10.11)$$

Ці величини називають напруженнями в точці y, z проведеного перерізу стрижня, причому σ — нормальне напруження, τ — дотичне напруження. Їх виражають у паскалях ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$) та кратних йому одиницях ($\text{кПа}, \text{МПа}, \text{ГПа}$), іноді (до 1985 р.) — у кг/см^2 ($1 \text{ МПа} = 10 \text{ кг/см}^2$) або кг/мм^2 .

Отже, напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в даній точці розглядуваного перерізу.

Іноді крім нормальних напружень σ та дотичних τ_y, τ_z розглядають ще й

повне напруження:
$$p = \frac{dR}{dF}, \quad (10.12)$$

тобто повне зусилля, яке припадає на одиницю площі. Очевидно, що:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \quad (10.13)$$

У загальному випадку навантажування тіла напруження в різних точках перерізу різні — напруження розподілені по перерізу нерівномірно, однак бувають також і рівномірно розподілені напруження.

Визначимо загальні залежності між σ та τ , з одного боку, та $N, Q_y, Q_z, M_x = M_{кр}, M_y, M_z$ — з іншого. Виходячи з означень зусиль та моментів і враховуючи формули (10.3) – (10.11), маємо:

$$N = \int_F dN = \int_F \sigma \cdot dF ; \quad (10.14)$$

$$Q_y = \int_F dQ_y = \int_F \tau_y \cdot dF ; \quad (10.15)$$

$$Q_z = \int_F dQ_z = \int_F \tau_z \cdot dF ; \quad (10.16)$$

$$M_y = \int_F z \cdot dN = \int_F z \cdot \sigma \cdot dF ; \quad (10.17)$$

$$M_z = \int_F y \cdot dN = \int_F y \cdot \sigma \cdot dF ; \quad (10.18)$$

$$M_x = M_{кр} = \int_F (y \cdot dQ_z - z \cdot dQ_y) = \int_F (y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y) \cdot dF = \int_F \rho \cdot \tau \cdot dF ; \quad (10.19)$$

У формулі (10.19) τ є **повним дотичним напруженням у точці перерізу**

з координатами y, z :
$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \frac{\sqrt{dQ_y^2 + dQ_z^2}}{dF} = \sqrt{\frac{dQ_y^2}{dF^2} + \frac{dQ_z^2}{dF^2}} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} . \quad (10.20)$$

а ρ — відстань від центра ваги перерізу до лінії дій dQ (рис. 10.6, в).

Формули (10.14) – (10.20), які встановлюють зв'язок між напруженнями та внутрішніми зусиллями, називаються **статичними рівняннями** або **інтегральними рівняннями рівноваги деформованого тіла**.

Незважаючи на те що компоненти внутрішніх зусиль у будь-якому перерізі стрижня, як правило, легко визначити, наприклад з епюр, для практичних розрахунків добути залежності безпосередньо використати не можна, оскільки невідомий закон розподілу напружень по перерізу. Отже, **задача обчислення напружень у перерізі завжди є статично невизначуваною**. Наприклад, знаючи згинальний момент M_y у перерізі, не можна знайти нормальні напруження із формули (10.17). Однак, якщо скористатися тими чи іншими міркуваннями, вдається не тільки встановити закон розподілу σ та τ по перерізу, а й за формулами (10.14) – (10.20) знайти самі напруження.

Узагалі **при виведенні формул для дослідження напруженого стану стрижнів завжди слід дотримуватися такої схеми:**

1. Розглядаємо **статичний аспект задачі**, тобто записуємо ті з рівнянь (10.14) – (10.20), які потрібні для розглядуваної задачі.
2. Розглядаємо **геометричний аспект задачі** – на базі експериментального вивчення даного виду деформації стрижня та певних гіпотез (зокрема, гіпотези плоских перерізів) устанавлюємо залежності між переміщеннями точок стрижня та їхнім положенням у перерізі відносно вибраної системи координат. Ці залежності називають **геометричними рівняннями**.
3. Розглядаємо **фізичний аспект задачі** – на підставі експериментальних досліджень фізичних властивостей матеріалу визначаємо залежності між напруженнями та деформаціями (або переміщеннями). Ці залежності називають **фізичними рівняннями**.
4. Виконуємо синтез, тобто разом розв'язуємо всі рівняння, здобуті в п. 1 – 3, і через виключення деформацій (або переміщень) дістаємо формули, що виражають напруження через зусилля або моменти в перерізі.

10.6. Види деформацій стрижня

Основним об'єктом, що розглядається в опорі матеріалів, є стрижень з прямолінійною віссю. В опорі матеріалів вивчають такі **основні види деформацій стрижня: розтягання, стискання, зсув (зріз), кручення та згинання.**

Розглядають також більш *складні деформації*, що утворюються внаслідок сполучення кількох основних — *згинання з крученням, кручення і розтяг*.

Розтягання або **стискання** виникає, наприклад, тоді, коли до стрижня вздовж осі прикладені протилежно напрямлені сили (рис. 10.7). При цьому відбувається переміщення перерізів уздовж осі стрижня, який при розтяганні подовжується, а при стисканні вкорочується. Зміну Δl початкової довжини l стрижня називають **абсолютним подовженням при розтяганні** або **абсолютним укороченням при стисканні**. Відношення абсолютного подовження (укорочення) Δl до початкової довжини l стрижня називають **середнім відносним**

подовженням на довжині l і позначають $\epsilon_{сер}$:
$$\epsilon_{сер} = \frac{\Delta l}{l}. \quad (10.21)$$

На розтягання або стискання працюють багато елементів конструкцій: стрижні ферм, колони, штоки парових машин та поршневі насосів, стяжні гвинти, троси підйомників тощо.

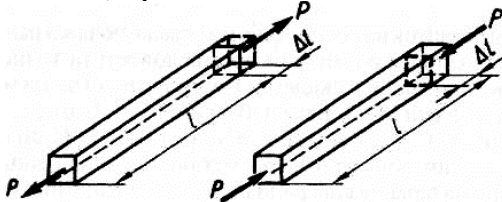


Рис. 10.7.

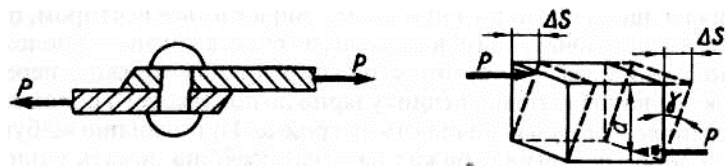


Рис. 10.8.

Зсув або **зріз** виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельних плоских перерізи стрижня один відносно одного при незмінній відстані між ними (рис. 10.8). Зміщення Δs називається **абсолютним зсувом**. Відношення абсолютного зсуву до відстані a між площинами, що зміщуються (тангенс кута γ), називають **відносним зсувом**. Внаслідок малості кута γ при пружних деформаціях його тангенс вважають таким, що дорівнює **куту перекосу** розглядуваного елемента. Таким чином, **відносний зсув**:
$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}. \quad (10.22)$$

Відносний зсув є кутвою деформацією, яка характеризує перекоп елемента. На зсув або зріз працюють, наприклад, заклепки й болти, що скріплюють елементи, які зовнішні сили намагаються зсунути один відносно одного.

Кручення виникає при дії на стрижень зовнішніх сил, які утворюють момент відносно осі стрижня (рис. 10.9). Деформація кручення супроводжується поворотом поперечних перерізів стрижня один відносно одного навколо його осі. Кут повороту одного перерізу стрижня відносно іншого, що перебуває на відстані l , називають **кутом закручування на довжині** l . Відношення кута закручування φ до довжини

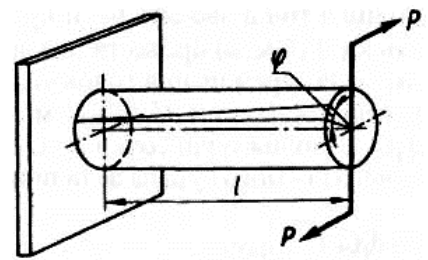


Рис. 10.9.

l називають **відносним кутом закручування**:
$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (10.23)$$



Рис. 10.10.

На кручення працюють вали, шпинделі токарних і свердлильних верстатів, а також багато інших деталей.

Деформація згинання (рис. 10.10) полягає у викривленні осі прямого стрижня або в зміні кривини кривого стрижня. Переміщення будь-якої точки осі стрижня, що відбувається при цьому, виражається вектором, початок якого суміщено з початковим положенням точки, а кінець — з положенням тієї самої точки у деформованому стрижні. У прямих стрижнях переміщення точок,

які напрямлені перпендикулярно до початкового положення осі, називають **прогинами** й позначають літерою ω . При згинанні відбувається також поворот перерізів стрижня навколо осей, що лежать у площинах перерізів. **Кути повороту перерізів відносно їхніх початкових положень** позначають θ . На згинання працюють, наприклад, осі залізничних вагонів, листові ресори, зуби шестерень, спиці коліс, балки міжповерхових перекриттів, важелі та багато інших деталей.

Унаслідок одночасної дії на тіло сил, що спричинюють різні види зазначених основних деформацій, виникає більш **складна деформація**. Так, часто елементи машин і конструкцій зазнають дії сил, що одночасно спричинюють згинання і кручення, згинання і розтягання або стискання тощо.

Запитання для самоконтролю

1. Яка наука називається опором матеріалів.
2. Дайте визначення поняттю міцність, жорсткість, стійкість.
3. Що називається стрижнем або брусом? Як визначається його вісь?
4. Назвіть основні класифікації та види стрижнів.
5. Що розуміють під оболонкою та її серединною поверхнею?
6. Назвіть основні класифікації оболонок. Що називається пластинкою?
7. Які об'єкти в опорі матеріалів називають масивними тілами?
8. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про суцільність матеріалу.
9. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про однорідність та ізотропність.
10. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про малість деформацій.
11. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про ідеальну пружність матеріалу.
12. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про лінійну залежність між деформаціями і навантаженнями.
13. Поясніть закон Гука для стрижня при деформаціях розтягу та зсуву.
14. Охарактеризуйте принцип суперпозиції зусиль та деформацій.
15. Сформулюйте та поясніть гіпотезу плоских перерізів.
16. Що називають деформацією твердого тіла? Поясніть, що таке пружність.
17. Дайте визначення поняттю внутрішні сили пружності.
18. На які дві складові частини (проекції) розкладають повне напруження p ?
19. Дайте визначення поняттю пружна, пластична та абсолютна деформація.
20. Що розуміють під відносною, температурною та об'ємною деформацією?
21. Охарактеризуйте особливості деформації зсуву (чистого зсуву).
22. Охарактеризуйте та поясніть для чого в опорі матеріалів застосовують метод перерізів?
23. Дайте визначення та наведіть алгоритм знаходження такого внутрішнього зусилля в перерізі стрижня, як поздовжня або осьова сила пружності, поперечна (перерізувальна) сила, крутний та згинальний момент.
24. Наведіть алгоритм знаходження всіх зусиль та моментів в будь-якому перерізі стрижня при дії будь-якого навантаження згідно методу перерізів.
25. Проаналізуйте правила, що застосовують при побудові епюр внутрішніх зусиль та моментів.
26. Що називають, як визначають та в яких одиницях вимірюють нормальне і дотичні напруження в точці проведеного поперечного перерізу стрижня.
27. Наведіть формули, згідно яких визначаються загальні залежності між нормальним σ і дотичними τ_y, τ_z напруженнями та внутрішніми зусиллями N, Q_y, Q_z і моментами $M_x = M_{кр}, M_y, M_z$ в перерізі стрижня — статичні рівняння або інтегральні рівняння рівноваги деформованого тіла.
28. Поясніть, якої схеми слід дотримуватися при виведенні формул для дослідження напруженого стану стрижнів.

Лекція № 11

Тема: «Епюри внутрішніх зусиль та моментів»

ПЛАН

- 11.1. Епюри поздовжніх (осьових) зусиль.
- 11.2. Епюри крутних моментів.
- 11.3. Поперечні зусилля та згинальні моменти в перерізах балки.
- 11.4. Побудова епюр поперечних зусиль і згинальних моментів.

11.1. Епюри поздовжніх (осьових) зусиль

Епюра — це графік зміни зусилля або моменту уздовж осі стрижня.

План побудови епюри:

1. Визначаємо всі зовнішні сили, в тому числі опорні реакції. **Поздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона спричинює розтягання, та від'ємною, якщо спричинює стискання. Зовнішні сили самі по собі ні додатні, ні від'ємні, але кожна дає у виразі для N доданок певного знака.**
2. Визначаємо ділянки навантаження і їх границі. **Ділянкою навантаження** називають частину стрижня між точками прикладання зосереджених сил. Уздовж неї внутрішнє зусилля змінюється за одним і тим же законом. Якщо на стрижень діє розподілене навантаження, то **ділянкою** називають частину стрижня, на якій розподілене навантаження змінюється за одним законом. **Границі ділянки навантаження** — торцеві перерізи, де прикладені зосереджені сили чи моменти, починається або закінчується розподілене навантаження. При врахуванні власної сили тяжіння границями ділянок додатково є перерізи, де змінюється площа перерізу, його форма чи питома сила тяжіння матеріалу. **Характерним перерізом** називається переріз на границі ділянки.
3. Записуємо для кожної ділянки вираз внутрішнього зусилля як функцію абсциси перерізу і визначаємо величину зусилля на границях ділянки.
4. Будуємо епюру: паралельно осі стрижня проводимо **базову (нейтральну, нульову) лінію** і в певному масштабі, перпендикулярно до базової лінії, відкладаємо отримані числові значення зусилля. Як правило, додатні величини відкладають в гору або вправо, а від'ємні — вниз або вліво. На полі епюри проставляють відповідний знак, „+” чи „-”. Епюру штрихують тонкими лініями, перпендикулярними до базової. Кожна ордината епюри в певному масштабі відображає величину внутрішнього зусилля.

Епюра осьового зусилля N на окремих ділянках навантаження обмежена прямими лініями. **У місці прикладання зосередженої осьової сили (моменту) на епюрі є стрибок (розрив) на величину цієї сили (моменту).**

Приклад 11.1

Побудуйте епюру осьового зусилля N для призматичного прямолінійного стрижня довжиною l , до якого в точках A , B ($AB = a$) та C прикладені зосереджені навантаження: $P_1 = 2 \text{ кН}$, $P_2 = 5 \text{ кН}$, $P_3 = 3 \text{ кН}$ (рис. 11.1).

Дано:

$$AC = l, AB = a,$$
$$P_1 = 2 \text{ кН}, P_2 = 5 \text{ кН}$$
$$P_3 = 3 \text{ кН}$$

$$N(x) \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Розглянемо стрижень, навантажений у точках A , B та C зосередженими силами P_1 , P_2 , P_3 уздовж осі (рис. 11.1).

Для побудови епюри осьових сил, стрижень поділимо на **ділянки навантаження**.

У розглядуваному прикладі дві ділянки навантаження — I (AB) та II (BC).

Щоб побудувати епюри, треба скласти вирази для осьових сил у довільному перерізі кожної ділянки.

Виберемо початок координат у крайній лівій точці стрижня A ; вісь X напрямлено вздовж його осі.

У довільному перерізі будь-якої ділянки на відстані x від початку координат знаходимо осьову силу як суму проекцій усіх зовнішніх сил ліворуч чи праворуч від перерізу, що розглядається:

I ділянка ($0 \leq x < a$): ліворуч — $N_1(x) = P_1 = 2 \text{ кН}$;

праворуч — $N_1(x) = P_2 - P_3 = 5 - 3 = 2 \text{ (кН)}$;

II ділянка ($a < x \leq l$): ліворуч — $N_2(x) = P_1 - P_2 = 2 - 5 = -3 \text{ (кН)}$;

праворуч — $N_2(x) = -P_3 = -3 \text{ кН}$.

Оскільки ці величини не залежать від абсциси перерізу, то в усіх перерізах ділянки **I** осьове зусилля буде $N_1 = 2 \text{ кН}$, а для будь-якого перерізу ділянки **II** — $N_2 = -3 \text{ кН}$. Відкладаючи здобуті ординати від осі епюри, будемо епюру N (рис. 11.1). **Штриховка епюри показує ординати, які відкладаються.**

У перерізах A , B та C на епюрі маємо стрибки, що дорівнюють відповідно 2 кН , 5 кН та 3 кН , тобто тим самим зосередженим силам, які прикладені до стрижня в цих перерізах. **Якщо на стрижень діють тільки зосереджені сили, то лінії епюри паралельні її осі — епюра осьового зусилля N складається з прямокутників і має стрибки в тих перерізах, де прикладені зовнішні сили.**

Приклад 11.2

Побудуйте епюру осьового зусилля N для призматичного прямолінійного стрижня змінного перерізу довжиною l , до якого в точках A , B , C і D ($AB = a$, $BC = b$) прикладені зосереджені навантаження: $P_1 = 4 \text{ кН}$, $P_2 = 9 \text{ кН}$, $P_3 = 9 \text{ кН}$, $P_4 = 3 \text{ кН}$, $P_5 = 3 \text{ кН}$, $P_6 = 8 \text{ кН}$ (рис. 11.2).

Дано:

$$AC = l, AB = a, BC = b,$$

$$P_1 = 4 \text{ кН}, P_2 = 9 \text{ кН}, P_3 = 9 \text{ кН}$$

$$P_4 = 3 \text{ кН}, P_5 = 3 \text{ кН}, P_6 = 8 \text{ кН}$$

$$N(x) \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Розглянемо стрижень, навантажений у точках A , B , C і D зосередженими силами $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ уздовж осі X (рис. 11.2). Виберемо початок координат у крайній лівій точці стрижня A ; вісь X

направимо вздовж його осі.

Для побудови епюри осьового зусилля N , стрижень поділимо на три ділянки — **I** (AB), **II** (BC) та **III** (CD). У довільному перерізі будь-якої ділянки на відстані x від початку координат знаходимо осьову силу як суму проекцій усіх зовнішніх сил ліворуч чи праворуч від перерізу, що розглядається:

I ділянка ($0 \leq x < a$):

$$\text{ліворуч — } N_1(x) = -P_1 = -4 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \text{праворуч — } N_1(x) &= -P_2 - P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \\ &= -9 - 9 + 3 + 3 + 8 = -4 \text{ (кН)}; \end{aligned}$$

II ділянка ($a < x < a + b$): ліворуч — $N_2(x) = -P_1 + P_2 + P_3 = -4 + 9 + 9 = 14 \text{ (кН)}$;

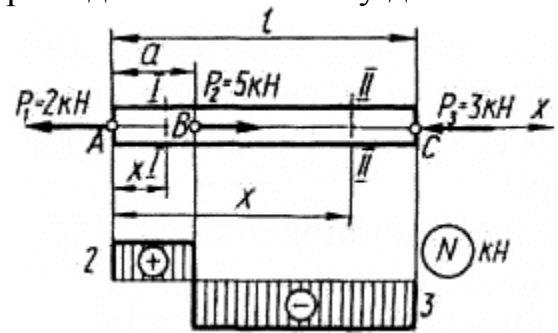


Рис. 11.1.

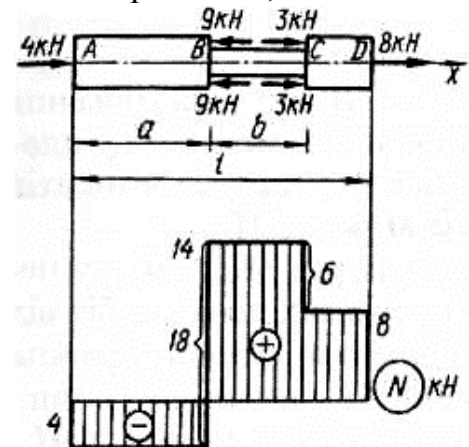


Рис. 11.2.

праворуч — $N_2(x) = P_4 + P_5 + P_6 = 3 + 3 + 8 = 14$ (кН);

III ділянка ($a + b < x \leq l$): праворуч — $N_3(x) = P_6 = 8$ кН;

ліворуч — $N_3(x) = -P_1 + P_2 + P_3 - P_4 - P_5 = -4 + 9 + 9 - 3 - 3 = 8$ (кН).

В усіх перерізах ділянки **I** осьове зусилля буде $N_1 = -4$ кН. В усіх перерізах ділянки **II** — $N_2 = 14$ кН, а для будь-якого перерізу ділянки **III** —

$N_3 = 8$ кН. Відкладаючи здобуті ординати від осі епюри (рис. 11.2), будуємо епюру N . У перерізах **A**, **B**, **C** та **D** на епюрі маємо стрибки, що дорівнюють відповідно 4 кН, 18 кН, 6 кН та 8 кН, тобто тим самим силам, які прикладені до стрижня в цих перерізах.

Якщо стрижень розміщений вертикально і враховується сила тяжіння, що діє на нього, то лінія епюри нахилена до осі (для циліндричного стрижня) або криволінійна (для стрижня з розмірами перерізів, що неперервно змінюються).

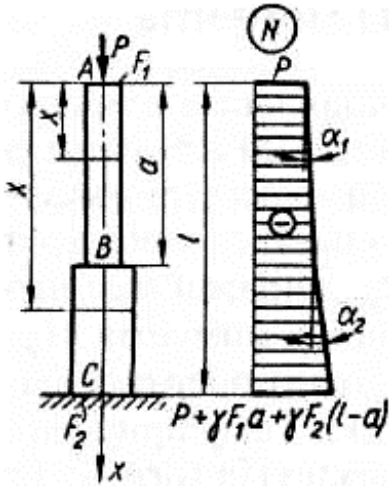


Рис. 11.3.

Побудуйте епюру осьового зусилля N для східчастого стрижня з урахуванням сили тяжіння, що діє на нього (рис. 11.3). Площа перерізу верхньої частини стрижня — F_1 , нижньої — F_2 . Питома вага γ , $H / м^3$.

Дано:

$$\begin{array}{l} AC = l, AB = a, \\ F_1, F_2, \gamma, P \\ \hline N(x) \text{ — ?} \end{array}$$

Розв'язання:

Початок координат вибираємо в точці **A** (на рисунку наведено тільки вісь X). Поздовжню силу в будь-якому перерізі знаходимо як суму зовнішніх сил (щоб спочатку не визначати реакції в опорі).

Для довільного поперечного перерізу площею F_1 на ділянці **AB** ($0 \leq x \leq a$) на тіло зверху діє зовнішня сила P та сила тяжіння $G_1(x)$, яка дорівнює $G_1(x) = \gamma \cdot F_1 \cdot x$. Отже: $N_1(x) = -P - G_1(x) = -P - \gamma \cdot F_1 \cdot x$.

Для довільного поперечного перерізу площею F_2 на ділянці **BC** ($a < x \leq l$) на тіло зверху діє зовнішня сила P , вага ділянки **AB** $G_1(a) = \gamma \cdot F_1 \cdot a$ та сила тяжіння $G_2(x)$, яка дорівнює $\gamma \cdot F_2 \cdot (x - a)$, тому:

$$N_2(x) = -P - G_1(a) - G_2(x) = -P - \gamma \cdot F_1 \cdot a - \gamma \cdot F_2 \cdot (x - a).$$

Це рівняння похилих прямих, отже, епюра осьового зусилля N трапецієподібна. Проте, оскільки площі поперечних перерізів на ділянках різні, нахил епюри на ділянках **AB** та **BC** неоднаковий (рис. 11.3):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dN_1(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (-P - \gamma \cdot F_1 \cdot x) = 0 - \gamma \cdot F_1 \cdot \frac{d}{dx} (x) = -\gamma \cdot F_1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{dN_2(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (-P - \gamma \cdot F_1 \cdot a - \gamma \cdot F_2 \cdot (x - a)) = 0 - 0 - \gamma \cdot F_2 \cdot \frac{d}{dx} (x) - 0 = -\gamma \cdot F_2.$$

При $x = l$ із другого рівняння знаходимо найбільше за модулем поздовжнє зусилля: $N_{\max} = -P - \gamma \cdot F_1 \cdot a - \gamma \cdot F_2 \cdot (l - a)$.

Цій самій величині дорівнює й реакція в закріпленні.

Приклад 11.4

Побудуйте епюру осьового зусилля N для конічного стрижня висотою l (діаметр основи d) від його власної ваги (рис. 11.4). Питома вага γ , $H / м^3$.

Дано:

l, d, γ

$N(x) - ?$

Розв'язання:

Початок координат вибираємо в центрі основи конічного стрижня (на рисунку наведено тільки вісь X). Осьове зусилля $N(x)$

в будь-якому поперечному перерізі площею $F(x)$ на відстані x від закріпленої основи стрижня дорівнює вазі нижньої відносно перерізу частини конуса — $N(x) = \gamma \cdot V(x)$, де

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot h(x) \cdot F(x) = \frac{1}{3} \cdot (l-x) \cdot \pi \cdot \left[\frac{d(x)}{2} \right]^2$$

об'єм нижньої частини.

Діаметр основи нижньої частини конуса знайдемо з подібності трикутників:

$$\frac{d(x)}{d} = \frac{(l-x)}{l} \quad \text{звідки} \quad d(x) = \frac{(l-x)}{l} \cdot d, \quad \text{тому}$$

$$N(x) = \gamma \cdot \frac{1}{3} \cdot (l-x) \cdot \pi \cdot \left[\frac{d(x)}{2} \right]^2 = \gamma \cdot \frac{1}{3} \cdot (l-x) \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot (l-x)^2 \cdot \frac{d^2}{l^2} = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot d^2}{12 \cdot l^2} \cdot (l-x)^3.$$

Звідси випливає, що крива епюри буде кубічною параболою, причому

$$\begin{aligned} \left. \frac{dN(x)}{dx} \right|_{x=l} &= \left. \frac{d}{dx} \left[\frac{\gamma \cdot \pi \cdot d^2}{12 \cdot l^2} \cdot (l-x)^3 \right] \right|_{x=l} = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot d^2}{12 \cdot l^2} \cdot 3 \cdot (l-x)^2 \cdot (-1) \Big|_{x=l} = \\ &= - \frac{\gamma \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot l^2} \cdot (l-x)^2 \Big|_{x=l} = - \frac{\gamma \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot l^2} \cdot (l-l)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отже, в нижній точці епюра торкається осі. При $x=0$ осьове зусилля досягає максимуму: $N_{\max} = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot d^2}{12 \cdot l^2} \cdot (l-0)^3 = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot d^2 \cdot l}{12}$.

Епюри внутрішніх зусиль будуть передусім для того, щоб використати їх у розрахунках стрижня на міцність. Епюри дають можливість знайти найбільше значення внутрішніх силових факторів і розташування перерізів, в яких вони виникають. Ці перерізи для стрижнів сталого поперечного перерізу вважають небезпечними.

11.2. Епюри крутних моментів

Якщо навантаження на прямолінійний стрижень (вал) складається тільки з моментів M_k , площини яких перпендикулярні до осі стрижня, то із шести внутрішніх зусиль та моментів у довільному перерізі залишається лише крутний момент $M_{кр}$.

Внутрішній момент $M_{кр}$ виражається через зовнішні M_k таким чином: **крутний момент $M_{кр}$ у перерізі дорівнює сумі зовнішніх моментів M_k , розміщених по один бік від перерізу.** Якщо стрижень (вал) обертається рівномірно, то алгебраїчна сума всіх M_k дорівнює нулю. Тому при визначенні $M_{кр}$ матимемо один і той самий результат незалежно від того, чи братимемо суму моментів M_k , розміщених ліворуч або праворуч від перерізу.

Крутний момент $M_{кр}$ вважається додатним, якщо при спостереженні з торця вздовж осі розглядуваної частини він намагається обертати пе-

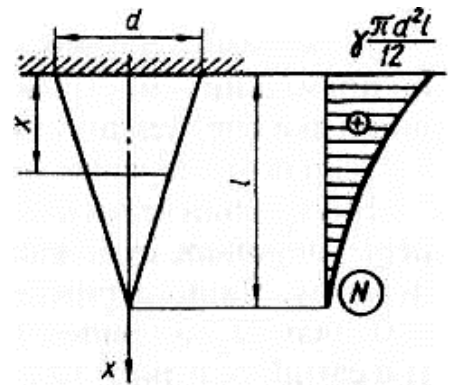


Рис. 11.4.

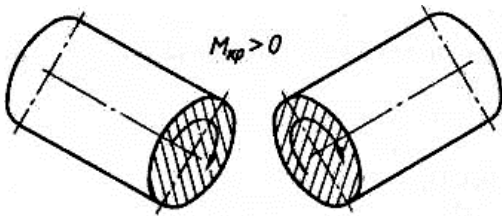


Рис. 11.5.

пері́з за годинниковою стрілкою (рис. 11.5), при цьому, відповідний зовнішній момент M_k направлений проти годинникової стрілки.

Проте знак направлення крутного моменту може зазначати сам рахівник, оскільки знак не впливає на міцність вала.

Приклад 11.5

Побудуйте епюру крутних моментів для трансмісійного вала (рис. 11.6, а), якщо $M_{k1} = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{k2} = 80 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{k3} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{k4} = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Розміри вказані на рисунку.

Дано:

$$M_{k1} = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_{k2} = 80 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{k3} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_{k4} = 60 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$l_1 = a, l_2 = 2a, l_3 = 3a, l_4 = 5a = l$$

$$M_{kp}(x) \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Розбиваємо стрижень на ділянки *I, II, III, IV*. Вибираємо початок координат у крайній лівій точці вала. Провівши довільні перерізи зі змінною абсцисою x , на цих чотирьох ділянках вала дістанемо відповідно:

- 1) Оскільки тертям у підшипниках нехтуємо, то в будь-якому перерізі на ділянці *I* ($0 \leq x < a$): а) ліворуч — $M_{kp1} = 0$;
б) праворуч — $M_{kp1} = -M_{k1} - M_{k2} + M_{k3} - M_{k4} = -160 - 80 + 300 - 60 = 0 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$;
- 2) *II* ділянка ($a < x < 2a$): а) ліворуч — $M_{kp2} = M_{k1} = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}$;
б) праворуч — $M_{kp2} = -M_{k2} + M_{k3} - M_{k4} = -80 + 300 - 60 = 160 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$;
- 3) *III* ділянка ($2a < x < 3a$):
а) ліворуч — $M_{kp3} = M_{k1} + M_{k2} = +160 + 80 = 240 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$;
б) праворуч — $M_{kp3} = M_{k3} - M_{k4} = 300 - 60 = 240 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$;
- 4) *IV* ділянка ($3a < x < 5a$): а) праворуч — $M_{kp4} = -M_{k4} = -60 \text{ Н} \cdot \text{м}$;
б) ліворуч — $M_{kp4} = M_{k1} + M_{k2} - M_{k3} = 160 + 80 - 300 = -60 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$;

Крутний момент на кожній ділянці не залежить від абсциси перерізу, тому епюра крутних моментів має вигляд трьох прямокутників (рис. 11.6, б). У перерізах, де прикладені зосереджені зовнішні моменти M_k , утворюються стрибки на значення цих моментів.

В місці стрибка крутні моменти не визначають. Їх обчислюють на нескінченно близьких відстанях ліворуч та праворуч від стрибка.

Побудована епюра показує, що хоч до вала й прикладено момент $M_{k3} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$, проте найбільший крутний момент у перерізі дорівнює лише $M_{kp3} = -240 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рис. 11.6, б). Це значення й треба використовувати при розрахунках на міцність та жорсткість. Напрями крутних моментів у перерізах найбільш навантаженої частини вала — *ділянки III* — зображено на рис. 11.6, в.

На практиці часто задаються не *моменти M_k , Н·м*, прикладені до дисків (шківів або зубчастих коліс), а *потужності K , Вт*, що передаються на них або знімаються з них, та *частота обертання вала n , об/хв*. Установимо залежність

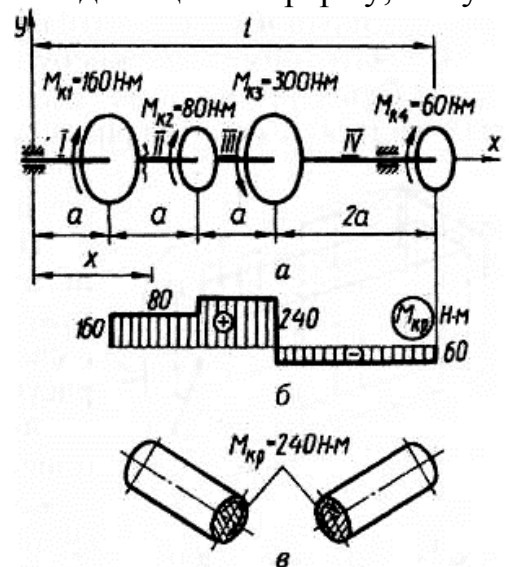


Рис. 11.6.

між цими величинами. **Момент здійснює роботу на куті повороту.**

$$\text{Позначивши кутову швидкість вала: } \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60}, \quad (11.1)$$

знайдемо, що за **час** t диск обернеться разом із валом на **кут** $\omega \cdot t$, **радіан**:

$$\omega \cdot t = \frac{\pi}{30} \cdot n \cdot t, \quad (11.2)$$

$$\text{і момент } M_k \text{ здійснить роботу: } A = M_k \cdot \omega \cdot t = \frac{\pi}{30} \cdot M_k \cdot n \cdot t, \quad (11.3)$$

де A — робота, Дж; M_k — момент, Н·м; n — частота обертання, хв^{-1} ; t —

$$\text{час, с. Тоді потужність (робота за 1 с) буде: } K = \frac{A}{t} = \frac{\pi}{30} \cdot M_k \cdot n. \quad (11.4)$$

$$\text{Звідси випливає, що } M_k = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{K}{n} \approx 9,55 \cdot \frac{K}{n}, \quad (11.5)$$

де K — потужність, Вт.

Раніше в технічній літературі використовувалася **позасистемна одиниця потужності — кінська сила** (1 к.с. ≈ 736 Вт). Якщо **потужність**, що передається або знімається, дорівнює N , к.с., то $K = 736 \cdot N$ і з виразу (11.5) одержимо:

$$M_k = 736 \cdot \frac{30}{\pi} \cdot \frac{N}{n} \approx 7028 \cdot \frac{N}{n}. \quad (11.6)$$

З формул (11.5) і (11.6) видно, що **для передачі великих потужностей при малих габаритах машин треба збільшувати частоту обертання валів n , бо тоді зменшиться момент M_k , а, значить, і потрібні діаметри валів.** Практична реалізація цих формул закладена, наприклад, в коробках швидкостей сучасних автомобілів. Щоб тягнути більшу вагу, рухатись з місця, рухатись в гору на колесах потрібний більший крутний момент. Для цього водій перемикає ручку коробки швидкостей на меншу швидкість, тобто ставить на меншу кількість обертів за хвилину і при заданій потужності двигуна отримує більший крутний момент.

Приклад 11.6

Побудуйте епюру крутних моментів для бруса, який навантажено за схемою (рис. 11.7, а).

Розв'язання:

Навантаження, яке діє на стрижень, еквівалентне розподіленим крутним моментам m_k інтенсивністю

$q \cdot b, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}}$ (рис. 11.7, б). Брус має лише одну ділянку, в довільному перерізі якої $M_{кр}(x) = -m_k \cdot x = -q \cdot b \cdot x$, ($0 \leq x \leq l$). Оскільки $M_{кр}(0) = 0$, а $M_{кр}(l) = -q \cdot b \cdot l$, то у результаті матимемо трикутну епюру (рис. 11.7, в), причому $M_{кр \max} = -q \cdot b \cdot l$.

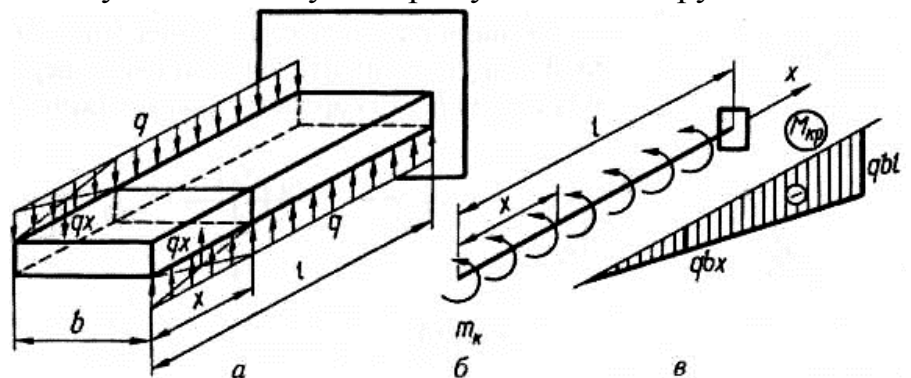


Рис. 11.7.

11.3. Поперечні зусилля та згинальні моменти в перерізах балки

Балками називаються прямолінійні стрижні (бруси), що працюють на згинання. Балки сприймають навантаження і передають його своїм опорам, тому

балки знаходяться не тільки під дією зовнішнього навантаження, але і під дією реакцій опор. Якщо на балку діє розподілене навантаження, то для визначення реакції опор його замінюють рівнодійною, яка дорівнює площі епюри навантаження й прикладена в центрі ваги (тяжіння) цієї епюри.

Деформація згину характеризується викривленням осі бруса. При цьому в поперечних перерізах бруса виникають згинальні моменти.

Чистим згином називається такий вид деформації балки, при якому в її поперечних перерізах діють тільки внутрішні згинальні моменти та пов'язані з ними нормальні напруження.

Поперечним згином називається такий вид навантаження (деформації), при якому у поперечному перерізі балки крім згинальних моментів діють ще й внутрішні поперечні (перерізаючі) сили та пов'язані з ними дотичні напруження.

Прямим згином називається такий згин, при якому площина дії згинального моменту збігається з **головною площиною інерції стрижня**, що утворюється однією з головних центральних осей поперечного перерізу і геометричною віссю стрижня. Інші випадки згину представляють як сукупність прямих згинів.

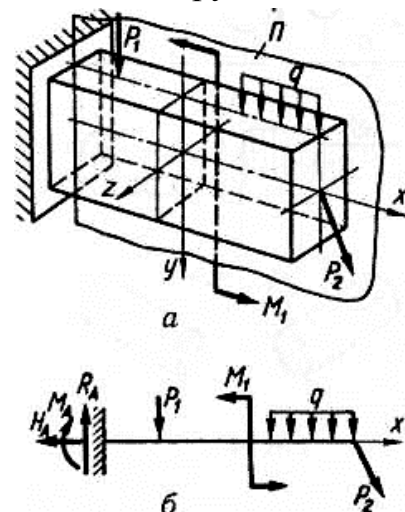


Рис. 11.8.

У найпростішому випадку згинання балок всі задані навантаження діють в одній площині, що називається **силовою** (на рис. 11.8, а — площина Π), причому ця площина збігається з однією із головних площин балки. Такий випадок називається **плоским згинанням**. На розрахунковій схемі балку прийнято замінити її віссю (рис. 11.8, б). При цьому всі навантаження зводяться до осі балки, а силова площина збігається з площиною рисунка.

Консолю називається балка, яка жорстко закріплена одним кінцем і не має інших опор (рис. 11.8, б), або частина балки, що звисає за опори.

При плоскому згинанні всі навантаження зосереджені в головній площині стрижня xu (рис. 11.8, а), тому вони не дають проєкцій на вісь z та моментів відносно осей x і y . Отже, в будь-якому перерізі балки:

$$Q_z = M_x = M_y = 0, \quad (11.7)$$

і **не є нульовими** тільки три величини: **осьове зусилля** N , **поперечне зусилля** Q_y та **згинальний момент** M_z . Надалі позначатимемо їх N , Q та M .

У балках при навантаженні, перпендикулярному до осі балки, **поздовжня сила також дорівнюватиме нулю** ($N = 0$). В цьому випадку в будь-якому перерізі балки може бути лише два внутрішніх зусилля: **поперечна сила** Q та **згинальний момент** M . **Основні типи опор балок:**

- 1) **шарнірно-рухома** або **каткова опора** (рис. 11.9, а), в якій може виникати тільки одна складова реакції — R_A , що проходить через центр шарніру A і напрямлена вздовж опорного стрижня (перпендикулярно до площини кочення котка). Каткова опора не заважає повороту балки та її переміщенню вздовж площини кочення. Вона дає можливість балці змінювати свою довжину при зміні температури. Прикладом такої опори є може бути роликівий підшипник або котки у проміжних опорах мостів;
- 2) **шарнірно-нерухома опора** (рис. 11.9, б), в якій можуть виникати дві складові — **вертикальна реакція** R_A та **горизонтальна реакція** H_A . Така опора не заважає повороту балки, але не допускає її поступального переміщення. Прикладом може бути шариковий підшипник або одна із крайніх опор мостів;

3) **защемлення (жорстке затиснення або закріплення)**, де можуть бути три складові — **вертикальна R_A і горизонтальна H_A реакції й опорний момент (момент защемлення) M_A** (рис. 11.9, в). Таке закріплення не допускає ні лінійних ні кутових переміщень. Прикладом такої може бути закріплення балконів в будинках. Усі реакції та моменти вважаються прикладеними в **центрі тяжіння опорного перерізу** (в точці A на рис. 11.9).

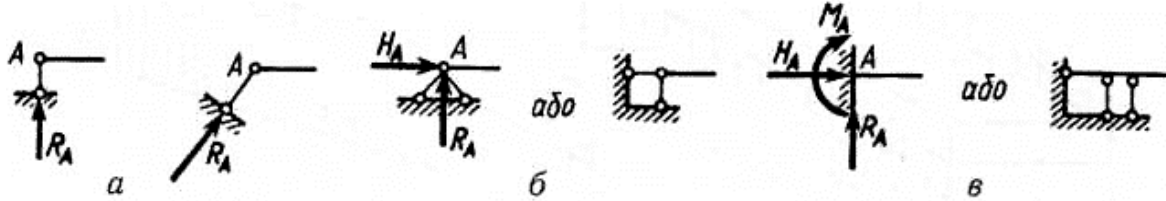


Рис. 11.9.

При конструюванні деталей машин, що спираються на опори, як балки, щоб не допускати виникнення температурних напружень, рекомендується застосовувати лише одну шарнірно-нерухому опору або защемлення, а решту опор слід ставити шарнірно-рухомими. **Балка статично визначувана** тоді, коли кількість невідомих опорних реакцій не перевищуватиме трьох; інакше — **статично невизначувана**. Балка, зображена на рис. 11.10, а, називається **нерозрізною** і є статично невизначуваною, оскільки має п'ять невідомих опорних реакцій: три в опорі A і по одній в опорах B та C . Поставивши в перерізі балки шарніри, наприклад, в точках D і E (рис. 11.10, б), матимемо статично визначувану шарнірну балку, бо кожний такий проміжний шарнір до трьох основних рівнянь статички додає одне додаткове рівняння: **сума моментів відносно центра шарніра від усіх сил, розміщених по один бік від нього, дорівнює нулю**.

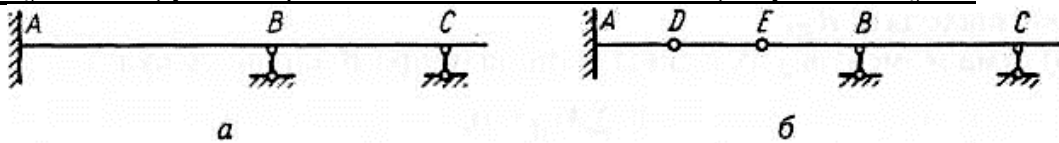


Рис. 11.10.

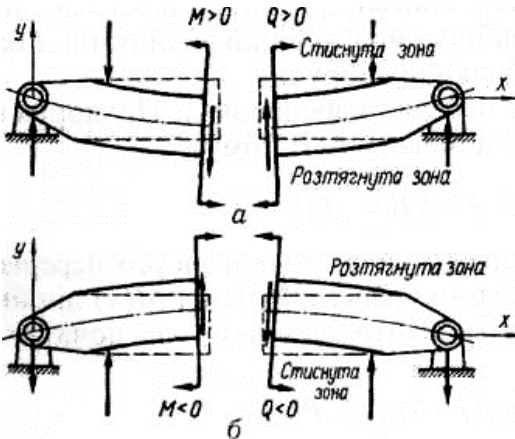


Рис. 11.11.

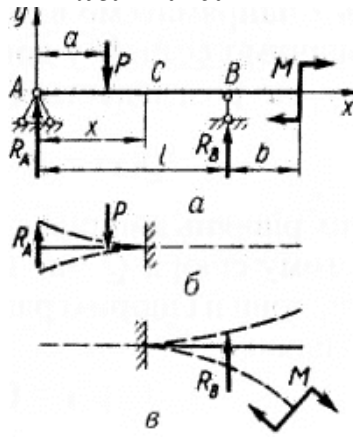


Рис. 11.12.

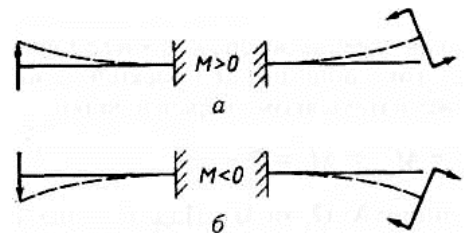


Рис. 11.13.

Правила знаків для поперечних зусиль Q та згинальних моментів M у балках: 1) поперечна сила Q у перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою (рис. 11.11, а); 2) згинальний момент M у перерізі додатний, якщо він спричинює стискання у верхніх волокнах балки, і напрямлений так, як зображено на рис. 11.11. Від'ємні напрями Q та M наведено на рис. 11.11, б.

Рекомендації для практичних розрахунків:

1. Якщо зовнішня сила намагається повернути балку відносно розглядуваного перерізу за годинниковою стрілкою, то у виразі для Q в цьому перерізі вона

дає додатний доданок. Так, реакція R_A намагається повернути балку відносно перерізу C за годинниковою стрілкою (рис. 11.12, *a*), а сили P та R_B — проти. Тому поперечна сила в перерізі C — $Q_C = R_A - P$ або $Q_C = -R_B$.

2. Якщо зовнішнє навантаження створює відносно розглядуваного перерізу момент, який спричинює стискання верхніх волокон балки, то у виразі для M у цьому перерізі воно дає додатний доданок. Найпростіше з'ясувати знак M для консолі. Так, на двох верхніх консолях, наведених на рис. 11.13, *a*, навантаження відгинає балку вгору, стиснутими будуть верхні волокна, тому згинальний момент додатний. На рис. 11.13, *б* стиснуті нижні волокна, і $M < 0$.

У більш складних випадках (рис. 11.12) можна уявити, що балка звільнена від усіх опор і затиснута в розглядуваному перерізі. Тоді вона перетворюється на дві консолі. Потрібно розглядати ліву консоль, якщо згинальний момент визначається як сума моментів сил, розміщених ліворуч від перерізу (рис. 11.12, *б*). Тоді $M_C = M(x) = R_A \cdot x - P \cdot (x - a)$. Якщо M визначається як сума моментів сил, розміщених праворуч від перерізу (рис. 11.12, *в*), то $M_C = M(x) = R_B \cdot (l - x) - M$.

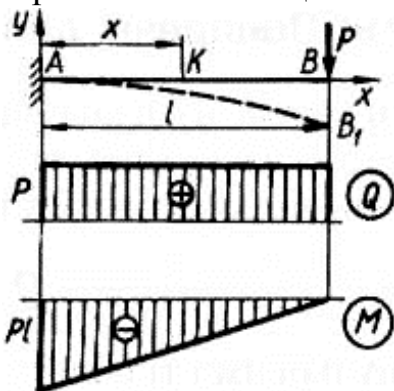
11.4. Побудова епюр поперечних зусиль і згинальних моментів

Епюрами поперечних зусиль Q та згинальних моментів M називаються графіки їх зміни (розподілу) вздовж осі балки за її довжиною. Побудова епюр виконується, як правило, одним з трьох методів: **аналітичним**, **за характерними точками** та **інтегральним**. В усіх випадках спочатку визначають реакції опор, які надалі враховують як зовнішні сили. Методи відрізняються способом обчислення величин поперечних зусиль і згинальних моментів у **характерних перерізах**, якими є границі ділянок та перерізи, де поперечне зусилля змінює знак у межах ділянки. Останнє можливе при наявності розподіленого навантаження. В **сингулярних перерізах**, де діють зосереджені навантаження або моменти, на епюрах виникають розриви (стрибки). Тому необхідно визначати зусилля ліворуч і праворуч від перерізу.

Розглянемо порядок побудови епюр Q та M для найхарактерніших випадків навантажування балок.

11.4.1. Зосереджена сила на вільному кінці консолі

Якщо на вільному кінці B консолі AB зосереджена вертикальна сила P (рис. 11.14), то балка має лише одну ділянку. Початок координат вибираємо в крайній лівій точці A балки, вісь X напрямляємо вздовж осі балки праворуч.



Визначимо Q та M у довільному перерізі K з абсцисою x . Праворуч від перерізу, що розглядається, діє тільки одна сила P , тому:

$$Q(x) = P; \quad M(x) = -P \cdot KB = -P \cdot (l - x). \quad (11.8)$$

Із цих рівнянь випливає, що поперечна сила однакова в усіх перерізах балки, тому епюра Q має вигляд прямокутника. Функція $M(x)$ лінійна. Для побудови її епюри досить знайти дві точки — на початку та в кінці ділянки: а) при $x = 0$ (переріз A) $M_A = M(0) = -P \cdot (l - 0) = -P \cdot l$;

Рис. 11.14.

б) при $x = l$ (переріз B) $M_B = M(l) = -P \cdot (l - l) = 0$.

За цими даними будуюмо епюру M . Зазначимо, що додатні ординати епюр Q та M відкладаються вгору від бази. На рис. 11.14 штриховою лінією AB_1 зображено балку в деформованому стані. З рисунка видно, що стиснутими є ниж-

ні волокна балки. Якщо сумістити базову лінію епюри згинальних моментів з віссю балки, то епюра M буде мовби побудованою на стиснутих волокнах.

11.4.2. Рівномірно розподілене навантаження на консолі

Якщо на консоль діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q, \frac{H}{m}$ (рис. 11.15), то поперечне зусилля Q та згинальний момент M у довільному перерізі K визначатимемо як наслідок дії розподіленого навантаження ліворуч від перерізу:

$$Q(x) = -q \cdot AK = -q \cdot x, \quad (11.9)$$

$$M(x) = -q \cdot AK \cdot LK = -\frac{q \cdot AK^2}{2} = -\frac{q \cdot x^2}{2}. \quad (11.10)$$

Отже, поперечна зусилля $Q(x)$ змінюється за законом прямої лінії, а згинальний момент $M(x)$ — за параболічним законом. Для побудови епюри Q визначаємо ординати в двох точках: а) при $x = 0$ (переріз A) $Q_A = Q(0) = -q \cdot 0 = 0$;

б) при $x = l$ (переріз B) $Q_B = Q(l) = -q \cdot l$; і проводимо пряму.

Враховуючи, що епюра M криволінійна, для її побудови знаходимо ординати в трьох точках: а) при $x = 0$ (переріз A) $M_A = M(0) = -\frac{q \cdot 0^2}{2} = 0$;

б) при $x = \frac{l}{2}$ (переріз C) $M_C = M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{q \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = -\frac{q \cdot l^2}{8}$;

в) при $x = l$ (переріз B) $M_B = M(l) = -\frac{q \cdot l^2}{2}$,

і проводимо через добуті три точки криву. Це й буде епюра M .

