

## 7.4 Цифрова обробка сигналів

### 7.4.1 Загальні відомості та поняття

Часто при вирішенні задач ідентифікації складних об'єктів за допомогою ідентифікаційних експериментів виникає необхідність відновлення корисних сигналів на фоні завад. Такі задачі розглядаються у спеціальній сфері застосувань обчислювальної техніки – цифровій обробці сигналів (ЦОС) (*digital signal processing*). Спорідненими для цифрової обробки сигналів є теорія інформації, зокрема, теорія оптимального прийому сигналів і теорія розпізнавання образів. При цьому в першому випадку основним завданням є виділення сигналу на фоні шумів і завад різної фізичної природи, а в другому – автоматичне розпізнавання, тобто класифікація та ідентифікація сигналу.

При цифровій обробці використовується подання сигналів у вигляді послідовностей чисел або символів. Мета такої обробки може полягати в оцінюванні характерних параметрів сигналу або в перетворенні сигналу у форму, яка в деякому сенсі є зручнішою. Такі формули класичного чисельного аналізу, як формули інтерполяції, інтегрування й диференціювання, безумовно є алгоритмами цифрової обробки. Наявність швидкодіючих комп'ютерів сприяє розвитку все більш складних і раціональних алгоритмів обробки сигналів; останні ж успіхи в технології інтегральних схем обіцяють високу економічність побудови дуже складних систем цифрової обробки сигналів. Цифрова обробка сигналів застосовується в таких різних галузях, як біомедицина, акустика, звукова локація, радіолокація, сейсмологія, зв'язок, системи передачі даних, ядерна техніка і багатьох інших.

Цифрова обробка сигналів є альтернативою традиційній аналоговій. До її найважливіших якісних переваг відносять можливість реалізації будь-яких як завгодно складних (оптимальних) алгоритмів обробки з гарантованою і незалежною від дестабілізуювальних факторів точністю; програмованість та функціональна гнучкість; можливість адаптації до сигналів, що обробляються; технологічність.

Розвиток нової точки зору на цифрову обробку сигналів було прискорено відкриттям в 1965 р. ефективних алгоритмів для обчислень перетворень Фур'є. Цей клас алгоритмів став відомий як швидке перетворення Фур'є (ШПФ, *fast Fourier transform*). Можливості ШПФ були значними з декількох точок зору. Багато алгоритмів обробки сигналів, отриманих на цифрових ЕОМ, вимагали часу обробки на декілька порядків більшого, ніж реальний час. Часто це було пов'язане з тим, що спектральний аналіз був важливою складовою частиною обробки сигналів, а ефективні засоби для його виконання не були відомі. Алгоритм швидкого перетворення Фур'є зменшив час обчислення перетворення Фур'є на кілька порядків. Це дозволило створити дуже складні алгоритми обробки сигналів у реальному часі.

*Методами ЦОС* є математичні співвідношення або алгоритми, відповідно до яких виконуються обчислювальні операції над цифровими сигналами. До

них належать алгоритми цифрової фільтрації, спектрально-кореляційного аналізу, модуляції та демодуляції сигналів, адаптивної обробки та ін.

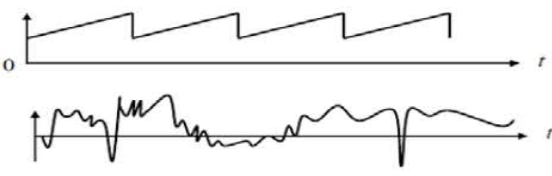
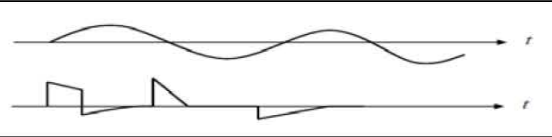
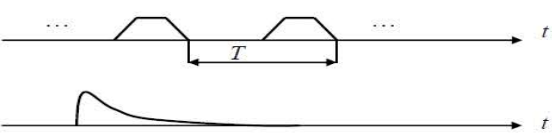
*Засобами реалізації ЦОС* є жорстка логіка, програмовані логічні інтегральні схеми, мікропроцесори загального призначення, мікроконтролери, персональні комп'ютери (комп'ютерна обробка сигналів) та цифрові сигнальні процесори. В

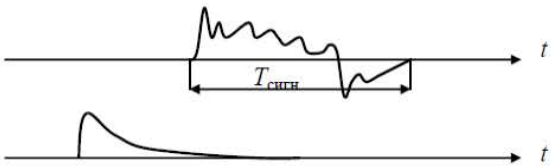
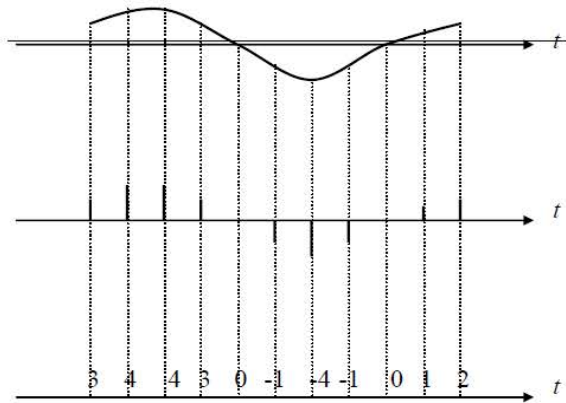
У технічних галузях знань термін «сигнал» (signal, від латинського *signum* – знак) часто використовується в широкому діапазоні значень, без дотримання строгої термінології. Під ним розуміють і технічний засіб (матеріальний носій) для передачі, обігу і використання інформації – електричний, магнітний, оптичний сигнал; і фізичний процес, що являє собою матеріальне відображення інформаційного повідомлення – зміна певного параметра носія інформації (напруги, частоти, потужності електромагнітних коливань, інтенсивності світлового потоку тощо) у часі, у просторі або залежно від зміни значень будь-яких інших аргументів (незалежних змінних).

Всі ці поняття можна об'єднати одним технічним терміном: сигнал – це фізична величина, що містить у собі певні відомості про певний об'єкт або процес.

Множина сигналів надзвичайно різноманітна. Проте, вибираючи певні критерії розбіжності, можна навести приблизну класифікацію сигналів (таблиця 7.8). Однак слід пам'ятати, що у реальному житті сигнали часто не вкладаються в рамки чистої класифікації. Наприклад, будь-який реальний детермінований сигнал має випадкову шумову складову.

Таблиця 7.8 – Класифікація сигналів

	Тип (клас) сигналів	Геометричне зображення
1.	а) <b>Детерміновані</b> (значення $s(t)$ відомо в будь-який момент часу $t$ ) б) <b>Випадкові</b> (передбачити точно значення $s(t)$ неможливо)	
2.	а) <b>Неперервні</b> (без розривів першого роду) б) <b>Імпульсні</b> (з розривами першого роду)	
3.	а) <b>Періодичні</b> (період $T$ ) б) <b>Неперіодичні</b> $T = \infty$	

4.	а) <b>Кінцевої довжини</b> $(T_{\text{сигн}})$ б) <b>Нескінченної довжини</b> $T_{\text{сигн}} = \infty$	
5.	а) <b>Аналогові</b> (існують у будь-який момент часу $t$ і можуть приймати будь-яке значення в інтервалі $[S_{\text{min}}, S_{\text{max}}]$ ) б) <b>Дискретні</b> (існують тільки в дискретні моменти $t_k$ , тобто є послідовністю імпульсних відліків) в) <b>Цифрові</b> (послідовність цифрових відліків)	

#### 7.4.2 Загальна структура системи цифрової обробки аналогових сигналів

В цьому розділі розглянуто загальну структуру та складові компоненти системи ЦОС. Без цього буде важко зрозуміти логіки математичних підходів та моделей перетворення сигналів в сучасних системах обробки даних та зображень.

Системи ЦОС безпосередньо оперують із послідовностями цифрових кодів, які називають цифровими сигналами. Такі сигнали обробляються процесором ЦОС, що є операційним або обчислювальним ядром системи. Алгоритмічна обробка аналогових сигналів цифровими засобами припускає їхнє попереднє перетворення в цифрову форму, а в системах з аналоговим виходом – із цифрової форми в аналогову. Загальній структурній схемі системи цифрової обробки аналогових сигналів (рис. 7.12) відповідає ланцюжок функціональних перетворень сигналу виду:  $A/A \Rightarrow A/\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}/A \Rightarrow A/A$  (“аналог/аналог”, “аналог/цифра”, “цифра/цифра», “цифра/аналог”, “аналог/аналог”), реалізованих відповідно аналоговим фільтром нижніх частот ФНЧ1, аналого-цифровим перетворювачем АЦП, процесором ЦОС, цифроаналоговим перетворювачем ЦАП і аналоговим фільтром нижніх частот ФНЧ2.

