

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С. В. Заболотній

ЦИФРОВЕ ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

**ПОСІБНИК
для студентів напряму підготовки
6.050901 "Радіотехніка"
усіх форм навчання**

За редакцією д.т.н., професора Ю.Г. Леги

Черкаси



2010

УДК 621.391
ББК 32.811.3
3-12

*Рекомендовано до друку
Вченою радою Черкаського державного
технологічного університету,
протокол № 4 від 23.11.2010 р.*

Автор-укладач **Заболотній С.В.**, *к.т.н., доцент*

За редакцією д.т.н., професора Ю.Г. Леги

Рецензенти: Мусієнко М.П., *д.т.н., професор*
Гавриш О.С., *к.ф.-м.н., доцент*

3-12 **Заболотній С. В.** Цифрове оброблення сигналів: Посібник для студентів напряму підготовки 6.050901 "Радіотехніка" усіх форм навчання [Електронний ресурс] / Авт.-укл. С. В.Заболотній ; За ред. проф. Ю. Г. Леги ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2010. – 119 с.
ISBN 978-966-402-093-7.

Посібник складається з двох розділів та додатків. Перший розділ містить теоретичні відомості щодо принципів цифрового представлення та опрацювання сигналів, дискретної фільтрації, методів синтезу цифрових фільтрів, їх структурної організації та ефектів квантування. У другому розділі подано комплекс лабораторних робіт, який надає можливість студентам ознайомлюватися в інтерактивному режимі з особливостями методів ЦОС та здійснювати їх комп'ютерне моделювання. Додатки містять методичні рекомендації щодо практичного застосування пакетів Mathcad та Matlab для дослідження цифрових сигналів і систем ЦОС.

Для студентів напряму підготовки 6.050901 "Радіотехніка".

УДК 621.391
ББК 32.811.3

ПЕРЕДМОВА

Бурхливий розвиток науково-технічного прогресу в напрямку вдосконалення технологій виробництва, архітектури засобів та методів впровадження мікроелектроніки фактично не залишає жодної сфери діяльності людини де б не використовувалися мікропроцесорна техніка та електронно-обчислювальні машини. Перехід від аналогових методів опрацювання і аналогової схемотехніки до цифрових зумовлено цілим рядом факторів:

- цифровим компонентам притаманна висока надійність, низьке енергоспоживання та матеріалоемність, а, відповідно, низька вартість;
- цифрові системи мало чуттєві до параметрів навколишнього середовища;
- цифрові алгоритми базуються на принципах програмування, а відповідно, є адаптивними і легко реконфігуруються;
- цифрові сигнали просто і компактно зберігати в незмінному вигляді протягом необмеженого часу;
- цифрові алгоритми легко переносяться з обладнання одного виробника на обладнання іншого.

Цифрова обробка сигналів (ЦОС) розвивається вже понад півстоліття. За цей час створені ефективні алгоритми обробки сигналів, прогресивні технології виробництва цифрових сигнальних процесорів. І якщо, на перших етапах, методи ЦОС застосовувались, в основному, у військових радіотехнічних системах, то сьогодні діапазон використання ЦОС значно розширився: розпізнавання та синтез мови, редагування і компресія аудіо- та відеосигналів, фільтрації завад, спектральний аналіз. Основні сфери застосування цифрових методів та пристроїв опрацювання сигналів – радіотехніка, телекомунікація, автоматичне управління, телеметрія, робототехніка, гідроакустика, сейсмологія та багато інших.

Розділ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЦИФРОВОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

1.1. ОСНОВИ ЦИФРОВОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТА ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

Сутність цифрової обробки полягає в тому, що фізичний сигнал (напруга, струм і т.п.) перетворюється в послідовність чисел, яка потім піддається математичним діям в обчислювальній пристрої. Трансформований цифровий сигнал (послідовність чисел) при необхідності може бути перетворений знову у напругу або струм.

У цьому підрозділі розглядаються принципи математичного опису й аналізу дискретних сигналів, пояснюються деякі термінологічні тонкості, що пов'язані з поняттями *дискретні* і *цифрові* сигнали, фільтри тощо.

1.1.1. Аналогові, дискретні і цифрові сигнали

Вихідний фізичний сигнал є неперервною функцією часу. Такі сигнали, визначені в усі моменти часу, називають аналоговими (*analog*). Послідовність чисел, що представляє сигнал при цифровій обробці, є дискретним рядом (*discrete series*) і не може цілком відповідати аналоговому сигналові. Числа, що складають послідовність, є значеннями сигналу в окремі (дискретні) моменти часу і називаються відліками сигналу (*samples*). Як правило, відліки беруться через рівні проміжки часу T , названі періодом дискретизації (або інтервалом, кроком дискретизації - *sample time*). Величина, зворотна періодові дискретизації, називається частотою дискретизації (*sampling frequency*): $f_d = 1/T$. Відповідна їй кругова частота визначається як $\omega_d = 2\pi/T$.

В загальному випадку представлення сигналу набором дискретних відліків приводить до втрати інформації, тому що ми нічого не знаємо про поведінку сигналу в проміжках між відліками. Проте при забезпеченні виконання умов теореми Котельнікова такої втрати інформації не відбувається й аналогові сигнали можуть бути точно відновлені за значеннями своїх дискретних відліків.

Процес перетворення аналогового сигналу в послідовність відліків називається дискретизацією (*sampling*), а результат такого перетворення — дискретним сигналом.

При обробці сигналу в обчислювальних пристроях його відліки представляються у вигляді двійкових чисел, що мають обмежене число розрядів. В наслідок цього, відліки можуть приймати лише кінцеву множину значень i , отже, при представленні сигналу неминуче відбувається його округлення. Процес перетворення відліків сигналу в числа називається квантуванням за рівнем (*quantization*), а помилки округлення, що при цьому виникають, — помилками (або шумами) квантування (*quantization error, quantization noise*).

Сигнал, дискретний у часі, але не квантований за рівнем, називається дискретним (*discrete-time*) сигналом. Сигнал, дискретний у часі і квантований за рівнем, називають цифровим (*digital*) сигналом. Сигнали, квантовані за рівнем, але неперервні в часі, на практиці зустрічаються рідко. Різницю між аналоговими, дискретними і цифровими сигналами ілюструє рисунок 1.1.

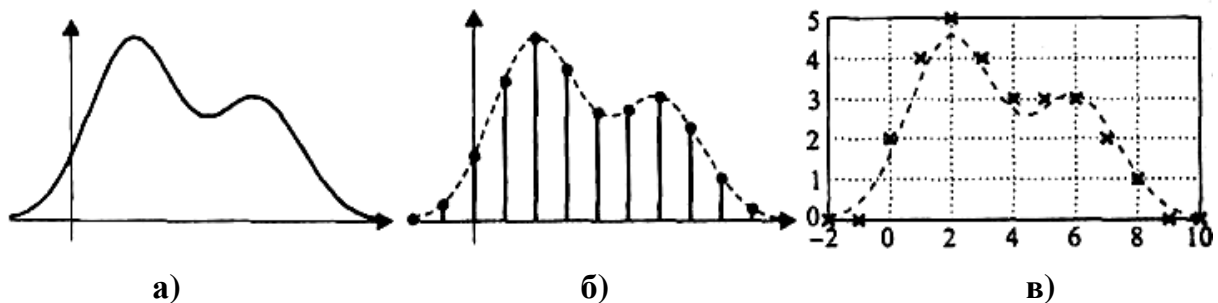


Рисунок 1.1 - Аналоговий (а), дискретний (б) і цифровий (в) сигнали

1.1.2. Аналого-цифрове і цифро-аналогове перетворення

Узагальнена структура системи цифрової обробки сигналів наведена на рисунку 1.2. На вхід надходить аналоговий сигнал $s_{ex}(t)$. Його часова дискретизація і квантування за рівнем здійснюються в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП; англійський термін – *Analog-to-Digital Converter, ADC*). Взагалі ці два процеси – дискретизація і квантування – є незалежними один від одного, але вони, як правило, виконуються всередині однієї мікросхеми. Вихідним сигналом АЦП є

послідовність чисел, що надходить у цифровий процесор ЦП, який виконує необхідну обробку. Процесор здійснює різні математичні операції над вхідними відліками; раніше отримані відліки і проміжні результати можуть зберігатися в пам'яті ЦП для використання в наступних обчисленнях. Результатом роботи процесора є нова послідовність чисел, що являють собою відліки вихідного сигналу. Аналоговий вихідний сигнал $s_{вих}(t)$ відновлюється по цій послідовності чисел за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП; англійський термін — *Digital-to-Analog Converter, DAC*). Напряга на виході ЦАП має форму сходинок (див. рисунок 1.2); при необхідності воно може бути перетворене в плавно мінливий вихідний сигнал за допомогою фільтра, що згладжує, Φ .

Пристрої, реалізовані за допомогою структури, зображеної на рисунку 1.2, можуть мати найрізноманітніший характер. У цифровій формі можна створювати фільтри, аналізатори спектра, нелінійні перетворювачі сигналів і багато іншого.

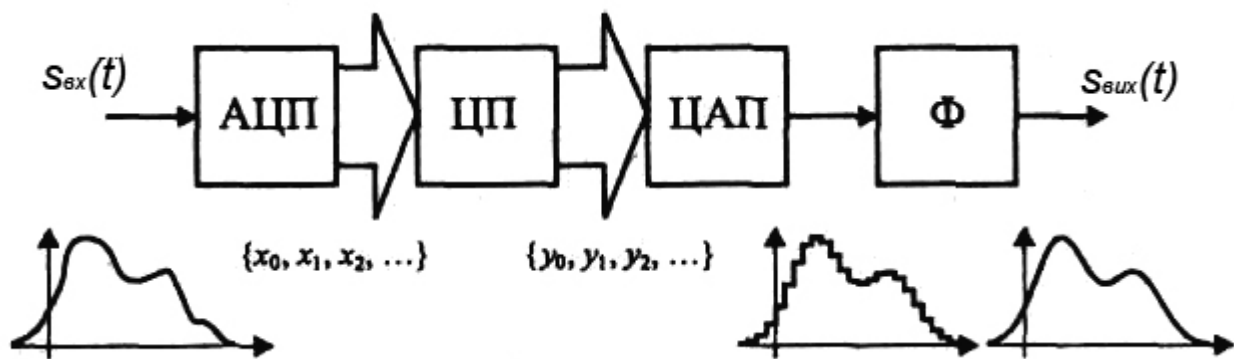


Рисунок 1.2 – Структурна схема системи цифрового оброблення сигналів

1.1.3. Частота Найквіста

Відповідно до теореми Котельнікова, гармонічний сигнал може бути адекватно представлений дискретними відліками, якщо його частота не перевищує половини частоти дискретизації (ця частота називається частотою Найквіста (*Nyquist frequency*)):

$$f_N = f_d/2 = 1/(2T). \quad (1.1)$$

Походження цього обмеження пояснює рисунок 1.3.

Залежно від співвідношення між частотою гармонічного сигналу, що дискретизується, і частотою Найквіста можливі три випадки.

1. Якщо частота гармонічного сигналу менша частоти Найквіста, дискретні відліки дозволяють правильно відновити аналоговий сигнал (рисунок 1.3, а).
2. Якщо частота гармонічного сигналу дорівнює частоті Найквіста, то дискретні відліки дозволяють відновити аналоговий гармонічний сигнал з тією же частотою, але амплітуда і фаза відновленого сигналу (він показаний пунктирною лінією) можуть бути перевернуті (рисунок 1.3, б). У найгіршому випадку всі дискретні відліки синусоїди можуть виявитися рівними нулю.
3. Якщо частота гармонічного сигналу більша частоти Найквіста, то відновлений по дискретним відлікам аналоговий сигнал (як і в попередньому випадку, він показаний пунктирною лінією) буде також гармонічним, але з іншою частотою (рисунок 1.3, в). Цей ефект зветься появою помилкових частот (*aliasing*).

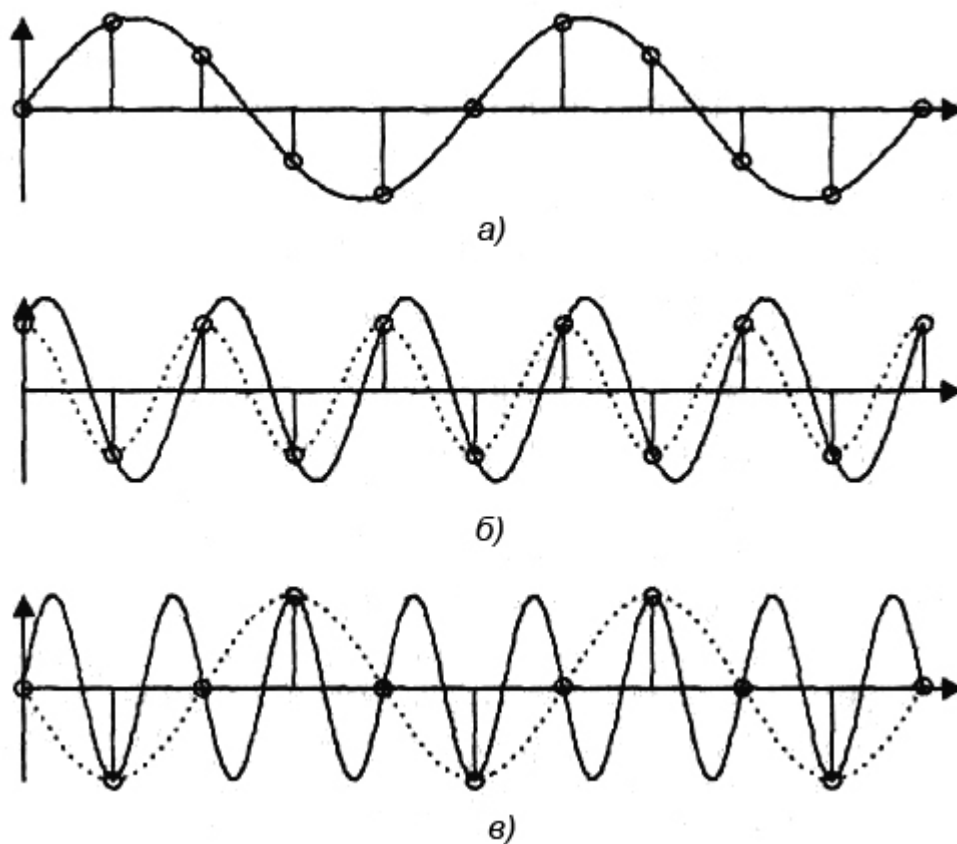


Рисунок 1.3 – Дискретизація гармонічних сигналів з різною частотою

1.1.4. Спектри аналогових і дискретних сигналів

Для опису аналогових і дискретних сигналів у частотній області використовується апарат перетворення Фур'є. Відомо, що *спектром* $X_a(j\omega)$ аналогового сигналу $x_a(t)$ називають пряме перетворення Фур'є

$$X_a(j\omega) = \int_0^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.2)$$

У свою чергу, відповідно до оберненого перетворення Фур'є

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.3)$$

Передбачається збіжність інтегралів у (1.2), (1.3), а також виконання умови $x_a(t) = 0$ при $t < 0$.

Пара перетворень Фур'є для дискретної часової послідовності $x(n)$ має вигляд:

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T}. \quad (1.4)$$

$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega n T} d\omega. \quad (1.5)$$

Таким чином, комплексну функцію $X(e^{j\omega T})$ називають *спектром* дискретного сигналу $x(n)$.

Наведемо ряд властивостей спектрів дискретних сигналів.

1) *Періодичність*. Спектр $X(e^{j\omega T})$ дискретної послідовності є періодичною комплексною функцією по частоті ω з періодом, рівним частоті дискретизації $\omega_\delta = 2\pi/T$. Тобто виконується співвідношення

$$X(e^{j\omega T}) = X(e^{j(\omega + k\omega_\delta) T}),$$

де k – ціле число.

Очевидно також періодичними по частоті є амплітудні складові спектра (модуль спектра $|X(e^{j\omega T})|$) і фазові складова (аргумент $\arg\{X(e^{j\omega T})\}$). Крім того, для дійсних послідовностей $x(n)$, як випливає з (1.4), справедливі співвідношення

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega T})| &= |X(e^{-j\omega T})|, \\ \arg\{X(e^{j\omega T})\} &= -\arg\{X(e^{-j\omega T})\}. \end{aligned}$$

На рисунку 1.4 показане умовне зображення модуля спектра дійсної послідовності, де основним прямим спектром $X^+(e^{j\omega T})$ називають частина спектра, розташовану в області нижніх частот від 0 до половини частоти дискретизації $\omega_0/2 = \pi/T$, а основним інверсним спектром – частина спектра в області частот $-\pi/T \leq \omega \leq 0$.

2) *Лінійність*. Нехай послідовність $x_3(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ є лінійною комбінацією послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$; величини a_1 та a_2 є постійними. Тоді для спектрів цих послідовностей можна записати $X_3(e^{j\omega T}) = a_1X_1(e^{j\omega T}) + a_2X_2(e^{j\omega T})$, що вказує на властивість лінійності перетворень Фур'є.

3) *Зсув в частотній області*. При зміщенні спектра $X(e^{j\omega T})$ послідовності $x(n)$ по осі частот вправо на величину γ отримується спектр іншого сигналу $Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j(\omega-\gamma)T})$. Цьому спектру відповідає послідовність

$$y(n) = x(n)e^{jn\gamma T}, \quad (1.6)$$

тобто зміщення спектра по осі частот відповідає множенню послідовності $x(n)$ на комплексну дискретну експоненту $e^{jn\gamma T}$.

4) *Затримка сигналу в часі*. При зміщенні дискретного сигналу $x(n)$ вправо (тобто при затримці за часом сигналу) на k відліків отримується сигнал $y(n) = x(n-k)$. По аналогії з попередньою властивістю, спектр затриманого сигналу має вигляд

$$Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j\omega T})e^{-jk\omega T}. \quad (1.7)$$

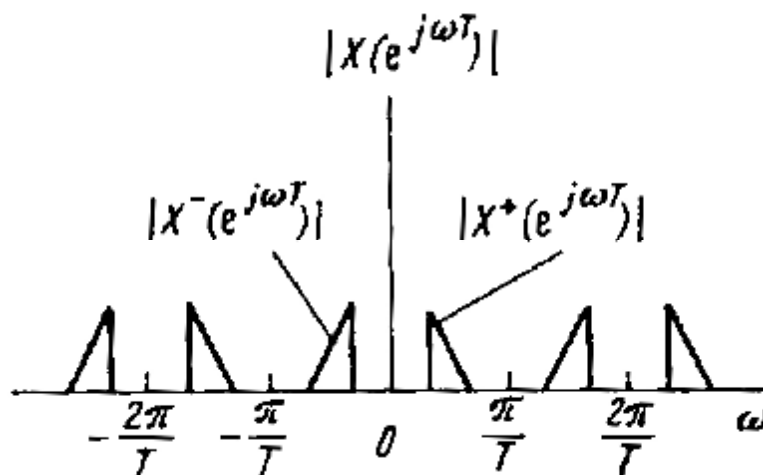


Рисунок 1.4 – Модуль спектра дійсного дискретного сигналу

1.1.5. Відновлення аналогових сигналів по дискретних відліках

Відновлення аналогового сигналу $x_a(t)$ по його дискретному представленню, тобто послідовності вибірок $x(n)$ зводиться до використання різних інтерполяційних процедур.

При виконанні умов, обумовлених теоремою відліків (теоремою Котельникова), операції дискретизації і відновлення взаємно обернені. Нагадаємо, що відповідно до цієї теореми, якщо аналоговий сигнал $x_a(t)$ має фінітний (обмежений частотою Найквіста $\omega_0 = 2\pi f_N$) спектр, тобто такий, що $X_a(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_0$ (див. рисунок 1.5,а), то такий сигнал можна однозначно представити послідовністю вибірок $x(n)$, взятих з періодом дискретизації $T = 2\pi/\omega_\delta$, де $\omega_\delta = 2\pi f_\delta \geq 2\omega_0$ на основі ряду Котельникова

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin[\omega_0(t-nT)]}{\omega_0(t-nT)}. \quad (1.8)$$

Фактично сигнал $x_a(t)$ можна отримати, якщо пропустити послідовність $x(n)$ через ідеальний аналоговий фільтр нижніх частот з частотою зрізу $\omega_3 = \pi/T$ і з амплітудно-частотною характеристикою $|K(j\omega)| = T$ у смузі пропускання.

Спектр $X(e^{j\omega T})$ послідовності $x(n)$, отриманої в результаті дискретизації з частотою $\omega_\delta = 2\pi/T$ аналогового сигналу $x_a(t)$, і спектр $X_a(j\omega)$ пов'язані співвідношенням

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + k\omega_\delta)], \quad (1.9)$$

тобто спектр дискретної послідовності $x(n)$ дорівнює з точністю множника $1/T$ сумі спектрів відповідного аналогового сигналу $x_a(t)$, зміщених по осі частот на всі можливі значення частоти, кратні частоті дискретизації $\omega_\delta = 2\pi/T$.

На рисунках 1.5,б та 1.5,в наведене умовне зображення модуля спектра $X(e^{j\omega T})$ дискретного сигналу $x(n)$ відповідно для ситуацій $\omega_\delta > 2\omega_0$ та $\omega_\delta < 2\omega_0$. У першому випадку (при виконанні умови теореми Котельникова) спектр дискретного сигналу збігається на

інтервалі $|\omega| \leq \omega_0$ зі спектром аналогового сигналу. А в другому випадку (при невиконанні умови теореми Котельнікова) має місце явище накладення спектрів, при якому спектр дискретизованого сигналу не співпадає на інтервалі $|\omega| \leq \omega_0$ із вихідним спектром аналогового сигналу.

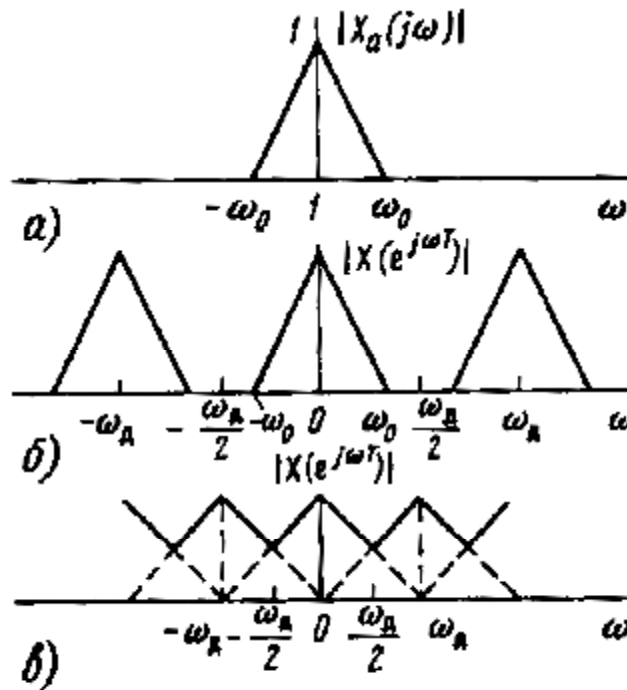


Рисунок 1.5 – Модуль спектрів аналогового (а) і дискретних сигналів при виконанні (б) та невиконанні (в) умов теореми Котельнікова

1.1.6. Сутність лінійної дискретної обробки. Дискретний фільтр

Теоретичні відомості, що наводяться в літературі і викладені в даному підрозділі, оперують термінами «дискретні фільтри», «цифрові фільтри» і т.п. В принципі, «дискретна система» і «дискретний фільтр» – це одне й те ж, однак, поняття «фільтр» досить тісно пов’язане із системами, які одні частоти пропускають, а інші затримують. Такий підхід може створити помилкове, обмежене уявлення про призначення і можливості дискретних лінійних систем, які здатні виконувати й інші задачі, крім виділення із сигналу визначеної смуги частот. З цієї причини в даній роботі слова «фільтр» і «система» будуть використовуватися як синоніми.

Взагалі, дискретний фільтр – це довільна система обробки дискретного сигналу, що володіє властивостями лінійності і

стаціонарності. Під цими властивостями розуміють те саме, що і в аналоговому випадку: лінійність означає, що вихідна реакція на суму сигналів дорівнює сумі реакцій на ці сигнали, подані на вхід окремо, а стаціонарність – що затримка вхідного сигналу приводить лише до такої ж затримки вихідного сигналу, не змінюючи його форми.

Будь-який фільтр володіє певною частотною характеристикою. Щоб вона була нетривіальною, тобто, щоб коефіцієнт передачі фільтра на різних частотах був різним, вихідний сигнал фільтра $y(n)$ повинен залежати від декількох відліків вхідного сигналу $x(n)$. Таким чином, дискретний фільтр повинен мати пам'ять.

Щоб забезпечити лінійність і стаціонарність, здійснені фільтром математичні операції повинні обмежуватися додаванням і множенням на константи.

У загальному випадку дискретний фільтр підсумовує (з ваговими коефіцієнтами) деяку кількість вхідних відліків (включаючи останній) і деяку кількість попередніх вихідних відліків:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{N-1} x(n-N+1) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_{M-1} y(n-M+1), \quad (1.10)$$

де a_m, b_k – дійсні коефіцієнти.

Дана формула називається алгоритмом дискретної фільтрації. Якщо по-іншому згрупувати доданки, щоб з однієї сторони від знака рівності були тільки вхідні відліки, а з іншої – тільки вихідні, отримаємо форму запису, що називається рівнянням різниць (різницевим рівнянням):

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_{M-1} y(n-M+1) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{N-1} x(n-N+1).$$

Структура різницевого рівняння схожа на структуру диференціального рівняння аналогової лінійної системи, тільки замість операції диференціювання у формулі фігурують затримки дискретних послідовностей. Цим визначається і спільність підходів до опису аналогових і дискретних систем. Однак, досить істотним є те, що в дискретній системі не існує яких-небудь принципових обмежень на співвідношення між m і n — кількостями вхідних і вихідних відліків.

1.2. МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ

1.2.1. Дискретне перетворення Фур'є

1.2.1.1. Основні поняття й формули. Нехай $x(n)$ – періодична послідовність із періодом NT (період – N відліків), тобто $x(n) = x(n + mNT)$, де m – ціле. Дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ) називають пару взаємо-однозначних перетворень виду:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jkn\Omega T}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.11)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jkn\Omega T}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.12)$$

де $\Omega = 2\pi/(NT)$ – основна частота перетворення (бін ДПФ).

Вираз (1.11) визначає пряме ДПФ, а (1.12) – обернене ДПФ. Застосовуючи позначення

$$W_N = e^{-j\Omega T} = e^{-j2\pi/N}, \quad (1.13)$$

записують перетворення у формі:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.14)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.15)$$

Дискретне перетворення Фур'є $X(k)$, як і сама послідовність $x(n)$, є періодичною функцією по аргументу k з періодом N , адже $W_N^{kn} = W_N^{(k+mN)n}$, де m – ціле. Дискретне перетворення Фур'є може бути використано й для представлення послідовності $x(n)$ кінцевої довжини N , визначеної при $n = 0, 1, \dots, N-1$ і рівної нулю поза інтервалом $[0, N-1]$. Дійсно, таку послідовність можна розглядати як один період відповідної періодичної послідовності й використати перетворення (1.14), (1.15). Варто тільки вважати, що поза інтервалом $[0, N-1]$ послідовності $X(k)$ і $x(n)$ рівні нулю.

Зазначимо важливий взаємозв'язок між спектральним представленням кінцевого дискретного сигналу і ДПФ цього ж сигналу,

який полягає у тому, що ДПФ фактично являє собою N відліків спектра, узятих на періоді з інтервалом дискретизації по частоті, рівним біну $\Omega = 2\pi/(NT)$. Тому властивості ДПФ аналогічні властивостям спектрів дискретних сигналів.

1.2.1.2. Основні властивості ДПФ:

1) *Лінійність*. Нехай послідовності $x_1(n)$ і $x_2(n)$ мають однакову довжину N ; величини a_1 та a_2 є постійними; а послідовність $x_3(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$. Тоді для ДПФ цих послідовностей можна записати $X_3(k) = a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$, причому всі ДПФ $X_1(k)$, $X_2(k)$ і $X_3(k)$ мають однакову довжину N . Якщо ж $x_1(n)$ має довжину N_1 , а $x_2(n)$ – довжину N_2 , ($N_1 \neq N_2$), то тривалість їх лінійної комбінації $x_3(n)$ дорівнює $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ і ДПФ всіх послідовностей $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$ повинні обчислюватися при $N=N_3$.

2) *Зсув часової послідовності*. Нехай $x(n)$ – періодична послідовність із періодом N , яка має ДПФ $X(k)$, а $y(n) = x(n+m)$, де $m < N$ – ціле, є зсунута (затримана в часі на m відліків) відносно $x(n)$ послідовність. Тоді ДПФ цієї послідовності має вигляд

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+m) W_N^{kn}.$$

Якщо в останній сумі зробити заміну змінних $n+m = n'$, то можна записати, що

$$Y(k) = W_N^{-km} X(k).$$

3) *Зсув послідовності ДПФ*. Якщо періодична послідовність ДПФ $Y(k) = X(k+l)$ є зміщеною в частотній області на l відносно $X(k)$, то за аналогією із попередньою властивістю відповідні послідовності в часовій області пов'язані співвідношенням

$$y(n) = W_N^{nl} x(n).$$

1.2.1.3. Кругова згортка дискретних сигналів. Якщо $x_1(n)$ і $x_2(n)$ – періодичні послідовності з періодом N , то

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(n-m)x_2(m). \quad (1.16)$$

також є періодичною послідовністю з періодом в N відліків.

Операція обчислення (1.16) називається *круговою (періодичною) згорткою* послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$. Якщо ДПФ цих послідовностей відповідно рівні $X_1(k)$ і $X_2(k)$, то ДПФ кругової згортки $Y(k)$ знаходиться наступним чином:

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m) \right) W_N^{nk} = \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left(\sum_{n=m}^{N-1} x_2(n-m) W_N^{(n-m)k} \right) W_N^{mk} = \\
 &= X_2(k) \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) W_N^{mk} = X_1(k) X_2(k).
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Кругову згортку (1.16) можна обчислити з використанням апарату ДПФ за наступним алгоритмом:

- обчислити відповідно до (1.14) ДПФ $X_1(k)$ і $X_2(k)$ для послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$;
- обчислити відповідно до (1.7) ДПФ $Y(k)$ для згортки $y(n)$;
- знайти $y(n)$ шляхом обчислення ОДПФ (1.15) по знайденому $Y(k)$.

На практиці з метою зменшення об'єму обчислень для реалізації зазначеного підходу використовуються різні алгоритми швидкого перетворення Фур'є (ШПФ).

1.2.1.3. Лінійна (аперіодична) згортка дискретних сигналів.

Нехай $x_1(n)$ і $x_2(n)$ – відповідно кінцеві N_1 -точковий та N_2 -точковий дискретні сигнали. *Лінійною (аперіодичною) згорткою* цих сигналів називається дискретний сигнал виду

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x_1(m) x_2(n-m) = \sum_{m=0}^n x_1(n-m) x_2(m). \tag{1.18}$$

Очевидно, що $y(n)$ має довжину $N_3 = N_1 + N_2 - 1$.

Алгоритм обчислення кругової згортки може бути застосований і для обчислення лінійної згортки. З цією метою необхідно від дискретних сигналів $x_1(n)$ і $x_2(n)$ перейти до N_3 -точкових сигналам $\tilde{x}_1(n)$ і $\tilde{x}_2(n)$, доповнивши послідовності $x_1(n)$ і $x_2(n)$ відповідним

числом нульових відліків. Далі, обчисливши в N_3 точках ДПФ $\tilde{X}_1(k)$ й $\tilde{X}_2(k)$, знайти їх добуток, тобто $Y(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$, та відповідно до (1.15) обчислити згортку $y(n)$.

1.2.2. Однобічне Z-перетворення

1.2.2.1. Пряме Z-перетворення. У задачах аналізу й синтезу лінійних дискретних систем широко застосовується математичний апарат Z-перетворення. Однобічне Z-перетворення дискретної послідовності $x(n)$ визначається рядом

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (1.19)$$

де $z = re^{j\varphi} + \alpha + j\beta$ – комплексна змінна (див. рисунок 1.6).

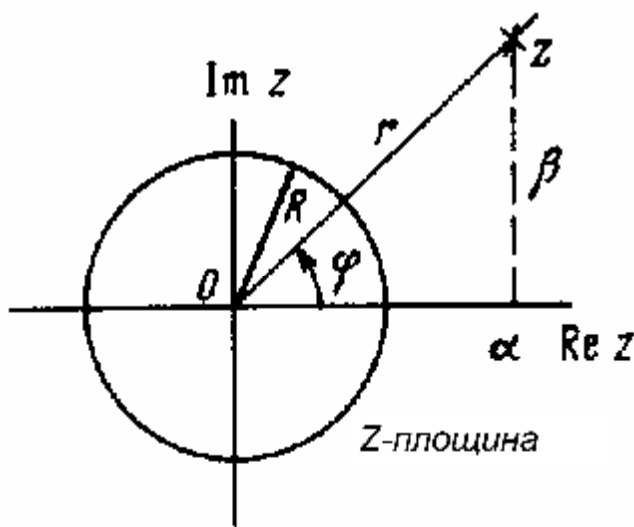


Рисунок 1.6 – Комплексна Z-площина

Множина значень z , де ряд (1.19) сходиться, називається областю збіжності. Для рівномірної збіжності ряду досить, щоб

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty. \quad (1.20)$$

Область збіжності визначається радіусом кола R в Z-площині, поза яким ряд (1.19) сходиться.