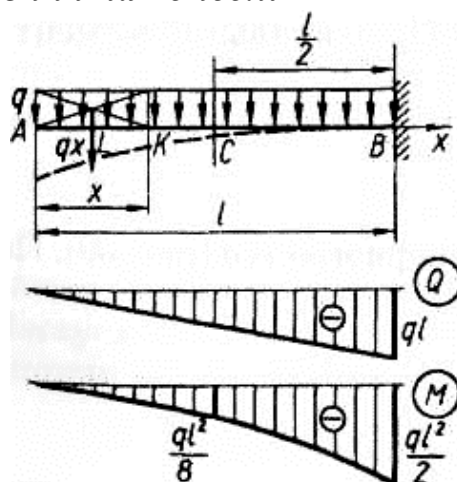


Рис. 11.15.

11.4.3. Навантаження рівномірно розподілене по всій довжині прогону двохопорної балки

Якщо навантаження інтенсивністю $q, \frac{H}{m}$, рівномірно розподілено по всій довжині прогону двохопорної балки (рис. 11.16), то у цьому разі треба спочатку визначити опорні реакції. Рівнодійна всього розподіленого навантаження дорівнює $q \cdot l$, а лінія її дії проходить через середину балки. Тому рівняння рівноваги балки:

$$\begin{aligned} 1. M_B(\vec{R}_A) + M_B(\vec{q} \cdot l) + M_B(\vec{R}_B) &= \\ &= -R_A \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 0 = 0; \Rightarrow R_A = q \cdot \frac{l}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{q} \cdot l) + M_A(\vec{R}_B) &= \\ &= 0 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot l = 0; \Rightarrow R_B = q \cdot \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Обчислюючи поперечне зусилля і згинальний

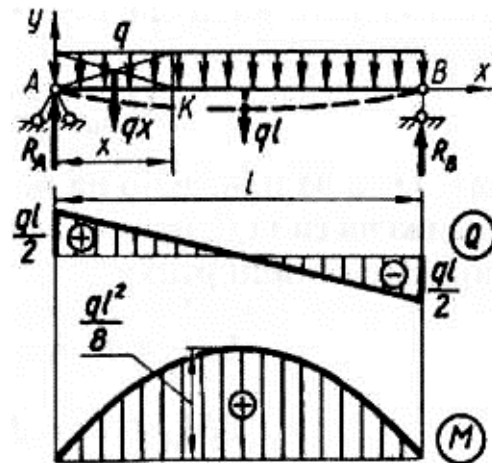


Рис. 11.16.

момент у довільному перерізі K як наслідок дії сил ліворуч від перерізу K , матимемо:

$$Q(x) = R_A - q \cdot x = q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot x = q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad (11.11)$$

$$M(x) = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{q}{2} \cdot (l \cdot x - x^2). \quad (11.12)$$

Очевидно, що епюра Q буде прямолінійна, а епюра M — параболічна.

Для побудови епюр дістаємо: $Q(0) = q \cdot \frac{l}{2}$; $Q\left(\frac{l}{2}\right) = 0$; $Q(l) = -q \cdot \frac{l}{2}$;

$$M(0) = 0; \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot \left(l \cdot \frac{l}{2} - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{q \cdot l^2}{8}; \quad M(l) = \frac{q}{2} \cdot (l \cdot l - l^2) = 0.$$

Щоб визначити екстремальне значення згинального моменту, порівняємо до нуля похідну від згинального моменту $M(x)$ по абсцисі x перерізу:

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{q}{2} \cdot (l \cdot x - x^2) \right] = \frac{q}{2} \cdot (l - 2 \cdot x) = 0, \quad \text{звідси } x_{\text{екст}} = \frac{l}{2}.$$

Оскільки друга похідна згинального моменту $\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dM(x)}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{q}{2} \cdot (l - 2 \cdot x) \right] = -q$ —

від'ємна, то в перерізі балки при $x_{\text{екст}} = \frac{l}{2}$ згинальний момент буде максималь-

ний: $M_{\text{max}} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q \cdot l^2}{8}$. Побудовані епюри поперечного зусилля та згинального моменту для даної двохопорної балки також наведено на рис. 11.16.

11.4.4. Зосереджена сила прикладена до двохопорної балки

Якщо до двохопорної балки AB в точці C прикладено зосереджену силу P (рис. 11.17), то, передусім, слід знайти опорні реакції, для чого складаємо рівняння рівноваги:

$$1. M_B(\vec{R}_A) + M_B(\vec{P}) + M_B(\vec{R}_B) =$$

$$= -R_A \cdot l + P \cdot b + 0 = 0; \Rightarrow R_A = P \cdot \frac{b}{l};$$

$$2. M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{R}_B) =$$

$$= 0 - P \cdot a + R_B \cdot l = 0; \Rightarrow R_B = P \cdot \frac{a}{l}.$$

У цьому разі маємо на балці дві ділянки.

Знаходимо Q та M у довільному перерізі K_1 розміщеному на ділянці AC ($0 \leq x < a$):

$$Q_1(x) = R_A = P \cdot \frac{b}{l}. \quad (11.13)$$

Отже, в усіх перерізах ділянки AC поперечні зусилля однакові й епюра Q має вигляд прямокутника. Згинальний момент $M(x)$ на ділянці AC змінюється за лінійним законом:

$$M_1(x) = R_A \cdot x = P \cdot \frac{b}{l} \cdot x. \quad (11.14)$$

Для побудови епюри згинального моменту визначимо ординати на межах

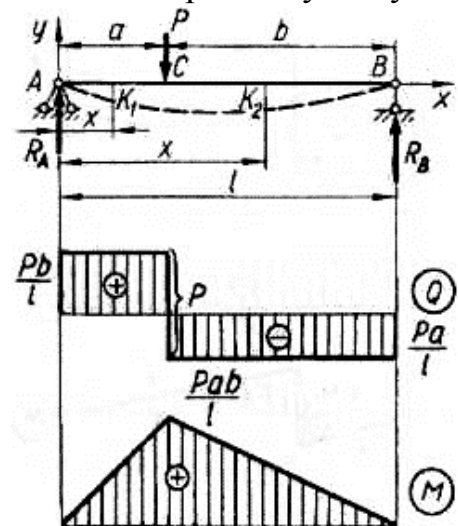


Рис. 11.17.

ділянки AC : а) при $x = 0 \Rightarrow M_A = M(0) = P \cdot \frac{b}{l} \cdot 0 = 0$;

б) при $x = a \Rightarrow M_C = M(a) = P \cdot \frac{b}{l} \cdot a$.

У довільному перерізі K_2 на ділянці CB ($a < x \leq l$), розглядаючи дію сил, розміщених праворуч від нього, для поперечного зусилля та згинального моменту дістанемо:

$$Q_2(x) = -R_B = -P \cdot \frac{a}{l}, \quad (11.15)$$

$$M_2(x) = R_B \cdot K_2B = P \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - x). \quad (11.16)$$

До такого самого результату можна дійти, розглядаючи дію сил, розміщених ліворуч:

$$Q_2(x) = R_A - P = P \cdot \frac{b}{l} - P = P \cdot \left(\frac{b}{l} - \frac{l}{l} \right) = -P \cdot \frac{a}{l},$$

$$\begin{aligned} M_2(x) &= R_A \cdot AK_2 - P \cdot CK_2 = P \cdot \frac{b}{l} \cdot x - P \cdot (x - a) = P \cdot \left(\frac{b \cdot x}{l} - \frac{l \cdot x - l \cdot a}{l} \right) = \\ &= P \cdot \frac{b \cdot x - l \cdot x + l \cdot a}{l} = P \cdot \frac{(b - l) \cdot x + l \cdot a}{l} = P \cdot \frac{-a \cdot x + l \cdot a}{l} = P \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - x). \end{aligned}$$

Епюра Q на ділянці CB , як і на ділянці AC , має вигляд прямокутника. Для побудови епюри M знайдемо значення ординат моментів у перерізах C та B :

а) при $x = a \Rightarrow M_C = P \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - a) = P \cdot \frac{a}{l} \cdot b$;

б) при $x = l \Rightarrow M_B = P \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - l) = 0$.

У результаті дістанемо епюри, які наведено на рис. 11.17. Вони показують, що при $x = a$ функція $Q(x)$ розривається і на епюрі Q має місце *стрибок*, що за модулем дорівнює зовнішній силі P у цьому перерізі:

$$P \cdot \frac{b}{l} + P \cdot \frac{a}{l} = P \cdot \frac{(b + a)}{l} = P \cdot \frac{l}{l} = P.$$

На епюрі M у цьому перерізі є *перелом* (кутова точка).

11.4.5. Зосереджений момент у прогоні двохопорної балки

Якщо у прогоні двохопорної балки AB прикладено зосереджений момент M_1 (рис. 11.18), то для побудови епор Q і M спершу знаходимо опорні реакції, напрямляючи їх угору. Для цього складемо рівняння рівноваги, як суми моментів відносно точок A і B :

$$\begin{aligned} 1. M_B(\overrightarrow{R_A}) + M_1 + M_B(\overrightarrow{R_B}) &= \\ &= -R_A \cdot l - M_1 + 0 = 0; \Rightarrow R_A = -\frac{M_1}{l}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. M_A(\overrightarrow{R_A}) + M_1 + M_A(\overrightarrow{R_B}) &= \\ &= 0 - M_1 + R_B \cdot l = 0; \Rightarrow R_B = \frac{M_1}{l}. \end{aligned}$$

Змінюємо напрям R_A на обернений.

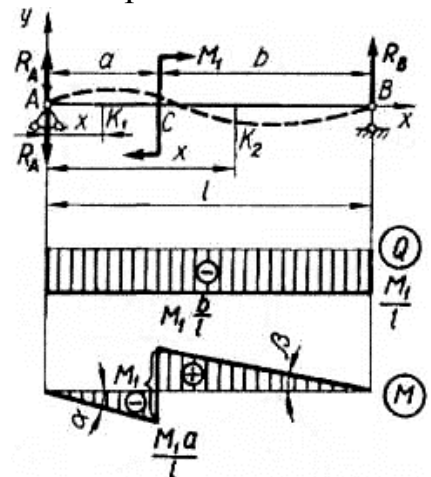


Рис. 11.18.

Помітивши на ділянках AC і CB довільні перерізи K_1 і K_2 , запишемо рівняння для функцій $Q(x)$ та $M(x)$:

а) для ділянки AC ($0 \leq x \leq a$) у перерізі K_1 (ліворуч) —

$$Q(x) = -R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = -R_A \cdot x = -\frac{M_1}{l} \cdot x. \quad (11.17)$$

б) для ділянки CB ($a \leq x \leq l$) у перерізі K_2 (праворуч) —

$$Q(x) = -R_B = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = R_B \cdot K_2B = \frac{M_1}{l} \cdot (l-x). \quad (11.18)$$

На підставі цих рівнянь будуюмо епюри Q та M . Епюра згинального моменту M розміщена частково під віссю, частково над віссю. Оскільки вона побудована на стиснутих волокнах (рис 11.18), бачимо, що на ділянці AC стиснутими є нижні волокна, а на ділянці CB — верхні. Цьому відповідає зображена штриховою кривою деформована вісь балки. У тому перерізі, де згинальний момент змінює знак, на осі буде точка перегину.

Тангенси кутів нахилу ділянок епюри згинального моменту до осі епюри

$$(\alpha \text{ і } \beta \text{ на рис 11.18) рівні між собою: } tg\alpha = \frac{M_1 \cdot a}{a} = tg\beta = \frac{M_1 \cdot b}{b} = \frac{M_1}{l}, \quad (11.19)$$

а тому прями на епюрі M на ділянках AC та CB паралельні. Там, де прикладений зовнішній момент (переріз C), на епюрі Q ніяких змін немає, функція $M(x)$ розривається, а на епюрі M має місце **стрибок**, що дорівнює значенню зовнішнього моменту. У тому разі коли момент прикладений в опорному перерізі, на підставі (11.17) і (11.18) при $a = 0$, дістанемо епюри, які зображено на рис. 11.19.

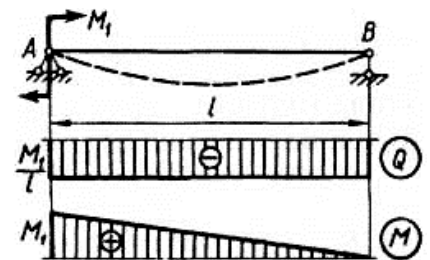


Рис. 11.19.

11.4.6. Зосереджені моменти на опорах однопрогонової балки

У випадку, коли на опорах однопрогонної балки AB діють зосереджені моменти $M_1 = M_2 = M$ (рис. 11.20), то для побудови епюр Q і M_z спершу знаходимо опорні реакції з рівнянь рівноваги балки:

$$1. M_B(\overrightarrow{R_A}) + M_1 + M_2 + M_B(\overrightarrow{R_B}) = -R_A \cdot l - M + M + 0 = 0; \Rightarrow R_A = 0;$$

$$2. M_A(\overrightarrow{R_A}) + M_1 + M_2 + M_A(\overrightarrow{R_B}) = 0 - M + M + R_B \cdot l = 0; \Rightarrow R_B = 0.$$

Тоді для довільного перерізу на відстані x від лівої опори

$$Q(x) = R_A = 0; \quad M_z(x) = M = const. \quad (11.20)$$

Отже, в будь-якому перерізі $Q = 0$, а згинальний момент однаковий по всій довжині балки. Таке згинання балки має назву **чистого згинання**.

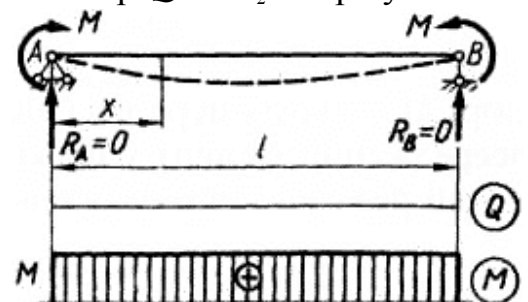


Рис. 11.20.

Приклад 11.7

Побудуйте епюри поперечних зусиль Q та згинальних моментів M для простої балки AB , яка спирається на шарнірно-нерухому A і шарнірно-рухому B опори та знаходиться під впливом розподіленого за трикутником навантаження, причому $q_{\min}(A) = 0$, а $q_{\max}(B) = q$ (рис. 11.21).

Дано:

$$AB = l,$$

$$q_{\min}(A) = 0,$$

$$q_{\max}(B) = q$$

$$Q, M(x) - ?$$

Розв'язання:

1. Вводимо плоску прямокутну систему координат xAy з початком в точці A та віссю Ax , що напрямлена вздовж балки AB (рис. 11.21).

2. Для визначення реакцій шарнірно-нерухомої і шарнірно-рухомої опор (R_A і R_B), необхідно знайти рівнодійну P нерів-

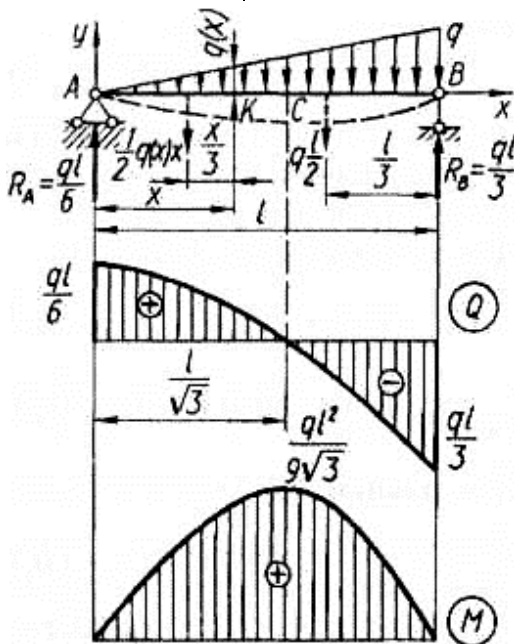


Рис. 11.21.

номірно розподіленого навантаження $q(x)$, тобто замінити його на зосереджену силу, направлену вертикально вниз. Оскільки рівнодійна розподіленого навантаження дорівнює площі епюри даного навантаження й прикладена в центрі ваги (тяжіння) цієї епюри, то зосереджена сила P дорівнює площі трикутної

епюри $q(x)$, тобто $P = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot q = \frac{1}{2} \cdot l \cdot q$, і прикладена до балки AB в точці C , що відповідає центру ваги трикутної епюри $q(x)$, причому

$$AC = \frac{2}{3} \cdot l, \quad CB = \frac{1}{3} \cdot l$$

3. Реакція R_B шарнірно-рухомої опори B направлена вертикально вгору, перпендикулярно до балки. А оскільки сама статично-визначувана балка AB знаходиться в рівновазі під дією

системи лише трьох сил ($\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{P}$), причому дві з них (\vec{R}_B і \vec{P}) паралельні між собою, то реакція R_A шарнірно-нерухомої опори A також направлена вертикально вгору, перпендикулярно до балки, і всі три сили лежать в одній площині.

5. Складаємо рівняння рівноваги для всієї балки AB , на яку діє плоска система паралельних сил ($\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{P}$), як рівні нулю алгебраїчні суми моментів реакцій опор \vec{R}_A і \vec{R}_B та зосередженої сили \vec{P} відносно точок A і B :

$$M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{R}_B) = 0 - \frac{2}{3} \cdot l \cdot P + l \cdot R_B = 0;$$

$$M_B(\vec{R}_A) + M_B(\vec{P}) + M_B(\vec{R}_B) = -l \cdot R_A + \frac{1}{3} \cdot l \cdot P + 0 = 0.$$

З першого рівняння рівноваги одержимо, що

$$l \cdot R_B = \frac{2}{3} \cdot l \cdot P, \Rightarrow R_B = \frac{2}{3} \cdot P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot q = \frac{1}{3} \cdot l \cdot q.$$

З другого рівняння рівноваги одержимо, що

$$l \cdot R_A = \frac{1}{3} \cdot l \cdot P, \Rightarrow R_A = \frac{1}{3} \cdot P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot q = \frac{1}{6} \cdot l \cdot q.$$

6. Поперечне зусилля Q у довільному перерізі K (рис. 11.21) знайдемо як наслідок дії сил, розміщених ліворуч від перерізу K , — реакції R_A та рівнодійної розподіленого за трикутником навантаження на ділянці AK

$P(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot q(x)$. З подібності прямокутних трикутників з відповідно пропорційними катетами AK і AB (рис. 11.21), маємо $\frac{q(x)}{x} = \frac{q}{l}$ і $q(x) = \frac{q}{l} \cdot x$. При цьо-

му рівнодійна розподіленого на ділянці AK за трикутником навантаження з максимальним значенням $q(x) = \frac{q}{l} \cdot x$ в точці K буде $P(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot q(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{q}{l} \cdot x$.

Оскільки зовнішня сила $\overrightarrow{R_A}$ намагається повернути балку відносно перерізу K за годинниковою стрілкою, то у виразі для $Q(x)$ в цьому перерізі вона дає додатний доданок, а рівнодійна $\overrightarrow{P(x)}$ — від'ємний. Тому:

$$Q(x) = R_A - P(x) = R_A - \frac{1}{2} \cdot x \cdot q(x) = \frac{1}{6} \cdot l \cdot q - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{q}{l} \cdot x = \frac{l \cdot q}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x^2.$$

Із цього рівняння видно, що епюра поперечного зусилля Q окреслена квадратичною параболою. Для її побудови визначимо ординати в характерних точках:

а) в точці A при $x = 0 \Rightarrow Q_A = Q(0) = \frac{l \cdot q}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot 0^2 = \frac{l \cdot q}{6}$;

б) в точці B при $x = l \Rightarrow Q_B = Q(l) = \frac{l \cdot q}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot l^2 = -\frac{l \cdot q}{3}$;

в) $Q = 0$ при $\frac{l \cdot q}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x_0^2 = 0$, тобто при $x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$;

г) при $x = 0 \Rightarrow \frac{dQ(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{l \cdot q}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x^2 \right) = -\frac{q}{l} \cdot x = -\frac{q}{l} \cdot 0 = 0$.

Отже епюра поперечного зусилля має такий вигляд, як показано на рис. 11.21, причому в перерізі A ($x = 0$) дотична до епюри Q паралельна осі.

7. Згинальний момент M у довільному перерізі K (рис. 11.21) знайдемо як наслідок дії моментів сил, розміщених ліворуч від перерізу K , — реакції R_A та рівнодійної розподіленого за трикутником навантаження на ділянці AK $P(x) = 0,5 \cdot x \cdot q(x)$. Для визначення знаків моментів зовнішнього зосередженого навантаження $P(x)$ та реакція R_A шарнірно-нерухомої опори A в перерізі K , уявімо, що балка AB звільнена від опор і затиснута в розглядуваному перерізі. Тоді вона умовно перетворюється на дві консолі — AK і BK . Оскільки ми визначаємо згинальний момент в перерізі K , як суму моментів сил, що розміщені ліворуч від перерізу, то треба розглядати сили, які діють на консоль AK . Зовнішня сила $\overrightarrow{R_A}$ намагається повернути консоль AK відносно „закріплення” K за годинниковою стрілкою, тому у виразі для $M(x)$ в цьому перерізі її момент дає додатний доданок. Рівнодійна $\overrightarrow{P(x)}$ намагається повернути консоль AK відносно „закріплення” K проти годинникової стрілки, тому у виразі для $M(x)$ в цьому перерізі її момент дає від'ємний доданок. Отже:

$$\begin{aligned} M(x) &= M_K(\overrightarrow{R_A}) - M_K(\overrightarrow{P(x)}) = R_A \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x \cdot P(x) = \\ &= \frac{l \cdot q}{6} \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot q(x) = \frac{l \cdot q}{6} \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{q}{l} \cdot x = \frac{l \cdot q}{6} \cdot x - \frac{q}{6 \cdot l} \cdot x^3. \end{aligned}$$

Із цього рівняння видно, що епюра згинального моменту M окреслена кубічною параболою. Для її побудови визначимо ординати в характерних точках:

а) в точці A при $x = 0 \Rightarrow M_A = M(0) = \frac{l \cdot q}{6} \cdot 0 - \frac{q}{6 \cdot l} \cdot 0^3 = 0$;

б) в точці **B** при $x = l \Rightarrow M_B = M(l) = \frac{l \cdot q}{6} \cdot l - \frac{q}{6 \cdot l} \cdot l^3 = 0$;

в) перша похідна **M** перетвориться на 0 при $x = x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$ оскільки

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{l \cdot q}{6} \cdot x - \frac{q}{6 \cdot l} \cdot x^3 \right) = \frac{l \cdot q}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x^2 = \frac{l \cdot q}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x_0^2 = 0$$

г) друга похідна **M** при $x = x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$ менша нуля —

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dM(x)}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left(\frac{l \cdot q}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x^2 \right) = -\frac{q}{l} \cdot x = -\frac{q}{l} \cdot x_0 = -\frac{q}{\sqrt{3}} < 0.$$

Отже, у перерізі $x = x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$ епюра згинального моменту має максимум, причому:

$$M_{\max} = M(x_0) = \frac{l \cdot q}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{q}{6 \cdot l} \cdot \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{l^2 \cdot q}{6\sqrt{3}} - \frac{l^2 \cdot q}{18\sqrt{3}} = \frac{l^2 \cdot q}{9\sqrt{3}}.$$

Приклад 11.8

До балки **FC** довжиною 4,1 м (рис. 11.22), яка спирається на шарнірно-нерухому опору **A** ($FA = 0,6$ м) та шарнірно-рухому опору **B** ($FB = 3,1$ м) прикладені: а) на ділянці $FD = 2,6$ м — рівномірно розподілене лінійне навантаження інтенсивністю

$q = 30 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; б) в точці **E** ($FE = 1,6$ м) — зосереджений момент $M_1 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$; в) в точці **C** — зосереджене навантаження $F_1 = 40 \text{ кН}$. Побудуйте епюри поперечних зусиль **Q** та згинальних моментів **M** для даної балки.

Дано:

$$FC = 4,1 \text{ м}, FA = 0,6 \text{ м}$$

$$FE = 1,6 \text{ м}, FD = 2,6 \text{ м},$$

$$FB = 3,1 \text{ м}, q = 30 \frac{\text{кН}}{\text{м}},$$

$$M_1 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}, F_1 = 40 \text{ кН}$$

$$Q(x), M(x) \text{ — ?}$$

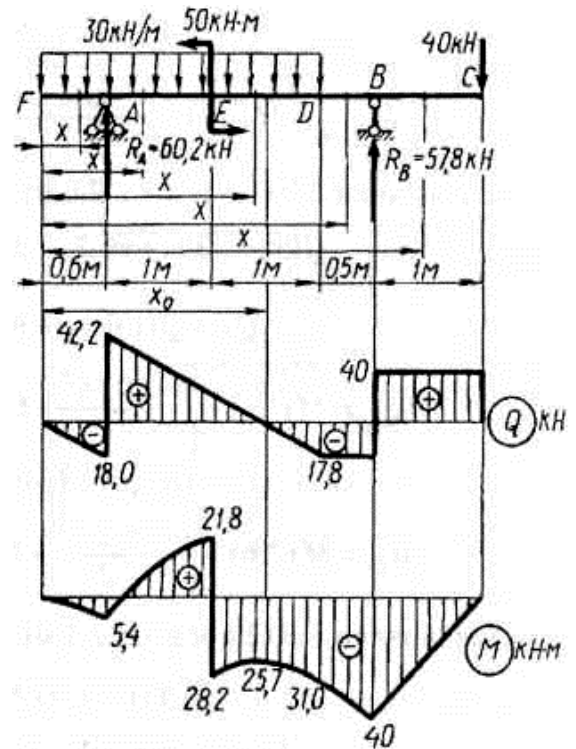


Рис. 11.22.

Розв'язання:

1. Вводимо плоску прямокутну систему координат xFu з початком в точці **F** та віссю Fx , що напрямлена вздовж балки **FC**.

2. Знаходимо рівнодійну **P** рівномірно розподіленого на ділянці **FD** лінійного навантаження інтенсивністю **q**:

$$P = q \cdot FD = 30 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 2,6 \text{ м} = 78 \text{ кН}.$$

Зосереджена сила **P** направлена вертикально вниз і прикладена в точці **K**, причому $FK = \frac{1}{2} \cdot FD = \frac{1}{2} \cdot 2,6 \text{ м} = 1,3 \text{ м}$.

3. Для визначення реакцій шарнірно-нерухомої і шарнірно-рухомої опор (R_A і R_B), складаємо рівняння рівноваги для всієї балки FC , на яку діє плоска система паралельних сил ($\vec{R}_A, \vec{P}, \vec{R}_B, \vec{F}_1$) та зосереджений момент \vec{M}_1 , як рівні нулю алгебраїчні суми моментів цих сил та зосередженого моменту відносно точок A і B :

$$M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{R}_B) + M_A(\vec{F}_1) + M_1 = 0 - (FK - FA) \cdot P + (FB - FA) \cdot R_B - (FC - FA) \cdot F_1 + M_1 = 0;$$

$$M_B(\vec{R}_A) + M_B(\vec{P}) + M_B(\vec{R}_B) + M_B(\vec{F}_1) + M_1 = -(FB - FA) \cdot R_A + (FB - FK) \cdot P + 0 - (FC - FB) \cdot F_1 + M_1 = 0.$$

З першого рівняння рівноваги одержимо, що

$$R_B = \frac{(FK - FA) \cdot P + (FC - FA) \cdot F_1 - M_1}{FB - FA} = \frac{(1,3 \text{ м} - 0,6 \text{ м}) \cdot 78 \text{ кН} + (4,1 \text{ м} - 0,6 \text{ м}) \cdot 40 \text{ кН} - 50 \text{ кН} \cdot \text{м}}{3,1 \text{ м} - 0,6 \text{ м}} = \frac{54,6 \text{ кН} \cdot \text{м} + 140 \text{ кН} \cdot \text{м} - 50 \text{ кН} \cdot \text{м}}{2,5 \text{ м}} \approx 57,8 \text{ кН}.$$

З другого рівняння рівноваги одержимо, що

$$R_A = \frac{(FB - FK) \cdot P - (FC - FB) \cdot F_1 + M_1}{FB - FA} = \frac{(3,1 \text{ м} - 1,3 \text{ м}) \cdot 78 \text{ кН} - (4,1 \text{ м} - 3,1 \text{ м}) \cdot 40 \text{ кН} + 50 \text{ кН} \cdot \text{м}}{3,1 \text{ м} - 0,6 \text{ м}} = \frac{140,4 \text{ кН} \cdot \text{м} - 40 \text{ кН} \cdot \text{м} + 50 \text{ кН} \cdot \text{м}}{2,5 \text{ м}} \approx 60,2 \text{ кН}.$$

4. Балка FC має п'ять ділянок — FA , AE , ED , DB і BC . У довільних перерізах кожної з них записуємо вирази для поперечних зусиль та згинальних моментів, перевіряючи при цьому, чи виконується рівність $Q = \frac{dM}{dx}$, та обчислюємо Q і M у характерних перерізах.

Для ділянки FA ($0 \leq x \leq 0,6$) зліва від перерізу:

а) $Q(x) = -q \cdot x = -30 \cdot x$ (кН),
 $Q_F = Q(0) = 0$, $Q_{A_{зліва}} = Q(0,6) = -30 \cdot 0,6 = -18,0$ (кН);

б) $M(x) = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot P(x) = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot q \cdot x = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 = -15 \cdot x^2$ (кН · м),
 $M_F = M(0) = 0$, $M_A = M(0,6) = -15 \cdot 0,6^2 = -5,4$ (кН · м).

Для ділянки AE ($0,6 \leq x \leq 1,6$) зліва від перерізу:

а) $Q(x) = -q \cdot x + R_A = -30 \cdot x + 60,2$ (кН),
 $Q_{A_{права}} = Q(0,6) = -30 \cdot 0,6 + 60,2 = 42,2$ (кН),
 $Q_E = Q(1,6) = -30 \cdot 1,6 + 60,2 = 12,2$ (кН);

б) $M(x) = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 + (x - FA) \cdot R_A = -15 \cdot x^2 + (x - 0,6) \cdot 60,2$ (кН · м),

$$M_A = M(0,6) = -15 \cdot 0,6^2 + (0,6 - 0,6) \cdot 60,2 = -5,4 \text{ (кН} \cdot \text{м)},$$

$$M_{E_{\text{зліва}}} = M(1,6) = -15 \cdot 1,6^2 + (1,6 - 0,6) \cdot 60,2 = 21,8 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Для ділянки **ED** ($1,6 \leq x \leq 2,6$) зліва від перерізу:

$$\text{а) } Q(x) = -q \cdot x + R_A = -30 \cdot x + 60,2 \text{ (кН)},$$

$$Q_E = Q(1,6) = -30 \cdot 1,6 + 60,2 = 12,2 \text{ (кН)},$$

$$Q_D = Q(2,6) = -30 \cdot 2,6 + 60,2 = -17,8 \text{ (кН)};$$

$$\text{б) } M(x) = -\frac{q}{2} \cdot x^2 + (x - FA) \cdot R_A - M_1 = -15 \cdot x^2 + (x - 0,6) \cdot 60,2 - 50 \text{ (кН} \cdot \text{м)},$$

$$M_{E_{\text{справа}}} = M(1,6) = -15 \cdot 1,6^2 + (1,6 - 0,6) \cdot 60,2 - 50 = -28,2 \text{ (кН} \cdot \text{м)},$$

$$M_D = M(2,6) = -15 \cdot 2,6^2 + (2,6 - 0,6) \cdot 60,2 - 50 = -31,0 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Для ділянки **DB** ($2,6 \leq x \leq 3,1$) зліва від перерізу:

$$\text{а) } Q(x) = -P + R_A = -78 + 60,2 = -17,8 \text{ (кН)};$$

$$\text{б) } M(x) = -(x - FK) \cdot P + (x - FA) \cdot R_A - M_1 =$$

$$= -(x - 1,3) \cdot 78 + (x - 0,6) \cdot 60,2 - 50 \text{ (кН} \cdot \text{м)},$$

$$M_D = M(2,6) = -(2,6 - 1,3) \cdot 78 + (2,6 - 0,6) \cdot 60,2 - 50 = -31,0 \text{ (кН} \cdot \text{м)},$$

$$M_B = M(3,1) = -(3,1 - 1,3) \cdot 78 + (3,1 - 0,6) \cdot 60,2 - 50 \approx -40 \text{ (кН} \cdot \text{м)};$$

Для ділянки **BC** ($3,1 \leq x \leq 4,1$) зліва від перерізу:

$$\text{а) } Q(x) = -P + R_A + R_B = -78 + 60,2 + 57,8 = 40 \text{ (кН)};$$

$$\text{б) } M(x) = -(x - FK) \cdot P + (x - FA) \cdot R_A - M_1 + (x - FB) \cdot R_B =$$

$$= -(x - 1,3) \cdot 78 + (x - 0,6) \cdot 60,2 - 50 + (x - 3,1) \cdot 57,8 \text{ (кН} \cdot \text{м)},$$

$$M_B = M(3,1) = -(3,1 - 1,3) \cdot 78 + (3,1 - 0,6) \cdot 60,2 - 50 + (3,1 - 3,1) \cdot 57,8 \approx -40 \text{ (кН} \cdot \text{м)},$$

$$M_C = M(4,1) = -(4,1 - 1,3) \cdot 78 + (4,1 - 0,6) \cdot 60,2 - 50 + (4,1 - 3,1) \cdot 57,8 \approx 0 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Побудувавши за цими даними епюру поперечних зусиль (див. рис. 11.22), бачимо, що в деякому перерізі x_0 на ділянці **ED** зусилля Q дорівнює нулю, а

отже, там дотична до епюри M буде горизонтальною — $\frac{dM(x)}{dx} = Q = 0$.

Для побудови епюри згинальних моментів потрібно ще обчислити ординату $M(x_0)$. Скориставшись виразом для $Q(x)$ на ділянці **ED**, знаходимо x_0 з умови: $Q(x_0) = -q \cdot x_0 + R_A = -30 \cdot x_0 + 60,2 = 0 \text{ (кН)}$, звідки

$$x_0 = \frac{60,2 \text{ кН}}{30 \text{ кН} \cdot \text{м}} \approx 2,01 \text{ м}.$$

$$\text{Тоді } M(x_0) = -15 \cdot 2,01^2 + (2,01 - 0,6) \cdot 60,2 - 50 \approx 25,7 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

За здобутими даними будуюмо епюру M .

Розглядаючи епюри Q , M та навантаження на балку з точки зору загальних властивостей епюр, виявляємо, що побудовані епюри не містять принципових помилок: наприклад, усюди, де $Q > 0$, згинальний момент M зростає, а там, де $Q < 0$, — зменшується; в перерізі **E** на епюрі M має місце стрибок на значення $50 \text{ кН} \cdot \text{м}$; у перерізах **F** та **C** момент $M = 0$ і т.д.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняттю "епюра".
2. Наведіть та проаналізуйте план побудови епюри.
3. Поясніть, в яких випадках поздовжня (осьова) сила вважається додатною?
4. Що називається ділянкою навантаження?
5. Наведіть особливості границі ділянки навантаження.
6. Що називається характерним перерізом?
7. Поясніть, чому у місці прикладання зосередженої осьової сили (моменту) на епюрі є стрибок (розрив) на величину цієї сили (моменту)?
8. В яких випадках лінії епюри осьового зусилля N паралельні її осі, а сама епюра складається з прямокутників і має стрибки?
9. Проаналізуйте особливості епюри осьового зусилля у випадках, коли стрижень розміщений вертикально і враховується його власна вага.
10. Поясніть, навіщо будують епюри внутрішніх зусиль?
11. В яких випадках у довільному перерізі стрижня із шести внутрішніх зусиль та моментів залишається лише крутний момент $M_{кр}$?
12. Поясніть, чому дорівнює крутний момент у перерізі?
13. В яких випадках крутний момент $M_{кр}$ у перерізі вважається додатним?
14. Наведіть та проаналізуйте залежності між моментами $M_{к}$, які прикладені до дисків (шківів або зубчастих коліс), потужностями K , що передаються на них або знімаються з них, та частотою обертання валу n .
15. Поясніть, чому для передачі великих потужностей при малих габаритах машин треба збільшувати частоту обертання валів?
16. Поясніть, чим для визначення реакцій опор замінюють розподілене навантаження, яке прикладене до балки?
17. Що називається деформацією згину?
18. Проаналізуйте, чим поперечний згин відрізняється від чистого згину?
19. Що називається прямим та плоским згином?
20. Проаналізуйте, які внутрішні силові фактори не є нульовими при плоскому згинанні?
21. Поясніть, коли балка є статично визначуваною?
22. Наведіть та проаналізуйте правила знаків для поперечних зусиль Q та згинальних моментів M у балках.
23. Наведіть три основних методи побудови епюр поперечних зусиль Q та згинальних моментів M у балках.
24. Проаналізуйте побудову епюр поперечних зусиль Q та згинальних моментів M для випадку, коли на вільному кінці консолі зосереджена сила.
25. Проаналізуйте побудову епюр поперечних зусиль Q та згинальних моментів M для випадку, коли на консоль діє рівномірно розподілене навантаження.
26. Проаналізуйте побудову епюр поперечних зусиль Q та згинальних моментів M для випадку, коли навантаження рівномірно розподілене по всій довжині прогону двохопорної балки.
27. Проаналізуйте побудову епюр поперечних зусиль Q та згинальних моментів M для випадку, коли до двохопорної балки прикладена зосереджена сила.
28. Що називається переломом або кутовою точкою на епюрі M .
29. Проаналізуйте побудову епюр поперечних зусиль Q та згинальних моментів M для випадку, коли у прогоні двохопорної балки прикладено зосереджений момент.
30. Проаналізуйте побудову епюр поперечних зусиль Q та згинальних моментів M для випадку, коли на опорах однопрогонної балки діють зосереджені моменти.

Лекція № 12

Тема: «Деформування розтягом і стиском»

ПЛАН

- 12.1. Напруження і деформації при розтяганні й стисканні.
- 12.2. Умови міцності і жорсткості.
- 12.3. Випробування матеріалів на розтягання.
- 12.4. Допустимі напруження.
- 12.5. Загальна методика розв'язання задач при деформуванні розтягом і стиском.

12.1. Напруження та деформації при розтяганні й стисканні

Якщо навантаження діють лише вздовж осі стрижня, то вони спричинюють тільки його розтягання або стискання, при цьому в поперечних перерізах стрижня із шести внутрішніх силових факторів виникає лише один — поздовжнє (осьове) зусилля N . На рис. 12.1, *а, б* наведено приклад розтягання прямолінійного призматичного стрижня осьовими навантаженнями P й епюру поздовжніх зусиль N . Осьове зусилля N в перерізі є рівнодійною нормальних напружень σ , що виникають у кожній із точок перерізу.

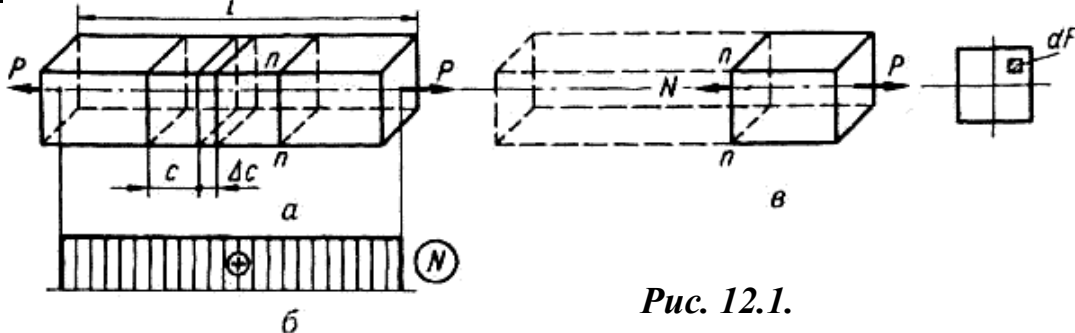


Рис. 12.1.

Формула для визначення нормальних напружень:

Розічемо стрижень довільним поперечним перерізом $n-n$ (рис. 12.1, *в*).

1. Статичний аспект задачі виражається вже відомим рівнянням (10.14):

$$N = \int_F dN = \int_F \sigma \cdot dF. \quad (12.1)$$

Із рівняння (12.1) не можна визначити нормальне напруження σ , оскільки невідомий закон розподілу їх у точках поперечного перерізу.

2. Геометричний аспект задачі. При спостережанні деформації розтягання стрижня, на поверхні якого нанесено лінії, перпендикулярні до осі бруса (рис. 12.1, *а*), можна помітити, що ці лінії, зміщуючись паралельно самим собі, залишаються прямими і перпендикулярними до осі бруса. Припускаючи, що зазначена картина переміщення перерізів має місце й усередині стрижня, приходимо до гіпотези плоских перерізів: поперечні перерізи стрижня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступово вздовж осі стрижня. Волокнами називаються поздовжні (паралельні осі стрижня) елементи нескінченно малих поперечних перерізів стрижня. Всі волокна подовжуються на одну і ту саму величину і їхні відносні подовження є однакові:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const}, \quad (12.2)$$

де ε — відносна поздовжня деформація (відносне подовження); Δl — абсолютне подовження стрижня; l — вихідна довжина стрижня. Це аналітичний вираз геометричного аспекту задачі.

3. Фізичний аспект задачі полягає у встановленні залежності деформацій від напружень. При пружних деформаціях ця залежність лінійна і називається

законом Гюка:
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ або } \sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (12.3)$$

де E — коефіцієнт пропорційності, що називається **модулем поздовжньої пружності**, **модулем пружності першого роду** або **модулем Юнга**. Модуль пружності є однією з фізичних констант матеріалу, і виражається в **паскалях**.

Ураховуючи **сталість модуля пружності E для однорідного й ізотропного матеріалу**, а також вирази (12.2) і (12.3), маємо:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \text{const}. \quad (12.4)$$

Підставляючи вираз (12.4) у формулу (12.1), для всієї площі F поперечного перерізу стрижня одержимо значення поздовжнього (осьового) зусилля:

$$N = \int_F \sigma \cdot dF = \int_F E \cdot \varepsilon \cdot dF = E \cdot \varepsilon \cdot \int_F dF = E \cdot \varepsilon \cdot F = \sigma \cdot F, \quad (12.5)$$

звідки
$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (12.6)$$

Знак напруження залежить від знака поздовжньої сили в розглядуваному перерізі. **У разі стискання напруження вважають від'ємними.**

Формула (12.6) справедлива лише для перерізів, досить віддалених від місць прикладання зосереджених навантажень. Поблизу місць прикладання навантажень розподіл напружень має складний характер і потребує більш точних методів досліджування. **Принцип Сен-Венана:** *якщо тіло навантажуються статично еквівалентними системами сил, тобто такими, в яких головний вектор та головний момент однакові, й при цьому розміри зони прикладення навантажень невеликі порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладення сил, напруження мало залежать від способу навантажування.* Пояснимо цей принцип на такому прикладі. Один і той самий стрижень, закріплений верхнім кінцем (рис. 12.2), навантажуються на вільному кінці статично еквівалентними навантаженнями, рівнодійні яких визначаються вектором P . Навантаження прикладено різними способами: **а** — у вигляді зосередженої сили; **б** — у вигляді двох сил; **в** — у вигляді розподіленого навантаження. Дослідження показують, що в усіх цих прикладах у поперечному перерізі, віддаленому на відстань, яка перевищує в 1,5÷2 рази його поперечні розміри, напруження практично однакові. Проте в перерізах поблизу місця прикладення сил напруження та характер їх розподілу різні.

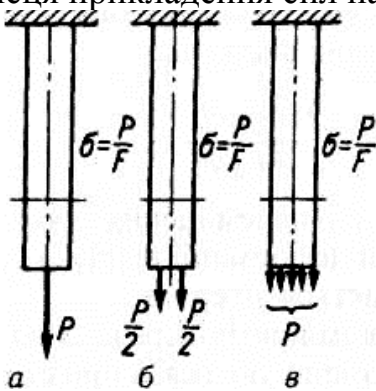


Рис. 12.2.

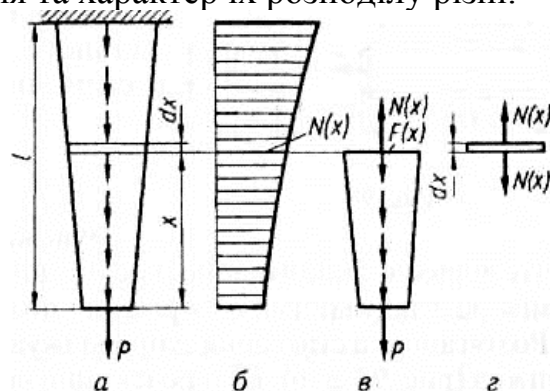


Рис. 12.3.

Із виразу (12.5) можна знайти **відносне подовження:**
$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot F}. \quad (12.7)$$

У межах призматичної ділянки стрижня завдовжки l , виготовленого з однорідного матеріалу ($E = \text{const}$) і у перерізах якого діють однакові поздовжні зусилля N , подовження кожної одиниці довжини однакові й, отже, **абсолютне подов-**

ження стрижня:
$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F} \quad (12.8)$$

Формула (12.8) виражає закон Гука для абсолютних подовжень. Добуток $E \cdot F$ у знаменнику формули називається жорсткістю поперечного перерізу стрижня при розтяганні та стисканні й має розмірність сили. Жорсткістю

стрижня називають величину
$$c = \frac{E \cdot F}{l} \quad (12.9)$$

Якщо на розглядуваній ділянці подовжня сила та поперечний переріз змінні (рис. 12.3, а – в), то для елемента нескінченно малої довжини dx (рис. 12.3, з) на

підставі формули (12.8) можна записати:
$$\Delta(dx) = \frac{N(x) \cdot dx}{E \cdot F(x)} \quad (12.10)$$

Повне подовження ділянки завдовжки l дістанемо, підсумувавши подовження

всіх нескінченно малих відрізків:
$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x) \cdot dx}{E \cdot F(x)} \quad (12.11)$$

Переміщення деякого перерізу відносно іншого дорівнює подовжній деформації відрізка стрижня між розглядуваними перерізами і позначається літерою λ .

Розтягання та стискання супроводжуються зміною поперечних розмірів стрижня. При розтяганні вони зменшуються, а при стисканні збільшуються (рис. 12.4, а, б).

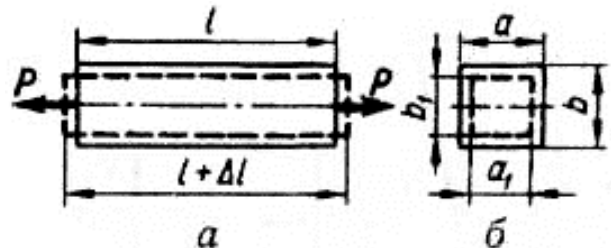


Рис. 12.4.

Абсолютною поперечною деформацією називається різниця відповідних поперечних розмірів після деформації й до неї (рис. 12.4, б):

$$\Delta a = a_1 - a; \quad \Delta b = b_1 - b. \quad (12.12)$$

При розтяганні поперечні деформації від'ємні, а при стисканні — додатні.

Відносною поперечною деформацією ε' називається відношення абсолютної поперечної деформації до відповідного початкового розміру. Відносна поперечна деформація для ізотропних матеріалів в усіх поперечних напрямках

однакова:
$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} \quad (12.13)$$

Між поперечною та подовжньою відносними деформаціями при простих розтяганні та стисканні в межах застосування закону Гука існує постійне співвідношення. Абсолютне значення цього відношення має назву коефіцієнта

Пуассона і позначається літерою μ :
$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (12.14)$$

Коефіцієнт Пуассона — безрозмірна величина.

Ураховуючи, що подовжня й поперечна деформації завжди мають протилежні знаки, маємо:
$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon, \quad (12.15)$$

або, згідно з формулою (12.3),
$$\varepsilon' = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}, \quad (12.16)$$

При стисканні напруження у формулу (12.16) слід підставляти зі знаком «мінус». Коефіцієнт Пуассона μ , як і модуль пружності E , характеризує пружні властивості матеріалу. Для всіх ізотропних матеріалів значення коефіцієнта Пуассона перебуває в межах $0 \div 0,5$. Зокрема, для корка μ він наближається до нуля, для гуми (каучуку) і парафіну — до 0,5, для сталі $\mu \approx 0,3$.

В табл. 12.1 наведені діапазони значень модулів пружності першого роду E та коефіцієнтів Пуассона μ :

Таблиця 12.1.

Матеріал	Модуль Юнга, E , МПа	Коефіцієнт Пуассона, μ
Сталь вуглецева	$(2,1 \div 2,2) \cdot 10^5$	$0,25 \div 0,33$
Сталь легована	$(2,1 \div 2,35) \cdot 10^5$	
Чавун	$(1,15 \div 1,6) \cdot 10^5$	$0,23 \div 0,28$
Мідь	$1,1 \cdot 10^5$	$0,31 \div 0,34$
Алюміній	$0,69 \cdot 10^5$	$0,32 \div 0,36$
Дюралюміній	$0,71 \cdot 10^5$	
Бетон	$(0,146 \div 0,232) \cdot 10^5$	$0,18$
Дерево вздовж волокон	$(0,1 \div 0,12) \cdot 10^5$	
Дерево поперек волокон	$(0,005 \div 0,01) \cdot 10^5$	

12.2. Умови міцності і жорсткості

Основна задача опору матеріалів — забезпечити надійні розміри деталей, що зазнають того чи іншого силового, температурного (теплого) або іншого впливу. Такі розміри можна визначити з *розрахунків на міцність та жорсткість*. Здебільшого основним буває *розрахунок на міцність*. Розглянемо умови міцності та жорсткості для простих розтягання та стискання.

Небезпека початку руйнування характеризується не стільки значеннями внутрішніх зусиль та моментів у перерізі, скільки значеннями найбільших нормальних та дотичних напружень, а також комбінаціями їх, які діють у небезпечних (тобто найбільш напружених) точках перерізу.

Допустимими напруженнями називаються допустимі значення, якими обмежуються найбільші напруження за умови надійної роботи деталі.

При розтяганні та стисканні допустимі напруження позначають відповідно $[\sigma_+]$ та $[\sigma_-]$, при зсуві — $[\tau]$.

Якщо відомі допустимі напруження і є формули, що визначають напруження через зусилля і моменти в перерізі, то можна розрахувати на міцність дану деталь. У разі розтягання або стискання стрижня знаходять небезпечні перерізи, в яких напруження досягають найбільших за модулем значень, і для цих

перерізів записують умову міцності:
$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N_{\max}}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (12.17)$$

При розтяганні в праву частину цієї умови підставляють допустимі напруження на розтяг $[\sigma_+]$, а при стисканні — допустимі напруження на стиск $[\sigma_-]$. Використовуючи умову міцності (12.17), можна розв'язувати три *типи задач*:

- 1) *проектувальний розрахунок* — за відомими навантаженнями для вибраного матеріалу знайти надійні з погляду міцності розміри поперечного перерізу стрижня;
- 2) *перевірний розрахунок* — за відомими розмірами та матеріалом деталі перевірити, чи зможе вона витримати задане навантаження;
- 3) за відомими розмірами деталі, матеріалом і схемою навантажування *визначити допустиме навантаження*.

Для забезпечення нормальної роботи машин та споруд розміри їхніх деталей потрібно вибирати так, щоб задовольнити умову жорсткості, яка при роз-

тяганні (стисканні) має такий вигляд:
$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x) \cdot dx}{E \cdot F(x)} \leq [\Delta l], \quad (12.18)$$

де Δl — зміна довжини деталі; $[\Delta l]$ — допустиме значення цієї зміни.

Розрахунок за умовою жорсткості завжди слід доповнювати розрахунком на міцність. Якщо умова жорсткості виконується, а умова міцності ні, то задачу слід розв'язувати з умови міцності. Аналогічно розраховують на міцність та жорсткість при інших простих деформаціях стрижня.