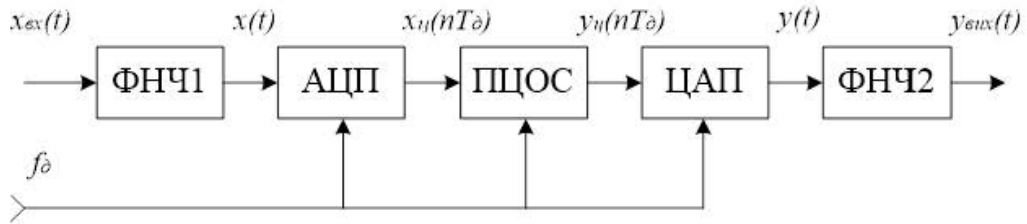


Рисунок 7.12 – Загальна структура системи ЦОС

Вхідний сигнал системи ЦОС  $x_{ex}(t)$  надходить на АЦП через аналоговий фільтр нижніх частот ФНЧ1 із частотою зрізу  $\omega_3$ . Фільтр обмежує смугу частот вхідного сигналу (охоплюючи й супутні йому шуми та завади) максимальною частотою  $\omega_m \approx \omega_3$ , що задовольняє умову  $\omega_m < \omega_D / 2$ , де  $\omega_D = 2\pi f_D$  – частота дискретизації сигналу. Він послабляє спотворення накладання при дискретизації сигналів з необмеженим за частотою спектром і називається протимаскувальним.

Аналого-цифрове перетворення (*analog-to-digital conversion*) містить дискретизацію сигналу за часом, квантування за рівнем і цифрове кодування (рис. 7.13).

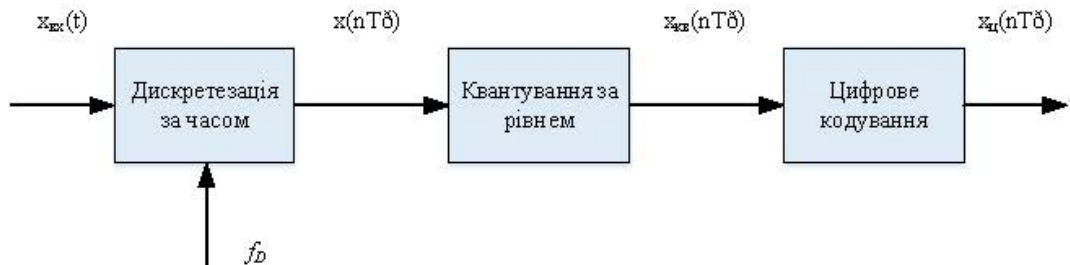


Рисунок 7.13 – Послідовність операцій аналого-цифрового перетворення сигналу

У результаті утворюється дискретний сигнал  $x(nT_{\delta})$ , що відповідає вибіркам аналогового сигналу  $x(t)$  у дискретні рівновіддалені моменти часу  $nT_{\delta}$ , дискретний квантований сигнал  $x_{кв}(nT_{\delta})$ , що відрізняється кінцевою множиною прийнятих ним значень, і цифровий сигнал  $x_u(nT_{\delta})$  у вигляді послідовності цифрових двійкових кодів із числом розрядів, що відповідають розрядності АЦП. Процесором ЦОС, відповідно до заданого алгоритму цифрової обробки (оператором  $\Phi$ ), вхідний цифровий сигнал  $x_u(nT_{\delta})$  перетвориться у вихідний цифровий сигнал системи  $y_u(nT_{\delta}) = \Phi[x_u(nT_{\delta})]$ .

*Дискретизація за часом*, або просто дискретизація (digitization) є процедурою взяття миттєвих значень – відліків аналогового сигналу  $x(t)$  з інтервалом часу, що дорівнює періоду дискретизації  $T_\Delta$ . Приклад дискретизованого сигналу наведено на рис. 7.14.

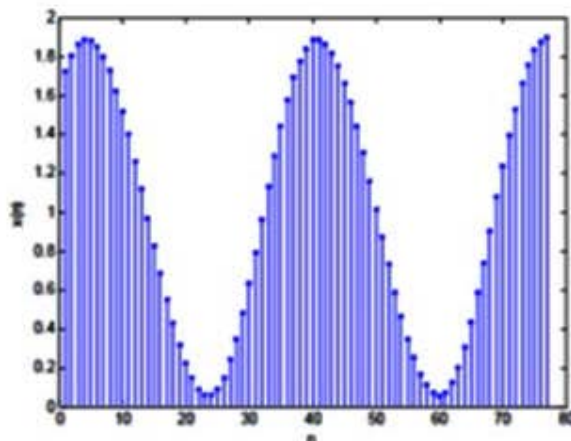


Рисунок 7.14– Дискретизований сигнал

*Квантування за рівнем* (квантування – quantization) здійснюється з метою подання точних значень відліків  $x_y(nT_\Delta)$  у вигляді двійкових чисел кінцевої розрядності – квантованих відліків  $x_y(nT_\Delta)$ . Для цього динамічний діапазон дискретного сигналу  $x(nT_\Delta)$  розбивається на кінцеве число дискретних рівнів – рівнів квантування – і кожному відліку за певним правилом привласнюється значення одного з найближчих рівнів, між якими він виявляється. Рівні квантування кодуються двійковими числами розрядності  $b$ , що залежить від числа рівнів квантування  $R$

$$R \leq 2^b.$$

Сукупність квантованих відліків  $x_y(nT_\Delta)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  називають *цифровим сигналом* (digital signal).

### 7.4.3 Дискретні та неперервні сигнали

Більшість реальних сигналів (наприклад, звукових) є неперервними функціями. Для цифрової обробки таких сигналів їх потрібно перевести в цифрову форму. Один із способів зробити це – рівномірно за часом виміряти значення сигналу на певному проміжку часу і ввести отримані значення амплітуд. Якщо робити вимірювання досить часто, то за значеннями отриманого дискретного сигналу можна буде досить точно відновити вигляд вихідного неперервного сигналу.

**Дискретні сигнали** (discrete signal)  $x_d(t)$  утворюють шляхом множення аналогового сигналу  $x(t)$  на так звану функцію дискретизації  $y(t)$ , яка являє собою періодичну послідовність коротких імпульсів, що слідує з кроком дискретизації  $\Delta t$  (рис. 7.15, а). В ідеальному випадку як функція дискретизації використовується періодична послідовність дельта-функцій (рис. 7.15, б).

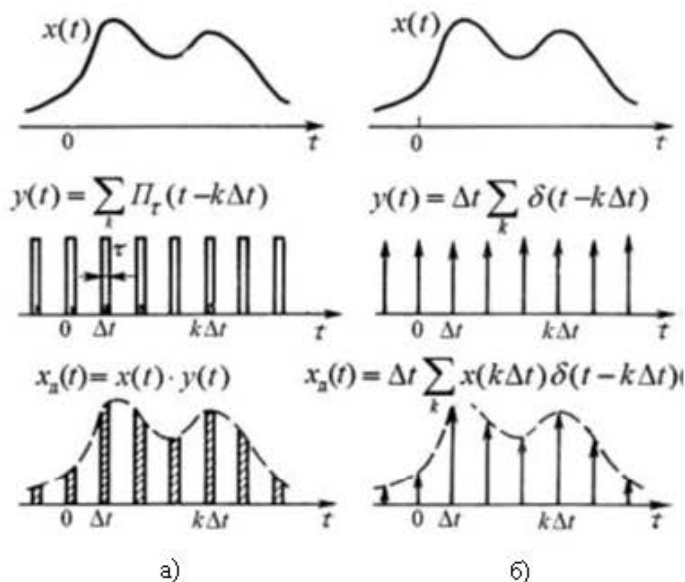


Рисунок 7.15– Дискретизація сигналу

Процес вимірювання величини сигналу через рівні проміжки часу називається рівномірною (за часом) дискретизацією. Багато пристроїв для введення даних здійснюють дискретизацію.

Наприклад, звукова карта дискретизує сигнал з мікрофона, сканер дискретизує сигнал, що надходить з фотоелемента. У результаті дискретизації неперервний (аналоговий) сигнал перетворюється у послідовність значень. Пристрій, що виконує цей процес, називається аналого-цифровим перетворювачем (АЦП, analogue-to-digital converter, ADC). Частота, з якою АЦП здійснює вимірювання значень аналогового сигналу і видає його цифрові значення, називається частотою дискретизації.

Інтервал  $T = k\Delta t$   $T = k\Delta t$  називають періодом дискретизації, частотою дискретизації є обернена величина

$$f_n = \frac{1}{T}.$$

Значення послідовності в моменти часу  $nT$  називають відліками сигналу. Дискретний сигнал може бути представлений як у дійсній формі, так і у комплексній. В останньому випадку його дійсна та уявна частини описуються дійсними послідовностями

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT).$$

Математично дискретний сигнал визначають:

- функцією дискретного часу  $nT_\delta$  :  $x(nT_\delta) = x(t) | t = nT_\delta, n = 0, 1, 2, \dots$ , що відповідає вибіркам аналогового сигналу в дискретні періодично повторювані моменти часу;
- функцією номера вибірки  $n$  :  $x(n) = x(nT_\delta) | T_\delta = 1$ , що в загальному випадку не пов'язана з часом;
- функцією неперервного часу  $t$ :

$$x(t) = x(t) f_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_\delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_\delta) \delta(t - nT_\delta),$$

що її отримують множенням аналогового сигналу  $x(t)$  на функцію дискретизації  $f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_\delta)$  у вигляді періодичної послідовності імпульсів з періодом, що дорівнює:

$$\delta(t - nT_\delta) = \begin{cases} \infty, & t = nT_\delta \\ 0, & t \neq nT_\delta \end{cases}.$$

Графічно дискретні сигнали передаються функцією номера вибірки  $n$  або дискретного часу  $nT_\delta$  (рис. 7.16).