1.2.2.2. Властивості Z-перетворення. Нижче наводиться ряд важливих і широко застосованих властивостей Z-перетворення, що безпосередньо випливають із (1.19)

1) *Лінійність.* Якщо послідовності $x_1(n)$ і $x_2(n)$ мають відповідні Z-перетворення $X_1(z)$ і $X_2(z)$, величини a_1 та a_2 є постійними, то лінійна комбінація $x_3(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ має зображення в Z-області (Z-перетворення) $X_3(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$.

2) *Зсув часової послідовності.* Якщо перетворення $Z\{x(n)\} = X(z)$, а послідовність $x(n) = 0$ при $n < 0$, то зсунута відносно $x(n)$ послідовність $y(n) = x(n - m)$ має Z-образ

$$Y(z) = X(z)z^{-m}. \quad (1.21)$$

3) *Згортка часових послідовностей.* Якщо $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$, $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$, то згортка послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^n x_1(n-m)x_2(m)$$

має Z-перетворення $Y(z)$, рівне добутку образів:

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z). \quad (1.22)$$

4) *Перемноження часових послідовностей.* Якщо $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$, $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$, то послідовність $y(n) = x_1(n)x_2(n)$ має Z-образ

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)\frac{dv}{v}, \quad (1.23)$$

де контур C лежить у середині перекриття областей збіжності $X_1(v)$ і $X_2\left(\frac{z}{v}\right)$.

1.2.2.3. Обернене Z-перетворення. Обернене Z-перетворення ставить у відповідність функції комплексної змінної $X(z)$ гратчасту функцію (послідовність) $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$, знайдену по формулі

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz, \quad (1.24)$$

де C - контур, розташований в області збіжності $X(z)z^{n-1}$, що охоплює початок координат в Z-площині. Інтеграл в (1.24) можна обчислити за

досить складним алгоритмом на основі теореми про відліки. Більш зручний спосіб обчислення оберненого Z -перетворення полягає в розкладанні (якщо це можливо) $X(z)$ на прості дроби:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}. \quad (1.25)$$

У цьому випадку

$$x(n) = \sum_{k=1}^N \beta_k (\alpha_k)^n. \quad (1.26)$$

У таблиці 1.1 наведені Z -перетворення послідовностей, які найбільш часто використовуються.

1.2.2.4. Рішення різницевих рівнянь за допомогою Z -перетворення. Відомо, що Z -перетворення є зручним апаратом для вирішення різницевих рівнянь із постійними коефіцієнтами. Нехай зв'язок послідовностей $y(n)$ і $x(n)$ описується різницевим рівнянням

$$\sum_{m=0}^{M-1} a_m y(n-m) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k). \quad (1.27)$$

Застосовуючи пряме Z -перетворення до обох частин (1.27) і з огляду на властивості лінійності й зсуву, знаходимо

$$\sum_{m=0}^{M-1} a_m Y(z) z^{-m} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k X(z) z^{-k}, \quad (1.28)$$

де $Y(z)$ і $X(z)$ – відповідно Z -образи функцій $y(n)$ і $x(n)$.

З виразу (1.28) знаходимо

$$Y(z) = H(z) X(z),$$

$$\text{де } H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{\sum_{m=0}^{M-1} a_m z^{-m}} \quad (1.29)$$

Застосовуючи обернене Z -перетворення, визначаємо по відомій $x(n)$ шукану послідовність $y(n)$.

Таблиця 1.1 – Найбільш часто використовувані Z-перетворення послідовностей

$x(n)$	$X(z)$
$\tilde{\delta}(nT)$	1
$u_0(n)$	$1/(1-z^{-1})$
a^n	$1/(1-az^{-1}), a < 1$
n	$z^{-1}/(1-z^{-1})^2$
na^n	$z^{-1}/(1-az^{-1})^2$
$\frac{m!}{(n-m)!n!}$	$(1+z^{-1})^m, m \leq n$
$e^{j\omega nT}$	$1/(1-e^{j\omega T}z^{-1})$
$\sin(n\omega T)$	$\frac{(\sin \omega T)z^{-1}}{z^{-2} - (2 \cos \omega T)z^{-1} + 1}$
$\cos(n\omega T)$	$\frac{(1 - \cos \omega T)z^{-1}}{z^{-2} - (2 \cos \omega T)z^{-1} + 1}$

1.2.2.5. Зв'язок між Z-перетворенням і Фур'є-перетворенням дискретних сигналів. З порівняння Z-перетворення і Фур'є-перетворення дискретних сигналів випливає, що за умови збіжності відповідних рядів спектр дискретного сигналу може бути отриманий шляхом підстановки $z = e^{j\omega T}$ в Z-образ цього сигналу, тобто

$$X(e^{j\omega T}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} \quad (1.30)$$

Рівнянню $z = e^{j\omega T}$ відповідають точки, розташовані на окружності радіусом $r = 1$ (одинична окружність) у комплексній Z-площині (див. рисунок 1.6). Тому можна казати, що спектр сигналу – це Z-образ, розглянутий на одиничній окружності в Z-площині.

1.3. ЦИФРОВІ ФІЛЬТРИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Оскільки в літературі, присвяченій методам і засобам цифрової обробки сигналів, звичайно оперують терміном «цифрова фільтрація», то незважаючи на те, що ефекти, пов'язані з квантуванням за рівнем, в даному підрозділі поки не розглядаються, надалі замість терміна «дискретний фільтр» будемо використовувати термін «цифровий фільтр».

1.3.1. Визначення та класифікація цифрових фільтрів

Цифрові фільтри (ЦФ) являють собою системи, призначені для перетворення структури вхідного сигналу до виду, обумовленому характером його подальшого використання. Вони відносяться до класу лінійних дискретних систем, взаємозв'язок між вхідним $x(n)$ і вихідним $y(n)$ дискретними сигналами визначається різницевою рівнянням:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m y(n-m). \quad (1.31)$$

Тут межі сум N й M та величини $y(n)$ є коефіцієнтами (параметрами) фільтра, причому коефіцієнти a_m і b_k можуть бути як константами та (у більш загальному випадку) відліками функцій, що залежать від дискретного часу n .

Сигнали $x(n)$ і $y(n)$ можуть бути як дійсними, так і комплексними. Як вже відзначалось раніше, рівняння виду (1.31) можна розглядати як алгоритм обчислення $y(n)$, тобто алгоритм роботи ЦФ. Його реалізація у вигляді пристрою приведе до апаратного способу реалізації ЦФ, а програмування обраною мовою – до програмного способу реалізації ЦФ.

Як правило, розв'язок рівняння (1.31), тобто гратчасту функцію $\{y(n)\}$, потрібно визначити при $n \geq 0$. Якщо відомі коефіцієнти a_m і b_k , відліки вхідного сигналу $\{x(n)\}$ при $n \geq -N+1$ і початкові значення $y(-1), y(-2), \dots, y(-M+1)$, то, використовуючи (1.31), можна розрахувати відліки $y(n)$ для кожного $n \geq 0$. Рівняння (1.31) дає аналітичний опис ЦФ у часовій області.

Якщо коефіцієнти a_m і b_k не залежать від дискретного часу n , то ЦФ є стаціонарними, тобто системами з постійними параметрами, у протилежному випадку вони будуть належати класу систем із змінними параметрами.

Цифрові фільтри прийнято поділяти на два класи: рекурсивні (РЦФ) і нерекурсивні (НЦФ). Якщо в рівняння (1.31) хоча б один коефіцієнт a_m відмінний від нуля, то фільтр називається *рекурсивним*. Якщо ж у (1.31) усі коефіцієнти $a_m = 0$, то фільтр, що реалізує такий алгоритм, називається *нерекурсивним*. Для нього рівняння (1.31) спрощується до наступного вигляду:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k). \quad (1.32)$$

Очевидно, що НЦФ являє собою систему без зворотного зв'язку, а РЦФ – систему зі зворотнім зв'язком.

1.3.2. Системні (передатні) функції цифрових фільтрів

Відповідно до загального визначення передатних функцій систем автоматичного управління передатною або системною функцією $H(z)$ ЦФ називають відношення Z -образів вихідного $Y(z)$ і вхідного $X(z)$ сигналів фільтра при нульових початкових умовах:

$$H(z) = Y(z) / X(z). \quad (1.33)$$

Обчислюючи Z -перетворення вихідного сигналу за рівняннями (1.31) і (1.32)

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} - Y(z) \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m},$$

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k},$$

із загальної формули (1.33) після простих перетворень можна одержати більш зручні для використання залежності для системних функцій рекурсивних і нерекурсивних ЦФ:

$$H_p(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} / (1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}), \quad (1.34)$$

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}. \quad (1.35)$$

Системні функції (1.34) і (1.35) містять усі ті ж параметри фільтрів, що і рівняння різниць (1.31) і (1.32), і тому дають повний опис ЦФ. Вони визначають собою спосіб аналітичного опису ЦФ у Z -області.

1.3.3. Основні форми реалізації структур цифрових фільтрів

Існує досить велике число різних форм реалізації рекурсивних і нерекурсивних ЦФ. Розглянемо найбільш поширені з них. При побудові структурних схем, що відповідають цим формам реалізації, використовуємо існуючі в теорії управління графічні позначення операції затримки, додавання і множення. Операція затримки (запам'ятовування) відліків сигналу на m кроків T дискретизації позначається квадратиком із записом у ньому величини z^{-m} , операція додавання – прямокутником із символом S , а операція множення на константу – квадратиком із хрестиком всередині. Передача даних відображається на схемах суцільними лініями зі стрілками.

Для порівняльного аналізу складності реалізації різних форм передатних функцій використовуються зазвичай наступні реалізаційні характеристики:

- L_o – число комірок (регістрів) оперативної пам'яті, необхідної для збереження коефіцієнтів фільтра;
- L_n – число комірок постійної пам'яті, необхідної для збереження коефіцієнтів фільтра;
- M – число множень, виконуваних при обчисленні одного відліку вихідного сигналу;
- A – число алгебраїчних додавань двох доданків, які повинні бути виражені у фільтрі, для одержання одного відліку вихідного сигналу.

Ці ж характеристики також можуть використовуватися і для оцінки обчислювальної складності алгоритмів фільтрації (1.31) і (1.32).

В загальному випадку, для цифрових фільтрів можна виділити чотири основних форми реалізації: пряму, канонічну, каскадну (послідовну) і паралельну.

Пряма форма (рисунок 1.7) відповідає безпосередній реалізації рівняння різниць (1.31) або передатної функції (1.34). Для неї $L_o = N + M - 2$, $L_n = N + m - 1$, $M = N + M - 1$, $A = N + M - 2$.

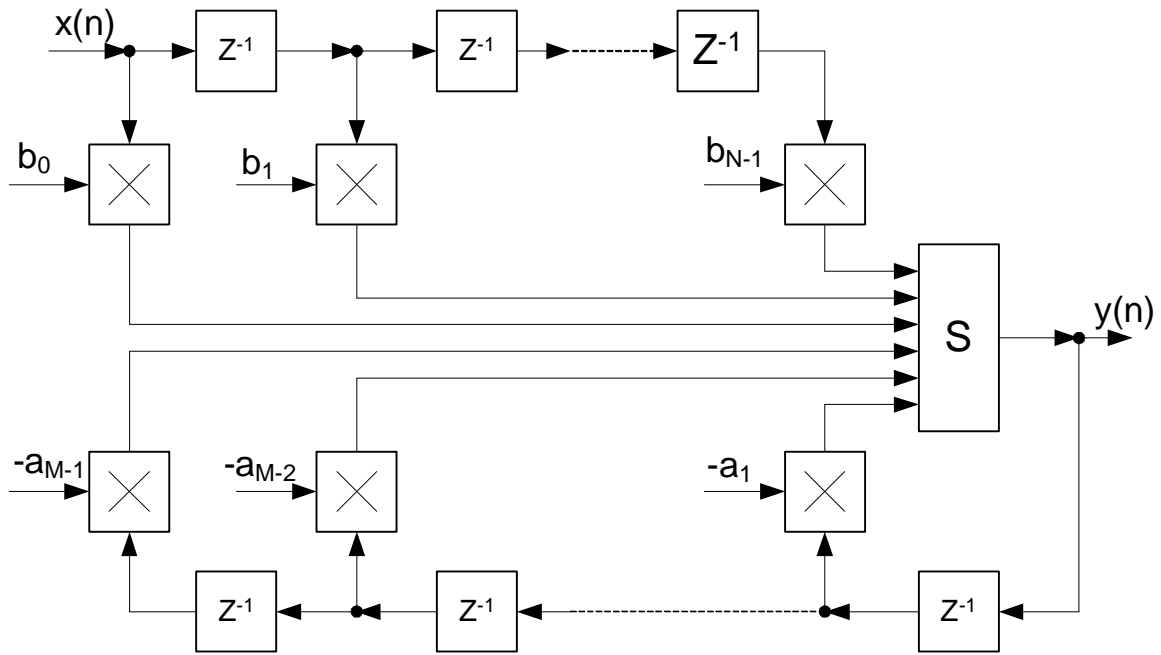


Рисунок 1.7 – Пряма форма

Канонічна форма (рисунок 1.8 для випадку $N = M - 1$) відповідає заміні (1.31) еквівалентною системою рівнянь різниць:

$$v(n) = -\sum_{m=1}^{M-1} a_m v(n-m) + x(n);$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k v(n-k).$$

Введення допоміжної послідовності дозволяє об'єднати частину елементів затримки і зменшити їх число в порівнянні з прямою формою реалізації. Інші реалізаційні характеристики при цьому залишаються без змін.

Послідовна форма (рисунок 1.9) використовує спосіб представлення $H(z)$ у вигляді добутку типових ланок не вище другого порядку (біквдратних ланок):

$$H(z) = \prod_{k=1}^V \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}.$$

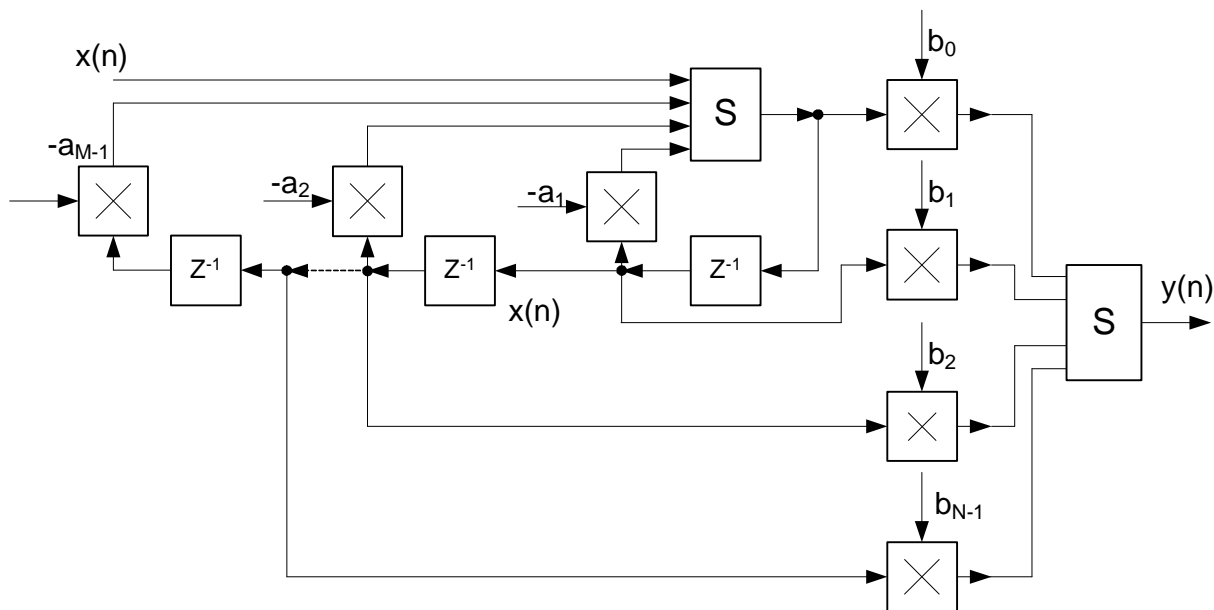


Рисунок 1.8– Канонічна форма

Біквдратна ланка стає універсальним блоком для побудови ЦФ будь-якого порядку (*порядком* ЦФ називається максимальна величина ступеня знаменника системної функції фільтра). Реалізаційні характеристики цієї форми реалізації багато в чому залежать від числа біквдратних ланок.



Рисунок 1.9 – Послідовна форма

Паралельна форма (рисунок 1.10) ґрунтується на еквівалентному представленні $H(z)$ у вигляді суми типових ланок:

$$H(z) = \sum_{k=1}^v \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}},$$

які можуть бути реалізовані у вигляді спрощеного біквдратного блоку при $\beta_k = 0$. Реалізаційні характеристики тут також значним чином залежать від числа типових блоків.

Усі розглянуті форми реалізації ЦФ при тих самих вхідних даних і нескінченній розрядності представлення чисел у ЦФ дають абсолютно

однакові результати, тому що отримані шляхом еквівалентних математичних перетворень одного й того ж вихідного різницевого рівняння (1.31). Однак, при обмеженій розрядності сітки представлення чисел, що завжди має місце в реальних ЦФ, ці форми приведуть до різних результатів, тому що відрізняються механізмом перетворення похибок округлення. Каскадна форма, як правило, забезпечує найменший рівень власних шумів фільтра.

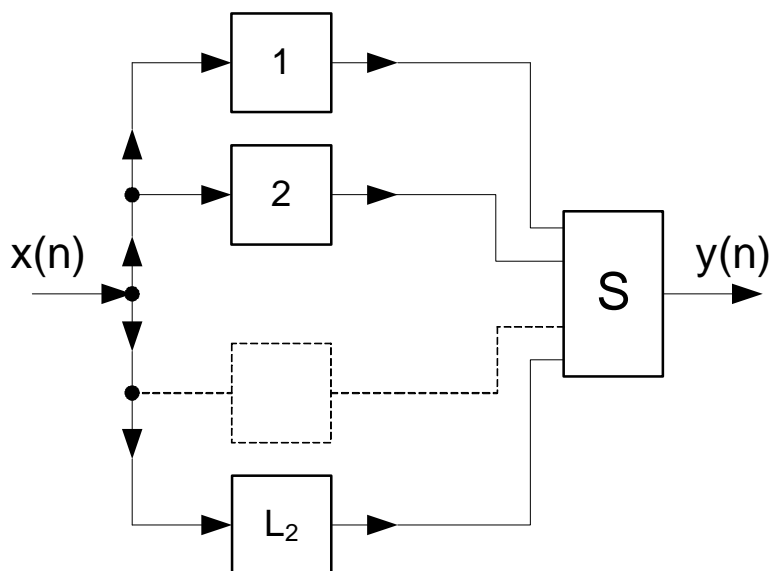


Рисунок 1.10 – Паралельна форма

1.3.4. Частотні характеристики фільтрів

Комплексні частотні характеристики являють собою функції частоти ω , отримані в результаті підстановки $z = e^{j\omega T}$ у системні функції (1.34) і (1.35):

$$H_p(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T}}{(1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m e^{jm\omega T})}, \quad (1.36)$$

$$H_n(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T}. \quad (1.37)$$

Модуль комплексної частотної характеристики $A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$, який називають *амплітудно-частотною характеристикою* (АЧХ) фільтра, визначає амплітуду вихідного сигналу стійкого фільтра в сталому режимі при вхідному сигналу

$$x(n) = e^{jn\omega T} = \cos(n\omega T) + j \sin(n\omega T).$$

Аргумент комплексної частотної характеристики $\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega\Delta t})]$, який називають *фазочастотною характеристикою* (ФЧХ) фільтра, визначає фазу вихідного сигналу стійкого фільтра при вхідному сигналі

$$x(n) = e^{jn\omega T} = \cos(n\omega T) + j \sin(n\omega T).$$

Для рекурсивних і нерекурсивних фільтрів з дійсними коефіцієнтами справедливі наступні співвідношення для АЧХ і ФЧХ:

$$A_p(\omega) = \sqrt{\frac{\left[\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(k\omega T)\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(k\omega T)\right]^2}{\left[\sum_{m=0}^{M-1} a_m \cos(m\omega T)\right]^2 + \left[\sum_{m=0}^{M-1} a_m \sin(m\omega T)\right]^2}}, \quad (1.38)$$

$$\varphi_p(\omega) = -\arctg\left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(k\omega T)}{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(k\omega T)}\right) + \arctg\left(\frac{\sum_{m=0}^{M-1} a_m \sin(m\omega T)}{\sum_{m=0}^{M-1} a_m \cos(m\omega T)}\right), \quad (1.39)$$

$$A_n(\omega) = \sqrt{\left[\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(k\omega T)\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(k\omega T)\right]^2}, \quad (1.40)$$

$$\varphi_n(\omega) = -\arctg\left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(k\omega T)}{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(k\omega T)}\right). \quad (1.41)$$

У формулах (1.38) і (1.39) коефіцієнт $a_0 = 1$.

Крім АЧХ і ФЧХ використовують також ще одну частотну характеристику – груповий час затримки (ГЧЗ):

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}, \quad (1.42)$$

рівний часу затримки в сталому режимі вихідного сигналу фільтра щодо вхідного сигналу $x(n) = e^{jn\omega T}$.

Частотні характеристики містять усі параметри ЦФ і являють собою також спосіб їхнього опису в частотній області. При обробці за допомогою ЦФ аналогових сигналів з обмеженим частотним спектром у смузі $[-\omega_g, \omega_g]$, де ω_g – максимальна (верхня) частота спектра, величина

кроку дискретизації за часом вибирається з умови теореми Котельнікова $T \leq \pi/\omega_c$ і характер частотних характеристик у діапазоні від 0 до π/T цілком визначає зміну спектра аналогового сигналу, що отримується після цифро-аналогового перетворення вихідного сигналу ЦФ.

Частотні характеристики володіють рядом корисних для практики властивостей, що безпосередньо впливають з формул (1.38)–(1.42). Основними з них є:

1) Усі частотні характеристики являють собою періодичні функції частоти ω з періодом $2\pi/T$.

2) АЧХ і ГЧЗ являють собою парні функції частоти ω і їхні графіки симетричні відносно вісі ординат, а ФЧХ є непарною функцією ω і її графік антисиметричний відносно цієї осі.

Із зазначених вище властивостей випливає, що вимоги до частотних характеристик при постійному T варто задавати тільки на інтервалі $[0; \pi/T]$.

З метою спрощення порівняння частотних характеристик ЦФ із різними T застосовують нормування частоти. Існує два способи нормування. При першому способі вважають нормовану частоту $\omega' = \omega T$, тоді період частотних характеристик дорівнює 2π і вимоги до них задаються на інтервалі $[0; \pi]$. При другому способі використовують нормовану частоту $w = \omega T / 2\pi$. У цьому випадку період частотних характеристик дорівнює 1 і вимоги до них задаються на інтервалі $[0; 0.5]$.

1.3.5. Імпульсна характеристика цифрового фільтра

Імпульсна характеристика ЦФ $h(n)$ являє собою реакцію фільтра при нульових початкових умовах на вхідний вплив у вигляді одиничного дискретного дельта імпульсу:

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

З цього визначення і визначення передатної (системної) функції і комплексної частотної характеристики випливає, що імпульсна характеристика і системна функція зв'язані між собою оберненим Z-перетвореннями:

$$h(n) = Z^{-1}[H(z)], \quad (1.43)$$

а імпульсна характеристика і комплексна частотна характеристика – парою перетворень Фур'є:

$$h(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega n T} d\omega,$$

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k T}. \quad (1.44)$$

Для НЦФ із (1.35) впливає важливий висновок, що

$$h(k) = b_k, \quad (1.45)$$

тобто коефіцієнти системної функції НЦФ є відліками їх імпульсної характеристики.

Знаючи $h(n)$ можна розрахувати при нульових початкових умовах вихідний сигнал ЦФ $y(n)$ по заданому вхідному сигналі $x(n)$. Аналітично зв'язок $y(n)$ з $x(n)$ та $h(n)$ виражається рівнянням лінійної дискретної згортки послідовностей відліків $x(n)$ і $h(n)$, причому всі три послідовності можуть бути як кінцевими, так і нескінченними.

1.3.6. Стійкість цифрових фільтрів

Цифровий фільтр називається стійким, якщо при будь-яких початкових умовах його реакція фільтра на будь-який обмежений вплив $x(n)$ також обмежена, тобто якщо $|x(n)| \leq M_x < \infty$, то для всіх n справедливо $|y(n)| \leq M_y < \infty$, причому M_x і M_y – постійні, що не залежать від n .

Використовуючи рівняння згортки можна показати, що якщо послідовність $x(n)$ обмежена по амплітуді, то абсолютне значення вихідного сигналу

$$|y(nT)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(mT)| |x(nT - mT)| \leq M_x \sum_{m=0}^{\infty} |h(mT)|.$$

Отже, критерієм стійкості цифрового фільтра є збіжність ряду відліків його імпульсної характеристики

$$\sum_{m=0}^{\infty} |h(mT)| < \infty. \quad (1.46)$$

Показано, що умова (1.46) є не лише достатньою, але й необхідною умовою стійкості фільтра. Проте безпосереднє застосування цієї умови для перевірки стійкості практично є достатньо складним. Тому застосовують інше формулювання критерію стійкості, яке базується на аналізі системної функції, яка пов'язана з імпульсною характеристикою Z -перетвореннями

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n},$$

якщо ж $h(n) > 0$, то для будь-яких n має місце нерівність

$$|H(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| |z^{-n}|$$

і, таким чином, при $|z^{-1}| \leq 1$ завжди справедливо

$$|H(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|. \quad (1.47)$$

Порівняння (1.47) з (1.46) дає можливість робити висновок, що в у будь-якого стійкого фільтра системна функція $H(z)$ має бути кінцева у всіх точках Z -площини, де $|z^{-1}| \leq 1$. Іншими словами системна функція $H(z)$ не повинна мати особливих точок (полісів) при $z \geq 1$ (на та поза одиничним колом Z -площини). Таким чином, фільтр буде стійким лише тоді, коли всі полюси $H(z)$ розташовані усередині одиничного кола Z -площини.

Якщо $H(z)$ – дрібно-раціональна функція, то полюси $H(z)$ визначаються нулями (коренями) багаточлена знаменника системної функції:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{(1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m})} \quad (1.48)$$

Відзначим, що формулювання критерію стійкості відноситься лише до нескоротного дроби в (1.48), так як можливо, що полюс компенсується нулем системної функції.

1.3.7. Порівняльний аналіз типів цифрових фільтрів

В залежності від характеру імпульсної характеристики (ІХ) цифрові фільтри прийнято поділяти на два класи: КІХ-фільтри (фільтри з

кінцевою імпульсною характеристикою) та БІХ-фільтри (фільтри з безкінечною імпульсною характеристикою). Відмітимо, що всі НЦФ є КІХ-фільтрами, а майже всі РЦФ (за винятком тих, у яких системна функція може бути перетворена до виду (1.35)) є БІХ-фільтрами.

Обидва класи фільтрів володіють рядом переваг і недоліків. Переваги КІХ-фільтрів у порівнянні з БІХ-фільтрами зводяться до наступного:

- КІХ-фільтри можуть мати точно лінійну ФЧХ.
- Потужність власних шумів (дисперсія похибок округлення) КІХ-фільтрів, побудованих за нерекурсивною схемою, як правило, набагато менша, ніж у рекурсивних БІХ-фільтрів і не має тенденції до нагромадження в силу відсутності зворотніх зв'язків. Вона дорівнює нулю, тобто власні шуми відсутні, в тому випадку, якщо операції додавання і множення виконуються без округлень. У рекурсивних фільтрів потужність власних шумів не може дорівнювати нулю, оскільки в ланцюзі зворотнього зв'язку цих фільтрів завжди повинно виконуватися округлення при обчисленні добутків відліків сигналу на коефіцієнти фільтра.
- Для КІХ-фільтрів простіше обчислення коефіцієнтів, що пояснюється лінійною залежністю апроксимуючої функції від коефіцієнтів.
- Нерекурсивні КІХ-фільтри є принципово стійкими системами, у той час як стійкість рекурсивних БІХ-фільтрів апріорно гарантувати не можна. Їх стійкість завжди необхідно перевіряти за тим або іншим критерієм. Для рекурсивних фільтрів, що знаходяться на границі стійкості, нагромадження внутрішніх шумів може привести фільтр до втрати усталеного режиму роботи.

Головним недоліком КІХ-фільтрів у порівнянні з БІХ-фільтрами є те, що при однакових вимогах до АЧХ, відсутність вимог до лінійності ФЧХ і постійній частоті дискретизації вони вимагають виконання істотно великого числа арифметичних операцій при своїй реалізації. Цей недолік для деяких КІХ-фільтрів вдається зменшити за рахунок розробки спеціальних швидких алгоритмів нерекурсивної фільтрації, або переходу до більш простих алгоритмів квазіоптимального типу

(наприклад, застосування робастного підходу до цифрової фільтрації сигналів).

1.3.8. Класифікація цифрових фільтрів за призначенням

З погляду призначення ЦФ усі вони умовно поділяються на два великі класи:

- 1) частотні фільтр;
- 2) функціональні фільтри.

1.3.8.1. Частотні фільтри. *Частотні фільтри* призначені для цілеспрямованої зміни частотного спектра $X(e^{j\omega T})$ вхідного сигналу. Вихідними даними для проектування таких фільтрів є бажані частотні характеристики, що задаються. Реальні частотні характеристики ЦФ повинні бути досить близькими до бажаного. Ступінь близькості бажаних і реальної частотних характеристик визначається деякою кількісною мірою і може служити показником якості частотних фільтрів.

До числа частотних фільтрів належать селективні (частотно-вибіркові) фільтри, корегуючі фільтри і перетворювачі Гільберта. У частотно-вибіркових фільтрах повністю приглушуються частотні складові у певній смузі частот, що називається смугою затримки, і зберігаються незмінними частотні складові в іншій смузі частот, що називається смугою пропускання. Між смугами пропускання і затримки можливий діапазон частот, характер поведінки складових у яких не залежить від вхідного сигналу (перехідна смуга). В залежності від положення зазначених смуг і їхньої кількості розрізняють наступні частотно-вибіркові фільтри.

Фільтри низьких частот (ФНЧ), призначені для приглушення високочастотних складових спектра вхідного сигналу. Смуга пропускання лежить у межах від 0 до граничної частоти пропускання $\omega_{\text{гп}}$, смуга затримки визначається інтервалом частот від граничної частоти затримки $\omega_{\text{гз}}$ до π/T , а діапазон $[\omega_{\text{гп}}; \omega_{\text{пз}}]$ складає перехідну смугу ФНЧ. Бажана АЧХ ідеального ФНЧ наведена на рисунку 1.11,а.

Фільтри високих частот (ФВЧ) використовуються для придушення низькочастотних складових вхідного спектра. Смуга затримки обмежена частотами 0 і $\omega_{\text{гз}}$, смуга пропускання – частотами $\omega_{\text{гп}}$ і $\pi/\Delta t$, а місце

перебування перехідної смуги таке ж, як і у ФНЧ, тільки $\omega_{\Gamma\Pi} > \omega_{\Gamma3}$.
 Бажана АЧХ ідеального ФВЧ наведена на рисунку 1.11,б.

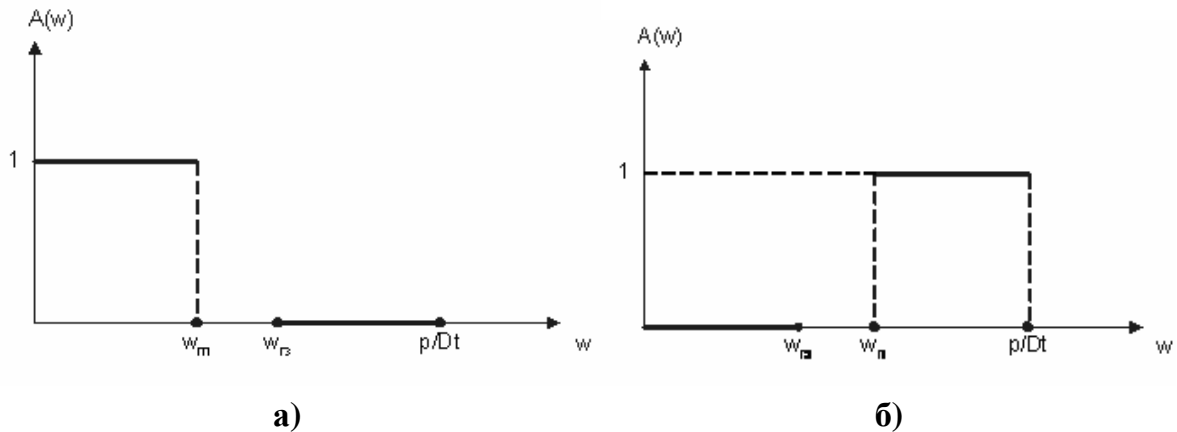


Рисунок 1.11 – Амплітудно-частотна характеристика: а) ФНЧ; б) ФВЧ

Смугові фільтри (СФ) призначені для пропускання обмеженої смуги частотних складових. Вони мають дві смуги затримки $[0; \omega_{\Gamma31}]$ і $[\omega_{\Gamma32}; \pi/T]$, дві перехідні смуги $[\omega_{\Gamma31}; \omega_{\Gamma\Pi1}]$ і $[\omega_{\Gamma\Pi2}; \omega_{\Gamma32}]$ та одну смугу пропускання $[\omega_{\Gamma\Pi1}; \omega_{\Gamma\Pi2}]$, причому, очевидно, що $\omega_{\Gamma\Pi1} < \omega_{\Gamma\Pi2}$. АЧХ ідеального СФ наведена на рисунку 1.12.