12.3. Випробування матеріалів на розтягання

Під час проектування й розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів, машин та споруд треба знати властивості матеріалів. Тому матеріали випробовують на розтягання, стискання, зсув, кручення, згинання та твердість. **Одним із основних видів випробувань матеріалів є випробування на розтягання**, оскільки при цьому виявляються найважливіші їхні властивості. З випробуваного матеріалу виготовляють спеціальні зразки. Найчастіше їх роблять циліндричними (рис. 12.5, *а*); з листового металу, як правило, виготовляють плоскі зразки (рис. 12.5, *б*). У циліндричних зразках має витримуватися співвідношення між розрахунковою довжиною зразка l_0 та діаметром d_0 : у довгих зразків $l_0 = 10 \cdot d_0$, у коротких — $l_0 = 5 \cdot d_0$. Ці співвідношення можна вира-

зити в дещо іншій формі. Враховуючи, що $d_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot F_0}{\pi}} \approx 1,13 \cdot \sqrt{F_0}$, (12.19)

де F_0 — площа поперечного перерізу зразка, маємо:

для довгого зразка — $l_0 \approx 11,3 \cdot \sqrt{F_0}$, (12.20)

для короткого — $l_0 \approx 5,65 \cdot \sqrt{F_0}$, (12.21)

Щоб дотриматися подібності при випробуваннях, ці співвідношення мають поширюватися і на плоскі зразки. Як основні використовують зразки з діаметром $d_0 = 10$ мм; при цьому робоча довжина $l_0 = 100$ мм. Допускається застосування зразків інших діаметрів за умови, що їхня робоча довжина $l_0 = 10 \cdot d_0$ або $l_0 = 5 \cdot d_0$. Такі зразки називають **пропорційними**.

Для випробувань на розтягання застосовують **розривні машини**, що дають змогу в процесі випробування визначити зусилля та відповідні до них деформації зразка. За цими даними будують **початкову діаграму розтягання**, в якій по осі ординат відкладають зусилля, а по осі абсцис — відповідні до них подовження. Діаграму розтягання можна зняти й автоматично за допомогою спеціальних діаграмних апаратів. **Характер діаграми розтягання залежить від властивостей випробуваного матеріалу**. Типовий вигляд такої діаграми для маловуглецевої сталі зображено на рис. 12.6.

Виділимо **характерні ділянки й точки діаграми розтягання**, а також відповідні до них **стадії деформування зразка**. Від початку навантажування до певного значення розтягальної сили має місце **прямо пропорційна залежність між подовженням зразка та силою**. Ця залежність на діаграмі визначається прямою *ОА*. На цій стадії розтягання справедливий закон Гука. Позначимо силу, за якої закон пропорційності припиняє свою дію, через $P_{mц}$. Цьому значенню сили на діаграмі відповідає точка *А*. Напруження, спричинене силою $P_{mц}$, називається **границею пропорційності** й обчислюється за формулою:

$$\sigma_{mц} = \frac{P_{mц}}{F_0}. \quad (12.22)$$

Отже, **границею пропорційності називається напруження, після якого порушується закон Гука**.

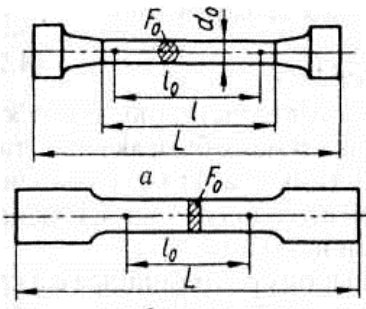


Рис. 12.5.

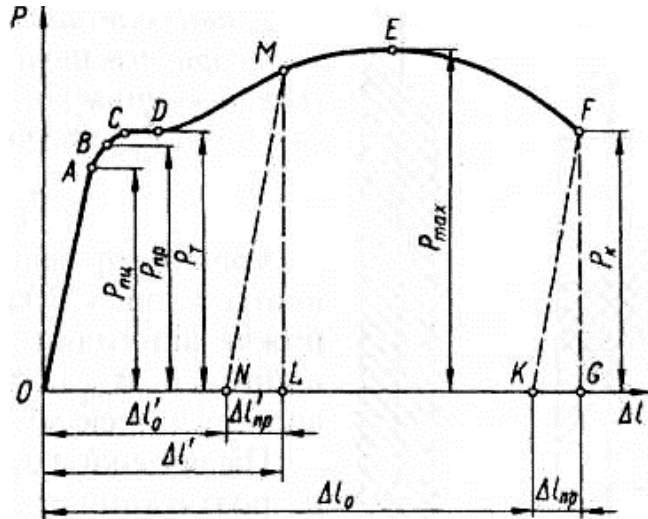


Рис. 12.6.

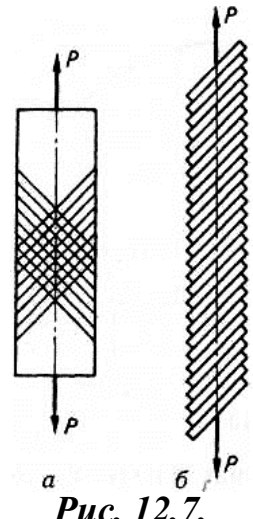


Рис. 12.7.

Деформація називається пружною, якщо вона повністю зникає після розвантаження. Припустимо, що поступово підвищуючи навантаження P , при кожному його значенні здійснюватимемо повне розвантаження зразка. Доки сила P не досягне певного значення, доти спричинені нею деформації зникатимуть при розвантаженні. Процес розвантажування при цьому зобразиться тією самою лінією, що й навантажування.

Позначимо через P_{np} найбільше значення сили, при якому зразок ще не дає при розвантаженні залишкової деформації. Цьому значенню на діаграмі відповідає точка B , а пружній стадії розтягання зразка — ділянка OB . Границею пружності називається найбільше напруження, до якого залишкова деформація при розвантаженні не виявляється. Це напруження спричинюється силою

$$P_{np} \text{ і визначається за формулою: } \sigma_{np} = \frac{P_{np}}{F_0}. \quad (12.23)$$

Границя пружності є характеристикою, не пов'язаною з законом Гука. Точка B може бути як вище, так і нижче від точки A . Ці точки, а отже, і значення напружень σ_{nc} та σ_{np} близькі одна до одної, і, як правило, різницею між ними нехтують. Після точки A при дальшому розтяганні зразка крива розтягання стає криволінійною і плавно піднімається до точки C , де спостерігається перехід до горизонтальної ділянки CD , що називається площадкою текучості. На цій стадії розтягання подовження зразка зростає при сталому значенні розтягальної сили, яку позначають P_T . Такий процес деформації, що його називають текучістю матеріалу, супроводжується залишковим (пластичним) подовженням, яке не зникає після розвантаження.

Границею текучості σ_T називається найменше напруження, при якому деформація зразка відбувається при постійному розтягальному зусиллі. Границя текучості визначається за формулою:

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}. \quad (12.24)$$

Початок пластичної деформації відповідає настанню деякого критичного стану металу, який можна виявити не тільки за залишковими деформаціями, а й за іншими ознаками. При пластичній деформації підвищується температура зразка; у сталі змінюються електропровідність та магнітні властивості. При цьому на полірованій поверхні зразків, особливо плоских, помітне потьмяніння, що є наслідком появи густої сітки ліній. Ці лінії мають назву ліній Чернова (ліній Людерса). Вони нахилені до осі зразка приблизно під кутом 45° (рис. 12.7, а) і становлять мікроскопічні нерівності, що виникають внаслідок зсувів у тих

площинах кристалів, де діють найбільші дотичні напруження. Внаслідок зсувів по похилих площинах зразок зазнає залишкових деформацій. Механізм утворення їх спрощено зображено на рис. 12.7, б.

Після стадії текучості матеріал знову набуває здатності збільшувати опір подальшому деформуванню і сприймає зусилля, що зростає до деякої границі. Цьому відповідає висхідна ділянка **DE** (див. рис. 12.6) кривої розтягання, що зветься **ділянкою зміцнення**. Точка **E** відповідає найбільшому зусиллю P_{\max} , яке може сприймати зразок. Напруження, що відповідає максимальній силі P_{\max} , називається **тимчасовим опором** або **границею міцності** і позначається

$$\sigma_B. \text{ Його визначають за формулою: } \sigma_B = \frac{P_{\max}}{F_0}. \quad (12.25)$$

До цього моменту подовження розподілялися рівномірно по всій довжині l_0 зразка; площі поперечних перерізів розрахункової частини зразка змінювалися неістотно і також рівномірно по всій довжині. Тому для обчислення σ_{nc} , σ_{np} , σ_T та σ_B у розрахункові формули вводилися початкові значення площі F_0 .

Після досягнення зусилля P_{\max} при подальшому розтяганні зразка деформація відбувається в основному на невеликій довжині зразка. Це призводить до утворення місцевого звуження у вигляді шийки і до зменшення сили **P**, незважаючи на те що напруження у перерізі шийки неперервно зростає. Зменшення розтягальної сили **P** спостерігається лише при випробуванні зразка у машині, яка обмежує швидкість зростання деформації. При навантажуванні через підвищення вантажів руйнування відбудеться при постійному навантаженні, проте із всезростаючою швидкістю деформації. Позначивши через $P_{кр}$ **розтягальну**

силу в момент розриву, матимемо:
$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F_0}. \quad (12.26)$$

Визначене таким чином **напруження при розриві зразка** надто умовне і не може бути використане як характеристика механічних властивостей сталі. Умовність полягає в тому, що його здобуто діленням сили в момент розриву на початкову площу поперечного перерізу зразка, а не на дійсну його площу при розриві, яка значно менша, ніж початкова, внаслідок утворення шийки.

Основними характеристиками пружності та міцності матеріалів, що використовуються у практичних розрахунках, є **границя пружності** σ_{np} , **границя текучості** σ_T та **тимчасовий опір (границя міцності)** σ_B . Для маловуглецевої сталі, що має площадку текучості, наприклад для Ст2, ці характеристики такі: $\sigma_{np} = 200 \text{ МПа}$, $\sigma_T = 220 \div 260 \text{ МПа}$, $\sigma_B = 340 \div 420 \text{ МПа}$.

Для металів, що не мають площадки текучості, границю текучості визначають умовно як напруження, при якому залишкова деформація є величиною, регламентованою стандартами або технічними умовами. Згідно з ГОСТ 1497–84, залишкова деформація становить 0,2 % від вимірюваної довжини зразка. **Умовні границі текучості** позначають нижнім індексом відповідно до заданого значення деформації, наприклад $\sigma_{0,2}$. Ураховуючи, що практично важко встановити початок відхилення від закону пропорційності й початок появи перших залишкових деформацій, вводять також поняття умовних границі пропорційності та границі пружності. **Умовною границею пропорційності** називають найменше напруження, при якому відхилення від лінійної залежності між напруженням та деформацією досягає деякого значення, що встановлюється технічними умовами (наприклад, 0,002 % від вимірюваної довжини зразка).

Умовною границею пружності називають найменше напруження, при якому залишкова деформація досягає заданого значення (як правило, $0,001 \div \div 0,05$ % від вимірюваної довжини зразка). Її позначають нижнім індексом відповідно до заданого значення залишкової деформації ($\sigma_{0,001}$ чи $\sigma_{0,05}$).

12.4. Допустимі напруження

Деталі машин та інших конструкцій мають задовольняти умови міцності та жорсткості. Розміри деталей потрібно добирати такими, щоб під дією прикладених навантажень вони не руйнувалися й не зазнавали деформацій, які перевищують допустимі. У більшості машинобудівних деталей залишкові деформації звичайно не допускаються. Помітні залишкові деформації виникають у пластичних матеріалах, якщо напруження досягають границі текучості. Руйнування настає тоді, коли напруження досягають границі тимчасового опору; при цьому деформації крихкого зламу можуть бути невеликими.

Для деталей, виготовлених з пластичного матеріалу, небезпечними напруженнями можна вважати границю текучості, а для деталей з крихкого матеріалу — границю міцності (тимчасовий опір). Ці напруження не можуть вважатися допустимими. Слід зменшити їх настільки, щоб в умовах експлуатації діючі напруження завжди були меншими за границю пружності.

Отже, **допустимі напруження** можна визначити за формулою:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n} \quad (12.27)$$

де σ_n — **небезпечне напруження** (σ_T або σ_B); n — **коефіцієнт запасу міцності**, що показує, у скільки разів допустиме напруження менше, ніж небезпечне. *Вибір коефіцієнта запасу міцності залежить від стану матеріалу (крихкий або пластичний), характеру прикладання навантаження (статичне, динамічне чи повторно-змінне) й деяких загальних факторів*, що мають місце майже в усіх випадках. *До таких факторів належать:* 1) неоднорідність матеріалу, а отже, різні його механічні властивості у малих зразках та в деталях; 2) неточність задавання зовнішніх навантажень; 3) наближеність розрахункових схем та певна наближеність розрахункових формул. Зазначені фактори й враховуються коефіцієнтом запасу міцності n , який іноді називають основним.

Запас міцності залежить від того, яке напруження вважати небезпечним. **Для пластичних матеріалів у разі статичного навантаження небезпечним напруженням, є границя текучості**, тобто $\sigma_n = \sigma_T$, а $n = n_T$.

Тоді:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad (12.28)$$

На підставі даних тривалої практики конструювання, розрахунку й експлуатації машин та споруд **запас міцності n_T для сталей при статичному навантаженні вибирають таким, що дорівнює 1,4 ÷ 4,6**.

Очевидно, менші значення n_T слід брати тоді, коли матеріал більш однорідний, краще вивчено його властивості, повніше враховано навантаження, точніші метод розрахунку й розрахункові схеми.

Для крихких матеріалів при статичних навантаженнях небезпечним напруженням є тимчасовий опір (границя міцності), і тоді:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sigma_B}{n_B} \quad (12.29)$$

Вибирають запас міцності $n_B = 2,5 \div 3,0$.

Допустимі напруження $[\sigma]$, що знаходять за формулами (12.28) та (12.29), зазвичай називають **основними допустимими напруженнями**. Оскільки тимчасовий опір визначити простіше, ніж границю текучості, то іноді й для пластичних матеріалів при визначенні допустимих напружень виходять з тимчасового опору, користуючись формулою:
$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}. \quad (12.30)$$

У цьому разі, враховуючи, що тимчасовий опір перевищує границю текучості на 50÷70 %, **запас міцності n_B для пластичних матеріалів вибирають 2,4÷2,6**. Це значення для пластичних матеріалів беруть дещо меншим, ніж для крихких, оскільки пластичні матеріали, як правило, більш однорідні за своїми фізичними та механічними властивостями.

Іноді **допустимі напруження на розтяг** позначають як $[\sigma_+]$, а на **стиск** — як $[\sigma_-]$. **Крихкі матеріали краще чинять опір стисканню, ніж розтягненню**, і для них $[\sigma_-] > [\sigma_+]$. Для сталей та більшості інших пластичних матеріалів можна взяти $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ та позначити допустимі напруження в цьому разі як $[\sigma]$ без індексу. Вибір допустимих напружень дуже важливий, оскільки від правильного визначення їхніх значень залежать міцність та безпечність проектованої конструкції, а також **економічний аспект розрахунку** — кількість матеріалу, що витрачається. Тому встановленням допустимих напружень для основних марок матеріалів, що використовуються у машинобудуванні та будівництві, займаються державні нормувальні установи. Вони видають відповідні норми, якими й слід керуватись у звичайних умовах проектування. В міру поліпшення якості матеріалів і уточнення методів розрахунку допустимі напруження підвищують. Тоді, коли немає даних про допустимі напруження для того чи іншого матеріалу, їх треба визначати на підставі вище викладених міркувань та рекомендацій.

У пластичних матеріалах при статичному навантаженні концентрація напружень не дуже впливає на міцність, тому діючим робочим напруженням можна вважати середнє (номінальне) напруження в небезпечному перерізі та записати **умову міцності** так:
$$\sigma \leq [\sigma]. \quad (12.31)$$

У випадку однорідних крихких матеріалів (наприклад, загартованих сталей) **при статичному навантаженні треба враховувати концентрацію напружень та розраховувати на міцність за найбільшим місцевим напруженням**. У цьому разі **умова міцності** запишеться так:
$$\sigma_{\max} = \alpha \cdot \sigma_n \leq [\sigma]. \quad (12.32)$$

12.5. Загальна методика розв'язання задач при деформуванні розтягом і стиском

12.5.1. Розрахунок при дії зосереджених сил

Приклад 12.1

Визначити діаметр стрижня однакового поперечного перерізу завдовжки $l = 0,6 \text{ м}$, до якого прикладені зосереджені навантаження $P_1 = P = 12 \text{ кН}$, $P_2 = 3 \cdot P = 36 \text{ кН}$, $P_3 = 3 \cdot P = 36 \text{ кН}$, $P_4 = P = 12 \text{ кН}$ (рис. 12.8). Матеріал стрижня — сталь Ст3, модуль пружності якої $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Побудувати епюру переміщень поперечних перерізів стрижня та визначити зміну його початкової довжини. Для сталі марки Ст3 допустимі напруження $[\sigma]$ на розтяг та стиск однакові. При статичному навантаженні вони дорівнюють **160 МПа**.

Дано:

$$l = 0,6 \text{ м},$$

$$P_1 = P = 12 \text{ кН}, P_2 = 3 \cdot P = 36 \text{ кН},$$

$$P_3 = 3 \cdot P = 36 \text{ кН}, P_4 = P = 12 \text{ кН},$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

$$N(x), F, d, \lambda(x), \lambda_D \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Перш за все будуюмо епюру поздовжніх зусиль N . Для побудови епюри осевого зусилля, стрижень поділимо на три ділянки — I (AB), II (BC) та III (CD). У довільному перерізі будь-якої ділянки на відстані x від початку координат знаходимо осеве зусилля як суму

проекцій усіх зовнішніх сил ліворуч чи праворуч від перерізу, що розглядається:

I ділянка AB $\left(0 \leq x \leq \frac{l}{3}\right)$:

ліворуч — $N_1(x) = P_1 = P = 12 \text{ кН}$;

праворуч —

$$N_1(x) = P_2 - P_3 + P_4 = 36 - 36 + 12 = 12 \text{ (кН)};$$

II ділянка BC $\left(\frac{l}{3} < x < \frac{2 \cdot l}{3}\right)$: ліворуч —

$$N_2(x) = P_1 - P_2 = 12 - 36 = -24 \text{ (кН)};$$

праворуч —

$$N_2(x) = -P_3 + P_4 = -36 + 12 = -24 \text{ (кН)};$$

III ділянка CD $\left(\frac{2 \cdot l}{3} \leq x \leq l\right)$: праворуч —

$$N_3(x) = P_4 = 12 \text{ кН}; \text{ ліворуч — } N_3(x) = P_1 - P_2 + P_3 = 12 - 36 + 36 = 12 \text{ (кН)}.$$

Оскільки ці величини не залежать від абсциси перерізу, то в усіх перерізах ділянки I осеве зусилля буде $N_1 = P = 12 \text{ кН}$ (розтягальне зусилля), для будь-якого перерізу ділянки II — $N_2 = -2 \cdot P = -24 \text{ кН}$ (зусилля стискання), а для будь-якого перерізу ділянки III — $N_3 = P = 12 \text{ кН}$ (розтягальне зусилля). Відкладаючи здобуті ординати від осі епюри, будуюмо епюру $N(x)$ поздовжніх зусиль (рис. 12.8). **Оскільки стрижень, який проектується, повинен мати однаковий поперечний переріз, то потрібно його добирати за найбільшим абсолютним значенням зусилля, що діє в середньому відрізку.**

Напруження в поперечних перерізах цього відрізка $\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{2 \cdot P}{F}$.

Умова міцності має вигляд $\sigma_2 \leq [\sigma]$, або $\frac{2 \cdot P}{F} \leq [\sigma]$, звідки $F \geq \frac{2 \cdot P}{[\sigma]}$.

Підставивши числові значення, дістанемо площу поперечного перерізу стрижня $F \geq \frac{2 \cdot P}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 12000 \text{ Н}}{160000000 \text{ Па}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,5 \text{ см}^2$, та його діаметр

$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot F} \approx \sqrt{\frac{4}{3,14} \cdot 1,5 \text{ см}^2} \approx 1,38 \text{ см}$, оскільки $F = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$. **Діаметр треба замінити на найбільший найближчий згідно з Державним стандартом.** Слід взяти $d = 14 \text{ мм}$ ($F = 1,54 \text{ см}^2$).

Розрахунок на міцність при стисканні є достатнім тільки для коротких стрижнів, зокрема для сталевих круглих, коли $(l/d) < 20$. При стискан-

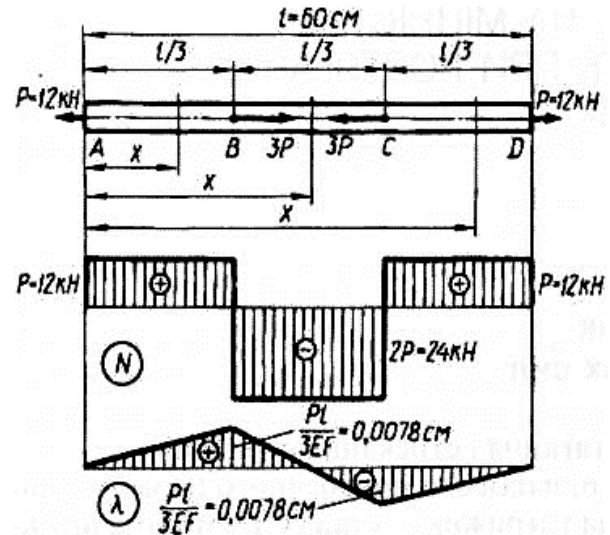


Рис. 12.8.

ні довгих стрижнів може втратитися стійкість. У розглянутому прикладі зазначена умова для стиснутої частини стрижня виконується.

Визначимо переміщення перерізів стрижня. Виберемо, за початок відліку лівий кінець стрижня (переріз A), умовно вважаючи, що він нерухомий. **Переміщення будь-якого перерізу відносно початку відліку дорівнює зміні довжини відрізка стрижня між нерухомим та розглядуваним перерізами.**

На **першій ділянці AB** $\left(0 \leq x \leq \frac{l}{3}\right)$ **переміщення перерізу**, який розміщений на відстані x від лівого кінця стрижня, згідно виразу (12.7) для **відносного подовження** $\varepsilon_1 = \frac{N_1}{E \cdot F} = \frac{P}{E \cdot F}$, буде $\lambda_1(x) = \varepsilon_1 \cdot x = \frac{P \cdot x}{F \cdot E}$ (**абсолютне подовження**).

При $x = 0$ — $\lambda_A = 0$.

$$\text{При } x = \frac{l}{3} \text{ — } \lambda_B = \frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} = \frac{12000 \text{ Н} \cdot \frac{0,6 \text{ м}}{3}}{1,54 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}} \approx 7,8 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,0078 \text{ см}.$$

На **другій ділянці BC** $\left(\frac{l}{3} < x \leq \frac{2 \cdot l}{3}\right)$ **переміщення перерізу**, який розміщений на відстані x від лівого кінця стрижня, буде

$$\lambda_2(x) = \lambda_B + \varepsilon_2 \cdot \left(x - \frac{l}{3}\right) = \frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} + \frac{N_2}{E \cdot F} \cdot \left(x - \frac{l}{3}\right) = \frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} - \frac{2 \cdot P}{E \cdot F} \cdot \left(x - \frac{l}{3}\right).$$

$$\text{При } x = \frac{l}{3} \text{ — } \lambda_B = \frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} = 0,0078 \text{ см}.$$

$$\text{При } x = \frac{2 \cdot l}{3} \text{ — } \lambda_C = \frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} - \frac{2 \cdot P}{E \cdot F} \cdot \left(\frac{2 \cdot l}{3} - \frac{l}{3}\right) = -\frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} = -0,0078 \text{ см}.$$

На **третьій ділянці CD** $\left(\frac{2 \cdot l}{3} < x \leq l\right)$ **переміщення перерізу**, який розміщений на відстані x від лівого кінця стрижня, буде

$$\lambda_3(x) = \lambda_C + \varepsilon_3 \cdot \left(x - \frac{2 \cdot l}{3}\right) = -\frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} + \frac{N_3}{E \cdot F} \cdot \left(x - \frac{2 \cdot l}{3}\right) = -\frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} + \frac{P}{E \cdot F} \cdot \left(x - \frac{2 \cdot l}{3}\right).$$

$$\text{При } x = \frac{2 \cdot l}{3} \text{ — } \lambda_C = -\frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} = -0,0078 \text{ см}.$$

$$\text{При } x = l \text{ — } \lambda_D = -\frac{P \cdot \frac{l}{3}}{F \cdot E} + \frac{P}{E \cdot F} \cdot \left(l - \frac{2 \cdot l}{3}\right) = 0.$$

Епюру поздовжніх переміщень наведено на рис. 12.8. У цьому прикладі довжина всього стрижня не змінюється, бо переміщення правого кінця відносно лівого дорівнює нулю.

Приклад 12.2

Побудувати епюри поздовжніх зусиль, нормальних напружень, відносних деформацій та переміщень для східчастого стрижня довжиною $AD = 4 \cdot l$, що складається з трьох частин з поперечними перерізами $F_1 = 1,5 \cdot F$, $F_2 = 2 \cdot F$ та $F_3 = F$ (рис. 12.9). До стрижня прикладені навантаження $P_1 = 4 \cdot P$, $P_2 = 3 \cdot P$ та $P_3 = P$. $AB = l$, $BC = 2 \cdot l$, $CD = l$. Модуль Юнга E .

Дано:

$$AB = l, BC = 2 \cdot l, CD = l, E.$$

$$F_1 = 1,5 \cdot F, F_2 = 2 \cdot F, F_3 = F,$$

$$P_1 = 4 \cdot P, P_2 = 3 \cdot P, P_3 = P$$

$$N(x), \sigma(x), \varepsilon(x), \lambda(x), \lambda_D - ?$$

Розв'язання:

Перш за все будемо епюру поздовжніх зусиль $N(x)$.

Для побудови епюри осевого зусилля, стрижень поділимо на три ділянки — *I* (*AB*), *II* (*BC*) та *III* (*CD*).

Прийmemo за початок координат переріз *A* нижньої основи (умовно вважаючи, що він нерухомий) а вісь *Ax* направимо вертикально вгору (рис. 12.9). У довільному перерізі будь-якої ділянки на відстані x від початку координат знаходимо осеве зусилля як суму проєкцій усіх зовнішніх сил праворуч (вгору) від перерізу, що розглядається:

I ділянка AB ($0 \leq x \leq l$): $N_1(x) = P_1 - P_2 + P_3 = 4 \cdot P - 3 \cdot P + P = 2 \cdot P$;

II ділянка BC ($l < x \leq 3 \cdot l$): $N_2(x) = -P_2 + P_3 = -3 \cdot P + P = -2 \cdot P$;

III ділянка CD ($3 \cdot l < x \leq 4 \cdot l$): $N_3(x) = P_3 = P$.

Оскільки ці величини не залежать від абсциси перерізу, то в усіх перерізах ділянки *I* осеве зусилля буде $N_1 = 2 \cdot P$ (**розтягальне зусилля**), для будь-якого перерізу ділянки *II* — $N_2 = -2 \cdot P$ (**зусилля стискування**), а для будь-якого перерізу ділянки *III* — $N_3 = P$ (**розтягальне зусилля**). Відкладаючи здобуті ординати від осі епюри, будемо епюру $N(x)$ поздовжніх зусиль (рис. 12.9).

На **першій ділянці AB** нормальне напруження, відносна деформація та переміщення перерізу, який розміщений на відстані x від закріпленого кінця *A* стрижня, згідно виразів (12.6) — (12.8), будуть:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2 \cdot P}{1,5 \cdot F} = \frac{4 \cdot P}{3 \cdot F}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{N_1}{E \cdot F_1} = \frac{4 \cdot P}{3 \cdot E \cdot F}; \quad \lambda_1(x) = \varepsilon_1 \cdot x = \frac{4 \cdot P \cdot x}{3 \cdot E \cdot F}$$

(абсолютне подовження). Отже, переміщення $\lambda_1(x)$ змінюються за лінійним законом. У початковій і кінцевій точках відрізка вони мають такі значення:

при $x = 0$ — $\lambda_A = 0$; при $x = l$ — $\lambda_B = \frac{4 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F}$.

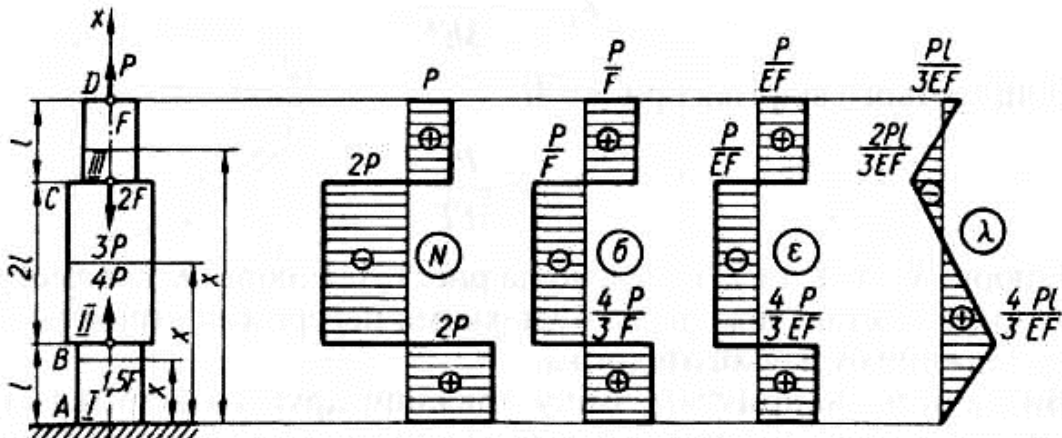


Рис. 12.9.

На *другій ділянці BC* ($l < x \leq 3 \cdot l$) напруження, відносна деформація та переміщення перерізу, який розміщений на відстані x від закріпленого кінця A стрижня будуть: $\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-2 \cdot P}{2 \cdot F} = -\frac{P}{F}$, $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{N_2}{E \cdot F_2} = -\frac{P}{E \cdot F}$;

$$\lambda_2(x) = \lambda_B + \varepsilon_2 \cdot (x - l) = \frac{4 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} - \frac{P \cdot (x - l)}{E \cdot F}.$$

На початку другої ділянки BC при $x = l$ — $\lambda_B = \frac{4 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F}$.

На кінці другої ділянки BC при $x = 3 \cdot l$ абсолютне подовження буде:

$$\lambda_C = \frac{4 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} - \frac{P \cdot (3 \cdot l - l)}{E \cdot F} = \frac{4 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} - \frac{2 \cdot P \cdot l}{E \cdot F} = \frac{4 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} - \frac{6 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} = -\frac{2 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F}$$

Знак «мінус» вказує на те, що розглядуваний переріз переміщується в напрямі до перерізу, який вибрано за початок відліку.

На *третьій ділянці CD* ($3 \cdot l < x \leq 4 \cdot l$) напруження, відносна деформація та переміщення перерізу, який розміщений на відстані x від закріпленого кінця A стрижня будуть: $\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{P}{F}$, $\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} = \frac{N_3}{E \cdot F_3} = \frac{P}{E \cdot F}$;

$$\lambda_3(x) = \lambda_C + \varepsilon_3 \cdot (x - 3 \cdot l) = -\frac{2 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} + \frac{P \cdot (x - 3 \cdot l)}{E \cdot F}.$$

На початку третьої ділянки CD при $x = 3 \cdot l$ — $\lambda_C = -\frac{2 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F}$.

На кінці третьої ділянки CD при $x = 4 \cdot l$ абсолютне подовження буде:

$$\lambda_D = -\frac{2 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} + \frac{P \cdot (4 \cdot l - 3 \cdot l)}{E \cdot F} = -\frac{2 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} + \frac{P \cdot l}{E \cdot F} = -\frac{2 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} + \frac{3 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} = \frac{P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F}$$

Епюри $N(x)$, $\sigma(x)$, $\varepsilon(x)$ та $\lambda(x)$ наведено на рис. 12.9. *Епюра $\lambda(x)$ дає змогу визначити зміну відстані між двома будь-якими перерізами стрижня, а отже, і зміну довжини будь-якого відрізка.*

Визначимо, наприклад, зміну довжини другого відрізка BC стрижня. Для цього від переміщення перерізу на кінці відрізка (переріз C) потрібно відняти переміщення перерізу на початку відрізка (переріз B). Отже, маємо

$$\Delta l_{BC} = \lambda_C - \lambda_B = -\frac{2 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} - \frac{4 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} = -\frac{6 \cdot P \cdot l}{3 \cdot E \cdot F} = -\frac{2 \cdot P \cdot l}{E \cdot F}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що довжина цього відрізка зменшилась.

Приклад 12.3

Визначити розміри поперечних перерізів стрижнів AB та BC кронштейна (рис. 12.10, *a*) для кріплення блока, за допомогою якого підніматимуться вантажі вагою $Q = 20 \text{ кН}$, а також поперечний переріз підвіски BD блока. Стрижень AB і підвіска BD (у верхній частині) мають круглий поперечний переріз. Матеріал — сталь Ст3. Стрижень BC виготовлятиметься із сосни, він матиме квадратний поперечний переріз. Визначити також вертикальне переміщення вузла B кронштейна. Для сталі Ст3 допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+] = 160 \text{ МПа}$, для сосни допустиме напруження на стиск $[\sigma_-] = 8 \text{ МПа}$. Модуль пружності для сталі $E_C = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, для сосни $E_D = 10^4 \text{ МПа}$.

Дано:

$$AB = l_2 = 1,5 \text{ м}, \quad \angle CAB = 90^\circ, \\ \angle ACB = \alpha = 45^\circ, \quad Q = 20 \text{ кН}, \\ [\sigma_+] = 160 \text{ МПа}, \quad [\sigma_-] = 8 \text{ МПа}, \\ E_C = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad E_D = 10^4 \text{ МПа}$$

d_1, d_2, a, δ_y — ?

Розв'язання:

Конструкція кронштейна дає змогу наближено вважати кріплення стрижнів до стіни та з'єднання їх між собою шарнірними. Розрахункову схему кронштейна наведено на рис. 12.10, б. Насамперед визначимо зусилля у підвісці блока і зусилля, що дорівнює йому і діє на вузол **B**. Оскільки при підніманні вантажу вагою **Q** до другої вітки троса, перекинутого через блок, треба прикласти силу, яка дорівнює вазі **Q** вантажу, що піднімається (якщо знехтувати тертям), то у перерізі підвіски буде діяти зусилля $N_1 = 2 \cdot Q = 40 \text{ кН}$. Отже, до вузла **B** кронштейна прикладено силу $P = N_1 = 40 \text{ кН}$.

Нормальне напруження в підвісці **BD** визначається за формулою $\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1}$.

Умова міцності $\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} \leq [\sigma_+]$, звідки потрібна площа поперечного перерізу підвіски **BD**:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma_+]} = \frac{40000 \text{ Н}}{160000000 \text{ Па}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,5 \text{ см}^2. \text{ Визначаємо діаметр підвіски:}$$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{3,14}} \approx 1,78 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 17,8 \text{ мм}.$$

Діаметр треба замінити на найбільший найближчий з Державним стандартом. Слід взяти $d_1 = 18 \text{ мм}$ ($F_1 = 2,54 \text{ см}^2$).

Оскільки ми припустили, що стрижні прикріплені до стіни та з'єднані між собою шарнірами, а навантаження прикладене до вузлів (шарнірів), то стрижні зазнаватимуть поздовжніх (розтягальних або стискальних) зусиль. Для визначення їх розглянемо рівновагу вузла **B** (рис. 12.10, в), на який діє вертикальна сила **P** і дві невідомі сили N_2 та N_3 реакцій стрижнів **AB** і **CB** на вузол. Визначаючи невідомі зусилля в стрижнях, як правило, вважають їх розтягнутими і відповідно до цього напрямляють вектори сил від вузла. Якщо у розв'язку сила має знак «плюс», то припущення про напрям сили підтверджується. Знак «мінус» покаже, що напрям сили потрібно змінити на протилежний, і відповідний стрижень стиснутий. Припускаючи, що обидва стрижні розтягнуті, зусилля N_2 та N_3 напрямляємо, як показано на рис. 12.10, в.

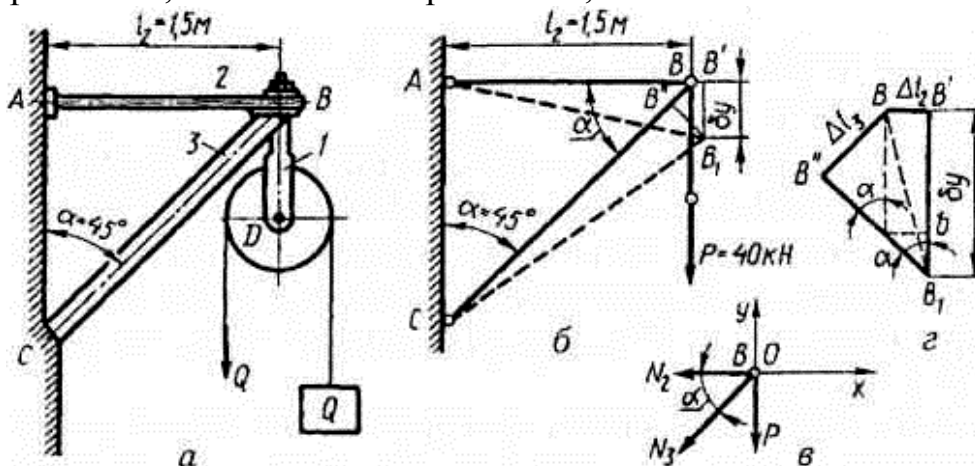


Рис. 12.10.

Для рівноваги вузла **B** у площині достатньо, щоб сума проєкцій всіх сил, прикладених до вузла, на координатні осі **Ox** та **Oy** дорівнювала нулю. Вибраний напрям координатних осей зображено на рис. 12.10, в. Тоді

$$1. \text{ Вісь } Ox: N_{2x} + N_{3x} + P_x = -N_2 - N_3 \cdot \cos \alpha + 0 = 0;$$

$$2. \text{ Вісь } Oy: N_{2y} + N_{3y} + P_y = 0 - N_3 \cdot \sin \alpha - P = 0.$$

$$\text{Звідси знаходимо: } N_3 = -\frac{P}{\sin \alpha} = -\frac{P}{\sin 45^\circ} = -\frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -56,6 \text{ (кН)};$$

$$N_2 = -N_3 \cdot \cos \alpha = \frac{P}{\sin 45^\circ} \cdot \cos 45^\circ = P \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = P = 40 \text{ (кН)},$$

тобто стрижень **AB** розтягнутий, а стрижень **BC** стиснутий.

Із умови міцності стрижня **AB** $\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} \leq [\sigma_+]$, визначаємо потрібну площу

$$\text{його поперечного перерізу: } F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma_+]} = \frac{40000 \text{ Н}}{160000000 \text{ Па}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,5 \text{ см}^2.$$

У цьому разі вона виявилася такою, що дорівнює площі поперечного перерізу підвіски. Отже, діаметр стрижня **AB** має дорівнювати діаметру підвіски, тобто $d_2 = 18 \text{ мм}$ ($F_2 = 2,54 \text{ см}^2$).

Із умови міцності дерев'яного стрижня **BC** $\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} \leq [\sigma_-]$, визначаємо потрібну площу його поперечного перерізу:

$$F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma_-]} = \frac{56600 \text{ Н}}{8000000 \text{ Па}} \approx 70,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 70,8 \text{ см}^2.$$

Тоді сторона квадрата поперечного перерізу дерев'яного бруса буде:

$$a \geq \sqrt{F_3} = \sqrt{70,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 8,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 8,4 \text{ см}.$$

Округлюючи до найближчого цілого числа, вибираємо $a = 90 \text{ мм}$ ($F_3 = 81 \text{ см}^2$).

Визначимо вертикальне переміщення шарніра **B** кронштейна. Згідно (12.8) стрижень **AB** подовжиться на величину:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_C \cdot F_2} = \frac{40000 \text{ Н} \cdot 1,5 \text{ м}}{2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \cdot 2,54 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,118 \text{ см}.$$

Стрижень **BC** укоротиться на величину:

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_D \cdot F_3} = \frac{N_3 \cdot \frac{l_2}{\sin 45^\circ}}{E_D \cdot F_3} = \frac{56600 \text{ Н} \cdot \frac{1,5 \text{ м} \cdot 2}{\sqrt{2}}}{10^{10} \text{ Па} \cdot 81 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 1,48 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,148 \text{ см}.$$

Ураховуючи, що деформації малі, переміщення вузла **B** можна визначити так. Припустимо, що стрижні в шарнірі **B** роз'єднані. Від точки **B** праворуч, у напрямі стрижня **AB**, відкладемо його подовження **BB'**, а у напрямі **BC** — укорочення **BB''** стрижня **BC** (рис. 12.10, б, з). На рис. 12.10, з це наведено в масштабі, який значно більший, ніж масштаб довжини стрижнів на схемі конструкції. Положення шарніра **B** після деформації збігається з точкою перетину дуг, описаних з точок **A** і **C** радіусами, які дорівнюють новим довжинам **AB'** та **CB''** стрижнів. Унаслідок малості деформацій стрижнів дуги можна замінити перпендикулярами, які проведено з точок **B'** і **B''** до напрямів **AB** та **BC**. Точка **B₁** перетину перпендикулярів визначить нове положення вузла **B** після деформації

кронштейна. Відрізок BB_1 зобразить повне переміщення вузла B , а відрізок $B'B_1 = \delta_y$ — вертикальну складову цього переміщення.

Із наведеної побудови легко встановити аналітичну залежність між переміщеннями точки і подовженнями стрижнів. Вертикальне переміщення вузла

(рис. 12.10, з): $\delta_y = \overline{B'B_1} = \overline{B_1b} + \overline{bB'} = \frac{\Delta l_2}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\Delta l_3}{\sin \alpha}$.

Підставляючи числові значення, матимемо

$$\delta_y = \frac{\Delta l_2}{\operatorname{tg} 45^\circ} + \frac{\Delta l_3}{\sin 45^\circ} \approx \frac{0,118}{1} + \frac{0,148}{0,707} \approx 0,33 \text{ (см)}.$$

Приклад 12.4

Визначити найбільшу вагу вантажу Q , який можна безпечно підвісити до вузла B стрижневої системи (рис. 12.11). Матеріал стрижнів — Ст2, допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+] = 140 \text{ МПа}$. Діаметр стрижнів $d = 2 \text{ см}$.

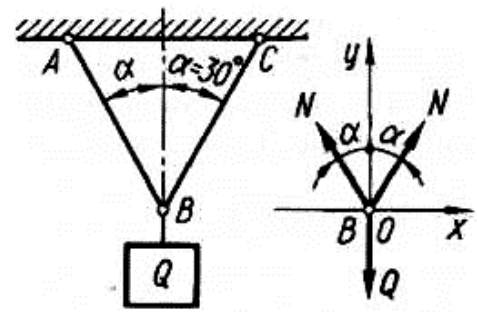


Рис. 12.11.

Дано:

$$\alpha = 30^\circ, d = 0,02 \text{ м}, [\sigma_+] = 140 \text{ МПа}$$

Q — ?

Розв'язання:

Найбільше безпечне нормальне зусилля, яке можна допустити в кожному стрижні підвіски,

$$N = [\sigma_+] \cdot F = [\sigma_+] \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \approx 140000000 \text{ Па} \cdot 3,14 \cdot \frac{(0,02 \text{ м})^2}{4} \approx 44 \text{ кН}.$$

Найбільшу допустиму вагу вантажу Q знаходимо з умови рівноваги вузла

B . Прирівнюючи до нуля суму проекцій на вертикальну вісь Oy усіх сил, що діють на вузол B , з урахуванням симетрії системи маємо: Вісь Oy : $N_{AB_y} + N_{CB_y} + Q_y = 2 \cdot N \cdot \cos \alpha - Q = 0$, звідки

$$Q = 2 \cdot N \cdot \cos \alpha = 2 \cdot N \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 44 \cdot 0,866 = 76,2 \text{ (кН)}.$$

Приклад 12.5

Визначити площу поперечного перерізу дерев'яної колони довжиною $l = 2 \text{ м}$ на яку діє навантаження $P = 30 \text{ кН}$ за умови, що вертикальне переміщення верхнього кінця колони не повинно перевищувати $[\Delta l] = 0,2 \text{ см}$ (рис. 12.12). Матеріал колони — сосна,

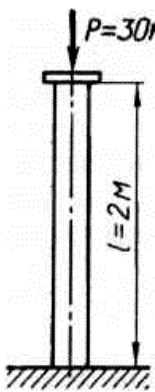


Рис. 12.12. модуль пружності якої $E = 10^4 \text{ МПа}$.

Дано:

$$l = 2 \text{ м}, P = 30 \text{ кН},$$

$$[\Delta l] = 0,2 \text{ см}, E = 10^4 \text{ МПа}$$

F — ?

Розв'язання:

Для визначення площі колони запишемо

умову жорсткості: $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F} \leq [\Delta l]$.

Оскільки колонна являє собою прямолінійний брус постійного перерізу, то, без врахування сили тяжіння, що діє на саму колону, для будь-якого перерізу осьове зусилля буде $N = -P$. Звідси $F \geq \frac{N \cdot l}{E \cdot [\Delta l]}$. Підставляючи числові значення, матимемо

$$F = \frac{30000 \text{ Н} \cdot 2 \text{ м}}{10^{10} \text{ Па} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 30 \text{ см}^2.$$

Перевіримо, чи буде виконуватися умова міцності при цій площі поперечного перерізу. Допустиме напруження на стиск для сосни $[\sigma_-] = 12 \text{ МПа}$. Напруження, спричинене зусиллям N буде:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{30000 \text{ Н}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 10 \text{ МПа} < [\sigma_-] = 12 \text{ МПа}.$$

Отже, умова міцності виконується.

12.5.2. Урахування сили тяжіння і сил інерції

Сила тяжіння, що діє на матеріал елементів конструкцій, а також сили інерції рухомих частин машин і механізмів є зовнішніми навантаженнями, розподіленими по об'єму. Розглянемо деякі задачі визначення напружень і переміщень при дії таких навантажень.

Урахування сили тяжіння

В машинобудуванні, як правило, вплив сили тяжіння не враховують, бо деталі машин мають порівняно невеликі розміри, а отже, і вплив сили тяжіння на них невеликий. Проте в деяких інженерних конструкціях сили тяжіння — це одне з основних навантажень. При розрахунку канатів шахтних підйомників, штанг бурильних пристроїв, стояків мостів, стін будівель, гребель вплив сили тяжіння слід враховувати.

Припустимо, що прямий стрижень однакового поперечного перерізу великої довжини l закріплено верхнім кінцем і навантажено на вільному кінці силою P (рис. 12.13, а). Визначимо, як змінюються поздовжні зусилля та напруження в поперечних перерізах стрижня, а також осьові переміщення перерізів по довжині стрижня, враховуючи вплив сили тяжіння.

У довільному поперечному перерізі стрижня, розміщеному на відстані x від вільного кінця, поздовжня сила: $N(x) = P + \gamma \cdot F \cdot x$, (12.33) де γ — питома сила тяжіння, що діє на матеріал стрижня.

Максимальне значення сила має у верхньому закріпленому перерізі:

$$N_{\max} = P + \gamma \cdot F \cdot l. \quad (12.34)$$

Епюри поздовжніх зусиль зображено на рис. 12.13, б. Нормальне напруження в розглядуваному перерізі:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{F} = \frac{P + \gamma \cdot F \cdot x}{F} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot l. \quad (12.35)$$

Максимального значення нормальне напруження набуває у верхньому закріпленому перерізі, який у цьому разі буде небезпечним:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot l. \quad (12.36)$$

У цій формулі перший доданок — це напруження від сили P , а другий — від сили тяжіння. Епюру нормальних напружень наведено на рис. 12.13, в.

Умова міцності для небезпечного перерізу має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot l \leq [\sigma]. \quad (12.37)$$

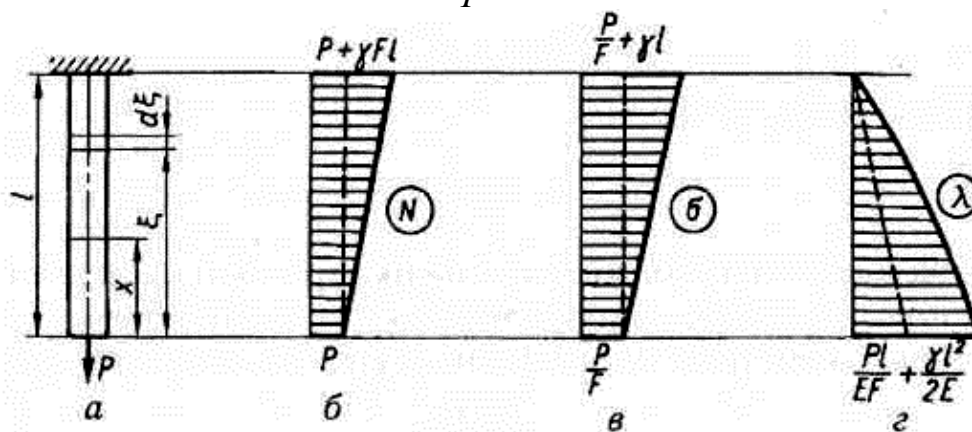


Рис. 12.13.

Із виразу (12.37) дістанемо формулу для визначення площі поперечного перерізу стрижня з урахуванням впливу сили тяжіння: $F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma \cdot l}$. (12.38)

Якщо навантаження на кінці стрижня немає, тобто $P=0$, то напруження в небезпечному перерізі, спричинене тільки силою тяжіння, згідно з виразом (12.36), буде:

$$\sigma_{\max} = \gamma \cdot l. \quad (12.39)$$

При цьому, умова міцності набуває вигляду: $\gamma \cdot l \leq [\sigma]$. (12.40)

Звідси можна визначити довжину стрижня, при якій напруження тільки від дії сили тяжіння досягає допустимого і стрижень не може нести корисне навантаження. Цю граничну допустиму довжину знайдемо з умови (12.40):

$$l_{\text{сп}} = \frac{[\sigma]}{\gamma}. \quad (12.41)$$

Від дії сили тяжіння може статися розрив стрижня. Це відбувається, якщо σ_{\max} у виразі (12.39) досягне значення тимчасового опору. Довжина стрижня, при якій він розривається від сили тяжіння, називається критичною. Її знайдемо з формули (12.41), замінивши допустиме напруження тимчасовим опором матеріалу:

$$l_{\text{кр}} = \frac{\sigma_B}{\gamma}. \quad (12.42)$$

Гранична та критична довжини не залежать від площі поперечного перерізу стрижня. Так, наприклад, критична довжина стрижня із сталі марки Ст2, у якої тимчасовий опір $\sigma_B = 360 \text{ МПа}$ а питома сила тяжіння

$$\gamma = 7,85 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}, \text{ буде } l_{\text{кр}} = \frac{\sigma_B}{\gamma} = \frac{360000000 \text{ МПа}}{7,85 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}} \approx 4586 \text{ м} \approx 4,6 \text{ км}.$$

Для розглядуваного стрижня (рис. 12.13, а) визначимо переміщення перерізу, розміщеного на відстані x від вільного кінця. Переміщення дорівнює подовженню частини стрижня, розміщеної вище цього перерізу.