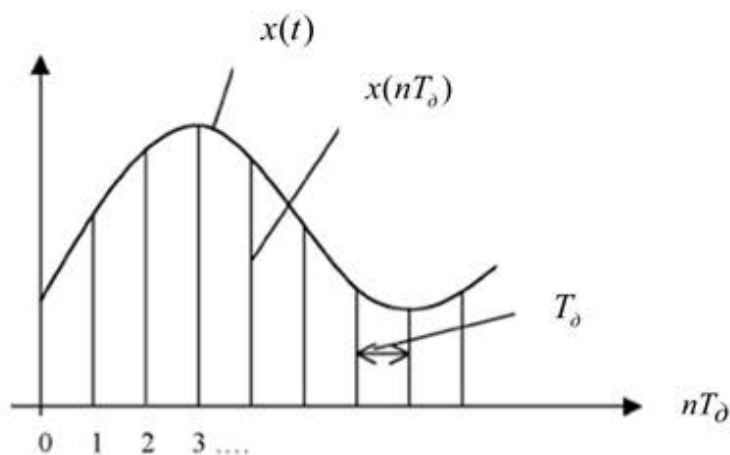


Рисунок 7.16 – Графік неперервного та дискретного сигналу

#### 7.4.4 Теорема Котельникова

Для того, щоб відновити вихідний неперервний сигнал з дискретизованого з малими похибками, необхідно раціонально вибрати крок дискретизації. Тому при перетворенні аналогового сигналу в дискретний обов'язково виникає питання про величину кроку дискретизації. Якщо аналоговий сигнал має низькочастотний спектр, обмежений деякою верхньою частотою  $F_g$  (тобто функція  $u(t)$  має вигляд кривої, яка плавно змінюється, без різких змін амплітуди), то навряд чи на деякому невеликому часовому інтервалі дискретизації  $\Delta t$  ця функція може істотно змінюватися за амплітудою.

Очевидно, що точність відновлення аналогового сигналу за послідовністю його відліків залежить від величини інтервалу дискретизації. Чим він коротше, тим менше буде відрізнятися функція  $u(t)$  від плавної кривої, що проходить через точки відліків. Однак зі зменшенням інтервалу дискретизації істотно зростає складність і обсяг обчислень. При досить великому інтервалі дискретизації  $\Delta t$  зростає ймовірність спотворення або втрати інформації при відновленні аналогового сигналу.

Оптимальна величина інтервалу дискретизації встановлюється **теоремою Котельникова**, яка має важливе теоретичне та практичне значення: дає можливість правильно здійснити дискретизацію аналогового сигналу та визначає оптимальний спосіб його відновлення на приймальному кінці за відліковим значенням.

Відповідно до однієї з найбільш відомих і простих інтерпретацій теореми Котельникова довільний сигнал  $s(t)$ , спектр якого обмежений деякою частотою  $F_g$ , може бути повністю відновлений за послідовністю своїх відлікових значень, що слідує з інтервалом часу

$$\Delta t = \frac{1}{2F_g}.$$

Інтервал дискретизації  $\Delta t$  та частоту  $F_g$  часто називають інтервалом і частотою Найквіста. Аналітично теорема Котельникова подається рядом

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t}(t - k\Delta t)}{\pi \Delta t(t - k\Delta t)}$$

де  $k$  – номер відліку;  $s(k\Delta t)$  – значення сигналу в точках відліку.

Фізичний зміст цієї теореми стає зрозумілим, якщо розглянути спектри сигналів  $S(t)$  і  $S_D(t)$ .



З рис. 7.17 видно, що  $S_D(f)$  містить у собі  $S(f)$  і ще нескінченне число копій  $S(f)$ , зсунутих одна відносно одної на частоту дискретизації  $f_D$ . Якщо пропустити сигнал  $S_D(f)$  через фільтр нижніх частот, амплітудно-частотна характеристика якого показана на цьому ж рисунку, на виході ФНЧ залишиться тільки  $S(f)$ , тобто відновиться вихідний сигнал  $s(t)$ .

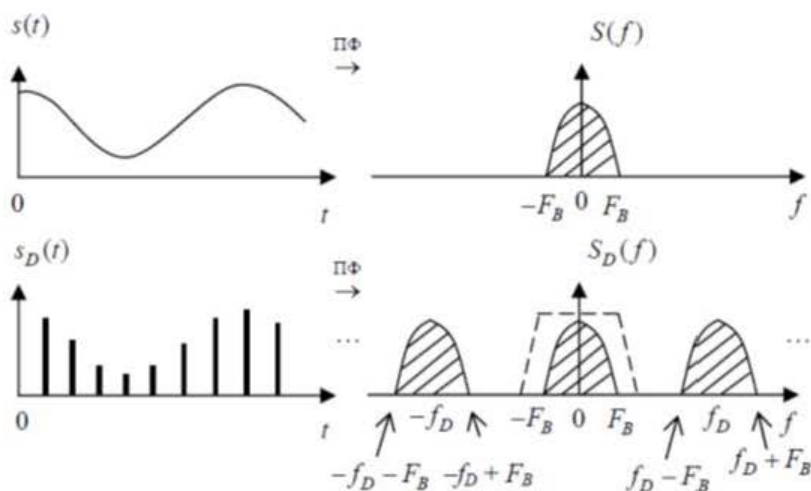


Рисунок 7.17 – Теорема Котельникова

При  $f_D > 2F_e$  копії не перетинаються з основним пелюстком спектра  $S_D(f)$  і таке відновлення можливе.

При  $f_D = 2F_e$  копії стикаються з основним пелюстком, однак виділення вихідного сигналу  $s(t)$  ще можливе за допомогою ідеального ФНЧ із нескінченною крутизною спаду амплітудно-частотної характеристики (АЧХ).

При  $f_D < 2F_e$  пелюстки спектра  $S_D(f)$  перекриваються і відновлення вихідного сигналу  $s(t)$  є неможливим.

На практиці частоту  $f_D$  завжди вибирають більшою, ніж  $2F_e$ , тому що будь-який фільтр має далеко не нескінченну крутизну спаду АЧХ.

Спектр реального сигналу рідко має точну верхню границю  $F_e$ . Найчастіше  $S(f)$  зменшується зі зростанням частоти, асимптотично наближуючись до нуля. У такому випадку на вході пристрою дискретизації поміщають ФНЧ, що має частоту, яка дорівнює ефективній ширині спектра вихідного аналогового сигналу. Його призначення – забрати залишки спектра за межами  $F_e$  і тим самим уникнути перекриття пелюстків спектра  $S_D(f)$ .

На практиці ця теорема має величезне значення. Наприклад, відомо, що більшість звукових сигналів можна з деякою мірою точності вважати сигналами

з обмеженим спектром. Їх спектр, в основному, лежить нижче 20 кГц. Це означає, що при дискретизації з частотою не меншою 40 кГц ми можемо достатньо точно відновити вихідний аналоговий звуковий сигнал за його цифровими відліками. Абсолютної точності досягти не вдасться, тому що в природі не буває сигналів з ідеально обмеженим спектром.

Пристрій, який інтерполює дискретний сигнал до неперервного, називається цифроаналоговим перетворювачем (ЦАП, *digital-to-analogue converter*). Ці пристрої застосовуються, наприклад, в програвачах компакт-дисків для відтворення звуку з цифрового звукового сигналу, записаного на компакт-диск. Частота дискретизації звукового сигналу під час запису на компакт-диск становить 44100 Гц. Таким чином, і ЦАП на CD-плеєрі працює на частоті 44100 Гц.

### 7.4.5 Дискретні перетворення сигналів

Крім звичного подання сигналів і функцій у вигляді залежності їх значень від певних аргументів (часу, лінійної або просторової координати тощо) при аналізі й обробці даних широко використовується математичний опис сигналів за аргументами. Можливість такого опису визначається тим, що будь-який як завгодно складний за своєю формою сигнал, що не має нескінченних значень на своєму інтервалі, можна подати у вигляді суми більш простих сигналів, і, зокрема, у вигляді суми найпростіших гармонічних коливань, що виконується за допомогою перетворення Фур'є. Відповідно, математично розкладання сигналу на гармонічні складові описується функціями значень амплітуд і початкових фаз коливань за неперервним або дискретним аргументом. Сукупність амплітуд гармонічних коливань розкладання називають амплітудним спектром сигналу, а сукупність початкових фаз – фазовим спектром. Обидва спектри разом утворюють повний частотний спектр сигналу, що за точністю математичного подання тотожний динамічній формі опису сигналу.

Крім гармонічного ряду Фур'є застосовуються й інші види розкладання сигналів: за функціями Уолша, Адамара, Вейвлета та інших, крім того, існують розкладання за поліномами Чебишова, Лаггера, Лежандра та інших. У ЦОС широко використовується дискретне перетворення Фур'є (ДПФ, *discrete Fourier transform*) і алгоритм його швидкого обчислення – швидке перетворення Фур'є (ШПФ). Вони дозволяють адекватно описувати в частотних координатах всі, крім наймиттевіших ( $< 1$  с), сигнали, при цьому зрізані за частотою Фур'є-компоненти описують дані більш правдоподібно, ніж будь-які інші степеневі ряди.

### 7.4.5.1 Спектр Фур'є неперервних та дискретних сигналів

Нехай  $x(t)$  – неперервний сигнал, що задовольняє умову  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ .

Сигнал  $x(t)$  у цьому випадку може бути поданий у вигляді інтегрального розкладу за системою комплексних синусоїдальних функцій – інтеграла Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (7.21)$$

де  $X(\omega)$  – комплексна функція, що визначає амплітуду та фазову затримку комплексної синусоїди з частотою  $\omega$  :  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ . У загальному випадку ця функція визначена на всій осі частот  $\omega \in [-\infty, \infty]$  і називається вона Фур'є-спектром сигналу  $x(t)$ .

У свою чергу Фур'є-спектр  $X(\omega)$  може бути отриманий з вихідного сигналу  $x(t)$  за допомогою співвідношення:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7.22)$$

Співвідношення (7.21), (7.22) являють собою пари інтегральних перетворень Фур'є, причому (7.22) – пряме перетворення Фур'є, (7.21) – обернене перетворення Фур'є.

Відмітимо, що сигнал  $x(t)$  и Фур'є-спектр  $X(\omega)$  – дві взаємно однозначні характеристики, перша є часовим поданням сигналу, друга – частотним. Часове подання більш наочне та звичне для повсякденного сприйняття, друге – менш наочне, але винятково корисне при математичному описі перетворень сигналів у лінійних системах з постійними параметрами.

Основні властивості Фур'є-спектра  $X(\omega)$  :

1. Функція  $X(\omega)$  в загальному випадку є комплексною:

$$X(\omega) = \operatorname{Re} X(\omega) + i \operatorname{Im} X(\omega) = |X(\omega)| e^{i \arg X(\omega)} = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}.$$

Функцію  $A(\omega) = |X(\omega)|$  називають амплітудним спектром (іноді магнітудою спектра), вона визначає дійсну амплітуду синусоїди із частотою  $\omega$ , що бере участь у формуванні сигналу. Функцію

$\Phi(\omega) = \arg X(\omega) = \arctan \left( \frac{\operatorname{Im} X(\omega)}{\operatorname{Re} X(\omega)} \right)$  називають фазовим спектром, вона показує

фазовий зсув, якому варто піддати комплексну синусоїду частоти  $\omega$  перед підсумовуванням при відновленні вихідного сигналу;

2. Внаслідок дійсності сигналу  $x(t)$  функція  $X(\omega)$  має комплексно-спряжену симетрію

$$X(\omega) = X^*(-\omega),$$

$$\operatorname{Re} X(\omega) = \operatorname{Re} X(-\omega),$$

$$\operatorname{Im} X(\omega) = -\operatorname{Im} X(-\omega),$$

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|,$$

$$\operatorname{Arg} X(\omega) = -\operatorname{Arg} X(-\omega);$$

3. Енергія спектра Фур'є обмежена й дорівнює енергії вихідного сигналу (рівність Парсеваля):

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty.$$

У теорії неперервних лінійних систем з постійними параметрами широко використовується поняття перетворення Лапласа (s-перетворення)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (7.23)$$

функції, визначеної на комплексній s-площині:  $s = v + j\omega$ .

При цьому пряме перетворення Фур'є (7.22) може розглядатися як перетворення Лапласа, обчислене на уявній осі в s-площині:

$$X(\omega) = X(s = j\omega).$$

У зв'язку з цим, у літературі часто можна зустріти позначення для Фур'є-спектра –  $X(j\omega)$ , в якому є вказівка на те, що це спектр саме неперервного сигналу.

В теорії дискретних лінійних систем замість s-перетворення Лапласа широко використовується поняття Z-перетворення дискретного сигналу

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (7.24)$$

Z-перетворення має сенс для тих значень комплексної змінної z, при яких ряд (7.24) збігається.

Z-перетворення лінійне, завдяки чому воно успішно використовується при описі лінійних дискретних систем. Вихідна послідовність може бути відновлена за допомогою оберненого Z-перетворення

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz,$$

де  $C$  – замкнутий контур, що охоплює все особливі точки функції  $X(z)z^{n-1}$ .

**Спектр Фур'є дискретних сигналів.** Спектром Фур'є послідовності  $x(n)$  називають комплексну функцію  $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \quad (7.25)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (7.26)$$

Вираз (7.26) показує, як вихідна послідовність може бути зібрана з дискретизованих комплексних синусоїд різних частот, узятих з вагами  $X(e^{j\omega})$ . Порівняння (7.25) з (7.24) показує, що спектр Фур'є  $X(e^{j\omega})$  є просто  $Z$ -перетворенням, обчисленим на одиничному колі  $Z = e^{j\omega}$  в комплексній  $Z$ -площині. Властивості спектра Фур'є дискретних сигналів подібні до властивостей спектра Фур'є неперервних сигналів. Однак є принципова відмінність. Спектр  $X(e^{j\omega})$  періодичний за частотою з періодом  $2\pi$ . Тому його значення розглядають на одному періоді – або  $[-\pi, \pi]$  або  $[0, 2\pi]$ .

#### 7.4.5.2 Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) є базовим алгоритмом цифрової обробки сигналів у частотній області. Завдяки наявності ефективних алгоритмів його обчислення – алгоритмів швидкого перетворення Фур'є – ДПФ широко використовується для цілей цифрової фільтрації та спектрально-кореляційного аналізу сигналів.

Для сигналу, заданого у вигляді дискретної послідовності  $S(n)$ , пряме й обернене дискретне перетворення Фур'є мають вигляд

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) \exp\left[-j \frac{2\pi nk}{N}\right], \quad k = \overline{0, N-1}; \quad (7.27)$$

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp\left[j \frac{2\pi nk}{N}\right], \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (7.28)$$

де  $k$  – номер гармоніки із частотою  $f_k$ ,  $N$  – обсяг вибірки.  $S(k)$ , визначений як комплексний спектр сигналу, можна подати у вигляді

$$S(k) = A(k) - jB(k) = C(k)e^{-j\varphi(k)}, \quad (7.29)$$

де амплітудно-частотна (АЧХ) і фазочастотна (ФЧХ) характеристики сигналу відповідно визначаються

$$C(k) = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)}; \quad (7.30)$$

$$\varphi(k) = \arctg \frac{B(k)}{A(k)} + 2\pi n. \quad (7.31)$$

Обернене ДПФ можна також виконати за допомогою співвідношення

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C(k) \cos \left[ \varphi(k) + \frac{2\pi}{N} kn \right], \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (7.32)$$

Виходячи з (7.32), оцінювання форми сигналу при використанні тільки інформації про його ФЧХ можна зробити за допомогою формули

$$\hat{S}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left( \varphi(k) + \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k \right).$$

Якість відновлення сигналів можна поліпшити, додатково використовуючи в (7.32) різні вагові функції, наприклад, трикутну, експонентну й ін. Тоді вираз (7.32) можна переписати в такій формі

$$\hat{S}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(k) \cdot \cos \left( \varphi(k) + \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k \right), \quad (7.33)$$

де  $W(k)$  – прийнята вагова функція.

Похибку, що виникає при відновленні сигналу, можна оцінити за середнім значенням квадрата похибки:

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (\hat{S}(n) - S(n))^2}{\sum_{n=0}^{N-1} S^2(n)}.$$

Іншою відомою формою запису ДПФ є рівняння:

$$F(\Delta\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta x) \delta(x - k\Delta * x) e^{-j2\pi k\Delta\xi\Delta x} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \frac{2x_{\max} * k *}{N} \frac{1}{2x_{\max} n}} =$$

$$k * \sum_{k=0}^{N-1} x_k * e^{-j \frac{2\pi}{N} kn},$$

$$\text{де } \begin{cases} \frac{2x_{\max}}{N} = \Delta x \\ \frac{1}{2x_{\max}} = \Delta\xi \end{cases}.$$

Тоді легко отримати, що

$$\Delta x * \Delta \xi = \frac{1}{N}.$$

Подібним способом можна отримати і для оберненого перетворення

$$x_m = k \sum F_n * e^{j \frac{2\pi}{N} nm},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Таким чином, в матричній формі:

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N X,$$

$$E_N = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ W^0 & W^3 & W^6 & \dots & W^{3(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

де  $W^k = e^{-j2\pi k/N}$ , а сама матриця ядра ДПФ називається матрицею дискретних експоненціальних функцій (ДЕФ, *discrete exponential function*). При цьому рядки матриці визначають набір ортогональних функцій або базис розкладання.

При виконанні перетворення Фур'є рядки матриці ядра задають набір ортогональних функцій, за якими виконується розкладання вихідного сигналу. Кожний елемент вектора результату визначає внесок відповідної ортогональної функції у формування вихідного сигналу. Для перетворення Фур'є, як і для будь-якого ортогонального перетворення, визначник матриці ядра перетворення  $E_N$  відмінний від "0", що дозволяє виконати як пряме, так і обернене перетворення

$$\begin{cases} F = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N X \\ X = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N^{-1} F \end{cases},$$

$$\text{оскільки } \frac{1}{N} E_N * E_N^{-1} = \frac{1}{N} I_N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислення перетворень Фур'є вимагає дуже великого числа множень (приблизно  $N^2$ ) і обчислень синусів. Існує спосіб виконати ці перетворення значно швидше: приблизно за  $N \cdot \log_2 N$  операцій множення. Цей спосіб називається *швидким перетворенням Фур'є*. Алгоритм ШПФ – це спосіб швидкого обчислення ДПФ  $X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn}$ , що дозволяє усунути притаманну ДПФ надмірність. Дані перетворення ґрунтуються на властивостях комплексної експоненти  $e^{-j(2\pi/N)kn}$ , для зручності позначають  $W_N^{kn}$  ( $W_N^{kn} = e^{-j(2\pi/N)kn}$ ), її симетрії  $W_N^{(N-k)n} = W_N^{(N-n)k} = (W_N^{kn})^*$  і періодичності  $W_N^{(N+k)(N+n)} = W_N^{kn}$  з періодом, який дорівнює довжині оброблюваної реалізації сигналу  $N$  (числу точок ШПФ). Відповідно до останньої властивості експоненті  $W_N^{pkn} = W_{N/p}^{kn}$  відповідає період  $N/p$ , де  $p$  – цілі числа, на які ділиться  $N$ . Використання даних властивостей в алгоритмах ШПФ дозволяє уникнути великого числа повторюваних при обчисленні ДПФ операцій.