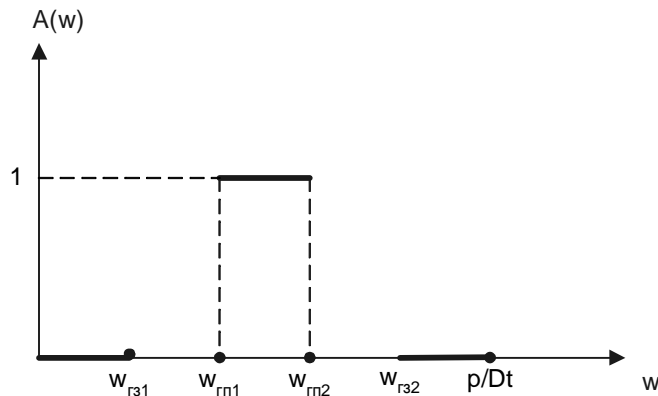


Рисунок 1.12 – Амплітудно-частотна характеристика СФ

Режекторні фільтри (РФ) служать для приглушення заданої смуги середніх частот. Вони мають дві смуги пропускання $[0; \omega_{\Gamma\Pi1}]$ і $[\omega_{\Gamma\Pi2}; \pi/T]$, дві перехідні смуги $[\omega_{\Gamma\Pi1}; \omega_{31}]$ та $[\omega_{\Gamma32}; \omega_{\Gamma\Pi2}]$ і одну смугу затримки $[\omega_{\Gamma31}; \omega_{\Gamma32}]$. АЧХ ідеального РФ наведена на рисунку 1.13.

Ідеальні частотні характеристики частотно-вибіркових фільтрів практично реалізувати не можливо. Можлива лише їхня апроксимація з

тим або іншим ступенем точності. Частотні фільтри можна побудувати у вигляді як рекурсивних, так і нерекурсивних ЦФ.

За допомогою *корегуючих фільтрів* забезпечується задана зміна інтенсивності частотних складових визначеної смуги частот.

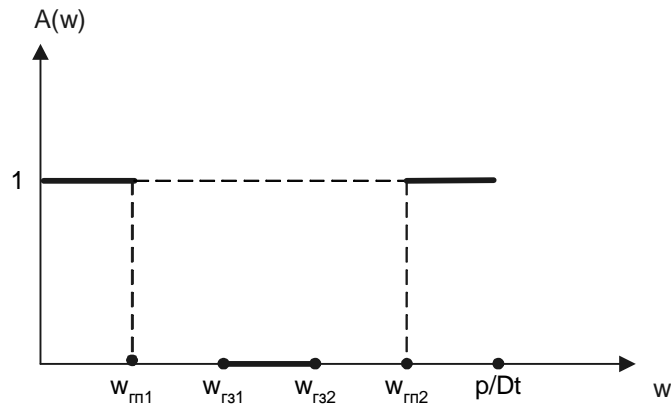


Рисунок 1.13 – Амплітудно-частотна характеристика СФ

Перетворювачі Гільберта (ПГ) використовуються для одержання комплексного сигналу

$$u(n) = x(n) + jv(n), \quad (1.49)$$

спектр якого $U(e^{j\omega T})$ задовольняє умові:

$$U(e^{j\omega T}) = \begin{cases} 2X(e^{j\omega T}) & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi T \\ 0 & \text{при } \pi T < \omega < 2\pi T \end{cases} \quad (1.50)$$

З (1.46) і (1.47) випливає, що спектр $v(n)$ дорівнює

$$V(e^{j\omega T}) = \begin{cases} -jX(e^{j\omega T}) & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi T \\ jX(e^{j\omega T}) & \text{при } \pi T < \omega < 2\pi T \end{cases}$$

тобто для одержання сигналу $v(n)$ (і тим самим сигналу $u(n)$) досить пропустити $x(n)$ через ідеальний ПГ із комплексною ЧХ:

$$H(e^{j\omega T}) = \begin{cases} -j & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi T \\ j & \text{при } \pi T < \omega < 2\pi T \end{cases}$$

Для ідеального ПГ дійсна частина комплексної частотної характеристики дорівнює 0, а уявна частина має вигляд:

$$\text{Im}[H(e^{j\omega T})] = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi T, \\ 1 & \text{при } \pi T < \omega < 2\pi T. \end{cases} \quad (1.51)$$

1.3.8.2. Функціональні фільтри. Функціональні фільтри використовуються для виконання більш складних операцій над сигналами, що напряду можуть і не бути пов'язаними зі зміною частотного спектра вхідного сигналу. Вхідний сигнал у таких фільтрах, як правило, представляється у вигляді адитивної суміші корисного сигналу $u(n)$ і випадкового шуму $\xi(n)$ з відомою кореляційною функцією або функцією спектральної щільності потужності $S(\omega)$.

До функціональних фільтрів можна віднести *фільтри узгодження*, що оцінюють ступінь відповідності корисної складової вхідного сигналу деякому еталонному сигналові на фоні шумів; *екстраполюючі* фільтри, що обчислюють майбутнє значення корисного сигналу в умовах дії випадкових завад. Оскільки повне приглушення випадкових завад неможливе, то оцінки, що отримуються на виході функціональних фільтрів, носять статистичний характер. У якості їхньої кількісної міри зазвичай використовується дисперсія, що для стаціонарного шуму описується виразом

$$\sigma^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S(\omega) |A(\omega)|^2 d\omega \quad (1.52)$$

У випадку некорельованих завад (білого шуму) дисперсія оцінки виражається безпосередньо через імпульсну характеристику функціонального фільтра:

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^{\infty} h^2(n),$$

де σ_n^2 – дисперсія вхідної завади $\xi(n)$. Дисперсія (1.52) може використовуватися як показник якості функціональних фільтрів.

Функціональні фільтри також можуть бути виконані як у рекурсивному, так і нерекурсивному варіантах.

1.4. ПРОЕКТУВАННЯ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

Під проектуванням (або синтезом) цифрового фільтра, як правило, розуміють пошук таких наборів коефіцієнтів різницевого рівняння або системної (передатної) функції a_m і b_k , при яких характеристики фільтра, що утворюється, задовольняють заданим вимогам, у якості яких можуть бути використані імпульсна і частотна характеристики, характеристика групового часу затримки і т.д. При більш широкому підході, у задачу проектування також входить і вибір структури фільтра з врахуванням кінцевої точності обчислень. Це особливо актуально при апаратній реалізації фільтрів з використанням спеціалізованих інтегральних схем або цифрових сигнальних процесорів.

1.4.1. Основні етапи проектування цифрових фільтрів

Процес проектування цифрових фільтрів містить у собі ряд етапів. Склад етапів залежить від призначення фільтра.

Для частотно-вибіркових фільтрів на *першому етапі* здійснюється математична *постановка задачі апроксимації*, оскільки, як уже відзначалося раніше, точне відтворення частотних характеристик, що задаються, не можливо.

Таким чином, метою першого етапу є математичне формулювання задачі обчислення параметрів фільтрів по заданих вимогах до його характеристик.

Другий етап проектування частотно-вибіркових ЦФ полягає у вирішенні задачі обчислення коефіцієнтів системної функції або відліків імпульсної характеристики. По суті справи це етап розрахунку дискретного фільтру ДФ і його називають ще етапом *аналітичного синтезу ДФ*. Цей етап містить у собі наступні частини:

- оцінку необхідного порядку N і M фільтра;
- розрахунок наборів векторів коефіцієнтів a_m та b_k або значень ІХ фільтра;
- оцінку точності відтворення характеристик, що задаються, і її порівняння з початковими вимогами.

Якщо вимоги до характеристик виконуються, то другий етап завершується, у іншому випадку необхідно повернутися до другої частини і розрахувати заново параметри фільтру.

Третій етап полягає в програмній або апаратній реалізації ЦФ. Він містить наступні основні частини:

- вибір форми реалізації й оцінка реалізаційних характеристик;
- оцінка розрядності представлення вхідних і вихідних сигналів та проміжних даних;
- вибір елементної бази, розробка функціональної і принципової схем при апаратній реалізації ЦФ у виді спеціалізованого пристрою;
- програмування мовою процесора (загального призначення або спеціалізованого, наприклад, деякого сигнального процесора) при програмній реалізації фільтру;
- оцінка точності реалізації необхідних характеристик фільтру при обмеженій розрядній сітці (оцінка власних шумів квантування фільтру).

При виконання третього етапу можлива ситуація, коли отримані оцінки по розрядності елементів ЦФ і точності відтворення характеристик не можуть бути виконані на реальних пристроях. У цьому випадку необхідно знову повернутися до другого етапу і вирішити задачу аналітичного синтезу ДФ більш точними методами при більшому значенні порядків фільтру N і M нову перейти до третього етапу.

1.4.2. Класифікація методів синтезу частотно-вибіркових цифрових фільтрів

Методи синтезу системної функції ЦФ $H(z)$ по заданій частотній характеристиці розділяють на аналітичні, ітераційні і чисельні.

- *Аналітичні методи* забезпечують рішення задачі апроксимації в замкнутій аналітичній формі. До них відносяться методи синтезу рекурсивних фільтрів (БІХ-фільтрів) за даними аналогового фільтру-прототипу і в першу чергу методи *білінійного* та *інваріантного перетворення*.

- *Ітераційні методи*, які поєднують аналітичний і чисельний підходи, проте не дають однозначної відповідності параметрів розрахункових і заданих характеристик і вимагають, як правило, ряду уточнюючих процедур. Ітераційними є методи *вагових функцій* та *частотної вибірки*, які використовуються для синтезу нерекурсивних фільтрів (КІХ-фільтрів).
- *Чисельні методи* ґрунтуються на безпосередній апроксимації заданої частотної характеристики з мінімальною погрішністю відповідно до певного критерію оптимальності.

Початковими даними для синтезу ЦФ по заданій частотній характеристиці є:

- граничні частоти смуг пропускання $\omega_{\text{ГП}}$ та затримки $\omega_{\text{ГЗ}}$, що визначають межі і значення смуг пропускання, затримання та перехідних смуг фільтру;
- допустима нерівномірність АЧХ фільтру в смузі пропускання (або допустиме ослаблення в межах смуги пропускання у разі монотонних АЧХ) $A_{\text{П}}$, дБ;
- мінімальне загасання АЧХ в смузі затримання $A_{\text{З}}$, дБ.

1.4.3. Синтез нерекурсивних КІХ-фільтрів

Найбільш розповсюдженими неоптимізаційними методами розрахунку частотних КІХ-фільтрів є метод частотної вибірки і метод розкладання в тригонометричний ряд Фур'є з ваговими вікнами (метод вагового вікна). Обидва методи використовують взаємозв'язок імпульсної характеристики цифрового фільтра із його частотною характеристикою у вигляді пари перетворень Фур'є (1.44).

Якщо в (1.44) використовувати не всі значення безперервної частоти ω , а тільки N деяких вибірових значень $k\Omega$, де $\Omega = 2\pi/NT$ – постійний крок дискретизації по частоті, то пара інтегрально-дискретних перетворень Фур'є (1.44) перетворюється в пару кінцевих дискретних перетворень Фур'є:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (1.53)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (1.54)$$

де $H(k)$ – вибіркові значення частотної характеристики в точках, кратних Ω .

1.4.3.1. Метод частотної вибірки. Формули (1.53), (1.54) і визначають *метод частотної вибірки* розрахунку КІХ-фільтрів. Використовуючи їх, отриманий фільтр із деякою точністю апроксимує задану частотну характеристику. Похибка апроксимації виникає через обмеженість нескінченного ряду в (1.44) N першими членами, вона точно дорівнює нулю в точках частот взяття вибірки і має обмежену величину в проміжних точках. Чим більш гладкою є частотна характеристика, що задається, тим меншою є похибка апроксимації між частотними відліками.

Для частотних КІХ-фільтрів із точно лінійною фазовою характеристикою можна отримати зручні аналітичні вирази для $H(k)$, вигляд яких залежить від способу вибору N рівновіддалених відліків частотної характеристики. Існують два способи вибору відлікових точок, придатних для синтезу методом частотної вибірки. У першому способі використовуються відліки в точках:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{NT} k, \quad k = 0, 1, \mathbf{K}, N-1,$$

а в другому –

$$\omega_k = \frac{2\pi}{NT} (k + 0.5), \quad k = 0, 1, \mathbf{K}, N-1$$

Наявність двох способів дискретизації частоти дає додаткові можливості при розрахунку фільтрів із заданою частотною характеристикою. Наприклад, якщо при другому способі дискретизації частоти, гранична частота смуги фільтра виявляється набагато ближче до точки вибірки, чим при першому, то доцільно використовувати для вирішення задачі апроксимації другий спосіб дискретизації частоти. У протилежному випадку – перший спосіб дискретизації частоти.

1.4.3.2. Метод розкладання в ряд Фур'є з ваговими вікнами. Даний метод базується на тому, що частотна характеристика (ЧХ) будь-якого цифрового фільтра є періодичною функцією частоти, а відповідно

її можна представити рядом Фур'є виду (1.44). При цьому, коефіцієнти Фур'є збігаються з коефіцієнтами імпульсної характеристики цифрового фільтра. Проте використання цього співвідношення пов'язано з двома труднощами:

- 1) число коефіцієнтів розкладання нескінченне, а отже імпульсна характеристика фільтра $h_{\infty}(m)$ має нескінченну довжину;
- 2) фільтр є фізично нереалізованим, оскільки його імпульсна характеристика починається з $-\infty$.

На практиці застосовують обмеження нескінченно довгого ряду Фур'є на $m = \pm M$, де $M = (N-1)/2$ і затримують імпульсну характеристику на M тактів:

$$h_d(m) = \begin{cases} h_{\infty}(m-M), & 0 \leq m \leq N-1, \\ 0, & \text{при інших } m. \end{cases}$$

Синтезований у такий спосіб фізично реалізований КІХ-фільтр буде мати значні пульсації АЧХ в районі частоти зрізу. Зазначені пульсації представляють ефект Гіббса, що виявляється поблизу точок розриву заданої частотної характеристики. Ефект Гіббса обумовлений обмеженням тривалості нескінченної імпульсної характеристики $h_{\infty}(m)$. Причому, при збільшенні M , ефект Гіббса зникає дуже повільно (спочатку викиди звужуються, а лише потім їх амплітуда повільно зменшується).

Для боротьби з цим ефектом застосовують метод зважування (метод вагового вікна), що полягає в модифікації коефіцієнтів Фур'є для того, щоб керувати збіжністю ряду Фур'є шляхом перемноження відліків імпульсної характеристики на деяку вагову функцію $w(m)$, яку називають вікном:

$$h(m) = h_d(m) w(m).$$

При цьому, результуюча ЧХ модифікованого фільтра, являє собою (див. рисунок 1.14) згортку ЧХ вихідного фільтра $H_d(\cdot)$ зі спектральною функцією вікна $W(\cdot)$, яка для зменшення ефекту Гіббса повинна мати мінімальну величину бічних пелюстків δ_{ω} . Проте локалізація енергії в головній пелюстці приводить до розширення її величини $\Delta\omega_{21}$, що в підсумку позначається на крутизні ЧХ фільтра,

тобто збільшенні перехідної смуги між смугою пропускання і смугою загородження. Усе це визначає необхідність пошуку компромісу між критеріями побудови віконних функцій, які можна сформулювати у такий спосіб:

- 1) віконні функції повинні бути симетричними $w(m) = w(N - m - 1)$ і визначеними для значень m , що лежать в діапазоні $0 \leq m \leq N - 1$;
- 2) ширина головної пелюстки $\Delta\omega_{\text{гл}}$ частотної характеристики вікна, що утримує, по можливості, якомога більшу частину загальної енергії, повинна бути малою;
- 3) величини бічних пелюсток $\delta_{\text{біч}}$ частотної характеристики вікна повинні бути якомога меншими і швидко спадати з ростом частоти.

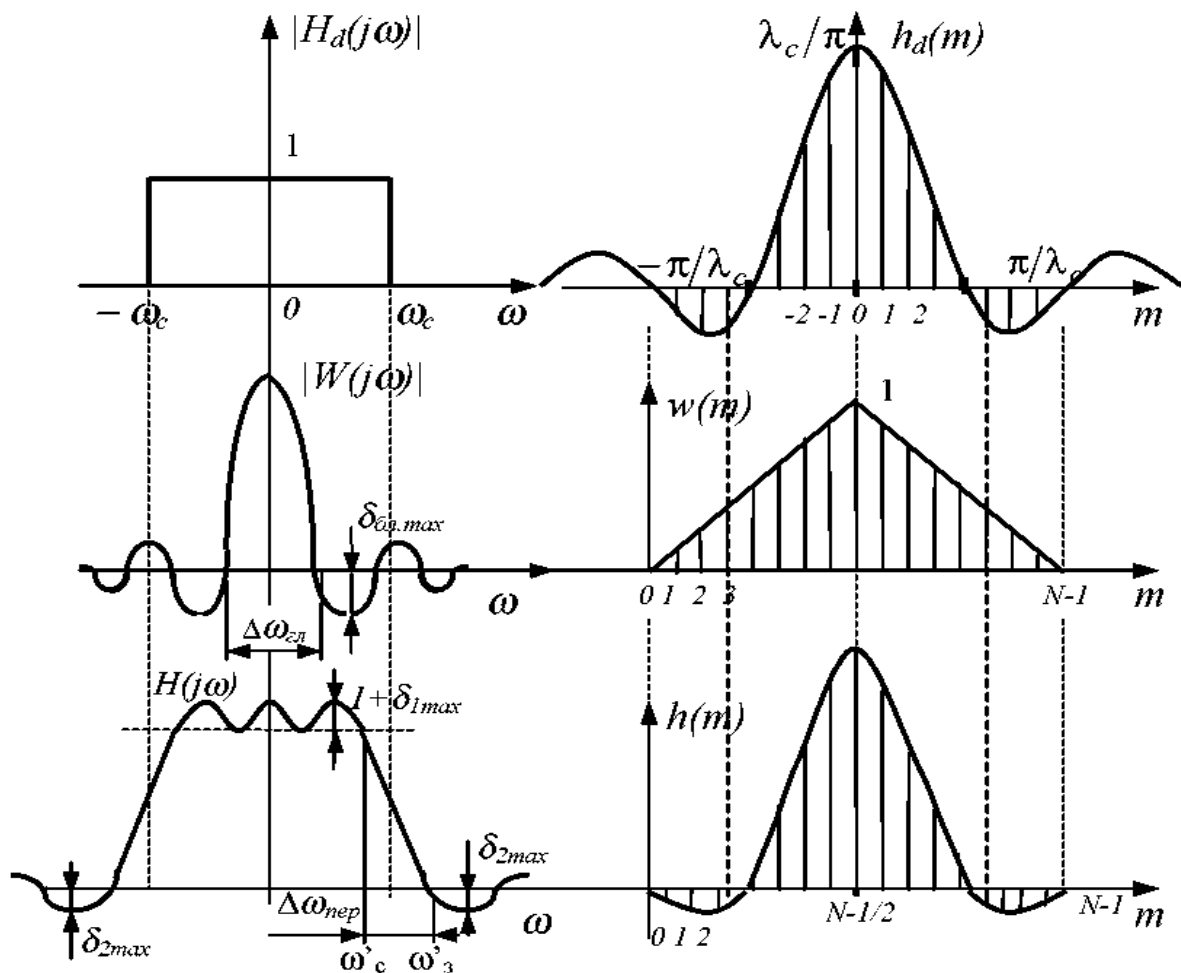
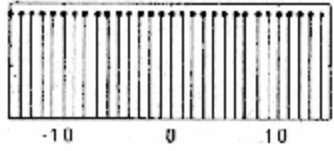
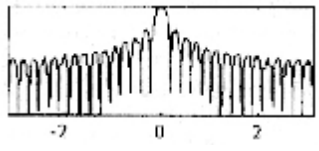
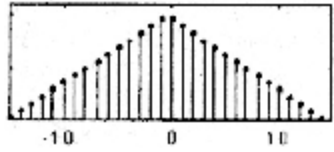
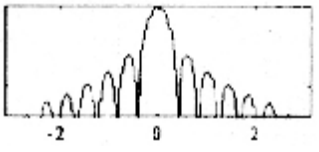
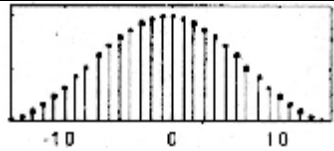
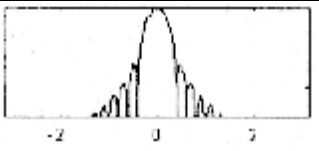
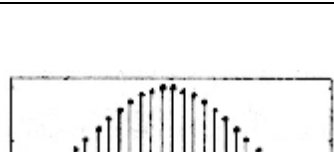
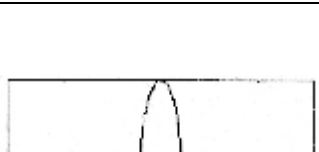
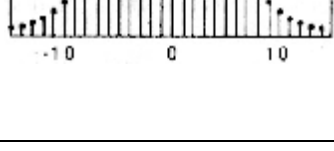
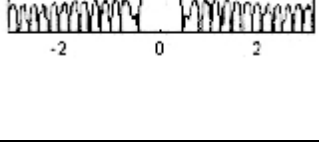
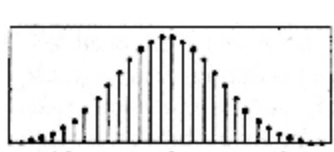
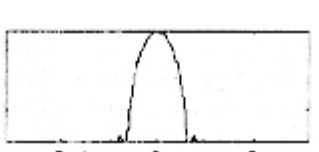


Рисунок 1.14 – Модифікація характеристик фільтра ваговим вікном

Найпростішим типом вагової функції можна вважати прямокутне вікно, що відповідає простому обмеженню (без модифікації) ряду Фур'є.

В таблиці 1.2 наведені типи та основні параметри віконних функцій, що знайшли широке застосування на практиці.

Таблиця 1.2 – Типи та основні параметри вагових вікон

Тип вікна	Часова функція	Спектр вікна	Макс. рівень бічних пелюсток, дБ	Ширина основ. пелюстки
Прямокутне $w(n)=1$			-13,3	0,89
Трикутне $w(n)=1-\frac{ n }{N}$			-26,5	1,28
Ганна $w(n)=\cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)$			-31,5	1,44
Хемінга $w(n)=\alpha-(1-\alpha)*\cos\frac{2\pi n}{N}$ звичайно $\alpha=0,54$			-43	1,3
Блекмана $w(n)=0,42-0,5\cos\frac{2\pi n}{N}+0,08\cos\frac{4\pi n}{N}$			-58,2	1,64
Гауса $w(n)=\exp\left\{-\left(\frac{\alpha n}{2N}\right)^2\right\}$ звичайно $\alpha=2,5$			-42	1,33

Наведений метод синтезу КІХ-фільтрів характеризується наступними основними перевагами:

- не вимагає складних обчислень, а точність апроксимації підвищується простим збільшенням порядку фільтра;
- дозволяє отримувати аналітичні вирази для визначення коефіцієнтів фільтрів.
- забезпечує строгу лінійність ФЧХ і постійність групового часу затримки цифрового фільтра.

Основний недолік методу полягає в складності визначення граничних частот та в нерівномірному розподілі помилок апроксимації по частотному діапазону.

1.4.4. Синтез рекурсивних БІХ-фільтрів

1.4.4.1. Особливості розрахунку рекурсивних цифрових фільтрів. На відміну від нерекурсивних фільтрів стійкі фізично реалізовані БІХ-фільтри, що реалізуються за рекурсивною схемою, в загальному випадку не мають точно лінійну фазову характеристику (за винятком випадку, коли всі полюси $H(z)$ розміщуються на одиничному колі). У зв'язку з цим при розрахунку таких фільтрів завжди потрібно розглядати задані амплітудну і фазову характеристики.

Як вже зазначалось раніше, вирішення задачі розрахунку ЦФ зводиться до визначення значень коефіцієнтів системної функції b_k і a_m (коефіцієнти БІХ-фільтрів не збігаються зі значеннями його імпульсної характеристики), що забезпечують відтворення заданих характеристик фільтра (ІХ, АЧХ, ФЧХ, ГЧЗ та ін.). Оскільки точне відтворення цих характеристик неможливе, то задача розрахунку БІХ-фільтрів також є апроксимаційною задачею і може бути вирішена чисто математичними методами.

Область, у якій провадиться апроксимація, визначається призначенням фільтра. Так, якщо апроксимація здійснюється в Z -площині, то результуючий фільтр буде цифровим. Якщо ж вона провадиться в S -площині, то результуючий фільтр буде аналоговим і буде необхідний додатковий етап його дискретизації. Відповідно до цього всі методи проектування БІХ-фільтрів можна розділити на три групи.

Перша група методів ґрунтується на апроксимації даних характеристик у безперервній S -області з наступним застосуванням простих методів відображення в Z -область. Другу групу методів розрахунку БІХ-фільтрів утворюють прямі методи розрахунку в Z -області. Іноді вдається знайти таке розташування полюсів і нулів фільтра, при якому забезпечується апроксимація безпосередньо заданої характеристики фільтра. Третя група методів використовує процедури оптимізації для знаходження такого розташування полюсів і нулів у Z -площині, при якому забезпечується апроксимація заданої характеристики фільтра. При цьому звичайно не вдається отримати формули, що зв'язують коефіцієнти фільтра з відомими параметрами заданої характеристики. Розрахунок фільтрів провадиться, як правило, чисельно, методом послідовних наближень.

Найбільше поширення на практиці отримала перша група методів, особливо при розрахунку частотних фільтрів. Це зв'язано з тим, що при такому підході немає необхідності в створенні спеціальної теорії розрахунку цифрових фільтрів. Для їх розрахунку можна використовувати добре розроблену теорію розрахунку фільтрів неперервного часу, що базується на широкому класі відомих аналогових фільтрів: Баттерворта, Бесея, Чебишева, Кауера та ін. Подальше застосування відомих методів дискретизації (переходу від неперервної області до дискретної) дозволяє відносно просто вирішувати поставлену задачу проектування БІХ-фільтрів.

1.4.4.2. Метод білінійного Z -перетворення частотних характеристик. Синтез рекурсивних БІХ-фільтрів на основі аналогових фільтрів-прототипів можливий різними методами: методом *відображення диференціалів*, що полягає в дискретизації диференціального рівняння аналогового ланцюга, тобто переході від похідних до кінцевих різниць, методом *інваріантності імпульсних характеристик*, який базується на дискретизації імпульсної характеристики аналогового ланцюга і методу *узгодженого Z -перетворення*. Проте жодним із цих методів не досягається необхідна відповідність частотних властивостей ЦФ і аналогового прототипу. Така відповідність при синтезі ЦФ забезпечується лише методом *білінійного Z -перетворення частотних характеристик*.

Існує декілька модифікацій методу білінійного перетворення. У найбільш простому випадку білінійне перетворення являє собою конформне відображення S -площини в точки Z -площини на основі заміни виду

$$s \rightarrow \gamma(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}), \quad (1.55)$$

де γ – постійний множник, значення якого не змінює форму перетворення.

Застосування (1.55) забезпечує однозначне перетворення передатної функції $H(s)$ аналогового фільтра-прототипу в системну функцію $H(z)$ рекурсивного цифрового фільтра:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\gamma(1-z^{-1})/(1+z^{-1})}.$$

При такому перетворенні кожній точці комплексної S -площини ($s = \Sigma + j\Omega$) ставиться у відповідність визначена точка Z -площини ($z = \exp((\delta + j\omega)T)$). Уявна вісь S -площини ($s = j\Omega$ для $-\infty < \Omega < \infty$) відображається в одиничне коло Z -площини ($z = \exp(j\omega T)$). Ліва половина S -площини ($Re(s) < 0$) відображається в частину Z -площини всередині одиничного кола ($|z| < 1$), що дозволяє зі стійкого аналогового фільтра одержати стійкий цифровий рекурсивний фільтр.

Співвідношення між частотами аналогового фільтра («аналоговими» частотами) Ω і цифрового фільтра («цифровими» частотами) ω можна визначити з (1.55) підстановкою $s = j\Omega$ і $z = e^{j\omega T}$. Це співвідношення виражається наступним чином:

$$\Omega = \gamma \operatorname{tg}(\omega T / 2). \quad (1.56)$$

На рисунку 1.15. представлений графік залежності (1.56) для випадку $\gamma = 1$.

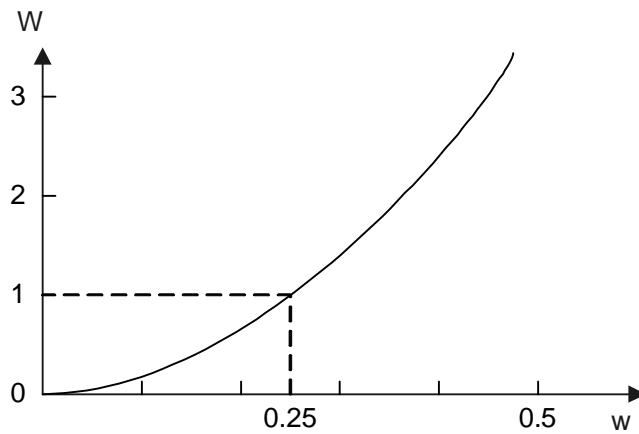


Рисунок 1.15 – Залежність між частотами аналогового і цифрового фільтрів

Із співвідношення (1.56) і його графіка випливає, що при невеликих значеннях ω співвідношення частот майже лінійне, проте для основної частини частотної шкали воно істотно нелінійне і значно обмежує область застосування білінійного перетворення. Дійсно, в загальному випадку при використанні перетворення (1.55) частотна характеристика цифрового фільтра буде являти собою деформовану частотну характеристику аналогового фільтра. З цієї причини, наприклад, білінійне перетворення не можна використовувати для перетворення аналогового фільтра, що диференціює, у цифровий диференціатор.

Проте, для досить великого практично важливого класу частотно-вибіркових фільтрів (ФНЧ, ФВЧ, СФ і РФ) частотна деформація, що описується співвідношенням (1.56), може бути скомпенсована. Метод компенсації деформації досить простий. Сукупність характерних частот зрізу смуг пропускання і затримки ЦФ відома. Використовуючи співвідношення (1.56), можна знайти всі граничні частоти зрізу аналогового фільтра, на основі яких може бути розрахований відповідний аналоговий фільтр. Виконавши білінійне перетворення цього фільтра, можна отримати цифровий фільтр, усі частоти якого будуть збігатися з заданими. При цьому необхідно мати на увазі, що компенсація стосується тільки АЧХ фільтра; ні ФЧХ, ні імпульсна характеристика аналогового і цифрового фільтрів збігатися не будуть.

1.5. КВАНТУВАННЯ В СИСТЕМАХ ЦИФРОВОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

1.5.1. Квантування сигналів в цифрових системах

Цифрова система обробки сигналів – це дискретна система, яка описується різницеvim рівнянням і реалізована програмним шляхом на цифрових сигнальних процесорах або ж апаратним шляхом в вигляді спеціалізованого цифрового обчислювача.

Для представлення коефіцієнтів системи (коефіцієнти різницевого рівняння або системної функції) та відліків сигналу, що опрацьовується, в цифровій системі використовуються елементи пам'яті (реєстри, комірки пам'яті), розрядність яких скінчена. Операційні пристрої (суматори, помножувачі) також мають обмежену розрядність.

Відповідно, коефіцієнти системи та відліки сигналу представляються з обмеженою точністю. Обмеженість розрядності елементів пам'яті та операційних пристроїв системи приводять до операції квантування.

Квантування – це нелінійна операція. Її введення в алгоритм обробки сигналу викликає появу помилок при його реалізації. Сукупність цих помилок називають помилками (шумами) квантування.

В даному підрозділі описується форми представлення та способи кодування чисел, ефекти пов'язані з виконанням арифметичних операцій над числами, способи квантування чисел, джерела помилок квантування та їх властивості, а також приводяться оцінки шумів квантування вхідного сигналу та оцінки відповідного шуму квантування на виході системи.

1.5.1.1. Представлення та кодування чисел. Як уже відзначалося в підрозділі 1.1, дискретний сигнал являє собою послідовність відліків (чисел), що можуть отримувати довільні значення в деякому діапазоні. А цифровий сигнал – це квантований по рівню дискретний сигнал, тобто квантована послідовність відліків, які можуть приймати лише кінцевий ряд дискретних по величині значень – рівнів квантування. Значення відліків цифрового сигналу представляються числами в обраній системі числення. Як правило, в пристроях цифрової обробки сигналів числа представляються в двійковій системі числення.

В системах цифрової обробки сигналів використовуються дві форми представлення чисел:

- з фіксованою точкою;
- з плаваючою точкою.

Представлення чисел в формі з *фіксованою точкою* (ФТ) означає, що в межах заданого формату для всіх чисел логічно фіксуються однакове місцезнаходження точки, яка розділяє цілу та дробові частини числа. Старший розряд числа використовується, як знаковий, всі інші розряди рахують, як значні. Після старшого знакового розряду логічно фіксується точка.

Символьне значення формату, в якому представлено двійкове число A має вигляд 2^b , де b – кількість розрядів числа A . На рисунку 1.16 показано двійкове число в формі з фіксованою точкою.

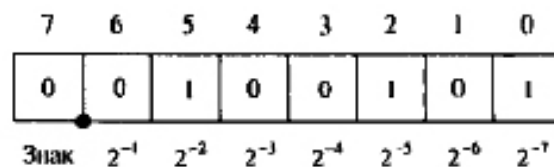


Рисунок 1.16 – Формат представлення двійкових чисел з фіксованою точкою

Діапазон абсолютних значень чисел A в формі з ФТ складає $0 \leq |A| \leq 1 - z^{-b}$.