У перерізі стрижня на відстані ξ , від вільного кінця (рис. 12.13, а) маємо:

$$N(\xi) = P + \gamma \cdot F \cdot \xi. \quad (12.43)$$

За формулою (12.11) при $F = \text{const}$ знаходимо:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \int_x^l \frac{N(\xi) \cdot d\xi}{E \cdot F} = \int_x^l \frac{(P + \gamma \cdot F \cdot \xi) \cdot d\xi}{E \cdot F} = \int_x^l \frac{P \cdot d\xi}{E \cdot F} + \int_x^l \frac{\gamma \cdot F \cdot \xi \cdot d\xi}{E \cdot F} = \\ &= \frac{P}{E \cdot F} \cdot \int_x^l d\xi + \frac{\gamma}{E} \cdot \int_x^l \xi \cdot d\xi = \frac{P}{E \cdot F} \cdot \xi \Big|_x^l + \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi^2 \Big|_x^l = \frac{P}{E \cdot F} \cdot (l - x) + \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{1}{2} \cdot (l^2 - x^2). \end{aligned} \quad (12.44)$$

Подовження Δl стрижня (чи переміщення λ нижнього кінця стрижня, що дорівнює Δl) визначимо з виразу (12.44) при $x = 0$: $\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} + \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E}$. (12.45)

Перший доданок у цьому виразі є подовженням стрижня від сили P , другий — від сили тяжіння. Ураховуючи, що повна сила тяжіння $Q = \gamma \cdot F \cdot l$, за-

мість формули (12.45) матимемо:
$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} + \frac{Q \cdot l}{2 \cdot E \cdot F} = \frac{l}{E \cdot F} \cdot \left(P + \frac{Q}{2} \right) \quad (12.46)$$

Отже, абсолютне подовження стрижня від власної ваги таке саме, як подовження від зосередженої сили, що дорівнює вазі стрижня і прикладена в його центр ваги. Елюру переміщень перерізів зображено на рис. 12.13, з.

Стрижень однакового опору

Як видно із розрахунку на міцність стрижня однакового поперечного перерізу з урахуванням власної ваги, в усіх перерізах, крім небезпечного, нормальні напруження будуть меншими від допустимих, тобто матеріал недовантажений (див., наприклад, рис. 12.13, в). Проте можна спроектувати стрижень такого змінного перерізу, в якого в усіх поперечних перерізах напруження будуть однаковими і дорівнюватимуть допустимому. Такий стрижень називають рівноміцним або стрижнем однакового опору розтягання чи стисканню. Встановимо закон зміни площі його поперечного перерізу.

Нехай стрижень стискується силою P (рис. 12.14).

Потрібна площа верхнього перерізу: $F_0 = \frac{P}{[\sigma]}$. (12.47)

Площу поперечного перерізу на відстані x від верхнього кінця стрижня позначимо через $F(x)$, а силу тяжіння, що діє на частину стрижня завдовжки x — через $Q(x)$. У цьому перерізі, як і в усіх інших, напруження має дорівнювати допустимому. Рівняння рівноваги частини стрижня завдовжки x має вигляд: $P + Q(x) = [\sigma] \cdot F(x)$. (12.48)

Перейдемо до наступного перерізу, який проведено на відстані dx від першого. Площа цього перерізу $F(x) + dF(x)$, а сила тяжіння, що діє на частину стрижня завдовжки $x + dx$ становитиме $Q(x) + \gamma \cdot F(x) \cdot dx$. Умова рівноваги цієї частини стрижня:

$$P + Q(x) + \gamma \cdot F(x) \cdot dx = [\sigma] \cdot [F(x) + dF(x)]. \quad (12.49)$$

Віднявши вираз (12.48) із виразу (12.49), дістанемо:

$$\gamma \cdot F(x) \cdot dx = [\sigma] \cdot dF(x), \quad (12.50)$$

або, розділивши змінні, $\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma \cdot dx}{[\sigma]}$. (12.51)

Проінтегрувавши це рівняння, знайдемо:

$$\int \frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot \int dx; \Rightarrow \ln F(x) + C_1 = \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot x + C_2; \Rightarrow \ln F(x) = \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot x + C. \quad (12.52)$$

Звідси: $F(x) = e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot x + C}$. (12.53)

Сталу інтегрування C визначимо з умови, що при $x = 0$ маємо $F(0) = F_0$.

Тоді з формули (12.53) дістанемо: $F(0) = F_0 = e^C$. (12.54)

Підставляючи це значення у (12.53), знайдемо закон зміни площі поперечного

перерізу стрижня однакового опору: $F(x) = e^C \cdot e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot x} = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot x}$. (12.55)

Найбільша площа в місці закріплення ($x = l$): $F_{\max} = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot l}{[\sigma]}}$, (12.56)

або з урахуванням (12.47): $F_{\max} = \frac{P}{[\sigma]} \cdot e^{\frac{\gamma \cdot l}{[\sigma]}}$. (12.57)

Знайдемо повну силу тяжіння Q , що діє на стрижень однакового опору.

З умови рівноваги всього стрижня маємо: $P + Q = [\sigma] \cdot F_{\max}$. (12.58)

Звідси: $Q = [\sigma] \cdot F_{\max} - P$. (12.59)

Ураховуючи формули (12.57), дістаємо:

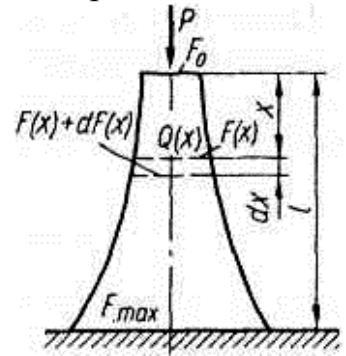


Рис. 12.14.

$$Q = [\sigma] \cdot \frac{P}{[\sigma]} \cdot e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - P = P \cdot e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - P = P \cdot \left(e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1 \right). \quad (12.60)$$

Легко визначити також **укорочення стрижня**. Оскільки напруження в усіх поперечних перерізах однакові і дорівнюють допустимому, то і **відносна деформація ε по довжині стрижня однакового опору постійна** і дорівнює $\frac{[\sigma]}{E}$.

Абсолютне укорочення стрижня: $\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{[\sigma]}{E} \cdot l. \quad (12.61)$

Східчастий стрижень

Східчастим стрижнем називають стрижень, який складається з окремих відрізків (східців) з однаковою площею поперечного перерізу в межах кожного відрізка. Він займає проміжне місце між стрижнем однакового поперечного перерізу і стрижнем однакового опору. У східчастому стрижні матеріал використовується краще, ніж у стрижні однакового перерізу, але менш ефективно, ніж у стрижні однакового опору. Проте виготовлення східчастого стрижня значно простіше, тому такі стрижні більш поширені, ніж стрижні однакового опору. Так, опори мостів часто виготовляють у вигляді східчастих стрижнів.

Східчасті стрижні проектують так, щоб у небезпечному перерізі, який розміщений у кінці кожного східця, напруження дорівнювали допустимому.

Складемо **формули для визначення площі поперечного перерізу кожного східця** (рис. 12.15). Площу поперечного перерізу першого східця

знайдемо з формули (12.6): $F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma \cdot l_1}. \quad (12.62)$

До нижнього кінця другого східця прикладено силу, що дорівнює $F_1 \cdot [\sigma]$. Тоді, аналогічно (12.62), одержимо:

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot [\sigma]}{[\sigma] - \gamma \cdot l_2}. \quad (12.63)$$

Ураховуючи формулу (12.62), дістанемо:

$$F_2 = \frac{\frac{P}{[\sigma] - \gamma \cdot l_1} \cdot [\sigma]}{[\sigma] - \gamma \cdot l_2} = \frac{P \cdot [\sigma]}{([\sigma] - \gamma \cdot l_1) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_2)}. \quad (12.64)$$

До нижнього кінця третього східця прикладено силу $F_2 \cdot [\sigma]$.

Отже, площа поперечного перерізу третього східця: $F_3 = \frac{F_2 \cdot [\sigma]}{[\sigma] - \gamma \cdot l_3}. \quad (12.65)$

Підставляючи значення F_2 із формули (12.64), матимемо:

$$F_3 = \frac{F_2 \cdot [\sigma]}{[\sigma] - \gamma \cdot l_3} = \frac{\frac{P \cdot [\sigma]}{([\sigma] - \gamma \cdot l_1) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_2)} \cdot [\sigma]}{[\sigma] - \gamma \cdot l_3} = \frac{P \cdot [\sigma]^2}{([\sigma] - \gamma \cdot l_1) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_2) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_3)}. \quad (12.66)$$

Формула для площі поперечного перерізу n-го східця має такий вигляд:

$$F_n = \frac{P \cdot [\sigma]^{n-1}}{([\sigma] - \gamma \cdot l_1) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_2) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_3) \cdot \dots \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_n)}. \quad (12.67)$$

Якщо довжини всіх східців однакові, то: $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n = \dots = l_m = \frac{l}{m}, \quad (12.68)$

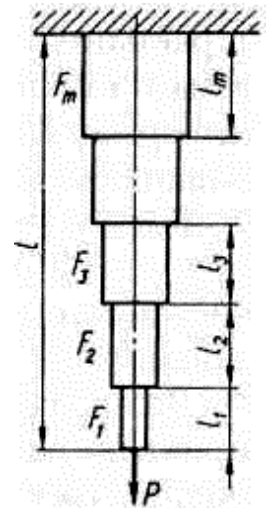


Рис. 12.15.

де l — загальна довжина стрижня; m — кількість східців у стрижні. Тоді:

$$F_n = \frac{P \cdot [\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma] - \gamma \cdot \frac{l}{m}\right)^n} = \frac{P}{[\sigma] \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot \frac{l}{m}\right)^n}. \quad (12.69)$$

Урахування сил інерції

Під *силою інерції матеріальної точки, яка рухається з прискоренням*, розуміють силу, що дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення. Напрямок сили інерції протилежний напрямку прискорення. У реальному тілі, яке можна розглядати як сукупність матеріальних точок, сили інерції розподілені по об'єму тіла. Вони складаються з іншими навантаженнями і впливають на значення напружень і деформацій, що виникають у тілі. Часто сили інерції становлять основне навантаження на рухомі деталі конструкцій. Розв'язуючи задачі з урахуванням сил інерції, слід використовувати **принцип Д'Аламбера**: *рівнянням руху точки (або системи точок) можна надати вид рівнянь рівноваги, якщо до діючих заданих сил і динамічних реакцій зв'язків додати сили інерції*.

Визначення напружень і деформацій при дії сил інерції розглянемо на прикладі розрахунку тонкого $\left(h < \frac{r}{20}\right)$ кільця (рис. 12.16, а), що вільно обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо центральної осі, перпендикулярної до

площини кільця. Кутова швидкість обертання кільця: $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, [c^{-1}]$, (12.70)

де n — частота обертання. *Для тонкого кільця можна вважати, що всі його точки перебувають на однаковій відстані від осі обертання, яка дорівнює радіусу r . При обертальному русі зі сталою кутовою швидкістю точки кільця зазнаватимуть лише доцентрового прискорення $\omega^2 \cdot r$, а сили інерції напрямлятимуться від осі (відцентрові сили). На елемент кільця завдовжки*

1 діє сила інерції

$$q = \frac{\gamma \cdot F}{g} \cdot \omega^2 \cdot r, \quad (12.71)$$

де γ — питома вага матеріалу; F — площа поперечного перерізу кільця; r — радіус середньої лінії кільця; g — прискорення вільного падіння.

Отже, *при рівномірному обертанні на кільце діють рівномірно розподілені по колу радіальні сили інерції інтенсивністю q . Внаслідок колової симетрії системи і навантаження в усіх поперечних перерізах згинальні моменти і поперечні сили дорівнюють нулю*.

Для визначення поздовжніх зусиль N , що діють у поперечних (радіальних) перерізах кільця, розглянемо рівновагу половини кільця (рис. 12.16, б). На половину кільця діють сили N , які прикладені в проведених перерізах, та сили інерції інтенсивністю a .

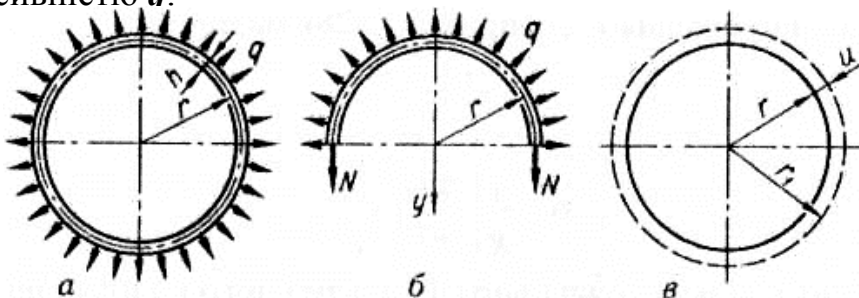


Рис. 12.16.

Оскільки, *рівнодійна рівномірно розподіленого навантаження, яке прикладене до дуги будь-якого обрису, дорівнює добутку інтенсивності навантаження на довжину хорди, яка стягує цю дугу, перпендикулярна до цієї хорди і проходить через її середину*, то рівнодійна розподіленого навантаження інтенсивністю q дорівнює добутку q на діаметр, перпендикулярна до діаметра і напрямлена по осі, яка проходить через його середину, тобто по осі y .

Умова рівноваги половини кільця при проєкціюванні сил на вісь y має вигляд:

$$2 \cdot N - q \cdot 2 \cdot r = 0, \quad (12.72)$$

звідки:

$$N = q \cdot r. \quad (12.73)$$

Нормальне напруження в поперечному перерізі кільця: $\sigma = \frac{N}{F} = \frac{q \cdot r}{F}$. (12.74)

Підставляючи значення q із формули (12.71), матимемо:

$$\sigma = \frac{\frac{\gamma \cdot F}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot r}{F} = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2, \quad (12.75)$$

або
$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2 \cdot r^2. \quad (12.76)$$

Напруження у кільці можна виразити через його колову швидкість v . Ураховуючи, що $v = \omega \cdot r$, з виразу (12.75) маємо: $\sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2$, (12.77)

Отже, напруження не залежить від площі поперечного перерізу кільця.

Формули (12.75), (12.77) можна використовувати для наближеного (якщо знехтувати впливом спиць) визначення напруження в ободі маховика.

З умови міцності кільця:
$$\frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \leq [\sigma], \quad (12.78)$$

визначаємо допустиму колову швидкість:
$$v \leq \sqrt{\frac{[\sigma] \cdot g}{\gamma}}. \quad (12.79)$$

Відносне подовження в напрямі дотичних до середнього кола кільця (колове подовження), згідно із законом Гука та з урахуванням виразу (12.75),

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\gamma}{g \cdot E} \cdot \omega^2 \cdot r^2. \quad (12.80)$$

Розглядаючи *геометричний аспект деформації* (рис. 12.16, в), бачимо, що *відносне подовження по колу кільця дорівнює відносному подовженню*

радіуса:
$$\varepsilon = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1 - 2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{u}{r}. \quad (12.81)$$

де u — *радіальне переміщення точок середнього кола кільця*.

Із формул (12.80) і (12.81) знаходимо:
$$u = \varepsilon \cdot r = \frac{\gamma}{g \cdot E} \cdot \omega^2 \cdot r^3. \quad (12.82)$$

12.5.3. Статично невизначувані конструкції

Статично невизначуваними називаються конструкції, зусилля в елементах яких не можна визначити тільки з рівнянь статки. Крім рівнянь статки для розрахунку таких систем (конструкцій) треба використати також рівняння, що містять деформації елементів конструкції.

Схеми деяких статично невизначуваних конструкцій зображено на рис. 12.17: а — стрижневої підвіски; б — стрижня, закріпленого двома кін-

цями; *в* — стрижневого кронштейна; *г* — складаного кільця; *д* — залізобетонної колони; *е* — шарнірно-стрижневої системи.

Усі статично невизначувані конструкції мають додаткові, або, як ще кажуть, зайві, в'язі (зв'язки) у вигляді закріплень, стрижнів або інших елементів. Зайвими такі зв'язки називають тільки тому, що вони не потрібні для забезпечення геометричної незмінності та рівноваги конструкції при дії навантаження, хоч наявність їх впливає з умов експлуатації. З умов міцності й жорсткості конструкції зайві зв'язки можуть стати необхідними. У статично невизначуваній системі кількість невідомих зусиль, що треба визначити, більша, ніж кількість рівнянь статки, які для цього можна використати. Різниця між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статки визначає кількість зайвих невідомих, або ступінь статичної невизначуваності конструкції. Коли є одна зайва невідома, конструкцію називають один раз статично невизначуваною, при двох — двічі статично невизначуваною і т. д. Конструкції, зображені на рис. 12.17, *а, б, г – е*, мають по одному додатковому зв'язку і є один раз статично невизначуваними, а конструкція, яку наведено на рис. 12.17, *в*, має два зайвих зв'язки і є двічі статично невизначуваною.

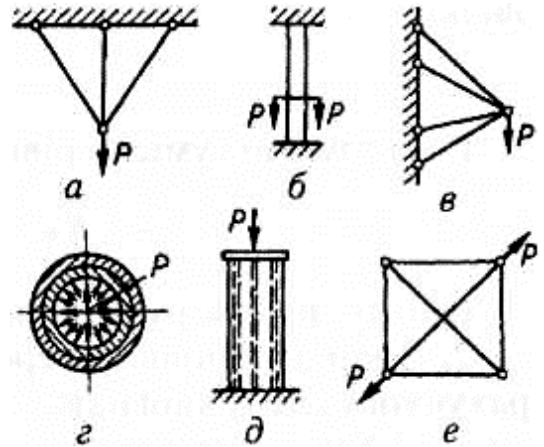


Рис. 12.17.

зображені на рис. 12.17, *а, б, г – е*, мають по одному додатковому зв'язку і є один раз статично невизначуваними, а конструкція, яку наведено на рис. 12.17, *в*, має два зайвих зв'язки і є двічі статично невизначуваною.

Розв'язання статично невизначуваних задач

Найпростіші статично невизначувані конструкції, елементи яких працюють на розтягання або стискання, **розраховуються** сумісним розв'язанням рівнянь, здобутих у результаті розгляду статичного, геометричного і фізичного аспектів задачі. При цьому зручно додержуватися такої **послідовності**:

1. **Статичний аспект задачі.** Складаємо рівняння рівноваги відокремлених елементів конструкції, що мають невідомі зусилля.
2. **Геометричний аспект задачі.** Розглядаємо систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Здобуті рівняння називають **рівняннями сумісності (нерозривності) деформації**.
3. **Фізичний аспект задачі.** На підставі закону Гука виражаємо переміщення або деформації елементів конструкції через невідомі зусилля, що діють у них. У разі зміни температури до деформацій, спричинених зусиллями, додають температурні деформації.
4. **Синтез.** Розв'язуючи сумісно статичні, геометричні та фізичні рівняння, знаходимо невідомі зусилля.

Приклад 12.6

Визначити зусилля, що виникають у нижній та верхній частинах стрижня, закріпленого двома кінцями, до якого прикладено осьову силу P (рис. 12.18).

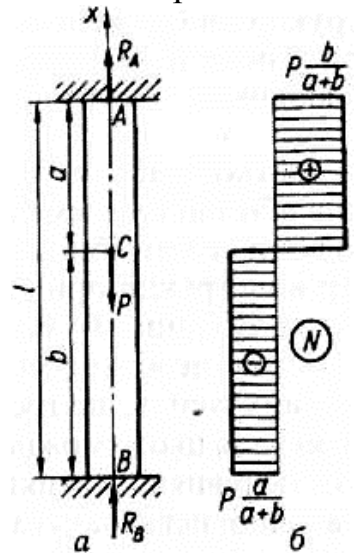


Рис. 12.18.

Дано:

$$AB = l, AC = a, \\ CB = b, P$$

$$R_A, R_B \text{ — ?}$$

Розв'язання:

1. **Статичний аспект задачі.** Оскільки сила P діє вздовж осі стрижня, в місцях його закріплення виникають тільки вертикальні складові реакцій (R_A і R_B).

Напрямаємо їх довільно — так, як зображено на рис. 12.18, *а*. Для системи сил, що діють по одній прямій лінії, можна скласти лише одне рівняння рів-

новаги: Вісь $X: R_A - P + R_B = 0$. Отже, задача один раз статично невизначувана (дві невідомі реакції не можна визначити з одного рівняння).

2. Геометричний аспект задачі. Оскільки кінці стрижня жорстко закріплені, то його загальна довжина не змінюється. Отже, $\Delta l_{AB} = 0$.

3. Фізичний аспект задачі. У поперечних перерізах верхньої частини стрижня (AC) діють поздовжні зусилля $N_{AC} = R_A$, а в поперечних перерізах нижньої частини (BC) — зусилля $N_{BC} = -R_B$. Використовуючи закон Гука, виразимо деформації через ці зусилля:

$$\begin{aligned} \Delta l_{AB} &= \Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = \varepsilon_{AC} \cdot a + \varepsilon_{CB} \cdot b = \frac{\sigma_{AC}}{E} \cdot a + \frac{\sigma_{CB}}{E} \cdot b = \\ &= \frac{N_{AC}}{E \cdot F} \cdot a + \frac{N_{CB}}{E \cdot F} \cdot b = \frac{R_A}{E \cdot F} \cdot a - \frac{R_B}{E \cdot F} \cdot b. \end{aligned}$$

4. Синтез. Підставляючи останній вираз у рівняння $\Delta l_{AB} = 0$, матимемо $\frac{R_A}{E \cdot F} \cdot a - \frac{R_B}{E \cdot F} \cdot b = 0$, звідки $R_A \cdot a = R_B \cdot b$. Таким чином, ми одержали систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \begin{cases} R_A - P + R_B = 0; \\ R_A \cdot a = R_B \cdot b; \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} R_B \cdot \frac{b}{a} - P + R_B = 0; \\ R_A = R_B \cdot \frac{b}{a}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B \cdot \left(\frac{b}{a} + 1\right) = P; \\ R_A = R_B \cdot \frac{b}{a}; \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} R_B \cdot \frac{b+a}{a} = P; \\ R_A = R_B \cdot \frac{b}{a}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B = P \cdot \frac{a}{b+a}; \\ R_A = P \cdot \frac{a}{b+a} \cdot \frac{b}{a} = P \cdot \frac{b}{b+a}. \end{cases} \end{aligned}$$

Остаточну епюру поздовжніх зусиль наведено на рис. 12.18, б.

Приклад 12.7

Добрати площі поперечних перерізів тристрижневої підвіски, розрахункову схему якої наведено на рис. 12.19, а. Довжина середнього стрижня $l_1 = 1,5$ м, кут між віссю середнього стрижня й осями бокових стрижнів $\alpha = 30^\circ$. Усі стрижні виготовлено із сталі марки Ст2. Площі поперечних перерізів бокових стрижнів $F_2 = F_3$. Підвіска у вузлі A навантажуватиметься вертикальною силою $P = 80$ кН.

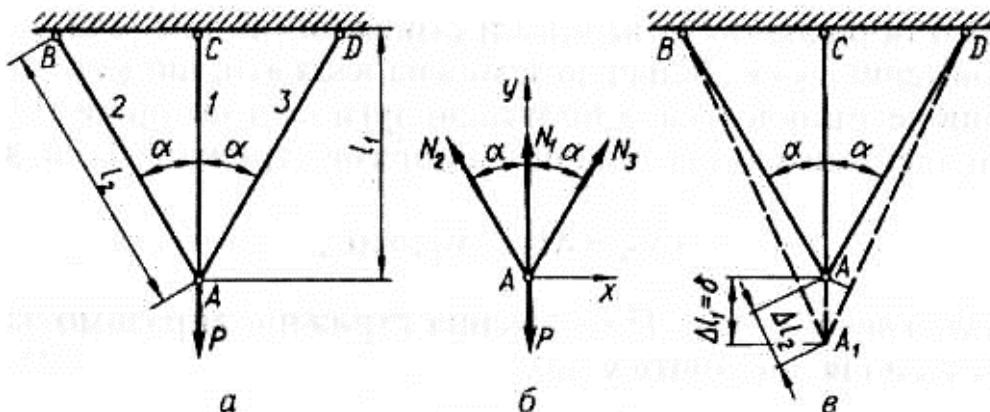


Рис. 12.19.

Дано:

$$AC = l_1 = 1,5 \text{ м}, \alpha = 30^\circ, \\ F_2 = F_3, l_2 = l_3, P = 80 \text{ кН}, \\ [\sigma_+] = 140 \text{ МПа}$$

$$F_1, F_2, F_3 \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Із розрахункової схеми конструкції, а також із припущення, що шарніри у вузлах ідеальні, випливає, що при навантажуванні підвіски у вузлі A силою P у стрижнях виникатимуть тільки осеві зусилля, у цьому прикладі – розтягальні.

Площу поперечного перерізу стрижня при розтяганні добираємо з умови міцності: $\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma_+]$, звідки, якщо відоме зусилля N , визначаємо потрібну площу: $F \geq \frac{N}{[\sigma_+]}$. Знайдемо зусилля в стрижнях підвіски.

1. Статичний аспект задачі. Рівняння рівноваги вузла (рис. 12.19, б) мають вигляд:

$$1. \text{ Вісь } X: N_{1x} + N_{2x} + N_{3x} + P_x = 0 - N_2 \cdot \sin \alpha + N_3 \cdot \sin \alpha + 0 = 0;$$

$$2. \text{ Вісь } Y: N_{1y} + N_{2y} + N_{3y} + P_y = N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha + N_3 \cdot \cos \alpha - P = 0.$$

Із першого рівняння випливає, що $N_2 = N_3$. Із другого рівняння маємо $N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos \alpha = P$. Отже, конструкція один раз статично невизначувана.

2. Геометричний аспект задачі. Оскільки система симетрична відносно осі середнього стрижня, а бокові стрижні розтягуються однаковими силами, то вузол A при деформації підвіски опуститься по вертикалі на якусь величину δ . Нове положення вузла буде A_1 (рис. 12.19, в). Усі стрижні подовжаться і займуть положення, що його наведено на рис. 12.19, в штриховими лініями.

Подовження середнього стрижня, очевидно, буде $\Delta l_1 = \delta$. Подовження бокових стрижнів дістанемо, якщо з точок B і D радіусом, що дорівнює BA (чи DA), проведемо дуги через точку A і зробимо засічки на нових довжинах стрижнів BA_1 і DA_1 . Унаслідок того, що пружні подовження дуже малі порівняно з довжинами стрижнів (на рис. 12.19, в для наочності подовження дуже збільшено), можна вважати, що кути α між осями стрижнів не змінюються, а проведені дуги слід замінити перпендикулярами, опущеними з вузла A на нові напрями стрижнів. Тоді, як видно з рисунка, $\Delta l_3 = \Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos \alpha$.

3. Фізичний аспект задачі. Подовження стрижнів виразимо за законом Гука через зусилля, що діють у них:

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 \cdot l_1 = \frac{\sigma_1}{E} \cdot l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1}, \quad \Delta l_2 = \varepsilon_2 \cdot l_2 = \frac{\sigma_2}{E} \cdot l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2}.$$

4. Синтез. Підставляючи значення $\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos \alpha$ у останній вираз, діста-

$$\text{немо: } \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} \cdot \cos \alpha. \text{ Звідси } N_2 = \frac{l_2}{E \cdot F_1} \cdot N_1 \cdot \cos \alpha, \text{ або } N_2 = \frac{c_2}{c_1} \cdot N_1 \cdot \cos \alpha,$$

де $c_1 = \frac{E \cdot F_1}{l_1}$, $c_2 = \frac{E \cdot F_2}{l_2}$ — жорсткості відповідно середнього і бокових стриж-

нів. Підставивши вираз $N_2 = \frac{c_2}{c_1} \cdot N_1 \cdot \cos \alpha$ у рівняння $N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos \alpha = P$, ма-

тимемо $N_1 + 2 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot N_1 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = P$, звідки

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \cos^2 \alpha}, \text{ тоді } N_2 = N_3 = \frac{P \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \cos \alpha}{1 + 2 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Зусилля N_1 і N_2 залежать від співвідношення жорсткостей стрижнів: чим більша жорсткість стрижня, тим більшу частину навантаження він сприймає. У цьому полягає одна з особливостей статично невизначуваних систем. В проектувальних розрахунках таких систем при визначенні зусиль потрібно задатися відношенням жорсткостей. Якщо матеріал стрижнів однаковий, то задаються відношенням площ поперечних перерізів, яке визначає і певне відношення жорсткостей.

Виберемо $\frac{F_1}{F_2} = k$. Тоді, враховуючи, що $l_1 = l_2 \cdot \cos \alpha$, матимемо:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{E \cdot F_2}{l_2} \cdot \frac{l_1}{E \cdot F_1} = \frac{E \cdot F_2}{l_2} \cdot \frac{l_2 \cdot \cos \alpha}{E \cdot F_2 \cdot k} = \frac{\cos \alpha}{k}.$$

Тепер зусилля в стрижнях N_1 і N_2 визначатимуться такими виразами:

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos^3 \alpha}, \quad N_2 = N_3 = \frac{P \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos^3 \alpha} = \frac{P \cdot \cos^2 \alpha}{k + 2 \cdot \cos^3 \alpha}.$$

Знайдемо ці зусилля, взявши, наприклад, $k = 2$:

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos^3 \alpha} \approx \frac{80}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,866^3} \approx 48,5 \text{ (кН)},$$

$$N_2 = N_3 = \frac{P \cdot \cos^2 \alpha}{k + 2 \cdot \cos^3 \alpha} = \frac{80 \cdot 0,866^2 \alpha}{2 + 2 \cdot 0,866^3} \approx 18,2 \text{ (кН)}.$$

Доберемо площі поперечних перерізів стрижнів, виходячи з припущення, що напруження в середньому стрижні дорівнює допустимому $[\sigma_+] = 140 \text{ МПа}$.

$$\text{Тоді } F_1 = \frac{N_1}{[\sigma_+]} = \frac{48500 \text{ Н}}{140000000 \text{ Па}} \approx 3,46 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3,46 \text{ см}^2.$$

Площі поперечних перерізів бокових стрижнів, згідно з взятим відношенням, $F_2 = \frac{F_1}{k} = \frac{3,46 \text{ см}^2}{2} = 1,73 \text{ см}^2$. Напруження в цих стрижнях:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{18200 \text{ Н}}{1,73 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 1,05 \cdot 10^8 \text{ Па} = 105 \text{ Па}.$$

Ці напруження менші, ніж допустиме, тобто стрижні мають надлишковий запас міцності. Якщо з умови міцності визначити площі поперечних перерізів бокових стрижнів $F_2 = F_3$, а потім, згідно з вибраним відношенням, взяти $F_1 = 2 \cdot F_2$, то напруження в середньому стрижні перевищить допустиме. Отже, цей другий варіант добору площі поперечних перерізів слід відкинути.

Початкові й температурні напруження

Вільне складання статично невизначуваних систем можливе лише за умови точного виготовлення їхніх елементів. А якщо ні, то систему можна скласти,

прикладаючи зусилля, які спричинюють деформації елементів. Тому після монтажу в елементах конструкції виникають **напруження**, що називаються **початковими** або **монтажними**. У статично визначуваних системах зазначені неточності розмірів елементів не заважають вільному монтажу й після монтажу не виникають початкові напруження в елементах. **В елементах статично невизначуваних конструкцій зусилля і напруження виникають також при зміні температури.**

Приклад 12.8

Припустимо, що стрижні конструкції, яку розглянуто в попередньому прикладі 12.7, виготовлено із заданими площами поперечних перерізів F_1 та $F_2 = F_3$, а довжина середнього стрижня l_1 виявилася меншою на відрізок Δ (рис. 12.20, а). Якщо значення Δ мале порівняно з довжинами стрижнів, то, приклавши відповідні деформувальні зусилля, можна всі три стрижні з'єднати у вузлі, що займе після монтажу якесь положення А (рис. 12.20, б). Очевидно, при цьому середній стрижень буде розтягнутий, а бокові — стиснуті. Визначимо **монтажні зусилля** в стрижнях.

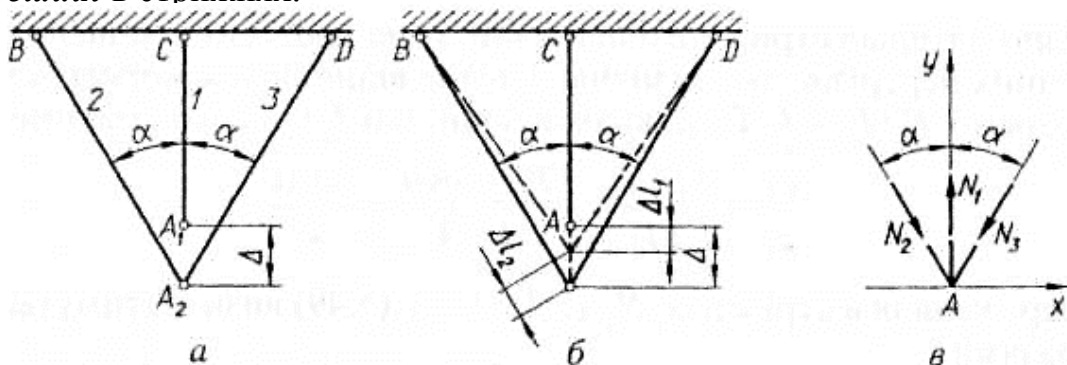


Рис. 12.20.

Розв'язання:

1. Статичний аспект задачі. Рівняння рівноваги вузла А (рис. 12.20, в) мають вигляд:

$$1. \text{ Вісь } X: N_{1x} + N_{2x} + N_{3x} = 0 + N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$2. \text{ Вісь } Y: N_{1y} + N_{2y} + N_{3y} = N_1 - N_2 \cdot \cos \alpha - N_3 \cdot \cos \alpha = 0.$$

Із першого рівняння знаходимо, що $N_2 = N_3$. Залишається одне рівняння з двома невідомими: $N_1 - 2 \cdot N_2 \cdot \cos \alpha = 0$.

2. Геометричний аспект задачі. З наведеної на рис. 12.20, б побудови випливає, що: $\Delta l_2 = (\Delta - \Delta l_1) \cdot \cos \alpha$.

3. Фізичний аспект задачі. За законом Гука:

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 \cdot l_1 = \frac{\sigma_1}{E} \cdot l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1}, \quad \Delta l_2 = \varepsilon_2 \cdot l_2 = \frac{\sigma_2}{E} \cdot l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2}.$$

4. Синтез. Підставляючи значення Δl_1 і Δl_2 з останнього виразу у формулу

$$\Delta l_2 = (\Delta - \Delta l_1) \cdot \cos \alpha, \quad \text{маємо} \quad \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = \left(\Delta - \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} \right) \cdot \cos \alpha. \quad \text{Звідси}$$

$$N_2 = \frac{E \cdot F_2}{l_2} \cdot \left(\Delta - \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} \right) \cdot \cos \alpha, \quad \text{або} \quad N_2 = c_2 \cdot \left(\Delta - \frac{N_1}{c_1} \right) \cdot \cos \alpha. \quad \text{Ввівши } N_2 \text{ у рів-}$$

$$\text{няння } N_1 - 2 \cdot N_2 \cdot \cos \alpha = 0, \quad \text{матимемо: } N_1 - 2 \cdot c_2 \cdot \left(\Delta - \frac{N_1}{c_1} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = 0.$$

Звідси знаходимо **розтягальне зусилля в середньому стрижні**:

$$N_1 - 2 \cdot c_2 \cdot \Delta \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot c_2 \cdot \frac{N_1}{c_1} \cdot \cos^2 \alpha = 0; \Rightarrow N_1 + N_1 \cdot 2 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \cos^2 \alpha = 2 \cdot c_2 \cdot \Delta \cdot \cos^2 \alpha; \Rightarrow$$

$$N_1 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \cos^2 \alpha \right) = 2 \cdot c_2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \Delta; \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{2 \cdot c_2 \cdot \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \Delta = \frac{2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \cos^2 \alpha}{c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \Delta = \frac{2 \cdot \frac{E \cdot F_1}{l_1} \cdot \frac{E \cdot F_2}{l_2} \cdot \cos^2 \alpha}{\frac{E \cdot F_1}{l_1} + 2 \cdot \frac{E \cdot F_2}{l_2} \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \Delta =$$

$$= \frac{2 \cdot E \cdot \frac{F_1}{l_1} \cdot \frac{F_2}{l_2} \cdot \cos^2 \alpha}{\frac{F_1}{l_1} + 2 \cdot \frac{F_2}{l_2} \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \Delta = \frac{2 \cdot E \cdot \frac{F_1 \cdot F_2}{l_1} \cdot \cos^3 \alpha}{F_1 + 2 \cdot F_2 \cdot \cos^3 \alpha} \cdot \Delta = \frac{2 \cdot E \cdot \cos^3 \alpha}{l_1 \cdot \left(\frac{1}{F_2} + 2 \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \cos^3 \alpha \right)} \cdot \Delta.$$

Стискальні зусилля в бокових стрижнях визначаємо з рівняння

$$N_1 - 2 \cdot N_2 \cdot \cos \alpha = 0; \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{N_1}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cdot E \cdot \cos^3 \alpha \cdot \Delta}{l_1 \cdot \left(\frac{1}{F_2} + 2 \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \cos^3 \alpha \right)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{E \cdot \cos^2 \alpha \cdot \Delta}{l_1 \cdot \left(\frac{1}{F_2} + 2 \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \cos^3 \alpha \right)}.$$

Зусилля в стрижнях залежать як від відношення жорсткостей, так і від Δ .

Приклад 12.9

Нехай у розглядуваній конструкції (рис. 12.20) всі стрижні виготовлено із сталі з модулем пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Площі поперечних перерізів стрижнів $F_1 = 3$ см², $F_2 = F_3 = 2$ см²; проектна довжина стрижня $l_1 = 2$ м, кути нахилу бокових стрижнів $\alpha = 30^\circ$. Після з'єднання крайніх стрижнів виявилось, що середній стрижень коротший, ніж це треба для вільного складання, на $\Delta = 0,15$ см. Знайдемо зусилля і напруження, що виникають після монтажу конструкції.

Розв'язання:

Спершу знаходимо розтягальне зусилля в середньому стрижні за формулою:

$$N_1 = \frac{2 \cdot E \cdot \cos^3 \alpha \cdot \Delta}{l_1 \cdot \left(\frac{1}{F_2} + 2 \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \cos^3 \alpha \right)} \approx \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \cdot 0,866^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{2 \text{ м} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} + 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \cdot 0,866^3 \right)} \approx 20,9 \text{ кН}.$$

Стискальні зусилля в бокових стрижнях будуть:

$$N_2 = N_3 = \frac{N_1}{2 \cdot \cos \alpha} \approx \frac{20,9}{2 \cdot 0,866} \approx 12,06 \text{ (кН)}.$$

Відповідно напруження в стрижнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{20,9 \cdot 10^3 \text{ Н}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 69,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -\frac{N_2}{F_2} = -\frac{12,06 \cdot 10^3 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -60,3 \text{ МПа}$$

Отже, **порівняно невелика неточність, яку допущено в довжині стрижня при виготовленні, спричинює великі початкові (монтажні) напруження.**

Приклад 12.10

Визначити температурні напруження в стрижні AB (рис. 12.21) завдовжки l і площею поперечного перерізу F . Модуль пружності матеріалу E , коефіцієнт лінійного температурного розширення α .

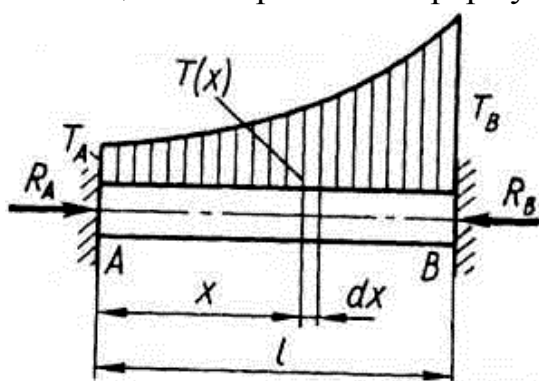


Рис. 12.21.

Стрижень закріплено кінцями в непіддатливих стінах і нагріто так, що на кінці A температура його підвищилася до T_A , на кінці B — до T_B , а по довжині стрижня вона змінюється

$$\text{за законом: } T(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} \cdot x^n. \quad (12.83)$$

При $n=0$ температура по довжині стрижня не змінюється і дорівнює T_B , при $n=1$ температура змінюється лінійно, при $n=2$ — за законом параболи другого порядку і т. д. Визначити реакції закріплень і напруження в стрижні.

Розв'язання:

1. Статичний аспект задачі. При підвищенні температури стрижень намагається подовжитися. Цьому перешкоджають жорсткі опори, внаслідок чого виникають реакції, напрямлені вздовж осі стрижня (рис. 12.21). Для системи сил, які напрямлені по одній прямій, можна скласти одне рівняння рівноваги:

Вісь X: $R_{Ax} + R_{Bx} = R_A - R_B = 0$; $\Rightarrow R_A = R_B = R$. Отже, задача один раз статично невизначувана. Поздовжнє зусилля в стрижні $N = -R$.

2. Геометричний аспект задачі. Внаслідок закріплення кінців стрижня його довжина не змінюється: $\Delta l = 0$.

3. Фізичний аспект задачі. Укорочення вільного стрижня, спричинене поздовжніми зусиллями, які дорівнюють реакціям закріплень, $\Delta l_N = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$. (12.84)

Подовження вільного стрижня внаслідок нагрівання визначимо так. На відстані x від кінця A стрижня виділимо елемент завдовжки dx . Вважатимемо, що в його межах підвищення температури $T(x)$ постійне. Температурне подовження цього елемента:

$$\Delta dx_T = \alpha \cdot T(x) \cdot dx = \alpha \cdot \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} \cdot x^n \right) \cdot dx. \quad (12.85)$$

Температурне подовження всього стрижня знайдемо, проінтегрувавши вираз (12.85) по довжині стрижня:

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha \cdot \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} \cdot x^n \right) \cdot dx = \alpha \cdot l \cdot \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right). \quad (12.86)$$

Повна зміна довжини стрижня:

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_T = -\frac{R \cdot l}{E \cdot F} + \alpha \cdot l \cdot \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right). \quad (12.87)$$

4. Синтез. Підставивши вираз (12.87) у формулу $\Delta l = 0$, матимемо:

$$-\frac{R \cdot l}{E \cdot F} + \alpha \cdot l \cdot \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) = 0, \quad (12.88)$$

звідки знайдемо реакції опор: $R_A = R_B = R = -N = \alpha \cdot \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) \cdot E \cdot F$, (12.89)

і напруження в стрижні: $\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{R}{F} = -\alpha \cdot \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) \cdot E$. (12.90)

При $n=0$ дві останні формули переходять у формули для випадку рівномірного нагрівання стрижня по довжині на $\Delta T = T_B$:

$$R_A = R_B = R = -N = \alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot F, \quad (12.91)$$

$$\sigma = -\alpha \cdot \Delta T \cdot E. \quad (12.92)$$

Приклад 12.11

Визначити осьову силу і напруження в сталевому стрижні, якщо $l = 80 \text{ см}$, $F = 20 \text{ см}^2$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$, $T_A = 10^\circ\text{C}$, $T_B = 55^\circ\text{C}$. Температура по довжині стрижня змінюється за законом параболи другого порядку ($n = 2$).

Дано:

$$l = 80 \text{ см},$$

$$F = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па},$$

$$\alpha = 125 \cdot 10^{-7},$$

$$T_A = 10^\circ\text{C},$$

$$T_B = 55^\circ\text{C},$$

$$n = 2$$

$$N, \sigma \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Підставляючи числові значення у формули (12.89) і (12.90), знайдемо:

$$N = -R = -\alpha \cdot \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) \cdot E \cdot F =$$

$$= -125 \cdot 10^{-7} \cdot \left(10 + \frac{55 - 10}{2+1} \right) \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -125 \text{ (кН)}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{125000 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 6,25 \cdot 10^7 \text{ Па} = 62,5 \text{ МПа}.$$

При зниженні температури в системі, яка подібна до зображеної на рис. 12.21, виникають розтягальні напруження.

На підставі розглянутих прикладів можна зазначити такі **особливості статично невизначуваних систем**:

1. Розподіл зусиль між елементами статично невизначуваних конструкцій залежить від жорсткостей цих елементів. Якщо збільшити жорсткість якогонебудь із них, то він сприйме більше зусилля. Змінюючи співвідношення жорсткостей елементів конструкції, можна як завгодно змінювати розподіл зусиль в них.
2. У статично невизначуваних конструкціях при зміні температури їхніх елементів порівняно з температурою, при якій конструкції склалися, виникають зусилля і напруження.
3. **В елементах статично невизначуваних конструкцій можуть існувати зусилля і напруження, якщо немає зовнішнього навантаження.** Ці зусилля і напруження, що їх називають **початковими (монтажними)**, виникають при складанні конструкції. **Початкові напруження або виникають внаслідок неточного виготовлення елементів конструкцій, або утворюються з певною метою** (наприклад, затягування болтів, пресова посадка).
4. У статично невизначуваних конструкціях у загальному випадку в усіх елементах одночасно не можна дістати напруження, які дорівнюють допустимим. Це потрібно мати на увазі при проектуванні таких конструкцій.

Запитання для самоконтролю

1. Поясніть, за яких умов в поперечному перерізі стрижня діє лише осьове зусилля? Проаналізуйте статичний аспект задачі при деформуванні розтягом.
2. Охарактеризуйте геометричний аспект задачі при деформуванні розтягом.
3. Запишіть та проаналізуйте аналітичний вираз геометричного аспекту задачі.
4. Сформулюйте закон Гука для деформації розтягу (стиску) стрижня.
5. Запишіть та поясніть формули для відносного та абсолютного подовження стрижня.
6. Що називають жорсткістю поперечного перерізу стрижня при розтяганні та стисканні та жорсткістю стрижня?

7. Поясніть, як пов'язані між собою абсолютна та відносна поперечна деформація стрижня? Що називається коефіцієнтом Пуассона?
8. Поясніть, яку задачу опору матеріалів можна вирішити з розрахунків на міцність та жорсткість?
9. Що називається допустимими напруженнями?
10. Сформулюйте умову міцності при розтяганні або стисканні стрижня.
11. Які типи задач можна розв'язувати з використанням умови міцності?
12. Сформулюйте умову жорсткості при розтяганні або стисканні стрижня.
13. Охарактеризуйте основні види та характеристики зразків при випробуванні матеріалів на розтяг.
14. Проаналізуйте особливості діаграми розтягання.
15. Що називається границею пропорційності, пружності, текучості, міцності?
16. Що називається напруженням при розриві зразка?
17. Що називається умовною границею текучості, пропорційності, пружності?
18. Як визначаються допустимі напруження через небезпечне напруження та коефіцієнт запасу міцності?
19. Чим визначається запас міцності для пластичних матеріалів у разі статичного навантаження?
20. Що є небезпечним напруженням для крихких матеріалів при статичних навантаженнях? Що називають основними допустимими напруженнями?
21. В чому полягає економічний аспект розрахунку на міцність?
22. Запишіть та поясніть умову міцності при статичному навантаженні для пластичних матеріалів та однорідних крихких матеріалів.
23. Поясніть, чому при проектуванні стрижня однакового поперечного перерізу потрібно його добирати за найбільшим абсолютним значенням зусилля, що діє в середньому відрізку?
24. Наведіть умову, за якої для коротких сталевих круглих стрижнів достатнім є розрахунок на міцність при стисканні.
25. Поясніть формули для визначення відносного й абсолютного подовження короткого стрижня однакового поперечного перерізу.
26. З'ясуйте, в яких випадках довжина всього стрижня однакового поперечного перерізу, до якого прикладені зосереджені навантаження, не змінюється?
27. Проаналізуйте особливості побудови епюр поздовжніх зусиль, нормальних напружень, відносних деформацій та переміщень для східчастого стрижня, що складається з трьох частин із сталими поперечними перерізами, за умови дії зосереджених навантажень.
28. Охарактеризуйте перевірку міцності східчастого стрижня круглого поперечного перерізу. Поясніть, що розуміють під стрижнем однакового опору?
29. Наведіть особливості розрахунку східчастого стрижня.
30. З'ясуйте особливості розрахунку на міцність при врахуванні сил інерції.
31. Поясніть, які конструкції називають статично невизначуваними?
32. Проаналізуйте основні складові послідовності розрахунків при розв'язуванні статично невизначуваних задач.
33. Визначте зусилля, що виникають у нижній та верхній частинах стрижня, закріпленого двома кінцями, до якого прикладено осьову силу.
34. Наведіть особливості розрахунку тристрижневої підвіски.
35. Проаналізуйте особливості визначень початкових (монтажних) напружень.
36. Поясніть, чому порівняно невелика неточність, яку допущено в довжині стрижня при виготовленні, спричинює великі монтажні напруження?
37. З'ясуйте особливості виникнення температурних напружень в елементах статично невизначуваних конструкцій та специфіку їх розрахунку.
38. Охарактеризуйте основні особливості статично невизначуваних систем.

Лекція № 13

Тема: «Деформування зсувом»

ПЛАН

13.1. Розрахунок на зріз при деформуванні зсувом.

13.2. Закон Гука при чистому зсуві.

13.3. Перевірка міцності й допустимих напружень при чистому зсуві.

13.1. Розрахунок на зріз при деформуванні зсувом

Деформація зсуву відбувається тоді, коли з шести компонент головного вектора сили та головного вектора моменту внутрішніх зусиль не дорівнюють нулю тільки поперечні зусилля Q_y або Q_z .

З достатнім ступенем наближення деформацією зсуву (зрізу) практично можна вважати випадок, коли на розглядуваний стрижень з протилежних боків на вельми близькій відстані одна від одної діють дві однакові сили, перпендикулярні до осі стрижня й напрямлені в протилежні боки. Прикладом такого навантаження може бути розрізання ножицями прутів, штаби і т. ін. (рис. 13.1). На практиці зсув у чистому вигляді спостерігати досить важко, оскільки деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій і найчастіше — згинанням.

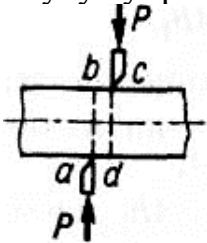


Рис. 13.1.

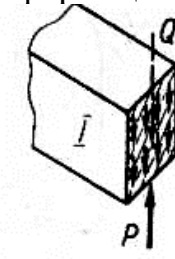
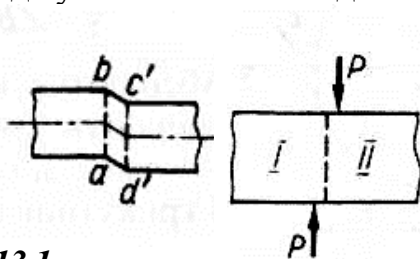


Рис. 13.2.

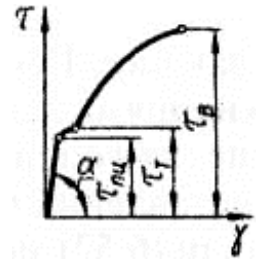
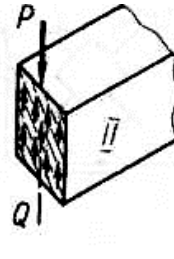


Рис. 13.3.

Формули для напружень при розрахунку на зріз стрижневих елементів конструкцій можна дістати, виходячи, наприклад, з випадку навантаження, наведеного на рис. 13.1. Використовуючи метод перерізів, знаходимо, що на відрізку bc поперечне зусилля:

$$Q_y = P. \quad (13.1)$$

Опускаючи надалі індекс при Q , установимо зв'язок між поперечним зусиллям й напруженням, яке діє в даному перерізі. З формули (10.15) маємо:

$$\int_F \tau \cdot dF = Q. \quad (13.2)$$

Вважаючи, що дотичні напруження τ рівномірно розподілені по площі поперечного перерізу F (рис. 13.2), на підставі формул (13.1) та (13.2) матимемо:

$$Q = P = \tau \cdot F, \quad (13.3)$$

звідки

$$\tau = \frac{P}{F}. \quad (13.4)$$

Припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу досить умовне. Проте це припущення в багатьох випадках справедливе, тому в інженерній практиці його широко використовують при розрахунку болтових, заклепочних та зварних з'єднань, шпонок та інших деталей.