У результаті швидкодія ШПФ може, залежно від  $N$ , в сотні разів перевершувати швидкодію стандартного алгоритму. При цьому слід підкреслити, що алгоритм ШПФ є точним. Він навіть точніший стандартного, тому що, скорочуючи число операцій, він веде до менших помилок округлення.

Однак у більшості алгоритмів ШПФ є особливість: вони здатні працювати лише тоді, коли довжина аналізованого сигналу  $N$  є степенем двійки. Зазвичай, це не є великою проблемою, оскільки аналізований сигнал завжди можна доповнити нулями до необхідного розміру. Число  $N$  називається розміром або довжиною ШПФ.

Для зображень, що являють собою двовимірний сигнал, спектр є також двовимірний сигнал. Базисні функції перетворення Фур'є мають вигляд добутоків

$$h_{k_1, k_2}^{\sin}(n_1, n_2) = \sin \frac{2\pi k_1 n_1}{N_1} \cdot \sin \frac{2\pi k_2 n_2}{N_2},$$

$$h_{k_1, k_2}^{\cos}(n_1, n_2) = \sin \frac{2\pi k_1 n_1}{N_1} \cdot \sin \frac{2\pi k_2 n_2}{N_2},$$



де  $N_1 \times N_2$  – розмір вихідного сигналу, він же – розмір спектра,  $k_1, k_2$  – це номери базисних функцій (номери коефіцієнтів двовимірного ДПФ, при яких ці функції знаходяться). Оскільки розмір спектра дорівнює розміру вихідного сигналу, то  $k_1 = 0, \dots, N_1 - 1; k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ ,  $n_1, n_2$  – змінні аргументи базисних функцій. Оскільки область визначення базисних функцій збігається з областю визначення сигналу, то  $n_1 = 0, \dots, N_1 - 1; n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ .

Двовимірне ДПФ визначається такими формулами

$$X[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1, n_2] \cdot e^{-jn_1 k_1 (2\pi / N_1)} e^{-jn_2 k_2 (2\pi / N_2)};$$

$$x[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X[k_1, k_2] \cdot e^{-jn_1 k_1 (2\pi / N_1)} e^{-jn_2 k_2 (2\pi / N_2)},$$

де  $x[n_1, n_2]$  – вихідний сигнал,  $X[k_1, k_2]$  – спектр вихідного сигналу.

Безпосереднє обчислення двовимірного ДПФ за наведеними формулами вимагає величезних обчислювальних витрат. Однак можна довести, що двовимірне ДПФ має властивість сепарабельності, тобто його можна обчислити окремо за двома вимірами. Для обчислення двовимірного ДПФ достатньо обчислити одновимірні комплексні ДПФ всіх рядків зображення, а потім обчислити в підсумковому «зображенні» одновимірні комплексні ДПФ всіх стовпців. При цьому результати всіх одновимірних комплексних ДПФ потрібно записувати на місце вихідних даних для цих ДПФ. Наприклад, при обчисленні одновимірного ДПФ першого рядка зображення потрібно результат ДПФ записати в перший рядок цього зображення (він має той же розмір). Для цього потрібно кожний піксел зберігати у вигляді комплексного числа.

Таким чином, ефективний алгоритм обчислення ДПФ зображення полягає в обчисленні одновимірних ШПФ спочатку від всіх рядків, а потім – від всіх стовпців зображення.

### 7.4.5.3 Застосування ДПФ

Часто ДПФ застосовується для дослідження та аналізу спектра сигналу. При цьому, зазвичай, найбільш цікавими є лише амплітуди  $C_k$  окремих гармонік, а не їх фази. У цьому випадку спектр найчастіше відображається у вигляді графіка залежності амплітуди від частоти. Часто шкала амплітуд градується в децибелах. Децибели вимірюють не самі амплітуди, а їх відношення. Наприклад, різниця на 20 дБ означає відмінність амплітуд у 10 разів, різниця на 40 дБ означає відношення амплітуд у 100 разів. Відмінності амплітуд в 2 рази відповідає різниця приблизно в 6 дБ. Шкала частот також часто градується в логарифмічному масштабі.

Перед обчисленням спектра сигналу потрібно вибрати відрізок сигналу, на якому буде обчислюватися спектр. Довжина відрізка повинна бути степенем

двійки (для роботи ШПФ), інакше сигнал треба доповнити нулями до потрібної довжини. Після цього до обраної ділянки сигналу застосовують ШПФ.

Коефіцієнти амплітуд розраховують за формулою  $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ .

При обчисленні спектра зазначеним методом можливий небажаний ефект. При розкладанні функції в ряд Фур'є вважається, що функція періодична, з періодом, який дорівнює розміру ШПФ. Обчислюється спектр саме такої функції, а не тієї, сегмент якої використовується. При цьому на межах періодів така функція, напевно, буде мати розриви (адже вихідна функція не була періодичною). А розриви у функції суттєво впливають на її спектр, спотворюючи його.

Для усунення цього ефекту застосовуються так звані *вагові вікна*. Вони плавно зменшують значення функції поблизу меж ділянки, що аналізується. Вагові вікна мають форму, схожу на гауссіан. Обрану для аналізу ділянку сигналу множать на вагове вікно, яке усуває розриви функції при «зацикленні» даної ділянки сигналу. «Зациклення» відбувається при ДПФ, оскільки алгоритм ДПФ вважає, що функція періодична. Існує безліч вагових вікон, названих на честь їх творців. Всі вони мають схожу форму і значною мірою усувають розглянуті спотворення спектра. Наведемо формули двох вікон: Хеммінга і Блекмана (рис. 7.18):

$$w_{Hammin} [n] = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N};$$

$$w_{Blackman} [n] = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N}.$$

В даному випадку вікно застосовується до сигналу з індексами від 0 до  $N$ . Вікно Хеммінга використовується найчастіше. Вікно Блекмана має більш сильну дію при усуненні розглянутих спотворень, проте має й свої недоліки.

Важлива властивість спектрального аналізу полягає в тому, що не існує жодного, єдино правильного спектра будь-якого сигналу. Спектр можна обчислювати із застосуванням різних розмірів ШПФ і різних вагових вікон. Для кожної конкретної задачі необхідно використовувати свої способи.

Ще одна важлива властивість полягає в тому, що при розкладанні в спектр ми знаходимо не ті синусоїдальні складові, з яких складався вихідний сигнал, а лише знаходимо, з якими амплітудами потрібно взяти певні кратні частоти, щоб отримати вихідний сигнал. Проте зазвичай (особливо при використанні вагових вікон) цього майже не помітно за графіком спектра, тобто графік спектра досить адекватно відображає саме частоти вихідного сигналу.

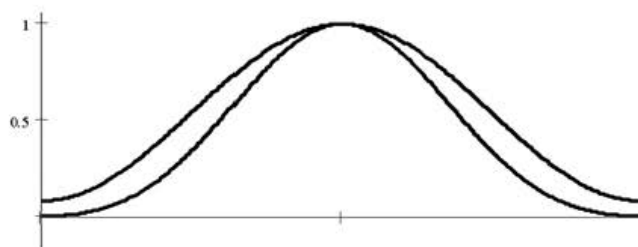


Рисунок 7.18 – Вагові вікна Хеммінга (верхнє) і Блекмана (нижнє)

#### 7.4.6 Перетворення Лапласа

З попереднього матеріалу відомо, що Фур'є-образ функції  $f(t)$  задається формулою

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi j\nu t} dt,$$

і  $F(\nu)$  існує тільки у випадку збіжності інтеграла в правій частині рівності. Якщо ж інтеграл не є збіжним, то потрібно замінити  $(-2\pi j\nu)$  комплексним числом

$$p = -\delta_0 - 2\pi j\nu,$$

де  $\delta_0 > 0$ . Показник  $p$  називається комплексною частотою або *оператором Лапласа*. Якщо ж функція  $f(t)$  дорівнює нулю при  $t < 0$ , то одержуємо *перетворення Лапласа (Transform Laplace)*, що визначається за формулою

$$TL[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (7.35)$$

Перетворення Лапласа становить інтерес для вивчення перехідних режимів, оскільки вони дорівнюють нулю для  $t < 0$  ( $t=0$  відповідає моменту часу, при якому починається збурювання, що породжує перехідний процес) у силу принципу причинності: наслідок не може передувати причині.

Перетворення Лапласа – робочий інструмент фізиків і фахівців з автоматичного керування, систем зв'язку та інформаційних технологій, тому що зображення Лапласа імпульсного відгуку лінійної системи обробки даних являє собою передатну функцію такої системи. З математичної сторони питання найважливішою причиною такого широкого використання перетворення Лапласа є його застосовність для тих функцій (сигналів), у яких Фур'є-образ не існує.