При математичних операціях результат може вийти за верхню межу діапазону $|A| \geq 1$ і тим самим викликати суттєву похибку. Для усунення переповнення в системах ЦОС з ФТ вводиться масштабування даних, при цьому всі математичні операції виконуються з числами A , по абсолютному значенні меншими за одиницю.

Для кодування чисел з ФТ застосовують два основні способи: прямий та додатковий.

Прямий код числа A формується по наступному правилу. В знаковий розряд записується нуль (для додатніх чисел) та одиниця (для від’ємних), значущі розряди відповідають дробовій частині числа. Після старшого знакового розряду логічно фіксується точка, яка відокремлює цілу частину від дробової. Це правило має вигляд:

$$[A]_{np} = \begin{cases} 0, a_1, a_2 \dots a_b & \text{при } A \geq 0, \\ 1, a_1, a_2 \dots a_b & \text{при } A < 0. \end{cases}$$

Додатковий код більш часто використовується в системах ЦОС, оскільки арифметичні дії над числами із знаком, представленими в додатковому коді, виконуються як над беззнаковими (числами, що мають позитивний знак по замовчуванню).

Додатковий код числа A формується за наступним правилом. Якщо число позитивне, то додатковий код співпадає з прямим кодом, тобто $[A]_{\text{дод}} = [A]_{np}$. Для негативних чисел в знаковий розряд записується одиниця, а значущі розряди початкового числа інвертуються (0 замінюється 1 і навпаки) і до молодшого значущого розряду отриманого числа додається 1 з дотриманням правил складання двійкових чисел, тобто

$$[A]_{\text{дод}} = \begin{cases} 0, a_1, a_2 \dots a_b & \text{при } A \geq 0, \\ 1, \bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_b + 2^{-b} & \text{при } A < 0. \end{cases}$$

Представлення числа A в формі з плаваючою точкою (ПТ) ґрунтується на записі

$$A = \mu s^{\pm \gamma},$$

де s – основа системи числення;

μ – мантиса, число з знаком, представлене в формі з ФТ;

γ – порядок.

Для усунення неоднозначності та спрощення математики чисел з ПТ з всіх можливих варіантів представлення числа A найбільш часто обирають формат, з так званою, нормалізованою формою. Нормалізована форма відповідає такому представленню числа, коли ціла частина мантиси рівна нулю, а перша значуща цифра дробової частини відмінна від нуля.

1.5.1.2. Способи квантування чисел. Загалом квантування числа – це його представлення за допомогою кінцевої кількості (b) значущих розрядів. Операція квантування є нелінійною та вносить в представлене число помилку

$$\varepsilon = F(A) - A,$$

де A – число до квантування;

$F(A)$ – число після квантування.

Кроком квантування Q називається відстань між двома сусідніми рівнями квантування. Розглянемо операцію квантування з постійним кроком $Q = const$.

Наглядно процес квантування відліків дискретної послідовності показано на рисунку 1.1. На рисунку 1.1,*а* зображено аналоговий сигнал, із якого отримані відліки дискретної послідовності (рисунк 1.1,*б*). На рисунку 1.1,*в* зображено квантований сигнал, значення якого розміщені на певних рівнях квантування. Процедура квантування може здійснюватися двома способами: за допомогою округлювання та урізання.

При *округленні* числа A до b значущих розрядів вихідне k -розрядне число замінюється на саме близьке b -розрядне. На рисунку 1.17,*а* наведено графік щільності розподілу ймовірностей похибки квантування при округленні.

При *урізанні* k -розрядного числа до b значущих розрядів $k > b$ молодші розряди вихідного числа урізаються. На рисунку 1.17,*б* наведена відповідна характеристики похибок квантування при урізанні.

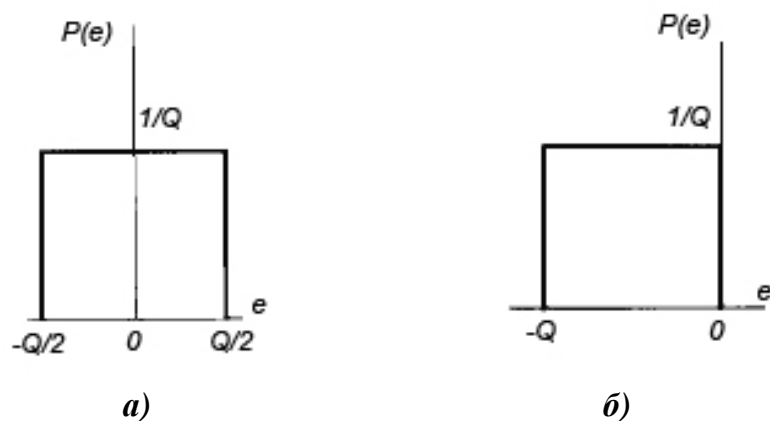


Рисунок 1.17 – Щільність ймовірностей похибок квантування при округленні (а) та при урізанні (б)

1.5.1.3. Моделі процесу квантування. Джерелами помилок квантування в ЦОС є:

- аналого-цифрові перетворення, при яких квантуються вхідні дискретні сигнали;

- множення цифрових сигналів, результатом чого є округлення або урізання;
- квантування коефіцієнтів цифрової системи.

Нелінійна модель процесу квантування показана на рисунку 1.18,*а*, де $d(n)$ – квантований сигнал (дискретний або k – розрядний цифровий); $p(n)$ – квантований сигнал (b –розрядний цифровий, $b > k$).

Спрощена лінійна модель процесу квантування представлена на рисунку 1.18,*б*, де $e(n) = F\{d(n)\} - d(n)$ – адитивний дискретний сигнал, що представляє собою помилка квантування (шум квантування).

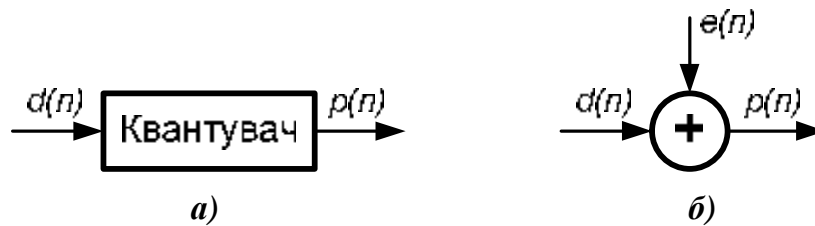


Рисунок 1.18 – Моделі процесу квантування: нелінійна (*а*) і лінійна (*б*)

1.5.1.4. Гіпотези про властивості квантування. Для сигналу помилки квантування $e(n)$ вводяться наступні припущення:

- послідовність $e(n)$ є стаціонарним і ергодичним дискретним випадковим процесом (стаціонарний процес володіє властивістю ергодичності, якщо середнє за часом випадкового процесу співпадає з середнім по множині реалізацій випадкового процесу);
- розподіл ймовірності помилок є рівномірним по діапазону помилок квантування (див. рисунок 1.17).
- будь-які два відліки послідовності $e(n)$ є некорельованими між собою, тобто послідовність $e(n)$ є випадковим процесом типу «білий шум»;
- послідовність $e(n)$ некорельована з квантованою послідовністю $d(n)$.

Введення вказаних допущень дозволяє спростити аналіз ефектів квантування сигналів в цифрових системах.

1.5.2. Шум аналого-цифрового перетворення

На практиці вхідний сигнал цифрової системи формується в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП), який виконує дискретизацію та квантування значущих розрядів вхідного аналогового сигналу. Помилка квантування вхідного сигналу, яка при цьому з'являється, називають шумом АЦП.

1.5.2.1 Лінійна модель процесу квантування в АЦП. Для приблизного опису нелінійної операції квантування вхідного сигналу при аналізі цифрових систем використовується лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу (див. рисунок 1.19).

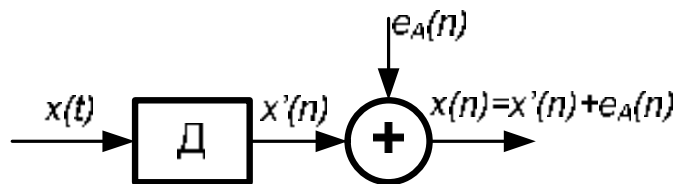


Рисунок 1.19 – Лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу

Дискретизатор D перетворює аналоговий сигнал $x(t)$ в послідовність, до якої додається шум АЦП, який враховує помилку квантування $e_A(n)$ при формуванні b_A значущих розрядів цифрової послідовності. Чим більша розрядність АЦП тим менший його шум, а сам пристрій стає складніше та дорожче. Вихідний сигнал лінійної моделі – квантований (цифровий) сигнал $x(n)$.

Наведемо ймовірнісні оцінки (математичне сподівання μ_A і дисперсію σ_A^2) шуму АЦП $e_A(n)$:

$$\mu_A = E[e_A(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A(n) \rho_A(e) de_A(n);$$

$$\sigma_A^2 = E[(e_A(n) - \mu_A)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A^2(n) \rho_A(e) de_A(n) = E[e_A^2(n)] - \mu_A^2,$$

де ρ_A - щільність розподілу ймовірностей шуму квантування;

$E[\cdot]$ – оператор математичного сподівання.

1.5.2.2 Шум АЦП, приведений до виходу цифрової системи.

Розглянемо цифрову систему (цифровий фільтр) з системною функцією $H(z)$ та імпульсною характеристикою $h(n)$. Будемо вважати, що коефіцієнти системи та арифметичні операції, які виконуються в ній, реалізуються точно. Лінійна модель оцінки шуму АЦП, приведеного до виходу цифрового фільтра, показано на рисунку 1.20.

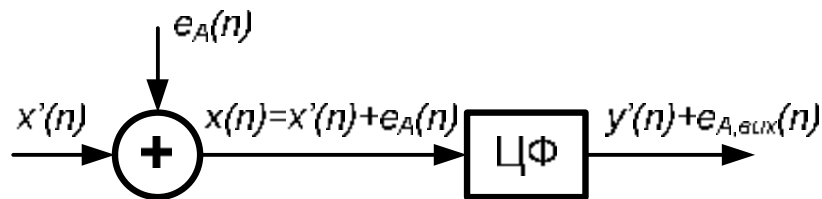


Рисунок 1.20 – Модель оцінки шуму АЦП, приведеного до входу цифрового фільтра

На цьому рисунку $x'(n)$ – відліки вхідного дискретного сигналу, $e_A(n)$ – шум АЦП, $x(n)$ – квантований сигнал, $y'(n)$ – складова вихідного сигналу, $e_{A,вых}(n)$ – вихідний шум обумовлений квантуванням вхідного сигналу (шум АЦП, приведений до виходу ЦФ).

Для цифрового фільтра, робота яка описується згорткою

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m),$$

шум АЦП на виході описується виразом

$$e_{A,вых}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m).$$

Враховуючи, що математичне сподівання вхідного шуму квантування $\mu_A = 0$, а його дисперсія $\sigma_A^2 = Q_A^2/12$, отримаємо ймовірнісні оцінки (математичне сподівання та дисперсію) вихідного шуму $e_{A,вых}(n)$, обумовленого квантуванням вхідного сигналу:

$$\mu_{A,вых} = E[e_{A,вых}] = E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)E[e_A(n-m)] = 0;$$

$$\begin{aligned}\sigma_{A.шум}^2 &= E[(e_{A.шум}(n) - \mu_{A.шум})^2] = E[e_{A.шум}^2(n)] = E\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m)\right)^2\right] = \\ &= E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)e_A^2(n-m)\right] + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(m)h(k)E[e_A(n-m)e_A(n-k)] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)E[e_A^2(n-m)] = \frac{Q_A^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m).\end{aligned}$$

Потужність вихідного шуму визначається наступним чином:

$$P_{A.шум} = 10 \lg(\sigma_{A.шум}^2) = 10 \lg(\sigma_A^2) + 10 \lg\left(\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)\right);$$

Детермінована оцінка (абсолютна межа) вихідного шуму $e_{A.шум}(n)$ з урахуванням отриманих співвідношень має вигляд:

$$\begin{aligned}E_{A.шум} &= \max_n |e_{A.шум}(n)| = \\ &= \max_n \left| \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \max_n |e_A(n-m)| = \\ &= \frac{Q_A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|.\end{aligned}$$

Таким чином, можна зробити висновок, що абсолютна межа помилки квантування вихідного сигналу залежить від імпульсної характеристики системи та не залежить від статичних характеристик вхідного сигналу.

1.5.3. Ефекти квантування в цифрових системах

Для спрощення аналізу ефектів квантування в цифрових системах припускається, що помилки в вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, та помилки, викликані квантуванням результатів арифметичних операцій в цифровій системі, не залежать одна від одної.

Враховуючи припущення, можна розглядати вказані складові вихідного шуму незалежно одне від одного. Відокремлений розгляд є корисним також для того, щоб оцінити вклад в повний вихідний шум кожної складової.

1.5.3.1. Власний шум цифрової системи. Власний шум цифрової системи – це вихідний шум квантування, зумовлений округленням результатів множення.

Аналіз власних шумів в цифровій системі набагато складніше, ніж аналіз ефектів квантування вхідного сигналу. Річ у тім, що при аналізі власних шумів необхідно знати:

- точки системи, в яких виконуються операції квантування;
- оцінки (математичне сподівання, дисперсію, абсолютну межу) шумових сигналів, які генеруються власними джерелами;
- структуру системи (шлях, який проходить кожний шумовий сигнал від свого джерела шуму до виходу системи);
- архітектуру та параметри цифрового пристрою.

Власний шум та його оцінки знаходяться в три етапи:

- 1) Складається модель цифрової системи, яка враховує шуми квантування в тих точках системи, в яких виконується операція квантування.
- 2) Знаходяться реакції системи на кожний шумовий сигнал (складові власного шуму).
- 3) На основі отриманих складових формується власний шум цифрової системи, знаходяться його ймовірності та детерміновані оцінки.

1.5.3.2. Лінійна модель цифрової системи. Основними джерелами шуму квантування в цифрових системах є помножувачі.

Дійсно операція множення значення послідовності $x(n)$ з b_y значущими розрядами на коефіцієнт a з тією ж розрядністю дає значення $ax(n)$, яке має точне значення з $2b_y$ значущими розрядами. Проте розрахункове значення повинно бути представлене послідовністю значень з b_y значущими розрядами (округлене або урізане). Таким чином при формування результатів з'являються помилки квантування, викликані скороченням кількості розрядів.

Лінійна модель помножувача показана на рисунку 1.8. Модель помножувача с кінцевим числом розрядів представлена в вигляді послідовного з'єднання ідеального помножувача та суматора, на вхід

якого подається помилка квантування $e_y(n)$. На виході моделі формується послідовність квантованих значень розрахунку з b_y значущими розрядами.

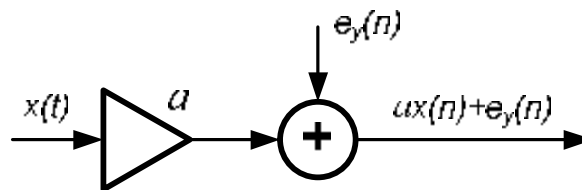


Рисунок 1.21 – Лінійна модель помножувача

Вважається, що припущення про властивості помилок квантування, викладені в п. 1.5.14, діють і у випадку шумового сигналу $e_y(n)$. Тоді, при використанні округлення, маємо наступні характеристики шуму квантування на виході помножувача:

- математичне сподівання: $\mu_y = 0$;
- дисперсія: $\sigma_y^2 = Q_y^2 / 12$, де $Q_y = 2^{-b_y}$ – крок квантування;
- абсолютна межа: $E_y = \max_n |e_y(n)| \leq Q_y / 2 = 2^{-b_y - 1}$.

1.5.3.3. Знаходження власного шуму. Складові власного шуму – це реакція цифрової системи на шумові сигнали від кожного джерела шуму. На основі властивості лінійної цифрової системи помилка квантування на виході системи (власний шум) знаходиться, як суперпозиція помилок $e_{y_i, \text{вих}}(n)$, $i=1, 2, \dots, L$, зумовлених всіма L джерелами квантування, тобто:

$$e_{y, \text{вих}}(n) = \sum_{i=1}^L e_{y_i, \text{вих}}(n).$$

При цьому i -та складові вихідного сигналу помилки (власного шуму) $e_{y_i, \text{вих}}(n)$, викликана i -им джерелом шуму, знаходиться за допомогою імпульсної характеристики $h_i(m)$ частини системи від точки прикладення i -го джерела шуму до виходу системи по формулі згортки:

$$e_{y_i, \text{вих}}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} h_i(m) e_{y_i}(n-m).$$

Відповідно до цього виразу, власний шум системи розраховується як сума (суперпозиція) всіх шумових складових, отриманих в результаті аналізу проходження шумів квантування від точок їх появи до виходу цифрової системи.

Ймовірні та детерміновані оцінки власного шуму системи визначаються наступним чином:

- математичне сподівання $\mu_{y_{i.вих}} = \sum_{i=1}^L \mu_{y_{i.вих}} = 0$;
- дисперсія $\sigma^2_{y_{i.вих}} = \sum_{i=1}^L \sigma^2_{y_{i.вих}} = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} h_i^2(m)$;
- абсолютна межа: $E_{y_{i.вих}} = \sum_{i=1}^L E_{y_{i.вих}} \leq \frac{Q_y}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)|$.

Слід відзначити, що чим більше помножувачів містить цифрова система, тим більший її власний шум. Таким чином, власний шум системи залежить від форми реалізації системи. На практиці доцільно використовувати таку форму реалізації, яка б генерувала менший власний шум, тобто містила в собі меншу кількість помножувачів.

1.5.4. Загальний вихідний шум системи

Помилки у вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, та помилки, зумовлені квантуванням результатів арифметичних операцій в цифровій системі, не залежать одна від одної. На основі цього припущення повний вихідний шум системи, зумовлений квантуванням вхідного сигналу та квантуванням результатів арифметичних операцій помножувача, знаходиться як сума відповідних помилок:

$$e_{вих}(n) = e_{A.вих}(n) + e_{Y.вих}(n),$$

де $e_{вих}(n)$ – повний вихідний шум системи;

$e_{A.вих}(n)$ – шум квантування вхідного сигналу (шум АЦП), приведений до виходу системи;

$e_{Y.вих}(n)$ – власний шум системи.

Шумові сигнали, зумовлені квантуванням в певній точці системи, являються стаціонарними випадковими процесами типу «білий шум»,

вони некорельовані з квантованим сигналом, а будь-які два джерела шуму утворюють некорельовані шуми. Тоді з урахуванням лінійності моделі системи отримаємо оцінки повного вихідного шуму системи:

- математичне сподівання $\mu_{вих} = \mu_{A.вих} + \mu_{Y.вих}$,

де $\mu_{A.вих}$ – математичне сподівання шуму АЦП;

$\mu_{Y.вих}$ – математичне сподівання власного шуму системи;

- дисперсія $\sigma^2_{вих} = \sigma^2_{A.вих} + \sigma^2_{Y.вих}$

де $\sigma^2_{A.вих}$ – дисперсія шуму АЦП;

$\sigma^2_{Y.вих}$ – дисперсія власного шуму системи;

- абсолютна межа $E_{вих} = \max_n |\epsilon_{вих}(n)| = E_{A.вих} + E_{Y.вих}$.

1.5.5. Ефекти переповнення в суматорах

Вище були розглянуті ефекти квантування цифрових сигналів в цифрових системах та отримані оцінки дисперсії (потужності) повного вихідного шуму та її складових: $\sigma^2_{A.вих}$ – дисперсії шуму АЦП та $\sigma^2_{Y.вих}$ – дисперсії власного шуму системи. Таким чином, корисний сигнал на виході системи присутній на фоні шумів. Опишемо шумові характеристики системи, а також методи масштабування сигналів, які дозволяють покращити вказані характеристики та завадити появі ефектів переповнення в суматорах системи.

1.5.5.1. Динамічний діапазон цифрової системи. Важливою характеристикою цифрової системи виступає відношення сигнал/шум. Відношенням сигнал/шум R називається відношення потужності $P_{с.вих}$ вихідного сигналу системи до потужності $P_{ш.вих}$ шуму квантування на виході системи

$$R = 10 \lg \left(\frac{P_{с.вих}}{P_{ш.вих}} \right).$$

Пороговим відношенням сигнал/шум R_n називається відношення мінімальної потужності вихідного сигналу системи до потужності шуму на виході системи:

$$R_n = 10 \lg \left(\frac{P_{с.min.вих}}{P_{ш.вих}} \right);$$

Мінімальна потужність вихідного сигналу має місце при мінімальному рівні a_{min} вхідного сигналу.

Динамічним діапазоном D цифрової системи називається відношення максимальної амплітуди $a_{D.max}$ до мінімальної амплітуди $a_{D.min}$ вхідного сигналу, при якій забезпечується певне відношення R_D сигнал/шум на виході системи:

$$D = 20 \lg \left(\frac{a_{D.max}}{a_{D.min}} \right);$$

при

$$R_D = 10 \lg \left(\frac{P_{cD.min.шум}}{P_{ш.шум}} \right),$$

де $P_{cD.min.шум}$ – потужність вихідного сигналу на нижній межі динамічного діапазону (при амплітуді вхідного сигналу, рівній $a_{D.min}$).

Динамічний діапазон слід контролювати введенням коефіцієнтів масштабування.

1.5.5.2. Масштабуючі коефіцієнти. При сумуванні чисел з фіксованою точкою помилки квантування не виникає, якщо акумулятор має розрядність не меншу ніж розрядність доданків. Але при сумуванні чисел можливе переповнення, яке означає, що результат арифметичних операцій виходить за межі допустимого діапазона представлення чисел. В цьому випадку результат сумування істотно змінюється. Щоб не допустити цього переповнення в суматорах вводиться масштабування сигналів з використанням коефіцієнтів масштабування. Масштабування сигналів можна виконувати різними способами:

1. Масштабування сигналів з використанням імпульсної характеристики.

Якщо імпульсна характеристика системи рівна $h_i(n)$, то вихідний сигнал системи можна знайти по формулі

$$y_i(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_i(m) x(n-m).$$

2. Масштабування сигналів по максимуму.

Даний спосіб використовується для систем невисокого порядку. Максимальне значення амплітудно-частотної характеристики системи повинне задовольняти вимозі:

$$\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})| > 1.$$

Масштабуванню піддається вхідний сигнал системи. При цьому коефіцієнт масштабування розраховується за формулою:

$$\gamma_i = \frac{1}{\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})|}.$$

1.5.6. Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи

При реалізації цифрової системи значення її коефіцієнтів квантуються, оскільки вони представляють обмежену кількість розрядів. Зміна коефіцієнтів призводить до більшої чи меншої зміни значень нулів чи полюсів системної функції та до зміни частотних характеристик системи.

Важливо підкреслити, що операція квантування коефіцієнтів, нелінійна по своїй природі, не впливає на лінійність самої системи, лише змінює її частотні та часові характеристики. Іншими словами, виконав операцію квантування коефіцієнтів, переходимо від лінійної системи до іншої з характеристиками, які відрізняються від характеристик вихідної системи. Таким чином, квантування призводить до появи помилок АЧХ:

$$\nabla A(\omega) = A(\omega) - \bar{A}(\omega),$$

де $A(\omega) = |H(\epsilon^{j\omega T})|$ – АЧХ системи з неквантованими коефіцієнтами;

$\bar{A}(\omega)$ – АЧХ системи з квантованими коефіцієнтами.

Слід відзначити, що при синтезі необхідно знаходити коефіцієнти системної функції таким чином, щоб не тільки ідеальні частотні та часові характеристики вихідної системи, а й її характеристики з квантованими коефіцієнтами задовольняли заданим вимогам. Для оцінки впливу операцій квантування коефіцієнтів на параметри системи використовуються функції чутливості. Функція чутливості виступає в ролі коефіцієнта пропорційності в співвідношенні, зв'язуючи відносні зміни величини k -го коефіцієнта з відносною зміною певного параметра системи.

1.5.7. Граничні цикли роботи цифрової системи

При аналізі ефектів квантування, були зроблені певні припущення відносно властивостей моделей помилок квантування, які вносяться в сигнали. По-перше, було прийнято, що відліки шуму квантування не корельовано між собою, а також некорельовані з відліками вхідного сигналу. По-друге, при опрацюванні сигналу в цифровій системі не відбувається переповнення акумулятора. Проте ці інші припущення можуть бути порушеними. В рекурсивних цифрових системах це призводить до появи специфічних ефектів, які отримали назву граничних циклів. Розрізняють 2 види граничних циклів:

- граничні цикли низького рівня, пов'язані з квантуванням відліків сигналу, що обробляється;
- граничні цикли високого рівня, пов'язані з переповненням регістрів суматорів;

Граничними циклами низького рівня називаються постійні або періодичні сигнали, які можуть виникати в рекурсивних системах при відсутності дії та нульових початкових умовах в системі. Поява цих сигналів зумовлена помилками округлення при квантуванні сигналів на виходах помножувачів.

Граничними циклами високого рівня можуть виникати в рекурсивних системах, якщо при складанні відліків сигналів в акумуляторі відбувається переповнення. В цьому випадку система набуває суттєвої нелінійності, у вихідному сигналі з'являються значні помилки, тобто система фактично є недієздатною. В більшості випадків при переповненні акумулятора вихідний сигнал системи приймає вид періодичного коливання з граничними значеннями амплітуди, рівному одиниці. Часто граничні цикли високого рівня називають «коливанням переповнення». В зв'язку з цим необхідно приймати спеціальні заходи для усунення переповнення регістрів суматорів, пов'язані з масштабування сигналів.

Розділ 2

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

Лабораторна робота №1

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ АНАЛОГОВИХ, ДИСКРЕТНИХ І ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ ТА ЇХ СПЕКТРІВ

Мета роботи:

- Провести дослідження та порівняльний аналіз властивостей аналогових, дискретних та цифрових форм представлення сигналів.
- Дослідити явища, що виникають при дискретизації і квантуванні сигналів, а також при відновленні сигналів на основі теореми Котельнікова.
- Дослідити зв'язок між часовим і спектральним представленням різних форм сигналів.

Підготовка до виконання роботи

1. Закріпити теоретичні знання, опрацювавши матеріал за питаннями: принципи аналогового, дискретного та цифрового представлення сигналів; теорема Котельнікова; взаємозв'язок між спектрами аналогових і цифрових сигналів, дискретне перетворення Фур'є (підрозділи 1.1 та 1.2).
2. Ознайомитися з Додатком А, де наведено приклад програми, що реалізує комп'ютерне моделювання типової процедури виконання завдань до лабораторної роботи №1 в середовищі пакету Mathcad.

Порядок виконання роботи

1. Включити комп'ютер, запустити програму Mathcad.
2. Використовуючи мову програмування та засоби візуалізації Mathcad у відповідності з отриманим завданням, виконати:
 - 2.1. Побудову аналогового (неперервного) сигналу та його дискретної та квантованої форми при різних значеннях кількості дискретних відліків N (періоду дискретизації) та кількості рівнів квантування L .

- 2.2. Відновлення неперервної форми сигналу по відлікам дискретизованого і квантованого сигналів на основі рядів Котельнікова та оцінити величину похибок відновлення.
- 2.3. Обчислити спектри аналогового і дискретного сигналів та здійснити дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) дискретної та квантованої послідовностей, побудувати графіки амплітудних складових спектрів та ДПФ.
3. Проаналізувати отримані результати:
- 3.1. Різницю між аналоговою, дискретною та цифровою формами представлення сигналів.
- 3.2. Залежність якості відновлення неперервного сигналу з послідовностей від частоти (періоду) дискретизації та кількості рівнів квантування.
- 3.3. Взаємозв'язок між спектрами аналогових і дискретних сигналів та дискретним перетворенням Фур'є.
- 3.4. Динаміку зміни часового та спектрального представлення дискретного та відновленого неперервного сигналів в залежності від ступеня виконання умов теореми Котельнікова.
4. Зробити висновки.

Вихідні дані

№	Сигнал $y_a(t)$	Тривал. сигналу t	К-сть відліків N	К-сть рівнів L
1	$\begin{cases} 1 - \frac{2}{\tau} \left t - \frac{\tau}{2} \right , & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{при іншому } t \end{cases}$	1	5; 12	7; 13
2	$\begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \left[\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{при іншому } t \end{cases}$	2	4; 11	6; 14
3	$\begin{cases} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\}^2, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{при іншому } t \end{cases}$	3	4; 13	7; 12
4	$\begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos \left[\frac{2\pi}{\tau} t \right] + 0.08 \cos \left[\frac{4\pi}{\tau} t \right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{при іншому } t \end{cases}$	4	4; 10	6; 15
5	$\begin{cases} \exp \left[-\frac{5}{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]^2, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{при іншому } t \end{cases}$	5	5; 13	5; 13

Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Короткі теоретичні відомості і розрахункові формули.
3. Вихідні дані для виконання роботи (відповідно до отриманого варіанта).
4. Графічні результати виконання роботи (часове представлення різних форм сигналів, відновлення сигналів та їх похибки, амплітудні спектри сигналів та ДПФ), отримані при різних вихідних даних.
5. Контрольні питання
6. Висновки.

Контрольні питання

1. Назвіть основні форми представлення сигналів та дайте їм коротку характеристику.
2. Які перетворення мають місце в системах цифрової обробки сигналів?
3. Що означає термін «дискретизація у часі»?
4. Із яких умов вибирається частота (період) дискретизації аналогових сигналів?
5. Що означає термін «квантування за рівнем»?
6. Як залежить величина похибки квантування від кількості рівнів квантування?
7. Як здійснюється відновлення сигналів по дискретним послідовностям?
8. Від чого залежить точність відновлення сигналів?
9. В чому полягає взаємозв'язок між спектрами аналогових і дискретних сигналів?
10. Назвіть основні властивості спектрів дискретних сигналів?
11. Що таке ДПФ?
12. Поясніть різницю між перетворенням Фур'є дискретних сигналів і дискретним перетворенням Фур'є.

Лабораторна робота №2

МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Мета роботи:

- Провести дослідження часових та частотних характеристик лінійних дискретних систем (нерекурсивних та рекурсивних дискретних фільтрів).
- Здійснити в середовищі Mathcad моделювання реакції лінійних дискретних систем на вхідні сигнали.

Підготовка до виконання роботи

1. Закріпити теоретичні знання, опрацювавши матеріал за питаннями: алгоритми лінійних дискретних систем, Z -перетворення, дискретна згортка, нерекурсивні та рекурсивні фільтри та їх характеристики (підрозділи 1.2-1.4).
2. Ознайомитися з Додатком А, де наведено приклад програми, що реалізує комп'ютерне моделювання процедури виконання завдань до лабораторної роботи №2 в середовищі пакету Mathcad.

Порядок виконання роботи

1. Включити комп'ютер, запустити програму Mathcad.
2. Використовуючи мову програмування та засоби візуалізації Mathcad у відповідності з отриманим завданням, виконати:
 - 2.1. Побудову часової (імпульсної) та частотних (амплітудної і фазової) характеристик нерекурсивного фільтра при різних значеннях порядку фільтра N .
 - 2.2. Розрахунок за допомогою дискретної згортки реакції нерекурсивного фільтра на заданий вхідний вплив та побудову графіків вхідних і вихідних сигналів.
 - 2.3. Розрахунок системної функції та обчислення на основі її зворотнього Z -перетворення імпульсної характеристики рекурсивного фільтра.
 - 2.4. Побудову частотних (амплітудної і фазової) характеристик рекурсивного фільтра.
 - 2.5. Моделювання реакції рекурсивного фільтра на вхідний сигнал із застосуванням апарату Z -перетворення.

3. Проаналізувати отримані результати:

3.1. Способи представлення та описи алгоритмів дискретних фільтрів з нерекурсивною та рекурсивною структурою.

3.2. Особливості визначення та розрахунку імпульсних характеристик нерекурсивних та рекурсивних фільтрів.

3.3. Схожість та відмінність між відповідними частотними характеристики нерекурсивних та рекурсивних фільтрів.

3.4. Особливості обчислення реакції дискретних фільтрів в залежності від наявності чи відсутності зворотного зв'язку.

4. Зробити висновки.

Вихідні дані

до частини «Нерекурсивні фільтри»

№	Імпульсна хар-ка $h(nT)$	Тривалість імпульсної хар-ки t	Параметр імпульсної хар-ки b	Порядок фільтра N	Вхідний сигнал $x(nT)$	Параметр вхідного сигналу a
1	$e^{-\left(\beta \frac{nT-\tau/2}{\tau}\right)^2}$	1	2	5; 15	$nT\alpha^{-nT}$	3.5
2		2	2.5	4; 13		3
3		3	3	6; 19		2.5
4		4	3.5	4; 11		2
5		5	4	5; 17		1.5

до частини «Рекурсивні фільтри»

№	Системна функція $H(z)$	Коефіцієнти a_m	Коефіцієнти b_k	Період д-ції T	Вхідний сигнал $x(nT)$	Параметр вхідного сигналу a
1	$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=0}^{M-1} a_m z^{-m}}$ $N = 3; M = 3$	[1; -0.3; -0.5]	[0.5; -1; 1]	1	$nT\alpha^{-nT}$	3.5
2		[1; -0.4; -0.8]	[0.7; -2; 1]			3
3		[1; -0.2; -0.7]	[0.8; -1; 2]			2.5
4		[1; -0.1; -0.9]	[0.4; -3; 2]			2
5		[1; -0.5; -0.4]	[0.2; -2; 2]			1.5

Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Короткі теоретичні відомості і розрахункові формули.
3. Вихідні дані для виконання роботи (відповідно до отриманого варіанта).
4. Графічні результати виконання роботи (часові та частотні характеристики, вхідні та вихідні сигнали дискретних фільтрів), отримані при різних вихідних даних.
5. Контрольні питання.
6. Висновки.