13.2. Закон Гука при чистому зсуві

Залежність між навантаженням та деформацією при зсуві можна простежити за діаграмою зсуву (рис. 13.3). Для пластичних матеріалів вона схожа на діаграму розтягання. На рис. 13.3 показано характеристики міцності: границю пропорційності τ_{nc} , границю текучості τ_m та границю міцності τ_s .

Експериментально діаграму зсуву можна зняти при скручуванні тонкостінної труби (рис. 13.4). Уявно виділений елемент стінки труби (комірка ортогональної сітки, яку попередньо нанесено на поверхню труби) перебуває в умовах чистого зсуву. Розглядаючи деформацію цього елемента в межах пружності, визначимо, що між відносним зсувом та дотичними напруженнями, що діють по гранях елемента, згідно з діаграмою зсуву (див. рис. 13.3), існує лінійна залежність, яку можна виразити

$$\text{формулою: } \gamma = \frac{\tau}{G} \text{ або } \tau = G \cdot \gamma, \quad (13.5)$$

де G — коефіцієнт пропорційності, який називається модулем пружності при зсуві або модулем пружності другого роду і виражається в МПа (або Па).

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності G при зсуві та модулем пружності E при розтяганні існує залежність:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \quad (13.6)$$

Якщо $\mu = \frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$, то $G = (0,375 \div 0,4) \cdot E$.

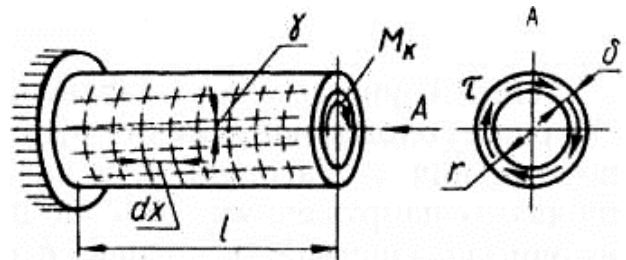


Рис. 13.4.

13.3. Перевірка міцності й допустимих напружень при чистому зсуві

Перевіримо міцність елемента, що зазнає деформації чистого зсуву. Дотичні напруження на гранях елемента дорівнюють τ , допустиме напруження для матеріалу при розтяганні — $[\sigma]$.

Умови міцності залежатимуть від вибору теорії (критерію) міцності.

1. За II теорією міцності
$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (13.7)$$

Права частина формули (13.7) є допустимим напруженням при чистому зсуві:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (13.8)$$

Для металів $\mu = 0,25 \div 0,42$. Отже, за II теорією міцності

$$[\tau] = (0,7 \div 0,8) \cdot [\sigma]. \quad (13.9)$$

2. За III теорією міцності
$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau], \quad (13.10)$$

тобто
$$[\tau] = 0,5 \cdot [\sigma]. \quad (13.11)$$

3. За IV теорією міцності
$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}, \quad (13.12)$$

або,
$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6 \cdot [\sigma], \quad (13.13)$$

Одержані значення допустимих напружень застосовують також і при розрахунках на міцність деталей, які зазнають деформації зрізу (болти, заклепки, шпонки). Для пластичних матеріалів найбільше підходить формула (13.13), яка впливає з енергетичної теорії формозміни. При використанні цієї формули для допустимих напружень на розтяг слід вибирати відповідні значення. Наприклад, для сталі марки Ст3 допустиме напруження на розтяг та стиск при статичному навантаженні $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Тоді, $[\tau] = 0,6 \cdot 160 = 96 \approx 100 \text{ (МПа)}$.

Умова міцності на зсув (зріз) може бути записана у звичайному вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]. \quad (13.14)$$

Значення допустимих напружень на зріз $[\tau]$ залежать від властивостей матеріалу, характеру навантаження та типу елементів конструкції.

Приклад 13.1

Розрахувати допустимі напруження при чистому зсуві для болтового з'єднання (рис. 13.5).

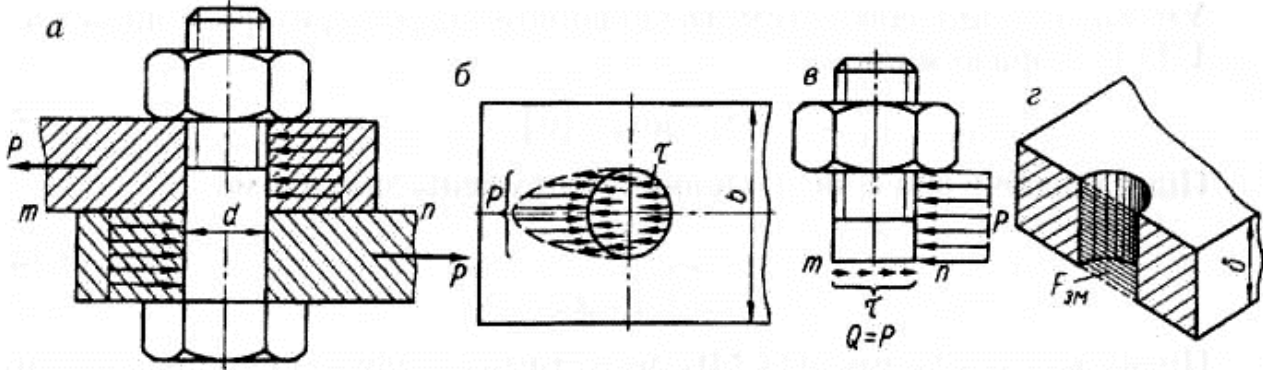


Рис. 13.5.

Розв'язання:

Сили P намагаються зсунути листи один відносно одного. Цьому перешкоджає болт, на який з боку кожного листа передаються розподілені по контактній поверхні сили (рис. 13.5, *a* та *б*). Рівнодійні останніх, що дорівнюють P , напрямлені протилежно (рис. 13.5, *a*). Зусилля намагаються зрізати болт по площині поділу листів $m-n$, оскільки в цьому перерізі діє найбільша поперечна сила $Q=P$ (рис. 13.5, *в*). Вважаючи, що дотичні напруження розподілені по перерізу болта

рівномірно, матимемо: $\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2}$. Отже, умова міцності болта на зріз

набирає вигляду: $\tau_{\max} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} \leq [\tau]. \quad (13.15)$

Звідси можна знайти діаметр болта, який забезпечує міцність болтового

з'єднання: $d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot [\tau]}}. \quad (13.16)$

Сили P , прикладені до болта, намагаються також зігнути його. Проте згинальний момент невеликий, і спричиненими ним нормальними напруженнями можна знехтувати, тим більше що при збільшенні зовнішніх сил P руйнування з'єднання відбудеться від зрізу болта.

При розрахунку болтових, заклепочних та інших подібних з'єднань слід ураховувати те, що навантаження, прикладені до елементів з'єднань, крім зрізу спричиняють зминання поверхні болта в місті його контакту з листом. Під зминанням розуміють пластичну деформацію, яка виникає на поверхнях контакту. Розрахунок на зминання також виконують наближено, оскільки закон розподілу тиску по поверхні контакту точно невідомий. Як правило, вибирають криволінійний закон розподілу навантажень (рис. 13.6), вважаючи, що тиск q по діаметру d змінюється пропорційно зміні проекції площадки dF циліндричної

поверхні на діаметральну площину $\frac{q}{q_1} = \frac{dF}{dF_1}$. Тоді максимальне напруження

зминання на циліндричних поверхнях $\sigma_{зм} = \frac{P}{F_{зм}}$. (13.17)

де $F_{зм}$ — площа проекції поверхні контакту на діаметральну площину листа завтовшки δ (рис. 13.5, з): $F_{зм} = d \cdot \delta$. (13.18)

Умова міцності на зминання має вигляд: $\sigma_{зм} = \frac{P}{d \cdot \delta} \leq [\sigma_{зм}]$. (13.19)

Допустиме напруження на зминання визначають дослідженнями і вибирають його таким, що дорівнює $\sigma_{зм} = (2 \div 2,5) \cdot [\sigma_-]$.

На підставі залежності (13.19) маємо: $d \geq \frac{P}{\delta \cdot [\sigma_{зм}]}$. (13.20)

Для забезпечення умов міцності на зріз та зминання потрібно з двох знайдених діаметрів взяти більший, округливши його до стандартного значення. Ураховуючи, що отвори для болтів чи заклепок ослаблюють листи, останні перевіряють на розрив у найбільш ослаблених перерізах. Якщо болт один (рис.

13.5), умова міцності матиме вигляд: $\sigma = \frac{P}{F_{\min}} = \frac{P}{\delta \cdot (b - d)} \leq [\sigma_+]$. (13.21)

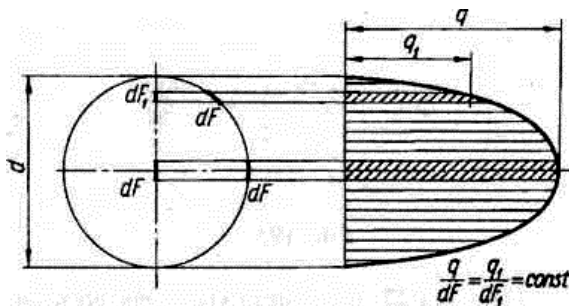


Рис. 13.6.

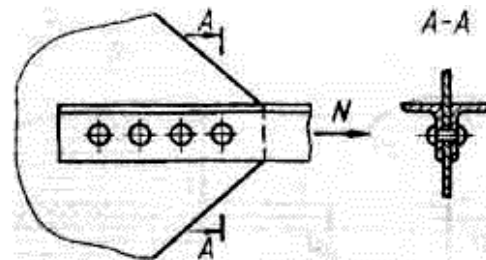


Рис. 13.7.

Приклад 13.2

Визначити кількість заклепок діаметром $d = 23$ мм для закріплення розкошу ферми, який складається з двох нерівнобоких кутників $90 \times 56 \times 8$, до фасонного листа (косинки) завтовшки $\delta = 12$ мм (рис. 13.7). Розтягальне зусилля в розкосі $N = 300$ кН, матеріал — Ст3, отвори для заклепок продавлено.

Розв'язання:

Припускаючи, що зусилля між заклепками розподіляються рівномірно, і зважаючи на те, що вони зазнають подвійного зрізу (одночасно по двох перерізах), **кількість заклепок z знайдемо з умови міцності на зріз:**

$$\tau = \frac{N}{2 \cdot z \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq [\tau], \quad (13.22)$$

або з **умови міцності на зминання** $\sigma_{зм} = \frac{N}{z \cdot d \cdot \delta} \leq [\sigma_{зм}]$. (13.23)

Для сталі Ст3 можна взяти $[\tau] = 100$ МПа і $[\sigma_{зм}] = 280$ МПа, тоді:

а) з розрахунку на зріз $z \geq \frac{N}{2 \cdot [\tau] \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \approx \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Н}}{2 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \frac{3,14 \cdot 23^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2}{4}} \approx 3,6$.

б) з розрахунку на зминання

$$z \geq \frac{N}{[\sigma_{зм}] \cdot d \cdot \delta} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Н}}{2,8 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 3,9.$$

Вибираємо кількість заклепок $z = 4$. У розрахунку на зминання взято товщину фасонного листа $\delta = 12 \text{ мм}$, оскільки сумарна товщина полиць двох кутників $2 \cdot \delta = 24 \text{ мм}$, а отже, напруження зминання в заклепках у місцях контакту з кутниками буде меншим, ніж у місцях контакту з косинкою (вважається, що матеріал заклепок м'якший, ніж матеріал з'єднаних елементів).

Приклад 13.3

Вал передає крутний момент $M_{кр} = 27 \text{ кН} \cdot \text{м}$ за допомогою шліцьового з'єднання (рис. 13.8). Діаметр вала $D = 80 \text{ мм}$, внутрішній діаметр $d = 68 \text{ мм}$, висота шліца $h = 6 \text{ мм}$, ширина шліца $b = 12 \text{ мм}$, довжина з'єднання $l = 100 \text{ мм}$. Кількість шліців $z = 6$. Визначити напруження зрізу та зминання шліца.

Розв'язання:

Вважаючи, що всі шліці навантажені однаково, знайдемо зусилля, яке припадає на один

$$\text{шліць: } P_1 = \frac{M_{кр}}{\frac{d}{2} \cdot z} = \frac{2,7 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}}{\frac{6,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{2} \cdot 6} \approx 132353 \text{ Н}.$$

$$\text{Напруження зрізу } \tau = \frac{P_1}{b \cdot l} = \frac{132353 \text{ Н}}{1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 1 \cdot 10^{-1} \text{ м}} \approx 110,3 \text{ МПа}.$$

$$\text{Напруження зминання } \sigma_{зм} = \frac{P_1}{l \cdot h} = \frac{132353 \text{ Н}}{1 \cdot 10^{-1} \text{ м} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}} \approx 220,6 \text{ МПа}.$$

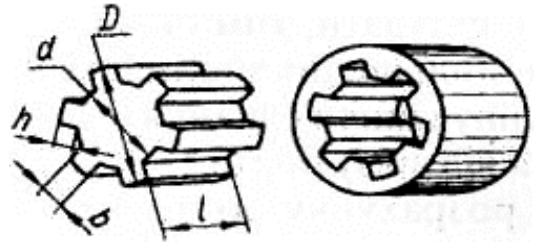


Рис. 13.8.

На зріз прийнято (також умовно) **розраховувати** і деякі **зварні з'єднання**. Виготовляючи металеві конструкції, часто застосовують зварювання електричною дугою. Якщо конструкцію з'єднання, матеріали та технологію зварювання вибрано правильно, то зварне з'єднання за надійністю не поступається заклепочному при дії як статичних, так і динамічних навантажень. Крім того, з'єднання елементів конструкцій за допомогою зварювання має багато переваг, основна з яких — економічність. Найпоширенішими є **стикові з'єднання** та **за допомогою куткових** або **валикових швів**. **Стикові з'єднання застосовують**, якщо листи розміщені в одній площині. Якщо листи завтовшки $\delta \leq 8 \text{ мм}$, їхні кромки не обробляють (рис. 13.9, а); при $\delta = 8 \div 20 \text{ мм}$ кромки скошують і заварюють листи з одного боку (**V-подібний шов**, рис. 13.9, б); при $\delta \geq 20 \text{ мм}$ кромки скошують з двох боків (**X-подібний шов**, рис. 13.9, в). Розрахункову товщину шва вибирають такою, що дорівнює товщині листа δ , напливи не враховують.

З'єднання за допомогою куткових швів роблять, коли з'єднані листи паралельні або перпендикулярні. До них належать **з'єднання внапусток** і **таврові**. Якщо напрям куткового шва перпендикулярний до напрямку дії зусилля, то шов називається **лобовим (торцевим)**. Шви, паралельні зусиллям, мають назву **флангових (бокових)**. Застосовують також **скісні шви** (рис. 13.10), напрямлені під кутом до напрямку дії зусилля. Нарис. 13.11 зображено **з'єднання листів внапусток лобовими швами**, на рис. 13.12 — **з'єднання з накладками**, які приварено **фланговими швами**, а на рис. 13.13 — **таврове з'єднання**.

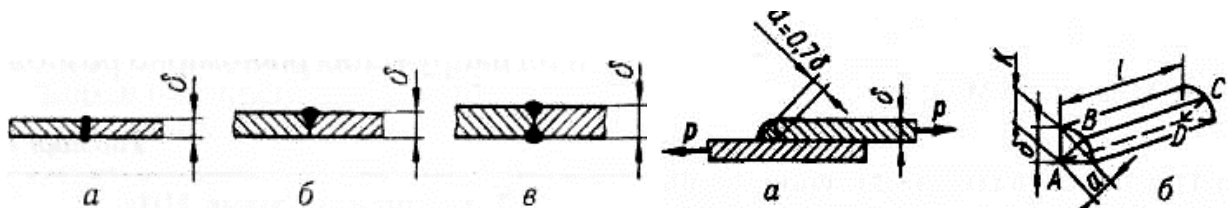


Рис. 13.9.

Рис. 13.14.



Рис. 13.10.

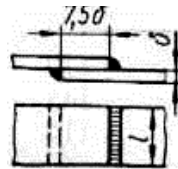


Рис. 13.11.

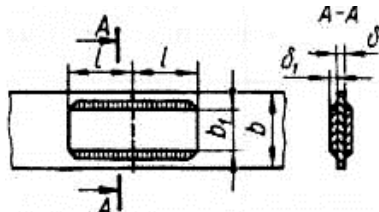


Рис. 13.12.

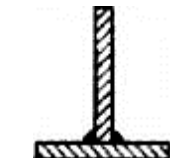


Рис. 13.13.

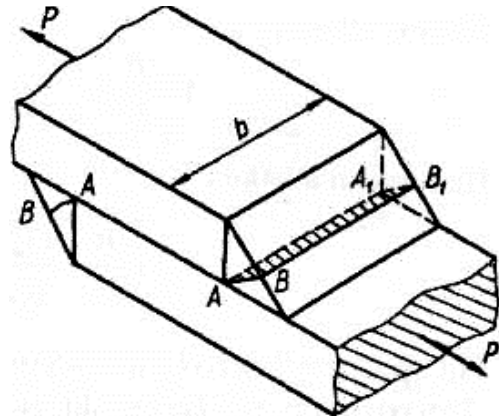


Рис. 13.15.

Якщо не враховувати напливи, то в розрізі кутовий шов має форму рівнобедреного прямокутного трикутника (рис. 13.14, *a*). Руйнування шва відбуватиметься по його мінімальному перерізу *ABCD* (рис. 13.14, *б*) заввишки:

$$a = \delta \cdot \cos 45^\circ \approx 0,7 \cdot \delta. \quad (13.24)$$

Розрахункова площа перерізу шва $F_e = a \cdot l = 0,7 \cdot \delta \cdot l,$ (13.25)

де *l* — **розрахункова довжина шва**. Індекс «е» означає, що вироби зварюються електричною дугою. Зварні з'єднання умовно розраховують у припущенні рівномірності розподілу напружень по перерізу шва. В табл. 13.1 наведено деякі значення допустимих напружень для зварних з'єднань. Ці дані можна використовувати тільки для конструкцій, виготовлених із сталі марки Ст3.

Таблиця 13.1.

Вид напруження	Позначення допустимого напруження	Допустиме напруження, МПа	
		Ручне зварювання електродами з тонкою обмазкою	Автоматичне зварювання та ручне зварювання електродами з товстою обмазкою
Розтяг	$[\sigma_e]$	100	130
Стиск	$[\sigma_e]$	110	145
Зріз	$[\tau_e]$	80	110

Розглянемо на прикладах **розрахунок лобових** та **флангових швів**, тобто таких, які в основному мають протидіяти дотичним напруженням. Враховуючи, що опір сталі зрізу менший, ніж розтяганню, складовою нормального напруження в лобовому шві нехтуємо і розраховуємо його умовно на зріз, припускаючи, що дотичні напруження рівномірно розподілені по площі перерізу *AA₁B₁B* (рис. 9.17). При цьому для з'єднання внапусток у розрахунок вводимо обидва шви — верхній і нижній. Тоді, припустивши, що обидва шви працюють в однакових умовах, маючи **загальну площу небезпечного перерізу**

$$F_e = 2 \cdot a \cdot l_T = 1,4 \cdot \delta \cdot l_T, \quad (13.26)$$

де *l_T* — **розрахункова довжина торцевого шва, умову міцності шва** запишемо в такому вигляді:

$$\tau = \frac{P}{F_e} = \frac{P}{1,4 \cdot \delta \cdot l_T} \leq [\tau_e]. \quad (13.27)$$

Оскільки на початку та в кінці шва внаслідок непровару його якість погіршується, дійсну його довжину збільшуємо порівняно з розрахунковою на 10 мм, тобто $l = l_T + 0,01$, де l — **дійсна довжина шва** (на рис. 13.15 — $l = b$).

Внаслідок невеликої деформативності матеріалу шва в напрямі дії сили лобові шви жорсткі, тому вони руйнуються при дуже малих залишкових деформаціях і погано протидіють повторно-змінним та ударним навантаженням.

Більш поширені на практиці **флангові шви**. Вони належать до **в'язких**, оскільки руйнуються лише після великих залишкових деформацій. Флангові шви завжди ставлять парами; ці шви працюють на зріз у бісекторних перерізах (рис. 13.16). **Площа зрізу кожного шва** $F_\phi = a \cdot l_\phi = 0,7 \cdot \delta \cdot (l - 0,01)$. (13.28)

$$\text{Умова міцності на зріз буде } \tau = \frac{P}{1,4 \cdot \delta \cdot (l - 0,01)} \leq [\tau_e]. \quad (13.29)$$

Приклад 13.4

Визначити потрібні розміри флангових швів (рис. 13.16), що з'єднують штаби. Розтягальна сила $P = 140 \text{ кН}$, а допустиме напруження на зріз для металу шва $[\tau_e] = 110 \text{ МПа}$; $\delta = 1 \text{ см}$; $\delta_1 = 0,8 \text{ см}$; $b = 10 \text{ см}$; $b_1 = 12,5 \text{ см}$.

Розв'язання:

З умови міцності (13.29) визначаємо потрібну довжину шва:

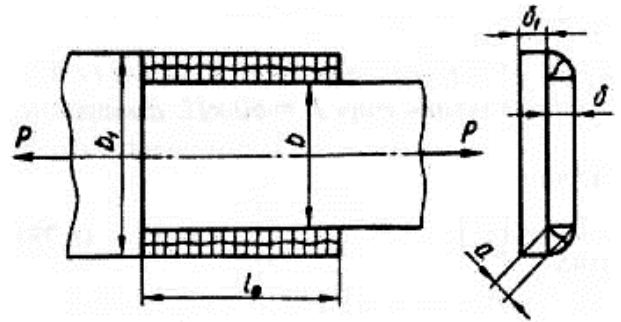


Рис. 13.16.

$$l \geq \frac{P}{1,4 \cdot \delta \cdot [\tau_e]} + 0,01 = \frac{1,4 \cdot 10^5 \text{ Н}}{1,4 \cdot 1 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 1,1 \cdot 10^8 \text{ Па}} + 0,01 \text{ м} \approx 0,101 \text{ м}.$$

Приклад 13.5

Знайти потрібні довжини l_1 та l_2 , флангових швів (рис. 13.17), які з'єднують рівнобокий кутник № 5 з косинкою, при дії навантаження $P = 60 \text{ кН}$. Взяти $[\tau_e] = 90 \text{ МПа}$.

Розв'язання:

Умова міцності на зріз двох швів має

$$\text{вигляд: } \tau = \frac{P}{(l_1 + l_2) \cdot \delta \cdot \cos 45^\circ} \leq [\tau_e], \quad (13.30)$$

де δ — товщина полиці кутника.

Загальна довжина швів при $\delta = 5 \text{ мм}$

$$l_1 + l_2 \geq \frac{P}{[\tau_e] \cdot \delta \cdot \cos 45^\circ} \approx \frac{6 \cdot 10^4 \text{ Н}}{9 \cdot 10^7 \text{ Па} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 0,707} \approx 0,19 \text{ м} = 19 \text{ см}.$$

Щоб забезпечити однакові умови роботи обох швів, треба співвідношення для швів вибрати зворотним співвідношенням відстаней h_1 та h_2 , що визначають положення центра ваги кутника, через який проходить сила P , тобто

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_2}{h_1}. \text{ При } h_1 = 3,6 \text{ см та } h_2 = 1,4 \text{ см, маємо } \frac{l_1}{l_2} = \frac{1,4}{3,6} \approx 0,4. \text{ Тоді}$$

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = 19 \text{ см;} \\ l_1 = 0,4 \cdot l_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,4 \cdot l_2 + l_2 = 19 \text{ см;} \\ l_1 = 0,4 \cdot l_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2 = \frac{19}{1,4} \text{ см;} \\ l_1 = 0,4 \cdot l_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2 \approx 13,6 \text{ см;} \\ l_1 \approx 5,4 \text{ см.} \end{cases}$$

Розглянемо приклад розрахунку **врубку**, яку використовують для з'єднання дерев'яних елементів конструкцій. Деревина — матеріал анізотропний, тобто її механічні характеристики залежать від напрямку силових дій відносно орієнтації поздовжніх волокон (границя міцності для сосни вздовж волокон 40 МПа, впоперек — 5 МПа, для дуба відповідно 50 та 15 МПа). Внаслідок цього допустимі напруження для різних напрямів дії сили доводиться вибирати різними (табл. 13.2).

Приклад 13.6

Розрахувати з'єднання кроквяної ноги з кроквяною затяжкою (рис. 13.18). Кут між осями кроквяної ноги і затяжки $\alpha = 30^\circ$. Зусилля, що діє вздовж кроквяної ноги, $N = 50 \text{ кН}$. Матеріал — сосна, допустиме напруження на зминання вздовж волокон — 8 МПа. Переріз ноги крокви $h \times b = 20 \times 20 \text{ см}$.

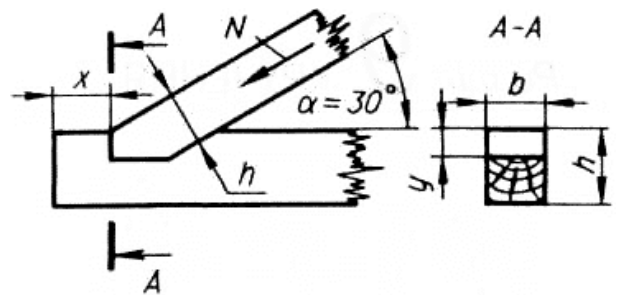


Рис. 13.18.

Кінець затяжки зазнає сколювання вздовж волокон під дією горизонтальної проекції N_1 сили N : $N_1 = N \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot 0,866 = 43,3 \text{ (кН)}$.

Довжину x затяжки, що стирчить за врубку, визначимо з умови:

$$\tau_{\max} = \frac{N_1}{F_{ск}} = \frac{N_1}{b \cdot x} \leq [\tau]. \quad (13.31)$$

Взявши $[\tau] = 0,8 \text{ МПа}$, знаходимо площу сколювання: $F_{ск} \geq \frac{N_1}{[\tau]}$.

$$\text{Тоді } x \geq \frac{N_1}{b \cdot [\tau]} = \frac{4,33 \cdot 10^4 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{-1} \text{ м} \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ Па}} \approx 0,271 \text{ м} = 27,1 \text{ см}.$$

$$\text{Потрібна } \underline{\text{площа зминання врубку}} \quad F_{ск} = b \cdot y \geq \frac{N_1}{[\sigma_{зм}]} \quad (13.32)$$

$$\underline{\text{Глибина врубку}} \quad y \geq \frac{N_1}{b \cdot [\sigma_{зм}]} = \frac{4,33 \cdot 10^4 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{-1} \text{ м} \cdot 8 \cdot 10^6 \text{ Па}} \approx 0,027 \text{ м} = 2,7 \text{ см}.$$

Беремо $y = 3 \text{ см}$.

Таблиця 13.2.

Види напружень	Позначення допустимого напруження	Допустиме напруження, МПа	
		Сосна	Дуб
Розтяг	$[\sigma_p]$	10	13
Стиск уздовж волокон і зминання торця	$[\sigma_{ст}]$	12	15
Зминання у врубках уздовж волокон	$[\sigma_{зм}]$	8	11
Те саме, перпендикулярно до волокон (на довжині більшій ніж 10 см)	$[\sigma_{зм90^\circ}]$	2,4	4,8
Сколювання у врубках уздовж волокон	$[\tau_{ск}]$	0,5÷1,0	0,8÷1,4
Те саме, поперек волокон	$[\tau_{ск90^\circ}]$	0,6	0,8
Згин	$[\sigma_{зг}]$	12	15
Сколювання при згині	$[\tau_{ск,зг}]$	2	2,8

Запитання для самоконтролю

1. Поясніть, за яких умов відбувається деформація зсуву?
2. З'ясуйте, чим зсув відрізняється від зрізу та зминання?
3. Наведіть та поясніть формули для напружень при розрахунку на зріз стрижневих елементів конструкцій.
4. Поясніть, чому припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу досить умовне?
5. Що називається чистим зсувом?
6. Визначте головні напруження та їхні напрями (головні площадки) при чистому зсуві.
7. Поясніть, чому деформація чистого зсуву характеризується зміною початкових прямих кутів?
8. Що називається кутом зсуву (відносним зсувом) та абсолютним зсувом?
9. З'ясуйте, що називається діаграмою зсуву з відповідними границею пропорційності τ_{mi} , границею текучості τ_m та границею міцності τ_e ?
10. Що називається модулем пружності при зсуві або модулем пружності другого роду?
11. З'ясуйте, яка існує залежність між модулем пружності G при зсуві та модулем пружності E при розтяганні для ізотропних матеріалів?
12. Наведіть та поясніть закон Гука при чистому зсуві.
13. Чим визначається повна та питома потенціальні енергії деформації елемента при чистому зсуві?
14. Наведіть умови міцності при чистому зсуві за II теорією міцності.
15. Охарактеризуйте умови міцності при чистому зсуві за III теорією міцності.
16. Поясніть умови міцності при чистому зсуві за IV теорією міцності.
17. Наведіть умову міцності на зсув (зріз) у звичайному вигляді.
18. З'ясуйте, від чого залежать значення допустимих напружень на зріз $[\tau]$?
19. Наведіть умову міцності болта на зріз.
20. Охарактеризуйте особливості розрахунку на зминання.
21. Визначте кількість заклепок для закріплення розкосу ферми, який складається з двох нерівнобоких кутників, до фасонного листа (косинки).
22. Наведіть та охарактеризуйте найпоширеніші зварні з'єднання.
23. З'ясуйте особливості розрахунку на зріз зварних з'єднань.
24. Проаналізуйте розрахунок на міцність врубки, яку використовують для з'єднання дерев'яних елементів конструкцій.

Лекція № 14

Тема: «Деформування крученням»

ПЛАН

- 14.1. Напруження і деформації при крученні.
- 14.2. Аналіз напруженого стану і руйнування при крученні.
- 14.3. Розрахунок валів на міцність і жорсткість при крученні.
- 14.4. Кручення стрижнів некруглого перерізу.
- 14.5. Кручення тонкостінних стрижнів.

14.1. Напруження і деформації при крученні

Деформація кручення спричинюється парами сил, площини дії яких перпендикулярні до осі стрижня. Тому при крученні в довільному поперечному перерізі стрижня з шести внутрішніх силових факторів має місце тільки один — **крутний момент** $M_{кр}$ (рис. 14.1). **Поперечні перерізи стрижня при крученні повертаються один відносно одного навколо осі стрижня, при цьому довжина стрижня не змінюється.**

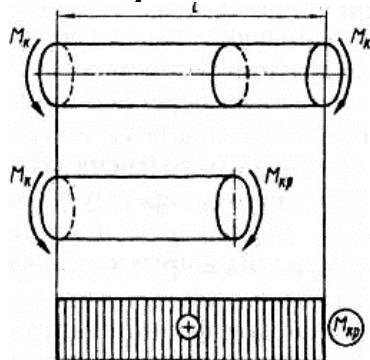


Рис. 14.1.

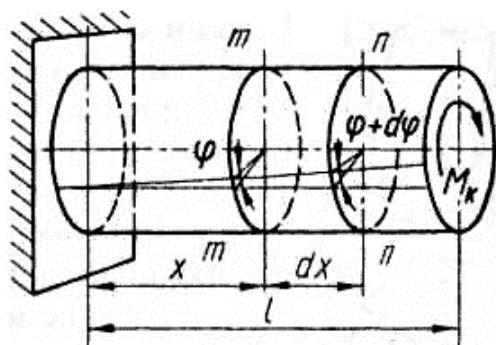


Рис. 14.2.

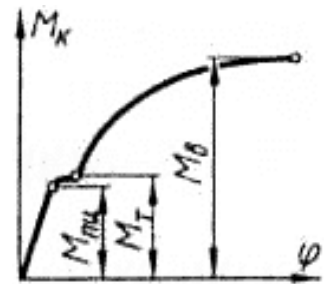


Рис. 14.3.

Валами називають стрижні, що працюють на кручення.

Розглянемо **кручення вала** за схемою, наведеною на рис. 14.2. Під дією **скручувального моменту** M_k , прикладеного на вільному кінці, будь-який переріз на відстані x від місця закріплення повертається відносно закріпленого перерізу на певний кут φ — **кут закручування**. При цьому **чим більший скручувальний момент** M_k , **тим більший і кут закручування** φ .

Залежність $\varphi = f(M_k)$, які називаються **діаграмами кручення**, можна дістати експериментально на відповідних випробувальних машинах за допомогою спеціального записувального пристрою. Вигляд такої діаграми (знятої при поступовому збільшенні навантаження аж до руйнування) для вала завдовжки l , виготовленого з пластичного матеріалу, наведено на рис. 14.3.

Діаграма кручення подібна до діаграми розтягання — характерні ділянки та точки аналогічні тим, які є на діаграмі розтягання: M_{nc} — момент, до якого зберігається прямолінійна залежність між навантаженням та деформацією; M_T — момент, що відповідає початку текучості; M_B — крутний момент, який спричинює руйнування вала.

При виведенні **формул для визначення напружень та кута закручування** розглянемо відрізок діаграми кручення, який відповідає роботі матеріалу в **межах пропорційності**, тобто початковий прямолінійний відрізок, який характеризує **лінійну залежність між крутним моментом і кутом закручування**, що має місце при нормальних умовах роботи вала.

Для визначення напружень у поперечних перерізах стрижня розглянемо

насамперед *статичний аспект задачі*. Оскільки при крученні $M_{кр}$ — єдиний внутрішній силовий фактор у поперечному перерізі вала, то тут діють тільки дотичні напруження. Тоді п'ять інтегральних рівнянь (10.14) — (10.18) тотожно перетворюються на нуль, а рівняння (10.19) набирає вигляду

$$M_{кр} = \int_F \rho \cdot \tau \cdot dF, \quad (14.1)$$

де τ — дотичне напруження, що діє на елементарній площадці dF , розміщеній на довільній відстані ρ від центра перерізу (рис. 14.4, б).

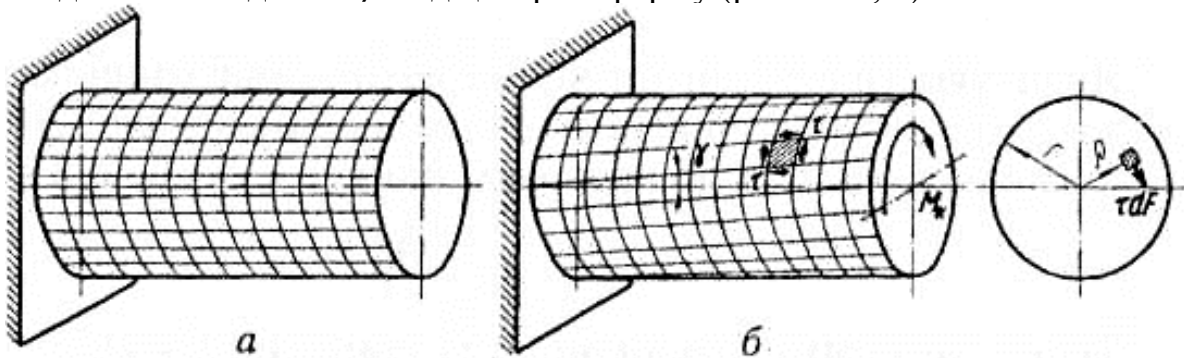


Рис. 14.4.

Характер розподілу напружень по перерізу з'ясуємо, розглянувши *геометричну картину деформації вала при крученні*. Для цього на поверхні круглого вала нанесемо ортогональну сітку, утворену лініями, паралельними осі, та лініями, що є паралельними колами (рис. 14.4, а). Після прикладання скручувального моменту спостерігаємо таке: поздовжні прямі лінії перетворюються на гвинтові, тобто лінії однаково нахилени до осі стрижня, паралельні кола не викривляються і відстань між ними практично залишається незмінною; радіуси, проведені в торцевих перерізах, залишаються прямими. Вважаючи, що картина, яку ми спостерігаємо на поверхні вала, зберігається і всередині, дійдемо гіпотези плоских перерізів: *перерізи, плоскі до деформації, залишаються плоскими при крученні круглого стрижня, повертаючись один відносно одного на деякий кут закручування*.

Розглянемо деякий відрізок вала завдовжки dx (рис. 14.5), виділений з розглядуваного вала (див. рис. 14.2). Вал скручується зовнішнім моментом M_k , який спричинює в поперечних перерізах внутрішні крутні моменти $M_{кр}$. Нехай кут повороту поперечного перерізу $m-m$ відносно нерухомого місця закріплення вала буде φ , тоді кут повороту перерізу $n-n$, розміщеного на відстані dx від перерізу $m-m$, буде $\varphi + d\varphi$. Отже, кут закручування відрізка стрижня завдовжки dx дорівнює $d\varphi$.

Розглянемо деформацію прямокутного елемента $ab'd'c$ нескінченно малої товщини, виділеного у поверхні вала. Оскільки радіуси при деформації кручення залишаються прямими, то відрізок $O'b'$, повертаючись в площині поперечного перерізу на кут закручування $d\varphi$, займе положення $O'b$. При цьому твірна ab' переміститься в нове положення ab ,

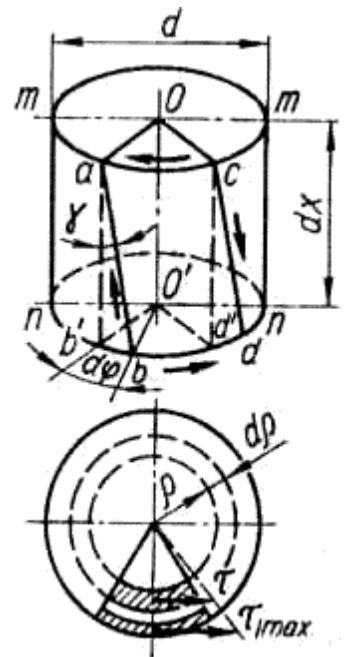


Рис. 14.5.

утворивши з початковим кут γ . Аналогічно твірна cd' перейде в положення cd . Оскільки довжина цих відрізків практично залишається незмінною, то деформація прямокутного елемента $ab'd'c$ полягає в зміні початкових прямих кутів на кут γ . Отже, розглянутий елемент перебуває в умовах чистого зсуву, і на його

гранях діють дотичні напруження (рис. 14.5, 14.6). Отже, кут γ є кутом

відносного зсуву і:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b'b}{ab'} \approx \gamma. \quad (14.2)$$

Ураховуючи, що $ab' = dx$, а $bb' = r \cdot d\varphi$, кут зсуву на поверхні скручуваного стрижня можна подати у вигляді

$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (14.3)$$

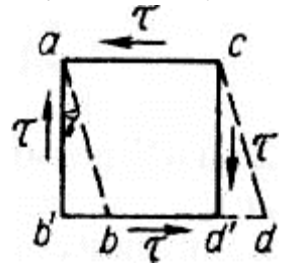


Рис. 14.6

Величина $\frac{d\varphi}{dx}$ є відносним кутом закручування [виражається в сантиметрах у мінус першому степені (см^{-1})] і позначається Θ . Враховуючи це, формулу (14.3) можна записати так:

$$\gamma = \Theta \cdot r. \quad (14.4)$$

Якщо уявити собі аналогічний елемент, виділений всередині стрижня на довільній циліндричній поверхні радіуса ρ (див. рис. 14.5), то аналогічні міркування приведуть до висновку, що кут зсуву на цій поверхні:

$$\gamma_\rho = \Theta \cdot \rho. \quad (14.5)$$

Тепер, дотримуючись прийнятих етапів розв'язання задач опору матеріалів, розглянемо фізичний аспект задачі. Оскільки елемент стрижня в будь-якій точці поперечного перерізу на відстані ρ від центра перерізу зазнає чистого зсуву, то з урахуванням (14.5) та (13.5) матимемо:

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \Theta \cdot \rho, \quad (14.6)$$

де G — модуль пружності при зсуві або модуль пружності другого роду.

Формули (14.5) та (14.6) показують, що кути зсуву та дотичні напруження в поперечному перерізі змінюються за лінійним законом прямо пропорційно відстані ρ точок від центра перерізу (рис. 14.7, а).

Максимальні дотичні напруження будуть на поверхні стрижня при $\rho = r$. Тому, вираз (14.6) можна переписати у вигляді:

$$\tau_r = \tau_{\max} = G \cdot \Theta \cdot r. \quad (14.7)$$

Підставляючи (14.6) в (14.1), дістанемо

$$M_{кр} = G \cdot \Theta \cdot \int_F \rho^2 \cdot dF = G \cdot \Theta \cdot J_p.$$

Звідси виведемо формулу для визначення

відносного кута закручування круглого стрижня:

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p}. \quad (14.8)$$

Тут $G \cdot J_p$ — жорсткість поперечного перерізу стрижня при крученні, $\text{Н} \cdot \text{м}^2$
 J_p — полярний момент інерції круглого стрижня, який для суцільного

стрижня діаметром d виражається формулою $J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, а для трубчастого стрижня з внутрішнім діаметром $d_в$ і зовнішнім діаметром $d_з$:

$$J_p = \frac{\pi \cdot (d_з^4 - d_в^4)}{32} = \frac{\pi \cdot d_з^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4), \text{ де } \alpha = \frac{d_в}{d_з}.$$

На підставі (14.8) можна записати формулу для визначення взаємного кута закручування двох перерізів, розміщених на відстані l :

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p} \cdot dx. \quad (14.10)$$

Якщо в межах циліндричного відрізка стрижня завдовжки l крутні моменти в перерізах не змінюються, то $\varphi = \Theta \cdot l = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_p}$. (14.11)

Ця формула встановлює зв'язок при крученні між силовим фактором ($M_{кр}$) та відповідною деформацією кручення (кутом закручування φ) і виражає **закон Гука при крученні**.

Для визначення дотичного напруження τ у будь-якій точці перерізу вала під дією крутного моменту досить у формулу (14.6) підставити вираз для відносного кута закручування Θ за формулою (14.8). Тоді

$$\tau_\rho = G \cdot \Theta \cdot \rho = G \cdot \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p} \cdot \rho = \frac{M_{кр} \cdot \rho}{J_p}. \quad (14.12)$$

Максимальне дотичне напруження, яке діє в зовнішньому шарі матеріалу стрижня,

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot r}{J_p} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (14.13)$$

де $W_p = \frac{J_p}{r}$ (14.14)

— **полярний момент опору при крученні, см³**.

Для **суцільного круглого перерізу полярний момент та максимальне дотичне напруження** будуть: $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$, $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d^3}$. (14.15)

Для **трубчастого круглого перерізу полярний момент та максимальне дотичне напруження** будуть:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d_3^3 \cdot (1 - \alpha^4)}{16}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d_3^3 \cdot (1 - \alpha^4)}. \quad (14.16)$$

Отже, **максимальне дотичне напруження в скручуваному круглому стрижні пропорційне крутному моменту $M_{кр}$ та обернено пропорційне кубу зовнішнього діаметра стрижня**. Діставши формули для визначення максимального дотичного напруження та деформації при крученні, можна записати **рівняння міцності та жорсткості при крученні**. Згідно з формулою (14.13),

умова міцності запишеться так: $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]$, (14.17)

де $[\tau]$ — **допустиме напруження при крученні**. Момент опору W_p на підставі

$$(10.17): \quad W_p \geq \frac{M_{кр}}{[\tau]}. \quad (14.18)$$

Умова жорсткості, згідно з формулою (14.8),

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p} \leq [\Theta], \quad (14.19)$$

звідки $J_p \geq \frac{M_{кр}}{G \cdot [\Theta]}$. (14.20)

Тут $[\Theta]$ — **допустимий відносний кут закручування**.

14.2. Аналіз напруженого стану і руйнування при крученні

Аналізуючи загальну формулу (14.12) для визначення дотичних напружень τ при крученні, бачимо, що в *будь-якій точці площини перерізу вала напруження розподілені нерівномірно і залежно від радіуса змінюються за лінійним законом від нуля в центрі перерізу до максимуму на його периферії* (рис. 14.7, а). Внаслідок *закону парності дотичних напружень* в поздовжніх перерізах, що проходять через вісь вала, також виникають такі самі за значенням дотичні напруження (рис. 14.7, б). В елементі матеріалу, уявно виділеного із зовнішніх шарів матеріалу вала перерізами, паралельними та перпендикулярними до твірної (рис. 14.8) циліндричного вала, по гранях діятимуть тільки дотичні напруження. В перерізах, нахилених до осі, діятимуть також і нормальні напруження, як це зазначалося при розгляді напруженого стану елемента в умовах чистого зсуву. Найбільші нормальні напруження діють на головних площадках, які нахилені під кутом 45° до площадок, де діють дотичні напруження чистого зсуву (при крученні під кутом 45° до осі вала).

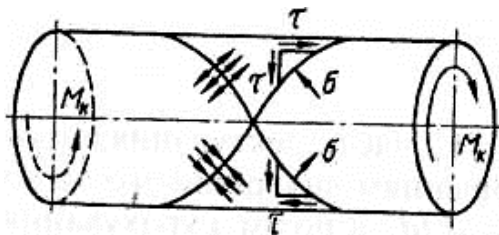


Рис. 14.8.

Отже, *при крученні круглих валів небезпечними можуть бути як дотичні напруження в поперечних та поздовжніх перерізах вала, так і нормальні напруження, що виникають в площадках під кутом 45° до перших*. Тобто, *характер руйнування вала при крученні залежатиме від здатності матеріалу протидіяти дотичним нормальним напруженням*.

Якщо матеріал погано чинить опір дотичним напруженням (дії зсуву деревини вздовж волокон), то перші тріщини руйнування виникають по твірних у місцях дії максимальних дотичних напружень (рис. 14.9). Якщо матеріал погано чинить опір дії нормальних напружень (чавун), то тріщини руйнування при крученні пройдуть по лініях, нормальних до дії головних розтягальних напружень, тобто по гвинтових лініях, дотичні до яких утворюють кут 45° з віссю вала (рис. 14.10). Сталеві вали на практиці часто руйнуються по поперечному перерізу, перпендикулярному до осі вала. Цей тип руйнування обумовлений дією в поперечному перерізі дотичних напружень.

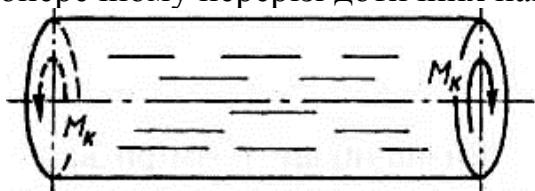


Рис. 14.9.

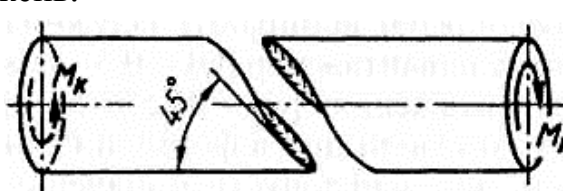


Рис. 14.10.

14.3. Розрахунок валів на міцність і жорсткість при крученні

При проектуванні можна рекомендувати такий порядок розрахунку валів на міцність і жорсткість при крученні. За схемою вала і скручувальними моментами, що діють на нього, будують епюри крутних моментів по окремих відрізках (див. п. 11.2). Добирають матеріал для вала і визначають для цього матеріалу допустиме напруження $[\tau]$. Записують умову міцності (14.17) для відрізка вала з максимальним значенням крутного моменту (згідно з епюрою моментів). Якщо вал досить довгий і по окремих його відрізках діють істотно різні за модулем крутні моменти, то його слід конструювати східчастим. При цьому діаметр вала кожного східця розраховують, виходячи з тієї самої формули (14.17), але крутні моменти при цьому будуть різні для різних відрізків відповідно до епюри крутних моментів.

Ураховуючи, що для суцільного круглого вала $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$, можна на підставі виразу (14.18) записати **розрахункову формулу для визначення діаметра**

вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot [\tau]}} \quad (14.21)$$

Під час проектування порожнистого вала спочатку задаються співвідношенням внутрішнього та зовнішнього діаметрів, тобто коефіцієнтом $\alpha = \frac{d_6}{d_3}$, а потім з урахуванням (14.16) на підставі формули (14.18) знаходять **зовнішній**

діаметр вала:

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - \alpha^4)}} \quad (14.22)$$

Визначивши розміри вала з умови міцності, перевіряють вал на жорсткість, використовуючи для цього умову жорсткості (14.19).

Допустиму відносну жорсткість вала, яка характеризується відносним кутом закручування $[\Theta]$, вибирають залежно від умов навантаження. Так, при статичному навантаженні $[\Theta] = 0,3^\circ$ на кожний метр довжини вала; при змінних навантаженнях $[\Theta] = \frac{0,25^\circ}{m}$, а при ударних навантаженнях $[\Theta] = \frac{0,5^\circ}{m}$. Ураховуючи, що в формулі (14.19) кут закручування виражений у радіанах, наведені допустимі значення кутів треба перевести в радіани, помноживши їх на $\frac{\pi}{180^\circ}$. Якщо при перевірці виявиться, що умова жорсткості (14.19) виконується, то на цьому, як правило, закінчують розрахунок вала. Інакше розміри вала треба добирати з умови жорсткості (14.20): $J_p \geq \frac{M_{кр}}{G \cdot [\Theta]}$.

Підставляючи в цю формулу вираз полярного моменту інерції, знайдемо,

що для **суцільного вала:**

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}}{G \cdot \pi \cdot [\Theta]}} \quad (14.23)$$

для **порожнистого вала:**

$$d_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}}{G \cdot \pi \cdot [\Theta] \cdot (1 - \alpha^4)}} \quad (14.24)$$

Іноді при розрахунку вала відома потужність **K, Вт**, яка ним передається, та частота обертання $n, \frac{об}{хв}$. Тоді скручувальний момент у розрахункових формулах можна виразити безпосередньо через потужність **K** та частоту обертання

n, виходячи з формули (11.5): $M_k = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{K}{n} \approx 9,55 \cdot \frac{K}{n} \text{ (Н} \cdot \text{м)}$. (14.25)

Раніше в технічній літературі використовувалася позасистемна одиниця потужності — **кінська сила** (1 к.с. = 736 Вт). Якщо потужність, що передається або знімається, дорівнює $N, \text{ к.с.}$, то $K = 736 \cdot N$ і з виразу (14.25) для скручувального моменту одержимо:

$$M_k = 736 \cdot \frac{30}{\pi} \cdot \frac{N}{n} \approx 7028 \cdot \frac{N}{n} \text{ (Н} \cdot \text{м)}$$
. (14.26)

Приклад 14.1

Знайти потужність у кіловатах, яка передається валом діаметром $d = 150 \text{ мм}$ з частотою обертання $n = 120 \text{ хв}^{-1}$. Модуль зсуву $G = 8,4 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, кут закручування φ відрізка вала завдовжки $7,5 \text{ м}$ дорівнює $\frac{1}{15} \text{ рад}$.

Дано:

$$d = 0,15 \text{ м}, n = 120 \text{ хв}^{-1},$$

$$G = 8,4 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$l = 7,5 \text{ м}, \varphi = \frac{1}{15} \text{ рад}$$

K — ?