Існують таблиці зображень Лапласа (табл. 7.9), що дозволяють за заданою функцією  $f(t)$  (що дорівнює нулю для  $t < 0$ ) знаходити її зображення Лапласа, і

навпаки. У випадку гармонічного режиму в зображенні Лапласа можна замінити  $p$  на комплексну частоту  $j\omega$  або  $2\pi j\nu$ .

Таблиця 7.9 – Зображення функцій по Лапласу та Z-перетворення

	$x(t)$ при $t \geq 0$	$X(p)$	Z-перетворення
1	$1_0(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$T$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
4	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$T \frac{e^{-\alpha T} z}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
5	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{\alpha(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$
6	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
7	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - \cos \beta T)}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
8	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$
9	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$
10	$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = kT, k = 0 \end{cases}$	1	1
11	$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1, & t = kT \\ 0, & t \neq kT, k = 1, 2, \dots \end{cases}$	$e^{-kTs}$	$z^{-k}$

#### 7.4.7 Застосування перетворення Лапласа в системах обробки даних

Розглянемо основні види моделей лінійних неперервних стаціонарних динамічних систем обробки даних (СОД), до яких у загальному вигляді

належать різного виду пристрої перетворення сигналів, зокрема : фільтри, пристрої розпізнавання тощо.

1. *Диференціальні моделі.* Найбільш універсальна модель, описується звичайним диференціальним рівнянням такого виду:

$$\sum_{i=0}^{na} a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{nb} b_j u^{(j)}(t), \quad (7.36)$$

де  $na$  – порядок моделі ( $na > nb$ ),  $a_i$  і  $b_j$  – постійні коефіцієнти (параметри моделі),  $u^{(i)}(t)$  і  $y^{(i)}(t)$  – похідні, відповідно, вхідного й вихідного сигналів.

2. *Моделі, що характеризуються передатними функціями.* Дана характеристика визначається як відношення перетворень Лапласа вихідного та вхідного сигналів

$$W(p) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{nb} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{na} a_i p^i}, \quad (7.37)$$

де  $L\{\cdot\}$  – символ перетворення Лапласа,  $p = j\omega$  – комплексна частота (оператор Лапласа).

Варто мати на увазі, що клас аналогових фільтрів, тобто фільтрів для неперервних сигналів, має передатну функцію тільки типу (7.37). При цьому будь-яка передатна функція типу (7.37) може бути подана у вигляді комбінації таких чотирьох елементарних передатних функцій:

$$W_1(p) = \frac{1}{1+Tp} \text{ – низькочастотний фільтр 1-го роду;}$$

$$W_2(p) = \frac{Tp}{1+Tp} \text{ – високочастотний фільтр 1-го роду;}$$

$$W_3(p) = \frac{1}{1+2\xi Tp + T^2 p^2} \text{ – низькочастотний фільтр 2-го роду;}$$

$$W_3(p) = \frac{T^2 p^2}{1+2\xi Tp + T^2 p^2} \text{ – високочастотний фільтр 2-го роду.}$$

3. *Моделі, що характеризуються ІХ  $w(t)$ .* Під імпульсною характеристикою (ІХ)  $w(t)$  розуміється реакція попередньо незбуреного об'єкта (тобто об'єкта з нульовими початковими умовами) на вхідний сигнал/імпульс  $\delta$ -функції.

4. *Моделі, що характеризуються перехідними функціями  $h(t)$ .* Це реакція попередньо незбуреного об'єкта на вхідний сигнал у вигляді одиничного

стрибка. З теорії керування відомі такі співвідношення між цими характеристиками:

$$L\{w(t)\}=W(p), \quad w'(t)=h(t), \quad L\{h(t)\}=\frac{W(p)}{p}.$$

При нульових початкових умовах зв'язок між вихідним і вхідним сигналами описується інтегралом згортки (інтеграл Дюамеля):

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

або, в операторній формі,

$$Y(p)=W(p)\cdot U(p).$$

##### 5. Моделі, що характеризуються частотними характеристиками.

Частотні характеристики об'єкта визначаються його комплексним коефіцієнтом передачі  $K(j\omega)=W(j\omega)=W(p)|_{p=j\omega}$ , що є Фур'є-перетворенням IX і ще відомий як амплітудно-фазочастотна характеристика (АФЧХ) СОД.

Модуль комплексного коефіцієнта передачі  $|W(j\omega)|=A(\omega)$  являє собою, як відомо, амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) об'єкта з передатною функцією  $W(p)$ , а аргумент  $\arg(W(j\omega))=\varphi(\omega)$  – фазочастотну характеристику (ФЧХ).

Графічне подання АФЧХ  $W(j\omega)$  на комплексній площині при зміні частоти  $\omega$  від 0 до  $\infty$ , тобто графік АФЧХ у полярних координатах називається діаграмою Найквіста.

У той же час слід зазначити, що часто для зручності в розрахунках використовується логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ), яка дорівнює  $20 \lg |W(j\omega)|$ .

6. Модель у просторі станів. Динаміку системи (7.36) можна описати двома рівняннями в просторі станів.

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX + Bu(t), \\ y(t) &= CX(t) + Du(t), \end{aligned}$$

де  $X(t)$  – вектор-стовпець змінних стану;  $y(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)]^T$  – вектор вихідних координат;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  – матриці відповідних розмірностей, зокрема при скалярних  $u(t)$  матриця координат вхідних впливів  $B$  буде мати розмірність  $(l \times n)$ , а матриця спостережень  $C$  в загальному випадку буде мати розмірність  $(p \times n)$ .

Застосування, при нульових початкових умовах, до останніх рівнянь перетворення Лапласа дозволяє одержати такий матричний вираз для передатної функції:

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B + D,$$

де  $I$  — одинична матриця відповідної розмірності.

Відзначимо також, що всі наведені моделі є еквівалентними одна одній, тобто, знаючи одну з них, можна, за необхідності, одержати всі інші.

#### 7.4.8 Ортогональні перетворення в діадних базисах

Ортогональні перетворення (orthogonal transformation) в діадних (або двозначних знакозмінних) базисах визначені для даних, поданих векторами довжиною  $N = 2^M$ . До таких перетворень належать перетворення Адамара, Пелі, Уолша, Трахтмана і ряду інших. Матриця ядра кожного з подібних перетворень містить цілочислові коефіцієнти з множини  $\{-1; +1\}$ . Очевидно, що при виконанні подібних перетворень істотно скорочується обсяг обчислень за рахунок уникнення множення в кожній базовій операції.

Матриця ядра перетворення Уолша-Адамара для  $N = 2^M$  може бути описана як результат добутку Кронекера  $m$  матриць ДЕФ  $E^2$  розміром  $2 \times 2$ :

$$A_N = A_2^m = E_2 \otimes E_2 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_2 = [E_2]^m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^m,$$

де символ  $\otimes$  — операція кронекерівського множення векторів, у результаті чого породжується матриця блочної структури. Помітимо, що операція кронекерівського множення двох матриць полягає в одержанні блокової матриці, блоками якої є помножена на відповідний елемент правої матриці ліва матриця, тобто:

$$A_4 = E_2 \otimes E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 1 \\ 1 & -1 & | & 1 & -1 \\ - & - & | & - & - \\ 1 & 1 & | & -1 & -1 \\ 1 & -1 & | & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця Адамара для  $N = 8$

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матриця ядра Адамара має такі властивості:

- 1) циклічність  $a_{N+k} = a_k$ ;  $a_{N-k} = a_{-k}$ ;
- 2) мультиплікативність  $a_{k+1} = a_k * a_1$ ;
- 3) симетричність  $A_N = A_N^T$ .

У завданнях ЦОС використовуються також інші, подібні до перетворення Адамара, перетворення – Пелі, Уолша, Трахтмана та інших. Ядра (матриці) цих перетворень можуть бути отримані на основі матриці ядра перетворення Адамара при певному перепорядкуванні рядків.

#### 7.4.9 Згортка. Кореляція

Визначення кореляції (*correlation*), а в окремому випадку для центрованих сигналів – коваріації (*covariance*), є методом аналізу сигналів. Цей математичний апарат знайшов застосування в обробці зображень у сфері комп'ютерного зору або дистанційного зондування з супутників, у яких порівнюються дані з різних зображень, у радарних або гідроакустичних установках для дальнометрії та місцевизначення, у яких порівнюються передані та відбиті сигнали.

Кореляція дозволяє визначити ступінь незалежності одного процесу від іншого або встановити подібність одного набору даних іншому. Кореляція також є невід'ємною частиною процесу згортання, що, за суттю, та ж кореляція двох послідовностей даних, при обчисленні якої одна з послідовностей згорнута в часі. Це означає, що для обчислення кореляції та згортки можуть використовуватися ті ж самі алгоритми.

Для двох послідовностей  $\{x_k\}$  і  $\{y_k\}$  довжини  $N$  з нульовим середнім значенням оцінювання їх взаємної кореляції здійснюється за формулою

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



де  $r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2$ ,  $r_{yy}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k^2$ ,  $r_{xy}(n)$  – оцінка взаємної коваріації, що знаходиться за формулою

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{k+n}.$$

Для послідовності  $\{x_k\}$  кінцевої довжини  $N$  з нульовим середнім значенням обчислення автокореляційної функції здійснюється таким чином

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

де  $r_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x_k y_{k+n}$ .