Контрольні питання

1. Що таке лінійна дискретна система?
2. Які основні операції реалізуються в дискретній системі?
3. Що означає термін «нерекурсивний фільтр»?
4. Що означає термін «рекурсивний фільтр»?
5. Що таке імпульсна характеристика?
6. Що таке системна (передатна) функція?
7. Як пов'язані імпульсна характеристика і системна функція дискретного фільтра?
8. Як пов'язані частотна характеристика і системна функція дискретного фільтра?
9. Опишіть механізм розрахунку реакції нерекурсивного фільтра на довільний вхідний вплив.
10. Як розрахувати вихідний сигнал рекурсивного фільтра при відомому вхідному сигналі?

Лабораторна робота №3

СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ЦИФРОВИХ FIR-ФІЛЬТРІВ

Мета роботи:

- Ознайомитися з особливостями роботи пакета прикладних програм MATLAB та його спеціалізованого модуля FDATool.
- Опанувати методологію проектування цифрових фільтрів із кінцевою імпульсною характеристикою (FIR-фільтрів).
- Провести синтез цифрових FIR-фільтрів та проаналізувати їх основні характеристики за допомогою модуля FDATool програмного пакета MATLAB.

Підготовка до виконання роботи

1. Закріпити теоретичні знання, опрацювавши матеріал щодо призначення цифрової фільтрації, структури та основних характеристик цифрових FIR-фільтрів (підрозділ 1.3).
2. Розібратися з основними підходами до проектування цифрових фільтрів та опанувати методику синтезу FIR-фільтрів, що базується на розкладі в ряд Фур'є частотної характеристики із застосуванням вагових вікон (підрозділ 1.4).
3. Ознайомитися з принципами роботи програмного пакета MATLAB (підрозділи Б.1 та Б.2 Додатку Б) та освоїти основні функціональні можливості його модуля Filter Design & Analysis Tool (FDATool) (підрозділ Б.3.1 Додатку Б).

Порядок виконання роботи

1. Включити комп'ютер, запустити програму MATLAB та викликати графічне середовище FDATool.
2. Використовуючи закладку *Design Filter* середовища FDATool, необхідно по вихідним даним (вимогам до частотних характеристик, типу цифрового фільтра і методу розрахунку) виконати:
 - 2.1. синтез цифрового FIR-фільтру методом вагового вікна, тобто розрахувати коефіцієнти його системної (передатної) функції;
 - 2.2. аналіз цифрового фільтру, для чого отримати графічні залежності наступних характеристик:
 - 2.2.1. амплітудно-частотну і фазочастотні характеристики;
 - 2.2.2. імпульсну характеристику.

3. Використовуючи закладку *Realize Model* середовища FDATool, реалізувати синтезований фільтр у форматі блоку програмного модуля Simulink. Отримати і проаналізувати структурну схему синтезованого фільтра.
4. Повторити дослідження з пунктів 2 і 3 для різних вихідних даних (вигляду частотної характеристики та порядку фільтрів, типу вагових вікон та ін.).
5. Проаналізувати отримані результати:
 - 5.1. Залежність точності апроксимації частотної характеристики (зменшення нелінійності і ширини перехідної смуги АЧХ) від типу вагового вікна.
 - 5.2. Відношення динаміки покращення частотних характеристик (зменшення нелінійності і ширини перехідної смуги АЧХ) цифрового фільтра до зростання складності його апаратної реалізації при збільшенні порядку фільтра N .
6. Зробити висновки.

Вихідні дані

Завдання 1

№	Вид характеристики				
	Порядок фільтра N	Частота д-ції F_s , кГц	Тип частотної х-ки	Гранична частота F_c , кГц	Вид вагового вікна
1	5, 19	48	ФНЧ Lowpass	8	Прямокутне Rectangular
					Хемінга Hamming
2	6, 21		ФВЧ Highpass	10	Прямокутне Rectangular
					Блекмана Blackman
3	7, 25		ФНЧ Lowpass	12	Прямокутне Rectangular
					Гауса Gauss
4	5, 17		ФВЧ Highpass	14	Прямокутне Rectangular
					Ганна Hann
5	6, 23		ФНЧ Lowpass	16	Прямокутне Rectangular
					Кайзера Kaiser

Завдання 2

№	Вид характеристики					
	Порядок фільтра N	Частота д-ції F_s , кГц	Вид частотної х-ки	Частота F_1 , кГц	Частота F_2 , кГц	Вид вагового вікна
1	10, 28	48	СФ Bandpass	8.5	13.7	Прямокут. Rectangular Гауса Gauss
2	11, 29		РФ Bandstop	9.1	14.4	Прямокут. Rectangular Ганна Hann
3	12, 31		СФ Bandpass	7.6	12.9	Прямокут. Rectangular Хемінга Hamming
4	13, 35		РФ Bandstop	8.1	14.2	Прямокут. Rectangular Кайзера Kaiser
5	11, 30		СФ Bandpass	9.9	15.3	Прямокут. Rectangular Блекмана Blackman

Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Вихідні дані для проектування цифрових нерекурсивних фільтрів.
4. Графічні залежності амплітудно-частотних і фазочастотні характеристик, імпульсної характеристики досліджуваних цифрових FIR-фільтрів, вигляд вагових вікон.
5. Структурні схеми цифрових FIR-фільтрів.
6. Контрольні питання.
7. Висновки.

Контрольні питання

1. Яку функцію виконують частотні цифрові фільтри?
2. Чому нерекурсивні фільтри є фільтрами зі скінченою імпульсною характеристикою (FIR-фільтрами)?
3. Які переваги та недоліки мають FIR-фільтри у порівнянні з ІІР-фільтрами?
4. Що таке ефект Гіббса?
5. З якою метою застосовують вагові вікна?
6. Якими є критерії побудови вагових функцій і чому?
7. Як впливає застосування вагових вікон на частотні характеристики ЦФ?
8. Як впливає порядок фільтру на частотні характеристики ЦФ та складність його структури.

Лабораторна робота №4

СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ЦИФРОВИХ ІІР-ФІЛЬТРІВ

Мета роботи:

- Опанувати методологію проектування цифрових фільтрів з безкінечною імпульсною характеристикою (ІІР-фільтрів).
- Провести синтез цифрових ІІР-фільтрів та проаналізувати їх основні характеристики за допомогою модуля `FDATool` програмного пакета `MATLAB`.
- Провести аналіз можливих форм представлення структур цифрових ІІР-фільтрів за допомогою модуля `Simulink` програмного пакета `MATLAB`.

Підготовка до виконання роботи

1. Закріпити теоретичні знання, додатково опрацювавши матеріал щодо призначення цифрової фільтрації, структури та основних характеристик цифрових ІІР-фільтрів (підрозділ 1.3).
2. Розібратися з основними підходами до проектування цифрових фільтрів та опанувати методику синтезу ІІР-фільтрів, що базується на використанні аналогових фільтрів-прототипів, зокрема з методом білінійного перетворення (підрозділ 1.4).

Порядок виконання роботи

1. Включити комп'ютер, запустити програму `MATLAB` та викликати графічне середовище `FDATool`.
2. Використовуючи закладку *Design Filter* середовища `FDATool`, необхідно по вихідним даним (вимогам до частотних характеристик, типу цифрового фільтра і методу розрахунку) виконати:
 - 2.1. синтез цифрового ІІР-фільтру методом білінійного перетворення тобто розрахувати коефіцієнти його системної (передатної) функції;
 - 2.2. аналіз цифрового фільтру, для чого отримати графічні залежності наступних характеристик:
 - 2.2.1. амплітудно-частотну і фазочастотні характеристики;
 - 2.2.2. імпульсну характеристику;
 - 2.2.3. розташування нулів і полюсів у Z -площині.

3. Використовуючи закладку *Realize Model* середовища *FDATool*, реалізувати синтезований фільтр у форматі блоку програмного модуля *Simulink*. Отримати (відповідно до завдання) і проаналізувати можливі форми представлення структурних схем синтезованого фільтра.
4. Повторити дослідження з пунктів 2 і 3 для різних вихідних даних (вигляду частотної характеристики, порядку фільтрів, форми представлення структури та ін.).
5. Проаналізувати отримані результати:
 - 5.1. залежність точності апроксимації частотної характеристики (зменшення нелінійності і ширини перехідної смуги АЧХ) від типу аналогового фільтра-прототипу.
 - 5.2. відношення динаміки покращення частотних характеристик (зменшення нелінійності і ширини перехідної смуги АЧХ) цифрового фільтру до зростання складності його апаратної реалізації при збільшенні порядку фільтра N .
 - 5.3. залежність складності схемної реалізації рекурсивних фільтрів від форми представлення їх структури.
6. Зробити висновки.

Вихідні дані

Завдання 1

№	Вид характеристики					
	Порядок фільтра N	Частота д-ції F_s , кГц	Вид частотної х-ки	Частота F_1 , кГц	Частота F_2 , кГц	Тип фільтру-прототипу
1	4, 10	48	СФ Bandpass	8.5	13.7	Еліптичного Eliptic
						Баттерворта Butterworht
2	5, 11		РФ Bandstop	9.1	14.4	Чебишева I типу Chebyshev Tipe I
						Чебишева II типу Chebyshev Tipe II
3	5, 12		СФ Bandpass	7.6	12.9	Чебишева I типу Chebyshev Tipe I
						Еліптичного Eliptic
4	5, 13	РФ Bandstop	8.1	14.2	Баттерворта Butterworht	
					Чебишева II типу Chebyshev Tipe II	

5	5, 11		СФ Bandpass	9.9	15.3	Еліптичного Eliptic Чебишева II типу Chebyshev Type II
---	-------	--	----------------	-----	------	--

Завдання 2

№	Вид характеристики					
	Порядок фільтра N	Частота д-ції F_s , кГц	Тип частотної х-ки	Гранич. частота F_c , кГц	Тип фільтру-прототипу	Форма представлення структури
1			ФНЧ Lowpass	8	Баттерворта Butterworht	Пряма Direct form I
						Канонічна Direct form II
						Канонічна каскадна Direct form II Second order section
2			ФНЧ Lowpass	10	Чебишева I типу Chebyshev Type I	Пряма Direct form I
						Канонічна Direct form II
						Пряма каскадна Direct form I Second order section
3	6	48	ФВЧ Highpass	12	Чебишева II типу Chebyshev Type II	Пряма Direct form I
						Канонічна Direct form II
						Пряма каскадна Direct form I Second order section
4			ФНЧ Lowpass	14	Еліптичн. Eliptic	Пряма Direct form I
						Канонічна Direct form II
						Канонічна каскадна Direct form II Second order section
5			ФВЧ Highpass	16	Баттерворта Butterworht	Пряма Direct form I
						Канонічна Direct form II
						Пряма каскадна Direct form I Second order section

Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Вихідні дані для проектування цифрових ІІР-фільтрів.
4. Графічні залежності амплітудно-частотних і фазочастотні характеристик, імпульсної характеристики, розташування нулів і полюсів у Z -площині досліджуваних цифрових ІІР-фільтрів.
5. Структурні схеми цифрових ІІР-фільтрів.
6. Контрольні питання.
7. Висновки

Контрольні питання

1. Чому ІІР-фільтри можуть бути реалізованими лише за рекурсивною схемою?
2. Назвіть основні методики побудови рекурсивних фільтрів?
3. Назвіть основні етапи побудови рекурсивних фільтрів із застосуванням аналогових фільтрів-прототипів?
4. В чому полягає метод білінійного перетворення?
5. Як співвідносяться між собою частоти аналогових та цифрових фільтрів, побудованих на основі білінійного перетворення?
6. Назвіть основні типи аналогових фільтрів-прототипів та охарактеризуйте їх властивості?
7. Які переваги та недоліки мають FIR-фільтри у порівнянні с ІІР-фільтрами?
8. Як впливає порядок фільтру на властивості його часових та частотних характеристик?
9. Назвіть основні форми представлення структури цифрового фільтру та охарактеризуйте кожну з них.
10. Як впливає форма представлення структури цифрового фільтру на складність його апаратної реалізації?

Лабораторна робота №5
ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТІВ КВАНТУВАННЯ
В ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРАХ

Мета роботи:

- Опанувати методологію дослідження впливу ефектів квантування на характеристики цифрових фільтрів.
- Провести синтез цифрових фільтрів із врахуванням кінцевої розрядності представлення даних та проаналізувати основні характеристики квантованих цифрових фільтрів за допомогою модуля FDATool програмного пакета MATLAB.

Підготовка до виконання роботи

1. Закріпити теоретичні знання, опрацювавши матеріал щодо причин, які породжують виникнення шумів квантування при цифровому опрацюванні сигналів та вплив ефектів квантування на функціонування і характеристики цифрових фільтрів (підрозділ 1.5).
2. Ознайомитися з форматами представлення та кодування чисел, що застосовуються у функціях бібліотеки Filter Design пакету MATLAB (підрозділ Б.3.2 Додатку Б).
3. Опанувати методологію синтезу цифрових фільтрів із квантуванням їх параметрів за допомогою модуля Filter Design & Analysis Tool (FDATool) (підрозділ Б.3.3 Додатку Б).

Порядок виконання роботи

1. Включити комп'ютер, запустити програму MATLAB та викликати графічне середовище FDATool.
2. Використовуючи закладку *Design Filter* середовища FDATool, необхідно у відповідності з вимогами до частотних характеристик, типу і методу розрахунку цифрового фільтра (відповідно до варіанту завдання 1) виконати:
 - 2.1. Синтез цифрового фільтру з використанням односекційної форми реалізації його структури та без врахування квантування його параметрів.
 - 2.2. Аналіз характеристик цифрового фільтру, для чого отримати графічні залежності:

- 2.2.1. амплітудно-частотної характеристики;
- 2.2.2. розташування нулів і полюсів у Z -площині.
- 2.3. Зберегти результати роботи поточної сесії проектування на диску.
- 3. Використовуючи закладку *Set Quantization Parameters* середовища FDATool, встановити (відповідно до завдання 2) параметри квантування для синтезованого фільтра.
 - 3.1. Отримати та проаналізувати результати синтезу:
 - 3.1.1. амплітудно-частотні характеристики;
 - 3.1.2. розташування нулів і полюсів у Z -площині;
 - 3.1.3. коефіцієнти системної функції фільтра.
 - 3.2. Використовуючи меню *Optimization...*, здійснити масштабування коефіцієнтів системної функції фільтра (за абсолютним значенням ≤ 1 та рівні ступені 2) та знову отримати результати синтезу, аналогічні підпункту 3.1.
 - 3.3. Використовуючи функцію аналізу *Noise Loading Method*, отримати шляхом моделювання методом Монте-Карло оцінку частотних характеристик фільтра з урахуванням всіх ефектів квантування для різних форм реалізації структури фільтра (відповідно до завдання 1).
- 4. Використовуючи раніше збережені на диску результати виконання пункту 2, повторити дослідження з пункту 3, конвертуючи форму реалізації структури фільтра із односекційної в каскадну.
- 5. Використовуючи раніше збережені на диску результати виконання пункту 2, повторити дослідження з пунктів 3 та 4, змінивши параметри квантування (збільшивши розрядність відповідно до завдання 2) для синтезованого фільтра.
- 6. Проаналізувати залежності від параметрів квантування та форми представлення структурної схеми отриманих результатів досліджень:
 - 6.1. точності апроксимації амплітудно-частотної характеристики цифрових фільтрів;
 - 6.2. стабільності (стійкості) цифрових фільтрів;
 - 6.3. оцінок частотних характеристик фільтра, отриманих шляхом моделювання методом Монте-Карло.
- 7. Зробити висновки.

Вихідні дані

Завдання 1

Характеристика/ параметр	Номер варіанту				
	1	2	3	4	5
Вид АЧХ	СФ Bandpass				
Частота дискретизації F_s , кГц	48				
Тип фільтру-прототипу	Еліптичн. Eliptic	Баттервор. Butterworth	Чубиш. I Chebysh. I	Чубиш. II Chebysh. II	Еліптичн. Eliptic
Частота смуги затримки 1 F_{stop1} , кГц	6	4	5	4	10
Подавлення у смугі затримки 1 A_{stop1} , дБ	60				
Частота смуги пропускання 1 F_{pass1} , кГц	9	8	10	9	14
Нерівномірність у смугі пропускання A_{pass} , дБ	2	3	1	2	3
Частота смуги пропускання 2 F_{pass2} , кГц	12	12	15	12	18
Частота смуги затримки 2 F_{stop2} , кГц	15	16	20	17	22
Подавлення у смугі затримки 2 A_{stop2} , дБ	60				
Форма представлення структури	Пряма трансп. Direct form I transpos.	Пряма Direct form I	Пряма трансп. Direct form I transpos.	Пряма Direct form I	Пряма Direct form I
	Канонічна Direct form II	Канонічна трансп. Direct form IItranspos.	Канонічна трансп. Direct form IItranspos.	Канонічна Direct form II	Канонічна Direct form II

Завдання 2

Параметри, що квантуються	Тип представлення Mode	Тип округлення Round mode	Тип переповнення Overflow mode	Формат чисел Format	
Коефіцієнти /Coefficient	fixed	round	saturate	[8 7]	[16 15]
Вхідні сигнали/Input	fixed	floor	saturate	[8 7]	[16 15]
Вихідні сигнали/Output	fixed	floor	saturate	[8 7]	[16 15]
Множники/Multiplicand	fixed	floor	saturate	[8 7]	[16 15]
Добутки/Product	fixed	floor	saturate	[16 15]	[32 30]
Суми/Sum	fixed	floor	saturate	[16 15]	[32 30]

Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Вихідні дані для дослідження ефектів квантування.
4. Графічні залежності амплітудно-частотних характеристик, розташування нулів і полюсів у Z -площині, коефіцієнтів системної функції досліджуваних цифрових фільтрів та результати моделювання їх роботи методом Монте-Карло.
5. Контрольні питання.
6. Висновки.

Контрольні питання

1. Назвіть основні джерела, що породжують ефекти квантування при цифровій обробці сигналів.
2. Які способи представлення і формати чисел використовуються у цифрових фільтрах?
3. Якими функціональними можливостями володіє модуль FDATool щодо дослідження ефектів квантування в цифрових фільтрах?
4. Як впливає розрядність представлення коефіцієнтів системної функції фільтра на його амплітудно-частотні характеристики?
5. Як може впливати розрядність представлення коефіцієнтів системної функції фільтра на стабільність його роботи?

6. Як можуть змінюватися характеристики цифрового фільтра при переході від односекційного до каскадного способу реалізації його структури?
7. На що впливає зміна розрядності представлення вхідних і вихідних сигналів цифрового фільтра?
8. На що впливає зміна розрядності операційних блоків (суматорів та помножувачів) в цифровому фільтрі?
9. На чому оснований принцип оцінювання амплітудно-частотних характеристик, що реалізується шляхом моделювання (функція NLM) методом Монте-Карло?
10. Як залежать оцінки амплітудно-частотних характеристик цифрового фільтра, що отримуються шляхом моделювання, від форми реалізації його структурної схеми?

Додаток А

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ В СЕРЕДОВИЩІ МАТНСАД

Лабораторна робота №1 ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ АНАЛОГОВИХ, ДИСКРЕТНИХ, ТА ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ І ЇХ СПЕКТРІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПАКЕТУ МАТНСАД

Аналітичний запис аналогового сигналу, що досліджується

$$y_a(t) := \begin{cases} 0.5 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{t - \frac{1}{2}}{\tau} \right) \right) & \text{if } (t \in [0; \tau]) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Параметри сигналу:
 $\tau = 3$ - тригеліст, сигналу

Дискретизація і квантування сигналу

$N = 9$ - кількість дискретних відліків $L = 8$ - кількість рівнів квантування

$T := \frac{\tau}{N-1}$ - період дискретизації

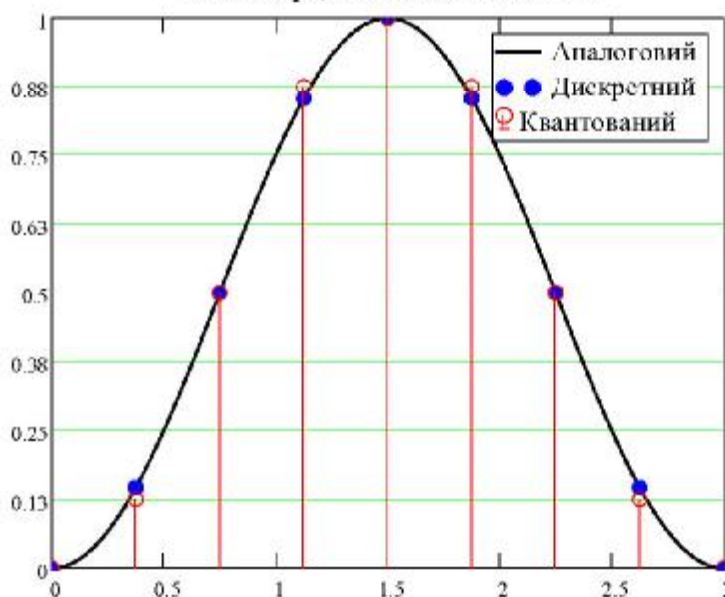
$\omega_d := \frac{2\pi}{T}$ - кругова частота дискретизації

$n := 0..N-1$

$y_d[n] := y_a(n \cdot T)$ - формування вектору відліків дискретного сигналу

$y_k[n] := \frac{1}{L} \cdot \text{Floor}(L \cdot y_a(n \cdot T) + 0.5)$ - формування вектору відліків квантованого (цифрового) сигналу

Часове представлення сигналів



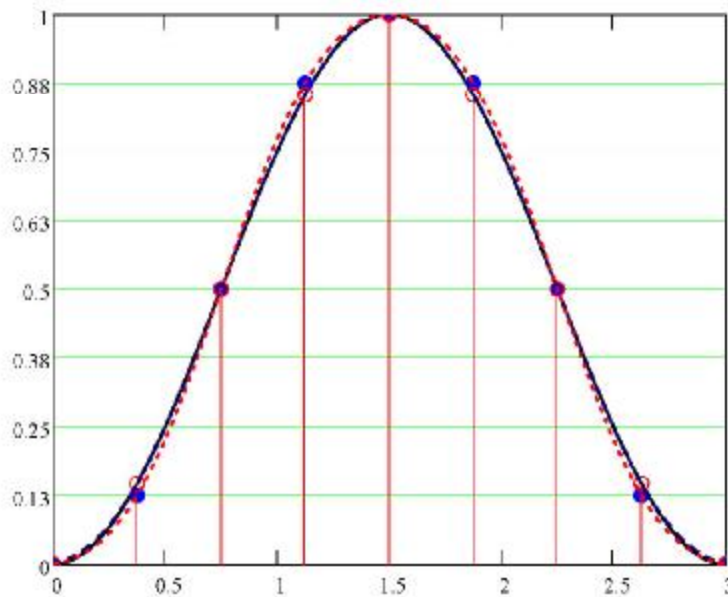
Відновлення неперервної (аналогової) форми сигналу по відлікам (ряди Котельникова)

$\text{sinc}(t) := \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0 \end{cases}$ - функція виду $\sin(x)/x$

$y_{vd}(t) := \sum_n \left[y_{d_n} \cdot \text{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \cdot (t - n \cdot T) \right] \right]$ - відновлення по дискретним відлікам

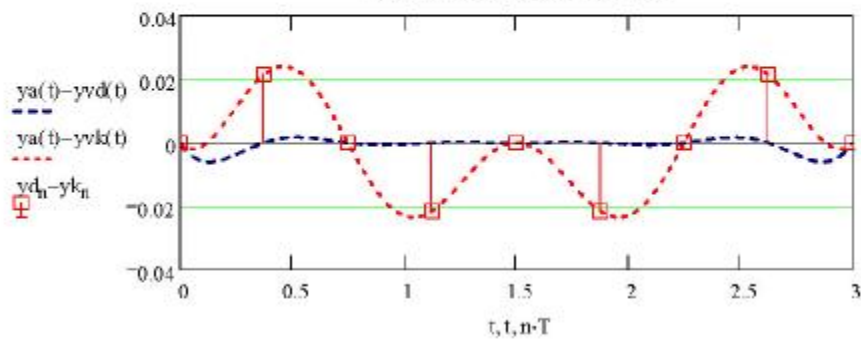
$y_{vk}(t) := \sum_n \left[y_{k_n} \cdot \text{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \cdot (t - n \cdot T) \right] \right]$ - відновлення по квантованим відлікам

Початковий та відновлені сигнали



- Початковий сигнал
- Дискретні відліки
- ⊠ Квантовані відліки
- - - Відновлений по дискретній послідовності
- · · Відновлений по квантованій послідовності

Похибки відновлення



Спектральне представлення аналогових і дискретних сигналів
Дискретне перетворення Фур'є дискретного і квантованого сигналів

$$Y_a(\omega) := \frac{1}{T} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y_a(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt \right) \quad \text{- обчислення спектру аналогового сигналу (пряме інтегральне перетворення Фур'є)}$$

$$Y_d(\omega) := \frac{1}{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(y_d[n] \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot n \cdot T} \right) \right] \quad \text{- обчислення спектру дискретного сигналу (пряме перетворення Фур'є дискретної функції)}$$

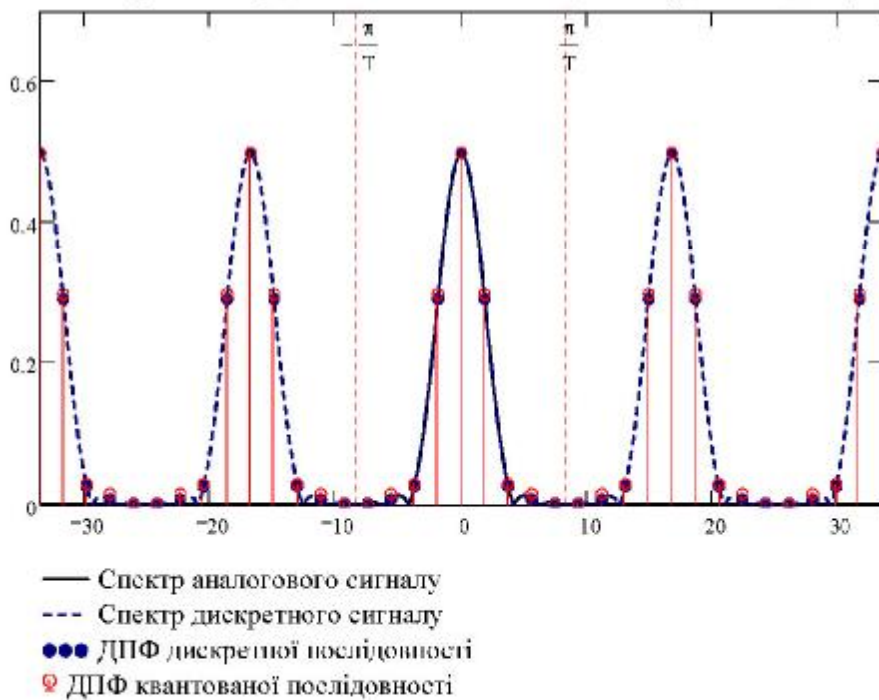
$$k := -3 \cdot (N-1) \dots 3 \cdot (N-1)$$

$$Y_{dd}(k) := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_d[n] \cdot e^{-i \cdot k \cdot n \cdot \frac{Wd}{N}} \right) \quad \text{- обчислення прямого дискретного перетворення Фур'є (ДГФ)}$$

$$Y_{kd}(k) := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_k[n] \cdot e^{-i \cdot k \cdot n \cdot \frac{Wd}{N} \cdot T} \right) \quad \text{- обчислення прямого дискретного перетворення Фур'є (ДПФ)}$$

$$\omega := -2 \cdot Wd, -2 \cdot Wd + \frac{Wd}{100} \dots 2 \cdot Wd$$

Спектральне представлення сигналів (амплітудні складові)



Лабораторна робота №2
МОДЕЛЮВАННЯ НЕРЕКУРСИВНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ
ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПАКЕТУ MATHCAD

Частина 1. Нерекурсивний дискретний фільтр

Часові і частотні характеристики
нерекурсивного дискретного фільтра

$N \equiv 15$ - порядок нерекурсивного дискретного фільтра

$\tau = 6$ - тривалість імпульсної характеристики

$T := \frac{\tau}{N-1}$ - період дискретизації

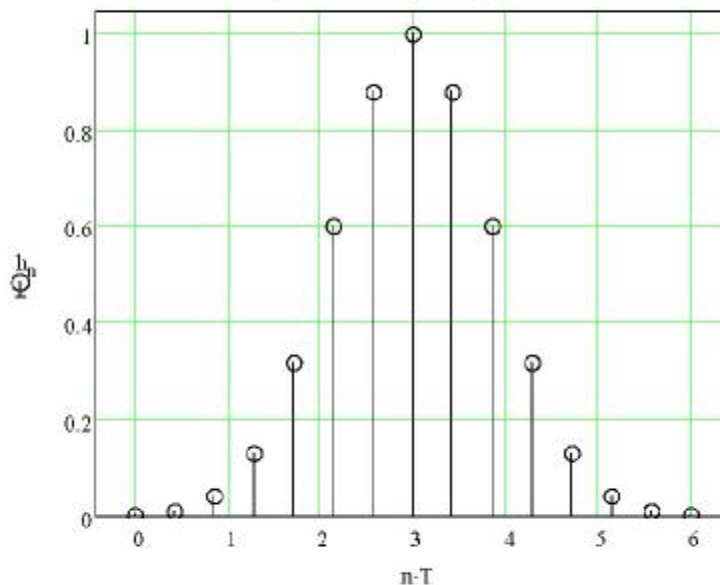
$Fd := \frac{1}{T}$ - лінійна частота дискретизації

$n := 0..N-1$

$h_n := e^{-\left(\beta \cdot \frac{nT - \frac{\tau}{2}}{\tau}\right)^2}$ - формування вектору відліків імпульсної характеристики

$\beta := 5$ - параметр імпульсної характеристики

Імпульсна характеристика

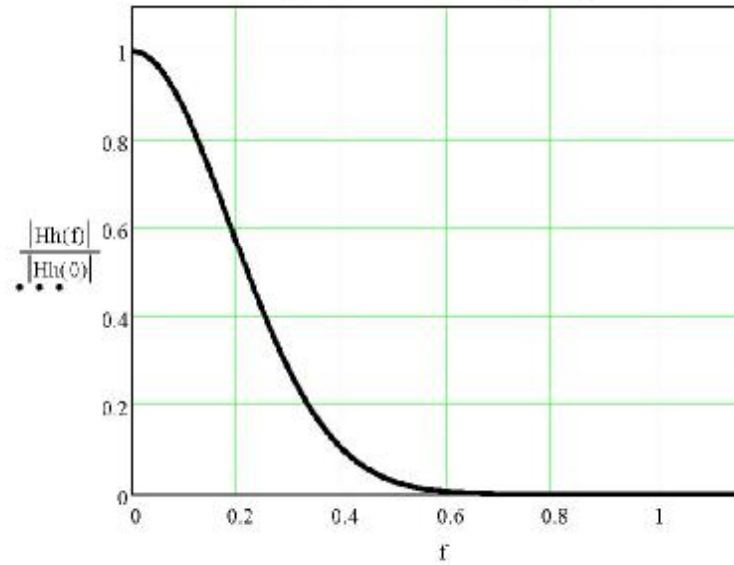


$H(z) := \sum_{k=0}^{N-1} (h_k \cdot z^{-k})$ - системна функція нерекурсивного дискретного фільтра

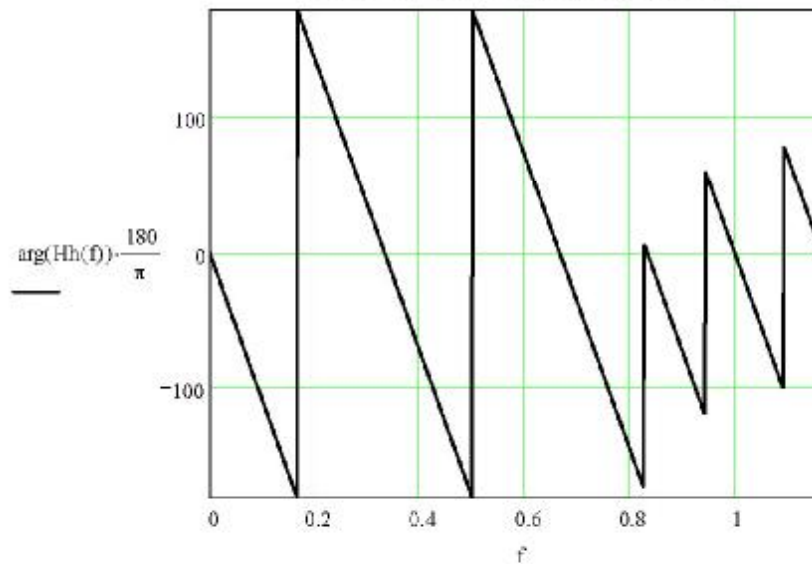
$$Hh(f) := \sum_{k=0}^{N-1} \left(h_k \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot k \cdot T} \right) \text{ - частотна характеристика нерекурсивного дискретного фільтра}$$

$$f := 0, \frac{Fd}{1000} .. \frac{Fd}{2} \text{ - діапазон побудови частотних характеристик [0; Fd/2]}$$

Амплітудно-частотна характеристика



Фазо-частотна характеристика



Моделювання реакції нерекурсивного фільтра на вхідний сигнал із застосуванням дискретної згортки