Розв'язання:

З формули (14.11) одержимо

$$M_{кр} = \frac{\varphi \cdot G \cdot J_p}{l} = \frac{\varphi \cdot G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}}{l} \quad (\text{Н} \cdot \text{м})$$

Тоді, скориставшись формулою (14.25), визначимо потужність, яка передається валом:

$$K = \frac{M_{кр} \cdot \pi \cdot n}{30} = \frac{\frac{\varphi \cdot G \cdot \pi \cdot d^4}{32} \cdot \pi \cdot n}{30} = \frac{\varphi \cdot G \cdot \pi^2 \cdot d^4 \cdot n}{960 \cdot l} \approx$$

$$\approx \frac{\frac{1}{15} \cdot 8,4 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 3,14^2 \cdot (0,15)^4 \text{ м}^4 \cdot 120 \text{ с}^{-1}}{960 \cdot 7,5 \text{ м}} \approx 465866 \text{ Вт} \approx 466 \text{ кВт}$$

Приклад 14.2

З умов міцності та жорсткості визначте діаметр суцільного вала (рис. 14.11) при таких значеннях моментів, які передаються шківками: $M_1 = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_3 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_4 = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Допустиме напруження $[\tau] = 20 \text{ МПа}$, допустимий відносний кут закручування $[\Theta] = \frac{1}{4} \frac{1^\circ}{\text{м}}$, або

$[\Theta] = \frac{\pi}{180 \cdot 4} \text{ м}^{-1}$. Модуль пружності сталі при зсуві $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

$[\Theta] = \frac{\pi}{180 \cdot 4} \text{ м}^{-1}$. Модуль пружності сталі при зсуві $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Розв'язання:

Будуємо епюру крутних моментів. Найбільший момент діє на відрізку вала 2–3: $M_{кр \max} = M_1 + M_2 =$

$$= 0,6 + 0,8 = 1,4 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

Доберемо діаметр вала з **умови міцності**, використовуючи формулу (14.21):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^7 \text{ Па}}} \approx 0,07 \text{ м} = 7 \text{ см}.$$

Тепер доберемо діаметр вала з **умови жорсткості**, використовуючи формулу (14.23):

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}}{G \cdot \pi \cdot [\Theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 3,14 \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 4} \frac{1}{\text{м}}}} \approx 0,08 \text{ м} = 8 \text{ см}.$$

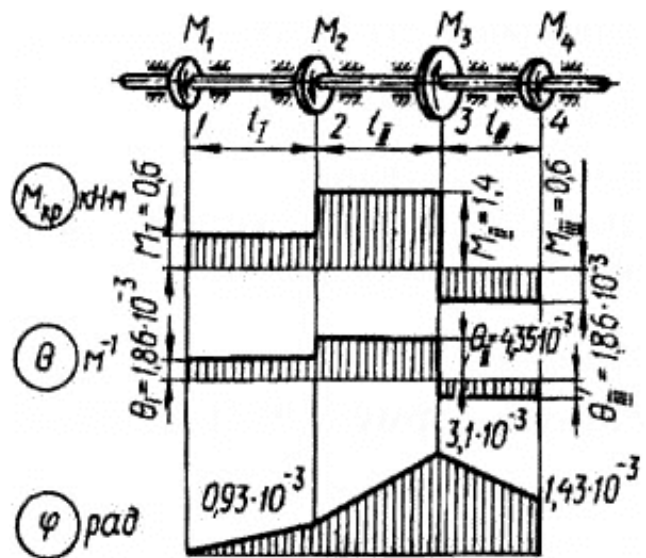


Рис. 14.11.

Із двох діаметрів слід вибрати більший ($d = 8 \text{ см}$), знайдений з умови жорсткості. Тепер визначимо **відносні кути закручування вала по окремих відрізках**, використовуючи формулу (14.8). Підставляючи в цю формулу значення $M_{кр}$ для різних відрізків, знайдемо:

$$\Theta_{1-2} = \frac{M_{кр1-2}}{G \cdot J_p} = \frac{M_{кр1-2}}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} \approx \frac{32 \cdot 0,6 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \approx 1,86 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1};$$

$$\Theta_{2-3} = \frac{M_{кр2-3}}{G \cdot J_p} = \frac{M_{кр2-3}}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} \approx \frac{32 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \approx 4,35 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1};$$

$$\Theta_{3-4} = \frac{M_{кр3-4}}{G \cdot J_p} = \frac{M_{кр3-4}}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} \approx \frac{32 \cdot (-0,6 \cdot 10^3) \text{ Н} \cdot \text{м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \approx -1,86 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Знаючи **відносні кути закручування по окремих відрізках**, можна побудувати епюри Θ та **кутів закручування φ** по довжині вала (рис. 14.11). Епюру **кутів закручування φ** побудовано при $l_{1-2} = l_{2-3} = 0,5 \text{ м}$ та $l_{3-4} = 0,9 \text{ м}$. При цьому один з перерізів нерухомий (на рис. 14.11 це переріз \mathbf{I}). Оскільки в межах кожного відрізка $\Theta = \text{const}$, то **кут закручування на кожному відрізку змінюється за лінійним законом**:

$$\varphi_{2-1} = \Theta_{1-2} \cdot l_{1-2} = 1,86 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1} \cdot 0,5 \text{ м} = 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)};$$

$$\varphi_{3-1} = \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} = \Theta_{1-2} \cdot l_{1-2} + \Theta_{2-3} \cdot l_{2-3} = 0,93 \cdot 10^{-3} + 2,18 \cdot 10^{-3} = 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)};$$

$$\begin{aligned} \varphi_{4-1} &= \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} + \varphi_{4-3} = \Theta_{1-2} \cdot l_{1-2} + \Theta_{2-3} \cdot l_{2-3} + \Theta_{3-4} \cdot l_{3-4} = \\ &= 0,93 \cdot 10^{-3} + 2,18 \cdot 10^{-3} - 1,67 \cdot 10^{-3} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)}. \end{aligned}$$

Приклад 14.3

Визначити, на скільки процентів збільшиться максимальне напруження вала при крученні, якщо у валу зроблено аксіальний отвір $d_B = 0,4 \cdot d_3$ ($\alpha = 0,4$).

Розв'язання:

На підставі формул (14.15) та (14.16), взявши $d_3 = d$, знайдемо максимальні дотичні напруження для суцільного і порожнистого валів:

$$\tau_{\text{max}_{\text{суц}}} = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d^3}, \quad \tau_{\text{max}_{\text{порож}}} = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d^3 \cdot (1 - \alpha^4)}.$$

Шукана різниця в напруженнях буде

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= \frac{\tau_{\text{max}_{\text{порож}}} - \tau_{\text{max}_{\text{суц}}}}{\tau_{\text{max}_{\text{суц}}}} = \frac{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d^3 \cdot (1 - \alpha^4)} - \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d^3}}{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d^3}} \cdot 100 \% = \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha^4)} - 1 \cdot 100 \% = \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} \cdot 100 \% \approx 2,6 \%. \end{aligned}$$

Приклад 14.4

Суцільний вал діаметром $d = 300$ мм замінили порожнистим рівномічним валом із зовнішнім діаметром $d_3 = 350$ мм. Знайдіть внутрішній діаметр порожнистого вала d_B та порівняйте ваги цих валів.

Розв'язання:

Максимальні дотичні напруження в обох валах мають бути однаковими:

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot d_3^3 \cdot (1 - \alpha^4)}. \quad \text{Звідси визначимо коефіцієнт } \alpha:$$

$$\alpha = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{d}{d_3}\right)^3} = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{0,3 \text{ м}}{0,35 \text{ м}}\right)^3} \approx 0,78.$$

Внутрішній діаметр порожнистого вала $d_B = \alpha \cdot d_3 = 0,78 \cdot 350 = 273$ (мм).

Співвідношення ваги дорівнює співвідношенню площ поперечних перерізів:

$$\frac{\frac{\pi \cdot (d_3^2 - d_B^2)}{4}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{d_3^2 - d_B^2}{d^2} = \frac{350^2 - 273^2}{300^2} \approx 0,534.$$

З прикладів 14.3 та 14.4 видно, що виготовлення порожнистих валів, тобто валів, у яких малонавантажену внутрішню частину вилучено, — велими ефективний засіб зниження затрат матеріалу, а отже, і зниження ваги валів. При цьому максимальні напруження, що виникають у порожнистому валу, мало відрізняються від максимальних напружень у валу суцільного перерізу при тому самому зовнішньому діаметрі. Так, у прикладів 14.3 за рахунок свердління при $\alpha = d_B / d_3 = 0,4$, яке дає полегшення вала на 16 %, максимальні напруження в зовнішніх волокнах порожнистого вала збільшилися лише на 2,6 %. У прикладів 14.4 рівномічний порожнистий вал, але з трохи більшим зовнішнім діаметром (350 мм) порівняно з суцільним валом (300 мм), виявився легшим за суцільний на 53,4 %. Ці приклади свідчать про раціональність застосування порожнистих валів, що широко використовуються в деяких галузях сучасного машинобудування, зокрема в моторобудуванні.

Приклад 14.5

Закріплений обома кінцями круглий статично невизначуваний стрижень навантажений скручувальним моментом M_k в деякому перерізі вала C (рис. 14.12, а). Побудуйте епюру крутних моментів по довжині стрижня (рис. 14.12, б) та визначте діаметр стрижня.

Розв'язання:

При такому навантаженні в місцях закріплення вала виникнуть реактивні моменти M_A та M_B у площинах, перпендикулярних до осі стрижня. **Статичний аспект задачі.** З умов рівноваги стрижня:

$$M_A + M_B - M_k = 0, \quad (14.27)$$

бачимо, що задача один раз статично невизначувана.

Геометричний аспект задачі. Оскільки обидва кінці жорстко закріплені, то кут повороту перерізу B відносно A дорівнює нулю:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_{B-C} + \varphi_{C-A} = 0. \quad (14.28)$$

Фізичний аспект задачі. Використовуючи формулу (14.11), запишемо ви-

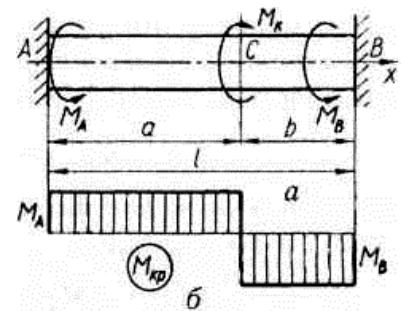


Рис. 14.12.

$$\text{рази для кутів закручування: } \varphi_{B-C} = -\frac{M_B \cdot b}{G \cdot J_p}; \varphi_{C-A} = \frac{(M_\kappa - M_B) \cdot a}{G \cdot J_p}. \quad (14.29)$$

Синтез. Підставивши формули (14.29) у вираз (14.28), матимемо

$$\varphi_{B-A} = -\frac{M_B \cdot b}{G \cdot J_p} + \frac{(M_\kappa - M_B) \cdot a}{G \cdot J_p} = 0. \quad (14.30)$$

Звідси з урахуванням (14.27) знайдемо:

$$\frac{M_B \cdot b}{G \cdot J_p} = \frac{(M_\kappa - M_B) \cdot a}{G \cdot J_p}; \Rightarrow M_B \cdot b = (M_\kappa - M_B) \cdot a; \Rightarrow M_B \cdot (a + b) = M_\kappa \cdot a; \Rightarrow$$

$$M_B = M_\kappa \cdot \frac{a}{a + b}. \quad (14.31)$$

$$M_A = M_\kappa - M_B = M_\kappa - M_\kappa \cdot \frac{a}{a + b} = M_\kappa \cdot \left(1 - \frac{a}{a + b}\right) = M_\kappa \cdot \left(\frac{a + b}{a + b} - \frac{a}{a + b}\right)$$

$$M_A = M_\kappa \cdot \frac{b}{a + b}. \quad (14.32)$$

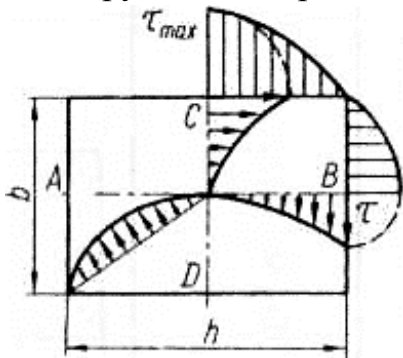
Якщо $a > b$, то $M_{\text{кр max}} = M_B$, і на підставі формули (14.21) діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кр max}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_\kappa \cdot a}{\pi \cdot [\tau] \cdot (a + b)}}. \quad (14.33)$$

14.4. Кручення стрижнів некруглого перерізу

В інженерній практиці досить часто кручення зазнають стрижні, які мають не круглий переріз, а прямокутний, трикутний, еліптичний та ін. У цих випадках гіпотеза плоских перерізів не може бути застосована, оскільки *перерізи викривлюються (депланують)*.

В стрижнях довільного перерізу, як і в стрижнях круглого перерізу, дотичні напруження при крученні напрямлені по дотичній до контуру. Найбільші дотичні напруження, відносні та повні кути закручування (за аналогією з крученням стрижнів круглого перерізу) визначають за формулами:



$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\kappa}; \quad (14.34)$$

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}} \cdot l}{G \cdot J_\kappa}; \quad (14.35)$$

$$\Theta_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{G \cdot J_\kappa}. \quad (14.36)$$

Тут J_κ і W_κ — деякі геометричні характеристики,

Рис. 14.13. які умовно називають відповідно *моментом інерції (см⁴)* і *моментом опору (см³)* при крученні.

Найчастіше застосовуються стрижні прямокутного перерізу. В цьому разі розподіл дотичних напружень має вигляд, як на рис. 14.13. **Найбільші напруження** виникають біля поверхні посередині довгих сторін прямокутного перерізу (в точках *C* та *D*). Визначаються вони за формулою (14.34), в якій

$$W_\kappa = \alpha \cdot h \cdot b^2, \quad (14.37)$$

де h — довга сторона прямокутного поперечного перерізу; b — коротка його сторона; α — коефіцієнт, що залежить від співвідношення сторін h і b .

Напруження, які виникають біля поверхні перерізу посередині коротких сторін (у точках A та B), менші. Їх можна виразити через τ_{\max} :

$$\tau = \gamma \cdot \tau_{\max}, \quad (14.38)$$

де γ — коефіцієнт, що залежить від співвідношення сторін прямокутного перерізу. Для визначення відносного кута закручування прямокутного перерізу в формулах (14.35) та (14.36) беруть: $J_{\kappa} = \beta \cdot h \cdot b^3$. (14.39)

Умови міцності та жорсткості при крученні стрижнів

прямокутного перерізу: $\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha \cdot h \cdot b^2} \leq [\tau]; \quad (14.40)$

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{G \cdot \beta \cdot h \cdot b^3} \leq [\Theta]. \quad (14.41)$$

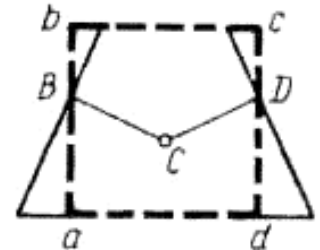


Рис. 14.14.

При крученні стрижнів, які мають форму рівнобедреної трапеції, наближені значення максимальних дотичних напружень та кута закручування можна визначити, розраховуючи стрижень з перерізом еквівалентного прямокутника.

Останній будується так (рис. 14.14). Із центра тяжіння C трапеції опускають перпендикуляри CB та CD на бокові сторони, а потім проводять вертикалі через точки B та D . Добутий прямокутник $abcd$ і буде тим еквівалентним перерізом розглядуваного трапецієподібного стрижня, до якого мають бути застосовані формули (14.34) — (14.41).

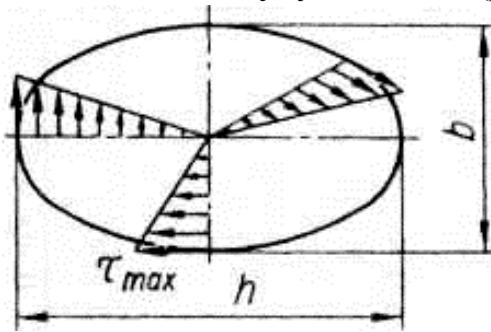


Рис. 14.15.

При крученні стрижнів еліптичного поперечного перерізу максимальні дотичні напруження виникають у крайніх точках, які лежать на малих півосях (рис. 14.15).

У цьому разі

$$W_{\kappa} = \frac{\pi \cdot h \cdot b^2}{16}, \quad (14.42)$$

де b та h — відповідно розміри малої та великої осей еліпса.

Найбільші напруження в зовнішніх точках перерізу на великих півосях:

$$\tau' = \frac{\tau_{\max}}{m}, \quad \text{де } m = \frac{h}{b}. \quad (14.43)$$

Умовний момент інерції при крученні стрижня еліптичного перерізу:

$$J_{\kappa} = \frac{\pi \cdot h \cdot b}{64} \cdot (h^2 + b^2). \quad (14.44)$$

Якщо скручується стрижень складного незамкненого поперечного перерізу, який можна поділити на окремі частини з $J_{\kappa i}$ та $W_{\kappa i}$, то для нього:

$$J_{\kappa} = J_{\kappa 1} + J_{\kappa 2} + \dots + J_{\kappa n} = \sum_{i=1}^n J_{\kappa i}, \quad (14.45)$$

де $i = 1; 2; 3; \dots; n$ — номери найпростіших частин, на які поділено поперечний переріз. Оскільки кут закручування для всього перерізу й окремих його

частин один і той самий: $\Theta = \frac{M_{\text{кр}}}{G \cdot J_{\kappa}} = \frac{M_{\text{кр}1}}{G \cdot J_{\kappa 1}} = \frac{M_{\text{кр}2}}{G \cdot J_{\kappa 2}} = \dots = \frac{M_{\text{кр}n}}{G \cdot J_{\kappa n}}, \quad (14.46)$

то крутний момент розподіляється між окремими частинами складного перерізу пропорційно їхнім жорсткостям:

$$M_{кр1} = M_{кр} \cdot \frac{J_{к1}}{J_{к}}; M_{кр2} = M_{кр} \cdot \frac{J_{к2}}{J_{к}}; \dots; M_{крn} = M_{кр} \cdot \frac{J_{кn}}{J_{к}}. \quad (14.47)$$

Відповідно **найбільше дотичне напруження в кожній частині (i) перерізу:**

$$\tau_{кі} = \frac{M_{крі}}{W_{кі}} = \frac{M_{кр}}{W_{кі}} \cdot \frac{J_{кі}}{J_{к}} = \frac{M_{кр}}{J_{к}} \cdot \frac{J_{кі}}{W_{кі}}. \quad (14.48)$$

Найбільшого значення напруження τ_{\max} досягне для того елемента, в якого

відношення $\frac{J_{кі}}{W_{кі}}$ буде найбільшим:
$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{J_{к}} \cdot \left(\frac{J_{кі}}{W_{кі}} \right)_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{к}}, \quad (14.49)$$

де
$$W_{к} = \frac{J_{к}}{\left(\frac{J_{кі}}{W_{кі}} \right)_{\max}}. \quad (14.50)$$

Приклад 14.6

Сталевий стрижень прямокутного перерізу передає крутний момент $M_{кр} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Знайти розміри перерізу стрижня, коли відомо, що допустиме напруження на кручення $[\tau] = 40 \text{ МПа}$, а співвідношення $h/b = 2,5$.

Розв'язання:

З умови міцності $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{к}} \leq [\tau]$ знаходимо момент опору крученню стрижня:

$$W_{к} = \frac{M_{кр}}{[\tau]} = \frac{10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{4 \cdot 10^7 \text{ Па}} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 25 \text{ см}^3,$$

а знаючи співвідношення сторін перерізу $h/b = 2,5$ та беручи з таблиці відповідне значення $\alpha = 0,256$, розміри перерізу дістанемо з формули (14.37) $W_{к} = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 2,5 \cdot \alpha \cdot b^3$. Звідси

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_{к}}{2,5 \cdot \alpha}} = \sqrt[3]{\frac{25 \text{ см}^3}{2,5 \cdot 0,256}} \approx 3,38 \text{ см},$$

$$h = 2,5 \cdot b = 2,5 \cdot 3,38 \text{ см} = 8,45 \text{ см}.$$

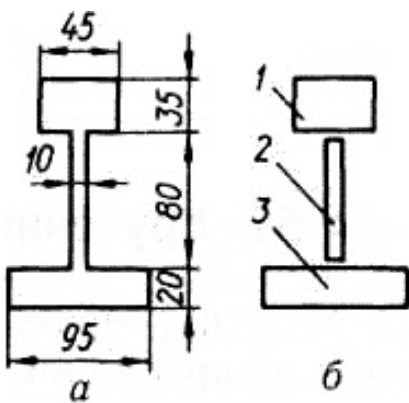


Рис. 14.16.

Розв'язання:

Розіб'ємо профіль перерізу на окремі елементи, як наведено на рис. 14.16, б. Максимальне напруження визначимо за формулою (14.49):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{к}}, \text{ де } W_{к} = \frac{J_{к}}{\left(\frac{J_{кі}}{W_{кі}} \right)_{\max}}. \text{ Відповідно до виразу (14.45) } J_{к} = J_{к1} + J_{к2} + J_{к3}.$$

Для елемента 1 перерізу стрижня $h_1 = 45 \text{ мм}$, $b_1 = 35 \text{ мм}$, $\frac{h_1}{b_1} = 1,285$.

Згідно з даними таблиць, при $\frac{h_1}{b_1} = 1,285$ — $\alpha_1 = 0,221$, $\beta_1 = 0,172$.

Тоді $W_{\kappa 1} = \alpha_1 \cdot h_1 \cdot b_1^2 = 0,221 \cdot 4,5 \text{ см} \cdot 3,5^2 \text{ см}^2 \approx 12,2 \text{ см}^3$,

$$J_{\kappa 1} = \beta_1 \cdot h_1 \cdot b_1^3 = 0,172 \cdot 4,5 \text{ см} \cdot 3,5^3 \text{ см}^3 \approx 33,2 \text{ см}^4, \quad \frac{J_{\kappa 1}}{W_{\kappa 1}} = \frac{33,2 \text{ см}^4}{12,2 \text{ см}^3} \approx 2,72 \text{ см}$$

Для елемента 2 перерізу стрижня $h_2 = 80 \text{ мм}$, $b_2 = 10 \text{ мм}$, $\frac{h_2}{b_2} = 8$.

Згідно з даними таблиць, $\alpha_2 = 0,307$, $\beta_2 = 0,307$.

Тоді $W_{\kappa 2} = \alpha_2 \cdot h_2 \cdot b_2^2 = 0,307 \cdot 8 \text{ см} \cdot 1^2 \text{ см}^2 \approx 2,5 \text{ см}^3$,

$$J_{\kappa 2} = \beta_2 \cdot h_2 \cdot b_2^3 = 0,307 \cdot 8 \text{ см} \cdot 1^3 \text{ см}^3 \approx 2,5 \text{ см}^4, \quad \frac{J_{\kappa 2}}{W_{\kappa 2}} = \frac{2,5 \text{ см}^4}{2,5 \text{ см}^3} = 1 \text{ см}.$$

Для елемента 3 перерізу стрижня $h_3 = 95 \text{ мм}$, $b_3 = 20 \text{ мм}$, $\frac{h_3}{b_3} = 4,75$.

Згідно з даними таблиць, $\alpha_3 = 0,288$, $\beta_3 = 0,288$.

Тоді $W_{\kappa 3} = \alpha_3 \cdot h_3 \cdot b_3^2 = 0,288 \cdot 9,5 \text{ см} \cdot 2^2 \text{ см}^2 \approx 10,9 \text{ см}^3$,

$$J_{\kappa 3} = \beta_3 \cdot h_3 \cdot b_3^3 = 0,288 \cdot 9,5 \text{ см} \cdot 2^3 \text{ см}^3 \approx 21,9 \text{ см}^4, \quad \frac{J_{\kappa 3}}{W_{\kappa 3}} = \frac{21,9 \text{ см}^4}{10,9 \text{ см}^3} \approx 2 \text{ см}.$$

Отже, $J_{\kappa} = J_{\kappa 1} + J_{\kappa 2} + J_{\kappa 3} = 33,2 + 2,5 + 21,9 = 57,6 \text{ (см}^4\text{)}$.

Найбільше співвідношення $\frac{J_{\kappa i}}{W_{\kappa i}}$ відповідає елементу 1 перерізу, тому максимальне дотичне напруження буде посередині його довгих сторін.

Момент опору $W_{\kappa} = \frac{J_{\kappa}}{W_{\kappa 1}} = \frac{57,6 \text{ см}^4}{2,72 \text{ см}} \approx 21,2 \text{ см}^3$, а максимальне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\kappa}} = \frac{5 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}}{2,12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3} \approx 23,6 \text{ МПа}. \quad \text{Кут закручування стрижня}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \cdot l}{G \cdot J_{\kappa}} = \frac{5 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 5 \text{ м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 5,76 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4} \approx 0,0542 \text{ рад}.$$

14.5. Кручення тонкостінних стрижнів

Методи розрахунку тонкостінних стрижнів на кручення залежать від того, відкритий чи замкнений профіль їхнього поперечного перерізу.

14.5.1. Кручення тонкостінних стрижнів замкнутого профілю

Розглядаючи *кручення замкнутих тонкостінних профілів* (рис. 14.17), *будемо вважати товщину стінки стрижня настільки малою, що дотичні напруження по ній можна прийняти однаковими, які дорівнюють напруженням посередині товщини стінки, й напрямленими по дотичній до середньої лінії стінки.*

Щоб добути формулу для визначення цього напруження, виріжемо з тонкостінного замкнутого стрижня елемент завдовжки dx двома поперечними та двома довільними меридіональними перерізами (рис. 14.18). Складаючи суму проєкцій на вісь X усіх сил, прикладених до елемента, маємо:

$$\tau \cdot \delta = \tau_1 \cdot \delta_1 = \text{const.} \quad (14.51)$$

Момент сили $\tau \cdot \delta \cdot ds$, що діє на елемент профілю завдовжки ds (див. рис. 14.17), відносно довільної точки O : $dM_{кр} = \tau \cdot \delta \cdot r \cdot ds$. (14.52)

Ураховуючи, що $r \cdot ds$ є подвоєною площею елементарного трикутника (на рис. 14.17 заштрихований), тобто $r \cdot ds = 2 \cdot d\omega$, а тому:

$$dM_{кр} = 2 \cdot \tau \cdot \delta \cdot d\omega, \quad (14.53)$$

Інтегруючи вираз (14.53) по всьому контуру з урахуванням умови (14.51), знайдемо **крутний момент, який діє в поперечному перерізі тонкостінного стрижня**:

$$M_{кр} = 2 \cdot \tau \cdot \delta \cdot \omega, \quad (14.54)$$

де ω — площа, яка окреслена серединною лінією тонкостінного перерізу.

З формули (14.54) дістанемо **вираз для дотичного напруження при кру-**

ченні замкнених тонкостінних профілів: $\tau = \frac{M_{кр}}{2 \cdot \delta \cdot \omega}$. (14.55)

Ця формула називається **першою формулою Бредта**.

Якщо товщина профілю по контуру неоднакова, то максимальне дотичне напруження в стінці профілю визначається за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot \delta_{\min} \cdot \omega}, \quad (14.56)$$

де δ_{\min} — мінімальна товщина стінки профілю.

Щоб визначити **відносний кут закручування тонкостінного стрижня**, розглянемо **енергію деформації, яка накопичується в елементарному об'ємі тонкостінного стрижня розмірами** ds , dx , δ . Враховуючи, що при крученні

відбувається чистий зсув, маємо: $dU = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot \delta \cdot dx \cdot ds$. (14.57)

Повну енергію деформації тонкостінного стрижня завдовжки l знайдемо, проінтегрувавши останній вираз по замкненому контуру s та по довжині l :

$$U = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^l \oint \tau^2 \cdot \delta \cdot ds \cdot dx = \frac{l \cdot \tau^2 \cdot \delta^2}{G} \cdot \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (14.58)$$

Підставляючи $\tau \cdot \delta$ з формули (14.54) в праву частину останньої формули,

матимемо: $U = \frac{l \cdot M_{кр}^2}{8 \cdot G \cdot \omega^2} \cdot \oint \frac{ds}{\delta}$. (14.59)

Цю енергію можна виразити також через роботу зовнішнього скручувального моменту $M_{к} = M_{кр}$ на шуканому куті закручування, тобто:

$$U = A = \frac{M_{к} \cdot \varphi}{2} = \frac{M_{кр} \cdot \varphi}{2}. \quad (14.60)$$

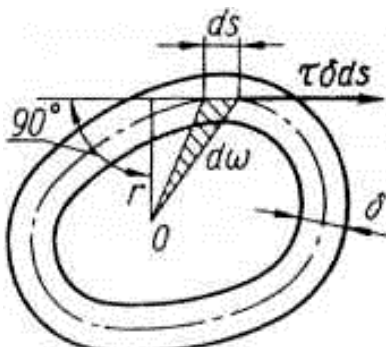


Рис. 14.17.

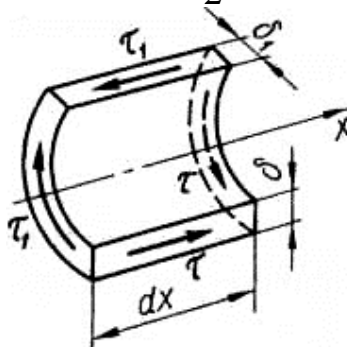


Рис. 14.18.

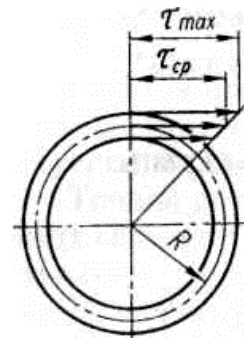


Рис. 14.19.

Тоді, прирівнявши праві частини останніх двох формул, знайдемо **кут закручування при крученні замкнених тонкостінних профілів**:

$$\varphi = \frac{l \cdot M_{кр}}{4 \cdot G \cdot \omega^2} \cdot \oint \frac{ds}{\delta} \quad (14.61)$$

Відносний кут закручування при крученні замкнених тонкостінних профілів:

$$\Theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{кр}}{4 \cdot G \cdot \omega^2} \cdot \oint \frac{ds}{\delta} \quad (14.62)$$

Це **друга формула Бредта**. Її можна переписати у введених позначеннях

для кручення:
$$\Theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_{\kappa}}, \quad \text{де} \quad J_{\kappa} = \frac{4 \cdot \omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} \quad (14.63)$$

При однаковій по довжині контуру s товщині:
$$\Theta = \frac{M_{кр} \cdot s}{4 \cdot G \cdot \omega^2 \cdot \delta} \quad (14.64)$$

Приклад 14.8

Визначте дотичне напруження та відносний кут закручування при крученні тонкостінної труби (рис. 14.19), із постійною товщиною стінки профілю — $\delta = const$.

Розв'язання:

З рис. 14.19 маємо:
$$\omega = \pi \cdot R^2, \quad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{\delta} \quad (14.65)$$

За формулами (14.55) та (14.62) і (14.64), одержимо:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2 \cdot \delta \cdot \pi \cdot R^2}, \quad \Theta = \frac{M_{кр}}{2 \cdot G \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \delta} \quad (14.66)$$

14.5.2. Кручення тонкостінних стрижнів відкритого профілю

Визначаючи при крученні напруження та деформації у тонкостінних стрижнях відкритого профілю типу швелера, двотавра (рис. 14.20) або кутника, можна скористатися **теорією розрахунку на кручення стрижнів прямокутного перерізу**. В цьому разі **незамкнені профілі розбиваються на прямокутні елементи, товщина яких значно менша, ніж їхня довжина**. Для таких прямокутних елементів **коефіцієнти α та β дорівнюють 1/3**. Тоді для **складного профілю**, на підставі формул (14.39) та (14.45), **умовний момент інерції**:

$$J_{\kappa} = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot h_1 \cdot b_1^3 + \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot h_2 \cdot b_2^3 + \dots + \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot h_n \cdot b_n^3 = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n h_i \cdot b_i^3 \quad (14.67)$$

Тут η — **коефіцієнт, який враховує схематизацію реального профілю**:

- 1) для **кутникавого перерізу** — $\eta = 1,00$;
- 2) для **двотаврового перерізу** — $\eta = 1,20$;
- 3) для **таврового перерізу** — $\eta = 1,15$;
- 4) для **швелерного перерізу** — $\eta = 1,12$.

У тонкостінних відкритих профілях довжину елемента, як правило, позначають через s , а товщину стінки — через δ . Тоді, заміняючи в формулі (14.67) h на s , а b на δ , дістанемо:

$$J_{\kappa} = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot s_1 \cdot \delta_1^3 + \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot s_2 \cdot \delta_2^3 + \dots + \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot s_n \cdot \delta_n^3 = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot \delta_i^3 \quad (14.68)$$

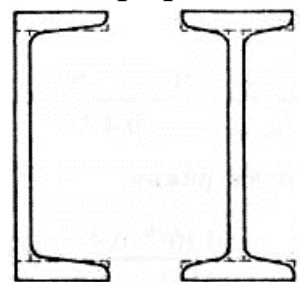


Рис. 14.20.

Відносний кут закручування при крученні відкритих тонкостінних

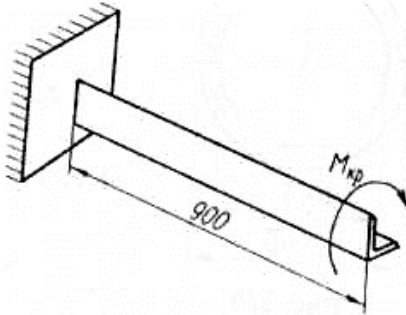


Рис. 14.21.

профілів:
$$\Theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_{\kappa}} \quad (14.69)$$

Кут закручування при крученні відкритих тонкостінних профілів:
$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_{\kappa}} \quad (14.70)$$

Найбільше дотичне напруження, яке виникає на ділянці, що має найбільшу товщину стінки δ_{\max} , розраховується за формулою (14.49).

Для довгих прямокутників:
$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \delta_{\max}}{J_{\kappa}}, \text{ де } \delta_{\max} = \left(\frac{J_{\kappa i}}{W_{\kappa i}} \right)_{\max} \quad (14.71)$$

Приклад 14.9

Визначити максимальне дотичне напруження та кут закручування стрижня завдовжки 900 мм (рис. 14.21) з поперечним перерізом у вигляді рівнобокого кутника 50 мм×50 мм×5 мм, який зазнає дії крутного моменту $M_{кр} = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Модуль зсуву матеріалу стрижня $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Розв'язання:

Максимальні дотичні напруження виникають посередині полиць (концентрацію напружень у вхідному куті не враховуємо). Ці напруження визначимо за формулою (14.71). При цьому

$$J_{\kappa} = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot \delta_i^3 = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot (5 \cdot 0,5^3 + 4,5 \cdot 0,5^3) \text{ см}^4 \approx 0,4 \text{ см}^4.$$

Тоді
$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \delta_{\max}}{J_{\kappa}} = \frac{50 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{4 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4} = 6,25 \cdot 10^7 \text{ Па} = 62,5 \text{ МПа}.$$

Кут закручування стрижня

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_{\kappa}} = \frac{50 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot l}{G \cdot J_{\kappa}} = \frac{50 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 0,9 \text{ м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 4 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4} \approx 0,140625 \text{ рад} \approx 8^{\circ}3'.$$

Приклад 14.10

Визначте напруження та відносний кут закручування сталеві труби, розрізаної вздовж: твірної (рис. 14.22). Зовнішній діаметр труби $d_3 = 90 \text{ мм}$, внутрішній $d_B = 85 \text{ мм}$. Труба зазнає дії крутного моменту $M_{кр} = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Модуль зсуву матеріалу $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Порівняйте добуті значення напружень та кута закручування розрізаної труби з відповідними даними для суцільної труби.

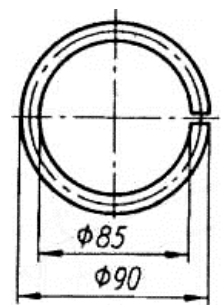


Рис. 14.22.

Розв'язання:

Дотичні напруження в розрізаній трубі визначимо за формулою (14.71)

$$\tau_p = \frac{M_{кр} \cdot \delta}{J_{\kappa}}.$$
 Тут $J_{\kappa} = \frac{1}{3} \cdot s \cdot \delta^3$, де s — розгорнута довжина серединної лінії

перерізу труби. Тоді $J_{\kappa} = \frac{1}{3} \cdot s \cdot \delta^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8,75 \cdot 0,25^3 \approx 0,143 \text{ (см}^4\text{)},$

$$\tau_p = \frac{M_{кр} \cdot \delta}{J_{\kappa}} = \frac{50 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{1,43 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4} \approx 8,75 \cdot 10^7 \text{ Па} = 87,5 \text{ МПа}.$$

Напруження в суцільній трубі визначимо за формулою (14.55)

$$\tau_c = \frac{M_{кр}}{2 \cdot \delta \cdot \omega} = \frac{50 \cdot 4}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 8,75 \cdot 10^{-3}} \approx 1,66 \cdot 10^6 \text{ (Па)} = 1,66 \text{ МПа.}$$

Відносний кут закручування розрізаної труби, згідно (14.69), буде:

$$\Theta_p = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_k} = \frac{50 \text{ Н} \cdot \text{м}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot 1,43 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4} \approx 0,437 \frac{\text{рад}}{\text{м}}. \text{ Відносний кут закручування}$$

нерозрізаної труби визначимо за формулою (14.64):

$$\Theta = \frac{M_{кр} \cdot s}{4 \cdot G \cdot \omega^2 \cdot \delta} = \frac{50 \cdot \pi \cdot 8,75 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (\pi \cdot 0,25 \cdot (8,75 \cdot 10^{-2})^2)^2 \cdot 0,25 \cdot 10^{-2}} \approx 0,000475 \frac{\text{рад}}{\text{м}}$$

Отже, у суцільній трубі при крученні напруження менше в 52,5 рази, а кут закручування — в 920 разів, ніж у трубі, розрізаній уздовж твірної.

Запитання для самоконтролю

1. Поясніть, в яких випадках виникає деформація кручення.
2. Що називають валом та крученням валу?
3. Наведіть та поясніть діаграму кручення.
4. Охарактеризуйте статичний аспект задачі на кручення валу.
5. Проаналізуйте статичний аспект задачі на кручення валу.
6. Що розуміють під кутом відносного зсуву?
7. З'ясуйте різницю між кутом закручування та відносним кутом закручування.
8. Розгляньте фізичний аспект задачі на кручення валу.
9. Наведіть та поясніть Закон Гука при крученні.
10. Проаналізуйте формули для визначення максимального дотичного напруження при крученні суцільного та трубчастого круглого перерізу.
11. Запишіть та поясніть рівняння (умови) міцності та жорсткості при крученні
12. Наведіть основні положення аналізу напруженого стану і руйнування при крученні.
13. З'ясуйте основні положення розрахунку валів на міцність.
14. Проаналізуйте особливості розрахунку валів на жорсткість.
15. Поясніть, чому виготовлення порожнистих валів є ефективним засобом зниження затрат матеріалу, а отже, і зниження ваги валів?
16. Наведіть особливості розрахунку закріпленого обома кінцями круглого статично невизначуваного стрижня навантаженого скручувальним моментом в деякому перерізі вала.
17. Вкажіть особливості кручення стрижнів некруглого перерізу.
18. Наведіть та проаналізуйте формули, що визначають найбільші дотичні напруження, відносні та повні кути закручування при крученні стрижнів некруглого перерізу.
19. Вкажіть умови міцності та жорсткості при крученні стрижнів прямокутного перерізу.
20. Поясніть особливості розрахунків на кручення стрижнів еліптичного поперечного перерізу.
21. Наведіть та проаналізуйте формули що використовуються при розрахунку на кручення стрижня складного незамкненого поперечного перерізу, який можна поділити на окремі частини.
22. Охарактеризуйте особливості кручення тонкостінних стрижнів замкненого профілю.
23. З'ясуйте випадки кручення тонкостінних стрижнів відкритого профілю.
24. Наведіть особливості концентрації напружень при крученні.

Лекція № 15

Тема: «Деформування згином»

ПЛАН

- 15.1. Нормальні напруження при плоскому згинанні прямого стрижня.
- 15.2. Дотичні напруження при згинанні.
- 15.3. Розрахунок на міцність при згинанні.
- 15.4. Раціональна форма перерізу балки.
- 15.5. Повний розрахунок балок на міцність при згинанні.

15.1. Нормальні напруження при плоскому згинанні прямого стрижня

Розглянемо випадок чистого плоского згинання балки (рис. 15.1, *a*). Із шести внутрішніх силових факторів, які можуть діяти в її поперечних перерізах у загальному випадку згинання, при чистому згинанні не дорівнює нулю тільки згинальний момент M . Вісь балки деформується в площині, що збігається з силовою (на рис. 15.1 — у площині креслення).

Статичний аспект задачі. Проведемо поперечний переріз $m-m$ на довільній відстані x від початку координат (рис. 15.1, *a*). В площині перерізу (рис. 15.1, *б*) проведемо координатні осі Y та Z : вісь Y сумістимо з **силовою лінією** (лінією перетину силової площини з площиною перерізу), а вісь Z проведемо на довільній поки що висоті, але перпендикулярно до осі Y . Вісь X спрямуємо перпендикулярно до площини перерізу. Виділимо в перерізі елемент площі dF , координати якого y та z . Узагалі на елемент могли б діяти напруження σ та τ . Проте при чистому згинанні всі зусилля та моменти ($Q_y, Q_z, M_{кр}$), пов'язані з дотичними напруженнями, дорівнюють нулю.

Отже, з усіх умов рівноваги (10.14) — (10.19) залишаться тільки три:

$$N = \int_F \sigma \cdot dF; \quad M_y = \int_F z \cdot \sigma \cdot dF; \quad M_z = \int_F y \cdot \sigma \cdot dF. \quad (15.1)$$

В нашому випадку в перерізах балки діє тільки згинальний момент M_z , тому

$$N = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = M. \quad (15.2)$$

Із залежностей (15.1) та (15.2) маємо

$$\int_F \sigma \cdot dF = 0; \quad \int_F z \cdot \sigma \cdot dF = 0; \quad \int_F y \cdot \sigma \cdot dF = M. \quad (15.3)$$

Геометричний аспект задачі. Розглянемо картину деформацій тієї самої балки (рис. 15.2). Досліди, проведені на еластичних (наприклад, гумових) моделях, які дають змогу легко добути значні деформації, свідчать, що коли на поверхню моделі нанести прямокутну сітку ліній (рис. 15.2, *a*), то при чистому згинанні ця сітка деформується таким чином (рис. 15.2, *б*): поздовжні лінії викривлюються по дузі кола; контури поперечних перерізів залишаються плоскими, про що свідчать поперечні лінії сітки, які залишаються прямими і перетинаються з поздовжніми лініями під прямим кутом.

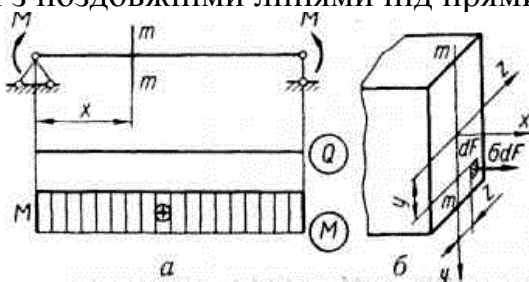


Рис. 15.1.

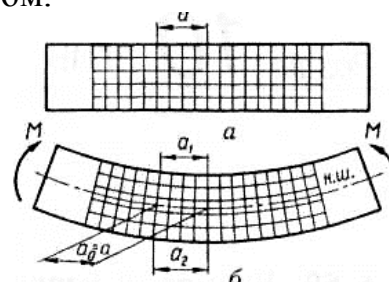


Рис. 15.2.

Отже, при чистому згинанні поперечні перерізи балки залишаються плоскими і повертаються так, що залишаються нормальними до зігнутої осі балки. Тому, при чистому згинанні, як і при розтяганні (стисканні) та крученні круглих стрижнів, буде справедливою гіпотеза плоских перерізів.

Вимірюючи відстані між аналогічними точками контуру будь-яких двох перерізів, можна побачити, що при деформуванні ці відстані змінюються. Так, виявляється, що при $a_1 < a$ і $a_2 > a$ (рис. 15.2, а, б). Отже, **верхні поздовжні волокна балки укорочуються, а нижні — подовжуються**. Проте можна знайти і такі волокна, довжина яких при згинанні залишається незмінною ($a_0 = a$). **Сукупність волокон, які не змінюють своєї довжини при згинанні балки, називається нейтральним шаром (н. ш.)**. Волокна, що належать нейтральному шару, до деформації лежать в одній площині, а в деформованому стані утворюють деяку циліндричну поверхню. В обох випадках кожний поперечний переріз балки перетинається з нейтральним шаром по прямій, яка називається **нейтральною лінією (н. л.) перерізу**. При плоскому згинанні нейтральний шар виявляється перпендикулярним до силової площини, а отже, нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії в перерізі. Будемо вважати, що вісь Z (див. рис. 15.1, б) проведена в перерізі таким чином, що вона збігається з нейтральною лінією (проте положення останньої по висоті перерізу поки що невідоме).

Виділимо елемент балки двома суміжними поперечними перерізами $m-m$ та $n-n$, які розміщені один від одного на відстані dx (рис. 15.3, а), та, взявши до уваги гіпотезу плоских перерізів, розглянемо його деформований стан (рис. 15.3, б). Перерізи $m-m$ та $n-n$ повертаються один відносно одного на кут $d\varphi$ і залишаються плоскими. Елемент a_0b_0 нейтрального шару перетворюється на дугу $a'_0b'_0$ з радіусом ρ , а волокно ab , яке розміщено на відстані y від нейтрального шару, — на криволінійне волокно a_1b_1 з радіусом кривини $\rho + y$. Відно-

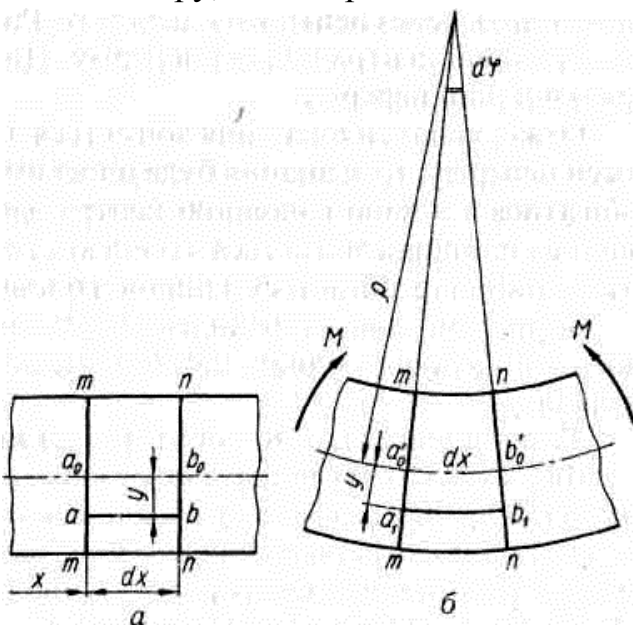


Рис. 15.3.

ротивши на $d\varphi$, матимемо:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (15.6)$$

Отже, розгляд геометричного аспекту задачі показав, що **відносна поздовжня деформація пропорційна відстані волокна від нейтральної осі**.

Для того щоб записати **закон Гука**, що виражає фізичний аспект задачі, треба з'ясувати, в якому напруженому стані перебуває волокно ab . На елемен-

сне подовження цього волокна

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}. \quad \text{Проте}$$

$$a_1b_1 = (\rho + y) \cdot d\varphi \quad \text{та} \quad ab = dx, \quad \text{тому}$$

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - dx}{dx}. \quad (15.4)$$

Щоб спростити цей вираз, розглянемо волокно a_0b_0 , яке належить нейтральному шару. Його довжина $a_0b_0 = dx$. Після деформації воно перетворюється на дугу $a'_0b'_0 = \rho \cdot d\varphi$. Однак волокна нейтрального шару не змінюють своєї довжини при деформуванні, тому

$$dx = \rho \cdot d\varphi. \quad (15.5)$$

Підставивши (15.5) у вираз (11.4) і ско-

тарній площадці dF зрізу (див. рис. 15.1, б), як уже зазначалося, дотичних напружень немає. Припускається також, що волокна матеріалу, розміщені вздовж балки, не тиснуть одне на одне, а тому напруження між ними дорівнюють нулю. Отже, волокно ab перебуває в лінійному напруженому стані — зазнає простого розтягання або стискання. Тому для нього закон Гука (у відносних координатах) слід записати так:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (15.7)$$

Переходячи до *синтезу* результатів розгляду трьох аспектів задачі, виключимо ε із залежностей (15.6) та (15.7): $\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$. (15.8)

Підставляючи (15.8) у третє рівняння (15.3) та враховуючи, що E і ρ як величини, що не залежать від положення елемента dF у перерізі, можна винести за знак інтеграла, матимемо: $\frac{E}{\rho} \cdot \int_F y^2 \cdot dF = M$. Оскільки $\int_F y^2 \cdot dF = J_z$ — моментом інерції перерізу відносно осі Z , можемо останню формулу переписати у вигляді:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_z}. \quad (15.9)$$

Нарешті, підставивши вираз (15.9) у формулу (15.8), знайдемо, що

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_z}. \quad (15.10)$$

Це **формула К. Нав'є**. Вона **дає змогу визначати нормальні напруження при чистому згинанні балки в будь-якій точці її перерізу**.

З'ясуємо, **де в перерізі розміщена вісь Z — нейтральна лінія перерізу**. Внесемо вираз для σ з формули (15.10) у перші два рівняння (15.3):

$$\frac{M}{J_z} \cdot \int_F y \cdot dF = 0; \quad \frac{M}{J_z} \cdot \int_F z \cdot y \cdot dF = 0.$$

Оскільки $\frac{M}{J_z} \neq 0$, а $\int_F y \cdot dF = S_z$ — ***статичний момент площі перерізу балки відносно осі Z*** ; $\int_F z \cdot y \cdot dF = J_{yz}$ — ***відцентровий моментом інерції площі поперечного перерізу балки***; то: $S_z = 0$; (15.11)

$$J_{yz} = 0. \quad (15.12)$$

На підставі рівності (15.11) дійдемо висновку, що **вісь Z — нейтральна лінія перерізу — проходить через центр тяжіння (ц. т.) поперечного перерізу**. Силова площина проходить через вісь балки, а отже, **силова лінія (вісь Y) проходить через центр тяжіння перерізу**. Рівність (15.12) показує, що **осі Y та Z — головні центральні осі перерізу**. Цим визначається **положення нейтральної лінії перерізу**. Отже, **якщо силова лінія збігається з однією із головних центральних осей перерізу, то згинання буде плоским, і нейтральна лінія перерізу буде збігатися з іншою головною центральною віссю**. Інакше кажучи, **якщо силова площина збігається з однією з головних площин стрижня, то нейтральний шар збігається з іншою головною площиною**.

Часто *індекс z* у позначенні моменту інерції *випускають*, пам'ятаючи, однак, що J *обчислюється відносно нейтральної лінії перерізу*.

Формула (15.9) фактично є законом Гука при згинанні, оскільки вона пов'язує деформацію (кривину нейтрального шару $1/\rho$) зі силовим фактором — згинальним моментом, що діє в перерізі.

Величина $E \cdot J$ називається жорсткістю перерізу при згинанні, $H \cdot m^2$. З формули (15.9) випливає, що коли балка виготовлена з однорідного матеріалу ($E = const$) і має постійний переріз ($J = const$), то при чистому згинанні ($M = const$) її вісь викривляється по дузі кола ($1/\rho = const$ і, отже, $\rho = const$).

Формула (15.10) показує, що незалежно від форми та розмірів перерізу балки напруження в точках нейтральної лінії завжди дорівнюють нулю.