Існує кілька способів розрахунку відгуку системи на довільний вхідний сигнал. Найбільш розповсюджений спосіб розрахунку полягає в тому, що ми обчислюємо значення кожної точки у підсумковому сигналі як зважену суму певної множини сусідніх точок вихідного сигналу. Коефіцієнти цієї суми збігаються з імпульсною характеристикою лінійної системи, розгорнутої відносно точки 0. Звідси й береться формула згортання для одновимірного випадку:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot h[k].$$

Розглянута операція отримання підсумкового сигналу за вхідним називається *згортанням* (*compression*), а отриманий результат *згорткою*. Отже, будь-яка лінійна система здійснює згортання вхідного сигналу зі своєю імпульсною характеристикою. Це записується так:  $y[n] = x[n] * h[n]$ . Функція  $h[n]$  називається ядром згортання або імпульсною характеристикою лінійної системи.

Зазвичай всі сигнали, що обробляються на комп'ютерах, мають кінцеву тривалість (тобто відмінні від нуля лише на кінцевому відрізку). Розглянемо, що відбувається з сигналом кінцевої тривалості, коли його згортають з кінцевим ядром згортки. Нехай сигнал  $x[n]$  відмінний від нуля тільки на відрізку від 0 до  $N-1$  включно («має довжину  $N$ »). Нехай ядро згортання  $h[n]$  відмінне від нуля на відрізку від  $-m_1$  до  $-m_2$  включно, що складається з  $M$  точок ( $M = m_1 + m_2 + 1$ ). Тоді при підстановці цих сигналів в рівняння згортання отримаємо сигнал  $y[n]$ , який відрізняється від нуля на відрізку від  $-m_1$  до  $N-1+m_2$  включно. Таким чином, довжина підсумкового сигналу дорівнює

$N + M - 1$ , тобто сумі довжин вихідного сигналу і ядра згортки мінус один. Отже, операція згортання розширює сигнал на  $M - 1$  точку, де  $M$  – довжина ядра згортання.

*Властивості згортання*

1. Закон комутативності:

$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$  (тобто можна переставляти місцями вихідний сигнал і ядро згортання);

2. Закон асоціативності:

$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$  (тобто замість того, щоб проводити згортання по черзі в різних системах, можна отримати систему з ядром  $(y[n] * z[n])$ , яка є суперпозицією систем  $y[n]$  і  $z[n]$ ).

3. Закон дистрибутивності:

$$x[n] * y[n] + x[n] * z[n] = x[n] * (y[n] + z[n]).$$

**Теорема згортання.** Згортання в часовій області еквівалентна множенню в частотній області; множення в часовій області еквівалентно згортці в частотній області. Це означає, що для виконання згортання двох сигналів можна перевести їх в частотну область, помножити їх спектри і перевести їх назад в часову область. Така операція виглядає громіздко. Однак з появою алгоритмів ШПФ, що дозволяють швидко обчислювати перетворення Фур'є, обчислення згортки через частотну область стало широко використовуватися. При значних довжинах ядра згортання такий підхід дозволяє в сотні разів скоротити час обчислення згортання.

### Циклічне згортання й кореляція

У дискретному вигляді лінійні перетворення можуть бути описані в загальному вигляді як векторно-матричні операції

$$Y = B_N X,$$

де  $X$  – вектор відліків вихідних даних, отриманий у результаті дискретизації неперервного сигналу відповідно до теореми Котельникова,  $Y$  – вектор відліків результату,  $B_N$  – матриця розміром  $N \times N$ , що визначає ядро перетворення.

До числа подібних перетворень належить *циклічне згортання* послідовностей  $X = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}]$  і  $G = [g_0 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{N-1}]$ , в цьому випадку будується матриця ядра згортання:

$$B_N^C = G_N = \begin{pmatrix} g_0 & g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_1 \\ g_1 & g_0 & g_{N-1} & \dots & g_2 \\ g_2 & g_1 & g_0 & \dots & g_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & g_{N-3} & \dots & g_0 \end{pmatrix}.$$

Кожний елемент вектора  $Y$  може бути описаний як

$$y_m = \sum_{n=0}^{N-1} g_m - n^x n.$$

Матриця ядра циклічної взаємкореляції може бути побудована як транспонована матриця ядра згортки, тобто таким чином:

$$K_N = B_N^K = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_{N-1} \\ g_{N-1} & g_0 & g_{N-1} & \dots & g_{N-2} \\ g_{N-2} & g_{N-1} & g_0 & \dots & g_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \dots & g_0 \end{vmatrix},$$

тому кожний відлік результату може бути записаний як

$$z_m = \sum_{n=0}^{N-1} g_m + n^x n,$$

причому  $g_{m+n} = g_n$  для  $m+n \geq N$ .

**Аперіодичне згортання та обчислення кореляції**, на відміну від циклічного згортання, належать до класу локальних перетворень. При цьому, як правило, вважається, що розмір вектора вихідних даних значно більше розміру ядра згортання, що приводить до такого виразу для обчислення будь-якого відліку результату:

$$y_i = \sum_m g_m x_i - m.$$

Обчислення згортки та кореляції лежить в основі кореляційного методу заглушення завод. Сутність такого методу полягає у використанні розходження між кореляційними функціями сигналу та завади. Даний метод ефективний лише у випадку обробки періодичних або квазіперіодичних сигналів.

#### 7.4.10 Цифрова фільтрація сигналів

Терміном цифровий фільтр називають апаратну або програмну реалізацію математичного алгоритму, входом якого є цифровий сигнал, а виходом – інший цифровий сигнал, форма якого і/або амплітудна та фазова характеристики спеціальним чином модифіковані.

В аналогових системах під фільтром розуміють деякий лінійний пристрій зі спеціальною частотною характеристикою  $\tilde{K}(j\omega)$ , який перетворює вхідний сигнал  $\omega_x, \omega_y$  у вихідний  $y(t)$  (рис. 7.19), заглушаючи або, навпаки,

підсилюючи при цьому певні частоти в спектрі вхідного сигналу. Вихідний сигнал  $y(t)$  знаходиться як згортка вхідного сигналу  $s(t)$  та імпульсної характеристики фільтра  $h(t)$ :

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int s(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s(t - \tau)d\tau$$

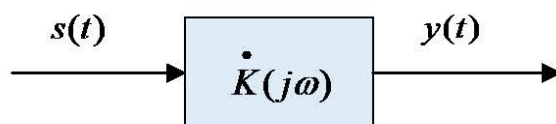


Рисунок 7.19– Цифровий фільтр

За аналогією з аналоговим фільтром, цифровий фільтр (ЦФ, digital filter) перетворює послідовність відліків вхідного сигналу  $\{s_k\}$  у числову послідовність вихідного сигналу  $\{y_k\}$ . Для ЦФ також вводять поняття імпульсної характеристики  $\{h_k\}$ , що є реакцією ЦФ на “одиничний імпульс (стрибок)”, тобто

$$(1, 0, 0, \dots) \xrightarrow{\text{ЦФ}} (h_0, h_1, h_2, \dots).$$

Імпульсну характеристику (pulse response characteristic)  $\{h_k\}$  ЦФ можна трактувати як результат дискретизації неперервної імпульсної характеристики  $h(t)$  відповідного аналогового фільтра-прототипу (рис. 7.20).

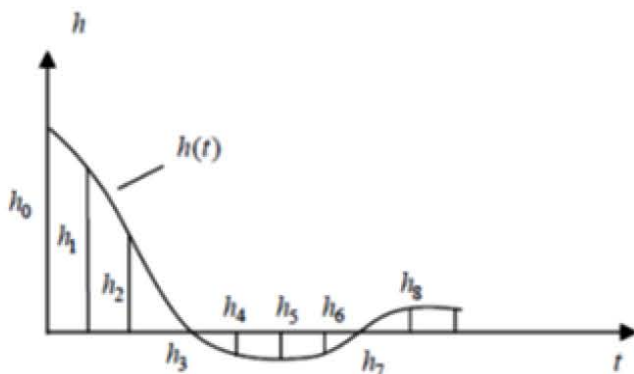


Рисунок 7.20 – Дискретизація імпульсної характеристики

Якщо взяти кінцеве число відліків  $h(t)$ , тоді отримуємо ЦФ із *кінцевою імпульсною характеристикою* (КИХ-фільтр, finite impulse response filtering).

Якщо взяти нескінченне число відліків  $h(t)$ , отримаємо ЦФ із *нескінченно-імпульсною характеристикою* (НІХ-фільтр, infinite impulse response filtering).

Під фільтром зазвичай розуміють систему, що одні частоти пропускає, а інші затримує. Однак у техніці цифрової обробки сигналів поняття фільтра трактується більш широко. *Дискретним фільтром* називають довільну систему обробки дискретного сигналу, що має властивості лінійності й стаціонарності. Існують також фільтри зі змінними параметрами, наприклад, *адаптивні фільтри*, що змінюють свої параметри залежно від статистичних властивостей вхідного сигналу.

У загальному випадку, фільтр змінює в спектрі сигналу і амплітуди гармонік, і їх фази. Однак фільтри можна проектувати так, щоб вони не змінювали фазу сигналу. Такі фільтри називаються *фільтрами з лінійною фазою*. Це означає, що якщо вони і змінюють фазу сигналу, то роблять це так, що всі гармоніки сигналу зсуваються за часом на одну й ту ж величину. Таким чином, фільтри з лінійною фазою не спотворюють фазу сигналу, а лише зсувають весь сигнал в часі. Ядро згортки такого фільтра симетричне щодо своєї центральної точки.