Формування вхідного сигналу нерекурсивного дискретного фільтра

$xN := 10$ - кількість відліків вхідного сигналу

$j := 0..xN - 1$

$x_j := \alpha^j \cdot T \cdot x$ формування відліків вхідного сигналу $\alpha = 1.5$ - параметр вхідного сигналу

$\text{Norm}(a, b) := \begin{cases} \text{for } i = \text{length}(a) .. \text{length}(b) - 1 & \text{if } \text{length}(a) > \text{length}(b) \\ \text{if } i < 0 & \end{cases}$ - функція, що застосовується для визначення довжини вектора вхідного сигналу і імпульсної характеристики

$xN := \text{Norm}(x, h)$ $hN := \text{Norm}(h, x)$ - вхідний сигнал і імпульсна характеристика однакової довжини

Обчислення згортки між вхідним сигналом і імпульсною характеристикою нерекурсивного фільтра

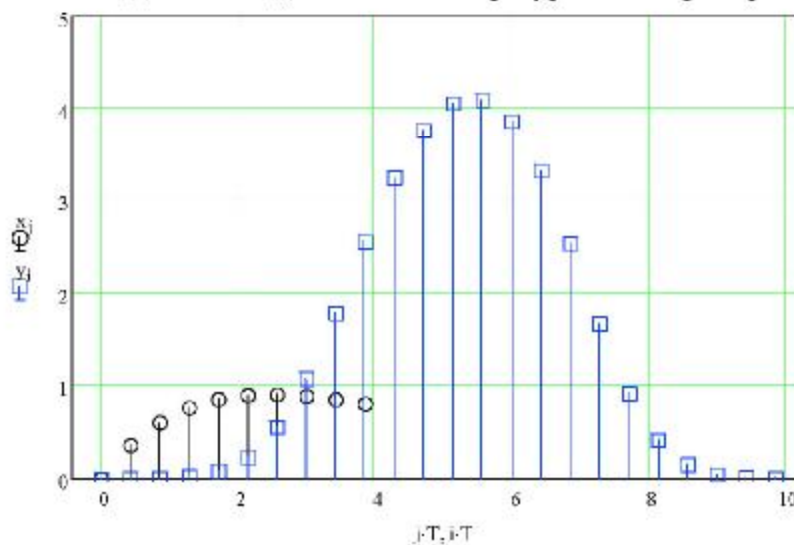
$\text{zortka}(k, x, h) := \sum_{m=0}^k (\text{if}(m - \text{length}(x) < 0, h_m, 0) \cdot \text{if}(k - m - \text{length}(h) < 0, x_{k-m}, 0))$ - функція дискретної згортки

$Nout := \text{length}(h) + \text{length}(x) - 1$ - обчислення тривалості вихідного сигналу

$i := 0..Nout - 1$

$y_i := \text{zortka}(i, xN, hN)$ - обчислення значення відліків вихідного сигналу

Вхідний і вихідний сигнали нерекурсивного фільтра



○ Вхідний сигнал
 □ Вихідний сигнал

Лабораторна робота №2
МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ
ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПАКЕТУ MATHCAD

Частина 2. Рекурсивний дискретний фільтр

$$H(z) := \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (b_k \cdot z^{-k})}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} (a_m \cdot z^{-m})} \quad \text{- системна функція рекурсивного дискретного фільтра в загальному вигляді}$$

$N = 3$ - порядок нерекурсивної частини дискретного фільтра

$M = 3$ - порядок нерекурсивної частини дискретного фільтра

$$b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{- коефіцієнти нерекурсивної частини фільтра} \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \text{- коефіцієнти рекурсивної частини фільтра}$$

$$H(z) \rightarrow \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}}{1 - \frac{3}{10z} - \frac{1}{2z^2}} \quad \text{- системна функція рекурсивного дискретного фільтра, що моделюється}$$

Часова (імпульсна) характеристика рекурсивного фільтра

$T_s = 1$ - період дискретизації $\Delta(n) := \delta(n-T, 0)$ - дискретна дельта функція

$f_d = \frac{1}{T}$ - лінійна частота дискретизації

Обчислення імпульсної характеристики на основі зворотнього Z-перетворення системної функції рекурсивного фільтра

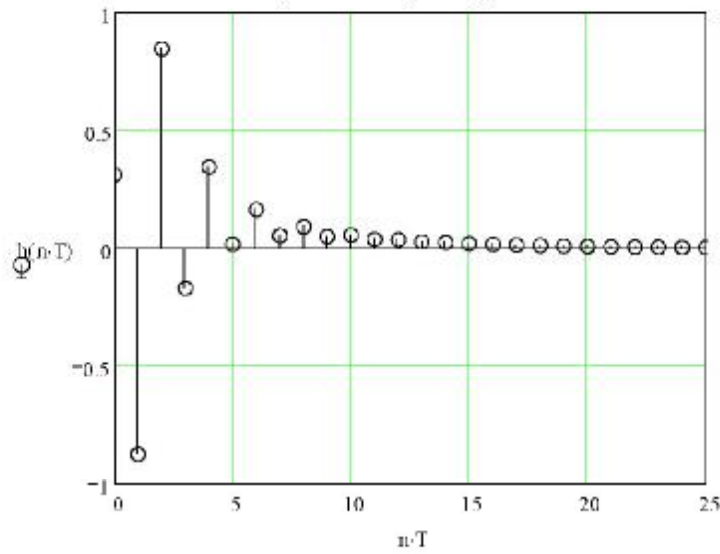
Символьне зворотнє Z-перетворення (із округленням) системної функції дискретного фільтра:

$$h(n) \left| \begin{array}{l} \text{імпульсна} \\ \text{Функція} \end{array} \right. \rightarrow 0.125 \cdot 2^{-n} \frac{(-0.1754) \cdot \Delta(n) + 0.2 \cdot 18^{-n} + 0.2653 \cdot 10^{-n} + 0.1754 \cdot (-10)^n + 12^{-n}}{12^{-n} \cdot 18^{-n}}$$

Визначення функції, що дає імпульсну характеристику рекурсивного дискретного фільтра (на основі раніше розрахованої формули):

$$h(n) := 0.125 \cdot 2^{-n} \cdot \frac{(-0.1754) \cdot \Delta(n) + 0.2 \cdot 18^{-n} + 0.2653 \cdot 10^{-n} + 0.1754 \cdot (-10)^n + 12^{-n}}{12^{-n} \cdot 18^{-n}}$$

Імпульсна характеристика



Частотні характеристики рекурсивного фільтра

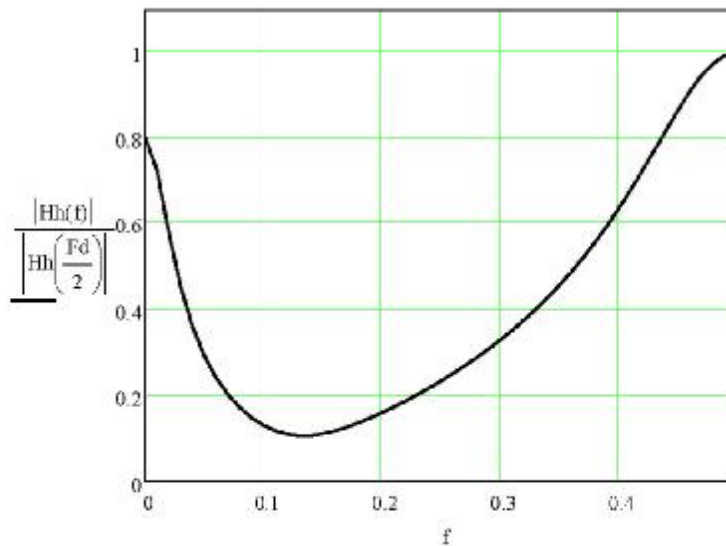
$$Hh(f) := \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(b_k \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot k \cdot T} \right)}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} \left(a_m \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot m \cdot T} \right)}$$

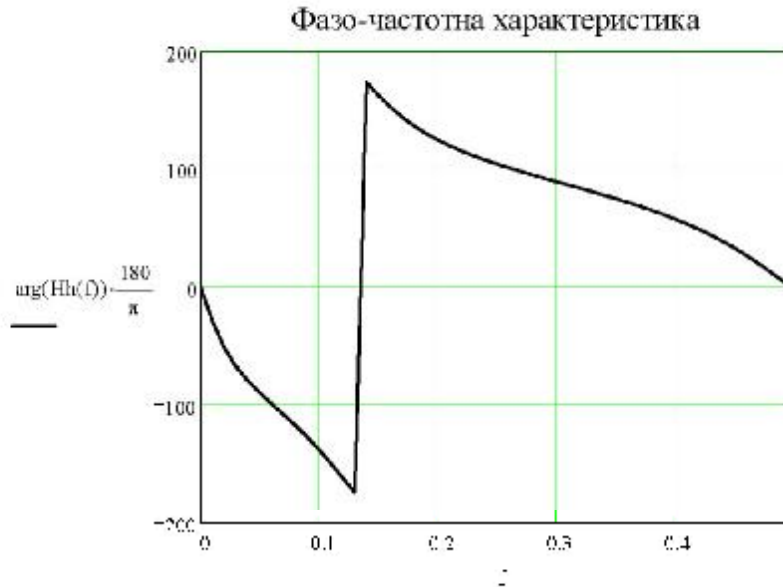
- частотна характеристика рекурсивного дискретного фільтра

$$f := 0, \frac{Fd}{100} .. \frac{Fd}{2}$$

- діапазон побудови частотних характеристик [0; Fd/2]

Амплітудно-частотна характеристика





Моделювання реакції рекурсивного фільтра на вхідний сигнал із застосуванням Z-перетворення

$x(n) = 10 \cdot T \cdot \alpha^{-nT}$ - аналітичний запис вхідного дискретного сигналу $\alpha = 3$ - параметр сигналу рекурсивного фільтра

$x(z) = \frac{10T}{(3-z)^2}$ - символічне Z-перетворення вхідного сигналу

$X(z) = \frac{10T}{(3-z)^2}$ - Z-образ вхідного сигналу

$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$ - обчислення Z-образу вихідного сигналу як добутку системної функції і Z-образу вхідного сигналу

Символічне обмежене Z-перетворення вихідного сигналу (із округленням):

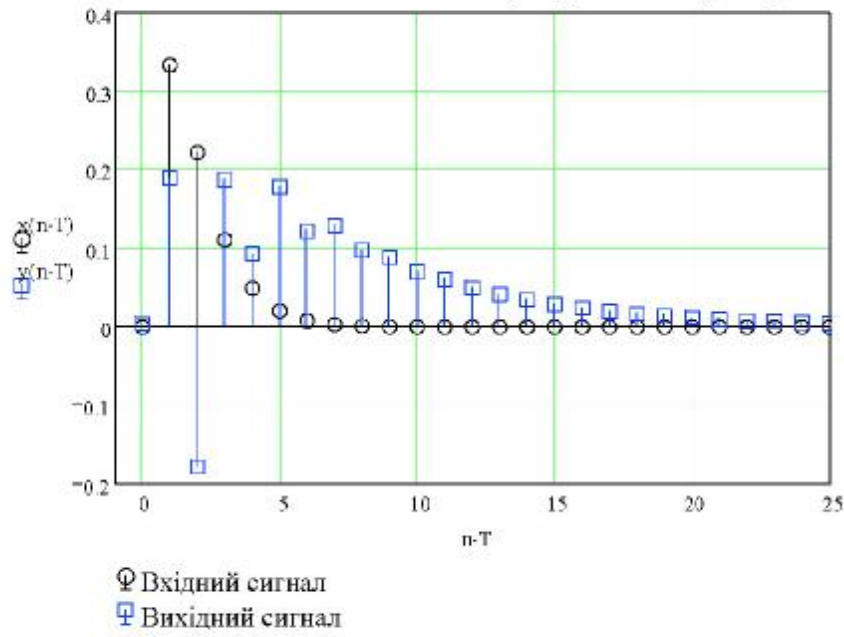
$$Y(z) \left|_{\text{Coat}, z} \right. = 1.4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{.32e5 \cdot 10^T \cdot 18^{\frac{T}{2}} + .38e5 \cdot (-10)^n \cdot 12^{\frac{T}{2}} + .63e4 \cdot 33^{\frac{T}{2}} \cdot 12^{\frac{T}{2}} \cdot 18^{\frac{T}{2}} - 11e6 \cdot 33^{\frac{T}{2}} \cdot 12^{\frac{T}{2}} \cdot 18^{\frac{T}{2}}}{12^{\frac{T}{2}} \cdot 18^{\frac{T}{2}}}$$

Часове представлення вихідного дискретного сигналу рекурсивного фільтра:

$$y(n) = 1.4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{.32e5 \cdot 10^{\frac{T}{2}} \cdot 18^{\frac{T}{2}} + .38e5 \cdot (-10)^{\frac{T}{2}} \cdot 12^{\frac{T}{2}} + .63e4 \cdot 33^{\frac{T}{2}} \cdot 12^{\frac{T}{2}} \cdot 18^{\frac{T}{2}} - 11e6 \cdot 33^{\frac{T}{2}} \cdot 12^{\frac{T}{2}} \cdot 18^{\frac{T}{2}}}{12^{\frac{T}{2}} \cdot 18^{\frac{T}{2}}}$$

$n = 0:30$

Вхідний і вихідний сигнали рекурсивного фільтра



Додаток Б

ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТУ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ MATLAB ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

Б.1. ПРИЗНАЧЕННЯ ТА ОСНОВНІ КОМПОНЕНТИ MATLAB

Б.1.1. Коротка характеристика MATLAB

Пакет прикладних програм MATLAB - це реалізація високопродуктивної мови для технічних розрахунків. Він містить у собі обчислення, візуалізацію і програмування в зручному середовищі, де задачі і рішення виражаються у формі, близькій до математичної. Типове використання MATLAB - це:

- математичні обчислення;
- створення алгоритмів;
- моделювання;
- аналіз даних, дослідження і візуалізація;
- наукова й інженерна графіка;
- розробка додатків, включаючи створення графічного інтерфейсу.

MATLAB - це інтерактивна система, у якій основним елементом даних є масив. Це дозволяє вирішувати різні задачі, пов'язані з технічними обчисленнями, особливо ті, в яких використовуються матриці і вектори, у кілька разів швидше, ніж при написанні програм з використанням "скалярних" мов програмування, таких як Сі або Фортран.

Слово MATLAB означає матрична лабораторія (matrix laboratory). MATLAB розвивався на протязі декількох років, орієнтуючись на різних користувачів. В університетському середовищі, він являє собою стандартний інструмент для роботи в різних областях математики, машинобудуванні і науки. У промисловості, MATLAB - це інструмент для високопродуктивних досліджень, розробок і аналізу даних.

У MATLAB важлива роль приділяється спеціалізованим групам програм, названих toolboxes. Вони дуже важливі для більшості користувачів MATLAB, тому що дозволяють вивчати і застосовувати спеціалізовані методи. Toolboxes - це колекція функцій MATLAB (М-файлів), що дозволяють вирішувати окремі класи задач. Toolboxes застосовуються для обробки сигналів, систем контролю, нейронних мереж, нечіткої логіки, вейвлетів, моделювання і т.д.

Б.1.2. Основні функціональні компоненти MATLAB

Умовно систему MATLAB можна поділити на декілька основних функціональних частин:

Мова MATLAB. Це мова матриць і масивів високого рівня з керуванням потоками, функціями, структурами даних, введенням-виведенням і особливостями об'єктно-орієнтованого програмування.

Середовище MATLAB. Це набір інструментів і засобів, з якими працює користувач або програміст MATLAB. Вона містить у собі засоби для керування змінними в робочому просторі MATLAB, введенням і виведенням даних, а також створення, контролю і налагодження М-файлів і додатків MATLAB.

Керована графіка. Це графічна система MATLAB, що містить у собі команди високого рівня для візуалізації двох- і тривимірних даних, обробки зображень, анімації й ілюстрованої графіки. Вона також містить у собі команди низького рівня, що дозволяють редагувати зовнішній вигляд графіки, так як при створенні *Графічного Інтерфейсу Користувача (GUI)* для MATLAB додатків.

Бібліотека математичних функцій. Це велика колекція обчислювальних алгоритмів від елементарних функцій, таких як сума, синус, косинус, комплексна арифметика, до більш складних, таких як трансформація матриць, знаходження власних значень функції Беселя, швидке перетворення Фур'є.

Програмний інтерфейс. Це бібліотека, що дозволяє писати програми на Сі і Фортрані, що взаємодіють з MATLAB. Вона включає засоби для виклику програм з MATLAB (динамічний зв'язок), викликаючи MATLAB як обчислювальний інструмент і для читання-запису М-файлів.

Simulink. Це інтерактивна система для моделювання нелінійних динамічних систем. Вона являє собою середовище, кероване маніпулятором типу „mouse”, що дозволяє моделювати процес шляхом перетаскування блоків діаграм на екрані і їхній маніпуляції. Simulink працює з лінійними, нелінійними, безперервними, дискретними, цифровими системами.

Blocksets. Це доповнення до Simulink, що забезпечують бібліотеки блоків для спеціалізованих додатків, таких як зв'язок, опрацювання сигналів, енергетичні системи та ін.

Real-Time Workshop - це програма, що дозволяє генерувати С код із блоків діаграм і запускати їх на виконання на різних системах реального часу.

Більш детальну інформацію про основні компоненти MATLAB, його пакети, розширення та функції, які вони виконують, можна знайти в спеціальній літературі.

Б.2. СИНТЕЗ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ ТА АНАЛІЗ ЇХ ХАРАКТЕРИСТИК У MATLAB

У MATLAB є більше двадцяти функцій синтезу дискретних фільтрів. Значна їх частина зосереджена в пакеті Signal Processing Toolbox, декілька функцій розрахунку конкретних фільтрів є в пакетах Communications Toolbox та Filter Design Toolbox.

Загальні відомості про функції розрахунку фільтрів представлені в табл. Б.1. У стовпці «Пакет» використовуються наступні позначення:

- SP — Signal Processing Toolbox;
- Comm — Communications Toolbox;
- FD – Filter Design Toolbox.

Таблиця Б.1 – Функції синтезу дискретних фільтрів

Функція	Пакет	Тип фільтра	АЧХ	Метод синтезу
1	2	3	4	5
butter	SP	Рекурсивний	Батерворта	Білінійне z-перетворення
cheby1	SP	Рекурсивний	Чебишева першого роду	Білінійне z-перетворення
cheby2	SP	Рекурсивний	Чебишева другого роду	Білінійне z-перетворення
ellip	SP	Рекурсивний	Кауера (еліптична)	Білінійне z-перетворення
bilinear	SP	Рекурсивний	Довільний аналоговий прототип	Білінійне z-перетворення
impinvar	SP	Рекурсивний	Довільний аналоговий прототип	Інваріантне перетворення імпульсної хар-ки
yulewalk	SP	Рекурсивний	Кусково-лінійна	Авторегресійний метод
invfreqz	SP	Рекурсивний	Довільна	Мінімізація різниці між чисельником функції передачі і добутком її знаменника і бажаної ЧХ
prony	SP	Рекурсивний	Синтез за заданою імпульсною характеристикою	Експонентна апроксимація Проні
firl	SP	Нерекурсивний	Багатополосова	Зворотне перетворення Фур'є з використанням вікон
fir2	SP	Нерекурсивний	Кусково-лінійна	Зворотне перетворення Фур'є з використанням вікон

1	2	3	4	5
firls	SP	Нерекурсивний	Кусково-лінійна с перехідними смугами	Мінімізація середньоквадратичної помилки
fircls	SP	Нерекурсивний	Кусково-постійна	Мінімізація середньо- квадратичної помилки з обмеженням максим. відхилення
fircls1	SP	Нерекурсивний	ФНЧ, ФВЧ	Мінімізація середньоквадратичної помилки з обмеженням максимального відхилення
firrcos	SP	Нерекурсивний	ФНЧ	Косинусоїдальне згладжування
intfilt	SP	Нерекурсивний	ФНЧ	Мінімаксна апроксимація
remez	SP	Нерекурсивний	Кусково-лінійна з перехідними смугами	Мінімаксна апроксимація
cremez	SP	Нерекурсивний (у тому числі з нелінійною ФЧХ і комплексними коефіцієнтами)	Кусково-лінійна з перехідними смугами	Мінімаксна апроксимація
rcosfir	Comm	Нерекурсивний	ФНЧ	Косинусоїдальне згладжування
rcosiir	Comm	Рекурсивний	ФНЧ	Розкладання по сингулярних числах матриці Ганкеля, заповненої відліками імпульсної характеристики
hilbiir	Comm	Рекурсивний	Фільтр Гільберта	Розкладання по сингулярних числах матриці Ганкеля, заповненої відліками імпульсної характеристики
gremez	FD	Нерекурсивний	Кусково-лінійна з перехідними смугами	Мінімаксная апроксимація
firlpnorm	FD	Нерекурсивний	Кусково-лінійна з перехідними смугами	Мінімізація p-норми помилки

1	2	3	4	5
irgrpdelay	FD	Рекурсивний	Синтез за заданою груповою затримкою	Мінімізація р-норми помилки
iirlpnorm	FD	Рекурсивний	Кусково-лінійна з перехідними смугами	Мінімізація р-норми помилки
iirlpnormc	FD	Рекурсивний	Кусково-лінійна з перехідними смугами	Мінімізація р-норми помилки з обмеженням модулів полюсів фільтра

Б.2.1. Функції безпосереднього синтезу дискретних фільтрів

В даному підрозділі розглядається реалізація в MATLAB найбільш поширених на практиці класичних методів синтезу частотно-вибіркових дискретних фільтрів.

Б.2.1.1 Функції синтезу дискретних фільтрів на основі аналогових фільтрів-прототипів.

Одним з найпоширеніших підходів розрахунку параметрів дискретних ФНЧ, ФВЧ, смугових і режекторних фільтрів є використання частотно-передатних функцій аналогових прототипів Батерворта, Чебишева (першого і другого роду) і Кауера з подальшим застосуванням до них білінійного Z-перетворення. Для безпосереднього застосування цього підходу в MATLAB реалізовані наступні функції:

- § butter(n, w0, type) — розрахунок фільтрів Батерворта;
- § cheby1(n, Rp, w0, type) — розрахунок фільтрів Чебишева 1-го роду;
- § cheby2(n, Rs, w0, type) — розрахунок фільтрів Чебишева 2-го роду;
- § ellip(n, Rp, Rs, w0, type) — розрахунок еліптичних фільтрів (фільтрів Кауера).

Вище перераховані функції дозволяють розраховувати як дискретні, так і аналогові фільтри. Ознакою дискретного розрахунку служить відсутність рядка 's' наприкінці списку вхідних параметрів.

Параметри n, Rp, Rs (їх склад залежить від типу фільтра) — це параметри фільтру-прототипу: n — порядок фільтра, Rp — рівень пульсацій АЧХ у смузі пропускання (у децибелах), Rs — рівень пульсацій АЧХ у смузі затримки (у децибелах).

Параметри w0 і type використовуються одночасно для задання типу фільтра і значень його частот зрізу (нормованих до частоти Найквіста):

- § ФНЧ: w0 — скаляр, параметр type відсутній;
- § ФВЧ: w0 — скаляр, type='high';

§ смуговий фільтр: w_0 — двохелементний вектор частот зрізу $[w_1 w_2]$, параметр `type` відсутній;

§ режекторний фільтр: w_0 — двохелементний вектор частот зрізу $[w_1 w_2]$ `type='stop'`.

Залежно від того, скільки вихідних параметрів зазначено під час виклику, функції можуть повертати результати розрахунку у вигляді коефіцієнтів поліномів чисельника і знаменника функції передачі (два вихідних параметри), нулів і полюсів (три вихідних параметри) або параметрів простору станів (чотири вихідних параметри).

Б.2.1.2. Функції вибору порядку фільтрів

Розглянуті вище функції розрахунку фільтрів вимагають завдання в якості вхідних параметрів порядку фільтра і його частоти зрізу. При цьому поняття частоти зрізу для фільтрів різних типів визначається по-різному. Проте вихідними даними при розробці фільтрів, як правило, є інші параметри: частотні границі смуг пропускання і затримки, а також допустима нерівномірність АЧХ у смузі пропускання і мінімально необхідне загасання в смузі затримки.

Вибрати мінімально необхідний порядок фільтра дозволяють наступні однотипні функції пакета `Signal Processing`:

$[n, Wn] = \text{buttord}(Wp, Ws, Rp, Rs)$

$[n, Wn] = \text{cheb1ord}(Wp, Ws, Rp, Rs)$

$[n, Wn] = \text{cheb2ord}(Wp, Ws, Rp, Rs)$

$[n, Wn] = \text{ellipord}(Wp, Ws, Rp, Rs)$

Вхідний параметр Rp — допустимий рівень пульсацій у смузі пропускання (у децибелах), Rs — мінімально необхідне згасання в смузі затримки (у децибелах). Параметри Wp і Ws задають границі смуг пропускання і затримки (нормовані до частоти Найквіста), спосіб завдання цих параметрів залежить від типу фільтра:

§ ФНЧ: Wp і Ws — числа, при цьому повинна виконуватися нерівність $Wp < Ws$;

§ ФВЧ: Wp і Ws — числа, при цьому повинна виконуватися нерівність $Wp > Ws$;

§ смуговий фільтр: Wp і Ws — двохелементні вектори, при цьому повинні виконуватися нерівності $Ws(1) < Wp(1) < Wp(2) < Ws(2)$;

§ режекторний фільтр: Wp і Ws — двохелементні вектори, при цьому повинні виконуватися нерівності $Wp(1) < Ws(1) < Ws(2) < Wp(2)$.

Вихідними параметрами є мінімально необхідний для виконання заданих вимог порядок фільтра n і частота зрізу фільтра Wn (нормована до частоти Найквіста). Ці параметри можуть надалі використовуватися для виклику інших функцій розрахунку фільтра. Повернення значення Wn

звільняє користувача від турбот, пов'язаних з тим, що при розрахунку різних фільтрів поняття частоти зрізу має різний сенс.

Оскільки порядок фільтра — ціле число, то виявляється, що фільтр мінімально необхідного порядку забезпечує деякий запас по вихідних параметрах. При цьому для фільтрів Батерворта і Чебишева першого роду буде збільшуватися згасання в смузі затримки, для фільтрів Чебишева другого роду — зменшуватися пульсації в смузі пропускання, а для еліптичних фільтрів — розширюватися смуга затримки.

Б.2.1.3. Функції синтезу рекурсивних фільтрів на основі Z-перетворень

Б.2.1.3.1. Функція bilinear. Функція bilinear призначена для синтезу дискретних фільтрів по довільних аналогових прототипах методом білінійного z-перетворення. Вона може перетворювати задані різними способами аналогові описи систем у дискретні і тому має три варіанти синтаксису:

$$[bz, az] = \text{bilinear}(b, a, Fs)$$

$$[zz, pz, kz] = \text{bilinear}(z, p, k, Fs)$$

$$[Az, Bz, Cz, Dz] = \text{bilinear}(A, B, C, D, Fs)$$

Тут b і a — коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника функції передачі аналогового прототипу, z , p і k — нулі, полюса і коефіцієнт підсилення аналогового прототипу, A , B , C і D — параметри простору станів для аналогового прототипу. Аналогічні ідентифікатори з буквою z наприкінці позначають відповідні параметри дискретної системи.

Функція розрізняє способи задання опису аналогового прототипу за розмірами переданих параметрів. Якщо два перших вхідних параметри — вектори-рядки, вони вважаються коефіцієнтами поліномів чисельника і знаменника функції передачі. Якщо два перших вхідних параметри — вектори-стовпці, вони вважаються нулями і полюсами функції передачі. Якщо перший вхідний параметр — матриця, то це означає, що аналоговий прототип заданий у просторі станів. Параметр Fs задає частоту дискретизації в герцах.

Б.2.1.3.Б. Функціяimpinvar. Функціяimpinvar призначена для синтезу дискретних фільтрів за довільними аналоговими прототипами методом інваріантного перетворення імпульсної характеристики. Синтаксис виклику функції наступний:

$$[bz, az] = \text{impinvar}(b, a, Fs, tol)$$

Вхідні параметри b і a — коефіцієнти чисельника і знаменника функції передачі аналогового прототипу, Fs — частота дискретизації (за замовчуванням її значення дорівнює 1 Гц).

Параметр tol задає відносний поріг виявлення кратних полюсів. Два близько розташованих полюси вважаються співпадаючими, якщо відстань між ними, поділена на більший з їх модулів, менше tol .

Вихідні параметри bz і az — коефіцієнти чисельника і знаменника функції передачі для синтезованого дискретного фільтра.

Б.2.1.4. Функції синтезу нерекурсивних фільтрів з використанням вагових вікон. У пакеті Signal Processing є дві функції, що реалізують метод синтезу фільтрів на основі розкладу в ряд Фур'є з використанням вагових вікон. Різниця між ними полягає в типі АЧХ - функція `fir1` призначена для синтезу багатополосних фільтрів, АЧХ яких у заданих частотних точках стрибкоподібно змінюється, приймаючи значення 0 або 1, а функція `fir2` допускає задання довільної кусково-лінійної АЧХ.

Б.2.1.4.1. Функція `fir1`. Функція `fir1` дозволяє розраховувати нерекурсивні смугасто-проникні фільтри з лінійною ФЧХ, у тому числі багатосмугові (`multiband`), методом зворотнього перетворення Фур'є з використанням вагових вікон. Синтаксис виклику функції наступний:

$b = \text{fir1}(n, Wn, 'ftype', \text{window}, 'normalization')$

Тут n — порядок фільтра, що розраховується, (його імпульсна характеристика буде містити $n+1$ ненульових відліків).

Параметри Wn і `'ftype'` (необов'язковий) визначають тип синтезованого фільтра і його частоту (частоти) зрізу. Частоти зрізу задаються нормованими до частоти Найквіста (тобто їх значення повинні лежати в діапазоні $0..1$, величина 1 відповідає половині частоти дискретизації). Значення цих параметрів залежать від типу фільтра:

§ ФНЧ: Wn — частота зрізу, параметр `'ftype'` відсутній;

§ ФВЧ: Wn — частота зрізу, `'ftype' = 'high'`;

§ смуговий фільтр: $Wn = [w1\ w2]$, де $w1$ і $w2$ — границі смуги пропускання, параметр `'ftype'` відсутній;

§ режекторний фільтр: $Wn = [w1\ w2]$, де $w1$ і $w2$ — границі смуги затримки, `'ftype' = 'stop'`;

§ багатосмуговий фільтр, що пропускає низькі частоти: $Wn=[w1\ wБ...wn]$, де wi — границі смуг пропускання, впорядковані за зростанням, `'ftype'='DC-1'`. Такий фільтр буде мати смуги пропускання $0...w1$, $wБ...w3$ і т.д.;

§ багатосмуговий фільтр, що затримує низькі частоти: $Wn=[w1\ wБ...wn]$, де wi — границі смуг пропускання, впорядковані за зростанням, `'ftype'='DC-0'`. Такий фільтр буде мати смуги пропускання $w1...w2$, $w3...w4$ і т.д.

Для ФВЧ і режекторних фільтрів, а також багатосмугових фільтрів з ненульовим коефіцієнтом передачі на частоті Найквіста можливий тільки

парний порядок. Якщо задати непарне n , буде розрахований фільтр на одиницю більшого порядку.

Параметр `window` задає вагове вікно, що використовується при синтезі. Це повинен бути вектор-стовпець, що містить $n+1$ елементів. За замовчуванням використовується вікно Хеммінга, що розраховується шляхом виклику функції `hamming(n+1)`.

Рядковий параметр `'normalization'` керує нормуванням (масштабуванням) розрахованої імпульсної характеристики фільтра. За замовчуванням використовується значення `'scale'`, при якому імпульсна характеристика нормується так, щоб забезпечити одиничне значення (0 дБ) коефіцієнта передачі в центрі смуги пропускання (для багатосмугових фільтрів — у центрі самої низькочастотної смуги пропускання). Друге можливе значення параметра — `'noscale1'`, у цьому випадку нормування не здійснюється.

Результатом роботи функції є вектор `b` коефіцієнтів нерекурсивного фільтра. Розрахований фільтр має лінійну ФЧХ і вносить групову затримку, незалежно від частоти рівну, $n/2$ відліків.

Б.2.1.4.2. Функція `fir2`. Функція `fir2`, так само як і `fir1`, призначена для синтезу нерекурсивних фільтрів з лінійної ФЧХ методом зворотного перетворення Фур'є з використанням вікон. Відмінність полягає в тому, що при синтезі можна задати довільну кусково-лінійну АЧХ. Синтаксис виклику функції наступний:

$$b = \text{fir2}(n, f, m, Npt, lap, window)$$

Тут n — порядок фільтра, що розраховується, (його імпульсна характеристика буде містити $n+1$ ненульових відліків).

Параметри `f` і `m` повинні бути векторами однакової довжини, вони спільно визначають бажану АЧХ синтезованого фільтра. Вектор `f` містить значення частот, нормованих до частоти Найквіста, а вектор `m` - відповідні цим частотам значення АЧХ. У проміжках між заданими точками АЧХ інтерполюється за лінійним законом. Частоти у векторі `f` повинні утворювати зростаючу послідовність, крім того, повинні виконуватися рівності $f(1)=0$ і $f(\text{end})=1$. Частоти можуть дублюватися, що дає можливість задати стрибкоподібну зміну АЧХ. Вивести графік синтезованої АЧХ можна командою `plot(f, m)`.

Для фільтрів, коефіцієнт передачі яких на частоті Найквіста не дорівнює нулю, можливий тільки парний порядок. Якщо задати непарне n , буде розрахований фільтр на одиницю більшого порядку.