Величина σ лінійно зростає в міру віддалення від нейтральної лінії. При цьому напруження виявляються однаковими по ширині перерізу (вдovж лінії $y = const$). Отже, епюри σ для будь-яких перерізів, що мають горизонтальну вісь симетрії, завжди матимуть вигляд, наведений на рис. 15.4. Усі волокна, розміщені вище за нейтральну лінію, виявляються стиснутими, а нижче за неї — розтягнутими. Якщо згинальний момент матиме протилежний знак, то верхні волокна розтягатимуться, а нижні — стискатимуться.

Максимальні напруження (σ_{max}) мають місце в найбільш віддалених від нейтральної лінії волокнах, тобто у випадку симетричного перерізу відносно горизонтальної осі Z при $y = \pm 0,5 \cdot h$. Підставляючи це значення у формулу

(15.10), дістанемо $\sigma_{max} = \frac{M \cdot 0,5 \cdot h}{J}$. Позначивши $W = \frac{J}{0,5 \cdot h}$ як осьовий момент

опору, m^3 , одержимо:
$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}. \quad (15.13)$$

Якщо переріз балки не має горизонтальної осі симетрії, то нейтральна лінія зміщена відносно середини висоти перерізу (рис. 15.5) і напруження σ_{max} у крайніх верхніх та σ'_{max} у крайніх нижніх волокнах не будуть однако-

вими:
$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}; \quad \sigma'_{max} = \frac{M}{W'}, \quad (15.14)$$

де
$$W = \frac{J}{y_{max}}; \quad W' = \frac{J}{y'_{max}}. \quad (15.15)$$

Характер розподілу нормальних напружень в поперечному перерізі для цього прикладу наведено на рис. 15.6.

На відміну від простого розтягання чи стискання при згинанні, як і при крученні, напруження в перерізі розподіляються нерівномірно. Матеріал у

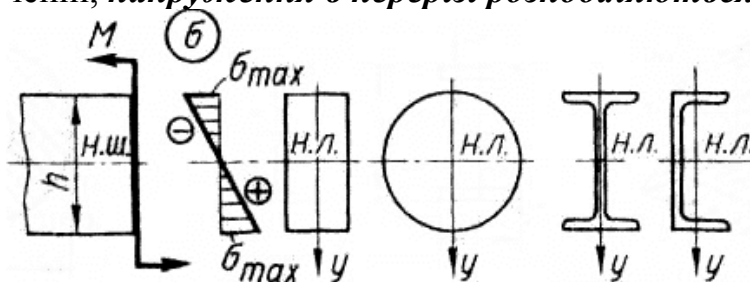


Рис. 15.4.

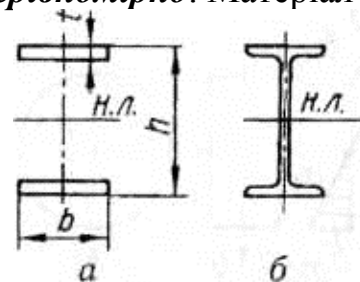


Рис. 15.7.

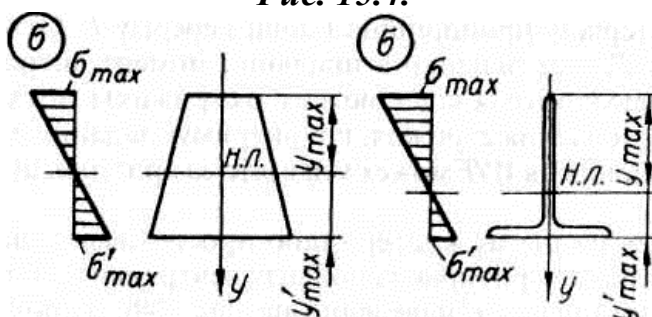


Рис. 15.5.

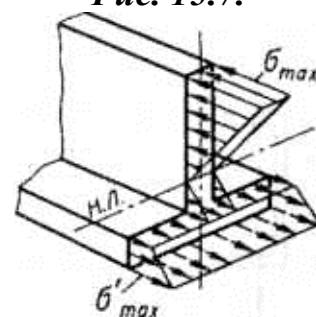


Рис. 15.6.

зоні нейтрального шару навантажений мало. Тому з метою економії матеріалу та зниження ваги конструкції, яка працює на згинання, слід вибрати такі форми перерізу, щоб більша частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії. Ідеальним з цього погляду є переріз, який складається з двох вузьких прямокутників (рис. 15.7, а). Реально такий переріз нездійснений, оскільки ці два прямокутники мають бути зв'язані між собою, щоб утворювати один переріз. *Із застосовуваних на практиці профілів найближчий до ідеального двотавровий переріз* (рис. 15.7, б).

Згинальний момент, який переріз може витримати безпечно, залежить від моменту опору W . Обмежуючи максимальне значення напруження σ_{\max} , що діє в перерізі, допустимим $[\sigma]$, згідно з формулою (15.13), визначимо допустимий згинальний момент: $[M] = \sigma_{\max} \cdot W = [\sigma] \cdot W$. (15.16)

Затрата матеріалу пропорційна площі перерізу F . Отже, чим більше відношення $\frac{W}{F}$, тим більший згинальний момент витримує переріз із заданою площею (тобто із заданою вагою стрижня) і тим менше матеріалу піде на виготовлення стрижня, що витримує заданий згинальний момент. Тому відношення $\frac{W}{F}$ фактично є критерієм, що оцінює якість профілю.

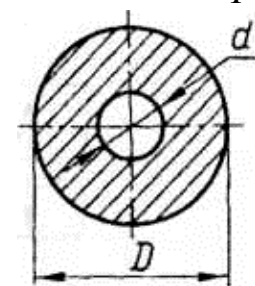


Рис. 15.8. балки, бачимо, що *трубчастий круглий переріз*, наведений на

рис. 15.8, *раціональніший, ніж суцільний круглий, а розміщення двотавра та прямокутника*, наведено на рис. 15.9, а, *при вертикальній силі* вигідніше за зображене на рис. 15.9, б. Всі виведені формули застосовуються для випадку чистого згинання прямого стрижня. Для загального випадку згинання дія поперечних сил призводить до того, що гіпотеза плоских перерізів, на якій ґрунтується виведення формули Нав'є для обчислення нормальних напружень, порушується, оскільки поперечні перерізи не залишаються плоскими, а викривляються; поздовжні волокна взаємодіють між собою, тиснуть одне на одне і, отже, перебувають не в лінійному, а в плоскому напруженому стані.

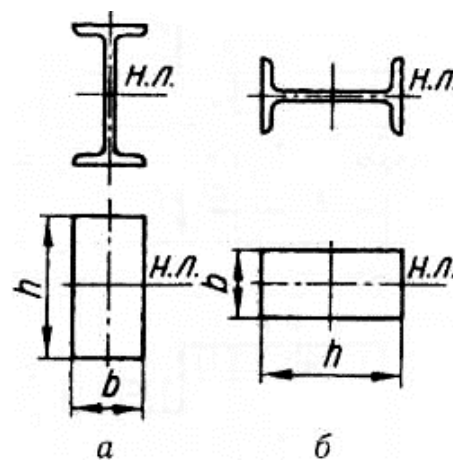


Рис. 15.9.

При поперечному згинанні балок, коли в перерізі крім M діють N та Q , можна використовувати формули, виведені для чистого згинання.

15.2. Дотичні напруження при згинанні

При поперечному згинанні, коли в поперечних перерізах бруса діють Q та M , *виникають не тільки нормальні напруження σ , а й дотичні τ* .

Розглянемо балку прямокутного поперечного перерізу (рис. 15.10, а). Двома близькими поперечними перерізами A_1B_1 та A_2B_2 виділимо елемент балки (рис. 15.10, б) завдовжки dx . Як видно з епюр, в обох перерізах Q та M додатні, причому в перерізі A_1B_1 $Q = Q(x)$, $M = M(x)$, а в перерізі A_2B_2 $Q = Q(x)$, $M = M(x) + dM$. Отже, в проведених перерізах діють нормальні та дотичні напруження. Нормальні напруження на лівому та правому торцях виділеного еле-

мента на підставі залежності (15.10) визначаються формулами:

$$\sigma' = \frac{M \cdot y}{J_z}; \quad \sigma'' = \frac{(M + dM) \cdot y}{J_z}. \quad (15.17)$$

Введемо два припущення про характер розподілу дотичних напружень у балках прямокутного перерізу:

- 1) τ скрізь паралельні поперечному зусиллю Q ;
- 2) в усіх точках перерізу на певному рівні ($y = const$) τ однакові — постійні по ширині та залежать тільки від відстані точки до нейтральної лінії.

Ці припущення справедливі, якщо $b \ll h$.

Відсічемо частину елемента балки, провівши горизонтальну площину $m_1 - m_2$ на відстані y від нейтрального шару (рис. 15.10, в, д). Очевидно, в гранях $A_1 A_2 m_2 m_1$, $C_1 C_2 n_2 n_1$ та $A_1 A_2 C_2 C_1$ взагалі немає ніяких напружень, оскільки ці грані є частиною зовнішньої поверхні балки. Обчислимо рівнодійну нормальних напружень, розподілених по грані $A_1 C_1 n_1 m_1$. На елементарну площадку $dF = b \cdot d\eta$, проведену паралельно нейтральній осі Z на відстані η від неї (рис.

15.10, з), діє елементарна осьова сила $dN_1 = \sigma' \cdot dF = \frac{M(x) \cdot \eta}{J_z} \cdot dF$. Тоді шукана

рівнодійна $N_1 = \int_{F_1} \sigma' \cdot dF = \int_{F_1} \frac{M(x) \cdot \eta}{J_z} \cdot dF = \frac{M(x)}{J_z} \cdot \int_{F_1} \eta \cdot dF$. Оскільки $\int_{F_1} \eta \cdot dF = S_z(y)$ є

статичним моментом площі, що міститься між рівнем y та краєм балки,

то
$$N_1 = \frac{M(x)}{J_z} \cdot S_z(y). \quad (15.18)$$

Аналогічно в грані $A_2 C_2 n_2 m_2$ **рівнодійна нормальних напружень σ''**

$$N_2 = \frac{M(x) + dM}{J_z} \cdot S_z(y). \quad (15.19)$$

Значення $S_z(y)$ буде, очевидно, таким самим, як і для лівого перерізу.

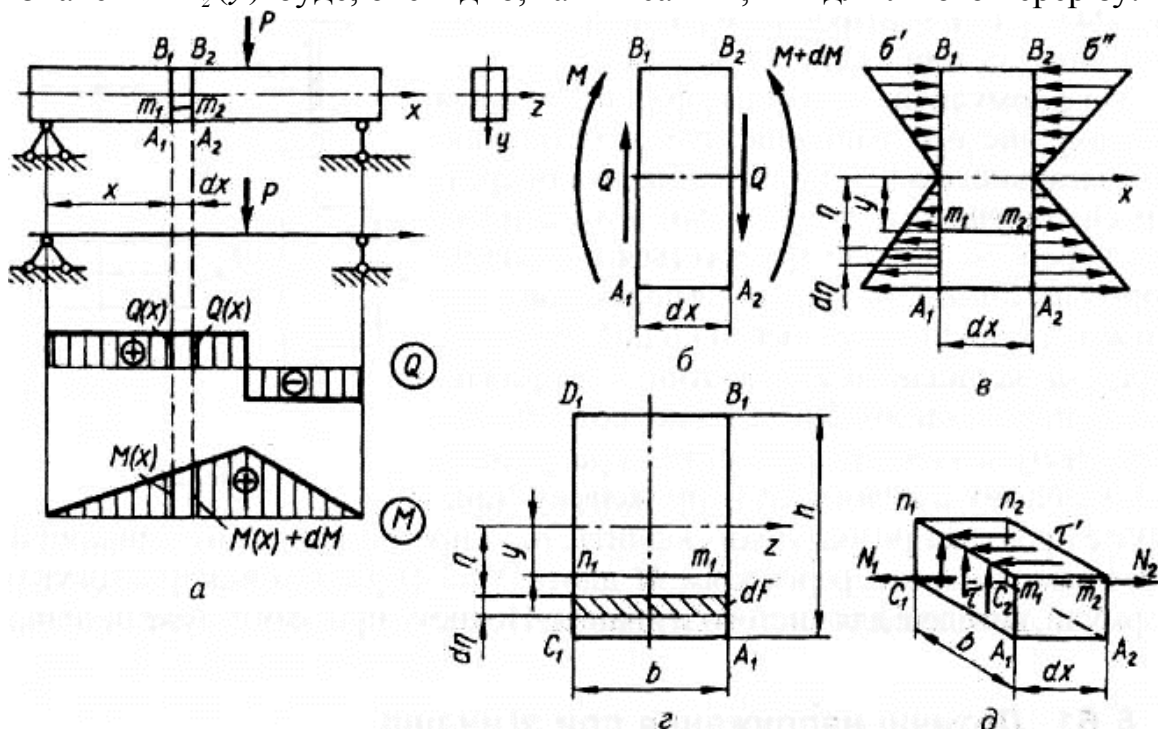


Рис. 15.10.

У грані $n_1 n_2 m_2 m_1$ діють нормальні напруження, оскільки при поперечному згинанні волокна тиснуть одне на одне. Однак цими нормальними напруженнями нехтують як неістотними для розрахунку на міцність. Крім того, згідно із законом парності дотичних напружень, тут обов'язково виникають і напруження $\tau' = \tau$, причому вони напрямлені так, як наведено на рис. 15.10, *д*. Оскільки розмір dx грані $n_1 n_2 m_2 m_1$ елемента малий, можна вважати, що τ' рівномірно розподілені по цій грані й, отже, дають зусилля $dT = \tau' \cdot b \cdot dx = \tau \cdot b \cdot dx$. Запишемо тепер умову рівноваги паралелепіпеда $A_1 A_2 C_2 C_1 n_1 n_2 m_2 m_1$: $N_2 - N_1 - dT = 0$.

Підставляючи сюди зусилля, дістаємо

$$\frac{M(x) + dM}{J_z} \cdot S_z(y) - \frac{M(x)}{J_z} \cdot S_z(y) - \tau \cdot b \cdot dx = 0, \text{ або } \tau \cdot b \cdot dx = \frac{S_z(y)}{J_z} \cdot dM.$$

Поділивши це рівняння на $b \cdot dx$ та враховуючи, що $\frac{dM}{dx} = Q$, остаточно знайдемо **формулу Д. І. Журавського для визначення дотичних напружень у перерізі балки при згинанні**:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z(y)}{b \cdot J_z}. \quad (15.20)$$

На практиці нею можна користуватися для будь-яких перерізів, крім тих місць у перерізі, де є вузькі прямокутники, розміщені перпендикулярно до Q — полиці двотавра, швелера. **Для довільного перерізу** (рис. 15.11) **величини формули (15.20) мають такий зміст**: $Q = Q(x)$ — модуль поперечної сили в тому перерізі, де визначаються дотичні напруження; J_z — момент інерції цього перерізу відносно його нейтральної лінії; $b = b(y)$ — ширина перерізу на рівні, де визначаються дотичні напруження τ ; $S_z(y)$ — абсолютне значення статичного моменту відносно нейтральної лінії тієї частини площі $F(y)$, яка міститься між лінією, де визначається τ , та краєм перерізу. Дотичне напруження τ вважається паралельним поперечному зусиллю Q і напрямленим у бік його дії. Формула (15.20) дає тільки модуль τ . Побудуємо **епюру τ для прямокутного перерізу** (рис. 15.12). Проведемо лінію mn , паралельну нейтральній лінії й віддалену від неї на довільну відстань y , і знайдемо значення τ у точках цієї лінії.

Лінія mn відсікає площу $F(y) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)$. Статичний момент цієї площі

$$S_z(y) = F(y) \cdot y_{ц.в.} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot y^2}{h^2}\right). \quad (15.21)$$

Підставляючи (15.21) у формулу Журавського (15.20), а також зважаючи на те що $J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$, одержимо **вираз для визначення дотичного напруження при поперечному згинанні балки прямокутного перерізу**:

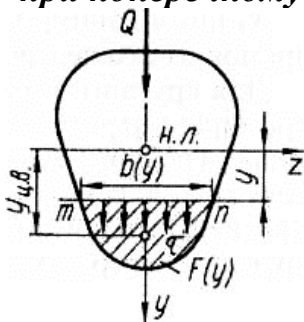


Рис. 15.11.

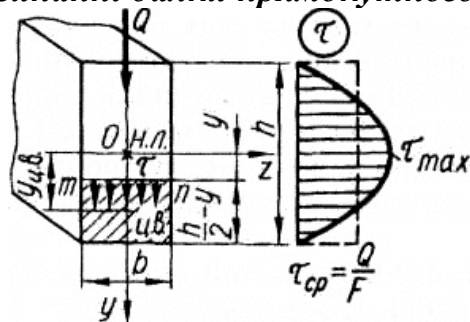


Рис. 15.12.

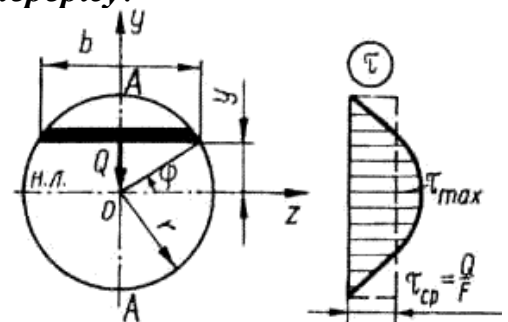


Рис. 15.13.

$$\tau = Q \cdot \frac{\frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot y^2}{h^2}\right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot y^2}{h^2}\right). \quad (15.22)$$

Змінна y входить до формули в другому степені, отже, **епюра τ буде параболічною**. У найвіддаленіших від нейтральної лінії точках перерізу $y = \pm \frac{h}{2}$ і $\tau = 0$. Для точок нейтральної лінії при $y = 0$ дотичні напруження будуть максимальні:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}. \quad (15.23)$$

За цими даними і побудовано **епюру дотичних напружень у стрижні прямокутного перерізу** (рис. 15.12).

Формула для визначення дотичного напруження при поперечному згинанні балки круглого перерізу (рис. 15.13) має вигляд: $\tau = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)$, (15.24)

Згідно з рис. 15.13: $b(y) = 2 \cdot r \cdot \cos \varphi$; $y = r \cdot \sin \varphi$; $dy = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$;

$$S_z(y) = \int_y y \cdot dF; \quad dF = b(y) \cdot dy = 2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_z(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot dF = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot r^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{2 \cdot r^3}{3}.$$

Максимальне значення дотичного напруження при поперечному згинанні балки круглого перерізу:

$$\tau_{\max} = \frac{S_z(y) \cdot Q}{b(y) \cdot J_z} = \frac{\frac{2 \cdot r^3}{3} \cdot Q}{2 \cdot r \cdot \cos 0^\circ \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F} \approx 1,33 \cdot \frac{Q}{F}. \quad (15.25)$$

Епюра дотичного напруження τ при поперечному згинанні балки круглого перерізу параболічна, причому **максимальне дотичне напруження буде в точках нейтральної лінії ($y = 0$)**, а **мінімальне — в найвіддаленіших від нейтральної лінії точках ($y = \pm r$)**.

Приклад 15.1

Побудуйте епюри зміни нормальних та дотичних напружень по висоті поперечного перерізу двотаврової балки № 12, якщо в перерізі діють згинальний момент $M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та поперечна сила $Q = 10 \text{ кН}$.

Розв'язання:

За таблицею сортаменту знаходимо основні розміри профілю (рис. 15.14), момент інерції площі поперечного перерізу $J_z = 350 \text{ см}^4$ та статичний момент площі половини цього перерізу $S_{\max} = 33,7 \text{ см}^3$. Нормальні напруження σ в точках поперечного перерізу на відстані y від нейтральної лінії (по лінії **mm**) визначимо за формулою Нав'є (15.10). Максимальні за абсолютним значенням напруження будуть при $y_{\max} = \frac{h}{2}$ —

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{J_z} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4} \approx 34,28 \text{ МПа}.$$

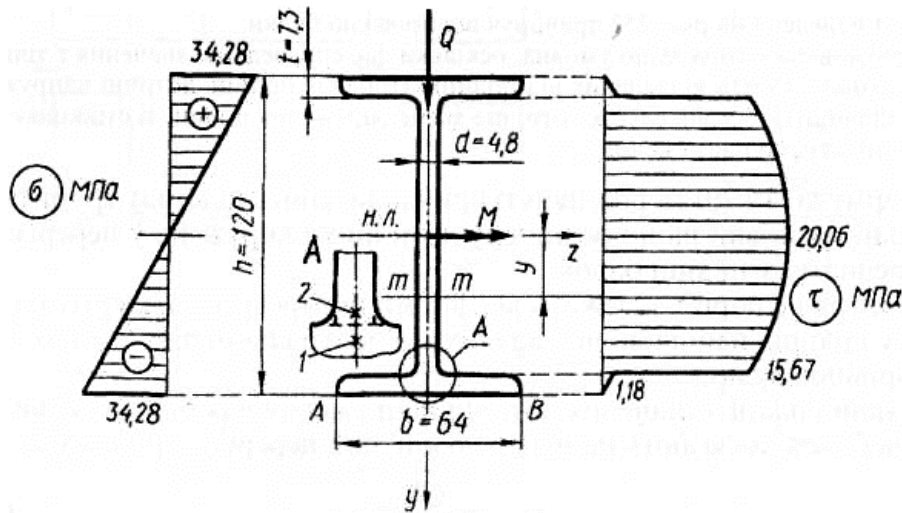


Рис. 15.14.

Епюри напружень σ наведено на рис. 15.14 ліворуч від профілю перерізу балки. Дотичні напруження в точках поперечного перерізу балки на відстані y від нейтральної лінії визначаємо за формулою Журавського (15.20).

Для побудови епюри дотичних напружень обчислимо τ у кількох характерних точках: **a**) в крайніх волокнах (по лінії AB); **б**) у місці спряження полиць із стінкою (в точках 1 і 2), причому вважатимемо, що точки 1 і 2 розміщені нескінченно близько до межі полиці, але лежать по різні боки від цієї межі (для ясності це місце на рис. 15.14 зображено окремо); **в**) у точках нейтральної лінії.

Для точок лінії AB статичний момент $S_z(y) = S_z(0,5 \cdot h) = 0$, оскільки лінія AB не відсікає ніякої площі. Отже, в точках лінії AB напруження $\tau = 0$.

Для точки 1 ширина перерізу $b = 6,4$ см, статичний момент визначатиметься статичним моментом полиці. З досить високим ступенем точності полицю можна вважати прямокутником з розмірами $b \times t$. Тоді

$$S_z(y) = S_{zn} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 6,4 \cdot 0,73 \cdot (6 - 0,365) \approx 26,3 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\text{Дотичні напруження в точці } 1 \quad \tau_1 = \frac{Q \cdot S_z(y)}{b \cdot J_z} = \frac{10^4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 2,63 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{6,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4} \approx 1,18 \text{ МПа}.$$

Для точки 2 статичний момент залишається практично тим самим, проте ширина перерізу $d = 0,48$ см. Тому дотичні напруження в точці 2

$$\tau_2 = \frac{Q \cdot S_z(y)}{d \cdot J_z} = \frac{10^4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 2,63 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{4,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4} \approx 15,67 \text{ МПа}$$

Отже, при переході від точки 1 до точки 2 дотичні напруження різко збільшуються. Для точки нейтральної лінії ширина перерізу $d = 0,48$ см, а статичний момент слід взяти для половини перерізу балки. Очевидно, це буде найбільша величина для цього перерізу — $S_{z \max}$. Тоді

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_{z \max}}{d \cdot J_z} = \frac{10^4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 3,37 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{4,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4} \approx 20,06 \text{ МПа}.$$

На підставі цих даних будуюмо епюри τ для нижньої половини перерізу. Для верхньої половини внаслідок симетрії профілю відносно осі Z епюра буде симетричною. Епюру τ наведено на рис. 15.14 праворуч від профілю балки. Побудована епюра дещо умовна, оскільки дає справедливі значення τ тільки для точок стінки, досить віддалених від полиць. Поблизу полиць дотичні напруження в стінці підвищуються внаслідок того, що місце спряження полиці зі стінкою є джерелом концентрації напруження.

Загальні висновки щодо розподілу дотичних напружень у перерізах при поперечному згинанні балок:

- 1) вигляд епюри τ залежить від форми поперечного перерізу балки;
- 2) у крайніх найбільш віддалених від нейтральної лінії точках τ завжди дорівнює нулю;
- 3) найбільшого значення дотичні напруження для більшості видів перерізів балок досягають на нейтральній лінії перерізу, причому

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_{\max}}{b \cdot J}, \quad (15.26)$$

де S_{\max} — статичний момент половини площі перерізу. Формулу (15.26)

можна подати також у вигляді: $\tau_{\max} = k \cdot \frac{Q}{F}, \quad (15.27)$

де k — коефіцієнт, який залежить від форми перерізу; для прямокутного перерізу $k = 1,50$; для круглого — $k = 1,33$;

- 4) формулою Журавського можна користуватися для визначення дотичних напружень у будь-яких точках масивних профілів.

15.3. Розрахунок на міцність при згинанні

Виведені формули для обчислення нормальних σ та дотичних τ напружень при плоскому поперечному згинанні балок дають змогу скласти **умови міцності для перевірки та добору перерізів деталей, що працюють на згинання**. Щоб здобути ці умови, з'ясуємо, в якому напруженому стані перебувають елементи стрижня, що зазнають плоского згинання. Заради більшої конкретності розглянемо балку, зображену на рис. 15.15.

На рис. 15.15, *а* наведено схему навантаженої балки, а також побудовано епюри M та Q . На рис. 15.15, *б* зображено фасад балки. У різних зонах по висоті балки виділено елементарні кубики, одна з граней яких збігається з площиною поперечного перерізу балки. На рис. 15.15, *в* як приклад наведено переріз *A-A* та виділені в ньому елементи **3** і **13**. Елементи **1**, **2**, **12**, **13** та **14** виділені в крайніх точках перерізу. Тут $\tau = 0$, $\sigma = \sigma_{\max}$ і елементи зазнають простого розтягання (**12**, **13**) або стискання (**1**, **14**), тобто перебувають в лінійному напруженому стані (рис. 15.16, *а*). Елементи **6**, **7** та **8** виділені біля точок нейтрального шару,

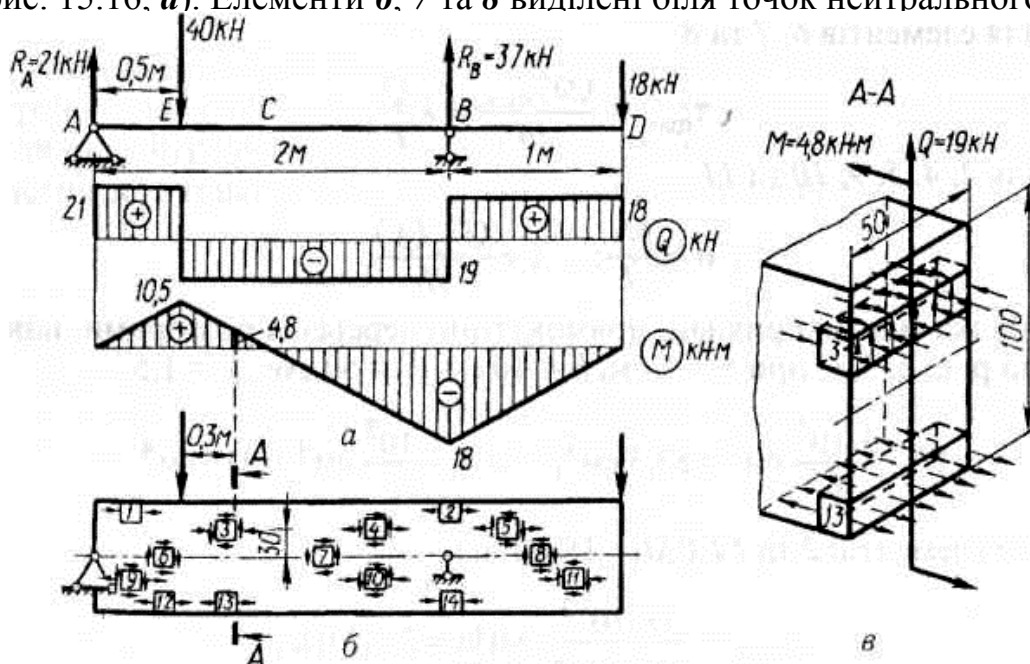


Рис. 15.15.

де $\sigma = 0$ а $\tau = \tau_{\max}$, тому по їхніх гранях діють тільки дотичні напруження і, отже, вони перебувають в умовах чистого зсуву (рис. 15.16, б). У вертикальних гранях елементів 3, 4, 5, 9, 10 та 11, що збігаються з поперечними перерізами балки, виділених у довільних точках балки, діють і σ , і τ , тому елементи перебувають у плоскому напруженому стані (рис. 15.16, в).

Значення σ і τ та їхні напрями залежать від значень та напрямів M і Q в розглядуваному перерізі та від положення елемента по висоті перерізу. Напрями напружень визначаються напрямками зусиль M та Q . Треба пам'ятати, що епюри M будують на стиснутих волокнах. Тому елементи 1, 3, 10, 11 та 14 зазнають стискання, а елементи 2, 4, 5, 9, 12 та 13 — розтягання.

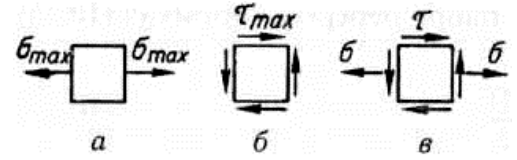


Рис. 15.16.

Щоб визначити напрям τ , слід звернути увагу на знаки Q у відповідних перерізах. Наприклад, у перерізі $A-A$ зусилля Q від'ємне, а отже, намагаючись повернути обидві частини розсіченої балки проти годинникової стрілки, Q діє на лівий бік перерізу вгору (рис. 15.15, в). Саме так і будуть напрямлені τ у правій грані елемента 3; у решті граней напрями τ визначаються законом парності дотичних напружень. Значення напружень у різних елементах можна знайти за формулами, виведеними в попередніх пунктах:

а) для елементів 1, 2, 12, 13 та 14: $\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$;

б) для елементів 6, 7 та 8: $\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_{z \max}}{b \cdot J} = k \cdot \frac{Q}{F}$;

в) для 2, 4, 5, 9, 10 та 11: $\sigma = \frac{M \cdot y}{J}$, $\tau = \frac{Q \cdot S_z(y)}{b \cdot J}$

Отже, при поперечному згинанні балки її матеріал перебуває в неоднорідному плоскому напруженому стані. При цьому умова міцності має бути записана для так званої небезпечної точки балки, тобто тієї точки, де матеріал перебуває в найбільш напруженому стані. **Небезпечною** буде **одна з таких трьох точок**: а) точка, де нормальне напруження досягає найбільшого значення; б) точка, де дотичне напруження досягає найбільшого значення; в) точка, де σ та τ хоч і не набувають найбільших значень, але в своїй сукупності створюють найвигіднішу комбінацію, тобто найбільше еквівалентне напруження за прийнятою для розрахунку теорією міцності. При цьому таких точок може виявитися кілька. Якщо орієнтуватися на **першу небезпечну точку**, розміщену в крайніх волокнах того перерізу балки, де згинальний момент M набирає максимального значення, а елемент перебуває в лінійному напруженому стані (наприклад, точки 2 та 14 на рис. 15.15), умову міцності можна записати у вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (15.28)$$

Друга небезпечна точка лежить на нейтральній лінії того перерізу, де поперечна сила найбільша (на рис. 15.15 це точка б і взагалі будь-яка точка на ділянці нейтрального шару, де $Q = Q_{\max}$). У такій точці спостерігається чистий зсув (рис. 15.16, в), тому умова міцності набирає вигляду:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{b \cdot J} = k \cdot \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]. \quad (15.29)$$

Положення **третьої небезпечної точки** чітко не визначене. Проте де б її не було вибрано, в ній завжди буде плоский напружений стан, при якому по гранях виділеного елемента діятимуть нормальні та дотичні напруження (рис. 15.16, в). **Головні напруження** визначатимуться за формулами:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}); \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}). \quad (15.30)$$

Тоді **умови міцності**, в контексті еквівалентних напружень за різними теоріями міцності, будуть: $\sigma_{еквI} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}) \leq [\sigma];$ (15.31)

$$\sigma_{еквII} = \frac{1-\mu}{2} \cdot \sigma + \frac{1+\mu}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]; \quad (15.32)$$

$$\sigma_{еквIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]; \quad (15.33)$$

$$\sigma_{еквIV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]; \quad (15.34)$$

$$\sigma_{еквM} = \frac{1-m}{2} \cdot \sigma + \frac{1+m}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma], \text{ де } m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}. \quad (15.35)$$

Для **розрахунку балок з пластичних матеріалів** рекомендується користуватись **умовами міцності**, виходячи з **третьої або четвертої теорії міцності** [формули (15.33) та (15.34)].

Здебільшого небезпечною є крайня точка того перерізу, де $M = M_{\max}$.

Основні етапи розрахунку балок на міцність:

- 1) знаходять **небезпечний переріз балки**, тобто той переріз, в якому діє найбільший за абсолютним значенням згинальний момент;
- 2) за таблицею чи розрахунками визначають **момент опору W перерізу відносно нейтральної лінії**;
- 3) застосовують тільки одну **умову міцності** (15.28), яку тому і називають **основною**.

За цією схемою для більшості профілів легко можна виконати також **проектувальний розрахунок**; тоді **основна умова міцності** (15.28) записується у вигляді:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (15.36)$$

Визначивши потрібний момент опору балки та вибравши певний профіль поперечного перерізу, добирають його розміри.

Приклад 15.2

Для балки (рис. 15.17), вважаючи заданими розміри l, D, d та допустиме нормальне напруження $[\sigma]$, знайдіть допустиме навантаження $[P]$.

Розв'язання:

Небезпечним перерізом буде, очевидно, місце закріплення балки, де діятиме максимальний згинальний момент $M_{\max} = P \cdot l$.

$$\text{Момент опору в цьому разі } W = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4); \quad \alpha = \frac{d}{D}.$$

Небезпечними точками в балці будуть верхня та нижня точки перерізу в місці закріплення, умова міцності для яких запишеться так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{32 \cdot P \cdot l}{\pi \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4)} \leq [\sigma]. \text{ Звідси } P \leq [P] = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4) \cdot [\sigma]}{32 \cdot l}.$$

Приклад 15.3

На балку довжиною $l = 1,6 \text{ м}$ (рис. 15.18) діє навантаження $P = 100 \text{ кН}$, рівномірно розподілене по прогону. Матеріал балки **Ст3** ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$). Треба добрати різні варіанти перерізів балки. На рис. 15.18, a – з горизонтальними осьовими лініями зображено нейтральні лінії.

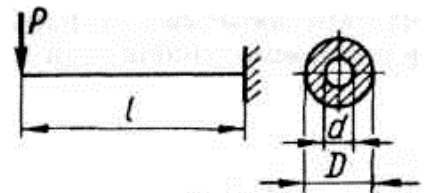


Рис. 15.17.

Розв'язання:

Небезпечний переріз розглядуваної балки буде посередині прогону в місці дії максимального згинального моменту

$$M_{\max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{P \cdot l}{8} = \frac{10^5 \cdot 1,6}{8} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Небезпечними точками цього перерізу будуть точки, найбільш віддалені від нейтральної лінії. Умова міцності для них така:

$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$. Звідси дістанемо потрібне значення моменту опору:

$$W_{\text{розр}} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^7} \approx 125 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Знайдені розміри перерізу округлюють до найближчих стандартних, тому фактичний момент опору W може відрізнятися від розрахункового $W_{\text{розр}}$. У результаті напруження в небезпечній точці відрізнятиметься від $[\sigma]$ і, отже, відбуватиметься перенапруження ($\delta_\sigma > 0$) або недонапруження ($\delta_\sigma < 0$), де $\delta_\sigma = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{M_{\max} - W_{\text{розр}}}{W_{\text{розр}}} \cdot 100\% = \frac{W_{\text{розр}} - W}{W} \cdot 100\%$.

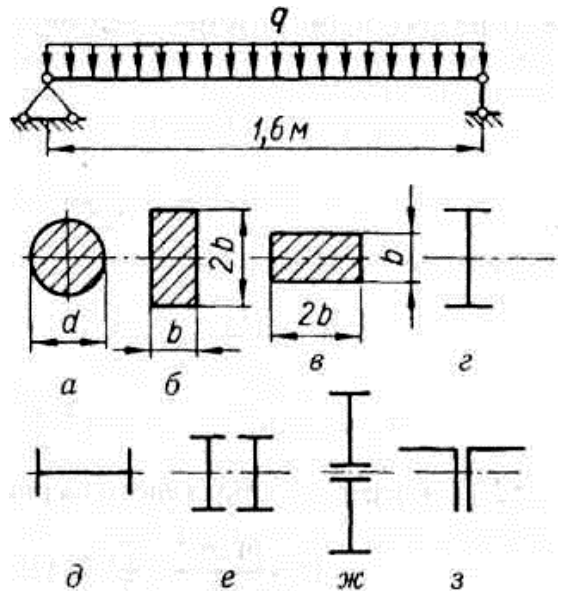


Рис. 15.18.

При розрахунках на міцність відхилення розрахункових напружень від допустимих мають бути в межах $\pm 5\%$ значення допустимих напружень.

Щоб порівняти ваги балок різних варіантів перерізів, ураховуючи, що вага пропорційна площі F перерізу, визначимо також і площу F . Для більшої наочності здобуті розрахунком розміри поперечних перерізів округлятимемо до найближчих більших цілих чисел, а для стандартних профілів братимемо найближчий профіль з більшим моментом опору.

1. Для перерізу, зображеного на рис. 15.18, **а**,

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \geq W_{\text{розр}}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_{\text{розр}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 125 \text{ см}^3}{\pi}} \approx 10,83 \text{ см}.$$

Вибираємо $d = 11 \text{ см} = 110 \text{ мм}$; тоді

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 11^3}{32} \approx 130,5 \text{ см}^3; \quad F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 11^2}{4} \approx 95,0 \text{ см}^2;$$

$$\delta_\sigma = \frac{W_{\text{розр}} - W}{W} \cdot 100\% = \frac{125 - 130,5}{130,5} \cdot 100\% \approx -4,2\%.$$

2. Для перерізу, зображеного на рис. 15.18, **б**,

$$W = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3} \geq W_{\text{розр}}; \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_{\text{розр}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 125 \text{ см}^3}{2}} \approx 5,72 \text{ см}.$$

Вибираємо $b = 6 \text{ см} = 60 \text{ мм}$; тоді

$$W = \frac{2 \cdot b^3}{3} = \frac{2 \cdot 6^3}{3} = 144 \text{ см}^3; \quad F = b \cdot 2 \cdot b = 6 \cdot 2 \cdot 6 = 72 \text{ см}^2;$$

$$\delta_{\sigma} = \frac{W_{розр} - W}{W} \cdot 100 \% = \frac{125 - 144}{144} \cdot 100 \% \approx -13,2 \%$$

3. Для перерізу, зображеного на рис. 15.18, *в*,

$$W = \frac{2 \cdot b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3} \geq W_{розр}; \quad b \geq \sqrt[3]{3 \cdot W_{розр}} = \sqrt[3]{3 \cdot 125 \text{ см}^3} \approx 7,21 \text{ см}.$$

Вибираємо $b = 7,5 \text{ см} = 75 \text{ мм}$; тоді

$$W = \frac{b^3}{3} = \frac{7,5^3}{3} \approx 140,5 \text{ см}^3; \quad F = 2 \cdot b \cdot b = 2 \cdot 7,5 \cdot 7,5 = 112,5 \text{ см}^2;$$

$$\delta_{\sigma} = \frac{W_{розр} - W}{W} \cdot 100 \% = \frac{125 - 140,5}{140,5} \cdot 100 \% \approx -11 \%$$

4. Для *перерізу у вигляді двотавра* (вибираємо двотавр № 18), наведеного

на рис. 15.18, *г*: $W = W_z = 143 \text{ см}^3$; $\delta_{\sigma} = \frac{125 - 143}{143} \cdot 100 \% \approx -12,6 \%$; $F = 23,4 \text{ см}^2$.

5. Для перерізу, зображеного на рис. 15.18, *д*, прийнятними виявляються профілі № 50 та 55, перший з яких дає незначне перенапруження (1,6 %), а другий має помітний надлишок міцності (16,7 %); вибираємо двотавр № 50. Тоді

$$W = W_z = 123 \text{ см}^3; \quad \delta_{\sigma} = \frac{125 - 123}{123} \cdot 100 \% \approx 1,6 \%; \quad F = 100 \text{ см}^2.$$

6. Для перерізу у вигляді двох двотаврів (рис. 15.18, *е*) прийнятним профілем буде двотавр № 14. У цього перерізу: $F = 2 \cdot 17,4 = 34,8 \text{ см}^2$;

$$W = 2 \cdot W_z = 2 \cdot 81,7 = 163,4 \text{ см}^3; \quad \delta_{\sigma} = \frac{125 - 163,4}{163,4} \cdot 100 \% \approx -23,5 \%$$

7. Для перерізу, зображеного на рис. 15.18, *ж*, момент опору всього перерізу не дорівнює сумі моментів опору W_z , кожного профілю, а має визначатися діленням моменту інерції перерізу відносно нейтральної лінії на відстань від нейтральної лінії до крайніх волокон, тобто на висоту одного профілю:

$W_z = \frac{2 \cdot [J_z + (0,5 \cdot h_1)^2 \cdot F_1]}{h_1}$, де h_1 , F_1 , J_z , W_z — відповідно висота, площа перерізу, момент інерції та момент опору одного двотавра.

Виберемо двотавр № 12. Для нього $W_z = \frac{2 \cdot [350 + 6^2 \cdot 14,7]}{12} \approx 146,6 \text{ см}^3$;

$$\delta_{\sigma} = \frac{125 - 146,6}{146,6} \cdot 100 \% \approx -14,7 \%; \quad F = 2 \cdot 14,7 = 29,4 \text{ см}^2.$$

8. Для перерізу у вигляді двох рівнобоких кутників (рис. 15.18, *з*) момент опору дорівнює сумі моментів опору кожного профілю. Проте в таблицях сортаменту для кутників значення W немає. Тому визначаємо момент опору перерізу як $W = 2 \cdot \frac{J_z}{b - z_0}$, де J_z , b , z_0 мають той самий зміст, що і в таблицях сортаменту (небезпечними точками будуть нижні кінці кутників). Безпосередньо визначити, який саме профіль слід взяти, важко, тому розглянемо два варіанти перерізів: 1) для кутника $140 \times 140 \times 12$ — $W = 2 \cdot \frac{602}{14 - 3,9} \approx 119,3 \text{ см}^3$;

$$2) \text{ для кутника } 160 \times 160 \times 10 \text{ — } W = 2 \cdot \frac{774}{16 - 4,3} \approx 132 \text{ см}^3.$$

Останній варіант з погляду міцності кращий. Маємо

$$W = 132 \text{ см}^3; \quad F = 2 \cdot 31,4 = 62,84 \text{ см}^2; \quad \delta_\sigma = \frac{125-132}{132} \cdot 100 \% \approx -5,3 \%$$

Результати розрахунків зведемо в табл. 15.1, котра дасть змогу вирішити, які з добутих перерізів раціональні, а які ні. Так, з останньої графі бачимо, у скільки разів балка того чи іншого перерізу важча, ніж двотаврова балка (рис. 15.18, з), вага якої виявилася найменшою, тому взята за одиницю.

Таблиця 15.1

Переріз на рис. 15.18.	Відхилення від розрахункової міцності, %	Площа перерізу, см^2	Відносна вага
<i>a</i>	4,2	95,0	4,06
<i>б</i>	13,2	72,0	3,08
<i>в</i>	11,0	112,5	4,81
<i>г</i>	12,6	23,4	1,00
<i>д</i>	1,6	100,0	4,27
<i>e</i>	23,5	34,8	1,49
<i>ж</i>	14,7	29,4	1,26
<i>з</i>	5,3	26,8	2,65

15.4. Раціональна форма перерізу балки

Іноді *крім форми перерізу балки велике значення має його орієнтування відносно силової площини*. Як видно з табл. 15.1, *найбільш раціональним є двотавровий переріз, поставлений так, щоб його нейтральна лінія збігалася з віссю, відносно якої $J_z = J_{\max}$* . Гіршим буде переріз, складений з двох двотаврів, поставлених поряд або один та інший. Значно гірші будуть перерізи з двох рівнобоких кутників та прямокутний. Нераціональний також круглий переріз, оскільки вага балки такого перерізу майже в 4 рази перевищує вагу рівномічної балки двотаврового перерізу, що має ту саму міцність. Тому вибір круглого перерізу може бути виправданий тільки конструктивними або технологічними міркуваннями (наприклад, для обертових деталей). Зовсім нераціональний переріз, орієнтований так, що нейтральна лінія збігається з віссю J_{\min} (варіанти *в* та *д* на рис. 15.18 та в табл. 15.1).

Коли в умові міцності $\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]$ максимальне напруження близьке до допустимого, то це не означає, що переріз добрано вдало, оскільки при іншій формі перерізу та значно меншому σ_{\max} балка може виявитися набагато легшою. Ці висновки справедливі для будь-якої балки, яка зазнає *плоского згинання та виготовлена з пластичного матеріалу*, оскільки характер навантаження та схема балки впливають тільки на значення розрахункового згинального моменту. Для балок, виготовлених із *крихкого матеріалу*, висловлені рекомендації втрачають силу, оскільки для нього допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+]$ значно менше, ніж допустиме напруження на стиск $[\sigma_-]$. У цьому разі *недоцільно вибирати перерізи, нейтральна лінія яких є віссю симетрії перерізу і, отже, максимальні напруження в розтягнутих та стиснутих зонах однакові*. Раціональний такий переріз, в якого σ_{\max} у розтягнутій зоні значно менше, ніж σ_{\max} у стиснутій зоні. Досягти цього можна, вибираючи форму перерізу, при якій нейтральна лінія була б зсунута в бік розтягнутої зони. Приклад такого перерізу та відповідну епюру напружень а наведено на рис. 15.19.

Якщо говорити про раціональність балки в цілому, то слід мати на увазі, що M та Q неоднакові в різних перерізах по довжині балки. Тому розміри, добрані за небезпечним перерізом, виявляються занадто великими для інших перерізів балки. Ці обставини спонукають з метою економії ваги та матеріалу застосовувати **балки змінного перерізу**.

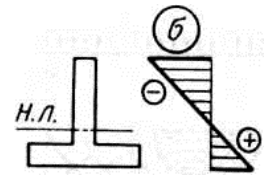


Рис. 15.19.

11.5. Повний розрахунок балок на міцність при згинанні

Усі розглянуті приклади розрахунку на міцність при згинанні належать до тих випадків, коли небезпечною є одна з точок крайніх волокон балки (див. рис. 15.15, б) і напружений стан в ній лінійний (див. рис. 15.16, а).

Іноді бувають випадки, коли **небезпечна точка належить нейтральному шару**. В ній матеріал зазнає чистого зсуву (див. рис. 15.15, б та 15.16, б), і для розрахунку слід використовувати умови міцності (15.29). Така ситуація може бути тоді, коли при великих поперечних силах у перерізах балки діють незначні згинальні моменти, наприклад при коротких прогонах і значному поперечному навантаженні.

Приклад 15.4

На балку (рис. 15.20) діє рівномірно розподілене навантаження $q = 120 \text{ кН/м}$. Прогін $l = 70 \text{ см}$, переріз балки двотавровий, матеріал Ст3 ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $[\tau] = 100 \text{ МПа}$). Треба добрати розміри балки.

Розв'язання:

Виберемо переріз балки з умови міцності за

нормальними напруженнями: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$.

Найбільший згинальний момент буде в середньому

перерізі балки — $M_{\max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 0,7^2}{8} \approx 7,35 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$. З умови міцності —

$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{7,35 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^8} \approx 46 \text{ (см}^3\text{)}$. За таблицею сортаменту вибираємо двотавр № 12, в якого $W = 58,4 \text{ см}^3$ $J = 350 \text{ см}^4$. Найбільша поперечна сила буде в опорному перерізі —

$Q_{\max} = \frac{q \cdot l}{8} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 0,7}{8} \approx 42 \text{ (кН)}$.

Перевіримо **міцність балки за дотичними напруженнями**. Умова міцності, згідно з формулою (15.29), має вигляд $\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{b \cdot J} = k \cdot \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]$. Ширина перерізу по нейтральній лінії $b = 0,48 \text{ см}$ (у сортаменті вона позначена літерою d). За таблицею сортаменту знаходимо, що $S_{\max} = 33,7 \text{ см}^3$. Підставивши числові значення в останню формулу, матимемо

$$\tau_{\max} = \frac{4,2 \cdot 10^4 \cdot 3,37 \cdot 10^{-5}}{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}} \approx 84,25 \text{ (МПа)} < [\tau] = 100 \text{ МПа}$$

Отже, **розміри перерізу балки задовольняють умови міцності як за нормальним, так і за дотичним напруженнями**.

Приклад 15.5

Треба вибрати двотавровий переріз для балки, зображеної на рис. 15.21, а. Матеріал балки Ст3 ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $[\tau] = 100 \text{ МПа}$).

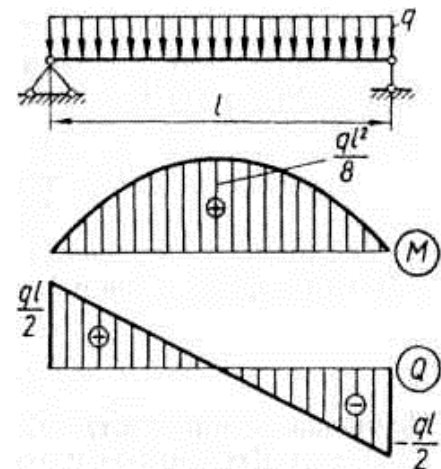


Рис. 15.20.

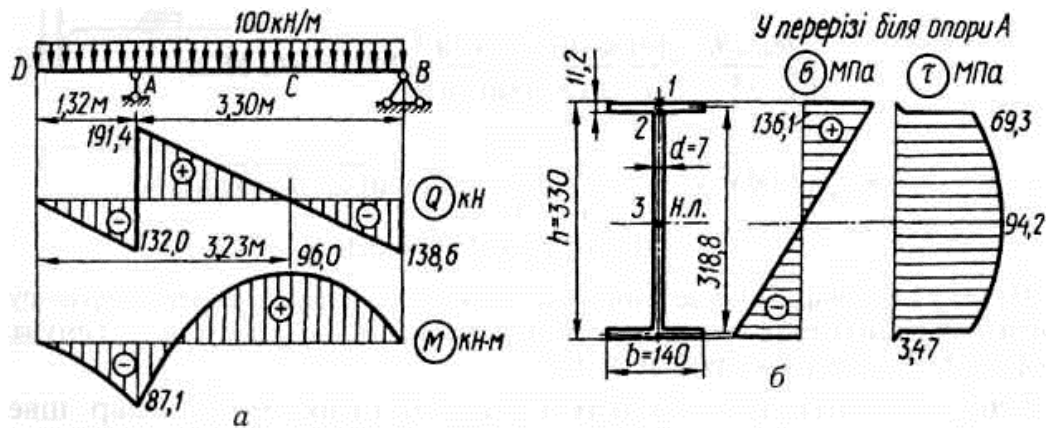


Рис. 15.21.