Основна властивість будь-якого фільтра – це його частотна і фазова характеристики. Вони показують, як фільтр впливає на амплітуду і фазу різних гармонік оброблюваного сигналу. Якщо фільтр має лінійну фазу, то розглядається лише частотна характеристика фільтра. Зазвичай частотна характеристика зображається у вигляді графіка залежності амплітуди від частоти (в децибелах). Наприклад, якщо фільтр пропускає всі сигнали в смузі 0 ... 10 кГц без зміни, а всі сигнали в смузі вище 10 кГц заглушує в 2 рази (на 6 дБ), то частотна характеристика буде мати такий вигляд:

$$A(f) = \begin{cases} 0\text{дБ}, & f < 10\text{кГц} \\ -6\text{дБ}, & f > 10\text{кГц} \end{cases}.$$

Частотна характеристика в 0 дБ показує, що дані частоти фільтр пропускає без зміни. Ті частоти, амплітуда яких послаблюється фільтром в 2 рази, повинні мати амплітуду на 6 дБ менше. Тому їх амплітуда становить -6 дБ. Якщо фільтр посилює частоти, то його частотна характеристика на цих частотах є позитивною.

Вихідний сигнал  $y(k)$  фільтра, що має нетривіальну частотну характеристикою, залежить від декількох відліків вхідного сигналу  $x(k)$ . У загальному випадку при обчисленні вихідного відліку використовується також деяка кількість попередніх відліків вихідного сигналу. Для фільтрів, що не використовують вихідні відліки, рівняння фільтрації має вигляд

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i).$$

Такі фільтри називаються *нерекурсивними* (*nonrecursive filter*) або *трансверсальними*. Кількість відліків  $m$  називається порядком фільтра. Структурна схема нерекурсивного фільтра показана на рис. 7.21. Імпульсна характеристика нерекурсивного фільтра визначається його коефіцієнтами  $h(k) = b_k$ . Оскільки в реальному пристрої кількість ліній затримки обмежена, а отже, і кількість коефіцієнтів, нерекурсивні фільтри відносять до класу КІХ-фільтрів.

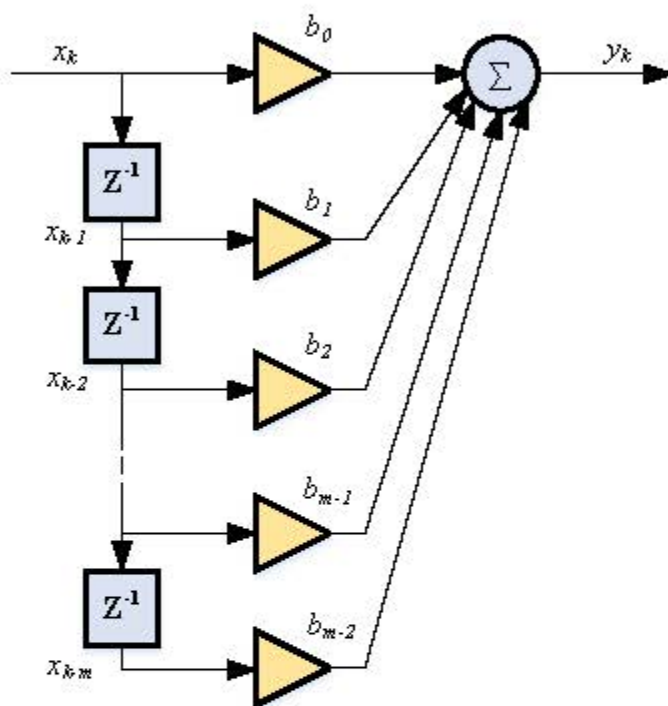


Рисунок 7.21 – Нерекурсивний фільтр

Фільтр, у якому також використовуються і вихідні відліки, називається *рекурсивним* (*recursive filter*) (рис. 7.22). Рівняння рекурсивного фільтра має вигляд

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i) - \sum_{i=0}^m a_i y(k-i)$$

Наявність у схемі рекурсивного фільтра зворотних зв'язків дозволяє одержати нескінченну імпульсну характеристику, тому такі фільтри належать до класу БХ-фільтрів. Проте такі фільтри за деяких умов можуть бути нестійкими.

Під проектуванням (синтезом) цифрового фільтра розуміють вибір таких наборів його коефіцієнтів  $\{a_i\}$  і  $\{b_i\}$ , які задовольняють задані вимоги. У

завдання проектування входить також і вибір потрібної структури фільтра з урахуванням необхідної точності обчислень.

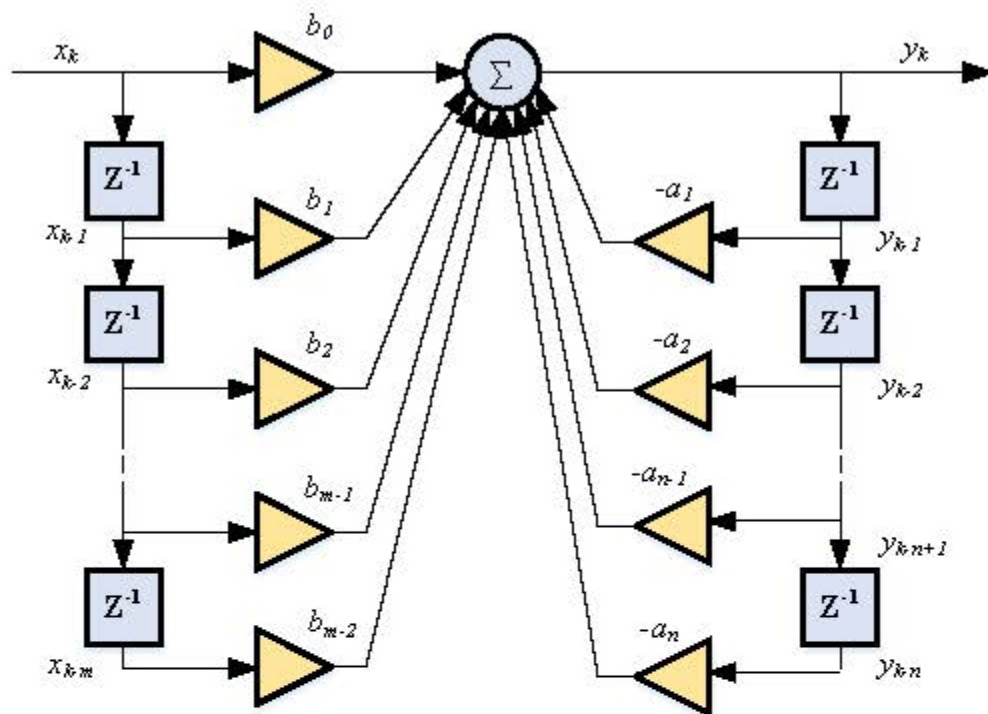


Рисунок 7.22 – Рекурсивний фільтр

У проектуванні та реалізації цифрових фільтрів застосовується безліч різноманітних підходів і методів, вибір яких залежить від багатьох факторів, зокрема – від того, як формулюється завдання фільтрації.

Найчастіше цифрова фільтрація застосовується для виділення сигналу або для відновлення сигналу. Виділення “корисного” сигналу необхідно, коли сигнал, що надходить у систему із зовнішнього середовища, змішаний із шумами, викликаними різними фізичними процесами, що мають, як правило, випадковий характер. Відновлення сигналу необхідно через можливі спотворення сигналу, викликані роботою апаратури.

У зв'язку з тим, що теорія апроксимації ідеальних АЧХ аналоговими засобами добре розвинена, широке використання одержали методи синтезу цифрових фільтрів за аналоговими прототипами.

У прямих методах синтезу без використання аналогових прототипів часто використовується той факт, що ДПФ можна трактувати як обробку сигналу фільтром з відповідною імпульсною характеристикою.

Оскільки ДПФ лінійного згортання дорівнює добутку ДПФ послідовностей, що згортаються, алгоритм фільтрації в частотній області можна формалізувати так, як викладено нижче.

– Послідовність відліків вхідного сигналу та імпульсна характеристика фільтра доповнюються нулями так, щоб довжини послідовностей дорівнювали та не були меншими за суму довжин вихідних послідовностей мінус одиниця.

– Обчислюються ДПФ доповнених нулями послідовностей.

– Обчислені ДПФ поелементно перемножуються.

– Обчислюється обернене ДПФ від результату перемножування.

Для підвищення ефективності фільтрація здійснюється в частотній області з використанням ШПФ.

При проектуванні цифрових фільтрів один із ключових моментів пов'язаний з особливостями технічної реалізації і рядом обмежень, обумовлених розрядністю цифрових обчислювальних пристроїв:

– шум квантування, що виникає при аналого-цифровому перетворенні;

– спотворення характеристик, що відбувається при квантуванні коефіцієнтів цифрових фільтрів;

– переповнення розрядної сітки в процесі обчислень;

– округлення проміжних результатів обчислень.

Тому при проектуванні цифрових фільтрів важливо правильно вибрати способи й формати подання чисел (дійсні або комплексні числа, з фіксованою або плаваючою крапкою тощо), динамічний діапазон подання даних, обумовлений розрядністю регістрів устаткування, а також оцінити можливий вплив шумів і спотворень.