Інші параметри функції є необов'язковими. Параметр `Npt` задає число точок, що використовуються при інтерполяції заданої АЧХ.

Параметр `lap` задає ширину перехідних зон навколо стрибків. При інтерполяції АЧХ у цих зонах замість стрибка буде сформований лінійний

перехід. Ширина зон вимірюється в точках інтерполяції і за замовчуванням дорівнює 25.

Параметр `window` має те саме призначення, що і для функції `fir1`.

Результатом роботи, як і в попередньому випадку, є вектор `b` коефіцієнтів нерекурсивного фільтра. Розрахований фільтр має лінійну ФЧХ і вносить групову затримку, незалежно від частоти, рівну $n/2$ відліків.

Б.3. МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІЧНИХ СЕРЕДОВИЩ MATLAB

У пакеті MATLAB є два інтегровані графічні середовища, що дозволяють здійснювати моделювання цифрової фільтрації. Це нове (починаючи з версії 6.0) середовище `FDA Tool` (Filter Design & Analysis Tool), яке в основному призначене для розрахунку та аналізу цифрових фільтрів з врахуванням впливу ефектів квантування, та більш старий модуль `SPTool` (Signal Processing Tool), який дозволяє використовувати графічне середовище для перегляду графіків сигналів та їх спектрів, розрахунку й аналізу дискретних фільтрів, а також фільтрації сигналів.

Б.3.1. Використання графічного середовища `FDA Tool` для синтезу та аналізу цифрових фільтрів

Б.3.1.1. Запуск програми

Для запуску програми розрахунку фільтрів необхідно набрати її ім'я в командному рядку MATLAB:

```
» fdatool
```

Після цього з'явиться вікно програми, показане на рисунку Б.1.

Б.3.1.2. Розрахунок фільтра

Розрахунок фільтра починається із задання необхідних параметрів на вкладці `Design Filter` (див. рисунок Б.1). Тип синтезованої АЧХ вибирається за допомогою перемикача `Filter Type`. Можливі наступні варіанти: `Lowpass` (ФНЧ), `Highpass` (ФВЧ), `Bandpass` (смуговий фільтр), `Bandstop` (режекторний фільтр). Вибір п'ятого положення перемикача дозволяє відкрити меню, в якому перераховані більш складні варіанти: `Differentiator` (диференціюючий фільтр), `Hilbert Transformer` (перетворювач Гільберта), `Multiband` (багатосмуговий фільтр), `Arbitrary Magnitude` (довільна АЧХ) і `Arbitrary Group Delay` (довільна груповая затримка).

Обравши категорію синтезованої АЧХ, варто вибрати тип синтезованого фільтра, встановивши перемикач, розташований у розділі `Design Method`, у положення `IR` (рекурсивний) або `FIR` (нерекурсивний). Кожному положенню перемикача відповідає список можливих методів синтезу. Склад цього списку змінюється залежно від обраного типу АЧХ. Наприклад, при синтезі

фільтра з довільною залежністю групової затримки від частоти (Arbitrary Group Delay) перемикач автоматично встановлюється в положення IIR, а в списку буде доступний всього один метод — метод мінімізації р-норми помилки (Constrained Least Pth Norm). У випадку синтезу АЧХ чотирьох найпростіших типів, набір можливих методів синтезу значно ширший:

- нерекурсивні фільтри (FIR). Тут доступні наступні методи:
 - Equiripple — синтез фільтрів з рівномірними пульсаціями АЧХ методом Ремеза;
 - Least-Squares — мінімізація середньоквадратичного відхилення АЧХ від заданої;
 - Window — синтез з використанням вагових функцій (вікон);
- рекурсивні фільтри (IIR). Тут доступні чотири варіанти синтезу за різними аналоговими прототипами методом білінійного з-перетворення:
 - Butterworth — синтез фільтра Батерворта;
 - Chebyshev Type I/II — синтез фільтра Чебишева 1 та 2 роду;
 - Elliptic — синтез еліптичного фільтра.

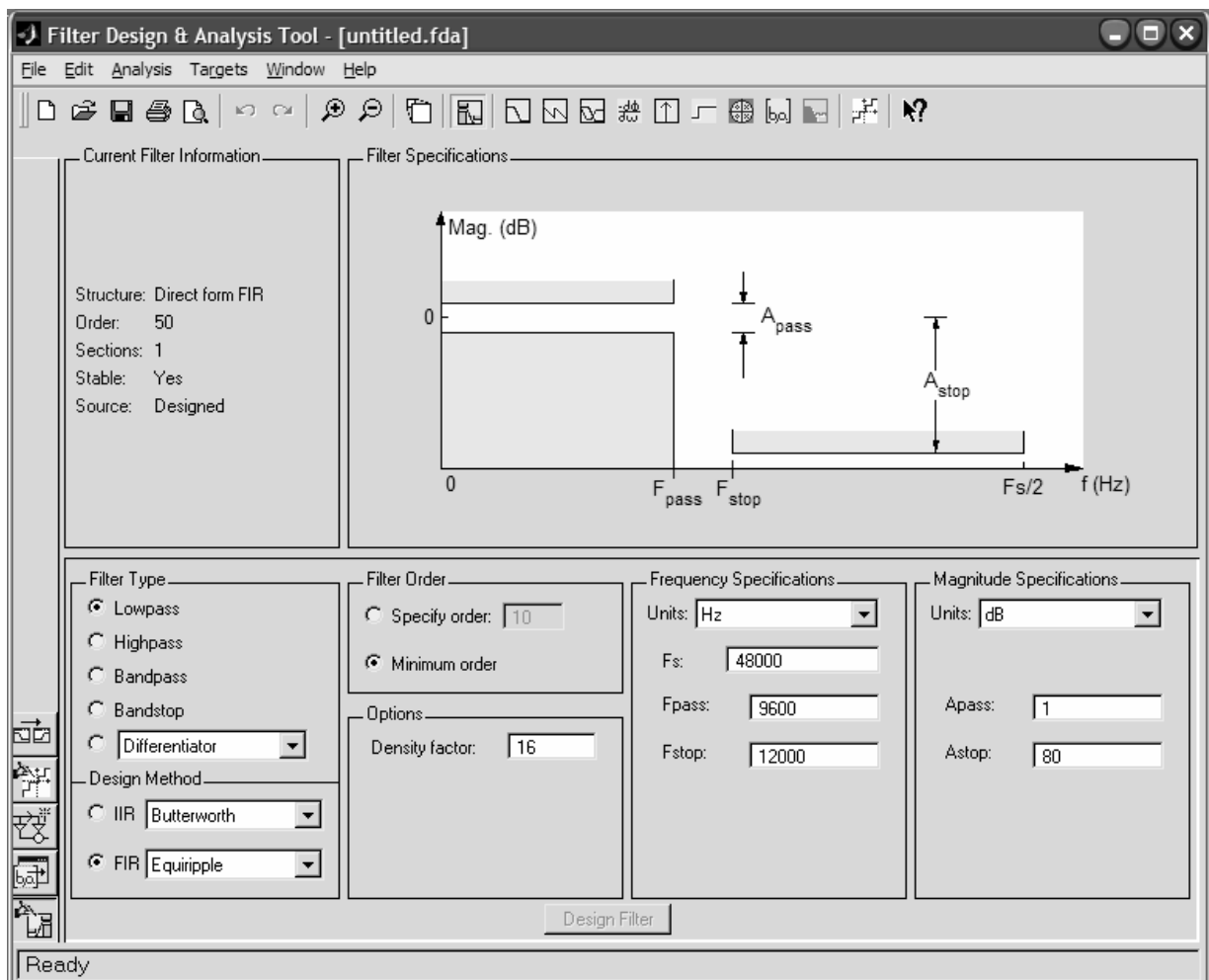


Рисунок Б.1 – Інтерфейс програми fdatool

Далі необхідно вибрати порядок фільтра в розділі Filter Order. У багатьох випадках, крім явної вказівки порядку в поле введення Specify order, можливий автоматичний вибір порядку шляхом встановлення перемикача в положення Minimum order.

Нарешті, необхідно задати числові параметри цієї АЧХ у розділах Frequency Specifications і Magnitude Specifications (при виборі типу АЧХ із додаткового меню, ці два розділи поєднуються під загальною назвою Frequency and Magnitude Specifications). Вміст цих областей вікна змінюється в залежності від обраного типу АЧХ. При заповненні полів введення можна посилатися на змінні, що існують в даний момент у робочій області пам'яті MATLAB.

Числові параметри, які необхідно задати, ілюструються графіком, виведеним у розділі Filter Specifications. Вигляд цього графіка також змінюється в залежності від обраного типу АЧХ.

Обравши метод синтезу і задавши характеристики фільтра, необхідно натиснути на розташовану у нижній частині вікна кнопку Design Filter. Програма fdatool викликає потрібну функцію синтезу, передавши їй вказані користувачем специфікації фільтра.

Б.3.1.3. Перегляд характеристик фільтра

Після виконання розрахунку фільтра в розділі Current Filter Information вікна програми fdatool з'явиться інформація про завершення обчислень (Source: Designed). Тепер можна переглядати характеристики фільтра, щоб перевірити, чи відповідає він нашим вимогам.

Вибір графіка для перегляду здійснюється за допомогою кнопок панелі інструментів, показаних на рисунку Б.2, або наступних команд меню Analysis:

- Filter Specifications — вивід графіка, що пояснює задання параметрів АЧХ;
- Magnitude Response — вивід графіка АЧХ;
- Phase Response — вивід графіка ФЧХ;
- Magnitude and Phase — одночасний вивід графіків АЧХ і ФЧХ;
- Group Delay — вивід графіка частотної залежності групової затримки;
- Impulse Response — вивід графіка імпульсної характеристики;
- Step Response — вивід графіка перехідної характеристики;
- Pole/Zero Plot — вивід графіка розташування нулів і полюсів у Z-площині;
- View Filter Coefficients — перегляд коефіцієнтів фільтра. Виведене тут представлення фільтра залежить від обраної форми реалізації

Б.3.1.4. Збереження результатів роботи

Щоб зберегти результати поточного сеансу роботи з програмою fdatool, необхідно натиснути кнопку Save session панелі інструментів або скористатися однойменною командою меню File. У цьому меню є також команда Save session As, що дозволяє зберегти сеанс під новим ім'ям. Файли збережених сеансів роботи мають розширення .fda.

Завантажити збережений сеанс можна за допомогою кнопки Open Session панелі інструментів або однойменної команди меню File.

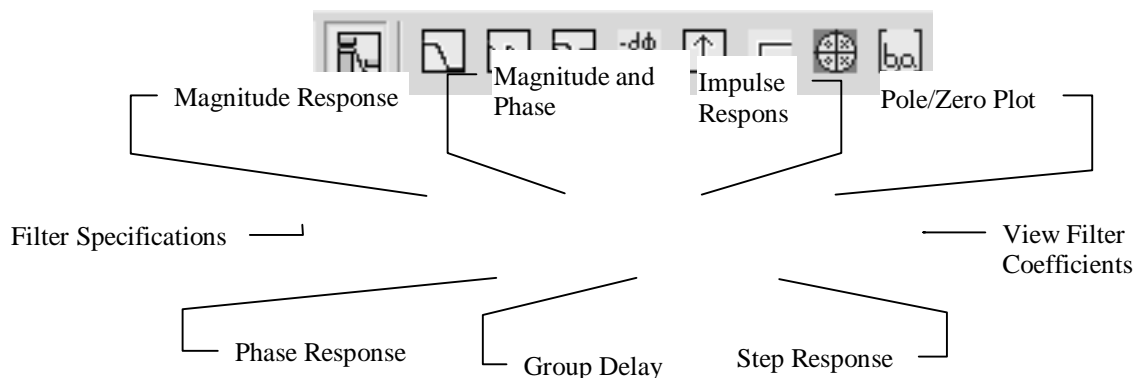


Рисунок Б.2 – Панель інструментів програми fdatool

Зрозуміло, цінність програми fdatool була б невелика, якби в ній не було засобів експорту коефіцієнтів розрахованого фільтра для використання в MATLAB або інших програмах. Експорт опису фільтра здійснюється за допомогою команди Export меню File або комбінації клавіш Ctrl+E. Після вибору команди з'являється вікно експорту, показане на рисунку Б.3.

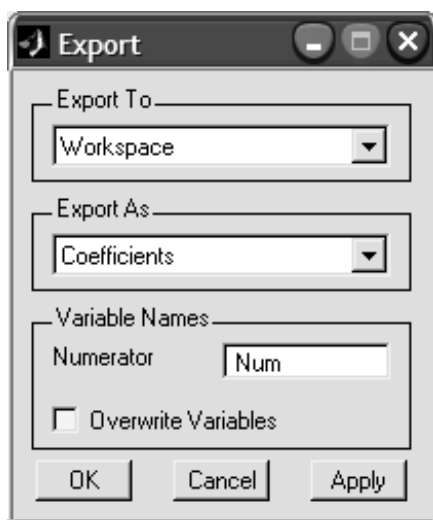


Рисунок Б.3 – Вікно експорту опису фільтра

Меню Export To дозволяє вибрати спосіб експорту:

- Workspace — дані передаються безпосередньо в робочу область пам'яті MATLAB;

- Text-file — коефіцієнти фільтра записуються в текстовий файл. Формат цього файлу збігається з форматом представлення інформації про коефіцієнти фільтра у вікні програми fdatool;
- M-file — інформація про фільтр зберігається у виді M-файлу, що потім можна буде завантажити в MATLAB командою load.

У розділі Variable Names задаються імена змінних для збереження векторів і матриць, що описують фільтр. Склад полів введення залежить від форми реалізації фільтра. При записі інформації в текстовий файл ці поля недоступні.

Задавши всі необхідні параметри, натисніть кнопку ОК для виконання експорту даних. При експорті у файл, буде запитане ім'я створюваного файлу.

Існує також можливість здійснювати експорт синтезованих програмою fdatool фільтрів в програмний модуль sptool з подальшим коректним їх використанням. Це можна здійснити, використавши команду Export to SPTool меню File.

Б.3.1.5. Імпорт опису фільтра

Програму fdatool можна використовувати не тільки для розрахунку фільтрів із заданими параметрами, але і для аналізу характеристик уже розрахованих фільтрів. Для цього використовується режим імпорту опису фільтра, обраний за допомогою команди Import Filter меню Filter. При включенні цього режиму вкладка Design Filter заміняється на вкладку Import Filter, показану на рисунку Б.4.

Під імпортом у програмі fdatool мається на увазі одержання готових векторів і матриць, що описують фільтр. Можна ввести ці вектори і матриці вручну (використовуючи синтаксис MATLAB) або послатися на ідентифікатори змінних, що знаходяться в даний момент у робочій області пам'яті MATLAB. Ці вектори або імена змінних задаються в полях введення, зміст яких залежить від обраної форми представлення структури фільтра (пряма, канонічна, транспонована і т.д.), яка вибирається за допомогою меню Filter Structure.

У розділі Sampling Frequency задається частота дискретизації — вона використовується для оцифровки частотних осей графіків. Одиниця вимірювання частоти вибирається зі списку Units, а саме значення вводиться в поле Fs.

Задавши будь-яким способом опис фільтра, натисніть кнопку Import Filter, розташовану в нижній частині вікна програми, і виведений в даний момент графік буде перемальовано відповідно до результатів аналізу імпортованого фільтра.

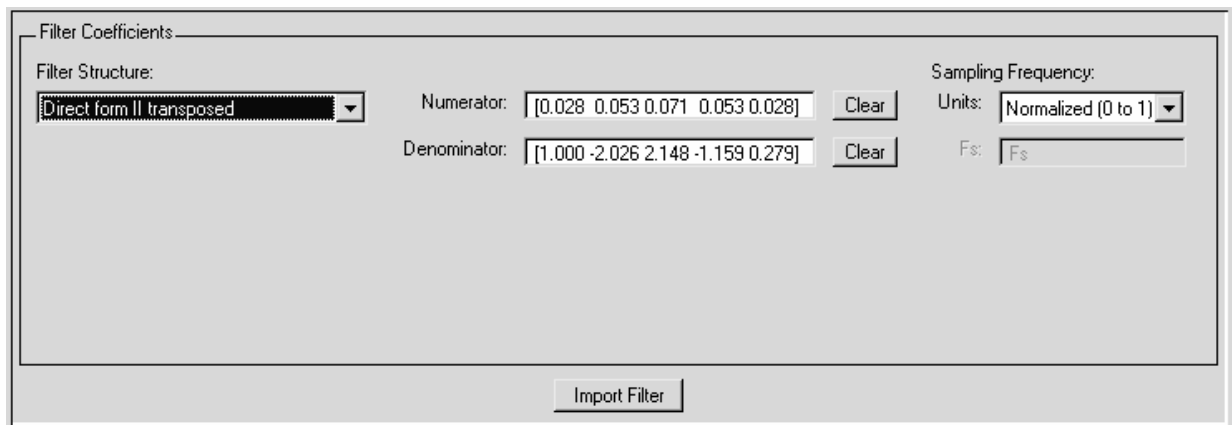


Рисунок Б.4 – Вкладка Import Filter

Тепер можна переглядати графіки характеристик імпортованого фільтра, як було описано вище.

Б.3.1.6. Реалізація фільтра у форматі Simulink

Як вже відзначалось раніше, пакет MATLAB інтегрований з інтерактивною системою Simulink, що призначена для моделювання різноманітних аналогових і дискретних динамічних систем. Відповідно, в модулі fdatool є функція реалізації синтезованого дискретного фільтра у вигляді блоку, формату Simulink, що дозволяє проводити імітаційне моделювання його роботи. Для ініціалізації цього процесу необхідно перейти на закладку Realize Model (див. рисунок Б.5).

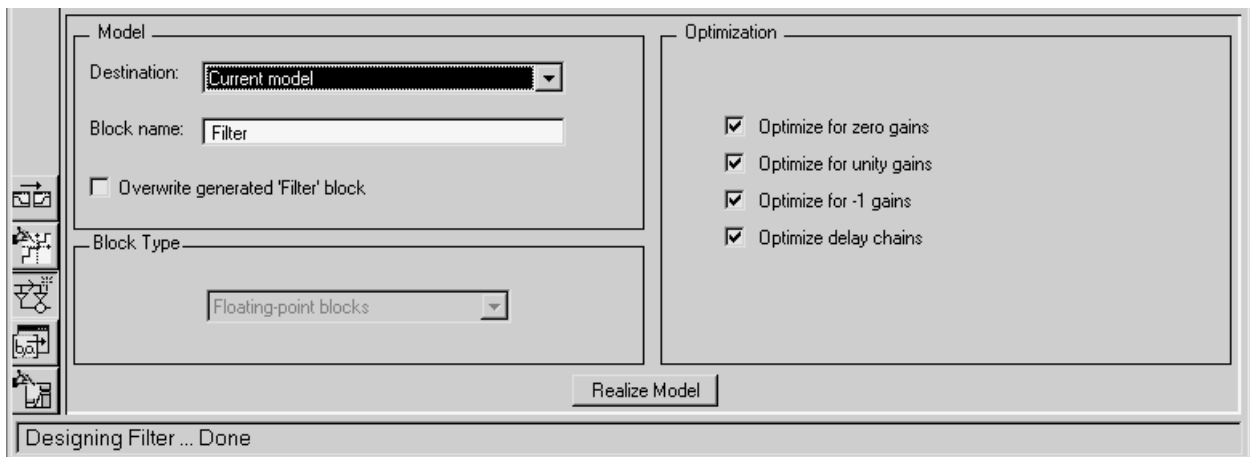


Рисунок Б.5 – Вкладка Realize Model

Задавши відповідне ім'я блоку у рядку Block name, необхідно натиснути кнопку Realize Model, після чого автоматично викликається робоче вікно середовища Simulink (див. рисунок Б.6), в яке у вигляді блоку з відповідним входом і виходом передається математична модель синтезованого дискретного фільтра.

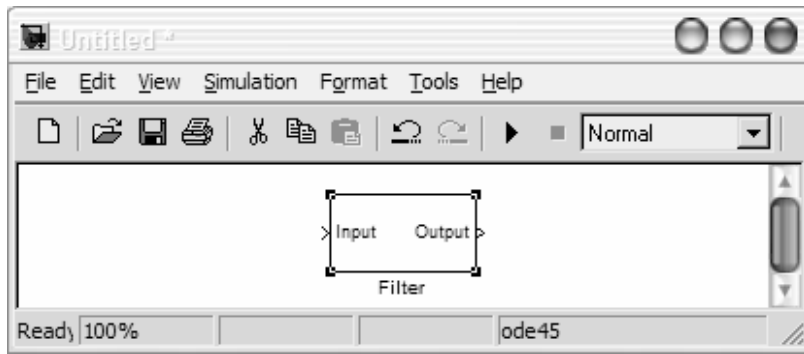


Рисунок Б.6 – Блок фільтра у вікні Simulink

При цьому важливою перевагою Simulink є наявність можливості проаналізувати внутрішню будову блоку, представленого у вигляді структурної схеми синтезованого фільтра. Для цього необхідно двічі клацнути на зображенні відповідного блоку, після чого відкриється додаткове вікно (див. рисунок Б.7).

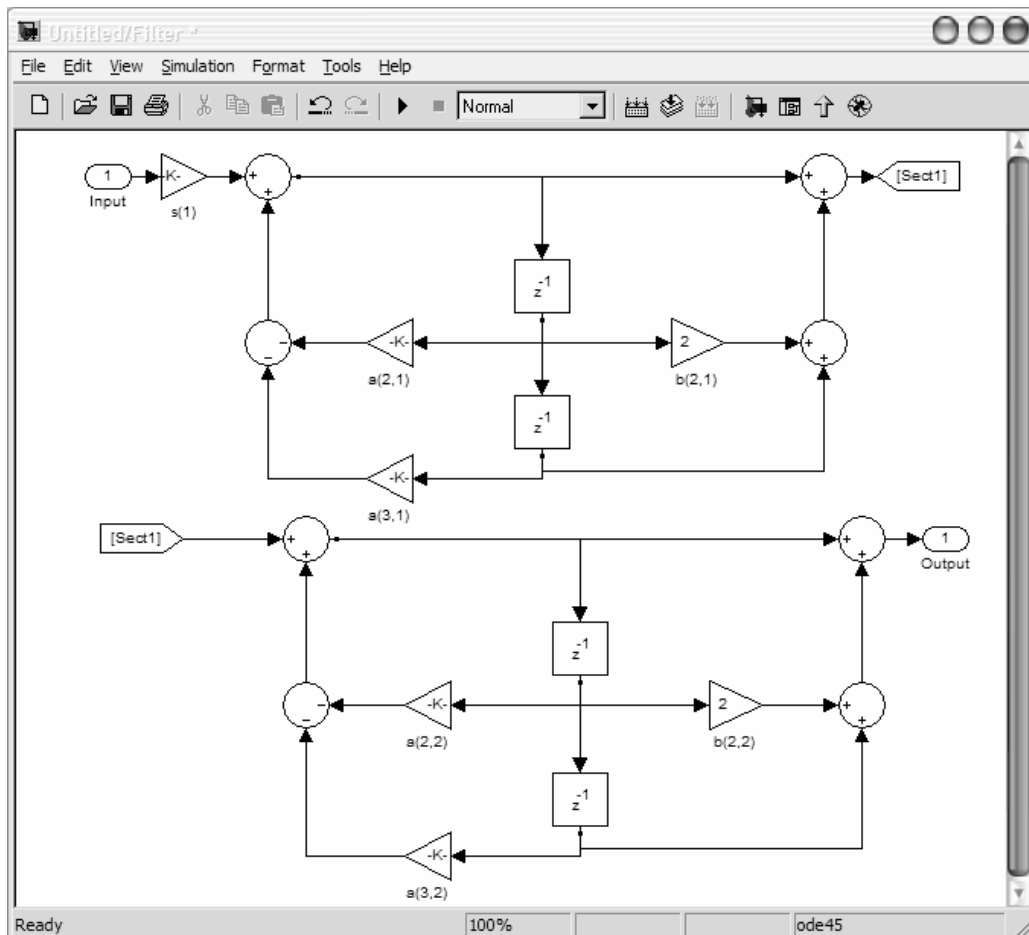


Рисунок Б.7 – Структурна схема фільтра у вікні Simulink

Необхідно також відмітити наявність можливості конвертувати форму представлення структури фільтра (пряму, канонічну, транспоновану,

каскадну і т.д.). Для цього у вікні Current Filter Information інтерфейсу fdatool через контекстне меню, що викликається натисканням правої кнопки миші, можна задати відповіді параметри командою Convert Structure (див. рисунок Б.8).

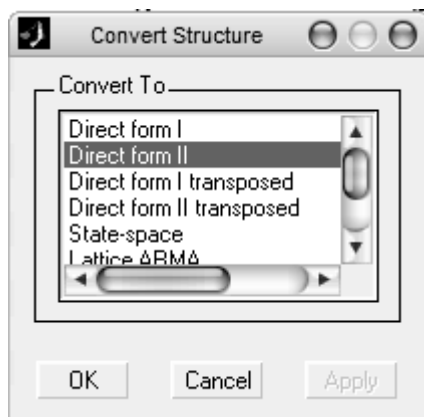


Рисунок Б.8 – Вікно вибору форми представлення структури Convert Structure

В подальшому моделювання роботи синтезованого фільтра (можливо у складі більш складної системи) здійснюється шляхом перетаскування блоків з вікон бібліотек у вікно створюваної моделі і налаштування зв'язків між ними. Після створення моделі можна запустити процес моделювання. Simulink створить систему диференціальних рівнянь, що описують модель, і почне її розв'язувати чисельним методом. Велике число засобів візуалізації дозволяють аналізувати різноманітні аспекти роботи створеної моделі як у часовій, так і частотній областях.

Б.3.2. Дослідження впливу ефектів квантування на синтезований фільтр за допомогою графічного середовища FDA Tool

Б.3.2.1. Робота в режимі Set Quantization Parameters

Для аналізу ефектів, що виникають наслідок кінцевої розрядності представлення цифрових даних і параметрів цифрових фільтрів (ефектів квантування), необхідно перейти на сторінку Set Quantization Parameters, частину вікна з параметрами якої показано на рисунку Б.9.

Як видно з цього рисунка, існує шість видів об'єктів, які піддаються квантуванню:

- Coefficient (коефіцієнти фільтру);
- Input (вхідні сигнали);
- Output (вихідні сигнали);
- Multiplicand (множники);
- Product (добутки);
- Sum (суми).

Для виконання операції квантування використовуються квантувачі перерахованих об'єктів. Таким чином, квантований фільтр є нелінійною цифровою системою, що включає:

1. Квантувач вхідного сигналу.
2. Власне фільтр з квантованими значеннями коефіцієнтів, квантувачами множників (сигналів на входах помножувачів), добутків (сигналів на виходах помножувачів) і сум (сигналів на виходах суматорів).
3. Квантувач вихідного сигналу.

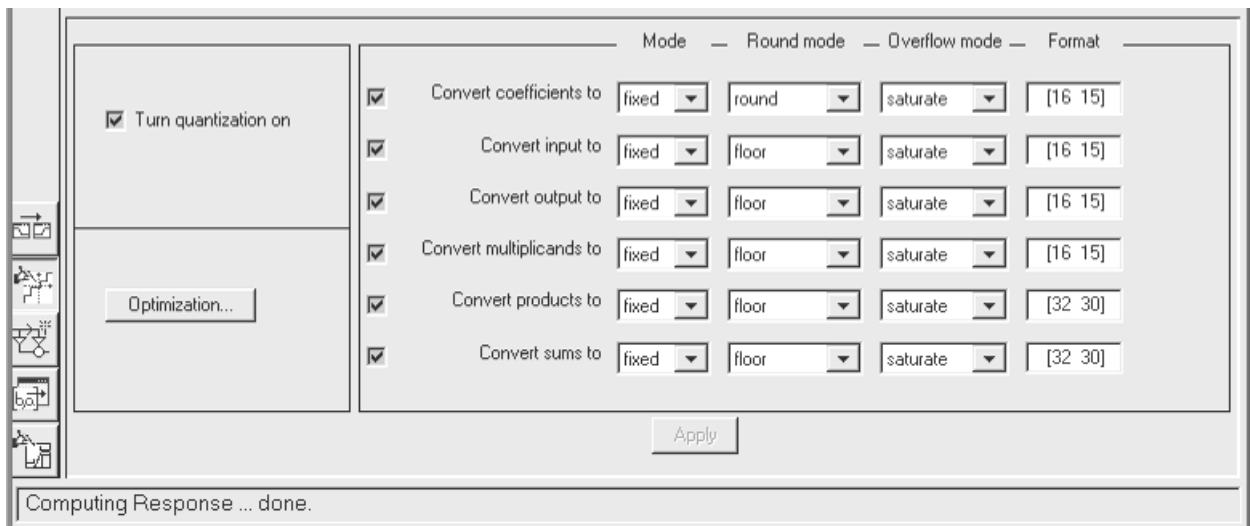


Рисунок Б.9 – Загальний вид сторінки Set Quantization Parameters

Б.3.2.2. Арифметика з фіксованою точкою: формати даних і реалізація операцій в Matlab

Вибір роботи кожного з квантувачів в режимі з фіксованою або плаваючою точкою задається значеннями параметрів колонки Mode, розташованої на сторінці Set Quantization Parameters. Для реалізації арифметики з фіксованою точкою необхідно обрати значення fixed. Двійкові числа з фіксованою точкою вимірюються в бітах довжиною слова w і довжиною дробової частини числа f . При цьому довжина дробової частини може бути задана в діапазоні від 0 до $w - 1$ біт. Загальне представлення числа у форматі з фіксованою точкою показано на рисунку Б.10.

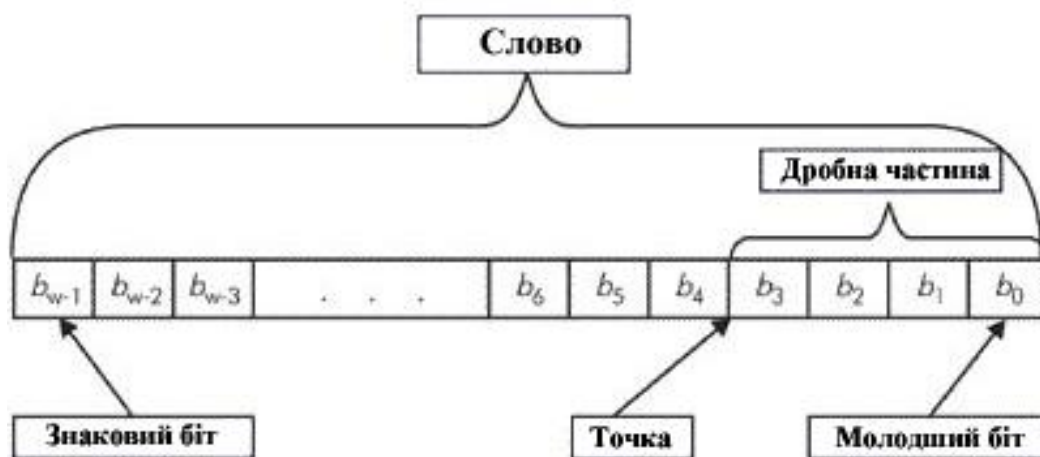


Рисунок Б.10 – Загальне представлення числа у форматі з фіксованою точкою

Користувач може задавати довжину слова до 64-х біт включно, проте побітова відповідність результатів моделювання за допомогою FDATool і реальної роботи цільового комп'ютера забезпечується, якщо довжина слова визначена в межах 53 біт. Якщо ж вибрана довжина слова знаходиться в діапазоні 54-64, то відбувається втрата значущості, тобто в молодші біти записуються нулі. У пакеті MATLAB і, зокрема, у функціях бібліотеки Filter Design, формат для чисел з фіксованою точкою задається у вигляді [w, f] в колонці format.

Числа з фіксованою точкою можуть бути беззнаковими або із знаком. У першому випадку старший біт, як і інші, використовується для представлення величини числа, тоді як в другому - для його знаку (0 відповідає знаку "плюс", 1 - знаку "мінус"). Динамічний діапазон для беззнакових чисел рівний $[0, 2^{w-f}-2^{-f}]$, а для чисел із знаком - $[-2^{w-f-1}, 2^{w-f-1}-2^{-f}]$. В обох випадках точність, тобто різниця двох найближчих чисел в даному форматі, рівна $\epsilon=2^{-f}$. У зв'язку з тим, що результатом квантування є заміна квантованої величини числом з кінцевого, обмеженого набору чисел, які називаються рівнями квантування, необхідно ввести інформацію про те, яким чином цю заміну виконувати (значення і число рівнів квантування визначаються відповідним форматом). Для цього в програмі FDATool є поле Round mode, де для кожного квантувача можна вибрати спосіб округлення. Користувач має нагоду вибрати один з наступних режимів:

- ceil - результат рівний значенню найближчого рівня квантування в напрямку плюс нескінченності;
- fix - результат рівний значенню найближчого рівня квантування в напрямку нуля;

- floor - результат рівний значенню найближчого рівня квантування в напрямку мінус нескінченності;
- round - результат рівний значенню найближчого рівня квантування; якщо квантована негативна величина лежить рівно посередині між рівнями квантування, результатом є значення найближчого рівня в напрямку мінус нескінченності (якщо квантована позитивна величина лежить рівно посередині між рівнями квантування, результатом є значення найближчого рівня квантування в напрямку плюс нескінченності);
- convergent - спосіб округлення такий же, як і round, проте, якщо квантована величина лежить рівно посередині між рівнями квантування, то округлення за правилами round виконується лише у тому випадку, коли в молодший біт після округлення записується одиниця. Коли квантуванню піддається величина, значення якої знаходиться за межами динамічного діапазону квантувача, виникає явище переповнювання.