Розв'язання:

Побудувавши епюри Q та M , робимо висновок, що небезпечними можуть виявитися такі точки балки: а) крайні точки (рис. 15.21, б, точка 1) перерізу С; б) точка, розміщена в місці з'єднання стінки з полицею (рис. 15.21, б, точка 2) у перерізі праворуч від опори А; в) точка, що лежить на нейтральній лінії цього самого перерізу (рис. 15.21, б, точка 3).

Доберемо поперечний переріз балки, вважаючи небезпечною точку 1 у перерізі С. З умови міцності (15.28) маємо $W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{9,6 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^8} \approx 600 \text{ (см}^3\text{)}$. За таблицею сортаменту знаходимо потрібний профіль № 33, в якого $W = 597 \text{ см}^3$.

$$\text{Тоді напруженій в точці 1} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{9,6 \cdot 10^4}{5,97 \cdot 10^{-4}} \approx 160,8 \text{ (МПа)}$$

Це більше за допустиме, але перенапруження становить всього 0,5 %.

Тепер знаходимо геометричні характеристики двотавра № 33, потрібні для перевірки міцності в точках 2 та 3 перерізу А. Згідно з таблицею сортаменту, $J = 9840 \text{ см}^4$; $S_{\max} = 339 \text{ см}^3$; ширина перерізу стінки, що відповідає точкам 2 та 3, $d = 0,7 \text{ см}$. Дістаємо $S_{II} = 14 \cdot 1,12 \cdot 15,94 \approx 250 \text{ (см}^3\text{)}$.

Перевіряємо міцність у точці 3 перерізу балки безпосередньо праворуч від опори А. За умовою міцності (15.29), враховуючи, що $Q_{\max} = 191,4 \text{ кН}$, буде

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{b \cdot J} = \frac{1,914 \cdot 10^6 \cdot 3,39 \cdot 10^{-4}}{7 \cdot 10^{-3} \cdot 9,84 \cdot 10^{-5}} \approx 94,2 \text{ (МПа)} < [\tau] = 100 \text{ МПа}$$

Перевіряємо міцність у точці 2 цього самого перерізу. Матеріал **Ст3** пластичний, тому скористаємось умовою міцності (15.34) за IV теорією міцності:

$$\sigma_{\text{еквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]$$

У перерізі діють $M = 87,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і $Q = Q_{\max} = 191,4 \text{ кН}$. Тому в точці 2

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J} = \frac{8,71 \cdot 10^4 \cdot (16,5 - 1,12) \cdot 10^{-2}}{9,84 \cdot 10^{-5}} \approx 136,1 \text{ (МПа)};$$

$$\tau = \frac{Q_{\max} \cdot S_{II}}{b \cdot J} = \frac{1,914 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{7 \cdot 10^{-3} \cdot 9,84 \cdot 10^{-5}} \approx 69,3 \text{ (МПа)};$$

$$\sigma_{\text{еквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{136,1^2 + 3 \cdot 69,3^2} \approx 181,4 \text{ (МПа)} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Отже, у вибраній балці небезпечною виявляється точка 2 перерізу праворуч від опори А, причому перенапруження в ній становить 14 %, що недопустимо. Тому замість профілю № 33 слід взяти профіль № 36.

В балках з тонкими стінками (двотавр, швелер) небезпечною може виявитися точка, розміщена в місці з'єднання стінки з полицею. Це буває тоді, коли до балки прикладене значне поперечне навантаження, причому є перерізи, в яких M та Q одночасно великі. Один з таких перерізів і буде небезпечним.

Отже, *якщо балка має тонкостінний переріз і до неї прикладені значні поперечні навантаження, то слід виконувати повний розрахунок на міцність*. Якщо розрахунок проектувальний, то спочатку можна добрати переріз за основною умовою міцності (15.28), а потім здійснити перевірку за всіма умовами міцності.

Запитання для самоконтролю

1. Вкажіть основні умови, за яких виникає чисте плоске згинання балки.
2. Проаналізуйте статичний аспект задачі на чисте плоске згинання балки.
3. Охарактеризуйте геометричний аспект задачі на чисте плоске згинання балки.
4. Запишіть та поясніть формулу К. Нав'є.
5. Що розуміють під нейтральною лінією перерізу?
6. Поясніть, чому якщо силова площина збігається з однією з головних площин стрижня, то нейтральний шар збігається з іншою головною площиною?
7. Визначте закон Гука при згинанні.
8. Що називається жорсткістю перерізу при згинанні?
9. Що називається осьовим моментом опору при згинанні?
10. Проаналізуйте особливості розподілу величини нормальних напружень σ при чистому плоскому згинанні балки.
11. Поясніть, чому з метою економії матеріалу та зниження ваги конструкції, яка працює на згинання, слід вибирати такі форми перерізу, щоб більша частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії?
12. Запишіть та проаналізуйте формулу для допустимого згинального моменту
13. Наведіть та проаналізуйте припущення про характер розподілу дотичних напружень у балках прямокутного перерізу.
14. Охарактеризуйте особливості виведення формули Д. І. Журавського для визначення дотичних напружень у перерізі балки при згинанні.
15. Наведіть вирази для визначення дотичного напруження при поперечному згинанні балок прямокутного та круглого перерізів.
16. Вкажіть загальні висновки щодо розподілу дотичних напружень у перерізах при поперечному згинанні балок.
17. Проаналізуйте умови міцності для небезпечних точок при згинанні.
18. З'ясуйте основні етапи розрахунку балок на міцність.
19. Поясніть, чому для балки, яка працює на згин найбільш раціональним є двотавровий переріз, поставлений так, щоб його нейтральна лінія збігалася з віссю, відносно якої $J_z = J_{\max}$.
20. Вкажіть особливості вибору раціональної форми перерізу балки з крихкого матеріалу.
21. Проаналізуйте особливості повного розрахунку балок на міцність при згинанні у випадку, коли небезпечна точка належить нейтральному шару.
22. Поясніть, чому якщо балка має тонкостінний переріз і до неї прикладені значні поперечні навантаження, то слід виконувати повний розрахунок на міцність?

Лекція № 16

Тема: «Деформування при складному напруженому стані»

ПЛАН

- 16.1. Складне і косе згинання.
- 16.2. Згинання з розтяганням (стисканням).
- 16.3. Згинання з крученням.

16.1. Складне і косе згинання

Під **складним опором** розуміють різні комбінації раніше розглянутих простих напружених станів брусів — **розтягання, стискання, зсуву, кручення та згинання**. У загальному випадку навантажування бруса у поперечних перерізах можуть діяти всі шість компонент внутрішніх сил — $N, Q_y, Q_z, M_y, M_z, M_{кр}$, пов'язаних з чотирма простими деформаціями стрижня.

Складне згинання спричинюється силами або моментами, розміщеними в різних площинах, які проходять крізь вісь балки (рис. 16.1, а). Таке **згинання** називають **неплоским**, оскільки зігнута вісь балки не є плоскою кривою.

Косим згинанням називається згинання, при якому всі навантаження, які його спричинюють, діють в одній площині, що не збігається ні з однією з головних площин (рис. 16.2, а). При складному згинанні у поперечних перерізах бруса виникають лише чотири внутрішніх силових фактори: Q_y, Q_z, M_y, M_z . Розраховуючи на міцність при складному згинанні, як правило, нехтують впливом дотичних напружень.

Для спрощення **випадки неплоского і косоного згинання зводять до двох плоских згинань** — навантаження, що діють у довільних поздовжніх силових площинах, розкладають на складові, які розміщуються в головних площинах xy та xz . В цьому разі осі Y та Z є головними осями інерції перерізу. Схеми навантажування брусів при складному та косому згинанні можуть бути такими, які зображено на рис. 16.1, б та 16.2, б відповідно.

Формула для визначення нормального напруження в будь-якій точці (x, y) поперечного перерізу при складному (просторовому) згинанні:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}, \quad (16.1)$$

де J_z і J_y — моменти інерції площі перерізу відносно осей Z та Y .

Згинальні моменти та координати точок, в яких визначають напруження, підставляють в цю формулу зі своїми знаками.

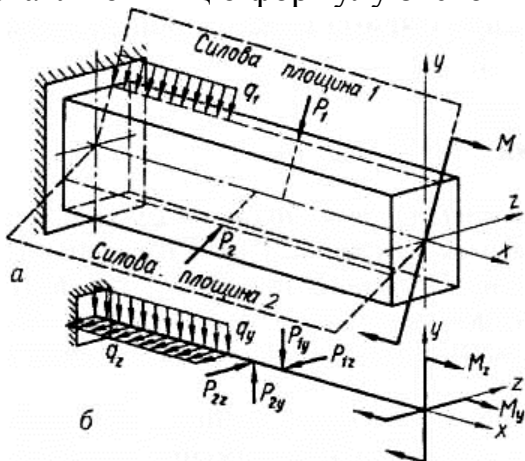


Рис. 16.1.

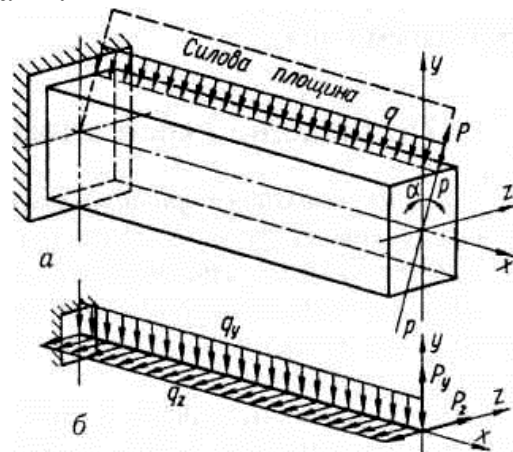


Рис. 16.2.

$$\text{Для випадку косо́го згинання} \quad \sigma = M \cdot \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{J_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{J_y} \right), \quad (16.2)$$

де M — згинальний момент у даному перерізі в силевій площині; α — кут між силовою площиною та головною площиною $xу$ (рис. 16.2, а).

Рівняння нейтральної лінії при складному згинанні є рівнянням прямої, що проходить крізь початок координат (центр тяжіння перерізу):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}, \quad (16.3)$$

де β — кут між нейтральною лінією та головною віссю інерції Z перерізу; x_0, y_0 — координати точок нейтральної лінії. У загальному випадку складного (просторового) згинання кути нахилу нейтральних ліній уздовж осі бруса не залишаються однаковими, а змінюються відповідно до зміни співвідношення значень згинальних моментів M_z та M_y .

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_z}$, то $\operatorname{tg} \beta = - \frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. (16.4)

При косому згинанні поперечні перерізи бруса, залишаючись плоскими, повертаються навколо паралельних одна одній нейтральних ліній, як і при простому плоскому згинанні. Викривлення осі бруса при цьому відбувається в одній площині, нормальній до напрямку нейтральної лінії. Ця площина називається площиною згинання. Умова міцності для загального випадку неплоского згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad (16.5)$$

де $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$ і $W_y = \frac{J_y}{z_{\max}}$ — моменти опору перерізу відносно осей Z та Y .

Повний прогин f перерізу при складному згинанні визначиться як геомет-

рична сума прогинів в v та ω : $f = \sqrt{v^2 + \omega^2}$, (16.6)

де v — прогин в напрямі головної осі Z , диференціальне рівняння якого у площині xz має вигляд $\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_y}{E \cdot J_y}$; ω — прогин в напрямі головної осі Y , дифере-

нціальне рівняння якого у площині $xу$ має вигляд $\frac{d^2 \omega}{dx^2} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}$; E — модуль Юнга.

Прогином балки в даному перерізі називається переміщення центру ваги перерізу в напрямі, перпендикулярному до недеформованої осі балки.

Приклад 16.1

Дерев'яний прогін перерізом 16×20 см (рис. 16.3, б) вільно обпирається на кроквяні ферми (рис. 16.3, а), відстань між якими 3 м. Прогін навантажений вертикальним рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $q = 4$ кН/м.

Уклон верхнього пояса кроквяної ферми 1:2. Визначити найбільші напруження стискання та розтягання в перерізі балки, зазначити точки перерізу, де вони мають місце, та знайти повний прогин середнього перерізу балки.

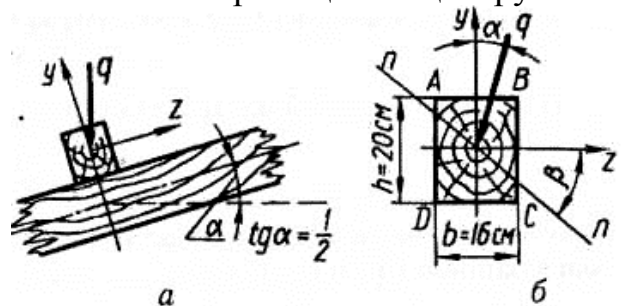


Рис. 16.3.

Розв'язання:

Максимальний згинальний момент, який буде посередині балки,

$M_{\max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 3^2}{8} \approx 4,5 (\text{кН} \cdot \text{м})$. Складові цього моменту, що діють у головних площинах інерції (відносно осей Z та Y), визначимо за формулами

$$M_z = -M_{\max} \cdot \cos \alpha = -4,5 \cdot 10^3 \cdot 0,894 \approx -4,025 (\text{кН} \cdot \text{м});$$

$$M_y = -M_{\max} \cdot \sin \alpha = -4,5 \cdot 10^3 \cdot 0,447 \approx -2,012 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

Кут нахилу нейтральної лінії $n-n$ визначиться з формули (16.4)

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{b^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{20^2}{16^2} \approx -0,7813 \approx -\operatorname{tg} 38^\circ.$$

Найбільшими будуть напруження стискування в точці B та розтягання в точці D , тобто в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії:

$$\sigma_B = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = 6 \cdot \left(\frac{M_z}{b \cdot h^2} + \frac{M_y}{h \cdot b^2} \right) = 6 \cdot \left(\frac{-4,025 \cdot 10^3}{0,16 \cdot 0,2^2} + \frac{-2,012 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,16^2} \right) \approx -6,12 (\text{МПа})$$

У точці D , очевидно, буде таке саме за модулем напруження розтягання: $\sigma_D = 6,12 \text{ МПа}$. Найбільший прогин має місце посередині прогону. Визначаємо

його за формулою $|f| = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J}$, в яку замість інтенсивності розподіленого навантаження слід підставити його складові в напрямках головних осей:

$$q_y = q \cdot \cos \alpha = 4 \cdot 10^3 \cdot 0,894 \approx 3,576 (\text{кН/м}); q_z = q \cdot \sin \alpha = 4 \cdot 10^3 \cdot 0,447 \approx 1,788 (\text{кН/м}),$$

а також моменти інерції відносно головних осей Z та Y . Складові прогину тоді

$$\omega = -\frac{5 \cdot q_y \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J_z} = -\frac{5 \cdot 3,576 \cdot 10^3 \cdot 3^4 \cdot 12}{384 \cdot 10^{10} \cdot 0,16 \cdot 0,2^3} \approx -0,35 (\text{см});$$

$$\upsilon = -\frac{5 \cdot q_z \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J_y} = -\frac{5 \cdot 1,788 \cdot 10^3 \cdot 3^4 \cdot 12}{384 \cdot 10^{10} \cdot 0,2 \cdot 0,16^3} \approx -0,28 (\text{см}),$$

а повний прогин знайдемо як геометричну суму зазначених складових прогину: $f = \sqrt{\upsilon^2 + \omega^2} = \sqrt{0,28^2 + 0,35^2} \approx 0,45 (\text{см})$. Прогин f лежить у площині, яка перпендикулярна до нейтральної лінії.

16.2. Згинання з розтяганням (стискуванням)

Розрахунки на спільну дію згинання та розтягання можна звести до таких двох видів: а) розрахунки на дію поздовжньо-поперечних навантажень; б) розрахунки на позацентрове розтягання (стискування). Окремо має розглядатися згинання з розтяганням (стискуванням) кривого бруса.

16.2.1. Складне згинання з розтяганням (стискуванням) прямого бруса

При складному згинанні з розтяганням або стискуванням на балку діють поздовжні та поперечні навантаження, що перетинають вісь бруса, і в загальному випадку (рис. 16.4, а) в поперечних перерізах виникають згинальні моменти M_z та M_y , у двох площинах, поперечні сили Q_z та Q_y , а також поздовжня сила N (рис. 16.4, б). **Нормальні напруження в довільній точці перерізу**

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}. \quad (16.7)$$

Згинальні моменти, поздовжню силу й координати точки, в якій визначають напруження, підставляють сюди з їхніми знаками.

Напружений стан у небезпечній точці лінійний. Тому умова міцності при складному згинанні з розтяганням або стисканням: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$. (16.8)

Якщо переріз має дві осі симетрії й кути, що стирчать, то небезпечною буде одна з кутових точок. Напруження в ній визначають за формулою (16.7)

або так:
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}$$
 (16.9)

Знаки в цій формулі комбінують за змістом або на підставі порівняння з формулою (16.7). У випадку плоского згинання в головній площині yOx з розтяганням (стисканням) формула (16.9) спрощується:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z} \quad (16.10)$$

16.2.2. Позацентрове розтягання (стискання) прямого бруса

Позацентрове розтягання (стискання) є окремим випадком складного згинання з розтяганням (стисканням), при якому брус розтягується силами, паралельними осі бруса, так що рівнодійна їх не збігається з віссю бруса (рис. 16.5), а проходить крізь точку p , що називається **полюсом сили**.

Нехай на брус довільного перерізу діє одна сила P , яка паралельна осі бруса й перетинає довільний поперечний переріз у точці p (рис. 16.5). Координати цієї точки в системі головних осей перерізу позначимо через y_p та z_p , а відстань цієї точки до осі X , яка називається **ексцентриситетом**, — через e . У довільному поперечному перерізі при певному навантаженні діють такі внутрішні силові фактори:

$$N = P; \quad M_y = P \cdot z_p; \quad M_z = P \cdot y_p.$$

Напруження в довільній точці перерізу складатимуться з напружень осьового розтягання силою N та напружень від чистого згинання моментами M_z та M_y :

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} = \frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{F \cdot y_p}{J_z} \cdot y + \frac{F \cdot z_p}{J_y} \cdot z \right), \quad (16.11)$$

або
$$\sigma = \frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} \cdot y + \frac{z_p}{i_y^2} \cdot z \right), \quad (16.12)$$

де $i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}$, $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$ — радіуси інерції площі поперечного перерізу відносно осей Z та Y .

Для визначення небезпечної точки при складному профілі доцільно побудувати **нейтральну лінію перерізу**. **Небезпечною** в перерізі буде **точка**, найвіддаленіша від нейтральної лінії.

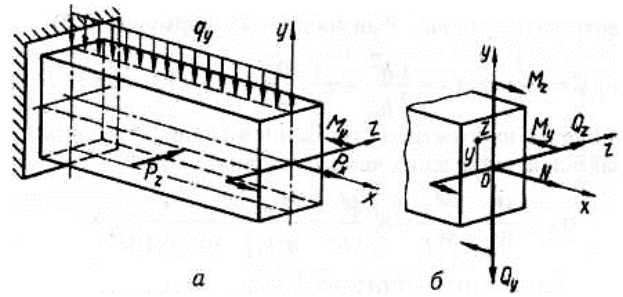


Рис. 16.4.

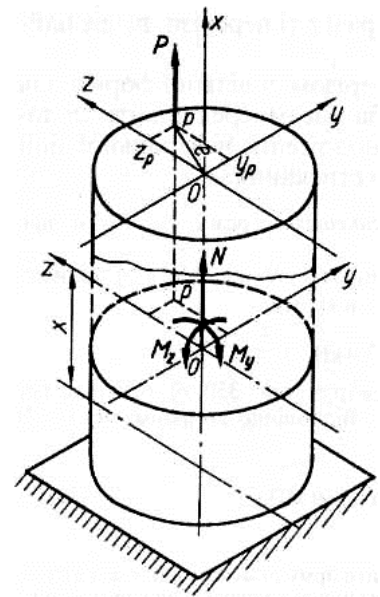


Рис. 16.5.

Рівняння нейтральної лінії при позацентровому розтягненні (стисканні)

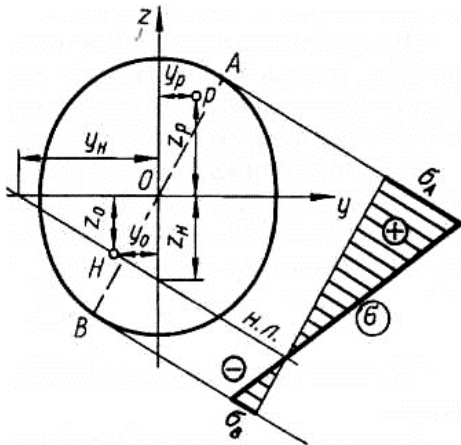


Рис. 16.6.

Нейтральна лінія перетинає координатні осі в точках, які належать квадранту, протилежному тому, в якому лежить точка p .

прямого бруса:
$$\frac{y_p}{i_z^2} \cdot y_0 + \frac{z_p}{i_y^2} \cdot z_0 = -1. \quad (16.13)$$

Формула для знаходження відрізків y_n та z_n , що відсікаються нейтральною лінією на осях Y

та Z (рис. 16.6):
$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_p}; \quad z_n = -\frac{i_y^2}{z_p}. \quad (16.14)$$

Провівши паралельно нейтральній лінії дотичні до контуру перерізу, знайдемо **найбільш напружені точки A та B** у розтягнутій та стиснутій зонах перерізу (рис. 16.6).

Напруження в цих точках та умови міцності мають вигляд:

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} \cdot y_A + \frac{z_p}{i_y^2} \cdot z_A \right) \leq [\sigma_+];$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = \frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} \cdot y_B + \frac{z_p}{i_y^2} \cdot z_B \right) \leq [\sigma_-], \quad (12.15)$$

де y_A, z_A та y_B, z_B — координати точок A та B відповідно. Епюру нормальних напружень σ наведено на рис. 16.6.

Умова міцності для прямокутного перерізу при позацентровому розтягненні (стисканні) прямого бруса:
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (16.16)$$

Формули (16.15) та (16.16) справедливі й у випадку дії стискальної сили P , якщо немає небезпеки виникнення поздовжнього згинання.

16.2.3. Ядро перерізу

Ядром перерізу називають зону навколо центра ваги поперечного перерізу, яка має таку властивість: **якщо позацентрово прикладене навантаження розміщене в зоні ядра, то нормальні напруження в усіх точках поперечного перерізу мають один знак**. Для побудови ядра перерізу будемо задаватися різними положеннями нейтральної лінії, дотичними до контуру перерізу, й обчислювати координати відповідних точок прикладання сили P за такими формулами,

що впливають з виразу (16.14):
$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n}; \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_n}. \quad (16.17)$$

Обчислені координати визначають точки, що лежать на межі ядра перерізу.

Властивість нейтральної лінії: при повороті нейтральної лінії навколо деякої фіксованої точки A контуру перерізу точка прикладання сили переміщується вздовж деякої прямої.

Для побудови ядра перерізу будь-якої фігури треба провести кілька положень нейтральної лінії, що збігаються зі сторонами перерізу, а також дотикаються до точок, які стирчать.

Приклад 16.2

Побудуйте ядро перерізу для прямокутника $ABCD$ (рис. 16.7).

Розв'язання:

Сумістимо спочатку нейтральну лінію зі стороною CD (положення $1 — 1$). Очевидно, в цьому разі $y_n = 0,5 \cdot b$, $z_n = \infty$. Тоді із виразів (16. 17):

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{b}{6} ; z_p = -\frac{i_y^2}{z_n} = 0.$$

Тут ураховано, що

$$i_z^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{h \cdot b^3}{12 \cdot h \cdot b} = \frac{b^2}{12} ; i_y^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h} = \frac{h^2}{12}.$$

Отже, координати точки I' ядра перерізу визначені. Сумістимо тепер нейтральну лінію зі стороною AD (положення $2 — 2$). Маємо $y_n = \infty$, $z_n = 0,5 \cdot h$. Тоді координати точки $2'$ ядра

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n} = 0 ; z_p = -\frac{i_y^2}{z_n} = -\frac{h^2}{12 \cdot 0,5 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Аналогічно визначаються координати точок $3'$ та $4'$, що відповідають положенням $3 — 3$ та $4 — 4$ нейтральної лінії.

Оскільки при переході нейтральної лінії з одного боку на інший вона повертається навколо кутової точки перерізу, то точка прикладання сили переміщується по прямій, утворюючи контур ядра. Отже, ядро перерізу буде ромбом з діагоналями, які дорівнюють одній третині відповідної сторони перерізу.

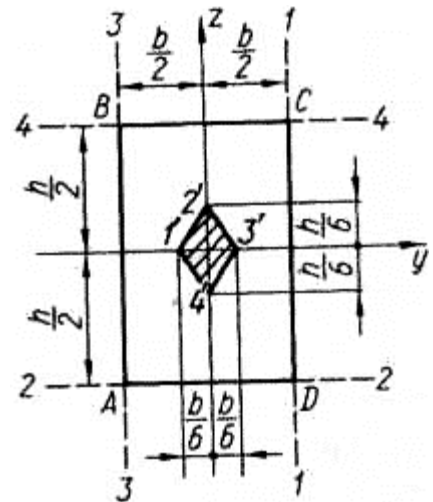


Рис. 16.7.

Приклад 16.3

Для круглого перерізу побудуйте ядро перерізу (рис. 16.8).

Розв'язання:

У колі всі центральні осі — головні. Тому при дотиканні нейтральної лінії $1 — 1$ у будь-якій точці A точка I' лежить на діаметрі, який також проходить крізь точку A ; її

координати такі: $y_p = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{i_z^2}{-R} = \frac{R^2}{4 \cdot R} = \frac{R}{4}$; $z_p = 0$.

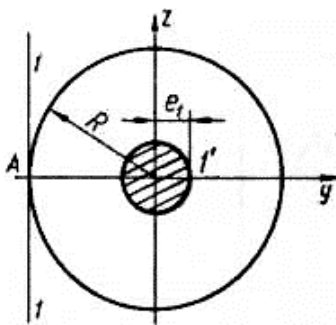


Рис. 16.8.

Очевидно, можна зробити висновок, що внаслідок симетрії перерізу ядро перерізу також буде колом з радіусом: $e_1 = \frac{R}{4}$.

16.3. Згинання з крученням

16.3.1. Згинання з крученням круглих валів

Сили, що діють на вали (тиск на зуби шестерень, натяг ременів, власна вага вала та шківів тощо), спричиняють у поперечних перерізах валів такі внутрішні силові фактори: $Q_y, Q_z, M_y, M_z, M_{кр} = M_x$. В будь-якому поперечному перерізі одночасно виникають **нормальні напруження від згинання в двох площинах**, а також **дотичні напруження від кручення та згинання**.

Для **розрахунку вала** насамперед треба визначити **небезпечні перерізи**. З цією метою слід побудувати **епюри згинальних моментів** M_y, M_z та крутного моменту $M_{кр} = M_x$. **При згинанні вала круглого або кільцевого перерізу в кожному з його перерізів відбувається пряме згинання під дією результуючого згинального моменту:**

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (16.18)$$

Вектор моменту M у різних перерізах може мати різні напрями, тому навіть якщо немає розподілених навантажень, епюра M може бути криволінійною.

Потім, у небезпечному перерізі визначаємо небезпечні точки, положення нейтральної лінії та будуємо епюри нормальних напружень σ від результуючого згинального моменту M , які змінюються пропорційно відстані точок від нейтральної лінії. **Небезпечними точками** є точки, які найбільш віддалені від нейтральної лінії, — в них одночасно і нормальні напруження від згинання, і дотичні напруження мають найбільші значення:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (16.19)$$

При згинанні з крученням елемент у небезпечній точці перебуває в плоскому напруженому стані, тому **головні дотичні напруження**, спричинюються крутним моментом, треба визначати за **формулами**:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \right); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \right). \quad (16.20)$$

В даному випадку складного напруженого стану ми впливом дотичних напружень від поперечних сил знехтували, оскільки вони значно менші, ніж дотичні напруження, спричинені крученням.

Умови міцності при згинанні з крученням круглих валів:

$$1) \text{ за теорією Мора } \sigma_{екв M} = \frac{1-m}{2} \cdot \sigma + \frac{1+m}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]; \quad (16.21)$$

$$2) \text{ за IV теорією міцності } \sigma_{екв IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]. \quad (16.22)$$

Підставляючи у формули (16.21) і (16.22) вирази (16.19) для напружень та враховуючи, що $W_p = 2 \cdot W$, матимемо:

$$\sigma_{екв M} = \frac{\frac{1-m}{2} \cdot \sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+m}{2} \cdot \sqrt{M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \leq [\sigma]; \quad (16.23)$$

$$\sigma_{екв IV} = \frac{\sqrt{0,75 \cdot M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (16.24)$$

Чисельники цих формул є **зведеними моментами**, дія яких еквівалентна спільній дії трьох моментів (згідно з вибраною теорією міцності). Отже,

$$M_{зв M} = \frac{1-m}{2} \cdot \sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+m}{2} \cdot \sqrt{M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad (16.25)$$

$$M_{зв IV} = \sqrt{0,75 \cdot M_{кр}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2}. \quad (16.26)$$

При спільній дії згинання з крученням стрижні круглого перерізу розраховують на згинання від зведеного моменту: $\sigma_{екв} = \frac{M_{зв}}{W} \leq [\sigma]. \quad (16.27)$

Розв'язуючи нерівність (16.27) відносно W , дістанемо **формули для визначення моменту опору згинанні з крученням:** $W \geq \frac{M_{зв}}{[\sigma]}, \quad (16.28)$

та **діаметра круглого вала:** $d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{зв}}{\pi \cdot [\sigma]}} \approx \sqrt[3]{10 \cdot \frac{M_{зв}}{[\sigma]}}. \quad (16.29)$

Приклад 16.4

На вал (рис. 16.9) насаджені три зубчастих колеса. Колеса навантажені силами $P_1 = 4000 \text{ Н}$, $P_2 = 3000 \text{ Н}$, $P_3 = 2000 \text{ Н}$, причому сила P_1 вертикальна, а

сили P_2 та P_3 горизонтальні. Діаметри зубчастих коліс такі: $D_1 = 100 \text{ мм}$; $D_2 = 300 \text{ мм}$; $D_3 = 250 \text{ мм}$. Допустимі напруження $[\sigma] = 60 \text{ МПа}$. Доберіть діаметр вала за **IV теорією міцності**.

Розв'язання:

Замінімо діюче навантаження статично еквівалентною системою сил. Перенесемо сили P_1 , P_2 та P_3 на вісь вала, замінюючи кожен з них силою, прикладеною в точках **B**, **C** або **D** відповідно, й скручувальною парою сил $M_1 = 0,5 \cdot D_1 \cdot P_1$; $M_2 = 0,5 \cdot D_2 \cdot P_2$; $M_3 = 0,5 \cdot D_3 \cdot P_3$ відповідно. Отже, дістаємо розрахункову схему (рис. 16.9). На схемі наведено як значення прикладених зовнішніх навантажень (P_i , M_{ki}), так і значення спричинених ними опорних реакцій.

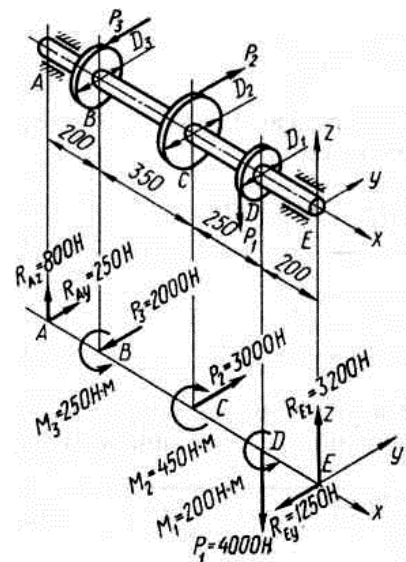
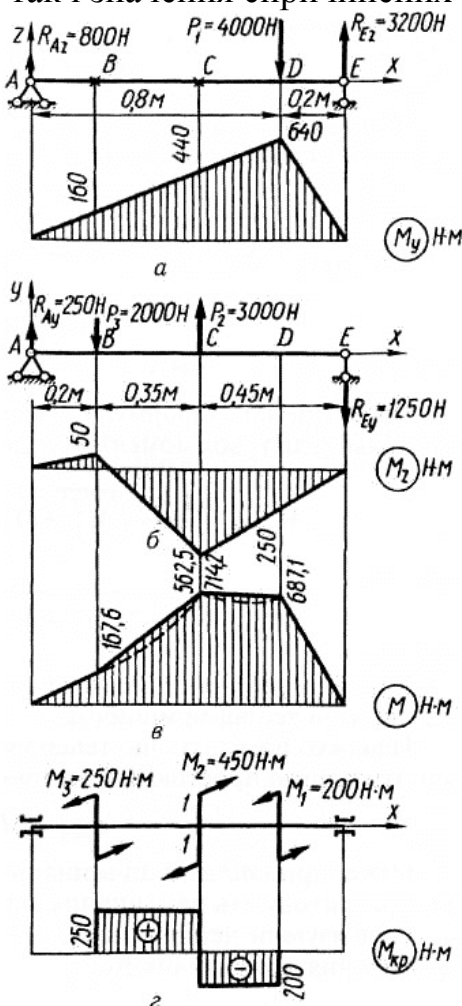


Рис. 16.9.



Розглядаючи окремо сили в горизонтальній та вертикальній площинах (рис. 16.10, **а** та **б**), будемо епюри згинальних моментів. Для побудови сумарної епюри моментів M визначаємо ординати в характерних точках за формулою (16.18):

1) у **перерізі B**

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{160^2 + 50^2} \approx 167,6 \text{ (H} \cdot \text{м)};$$

2) у **перерізі C**

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{440^2 + 562,5^2} \approx 714,2 \text{ (H} \cdot \text{м)};$$

3) у **перерізі D**

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{640^2 + 250^2} \approx 687,1 \text{ (H} \cdot \text{м)}.$$

Епюру M , побудовану за цими даними, наведено на рис. 16.10, **в**. На ділянках **BC** та **CD** така епюра має завищені значення ординат (дійсні значення показано штриховою лінією).

Розглядаючи моменти, що діють на вал, будемо епюру крутних моментів (рис. 16.10, **г**). Порівнюючи епюри M та $M_{кр}$, знаходимо, що небезпечним є переріз **1—1** ліворуч від точки **C**, де одночасно діють $M = 714,2 \text{ H} \cdot \text{м}$ та $M_{кр} = 250 \text{ H} \cdot \text{м}$.

Згідно з IV теорією міцності, зведений момент визначаємо за формулою (12.26):

Рис. 16.10. $M_{зв IV} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{714,2^2 + 0,75 \cdot 250^2} \approx 746,3 \text{ H} \cdot \text{м}.$

Підставляючи зведений момент у формулу (16.38), дістаємо потрібний осьовий момент опору $W \geq \frac{M_{зв}}{[\sigma]} = \frac{746,3}{6 \cdot 10^7} \approx 12,44 \text{ (см}^3\text{)}$, і, поклавши $W \approx 0,1 \cdot d^3$, обчислюємо потрібний діаметр вала: $d \geq \sqrt[3]{10 \cdot W} = \sqrt[3]{10 \cdot 12,44} \approx 4,99 \text{ (см)}$.

Округливши до найближчого стандартного діаметра, вибираємо $d = 50 \text{ мм}$.

16.3.2. Згинання з крученням брусу прямокутного перерізу

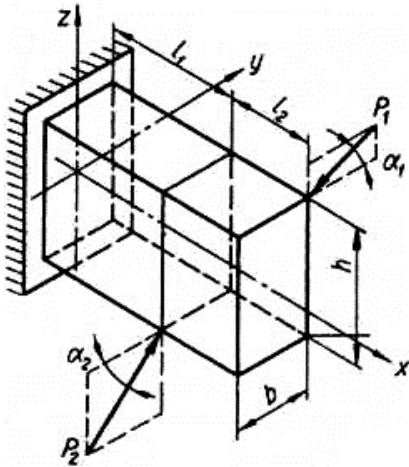


Рис. 16.11.

На практиці часто зустрічаються стрижні некруглого перерізу, які зазнають дії крутних та згинальних моментів. Як приклад розглянемо брус прямокутного перерізу (рис. 16.11), навантажений силами P_1 та P_2 , що спричинюють у поперечних перерізах згинальні моменти M_y та M_z , а також поперечні сили Q_y та Q_z .

Розрахуємо в такій послідовності. Розкладаємо задані навантаження (сили P_1 та P_2) на складові вздовж координатних осей та зводимо їх до осі вала. При цьому дістаємо в поперечних перерізах, у площинах яких лежать точки прикладання сил, зовнішні

скручувальні моменти $M_{\kappa 1} = M_{1x}$ та $M_{\kappa 2} = M_{2x}$. Добуту таким чином розрахункову схему наведено на рис. 16.12. Для того щоб визначити положення небезпечного перерізу, будемо епюри згинальних моментів M_z та M_y , а також епюру крутних моментів $M_{кр}$ (рис. 16.12).

Зіставлення епюр показує, що найбільш небезпечним є переріз $I-I$ бруса ліворуч від точки прикладення сили P_2 . У цьому перерізі діють найбільші згинальні моменти M_z , M_y та максимальний крутний момент $M_{кр}$. Щоб перевірити міцність бруса, треба в небезпечному перерізі знайти небезпечну точку, обчислити для неї еквівалентне напруження (за однією з теорій міцності) й порівняти його з допустимим напруженням. Для визначення небезпечної точки перерізу (рис. 16.13, *a*) будемо епюри напружень від усіх силових факторів (рис. 16.13, *б* – *е*): $\sigma_x(M_z)$; $\sigma_x(M_y)$; $\tau_{zx}(Q_z)$; $\tau_{yx}(Q_y)$; $\tau(M_{кр})$. Епюра $\tau(M_{кр})$ для довгої сторони контуру має максимум, який позначимо $\tau_{\max}(M_{кр})$. Найбільшу ординату епюри $\tau(M_{кр})$ на короткій стороні позначимо $\tau'(M_{кр})$. Ці напруження можна знайти за відомими формулами кручення брусів прямокутного перерізу (див. п. 14.4 лекції № 10):

$$\tau_{\max}(M_{кр}) = \tau_L = \tau_T = \frac{M_x}{\alpha \cdot h \cdot b^2}. \quad (16.30)$$

Епюри нормальних та дотичних напружень наочно показують, що на відміну від круглого перерізу в даному випадку найбільші нормальні напруження σ_x та найбільші дотичні напруження $\tau(Q)$ та $\tau(M_{кр})$ виникають не в одній і тій самій точці. Отже, для визначення найнебезпечнішої точки в перерізі треба порівняти еквівалентні напруження в кількох небезпечних точках. Як правило, вважають за достатнє розглянути три точки перерізу: одну кутову точку (*A* чи *C*), одну точку посередині довгої сторони прямокутника (*L* або *T*) та одну точку посередині короткої сторони (*S* або *K*).

Елемент, виділений в околі точки *C* (при вибраних на рис. 16.13, *a* напрямках M_z , M_y), перебуває в умовах простого розтягання напруженнями, що дорі-

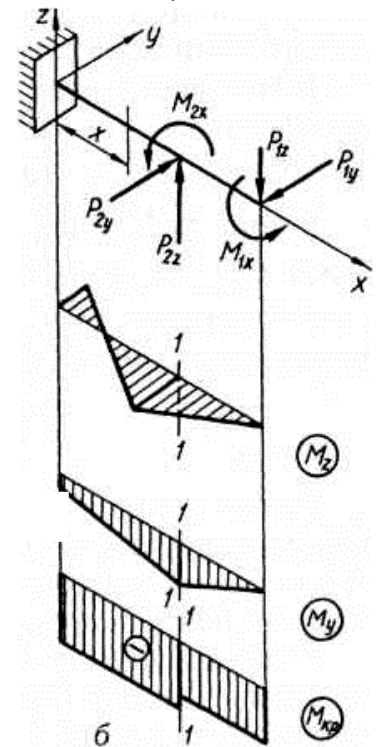


Рис. 16.12.

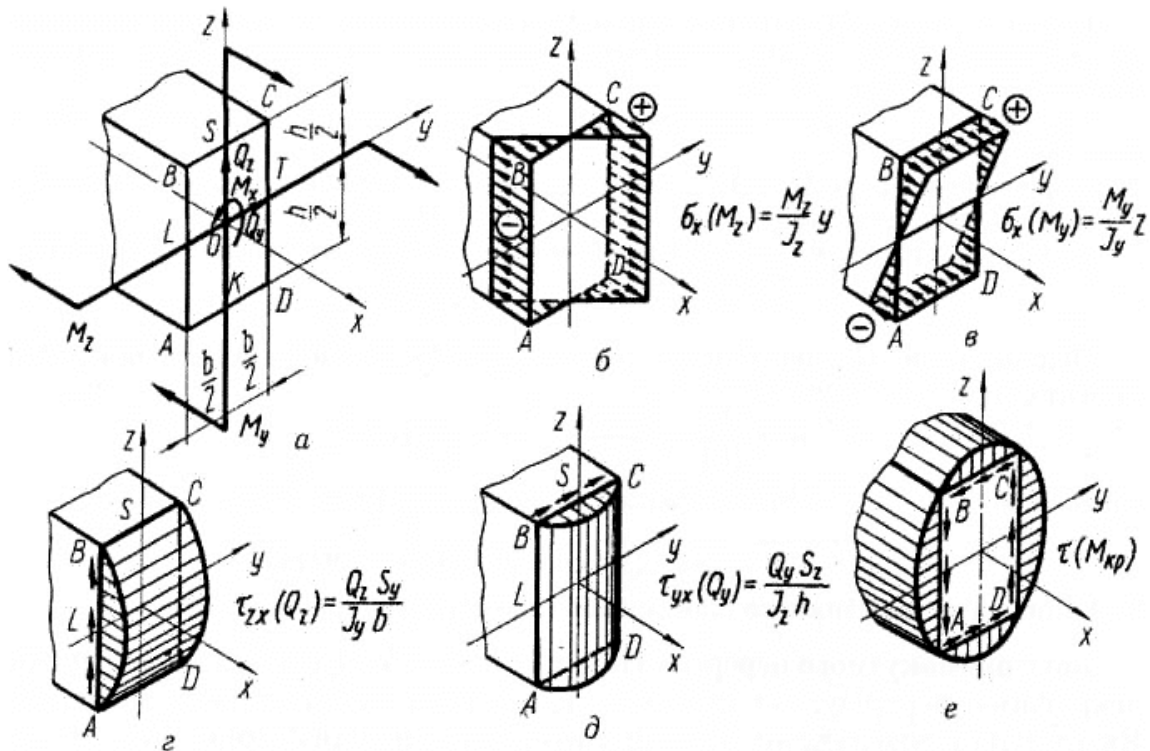


Рис. 16.13.

внюють сумі нормальних напружень від M_z та M_y . Тому умова міцності для цієї точки має бути записана як для випадку лінійного напруженого стану:

$$\sigma_C = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (16.31)$$

Елемент в околі точки A також перебуває в умовах лінійного напруженого стану — простого стискання, оскільки σ_A відрізняється від σ_C тільки знаком. Якщо матеріал бруса має різні допустимі напруження для розтягання та стискання, то перевіряти міцність за формулою (16.31) потрібно у кожній з цих точок. Елементи в околі точок L та K перебувають у плоскому напруженому стані, й, отже, головні напруження в них, як і в круглому брусі, можна обчислити за формулою (16.20). Взагалі дотичні напруження, що входять до формули (16.20), слід обчислювати як від дії крутного моменту $M_{кр}$, так і від дії поперечних сил:

$$\tau_L = \frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot b} \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_z}{b \cdot h}; \quad \tau_K = \gamma \cdot \frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot b^2} \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{b \cdot h}. \quad (16.32)$$

Однак дотичні напруження від поперечних сил Q_y та Q_z звичайно бувають дуже малі, а тому здебільшого їхнім впливом нехтують. Для обчислення еквівалентних напружень у точках L та K підставляємо значення нормальних та дотичних напружень у формули (16.21) та (16.22). Одночасно дістанемо й відповідні умови міцності (за IV теорією та теорією Мора):

$$1) \text{ у точці } L: \quad \sigma_{еквIV} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot b}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (16.33)$$

$$\sigma_{еквM} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{M_z}{W_z} + \frac{1+m}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot b}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (16.34)$$

$$2) \text{ у точці } K: \quad \sigma_{еквIV} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3 \cdot \left(\gamma \cdot \frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot b^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (16.35)$$

$$\sigma_{еквM} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4 \cdot \left(\gamma \cdot \frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot b^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (16.36)$$

Знаки моментів при підставлянні їх у рівняння (16.33) — (16.36) не мають значення, оскільки до цих формул входять квадрати моментів.

Отже, найнебезпечніша точка визначається тільки в результаті обчислення еквівалентних напружень в усіх трьох точках **C**, **L** та **K** за формулами (16.31) та (16.33) — (16.36), причому в кожному окремому випадку положення найбільш небезпечної точки залежить від конкретного співвідношення значень моментів M_x , M_y та M_z .

Запитання для самоконтролю

1. Що розуміють під складним опором?
2. Поясніть, чим неплюске складне згинання відрізняється від косоного складного згинання?
3. Вкажіть, до чого для спрощення зводять випадки неплюского і косоного згинання?
4. Наведіть та поясніть формули для визначення нормального напруження в будь-якій точці (x, y) поперечного перерізу при просторовому згинанні.
5. Виведіть рівняння нейтральної лінії при складному згинанні.
6. Що називається площиною згинання?
7. Наведіть та поясніть умову міцності для загального випадку неплюского згинання.
8. З'ясуйте, чим визначається повний прогин f перерізу при складному згинанні?
9. Охарактеризуйте складне згинання з розтяганням (стисканням) прямого бруса.
10. Вкажіть в яких випадках виникає позацентрове розтягання (стискання).
11. Що називається полюсом сили?
12. Проаналізуйте позацентрове розтягання (стискання) прямого бруса.
13. Дайте визначення поняттю „ядро перерізу” та наведіть основні положення його побудови.
14. Охарактеризуйте згинання з крученням круглих валів.
15. Проаналізуйте Згинання з крученням бруса прямокутного перерізу.

Література

1. Федуліна А.І. Теоретична механіка: Навчальний посібник. — Київ: „Вища школа”, 2005. — 319 с.
2. Тимофеев С.И. Теоретическая механика (статика и кинематика). — Ростов на Дону: „Феникс”, 2005. — 153 с.
3. Цасюк В.В. Теоретична механіка: Навчальний посібник. — Київ: „Центр навчальної літератури”, 2004. — 402 с.
4. Павловський М.А. Теоретична механіка. — Київ: „Техніка”, 2002. — 512 с.
5. Рижкова С.А. Теоретична механіка. Практикум: Навчальний посібник. — Київ: „Либідь”, 1992. — 248 с.
6. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для машиностроительных и приборостроительных спец. вузов. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: „Высшая школа”, 1990. — 607 с.
7. Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики. — Москва: „Высшая школа”, 1964. — 844 с.
8. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів: Підручник/ За ред. Г.С. Писаренка. — 2-ге вид., допов. і переробл. — Київ: „Вища школа”, 2004. — 655 с.
9. Ройзман В.П. Прикладна механіка. Опір матеріалів: Навчальний посібник. — Київ: „Центр навчальної літератури”, 2004. — 124 с.
10. В.Т. Павлице, Є.В. Харченко, А.Ф. Барвінський, Ю.Г. Гаршнєв. Прикладна механіка. Навчальний посібник. / За ред. В.Т. Павлице. — Львів: „Інтелект-Захід”, 2004. — 368 с.
11. Прикладна механіка: Навчальний посібник для вузів/ Дмитро Коновалюк, Роман Ковальчук, Василь Шваб'юк та ін. Під ред. Дмитра Коновалюка. — Луцьк: ЛДТУ, 2003. — 771 с.
12. Сапрыкин В.Н. Техническая механика/ Серия «Учебники, учебные пособия». — Ростов на Дону: «Феникс»; Харьков: «Торсинг», 2003. — 560 с.
13. Кочетов В.Т., Павленко А.Д., Кочетов М.В. Сопротивление материалов. — Ростов на Дону: «Феникс», 2001. — 368 с.
14. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов: Учебник для студ. техникумов / 8-е изд., перераб. и доп. — Москва: «Высшая школа», 1998. — 367 с.
15. Эрдеди А.А., Медведев Ю.А., Эрдеди Н.А. Техническая механика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: [Учебник для машиностроит. спец. техникумов] / 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: «Высшая школа», 1991. — 303 с.
16. Портаев Л.П., Петраков А.А., Портаев В.Л. Техническая механика: [Учебник для строит. спец. сред. спец. учеб. заведений] / Под ред. Л.П. Портаева. — Москва: «Стройиздат», 1987. — 464 с.
17. Ердеді О.О., Анікін І.В., Медведєв Ю.О., Чуйков О.С. Технічна механіка: [Підручник для серед. спец. навч. закладів] / Пер. з 2-го рос. перероб. вид. — Київ: „Вища школа”, Голов. вид-во, 1983. — 368 с.
18. Мовнин М.С., Израелит А.Б., Рубашкин А.Г. Основы технической механики: Учебник для технологических немашиностроительных специальностей техникумов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Ленинград: „Машиностроение”, Ленинградское отделение, 1982. — 288 с.
19. Дубейковский Е.Н., Савушкин Е.С., Цейтлин Л.А. Техническая механика. Учебник для техникумов. — Москва: „Машиностроение”, 1980. — 344 с.
20. Бялер І.Я., Левінсон В.Н., Михаловський В.А., Саліон В.Ю. Технічна механіка: [Навчальний посібник для с.-г. технікумів техн. спеціальностей]. — Київ: „Вища школа”, 1971. — 379 с.

Зміст

Вступ.....	3
Лекція № 1. Тема: «Основні поняття та аксіоми статички абсолютно твердого тіла».....	5
Лекція № 2. Тема: «В'язі та їх реакції».....	13
Лекція № 3. Тема: «Система збіжних сил».....	22
Лекція № 4. Тема: «Момент сили відносно точки і осі».....	38
Лекція № 5. Тема: «Пара сил».....	46
Лекція № 6. Тема: «Довільна просторова система сил».....	54
Лекція № 7. Тема: «Рівновага довільної просторової системи сил».....	72
Лекція № 8. Тема: «Центр тяжіння абсолютно твердого тіла».....	87
Лекція № 9. Тема: «Геометричні характеристики поперечних перерізів стрижнів».....	118
Лекція № 10. Тема: «Наука про опір матеріалів. Деформації та напруження».....	142
Лекція № 11. Тема: «Епюри внутрішніх зусиль та моментів».....	153
Лекція № 12. Тема: «Деформування розтягом і стиском».....	172
Лекція № 13. Тема: «Деформування зсувом».....	203
Лекція № 14. Тема: «Деформування крученням».....	212
Лекція № 15. Тема: «Деформування згином».....	229
Лекція № 16. Тема: «Деформування при складному напруженому стані».....	247
Література.....	258

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Ткачук Андрій Іванович

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

КУРС ЛЕКЦІЙ

**навчальний посібник для студентів
вищих педагогічних навчальних закладів
напряму підготовки 6.010103 «Технологічна освіта»
за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр»**

Підп. до друку 24.01.2015 р. Формат 60×84¹/₁₆. Папір газ.
Друк різнограф. Ум. др. арк. 12,1. Тираж 100. Зам. № 4678.

ЦЕНТР ОПЕРАТИВНОЇ ПОЛІГРАФІЇ «АВАНГАРД»



м. Кіровоград, вул. Пашутінська, 12, оф. 4.

Тел./факс: 24-86-34, 27-02-24,

моб. /050/ 531-73-72, 341-04-33.

<http://avangard.kr.ua>, e-mail: info@avangard.kr.ua