Спосіб обробки таких величин задається в полі Overflow Mode (режим переповнювання) для кожного квантувача. Користувач може вибрати режим saturate або wrap. Режим saturate означає дозвіл роботи з насиченням: квантована величина, що лежить поза динамічним діапазоном, вважається рівною найближчому гранично допустимому числу. У разі вибору режиму wrap, старші біти квантованої величини, що лежить поза динамічним діапазоном, будуть відкинуті, і результат квантування буде представлений молодшими w-бітами, при цьому для чисел із знаком старший біт $b > w-1$ (див. рисунок Б.10).

Б.3.3. Синтез та аналіз цифрового фільтру із квантуванням параметрів за допомогою графічного середовища FDATool

З метою дослідження впливу ефектів квантування на характеристики цифрових систем розглянемо, як приклад, задачу проектування цифрового частотно-вибіркового смугового фільтру. Цей фільтр буде реалізований за рекурсивною схемою (IIR-Filter) і синтезовано із застосуванням методу білінійного перетворення та з виростанням еліптичного аналогового фільтру-прототипу (фільтру Кауера). Вимоги до параметрів фільтру задані у вигляді таблиці Б.3.

Таблиця Б.3 – Параметри фільтра, що проектується

Параметр/характеристика	Значення
Частота дискретизації	48 кГц
Смуга затримки 1	від 0 до 7,2 кГц
Смуга пропускання	від 8 до 12 кГц
Смуга затримки2	від 12,8 до 24 кГц
Мінімально допустиме послаблення в смузі затримки 1	80 дБ
Мінімально допустиме послаблення в смузі пропускання	1 дБ
Мінімально допустиме послаблення в смузі затримки 2	80 дБ
Порядок фільтра	Мінімальний для заданих вимог

Процедуру синтезу фільтра виконаємо у відповідності до рекомендацій, наведених в підрозділі Б.3.1.

Після завершення розрахунку у верхній частині вікна будуть представлені результати синтезу фільтра, відповідно до його характеристик. По замовчуванню в області відображення характеристик і параметрів спочатку виводиться АЧХ отриманого фільтра, проте, користувач може, в міру необхідності, змінювати її вміст, отримуючи, наприклад, імпульсну характеристику, полюси і нулі системної функції і т.д.

На рисунку Б.12 представлена АЧХ фільтра, синтезованого у відповідності до вимог наведених в табл.Б.3.

Зазначимо, що до цього моменту всі операції над даними в процесі розрахунку фільтра виконувалися з машинною точністю, тобто для представлення чисел використовувався формат `double`.

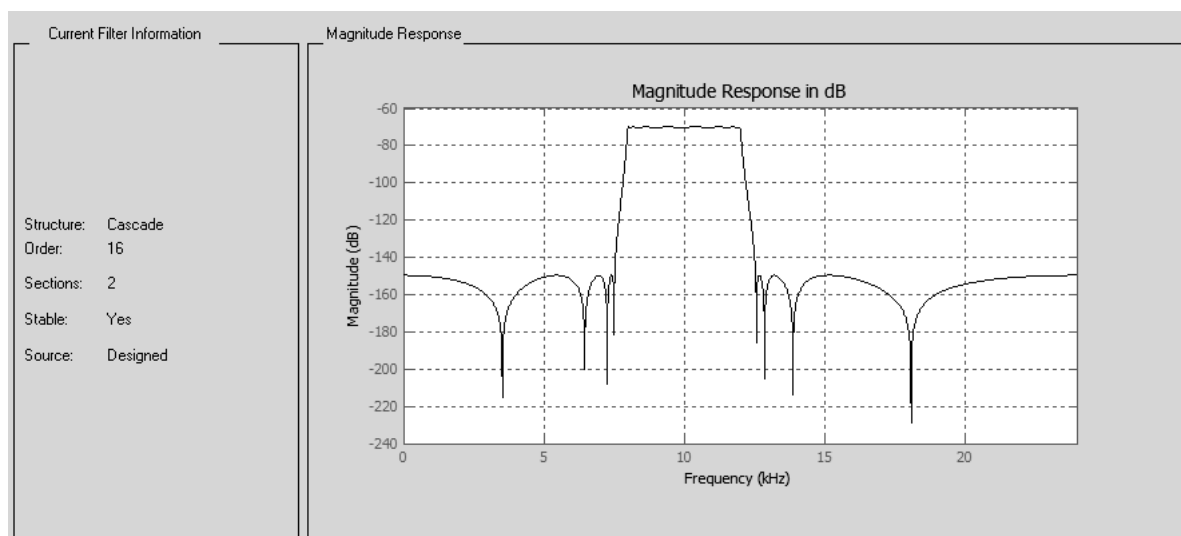


Рисунок Б.12 – АЧХ дискретного фільтра

Далі проаналізуємо, що відбудеться при зміні формату представлення чисел. Така потреба виникає, коли необхідно виконати емуляцію роботи синтезованого фільтру на базі цільового процесора, що використовує відмінні від РС формати даних. Перейшовши на закладку Set Quantization Parameters, встановимо в полі Turn quantization on прапорець, запустивши тим самим процедуру розрахунку квантованого фільтру з параметрами квантування, які задані за замовчуванням. (Також за замовчуванням розрахунок виконується для прямої форми реалізації фільтру Direct form I).

Після закінчення процедури розрахунку, АЧХ нового (квантованого) фільтру накладається на АЧХ фільтру-прототипу, розрахованого раніше. Область відображення характеристик виглядатиме так, як показано на рисунку Б.13, де АЧХ фільтру-прототипу позначена як Reference, а квантованого - як Quantized.

З графіків видно, що АЧХ фільтру, з врахуванням ефектів квантування (Quantized), істотно відрізняється від відповідної характеристики фільтру-прототипу (Reference). Збережемо одержані результати на диску, для чого відкриємо меню File і виберемо пункт Save Session As...

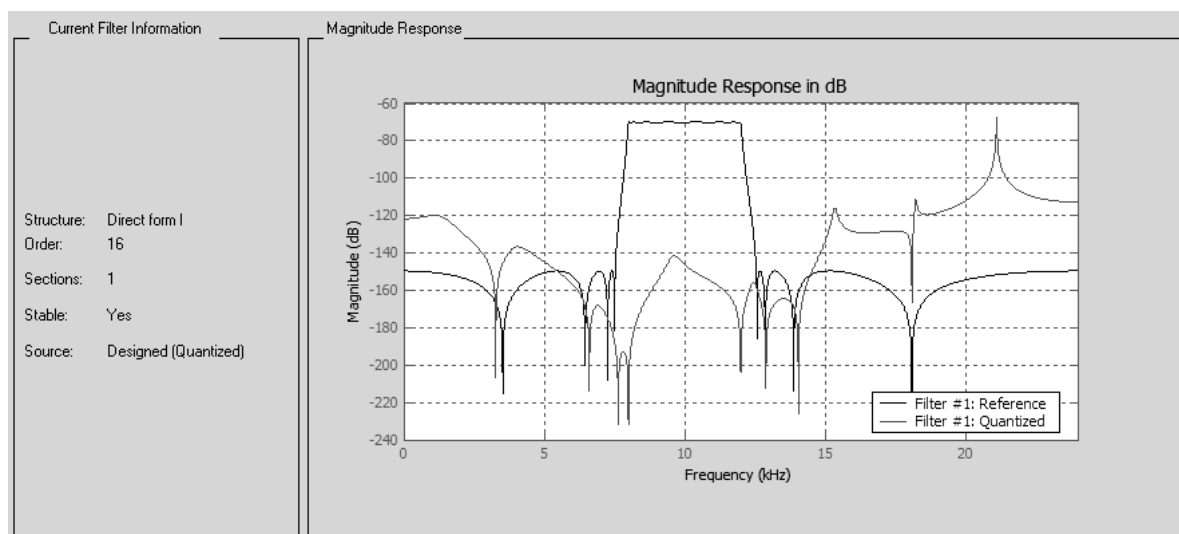


Рисунок Б.13 – АЧХ дискретного і квантованого фільтрів

Властивості квантованого фільтру в цілому залежать від параметрів кожного з квантувачів, які визначаються змістом п'яти колонок, або полів, розташованих правіше від імен об'єктів квантування (див. рисунок Б.9).

Властивості квантованого фільтру залежать також від структури або форми реалізації фільтру. Для зміни структури фільтру необхідно у полі Edit головного меню вибрати команду Convert Structure..., і у вікні, що з'являється (див. рисунок Б.8), виділити бажану структуру і натиснути ОК.

Зважаючи на основні причини, що породжують ефекти квантування, можемо констатувати, що відмінність між АЧХ фільтру-прототипу і АЧХ

квантованого фільтру (рисунок Б.13) при вибраній структурі пов'язана з установками параметрів квантування. В даному випадку були використані формати з фіксованою точкою, що відповідає значенню fixed в полі Mode і значенням [16, 15] для квантувачів Coefficient, Input, Output і Multiplicand в полі Format. Для квантувачів Product і Sum використаний формат [32, 30].

Для того, щоб порівняти коефіцієнти фільтрів, необхідно натиснути кнопку Filter Coefficients. В області відображення параметрів роздрукується наступна інформація, показана на рисунку Б.14.

```

Quantized Direct form I filter
----- Section 1 -----
Numerator
  QuantizedCoefficients{1}{1} ReferenceCoefficients{1}{1}
( 1)  0.000305175781250  0.000330315544487904
( 2) -0.001037597656250 -0.001020081231375191
( 3)  0.002563476562500  0.002580261271031563
( 4) -0.004608154296875 -0.004580740133027153
( 5)  0.007324218750000  0.007347725797754010
( 6) -0.009735107421875 -0.009715041792670203
( 7)  0.011962890625000  0.011986955602515916
( 8) -0.013122558593750 -0.013120022874790405
( 9)  0.013793945312500  0.013803049933740263
(10) -0.013122558593750 -0.013120022874790383
(11)  0.011962890625000  0.011986955602515875
(12) -0.009735107421875 -0.009715041792670145
(13)  0.007324218750000  0.007347725797753960
(14) -0.004608154296875 -0.004580740133027121
(15)  0.002563476562500  0.002580261271031531
(16) -0.001037597656250 -0.001020081231375179
(17)  0.000305175781250  0.000330315544487899
Denominator
  QuantizedCoefficients{1}{2} ReferenceCoefficients{1}{2}
+ ( 1)  0.999969482421875  1
- ( 2) -1.000000000000000 -4.0016106715603232
+ ( 3)  0.999969482421875  13.979587570568762
- ( 4) -1.000000000000000 -31.703958726815415
+ ( 5)  0.999969482421875  63.654203987428119
- ( 6) -1.000000000000000 -100.21434456606951
+ ( 7)  0.999969482421875  141.70189019442529
- ( 8) -1.000000000000000 -166.01889747992738
+ ( 9)  0.999969482421875  175.86734947768576
- (10) -1.000000000000000 -156.48177861802941
+ (11)  0.999969482421875  125.88638778867062
- (12) -1.000000000000000 -83.883343560154458
+ (13)  0.999969482421875  50.201260500070944
- (14) -1.000000000000000 -23.538510095548585
+ (15)  0.999969482421875  9.7742984716348431
- (16) -1.000000000000000 -2.6300444174960083
(17)  0.619293212890625  0.61932234850652867

FilterStructure = df1
  ScaleValues = [0.000330316]
NumberOfSections = 1
StatesPerSection = [32]
CoefficientFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16 15])
  InputFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16 15])
  OutputFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16 15])
MultiplicandFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16 15])
  ProductFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [32 30])
  SumFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [32 30])
Warning: 16 overflows in coefficients.

```

Рисунок Б.14 – Коефіцієнти системної функції фільтра

Як видно з цього рисунку, всі коефіцієнти знаменника системної функції фільтру-прототипу, за виключенням останнього, перевищують по модулю одиницю, тоді як встановлений формат для квантувача Coefficient рівний [16, 15]. Це означає, що єдиний біт, не призначений для зберігання дробової частини числа, є знаковим, тобто квантування будь-якого числа, модуль якого більше або рівний одиниці, приведе до переповнювання. Через ефект переповнювання коефіцієнти знаменника квантованого фільтру істотно відрізняються від відповідних коефіцієнтів фільтру-прототипу, що відмічене на початку кожного рядка, за винятком останнього, знаком "+" (переповнювання в напрямку плюс нескінченності) або "-" (переповнювання в напрямку мінус нескінченності).

Промасштабуємо коефіцієнти так, щоб вони по модулю не перевищували одиницю. Це необхідно для підвищення точності розрахунків при реалізації фільтрів на DSP і здійснюється вибором в меню, яке з'являється після натиснення кнопки Optimization..., відповідної команди Normalize denominator coefficients such that... Для масштабування використовуються коефіцієнти, рівні степені 2. (див. рисунок Б.15)

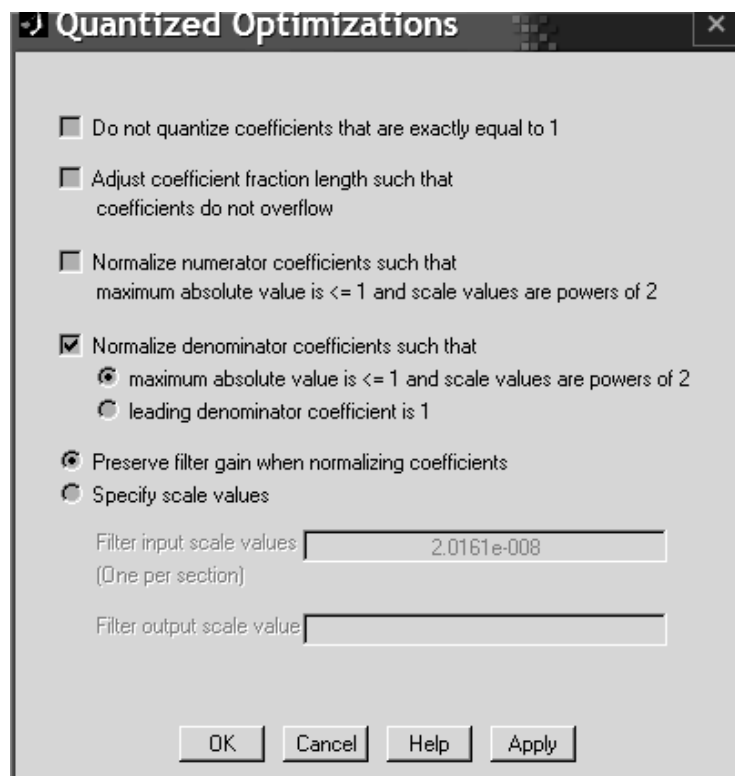


Рисунок Б.15 – Меню Quantized Optimization

АЧХ результуючого фільтру при цьому зміниться і набуде вигляду, наведеного на рисунку Б.16.

Крім спотворень АЧХ, в результаті квантування з'являються шуми, фільтр може стати нестійким, і виникнуть різні види генерації (наприклад,

генерація періодичних коливань, граничні цикли високого і низького рівнів), що в принципі ускладнює визначення АЧХ. Модуль FDATool не дозволяє вирішувати задачі арифметики розрахунку шумів, розрахунку граничних циклів, оптимізації динамічного діапазону і ряд інших. Для деяких з цих цілей в MATLAB є спеціальні функції (наприклад, `nlm`, `limitcycle` і інші). Проте, виключно важливе значення FDATool полягає у тому, що він дозволяє створювати нелінійні моделі цифрових фільтрів реальних систем, що досить точно відображають динаміку. Ці моделі і є об'єктами для вище вказаних функцій.

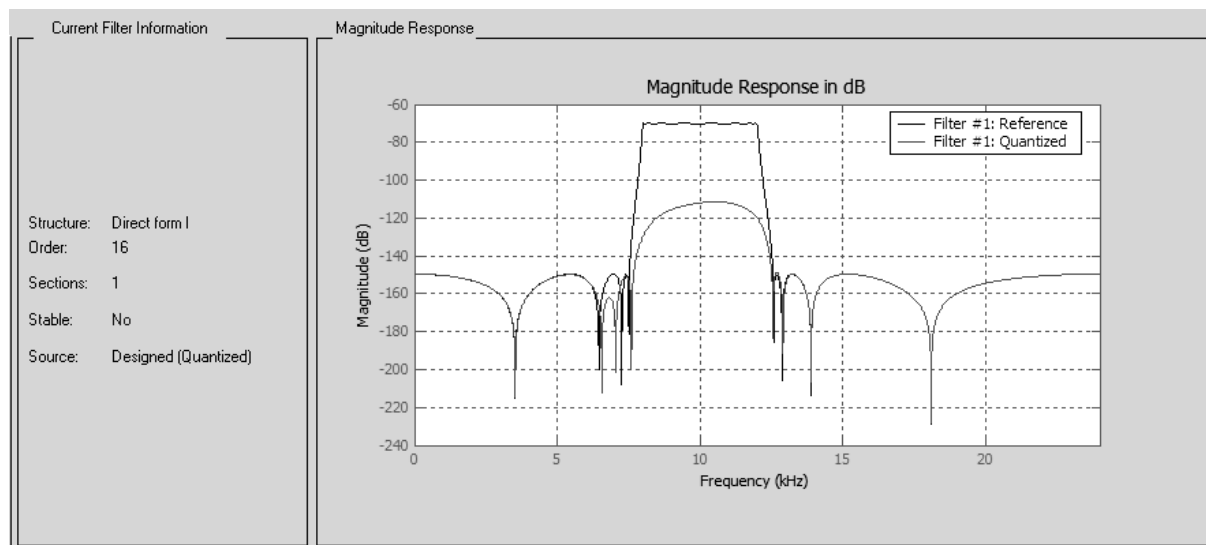


Рисунок Б.16 - АЧХ фільтрів після масштабування коефіцієнтів

Повертаючись до нашого прикладу, можемо побачити, що після масштабування, в області Current Filter Information з'явиться повідомлення "Stable: No". У тому, що фільтр нестійкий, можна також переконатися, натиснувши на кнопку Pole/Zero Plot. В результаті з'явиться карта нулів і полюсів, показана на рисунку Б.17, на якій видно, що системна функція побудованого квантованого фільтру має полюси, які лежать поза одиничним колом.

Тепер спробуємо вирішити поставлену задачу інакше, але спочатку відновимо наші результати, записані на диск. Для цього виберемо розділ Open Session меню File і відкриємо збережений файл. Далі в меню Edit виберемо команду Convert To Second-Order Section, вказавши, тим самим, що проєктований квантований фільтр повинен бути реалізований каскадно ланками другого порядку (біквдратними блоками).

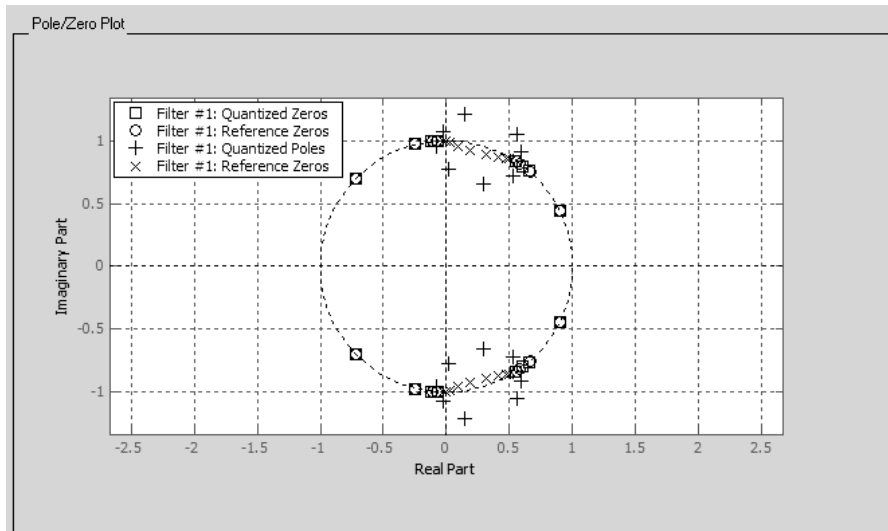


Рисунок Б.17 – Карта нулів і полюсів квантованого і неквантованого фільтрів

Після обчислень можна перекоонатися, що АЧХ фільтра-прототипу і квантованого фільтру дещо наблизились. Одержаний результат показано на рисунку Б.18.

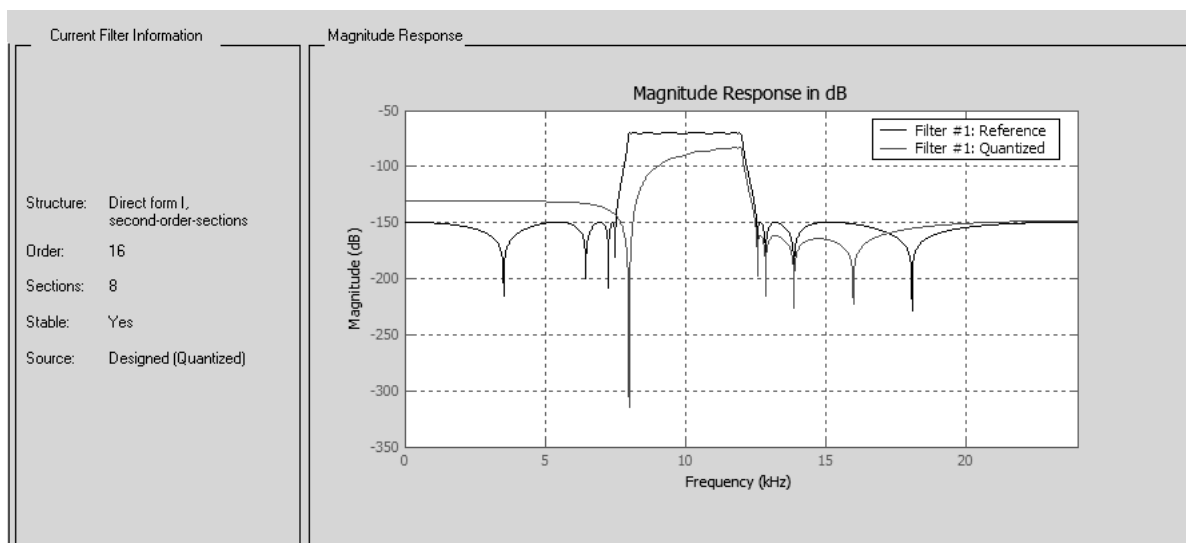


Рисунок Б.18 – АЧХ фільтру-прототипу і квантованого фільтру, реалізованого ланками другого порядку

Необхідно відмітити, що частотні характеристики фільтру, і зокрема АЧХ, наведена на рисунку Б.18, побудована по розрахованих квантованих коефіцієнтах в припущенні, що фільтр є ідеальною лінійною системою. Інакше кажучи, при розрахунку частотної характеристики враховувались лише ефекти квантування коефіцієнтів фільтру.

Для отримання реальної частотної характеристики необхідно врахувати нелінійні ефекти квантування, пов'язані з формою реалізації (структурою) фільтру і квантуванням інших параметрів, що встановлені на сторінці Set

Quantization Parameters. Щоб одержати частотну характеристику фільтру, побудовану з обліком вказаних чинників, слід виконати комплексну перевірку його роботи на основі імітаційного моделювання.

Розглянемо визначення АЧХ нелінійної системи, використовуючи одну з функцій MATLAB - `nlm` (noise loading method), яка обчислює оцінку частотної характеристики квантованого фільтру з врахуванням всіх ефектів квантування.

Функція, на основі методу Монте-Карло, виконує L випробувань, в кожному з яких моделюється проходження вхідного сигналу, що є білим шумом, через досліджуваний фільтр. За наслідками кожного випробування знаходиться оцінка частотної характеристики фільтру за спектрами вхідного і вихідного сигналів. Підсумкова оцінка частотної характеристики обчислюється усередненням оцінок частотних характеристик за всіма випробуваннями.

Для того, щоб скористатися* функцією `nlm`, експортуємо наш фільтр в робочий простір MATLAB (Work-space). Це виконується таким чином. В меню File вибрати розділ Export, у вікні, що з'явилося, вказати, куди експортувати (Workspace) і в якій формі (Objects), вказавши ім'я фільтру (наприклад, Hq1). Після цього потрібно перейти в командне вікно MATLAB і набрати команду

» `nlm(Hq1,[],50)`,

по якій буде виконано моделювання, що включає 50 випробувань. В результаті з'явиться вікно з графіками АЧХ і ФЧХ, показане на рисунку Б.20.

Відзначимо, що функцію `nlm` можна викликати, вказавши лише ім'я фільтру:

» `nlm(Hq1)`

В цьому випадку число випробувань L буде вибрано по замовчуванню ($L=10$), і отримані графіки будуть менш згладженими.

* У версії MATLAB 6.5 і старше реалізація моделювання методом Монте-Карло доступне через відповідну кнопку панелі інструментів головного меню модуля FDATool.

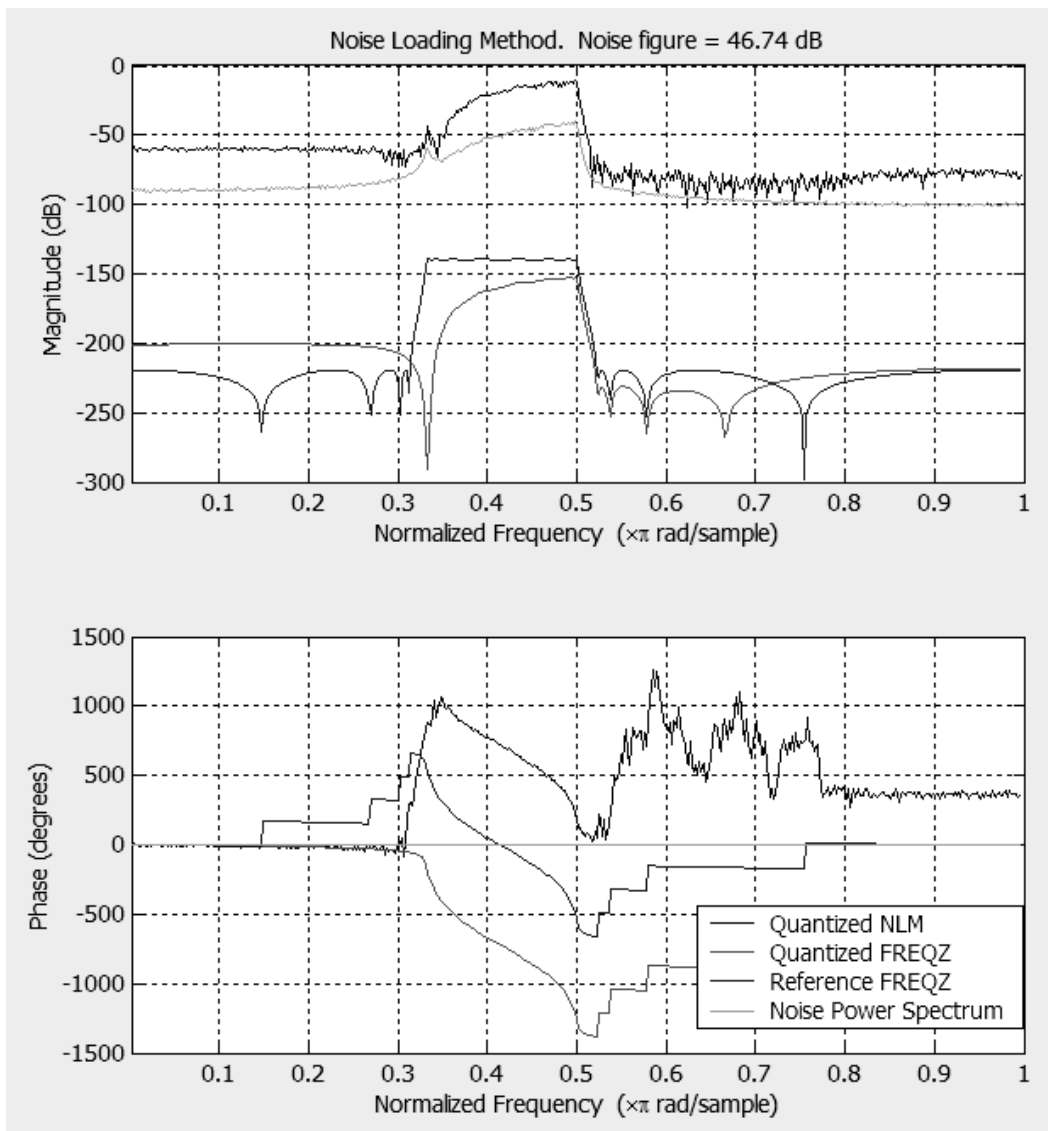


Рисунок Б.20 – Результати моделювання за допомогою функції nlm

В цілому, підсумовуючи результати наведені в підрозділах Б.3.1-Б.3.3, можна зробити загальний висновок, що графічне середовище FDATool дозволяє вирішувати ряд практично важливих і теоретично цікавих задач, пов'язаних з проектуванням цифрових фільтрів. Одна з головних переваг – це можливість досить точно моделювати різноманітні структури цифрових фільтрів в режимі нелінійних перетворень, пов'язаних з ефектами квантування, і можливість оцінювати інтегральні параметри фільтрів.

Додаткову інформацію про функціональні можливості і особливості використання модуля FDATool можна отримати із довідкової системи пакета MATLAB.

ЛІТЕРАТУРА

1. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. – М: Вильямс, 2004. – 992 с.
2. Бабак В.П., Хандлецький В.С., Шрюфер Е. Обробка сигналів: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 392 с.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2000. – 448 с.
4. Бондарев В.Н., Трестер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства: Учеб. пособие для вузов. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. – 398 с.
5. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: В 2 ч. Ч. 1. – Красноярск: Изд-во КГТУ, 2001. – 199 с.
6. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
7. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М: Техносфера, 2007. – 856 с.
8. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: -М.: Мир, 1978. – 848 с.
9. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Питер, 2007. – 751 с.
10. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – М: ВУН, 2008. – 816 с.
11. MATLAB 6/6.1/6.5+Simulink 4/5. Основы применения. Полное руководство пользователя / Дьяконов В.П. – М.: СОЛОН-Пресс. 2002. – 768 с.
12. Mathcad 8-12 для студентов. / Дьяконов В.П. – М.: СОЛОН-Пресс. 2005. – 632 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЦИФРОВОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ	4
1.1. ОСНОВИ ЦИФРОВОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТА ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ.....	4
1.1.1. Аналогові, дискретні і цифрові сигнали	4
1.1.2. Аналого-цифрове і цифро-аналогове перетворення	5
1.1.3. Частота Найквіста	6
1.1.4. Спектри аналогових і дискретних сигналів	8
1.1.5. Відновлення аналогових сигналів по дискретних відліках	10
1.1.6. Сутність лінійної дискретної обробки. Дискретний фільтр	11
1.2. МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ	13
1.2.1. Дискретне перетворення Фур'є	13
1.2.2. Однобічне Z-перетворення	16
1.3. ЦИФРОВІ ФІЛЬТРИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	20
1.3.1. Визначення та класифікація цифрових фільтрів	20
1.3.2. Системні (передатні) функції цифрових фільтрів	21
1.3.3. Основні форми реалізації структур цифрових фільтрів	22
1.3.4. Частотні характеристики фільтрів	25
1.3.5. Імпульсна характеристика цифрового фільтра	27
1.3.6. Стійкість цифрових фільтрів	28
1.3.7. Порівняльний аналіз типів цифрових фільтрів	29
1.3.8. Класифікація цифрових фільтрів за призначенням	31
1.4. ПРОЕКТУВАННЯ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ.....	35
1.4.1. Основні етапи проектування цифрових фільтрів	35
1.4.2. Класифікація методів синтезу частотно-вибіркових цифрових фільтрів	36
1.4.3. Синтез нерекурсивних КІХ-фільтрів	37
1.4.4. Синтез рекурсивних БІХ-фільтрів	42
1.5. КВАНТУВАННЯ В СИСТЕМАХ ЦИФРОВОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ	46
1.5.1. Квантування сигналів в цифрових системах	46
1.5.2. Шум аналого-цифрового перетворення	51
1.5.3. Ефекти квантування в цифрових системах	53
1.5.4. Загальний вихідний шум системи	56
1.5.5. Ефекти переповнення в суматорах	57
1.5.6. Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи	59
1.5.7. Граничні цикли роботи цифрової системи	60

Розділ 2. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ	61
Лабораторна робота №1. ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ АНАЛОГОВИХ, ДИСКРЕТНИХ І ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ ТА ЇХ СПЕКТРІВ	61
Лабораторна робота №2. МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ.....	64
Лабораторна робота №3. СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ЦИФРОВИХ FIR-ФІЛЬТРІВ.....	67
Лабораторна робота №4. СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ЦИФРОВИХ IIR-ФІЛЬТРІВ	70
Лабораторна робота №5. ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТІВ КВАНТУВАННЯ В ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРАХ	74
Додаток А. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ В СЕРЕДОВИЩІ МАТНСAD	79
Додаток Б. ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТУ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ МАТЛАВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ	89
ЛІТЕРАТУРА.....	117

Навчальне видання

Автор-укладач **Заболотній Сергій Васильович**

ЦИФРОВЕ ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ
ПОСІБНИК
для студентів напряму підготовки
6.050901 "Радіотехніка"
усіх форм навчання

В авторській редакції

Технічне редагування *Костенко Т.В.*

Дизайн обкладинки *Трохименко Н.К.*

Гарн. Times New Roman. Обл.-вид. арк. 6,54. Зам. № 10-е232.

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.
Надруковано в редакційно-видавничому центрі ЧДТУ
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006.